S2.01256
Méthodes Numériques

Dechenaud Emile
Sekma Sarah
Ducruet Léo
Hayot Lynn
Tivollier Jarod
Dubief Emilie

2024-05-31

Table des Matières

Introduction

Problème à résoudre

Nous sommes une entreprise d'informatique ayant développé un logiciel de gestion d'événements d'entreprise, destiné à des entreprises spécialisées dans ce domaine. Nous avons donc décidé de rendre ce logiciel payant sous forme d'un abonnement mensuel dont le prix varie selon la version du logiciel. Le logiciel sous sa forme normale coûtera 40€ par mois et la version professionnelle plus personnalisable et détaillée coûtera 50€ par mois. Nous cherchons donc à savoir combien de logiciels de chaque version nous pouvons vendre pour optimiser nos revenus en respectant nos contraintes humaines et matérielles.

Pour s'assurer du bon fonctionnement de notre logiciel une fois mis en service, nous avons besoin de développeurs pour la maintenance et l'amélioration des différentes versions, d'un serveur pour héberger les logiciels et d'opérateurs téléphoniques qui assurent le service après-vente pour nos clients. Pour cela, notre entreprise dispose de deux développeurs, l'un est spécialisé dans la maintenance et l'autre dans le développement de nouvelles fonctionnalités, tous les deux sont payés 2750€ brut, un opérateur téléphonique payé 2000€ brut et deux baies de stockages coûtant chacune 700€ par mois. Il faut bien entendu prendre en compte la masse salariale qui double le salaire de chaque employé pour l'entreprise.

Chaque version du logiciel n'a pas les mêmes coûts. Dans un premier temps, chaque version normale nous coûte 1€ de stockage par mois et 5€ de SAV. Ces coûts sont de 2€ et 10€ pour la version professionnelle. Au niveau du développement, la version normale nous coûte 10€ de maintenance par mois et ce coût est de 15€ pour la version professionnelle. Enfin, notre logiciel professionnel étant basé sur une meilleure personnalisation et plus de détails, l'amélioration nous coûte plus cher pour la version normale. En effet, une fois l'amélioration codée pour la version normale, il suffit de la modifier légèrement pour la version professionnelle. Ainsi, l'amélioration nous coûte 20€ pour la version normale et 10€ pour la version professionnelle.

Définition de la fonction

Maintenant que les données de notre entreprise et de notre projet sont exposées, il nous faut reformuler tout cela sous forme mathématique afin de répondre à notre problème.

La fonction à optimiser sera donc de la forme :

$$f(x) = 40x + 50y$$

x étant le nombre de versions normales et y le nombre de versions professionnelles. Les valeurs associées à nos deux variables sont par conséquent les prix des deux versions.

Les contraintes à prendre en compte seront les suivantes :

$$10x + 15y \leq 5500$$

10 et 15 représentent les coûts de maintenance pour les deux versions. 5500 représente le salaire du développeur en charge de la maintenance. Ayant un salaire de 2750€ brut, il nous faut le multiplier par deux pour prendre en compte la masse salariale.

$$20x + 10y \leq 5500$$

20 et 10 représentent les coûts d'amélioration pour les deux versions. 5500 représente le salaire du développeur en charge de l'amélioration. Ayant un salaire de 2750€ brut, il nous faut le multiplier par deux pour prendre en compte la masse salariale.

$$x + 2y \leq 1400$$

1 et 2 représentent les coûts de stockage pour les deux versions. 1400 représente le coût des baies de stockages.

$$5x + 10y \leq 4000$$

5 et 10 représentent les coûts de SAV pour les deux versions. 4000 représente le salaire de l'opérateur téléphonique. Ayant un salaire de 2000€ brut, il nous faut le multiplier par deux pour prendre en compte la masse salariale.

Méthodes de résolution

Notre fonction étant une fonction linéaire sous contraintes linéaires, nous disposons de deux façons de la résoudre. La première est une représentation graphique et la deuxième est l'utilisation de la méthode simplex.

Résolution Graphique

Pour faire la résolution graphique de notre optimisation de fonction, il nous faut représenter sous forme de fonctions linéaires nos contraintes. Pour se faire, il nous faut exprimer toutes nos contraintes selon y et tracer les fonctions ainsi trouvées. Ensuite, nous représenterons la fonction objective et trouverons la meilleure optimisation.

Fonction pour la contrainte de maintenance :

$$\begin{aligned} & 10x + 15y = 5500 \\ \iff & 15y = 5500 - 10x \\ \iff & y = \frac{5500}{15} - \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

Fonction pour la contrainte d'amélioration :

$$\begin{aligned} & 20x + 10y = 5500 \\ \iff & 10y = 5500 - 20x \\ \iff & y = 550 - 2x \end{aligned}$$

Fonction pour la contrainte de stockage :

$$\begin{aligned} & x + 2y = 1400 \\ \iff & 2y = 1400 - x \\ \iff & y = 700 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

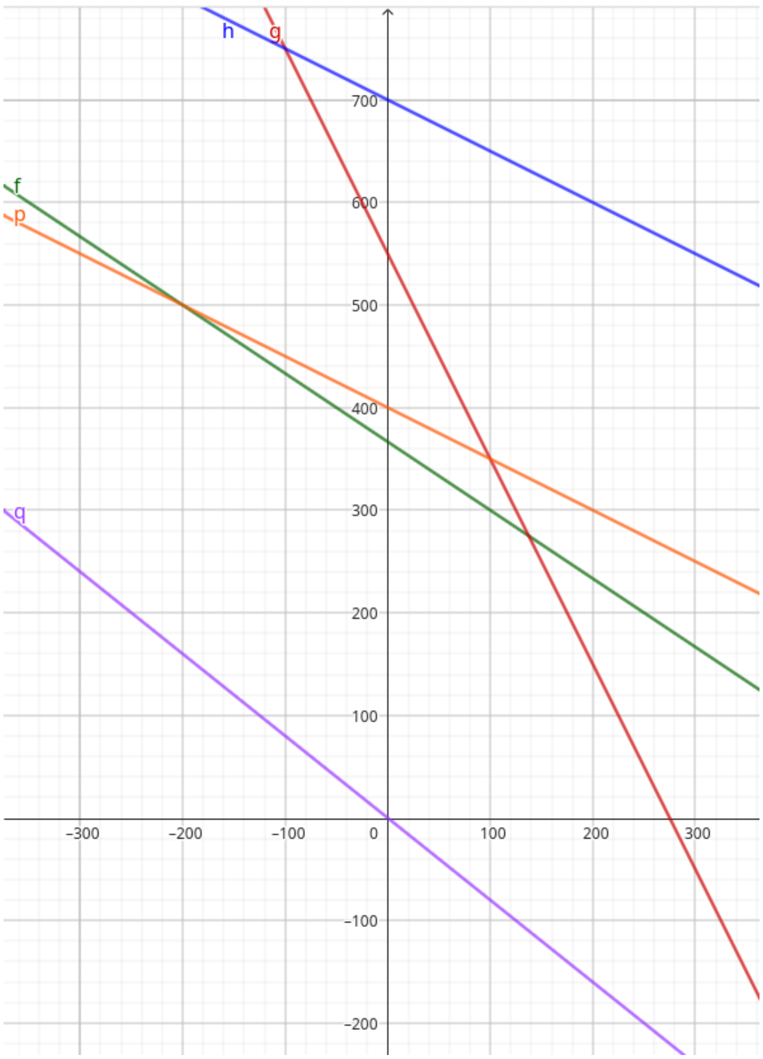
Fonction pour la contrainte de SAV :

$$\begin{aligned} & 5x + 10y = 4000 \\ \iff & 10y = 4000 - 5x \\ \iff & y = 400 - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Fonction objective :

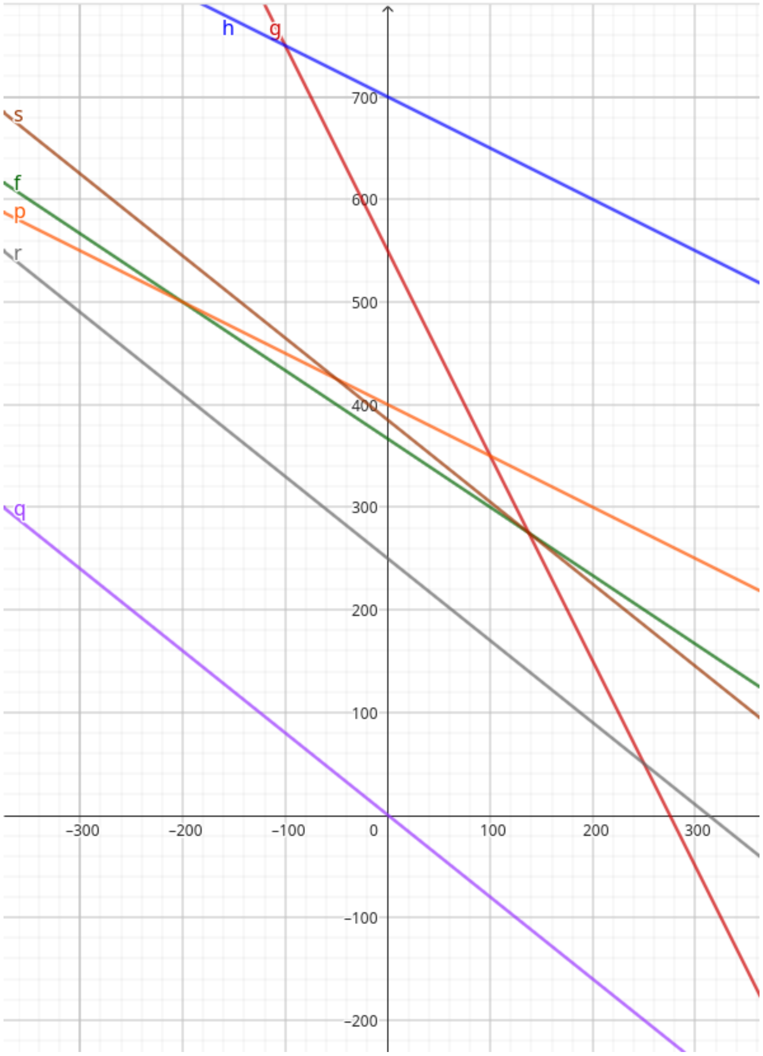
$$\begin{aligned} & 40x + 50y = 0 \\ \iff & 50y = -40x \\ \iff & y = -\frac{40}{50}x \\ \iff & y = -\frac{4}{5}x \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous construisons les fonctions relatives aux contraintes.



	$f(x) = \frac{5500}{15} - \frac{2}{3} x$
	$g(x) = 550 - 2x$
	$h(x) = 700 - \frac{1}{2} x$
	$p(x) = 400 - \frac{1}{2} x$
	$q(x) = -\frac{4}{5} x$

Nous ajoutons maintenant la fonction objective et nous trouvons le point critique de la fonction. Ce point est l'intersection de f(x) et de g(x) puisqu'elle vérifie toutes nos contraintes. Ce point se trouve en (137.5; 275).



$$f(x) = \frac{5500}{15} - \frac{2}{3}x$$

$$g(x) = 550 - 2x$$

$$h(x) = 700 - \frac{1}{2}x$$

$$p(x) = 400 - \frac{1}{2}x$$

$$q(x) = -\frac{4}{5}x$$

$$r(x) = q(x) + 250 = -\frac{4}{5}x + 250$$

$$s(x) = q(x) + 385 = -\frac{4}{5}x + 385$$

La résolution graphique nous dit donc qu'il nous faut vendre 137 versions normales et 275 versions professionnelles si l'on veut respecter nos contraintes humaines et matérielles.

Résolution avec simplex

La méthode de résolution avec simplex se fait grâce à un algorithme présent dans R. Nous devons lui fournir les valeurs de notre fonction à maximiser et les contraintes identifiées.

La première ligne de code permet de définir les coefficients de nos valeurs à optimiser, ici se sont 40 et 50. La deuxième ligne permet de renseigner les coefficients des contraintes sous forme de matrice, dont le nombre de lignes est le nombre de contraintes, ici quatre, et le nombre de colonnes est le nombre de variables, ici deux. Nous remplissons ensuite la matrice avec toutes les coefficients de x puis ceux de y. La troisième ligne permet de renseigner les valeurs maximum pour nos contraintes, elles sont donc quatre pour notre problème. La quatrième ligne permet d'appeler la fonction simplex en lui transmettant les variables définies au-dessus, nous rajoutons également l'information « maxi=TRUE » pour indiquer à la fonction de trouver la valeur maximale. La dernière ligne demande ensuite de retourner le résultat.

```r
library(boot)

z = c(40,50)
A = matrix(c(10,20,1,5,15,10,2,10),4,2)
b = c(5500,5500,1400,4000)
result = simplex(a = z, A1 = A, b1 = b, maxi= TRUE)
result
```

```
##
## Linear Programming Results
##
## Call : simplex(a = z, A1 = A, b1 = b, maxi = TRUE)
##
## Maximization Problem with Objective Function Coefficients
## x1 x2
## 40 50
##
##
## Optimal solution has the following values
##    x1    x2
## 137.5 275.0
## The optimal value of the objective  function is 19250.
```

Le résultat retourné par la fonction correspond aux valeurs trouvées dans la résolution graphique.

Conclusion

Les deux méthodes de résolution utilisées précédemment nous permettent de conclure qu'il nous faut vendre 137 versions normales et 275 versions professionnelles du logiciel. Ces valeurs permettraient d'utiliser au mieux toutes nos ressources.

Si nous arrivons à vendre exactement ces nombres de versions, nous pourrions gagner 19230€ par mois. En enlevant les frais détaillés dans nos contraintes, nous aurions donc un bénéfice de 2830€. Cela semble plutôt positif pour notre entreprise.

Cependant, il apparaît peut probable de vendre plus de versions professionnelles que de versios normales. Il serait donc plus réaliste que nos bénéfices soient plus bas. De plus, nos contraintes peuvent potentiellement évoluer en raison de hausse des salaires ou d'une augmentation des coûts des serveurs.