

2023春 过程控制系统

过程控制系统

授课教师：苗子博

# 第5章

# 被控过程的数学模型

## 本章学习重点

1. 被控过程数学模型的作用与要求、建立被控过程数学模型的方法

2. 机理法建模

a. 单容过程建模

b. 多容过程建模

3. 测试法建模

# 第5章 被控过程的数学模型

## 5.2 建立被控过程数学模型的基本方法

求对象的数学模型有以下途径：

□ **机理法：**根据生产过程的内部机理，列写出有关的平衡方程，从而获取对象的数学模型。

机理法建模的**首要条件**是必须对生产过程的机理有充分的了解，并能比较准确地用数学语言加以描述。

**机理法建模的基础是物质与能量平衡关系**，利用物质与能量平衡的基本关系及相应的物理、化学定理，列写出相应的方程，并进行一定的运算、变换即可得到需要的传递函数。

## 第5章 被控过程的数学模型

**常用的简化方法：** 1、一开始就引入假定，使复杂的方程简化； 2、在得到较复杂的高阶方程后，用低阶方程去近似； 3、对得到的原始模型进行仿真，得到一系列响应曲线，再用低阶模型近似。

**□ 测试法：** 通过实验测试，来识别对象的数学模型。

**□ 混合法：** 由于影响生产过程的因素较多，单纯用机理法建模较困难，一般用机理法的分析结论，指导测试结果的辨识。

# 第5章 被控过程的数学模型

## 5.3 机理法建模

### 5.3.1 机理法建模的基本原理

通过分析生产过程的内部机理，找出变量之间的关系。如物料平衡方程、能量平衡方程、化学反应定律、电路基本定律等，从而导出对象的数学模型。被控变量与控制变量的变化都与物质和能量的流动与转换有密切关系，这一点是机理法建模的重要依据。

1、流入量与流出量

2、静态平衡与动态平衡

## 第5章 被控过程的数学模型

物质与能量的动态平衡关系可表示为：

单位时间内被控过程流入量与流出量之差等于被控过程内部的存储变化率。

即

单位时间内物质/能量流入量－单位时间内物质/能量流出量＝被控过程内部物质/能量存储量的变化率

物质与能量的平衡关系是反映过程特性的基本关系，也是机理法建立被控过程的数学模型的基础。

## 第5章 被控过程的数学模型

机理法建模的步骤：

- 1、根据过程和模型使用目的作出合理假设
- 2、根据被控过程内在机理建立数学模型
- 3、简化

### 5.3.2单容过程建模

当对象的输入输出可以用一阶微分方程式来描述时，称为单容过程或一阶特性对象。大部分工业对象可以用一阶特性描述。

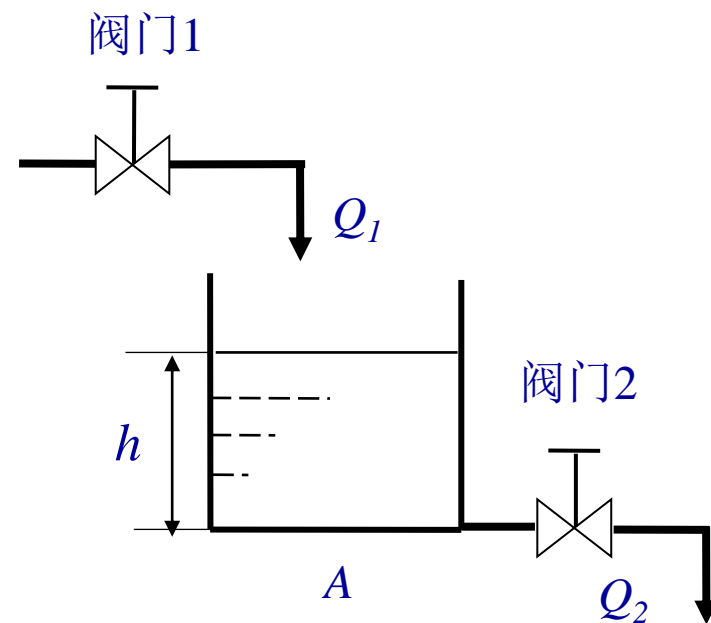
典型代表是水槽的水位特性。

## 第5章 被控过程的数学模型

### 5.3.2.1 单容贮液箱液位过程I

如图是一个水槽，水经过阀门1不断地流入水槽，水槽内的水又通过阀门2不断流出。工艺上要求水槽的液位 $h$ 保持一定数值。在这里，水槽就是被控对象，液位 $h$ 就是被控变量。

如果想通过调节阀门1来控制液位，就应了解进水流量 $Q_1$ 变化时，液位 $h$ 是如何变化的。





## 第5章 被控过程的数学模型

此时，对象的输入量是流入水槽的流量 $Q_1$ ，对象的输出量是液位 $h$ 。

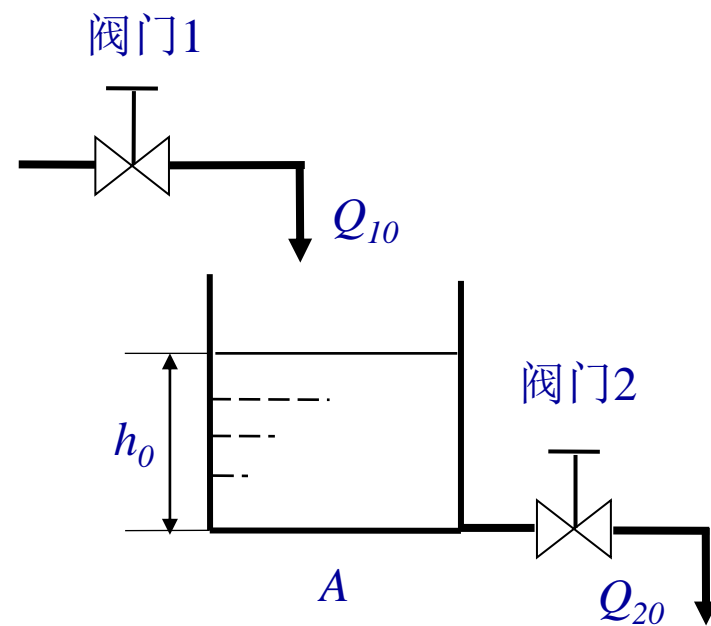
机理建模步骤：

从水槽的物料平衡关系考虑，找出表征 $h$ 与 $Q_1$ 关系的方程式。

设水槽的截面积为 $A$

$Q_{10} = Q_{20}$ 时，系统处于平衡状态，即静态。

这时液位稳定在 $h_0$ 。



## 第5章 被控过程的数学模型

假定某一时刻，阀门1突然开大 $\Delta\mu_1$ ，则 $Q_1$ 突然增大，不再等于 $Q_2$ ，于是 $h$ 也就开始变化。

$Q_1$ 与 $Q_2$ 之差被囤积在水槽中，造成液位上升。

$$(\Delta Q_1 - \Delta Q_2) / A = d\Delta h / dt$$

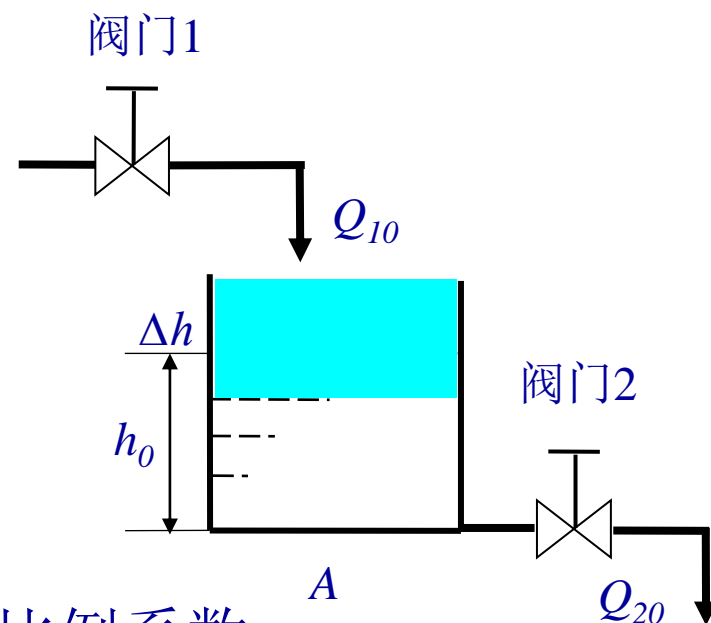
思考题  $\Delta Q_2 = \frac{\Delta h}{R_s}$

$$\Delta Q_1 = K_\mu \Delta\mu_1$$

式中：

$R_s$ ——阀门2阻力系数； $K_\mu$ ——阀门1比例系数；

$\mu_1$ ——阀门1的开度；



## 第5章

## 被控过程的数学模型

解得 
$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{1}{A} (K_{\mu} \Delta \mu_1 - \frac{1}{R_s} \Delta h)$$

即 
$$A R_s \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = K_{\mu} R_s \Delta \mu_1$$

令:  $T = A R_s$  ——时间常数;  $K = K_{\mu} R_s$  ——放大倍数。

写成标准形式 
$$T \frac{d\Delta h}{dt} + \Delta h = K \Delta \mu_1$$

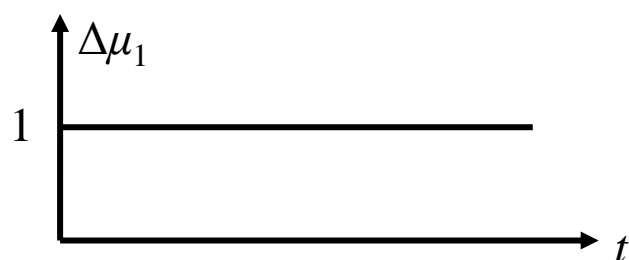
进行拉氏变换 
$$T s H(s) + H(s) = K \mu_1(s)$$

传递函数为: 
$$\frac{H(s)}{\mu_1(s)} = \frac{K}{T s + 1}$$

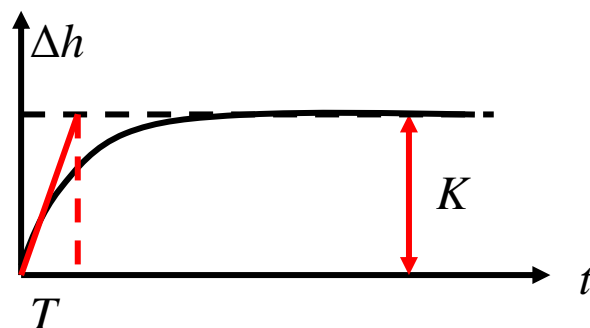
## 第5章 被控过程的数学模型

### 阶跃响应（飞升）曲线

输入量 $\mu_1$ 阶跃变化（ $\Delta\mu_1$ ）时，其输出（ $\Delta h$ ）随时间变化的曲线。



因 
$$\frac{H(s)}{\mu_1(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad \mu_1(s) = \frac{1}{s}$$



则 
$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

时域表达式 
$$\Delta h = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})\Delta\mu_1$$

又称一阶惯性特性或单容特性

## 第5章 被控过程的数学模型

对象的特性参数 $K$ 、 $T$ 反映了对象的物理本质。

因为工艺过程就是能量或物质的交换过程，在此过程中，肯定存在能量的储存和阻力。

(1) 容量系数——反映对象存储能量的能力。

如水槽面积 $A$ ，它影响时间常数  $T$  的大小。

$$T = AR_S$$

(2) 阻力系数——反映对象对物料或能量传递的阻力。

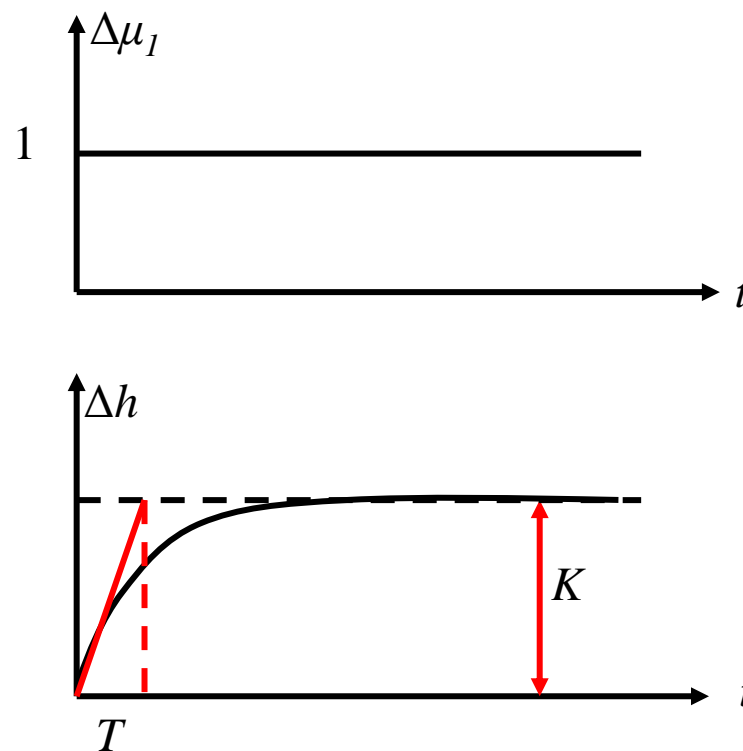
如阀门阻力系数  $R_S$ ，它影响放大系数  $K$  的大小。

$$K = K_\mu R_S$$

## 第5章 被控过程的数学模型

### 5.3.2.2 被控过程的自衡特性与单容贮液箱液位过程II

从一阶惯性特性曲线可以看出，对象在扰动作用下，其平衡状态被破坏后，在没有人工干预或调节器干预下，能自动达到新的平衡状态，这种特性称为“**自衡特性**”。



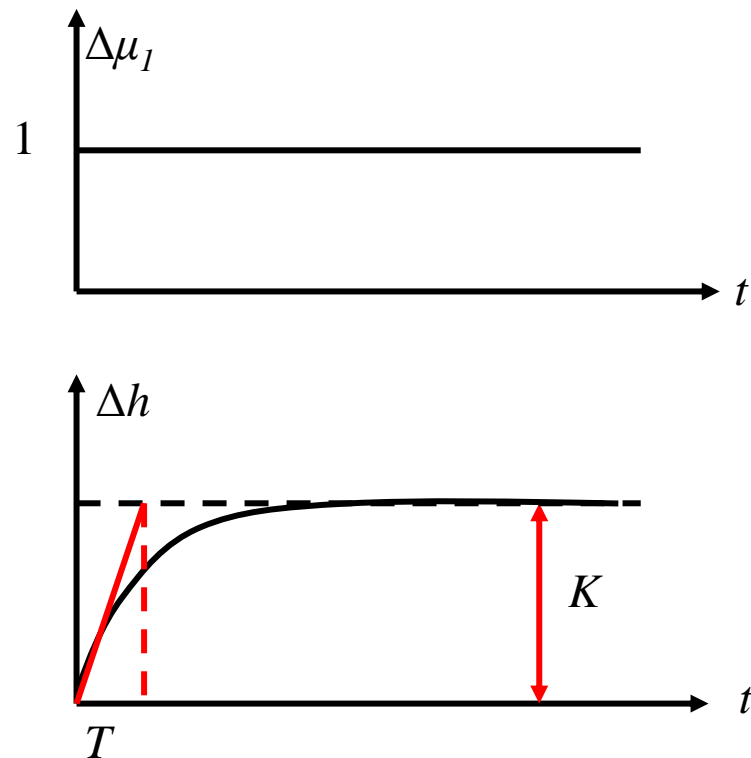
用**自衡率** $\rho$ 表征对象自衡能力的大小

## 第5章 被控过程的数学模型

$$\rho = \frac{\Delta\mu_1}{\Delta h(\infty)} = \frac{1}{K}$$

与放大系数 $K$ 互为倒数

如果 $\rho$ 大，说明对象的自衡能力大。即对象能以较小的自我调整量 $\Delta h(\infty)$ ，来抵消较大的扰动量 $\Delta\mu_1$ 。



并不是所有被控过程都具有自衡特性。同样的单容水槽如果出水用泵抽出，则成为无自衡特性。

# 第5章 被控过程的数学模型

## 单容无自衡特性

若阀门1突然开大 $\Delta\mu_1$ ，则 $Q_1$ 增大， $Q_2$ 不变化。

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = A \frac{d\Delta h}{dt}$$

$$\Delta Q_1 = K_\mu \Delta\mu_1$$

$$\Delta Q_2 = 0$$

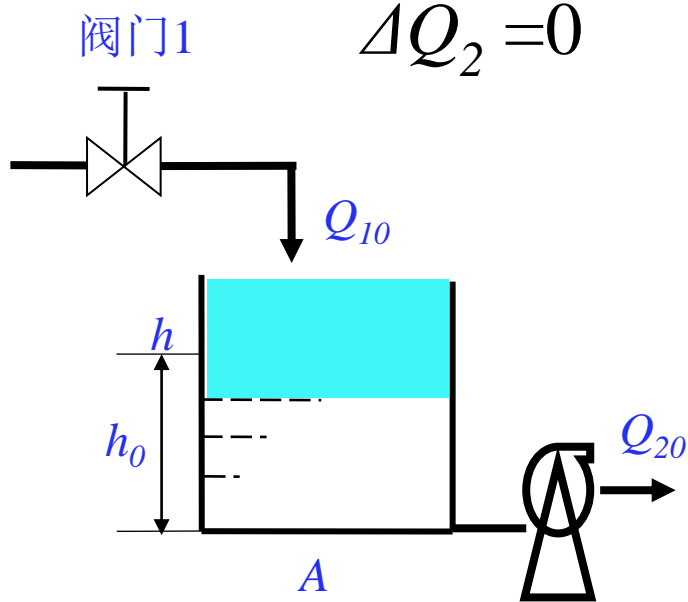
}

$$A \frac{d\Delta h}{dt} = K_\mu \Delta\mu_1$$

令  $\varepsilon = \frac{K_\mu}{A}$  — 称飞升速度

则:  $\frac{d\Delta h}{dt} = \varepsilon \Delta\mu_1$

传函:  $W(s) = \frac{H(s)}{\mu_1(s)} = \frac{\varepsilon}{s}$



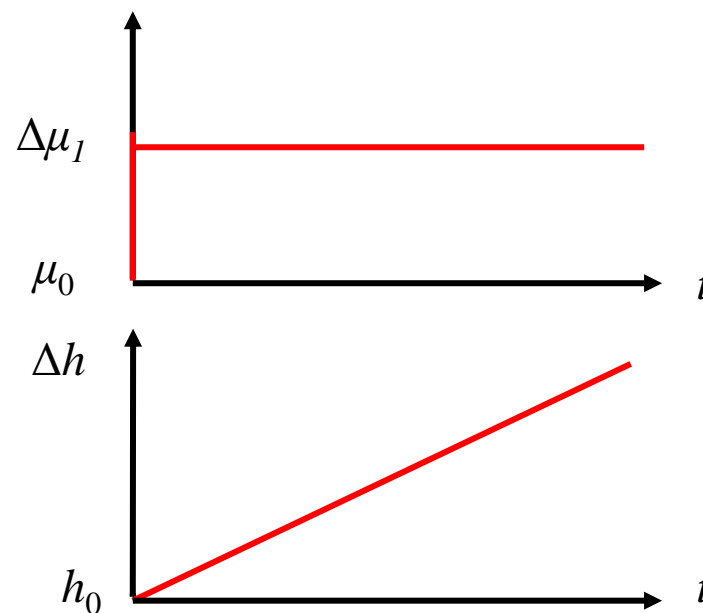
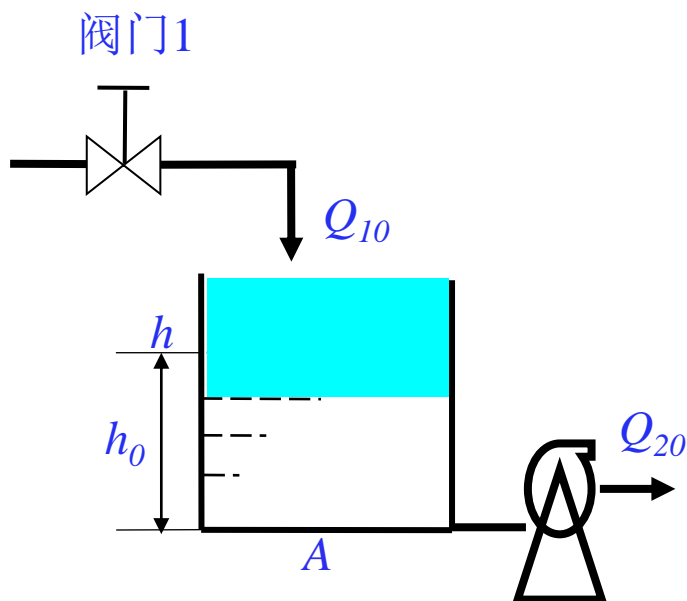


## 第5章 被控过程的数学模型

若阀门1阶跃增大 $\Delta\mu_1$ ，则 $\Delta h(t)$ 持续增长。

即：  $\Delta h(t) = \int \varepsilon \Delta\mu_1 dt$

—又称积分特性

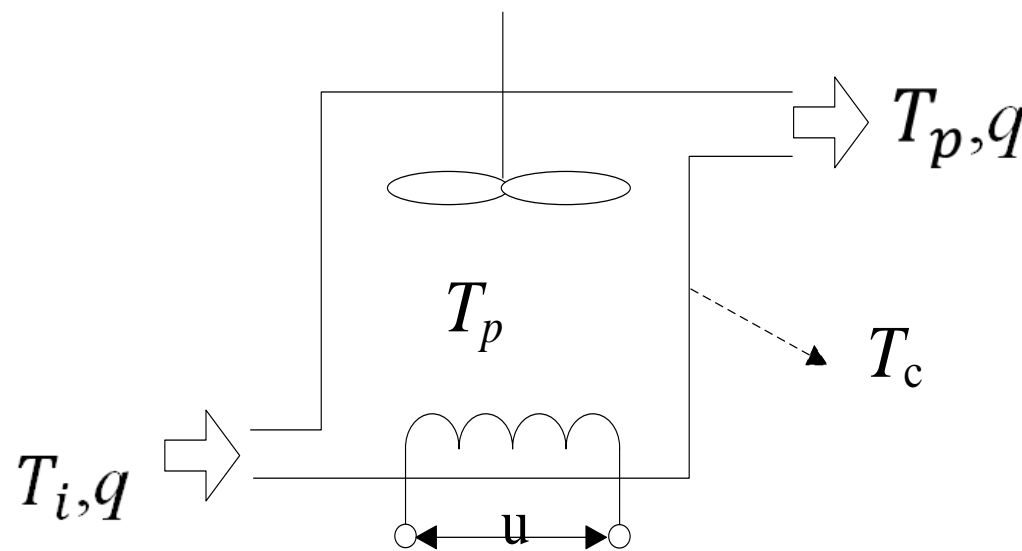


非自衡单容液位控制  
过程阶跃响应曲线

## 第5章 被控过程的数学模型

### 5.3.2.3 单容温度过程建模及其他单容过程

如右图所示是某电容电加热过程，容器内物料的总热容为 $C$ ，液体的比热容为 $C_p$ ，流体流量（流入、流出相等）为 $q$ ，液体以温度 $T_i$ 流入加热容器，以温度 $T_p$ 流出加热容器。求电加热电压 $u$ 和液体输出温度 $T_p$ 之间的关系。

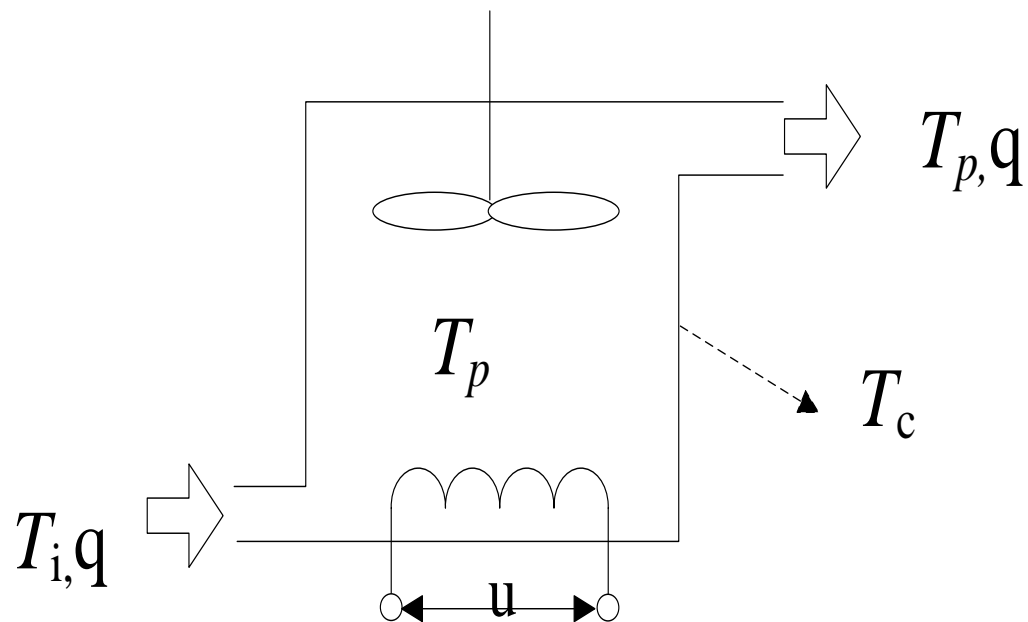


单电容电加热热力过程

## 第5章

## 被控过程的数学模型

把加热器看作一个独立的隔离体，设容器所在的环境温度为 $T_c$ 。根据能量平衡关系，单位时间进入容器的热量 $Q_i$ 与单位时间流出的热量 $Q_o$ 之差等于容器内热量储存的变化率。



$$Q_i - Q_o = C \frac{dT_p}{dt}$$

而  $Q_i = Q_e + Q_{qi}$

式中  $Q_{qi}$  为流入液体带来的热量。

$$Q_o = Q_r + Q_{qo}$$

式中  $Q_r$  为容器向周围散发的热量。

## 第5章 被控过程的数学模型

$$Q_r = AK_r(T_p - T_c)$$

当加热处于稳态时，即 $T_p$ 保持不变，此时，从加热器输出的热量 $Q_o$ 等于从外部输入的热量 $Q_i$ 。

$$Q_i - Q_o = C \frac{dT_p}{dt} = 0$$

用增量表示变量对于稳态值的变化量可得：

$$\Delta Q_i - \Delta Q_o = C \frac{d\Delta T_p}{dt}$$

假设 $q$ ， $T_i$ ， $T_c$ 不变，所以有

$$\Delta Q_i = ? \quad \Delta(Q_e + qC_pT_i) = \Delta Q_e + 0 = \Delta Q_e$$

$$\Delta Q_o = ? \quad \Delta(AK_r(T_p - T_c) + qC_pT_p) = (AK_r + qC_p)\Delta T_p$$

## 第5章

## 被控过程的数学模型

综合上述各式可得

$$\Delta Q_e - (AK_r + qC_p)\Delta T_p = C \frac{d\Delta T_p}{dt}$$

在工作点附近进行线性化处理可得

$$\Delta Q_e = K_q \Delta u$$

代入上式可得

$$K_q \Delta u - (AK_r + qC_p)\Delta T_p = C \frac{d\Delta T_p}{dt}$$

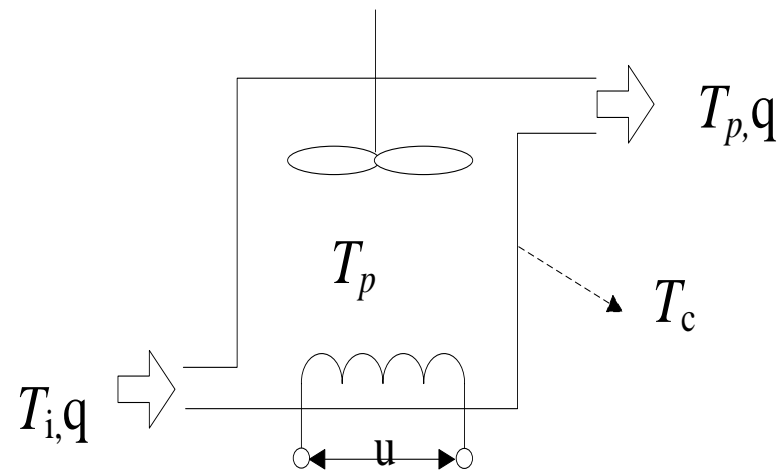
进行拉氏变换可得

$$\frac{T_p(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts+1}$$

其中

$$T = \frac{C}{AK_r + qC_p}$$

$$K = \frac{K_q}{AK_r + qC_p}$$



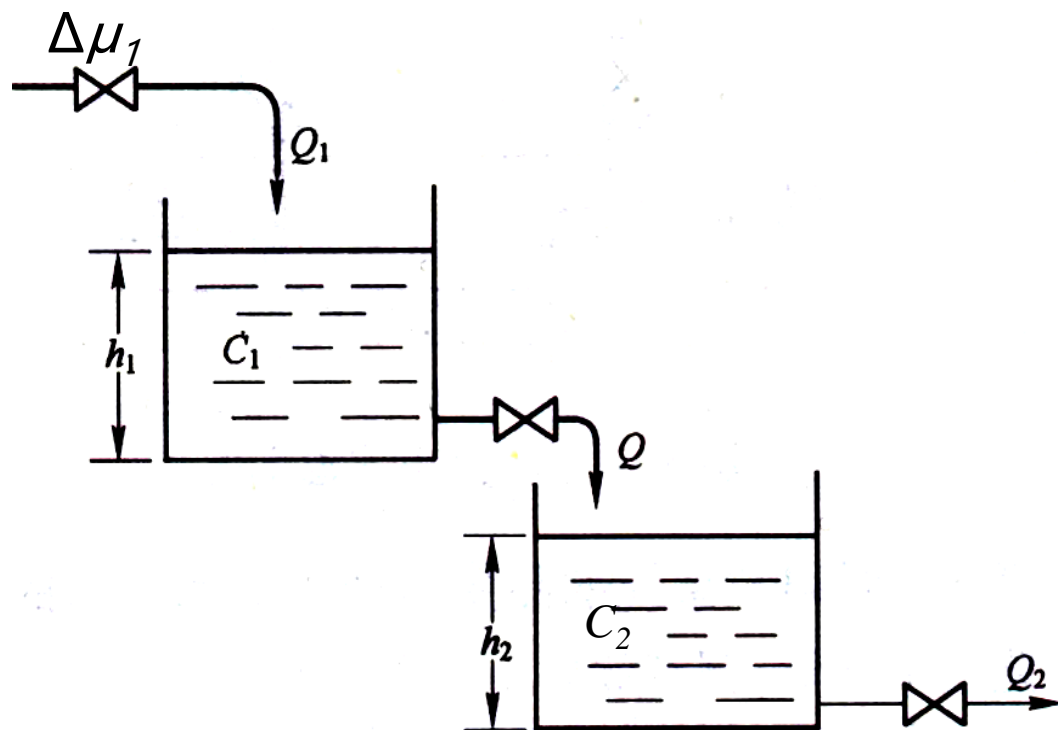
## 第5章 被控过程的数学模型

### 5.3.3 多容过程建模

有一个以上贮蓄容量的过程称为多容过程。

#### 5.3.3.1 多容液位过程

如图所示为双容对象。



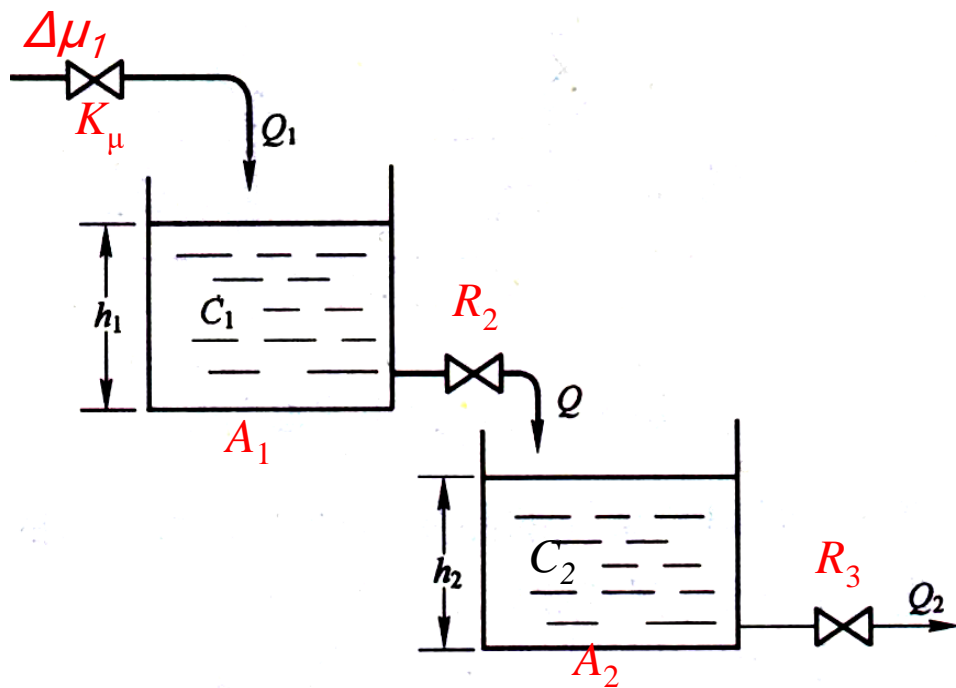
由两个一阶惯性环节串联起来，操纵变量是  $\Delta\mu_1$ ，被控变量是第二个水槽的水位  $h_2$ 。

## 第5章 被控过程的数学模型

可以求出传递函数：

$$W(s) = \frac{H_2(s)}{\mu_1(s)} = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

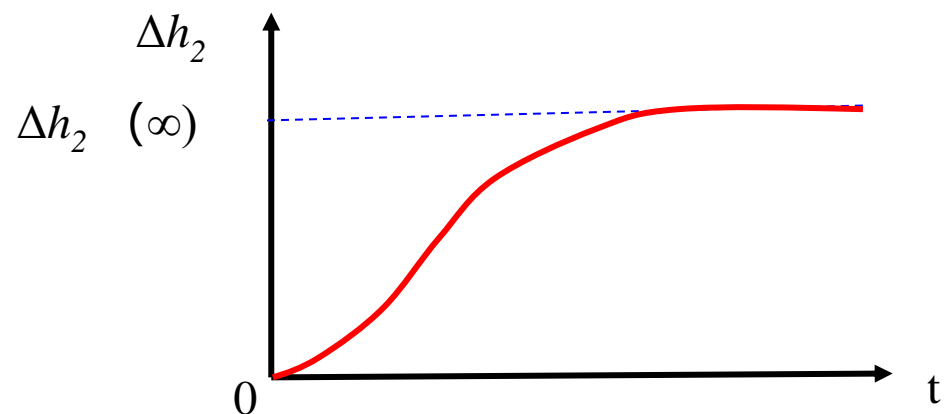
式中：  $T_1 = A_1 R_2$        $T_2 = A_2 R_3$        $K = K_\mu R_3$



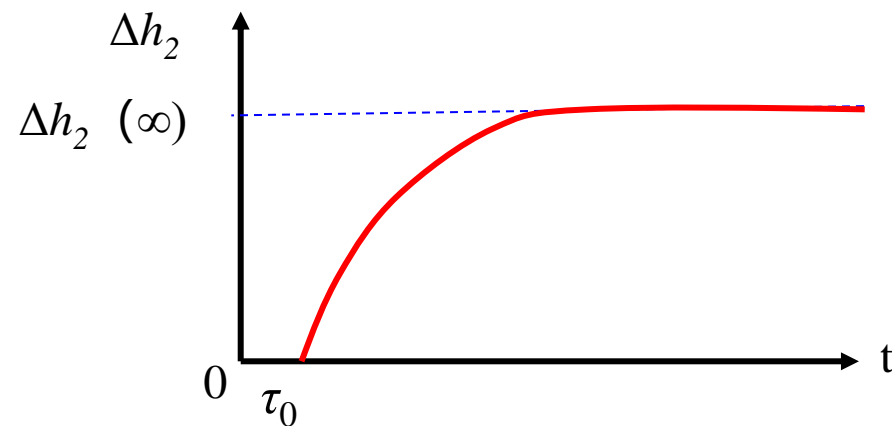
由两个一阶惯性特性乘积而成。又称二阶惯性。

## 第5章 被控过程的数学模型

当输入量是阶跃增量  $\Delta\mu_1$  时，被控变量  $\Delta h_2$  的反应（飞升）曲线呈S型。



为简化数学模型，可以用带滞后的单容过程来近似。



所谓**滞后**是指被控变量的变化落后于扰动变化的时间。

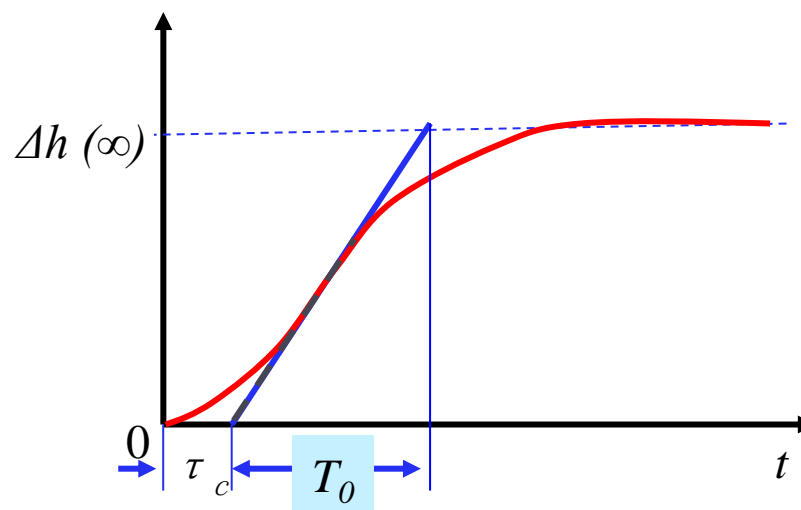


## 第5章 被控过程的数学模型

在S形曲线的拐点上作一切线，若将它与时间轴的交点近似为反应曲线的起点，则曲线可表达为带滞后的一阶特性：

$$\Delta h_2(t) = \begin{cases} K_0 \Delta \mu_1 (1 - e^{-\frac{-(t-\tau_c)}{T_0}}) & t \geq \tau_c \\ 0 & t < \tau_c \end{cases}$$

$$W(s) = e^{-s\tau_c} \frac{K_0}{T_0 s + 1}$$



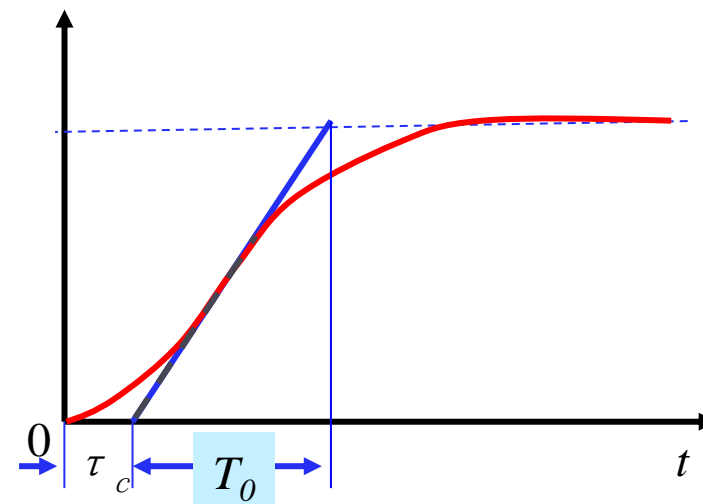
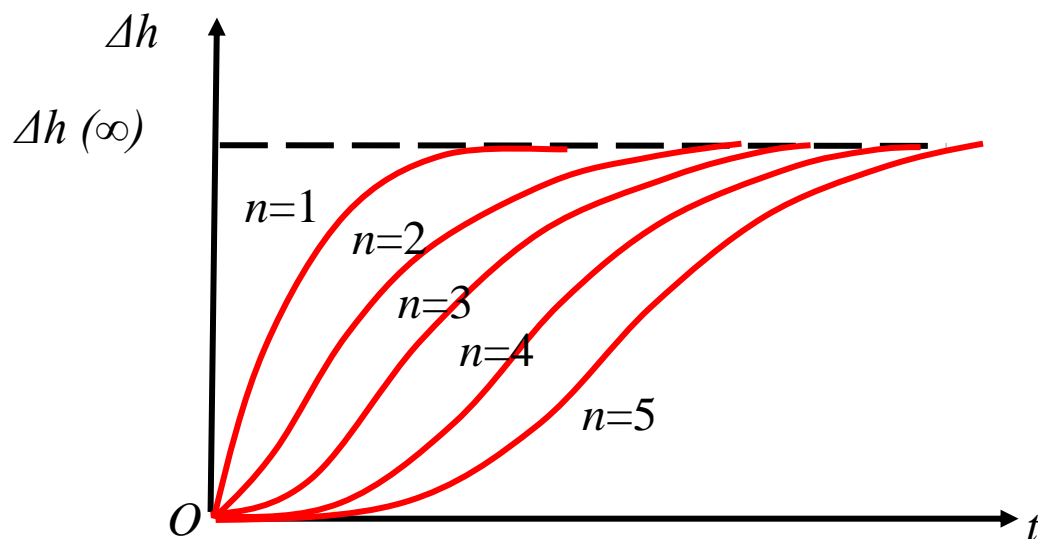
# 第5章 被控过程的数学模型

## 5.3.3.2 容量滞后与纯滞后

### 1. 容量滞后

切线在时间轴上截出的时间段 $\tau_c$ 为容量滞后。

被控过程的容量系数 $C$ 越大， $\tau_c$ 越大；容量个数越多（阶数 $n$ 越多），阶跃响应曲线上升越慢。



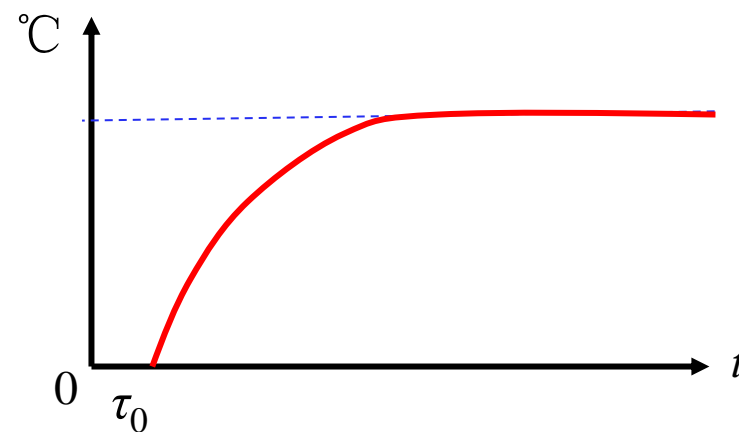
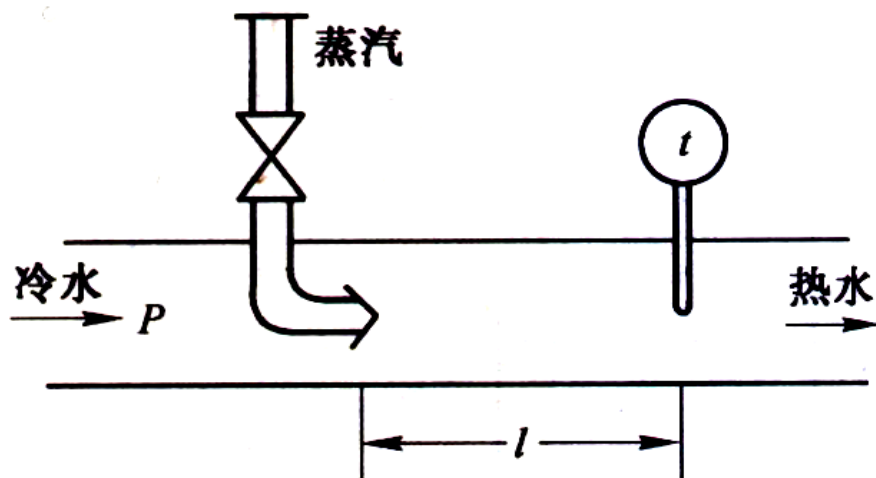
## 第5章

## 被控过程的数学模型

### 2. 纯滞后

由信号或能量的传输时间造成的滞后现象，是纯粹的滞后。

如图是一个用蒸汽来控制水温的系统。蒸汽作用点与被调量测量点相隔  $l$  距离，蒸汽量阶跃增大引起的水温升高，要经过路程  $l$  后才反应出来。



## 第5章

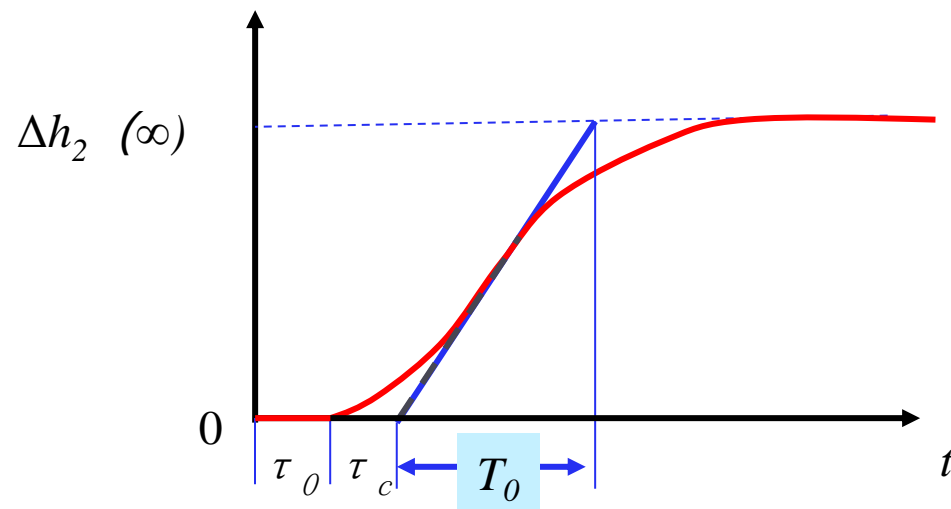
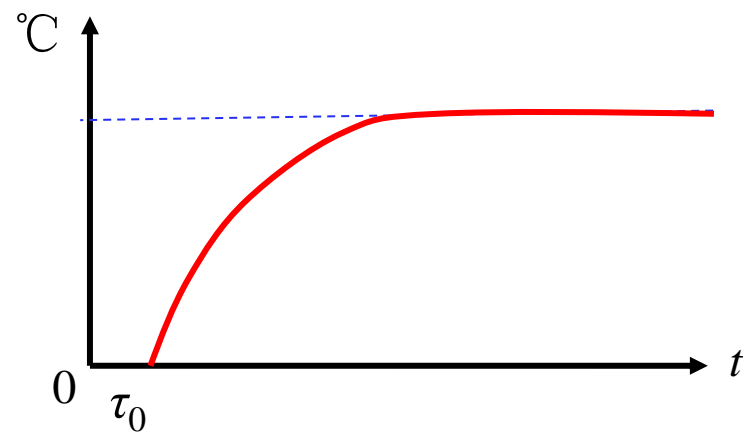
## 被控过程的数学模型

纯滞后时间  $\tau_0 = \frac{l}{v}$

$v$  —— 水的流速;

❖ 有些对象容量滞后与纯滞后同时存在，很难严格区分。常把两者合起来，统称为滞后时间  $\tau$ 。

$$\tau = \tau_0 + \tau_c$$



## 第5章 被控过程的数学模型

假定某一时刻，阀门1突然开大 $\Delta\mu_1$ ，则 $Q_1$ 突然增大，不再等于 $Q_2$ ，于是 $h$ 也就开始变化。

$Q_1$ 与 $Q_2$ 之差被囤积在水槽中，造成液位上升。

$$(\Delta Q_1 - \Delta Q_2) / A = d\Delta h / dt$$

$$\Delta Q_2 = \frac{\Delta h}{R_s}$$

$$\Delta Q_1 = K_\mu \Delta\mu_1$$

