String Matching

String Matching

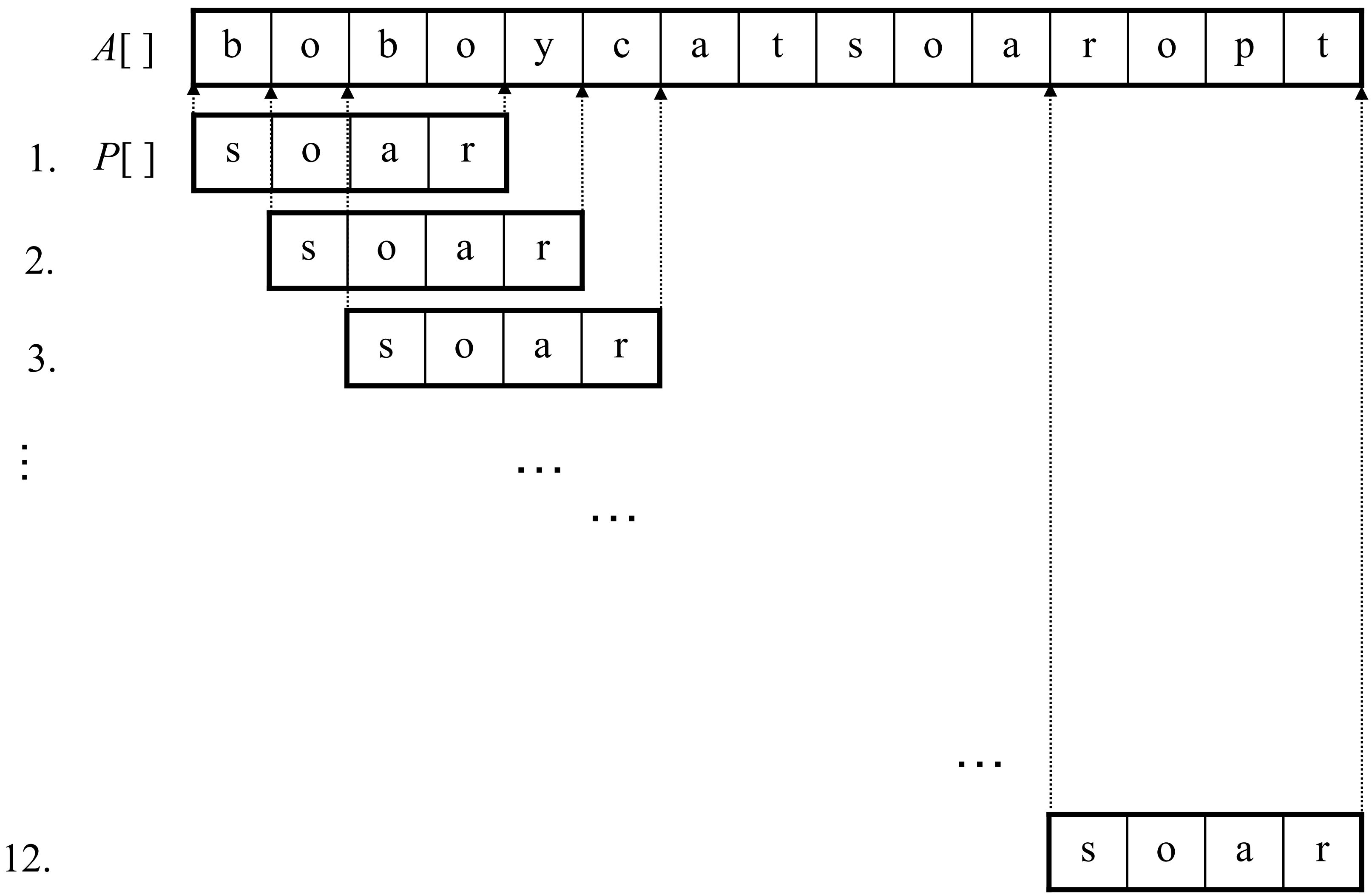
- 입력
  - $A[1\ldots n]$: 텍스트 문자열
  - $P[1\ldots m]$: 패턴 문자열
  - $m << n$
- 수행 작업
  - 텍스트 문자열 $A[1\ldots n]$가 패턴 문자열 $P[1\ldots m]$을 포함하는지 알아본다

원시적인 매칭

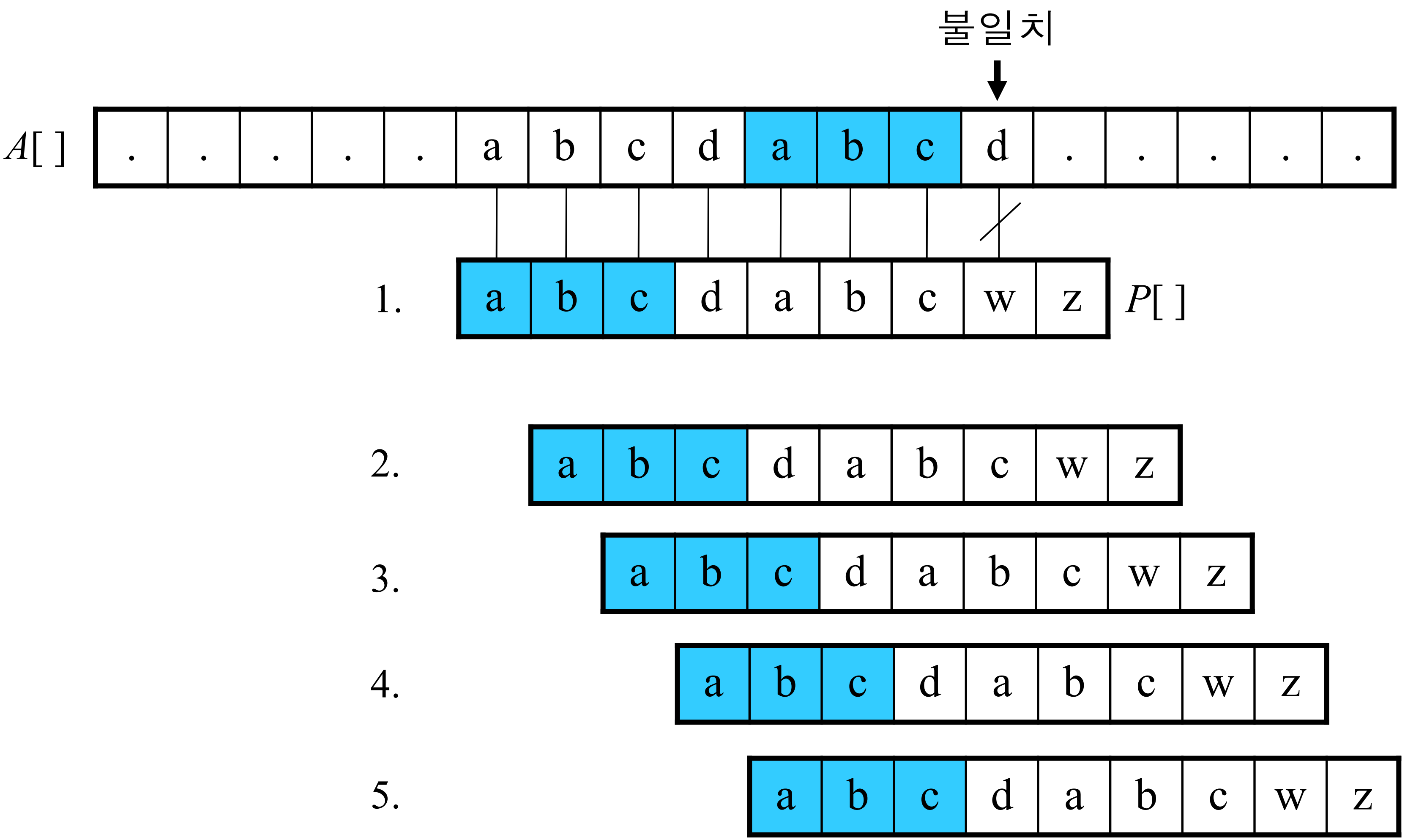
```
naiveMatching(A[ ], P[ ])
{
    ▷ n: 배열 A[ ]의 길이, m: 배열 P[ ]의 길이
    for i ← 1 to n-m+1 {
            if (P[1…m] = A[i…i+m-1]) then
                    A[i] 자리에서 매칭이 발견되었음을 알린다;
    }
}
```

✓ 수행시간: $O(mn)$

원시적인 매칭의 작동 원리



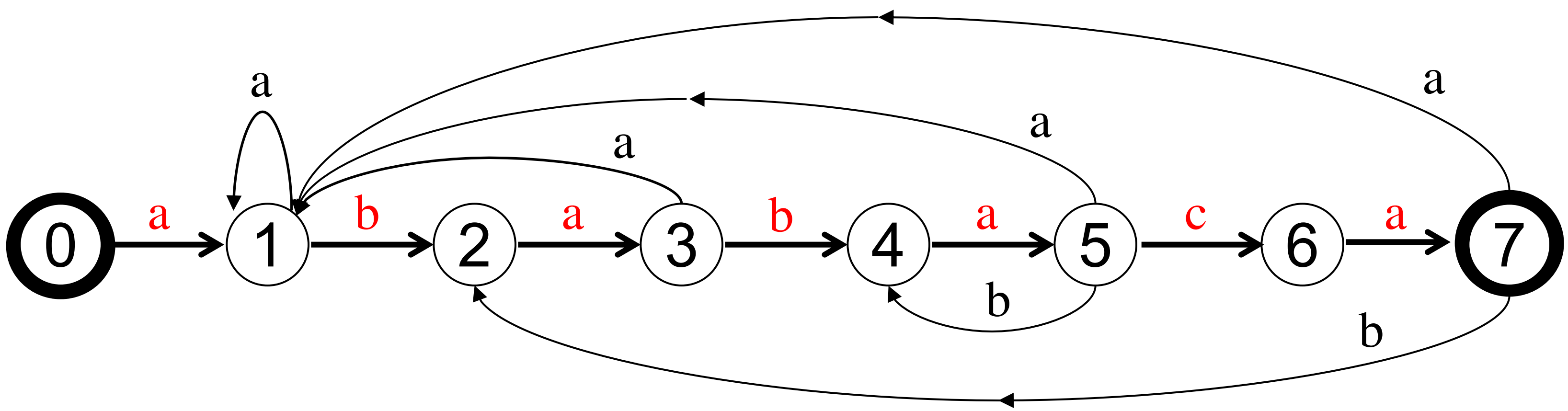
원시적인 매칭이 비효율적인 예



오토마타를 이용한 매칭

- 오토마타
  - 문제 해결 절차를 상태state의 전이로 나타낸 것
  - 구성 요소: $(Q, q_0, A, \sum, \delta)$
    - Q : 상태 집합
    - q_0 : 시작 상태
    - A : 목표 상태들의 집합
    - $\sum$: 입력 알파벳
    - δ : 상태 전이 함수
- 매칭이 진행된 상태들간의 관계를 오토마타로 표현한다

ababaca를 체크하는 오토마타



S: dvganbbactababaababacabababacaagbk…

오토마타의 S/W 구현

상태 \ 입력문자	a	b	c	d	e	…	z
0	1	0	0	0	0	…	0
1	1	2	0	0	0	…	0
2	3	0	0	0	0	…	0
3	1	4	0	0	0	…	0
4	5	0	0	0	0	…	0
5	1	4	6	0	0	…	0
6	7	0	0	0	0	…	0
7	1	2	0	0	0	…	0

상태 \ 입력문자	a	b	c	기타
0	1	0	0	0
1	1	2	0	0
2	3	0	0	0
3	1	4	0	0
4	5	0	0	0
5	1	4	6	0
6	7	0	0	0
7	1	2	0	0

오토마타 만들기

FA-Generater (P[ ], Σ)
▷ $P[1\ldots m]$: 패턴
{
    for $q \leftarrow 0$ **to** m {
        for each $a \in \Sigma$ {
            $k \leftarrow \min(m+1, q+2)$;
            repeat k-- ;
            until ($P[1\ldots k]$가 $P[1\ldots q]\cdot a$의 suffix)   ▷ $x \cdot a = xa$
            $\delta(q, a) \leftarrow k$;
        }
}

✓ 수행시간: $\Theta(|\Sigma| m)$: 좀 영리한 아이디어 필요(뒤의 KMP와 관련)

서로 다른 원소들의 총 수

오토마타를 이용해 매칭을 체크하는 알고리즘

FA-Matcher (A, δ , f)
▷ f: 목표 상태
{
    ▷ n: 배열 A[ ]의 길이
    $q \leftarrow 0$;
    for $i \leftarrow 1$ **to** n {
        $q \leftarrow \delta(q, A[i])$;
        if ($q = f$) **then** $A[i\text{-}m+1]$에서 매칭이 발생했음을 알린다;
    }
}

✓ 수행시간: $\Theta(n)$

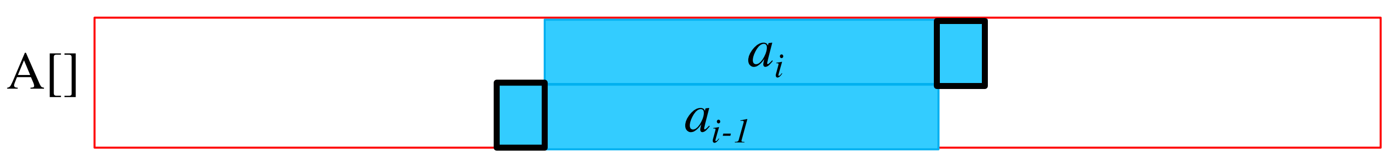
✓ 총 수행시간: $\Theta(n + |\Sigma|m)$

라빈-카프Rabin-Karp 알고리즘

- 문자열 패턴을 수치로 바꾸어 문자열의 비교를 수치 비교로 대신한다
- 수치화
  - 가능한 문자 집합 Σ의 크기에 따라 진수가 결정된다
  - 예: $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$
    - $|\Sigma| = 5$
    - a, b, c, d, e를 각각 0, 1, 2, 3, 4에 대응시킨다
    - 문자열 "cad"를 수치화하면 $2*5^2+0*5^1+3*5^0 = 28$

수치화 작업의 부담

- $A[i...i+m\text{-}1]$에 대응되는 수치의 계산
  - $a_i = A[i+m\text{-}1] + d(A[i+m\text{-}2] + d(A[i+m\text{-}3] + d(\ldots + d(A[i]))\ldots)$
  - $\Theta(m)$의 시간이 든다
  - 그러므로 $A[1\ldots n]$ 전체에 대한 비교는 $\Theta(mn)$이 소요된다
  - 원시적인 매칭에 비해 나은 게 없다
- 다행히,
  m의 크기에 상관없이 아래와 같이 계산할 수 있다
  - $a_i = d(a_{i\text{-}1} - d^{m\text{-}1}A[i\text{-}1]) + A[i+m\text{-}1]$
  - $d^{m\text{-}1}$은 반복 사용되므로 미리 한번만 계산해 두면 된다
  - 곱셈 2회, 덧셈 2회로 충분



수치화를 이용한 매칭의 예

$P[\ ]$

e	e	a	a	b

$p = 4*5^4 + 4*5^3 + 0*5^2 + 0*5^1 + 1 = 3001$

$A[\ ]$

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_1 = 0*5^4+2*5^3+4*5^2+1*5^1+1 = 356$

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_2 = 5(a_1-0*5^4)+2 = 1782$

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_3 = 5(a_2-2*5^4)+4 = 2664$

...

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_7 = 5(a_6-2*5^4)+1 = 3001$

...

수치화를 이용해 매칭을 체크하는 알고리즘

```
basicRabinKarp(A[ ], P[ ], d, q)
{
    ▷ n : 배열 A[ ]의 길이, m : 배열 P[ ]의 길이
    p ← 0; a_1 ← 0;
    for i ← 1 to m {            ▷ a_1 계산
        p ← dp + P[i];
        a_1 ← da_1 + A[i];
    }
    for i ← 1 to n-m+1 {
        if (i ≠ 1) then a_i ← d(a_{i-1} – d^{m-1}A[i-1]) + A[i+m-1];
        if (p = a_i) then A[i] 자리에서 매칭이 되었음을 알린다;
    }
}
```

✓ 총 수행시간: $\Theta(n)$

앞의 알고리즘의 문제점

- 문자 집합 Σ와 m의 크기에 따라 a_i가 매우 커질 수 있다
  - 심하면 computer word의 용량 초과
  - overflow 발생
- 해결책
  - 나머지 연산modulo을 사용하여 a_i의 크기를 제한한다
  - $a_i = d(a_{i-1} - d^{m-1}A[i-1]) + A[i+m-1]$ 대신

    $b_i = (d(b_{i-1} - (d^{m-1} \bmod q)\, A[i-1]) + A[i+m-1])$ mod q 사용
  - q를 충분히 큰 소수로 잡되, dq가 레지스터에 수용될 수 있도록 잡는다
    - $b_i = (d(b_{i-1} - (d^{m-1} \bmod q)\, A[i-1]) + A[i+m-1]) \bmod q$ (최대 크기 < dqq)

      $= (d(b_{i-1} - ((d^{m-1} \bmod q)\, A[i-1]$ mod $q$$)) + A[i+m-1]) \bmod q$ (최대 크기 < dq)
    - dq가 computer word에 수용될 수 있도록 잡는다.

A[i-1]가 q보다 큰 경우 그렇게 많지 않기에
이런 과정이 굳이 필요하지는 않다. 그냥 dqq 정도로 만족해도 ok

나머지 연산을 이용한 매칭의 예

P[ ]

e	e	a	a	b

$p = (4*5^4 + 4*5^3 + 0*5^2 + 0*5^1 + 1) \bmod 113 = 63$

A[ ]

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_1 = (0*5^4+2*5^3+4*5^2+1*5^1+1) \bmod 113 = 17$

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_2 = (5(a_1-0*(5^4 \bmod 113))+2) \bmod 113 = 87$

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_3 = (5(a_2-2*(5^4 \bmod 113))+4) \bmod 113 = 65$

. . .

a	c	e	b	b	c	e	e	a	a	b	c	e	e	d	b

$a_7 = (5(a_6-2*(5^4 \bmod 113))+1) \bmod 113 = 63$

. . .

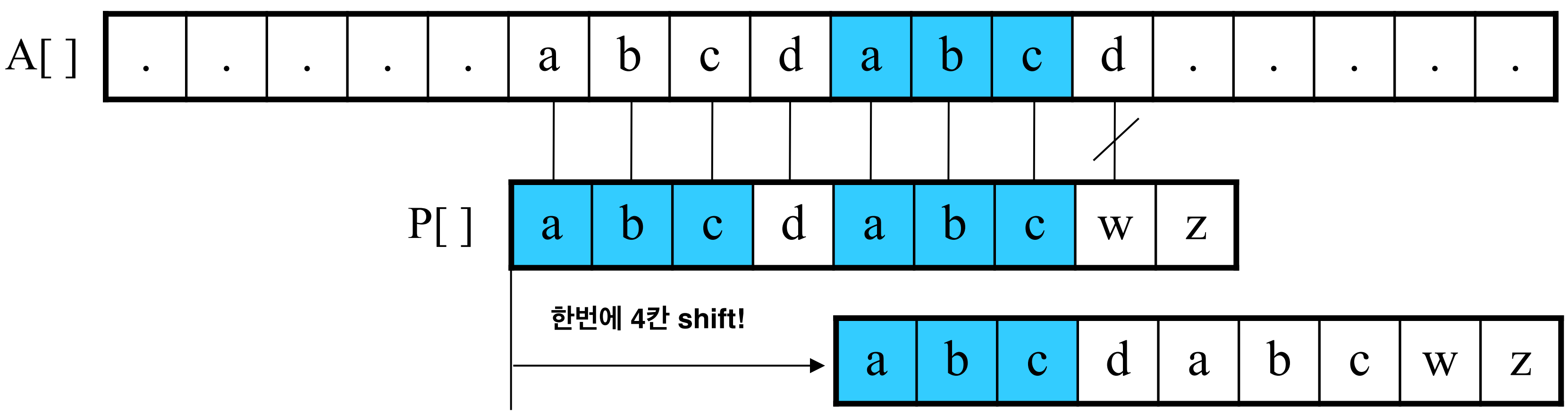
라빈-카프 알고리즘

RabinKarp(A[ ], P[ ], d, q)
{
 ▷ n : 배열 A[ ]의 길이, m : 배열 P[ ]의 길이
 $p \leftarrow 0$; $b_1 \leftarrow 0$;
 for $i \leftarrow 1$ **to** m { ▷ b_1 계산
  $p \leftarrow (dp + P[i]) \bmod q$;
  $b_1 \leftarrow (db_1 + A[i]) \bmod q$;
 }
 $h \leftarrow d^{m-1} \bmod q$;
 for $i \leftarrow 1$ **to** n-m+1 {
  if ($i \neq 1$) **then** $b_i \leftarrow (d((b_{i-1} - hA[i-1]) \bmod q) + A[i+m-1]) \bmod q$;
  if ($p = b_i$) **then**
   if ($P[1\ldots m] = A[i\ldots i+m-1]$) **then**
    $A[i]$ 자리에서 매칭이 되었음을 알린다;
 }
}

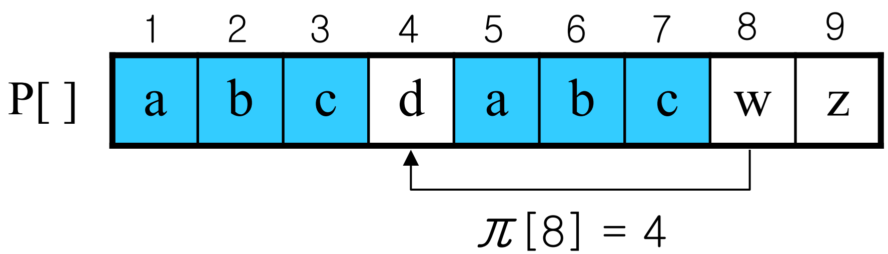
✓ 평균 수행시간: $\Theta(n)$

KMP Knuth-Morris-Pratt 알고리즘

- 오토마타를 이용한 매칭과 동기가 유사
- 공통점
  - 매칭에 실패했을 때 돌아갈 상태를 준비해둔다
  - 오토마타를 이용한 매칭보다 준비 작업이 단순하다

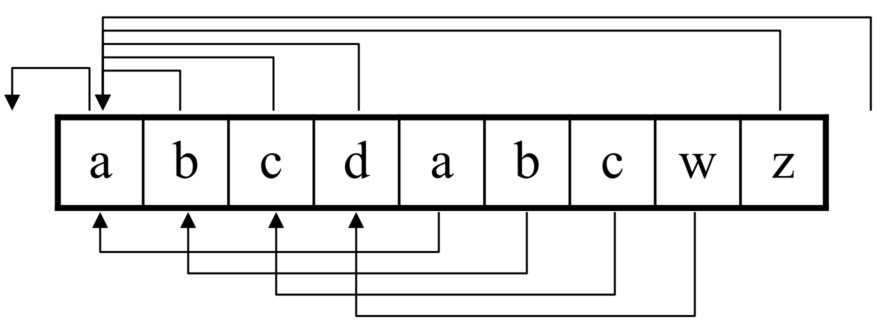


매칭이 실패했을 때 돌아갈 곳 준비 작업



텍스트에서 abcdabc까지는 매치되고, w에서 실패한 상황
패턴의 맨앞의 abc와 실패 직전의 abc는 동일함을 이용할 수 있다
실패한 텍스트 문자와 P[4]를 비교한다

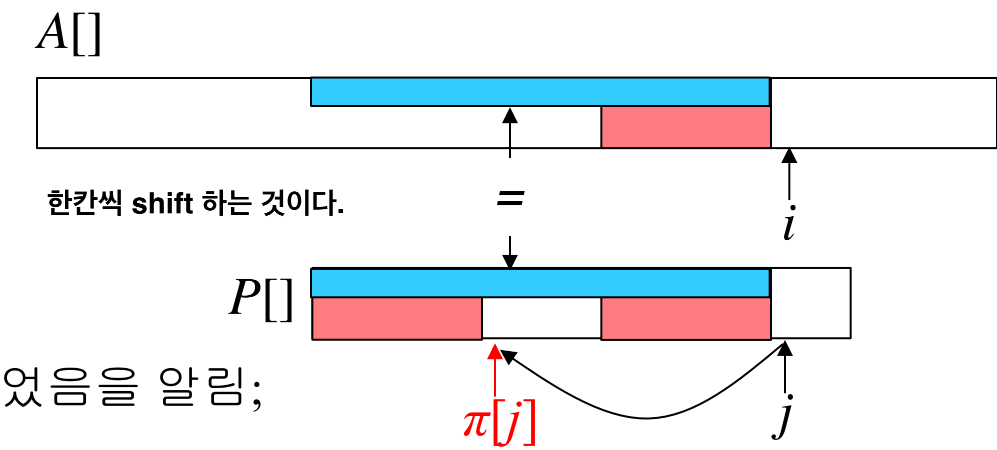
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi[\ ]$	0	1	1	1	1	2	3	4	1	1



패턴의 각 위치에 대해
매칭에 실패했을 때
돌아갈 곳을 준비해 둔다

KMP 알고리즘

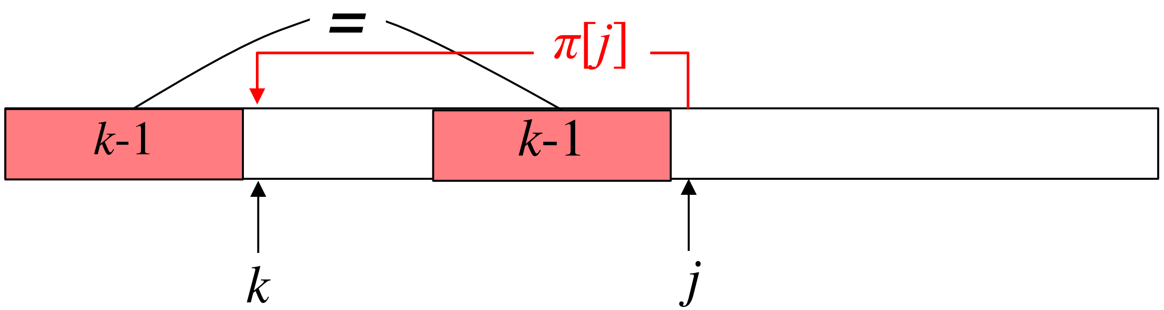
```
KMP(A[ ], P[ ], n, m)
{  ▷ n: 배열 A[ ]의 길이, m: 배열 P[ ]의 길이
    preprocessing(P);
    i ← 1;  ▷ 본문 문자열 포인터
    j ← 1;  ▷ 패턴 문자열 포인터
    while (i ≤ n) {
        if (j = 0 or A[i] = P[j])
            then { i++; j++; }
            else  j ← π [j];
        if (j = m+1) then {
            A[i-m]에서 매치되었음을 알림;
            j ← π [j];
        }
    }
}
```



✓수행시간: $\Theta(n)$

준비 작업

preprocessing(P[ ], m)
{ ▷ m: 배열 P[ ]의 길이
    $j \leftarrow 1$;
    $k \leftarrow 0$; ▷ prefix 포인터
    $\pi[1] \leftarrow 0$;
    while ($j \leq m$) { 패턴 뒤
        if ($k = 0$ **or** $P[j] = P[k]$)
            then { j++; k++; $\pi[j] \leftarrow k$; }
            else $k \leftarrow \pi[k]$;
    }
}



✓수행시간: $\Theta(m)$

KMP의 수행시간 분석

- Every time we go through the loop, the algorithm advances in the text (by i++) or shift the pattern (by $j \leftarrow \pi[j]$).
- Note that $\forall j, \pi[j] < j$, so $j \leftarrow \pi[j]$ decreases j.
- Thus, each time we go through the loop, $\boxed{i+(i-j)}$ will be increased by at least 1.
- $i + (i - j) \leq 2i \leq 2(n + 1)$, i.e., we go through the loop at most $2n+1$ times.
- Since each while loop takes $\theta(1)$, the running time is $O(n)$.

Since Ω(n), finally Θ(n)

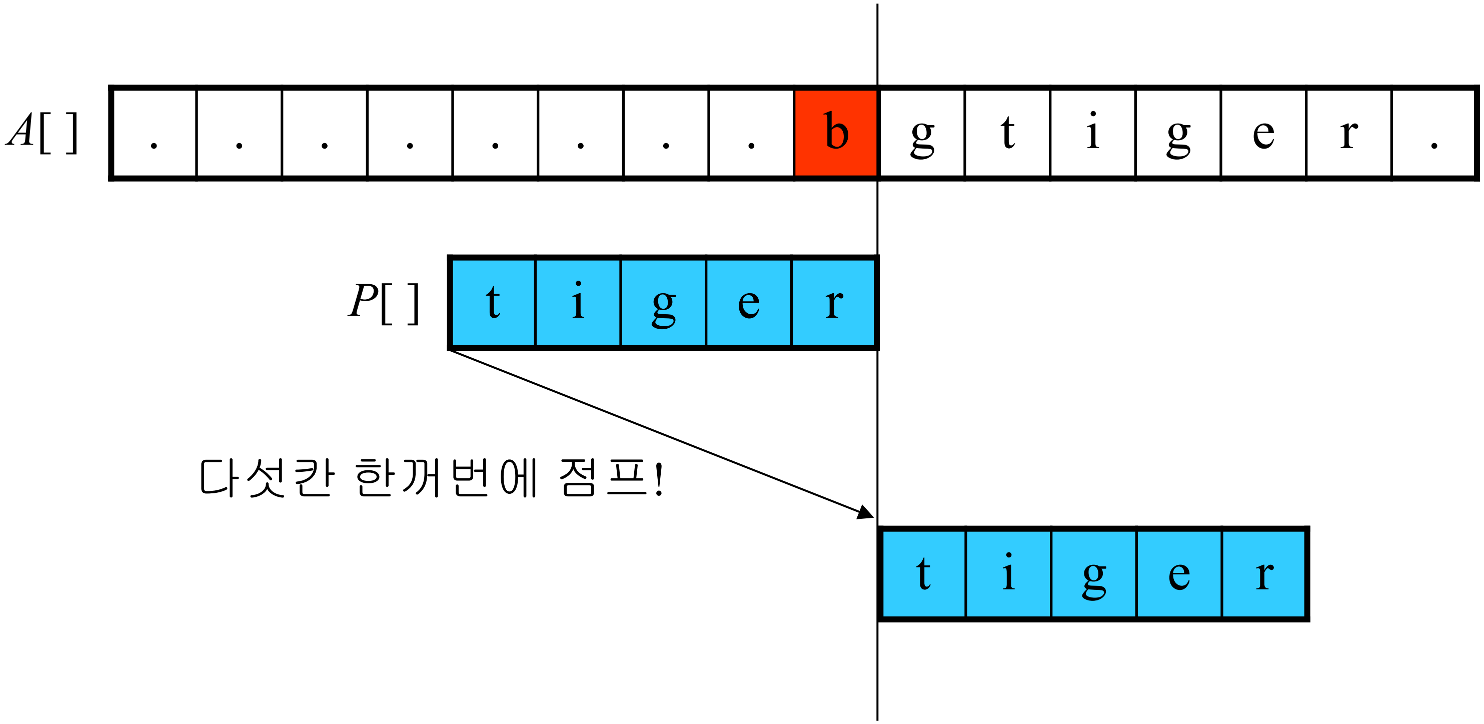
```
while (i ≤ n) {
      if (j = 0 or A[i] = P[j])
              then { i++; j++; }
              else j ← π [j];
      if (j = m+1) then {
         A[i-m]에서 매치되었음을 알림;
         j ← π [j];
      }
}
```

보이어-무어Boyer-Moore 알고리즘

- 앞의 매칭 알고리즘들의 공통점
  - 텍스트 문자열의 문자를 적어도 한번씩 훑는다
  - 따라서 최선의 경우에도 $\Omega(n)$
- 보이어-무어 알고리즘은 텍스트 문자를 다 보지 않아도 된다
  - 발상의 전환: 패턴의 오른쪽부터 비교한다

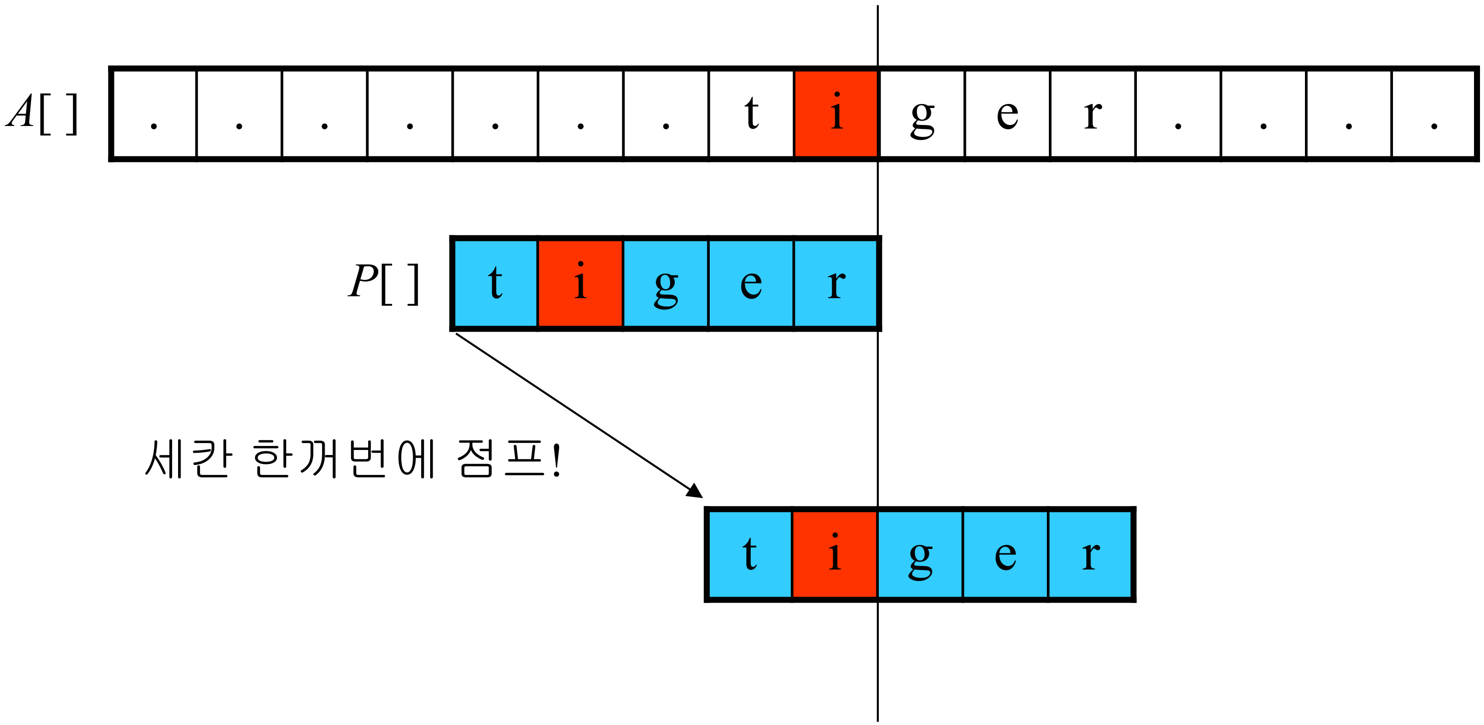
Motivation

상황: 텍스트의 b와 패턴의 r을 비교하여 실패했다



✓ 관찰: 패턴에 문자 b가 없으므로
패턴이 텍스트의 b를 통째로 뛰어넘을 수 있다

상황: 텍스트의 i와 패턴의 r을 비교하여 실패했다



✓ 관찰: 패턴에서 i가 r의 3번째 왼쪽에 나타나므로
패턴이 3칸을 통째로 움직일 수 있다

점프 정보 준비

패턴 "tiger"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	t	i	g	e	r	기타
jump	4	3	2	1	5	5

패턴 "rational"에 대한 점프 정보

오른쪽 끝문자	r	a	t	i	o	n	a	l	기타
jump	7	6	5	4	3	2	1	8	8

오른쪽 끝문자	r	t	i	o	n	a	l	기타
jump	7	5	4	3	2	1	8	8

보이어-무어-호스풀 알고리즘

```
BoyerMooreHorspool(A[ ], P[ ])
{   ▷ n : 배열 A[ ]의 길이, m : 배열 P[ ]의 길이
    computeSkip(P, jump);
    i ← 1;
    while (i ≤ n − m+1) {
        j ← m;  k ← i + m −1;
        while ( j > 0 and P[j] = A[k]) {
                j--; k--;      마지막이 같으면 그 전 부분 다 맞는건지 체크하기 위해
                               하나씩 인덱스 마이너스 -> 안맞는게 발견되면 바로 jump
        }
        if (j = 0) then A[i] 자리에서 매칭이 발견되었음을 알린다;
        i ← i + jump[A[i + m − 1]];
    }
}
```

✓Worst case: $\Theta(mn)$

✓입력에 따라 다르지만 일반적으로 $\Theta(n)$보다 가볍다

✓ Best case: $\Theta(\frac{n}{m})$