随机过程

统计特性

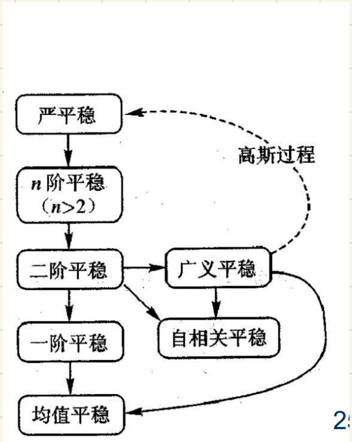
二阶统计量

相关函数 $R_x(t,\tau)=E\{x^*(t-\tau)\,x(t)\}$

协方差函数

$$C_x(t,\tau)=E\{[x(t-\tau)-m_x(t-\tau)]^*[x(t)-m_x(t)]\}$$

平稳、



广义平稳、
- 均值为常数
- 二阶矩有界
- 协方差函数与时间无关

统计量与时间无关

① $R_x^*(\tau)=R_x(-\tau)$, $C_x^*(\tau)=C_x(-\tau)$

证明: $R_x(-\tau)=E[x^*(t+\tau)\,x(t)]$

$$=E[x^*(t)\,x(t+\tau)]^*$$

$$\xlongequal{\text{变量代换}} E[x^*(t-\tau)\,x(t)]^*$$

$$=R^*(\tau)$$

② $|R_x(\tau)|\le R_x(0)$, $|C_x(\tau)|\le C_x(0)$

Wiener-Khinchine 定理

□ **Wiener-Khinchine定理：平稳随机过程$x(t)$的平均功率谱密度** P_x **与其自相关函数** R_x **之间构成Fourier变换关系，即**

$$P_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$P_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Parseval关系 $$\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

功率谱密度的F反变换是自相关函数

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f) e^{j2\pi\tau f} df$$

功率谱密度对频率的积分可给出信号的方差

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f) df = var[x(t)] = E\{|x(t) - m_x|^2\}$$

①各态历经性.遍历性 ：一次观测可估计其统计量

②均方遍历性

互相关函数 $R_{xy}(\tau) = E\{x(t) y^*(t-\tau)\}$ 包含直流

→ 提取相同，抑制不同

互协方差函数 $C_{xy}(\tau) = E\{[x(t) - m_x][y(t-\tau) - m_y]^*\}$

此时不含直流

互功率谱密度. 即互相关函数的 Fourier 变换

两个平稳随机信号的统计关系

任意两个高斯随机过程统计独立和不相关等价

若均值为0，则等价

信号变换

能量有限信号 级数展开.

↳ $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty$ 平方可积.

则 $x(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k\underline{\phi_k(t)}$

↓

基函数 → $\begin{cases}\text{线性独立性}\\ \text{完备性}\end{cases}$

随机信号通过线性系统

$x(t)\longrightarrow$ $\boxed{\text{线性系统}\ h(t)}$ $\longrightarrow y(t)$

$y(t)=x(t)*h(t)$

例1：令 $J_1=p^H\omega,\quad p,\omega\in\mathbb{C}^{N\times1}$ **，则**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J_1}{\partial\omega^*}=\dfrac{\partial}{\partial\omega^*}\left(p^H\omega\right)=\dfrac{\partial\omega^T}{\partial\omega^*}p^*=0\cdot p^*=0\\[2ex]\dfrac{\partial J_1}{\partial\omega}=\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(p^H\omega\right)=\dfrac{\partial\omega^T}{\partial\omega}p^*=I\cdot p^*=p^*\end{cases}$$

例2：令 $J_2=\omega^Hp,\quad p,\omega\in\mathbb{C}^{N\times1}$ **，则**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J_2}{\partial\omega^*}=\dfrac{\partial}{\partial\omega^*}\left(\omega^Hp\right)=\dfrac{\partial\omega^H}{\partial\omega^*}p=I\cdot p=p\\[2ex]\dfrac{\partial J_2}{\partial\omega}=\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^Hp\right)=\dfrac{\partial\omega^H}{\partial\omega}p=0\cdot p^*=0\end{cases}$$

不难验证 $\dfrac{\partial\omega^T}{\partial\omega}=\dfrac{\partial\omega^H}{\partial\omega^*}=I\qquad\dfrac{\partial\omega^T}{\partial\omega^*}=\dfrac{\partial\omega^H}{\partial\omega}=0$

上式表明：复向量 ω 相对于其共轭向量 ω^* 可视为一常数，而 ω^* 相对于 ω 也可视为一常数。