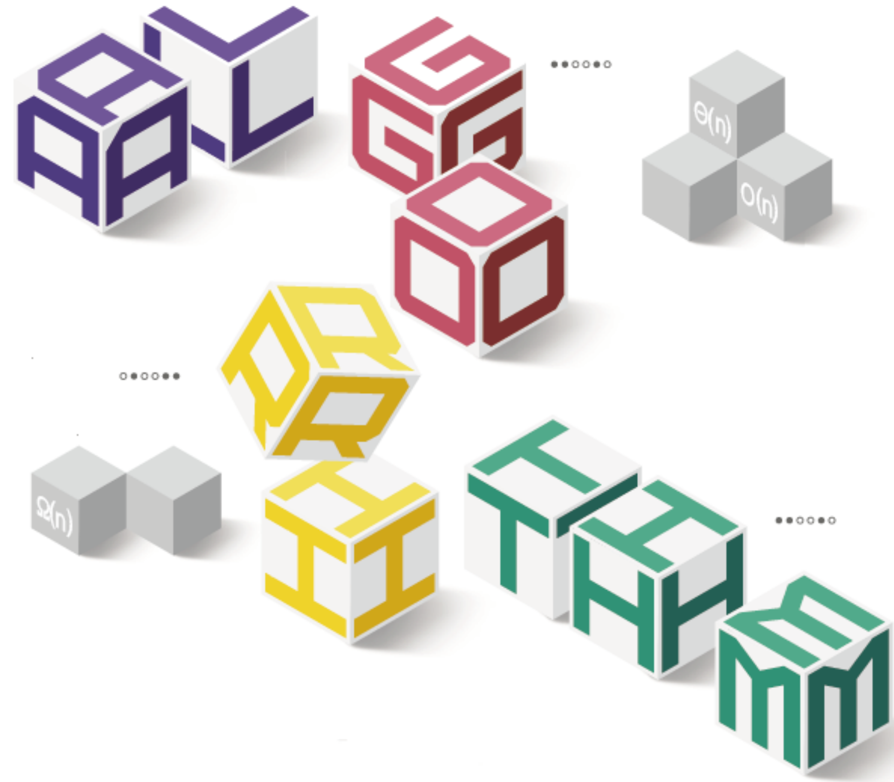


관계 중심의 사고법

쉽게 배우는 알고리즘

11장. 그리디 알고리즘

11장. 그리디Greedy 알고리즘

그리디 알고리즘

- 눈앞의 이익만 취하고 보는 알고리즘
- 현재 시점에 가장 이득이 되어 보이는 해를 선택하는 행위를 반복한다
- 대부분 최적해와의 거리가 멀다
- 드물게 최적해가 보장되는 경우도 있다

do {

우선 가장 **좋아 보이는** 선택을 한다

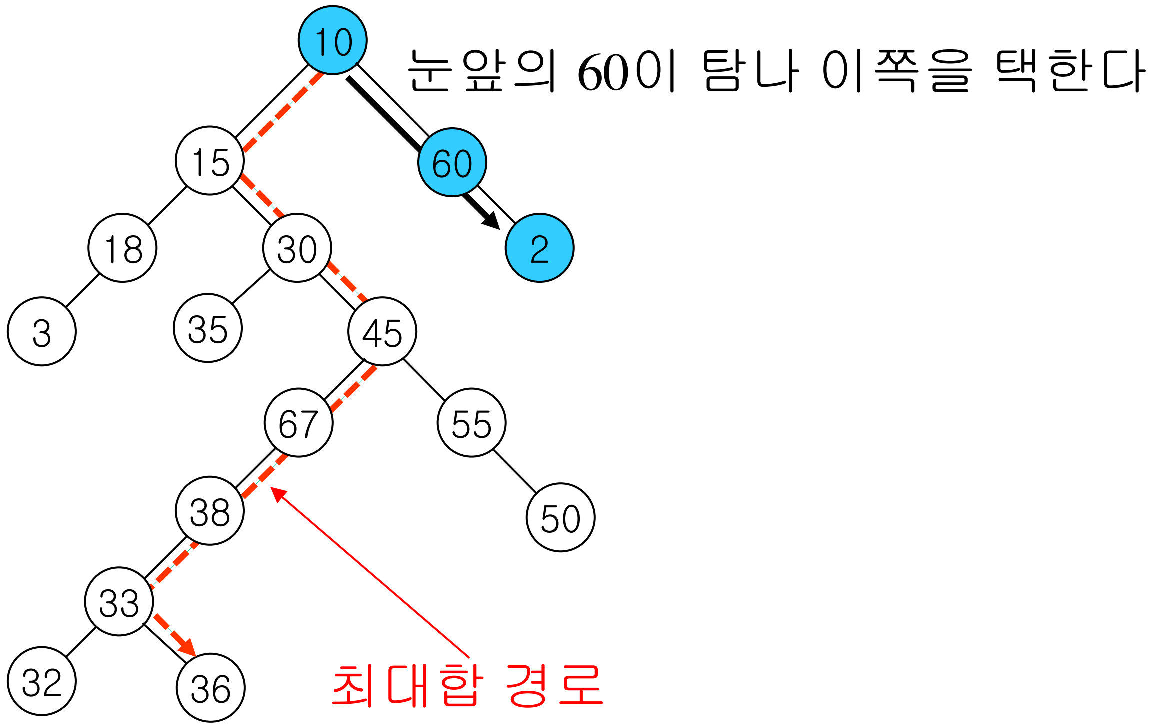
} **until** (해 구성 완료)

그리디 알고리즘의 전형적 구조

```
Greedy(C)
// C: 원소들의 총집합
{
        S ← Ø;
        while (C ≠ Ø and S는 아직 온전한 해가 아님) {
                x ← C에서 가장 좋아 보이는 원소;
                C ← C-{x};    //집합 C에서 x 제거
                if (S에 x를 더해도 되나?) then S ← S U{x};
        }
        if (S가 온전한 해임) then return S;
                        else return "no solution!";
}
```

그리디 알고리즘으로 최적해가 보장되지 않는 예

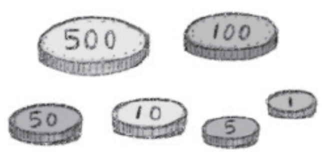
Root만 알려주고 이진 트리의 최대합 경로 찾기



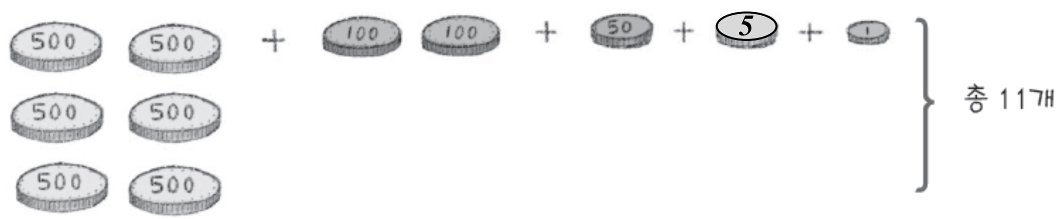
그리디 알고리즘으로 최적해가 보장되지 않는 예 2

동전 바꾸기

동전의 액면



3,256원 만들기

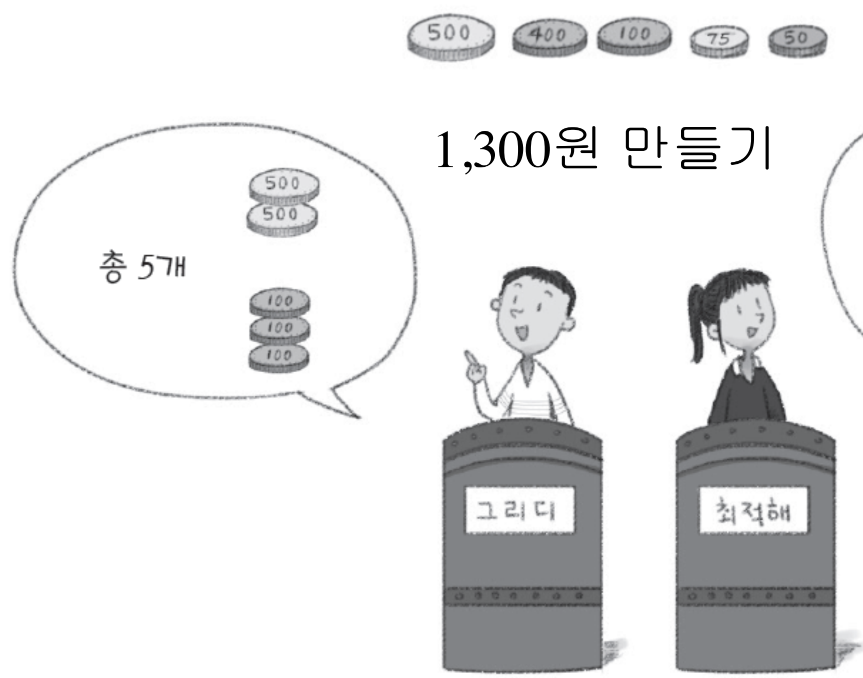


이렇게 동전의 액면이 모두 바로 아래 액면의 배수가 되면
그리디 알고리즘으로 최적해가 보장된다

액면이 바로 아래 액면의 배수가 되지 않으면 그리디
알고리즘으로 최적해가 보장되지 않는다.

예: 다음 페이지

액면이 바로 아래 액면의 배수가 되지 않으면 그리디 알고리즘으로 최적해가 보장되지 않는다



그리디 알고리즘이 최적해를 보장하는 예

최소 신장 트리 찾기를 위한
프림 알고리즘과 크루스칼 알고리즘

Prim (G, r)
{
    $S \leftarrow \Phi$;
    정점 r을 방문되었다고 표시하고, 집합 S에 포함시킨다;
    while ($S \neq V$) {
        S에서 V-S를 연결하는 간선들 중 최소길이의 간선 (x, y) 를 찾는다; ▷ ($x \in S$, $y \in V$-S)
        정점 y를 방문되었다고 표시하고, 집합 S에 포함시킨다;
    }
}

greedy한 부분

그리디 알고리즘이 최적해를 보장하는 예 2

회의실 배정 문제

- 회의실 1개
- 여러 부서에서 회의실 사용 요청
  - 회의 시작 시간과 종료 시간을 명시해서 신청

- Greedy한 아이디어들
  - 소요 시간이 가장 짧은 회의순 배정
  - 시작 시간이 가장 이른 회의순 배정
  - 종료 시간이 가장 이른 회의순 배정

이것만이 최적해를 보장한다

증명 확인할 것

매트로이드Matroid

그리디 알고리즘으로 최적해가
보장되는 수학적 구조

- 매트로이드 구조를 가지면 그리디 알고리즘으로 최적해가 보장된다

[정의] 매트로이드

유한 집합 S의 부분 집합들의 집합인 I(즉, $I \subseteq 2^S$)가 다음 성질을 만족하면 매트로이드라 한다.

1. $A \in I$이고 $B \subseteq A$이면 $B \in I$이다 (상속성)
2. $A, B \in I$이고 $|A| < |B|$이면 $A \cup \{x\} \in I$인 $x \in B - A$가 존재한다
(증강성 또는 교환성)

Simple Example 1

$S = \{a, b, c, d\}, \qquad I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

I는 원소 1개 이하로 구성된 모든 부분 집합들의 집합

I는 매트로이드인가?

1. 상속성: Okay!
2. 증강성: Okay! $\longleftarrow$ $|\emptyset| < |\{b\}|$

I는 매트로이드이다

Simple Example 2

$S = \{a, b, c, d\}$

$I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

I는 원소 2개 이하로 구성된 모든 부분 집합들의 집합

I는 매트로이드인가?

1. 상속성: Okay!
2. 증강성: Okay!

I는 매트로이드이다

Simple Example 3

$S = \{a, b, c, d\}$

$I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}\}$

I는 원소 2개 이하로 구성된 모든 부분 집합들 중 $\{b,c\}, \{b,d\}$만 빠진 것

I는 매트로이드인가?

1. 상속성: Okay!
2. 증강성: Not Okay! ← $|\{b\}| < |\{c, d\}|$

I는 매트로이드가 아니다

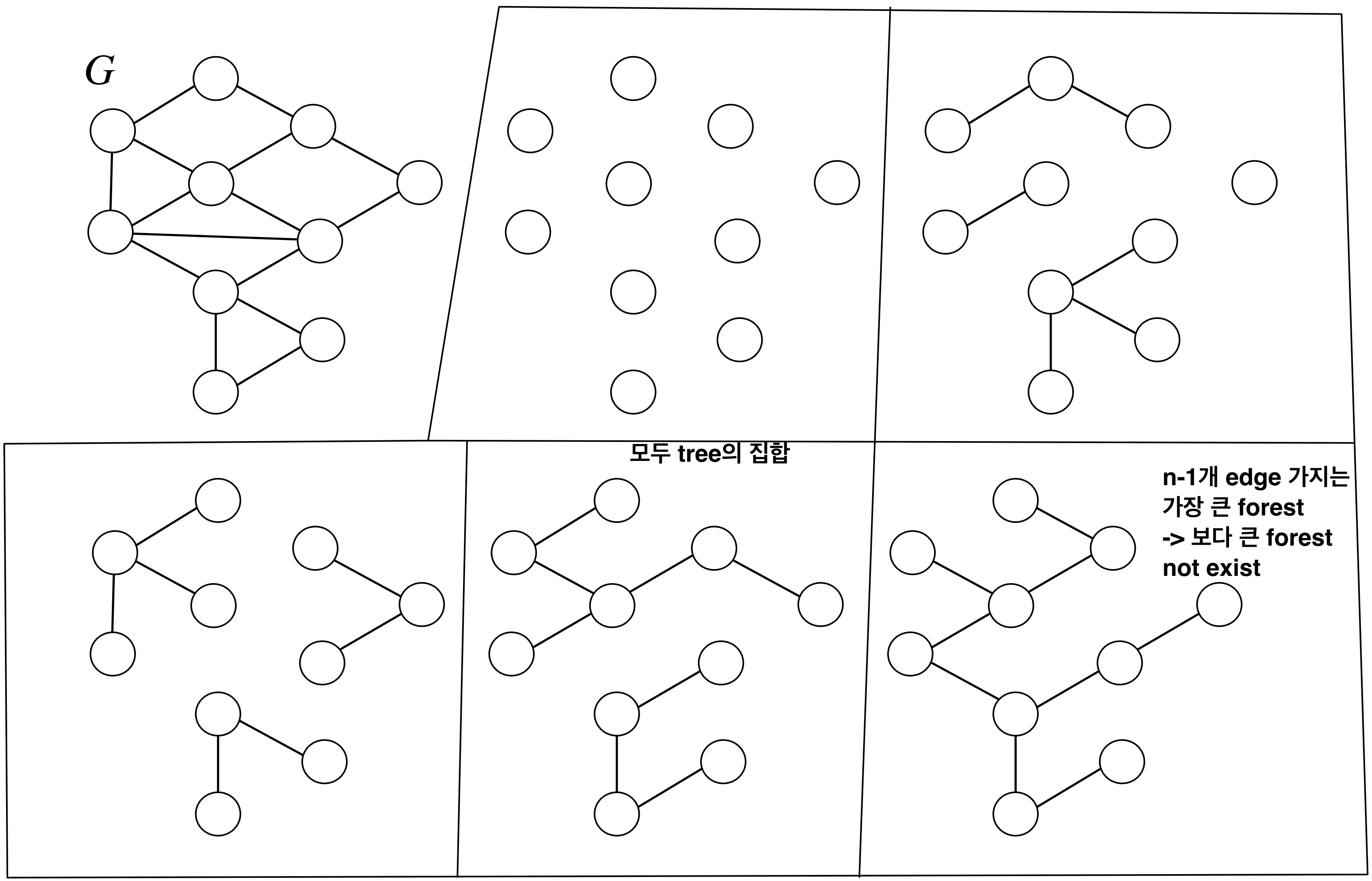
그래픽 매트로이드Graphic Matroid

숲forest의 집합은 매트로이드이다

- 숲forest
  - 하나 이상의 트리들로 이루어진 집합
  - 또는, 사이클을 이루지 않은 간선들의 집합

- 숲 집합 $F \subseteq 2^E$ 은 매트로이드이다

숲의 예들



[정리] 그래픽 매트로이드

그래프 $G = (V,E)$의 숲 집합 $F \subseteq 2^E$ 는 매트로이드이다

<Proof>

(1) (상속성) 임의의 숲의 부분 집합도 당연히 숲이다.

(2) (증강성)

|A|<|B|인 두 숲 A, B를 생각하자.
A는 적어도 2개 이상의 분리된 트리로 구성된다.

A에 속하는 임의의 트리 하나를 T라 하자.
T의 정점들에 대해, 이들을 연결하는 간선 수는 B가 A보다 많을 수 없다 (그렇지 않으면 B가 사이클을 가진다).
A의 다른 모든 트리에 대해서도 마찬가지다.

B가 A보다 간선수가 많으므로 B에는 A의 서로 다른 트리를 연결하는 간선이 적어도 하나 이상 존재하게 된다.
이 간선들 중 하나를 A에 더하면 사이클을 만들지 않아 역시 숲이 된다.

매트로이드의 확장

[정의] 확장

매트로이드 $I \subseteq 2^S$와 $A \in I$에서

A에 속하지 않는 어떤 원소 $x \in S$에 대하여 $A \cup \{x\} \in I$ 이면
x가 A를 확장한다extend고 한다.

A가 더 이상 확장되지 않으면 A를 포화 집합maximal set이라 한다.

[정리] 확장

매트로이드 $I \subseteq 2^S$의 모든 포화 집합은 같은 크기를 가진다.

<증명> 매트로이드 성질 2(증강성)에 의해 trivial!

예: 숲 집합 $F \subseteq 2^E$의 포화 집합은 트리로 모두 <u>|V|-1</u>의 크기를 갖는다
(간선 수 |V|-1)

가중치 매트로이드

- 매트로이드 I의 원집합 S의 원소들이 (양의) 가중치를 갖고 있을 때 원소들의 합을 최대화하는 부분 집합 $A \in I$를 찾고자 한다
- 아래 그리디 알고리즘으로 최적해가 보장된다. [정리 11-5]

Greedy(I, w[])
// I : 매트로이드, w[]: 가중치 배열
{
    $A = \emptyset$;
    S의 원소들을 의 가중치 크기로 내림차순으로 정렬한다;
    for each $x \in S$ (가중치 내림차순으로)
        if $(A \cup \{x\} \in I)$ **then** $A \leftarrow A \cup \{x\}$;
    return A;
}

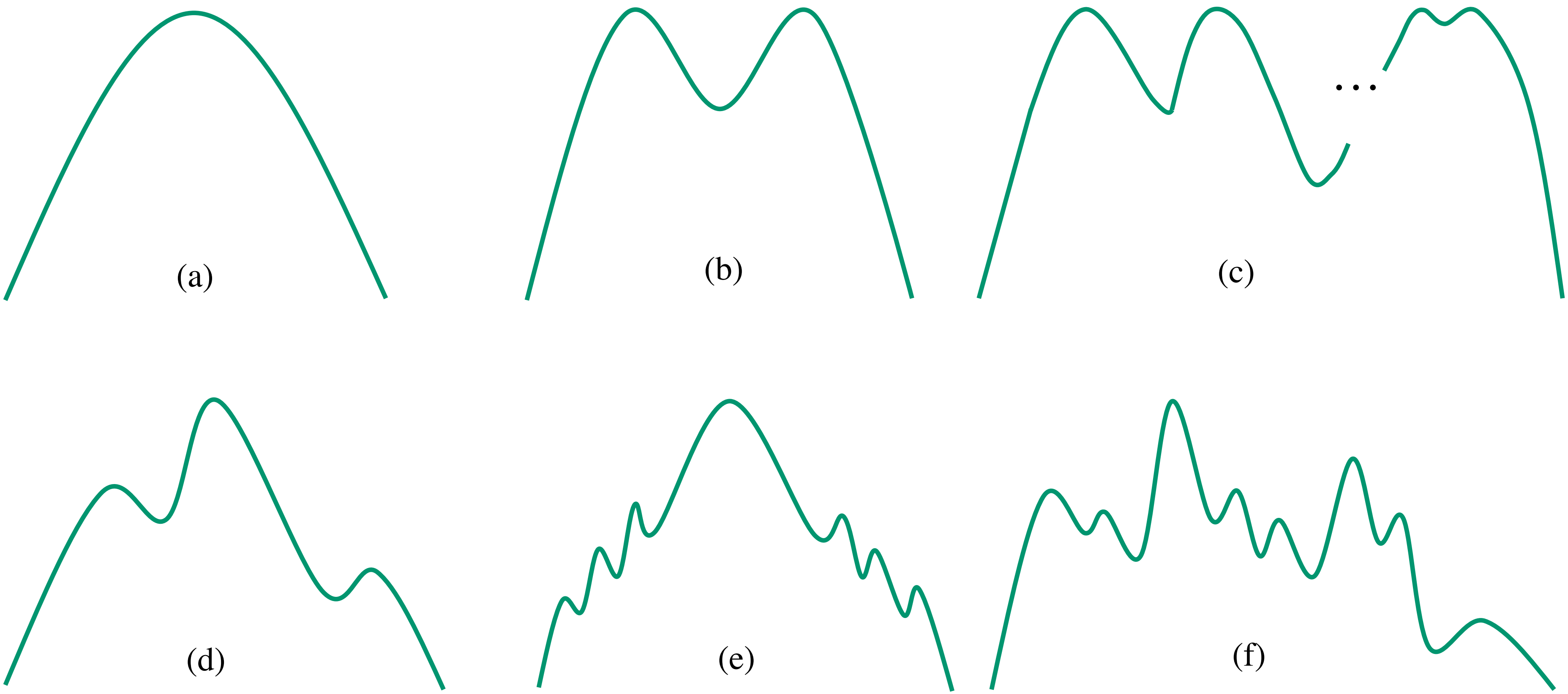
앞의 알고리즘이 최적해를 보장한다는 사실의 증명

앞의 알고리즘이 최적이 아닌 해를 도출했다고 가정

→ 이것이 모순이 됨을 증명

아래 중 가능한 공간의 모양은?
(가중치 매트로이드에서)

✓ (a)만 가능하다!



재미있는 성질

- 가중치 매트로이드에서 서로 다른(품질은 같으나 내용물은 다른) 최적해가 2개 이상 존재하면 그들의 원소 가중치 집합은 반드시 동일하다

- 가중치 매트로이드의 문제 공간에서는 단 하나의 봉우리만 존재하고 거기에 1개 또는 그 이상의 최적해가 존재한다 (이동 연산자와 관련이 있지만 직관적 이해를 위해 skip)