

# Зміст

<b>1 Введення</b>	<b>3</b>
1.1 Побудова математичної моделі . . . . .	4
1.2 Класифікація моделей . . . . .	6
<b>2 Лінійне програмування</b>	<b>7</b>
2.1 Типові проблеми . . . . .	8
2.2 Геометричний сенс . . . . .	14
2.3 Симплекс-метод . . . . .	24
2.4 Цілочисельне лінійне програмування . . . . .	40
2.5 Проблеми оптимального вибору . . . . .	40
Розв'язування проблем . . . . .	44
<b>3 Нелінійне програмування</b>	<b>53</b>
<b>4 Динамічне програмування</b>	<b>55</b>



# Розділ 1

## Введення

Говорячи про «дослідження операції», ми маємо на увазі пошук рішення якоїсь проблеми, пов'язаної із реальним життям. Дослідження полягає в тому, щоби знайти якнайкращий спосіб представлення реального світу чисельно: у вигляді матриць, векторів або функціональних залежностей. Тоді, використовуючи математичний апарат, відповідь на задачу можна знайти із будь-якою точністю. Після цього її потрібно інтерпретувати вже у «людських» поняттях.

Мистецтво чисельного опису світу називається побудовою **математичної моделі**. Така потреба виникала настільки часто, що з отриманих результатів можна виділити загальні підходи та ідеї, і використовувати їх на інших, ще не досліджених проблемах (операціях).

Цей посібник надає приклади багатьох популярних задач, що можуть бути розв'язані з допомогою лінійного, нелінійного або динамічного програмування, а також аналіз теорії, що стоїть за ними. Автор сподівається, що це дозволить сформувати хороше розуміння дослідження операцій, а також набути інтуїцію, яку потім можна використовувати при

розв'язуванні нових, невідомих досі проблем.

## 1.1 Побудова математичної моделі

Логічно, що з початком аналізу будь-якої задачі, варто виділити ті дані, які подаються як факт – тобто, на них неможливо вплинути, чи змінити будь-як. Це те, біля чого можна написати «дано», і далі подати перелік змінних з присвоєними їм значеннями. Це називається **параметрами операції**, або **некерованими змінними**.

Якщо якісь дані описують одну і ту саму характеристику різних предметів, цілком доцільно об'єднати їх у вектор. Надалі використовуватиметься така нотація:  $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . В тих випадках, коли подані дані є двовимірними, чи відображають деякі залежності, можна використовувати матриці. Наприклад, якщо в умові сказано, що *відомо час перевезення вантажу між кожним із обласних центрів*, то їх можна пронумерувати, а дані помістити, скажімо, в матрицю  $\mathbf{T}$ , де кожен елемент  $t_{ij}$  позначатиме час перевезення з  $i$ -ого міста в  $j$ -те.

Опісля маємо з'ясувати, які ж дані в задачі залишилися невідомими, і їх потрібно знайти – себто, визначити на основі відомих. Вони називаються **керувальними параметрами**, або ж **керованими змінними**. Присвоєння цим змінним конкретних значень і є вирішенням проблеми.

У будь-яких задачах, які читач міг бачити до цього, зазвичай потрібно було з'ясувати значення одного невідомого параметра (деякого  $x$ ), або навіть кількох. При дослідженні операцій може так траплятись, що невідомою буде ціла матриця, або вектор.

Якщо існує таке рівняння, що явно пов'язувало б некеровані змінні з керованими, то розв'язок можна знайти **аналітично**, тобто, обчислити звичайними арифметичними операціями. Наприклад, якщо відомо, що

пропускна спроможність каналу передачі становить  $n$  Мб/с, і потрібно з'ясувати, скільки максимально  $x$  Мб інформації можна передати за  $t$  секунд, то зрозуміло, що відповідь може бути знайдена з формули  $x = tn$ .

Однак бувають такі проблеми, для яких неможливо – або принаймні дуже складно – скласти будь-яке рівняння, тому що у них взаємодіє між собою велика кількість змінних, кожна з яких по-своєму впливає на оптимальність результату в цілому. Тоді розв'язування може нагадувати намагання збалансувати складну систему тягарців: як тільки потягнути за один, одразу ж починають рух інші. Відповідь на такі проблеми найчастіше можна знайти **алгоритмічно**, на кожному з кроків покращуючи оптимальність результату. Власне, саме такий спосіб і використовується найчастіше для дослідження операцій.

Для того, щоби розв'язати задачу алгоритмічно, прийнятою практикою є побудова (опис) деякої множини  $G$ , що містить всі можливі допустимі розв'язки задачі. Звичайно, перед цим потрібно визначити, в якому вигляді ми взагалі шукатимемо розв'язок. Скажімо, якщо треба знайти дві змінні  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , то розв'язком буде вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle$ , і множина розв'язку –  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Іноді рішенням проблеми може бути матриця, чи складніші багатовимірні об'єкти.

Наостанок, для того, щоб оцінити оптимальність будь-якого розв'язку, прийнято вводити **цінову функцію** (інша назва – **коефіцієнт ефективності**), що встановлює чисельну оцінку якості  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Формулювання функції обирається залежно від умови.

Наприклад, якщо невідомі змінні  $x_1, x_2$  встановлюють кількість товару двох видів, яку виготовлятиме завод, а  $c_1, c_2$  – їхню ціну відповідно, то коефіцієнт ефективності можна визначити як прибуток від всього товару загалом:  $\varphi(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2$ . Тоді знайти такий  $\mathbf{X}$ , що забезпечував би максимальний прибуток, означає знайти екстремум  $\varphi$ .

## 1.2 Класифікація моделей

Запропонована структура математичної моделі дозволяє описати будь-яку операцію чисельно, зводячи розв'язування до пошуку такого  $X \in G$ , щоби досягнути мінімуму або максимуму  $\varphi$ . Зрозуміло, що розв'язувати такі проблеми перебором, щонайменш неефективно. На щастя, для цього існують спеціальні методи, проте вони гарантують знаходження адекватного розв'язку лише для якогось конкретного типу математичної моделі. Тому важливо розрізняти, які типи існують взагалі, і вміти визначити їх для моделі своєї задачі. Далі приведено класифікацію математичних моделей за характерною ознакою.

Рішення проблеми знаходиться розв'язком рівняння.

Хоча б одна з величин є випадковою величиною.

Кожен з кроків алгоритму розв'язку покращує рішення, знайдене на попередньому.

На кожному з кроків алгоритму розв'язку приймається найоптимальніше рішення.

Хоча б одна з керованих змінних може приймати тільки цілі значення.

Так

**аналітична**

**стохастична**

**статична**

**дискретна**

Ні

**алгоритмічна**

**детермінована**

**динамічна**

**недискретна**

## Розділ 2

# Лінійне програмування

Одночасно простим для розуміння та корисним на практиці є математичний апарат розв'язку задач лінійного програмування (ЛП), з яким читач познайомиться у цьому розділі.

- У параграфі [2.1 Типові проблеми](#) читач дізнається про деякі типові проблеми ЛП та отримає інтуїтивне розуміння того, як варто формувати ОДР і цінкову функцію.
- У параграфі [2.2 Геометричний сенс](#) описано графічний метод розв'язку проблем ЛП для  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ .
- Параграф [2.3 Симплекс-метод](#) описує симплекс-метод розв'язування ЛП для  $n$ -вимірних проблем ( $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\geq 2}$ ).
- У параграфі [2.4 Цілочисельне лінійне програмування](#) читач дізнається про принцип границь та галузей для розв'язування цілочисельної задачі ЛП.

- У параграфі 2.5 Проблеми оптимального вибору описано постановку та розв'язування ЛП задачі при  $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^n$ .

Задачу можна назвати лінійною тоді, коли цінова функція є функцією першого степеня (2.1), а область допустимих значень може бути описана лінійними рівностями або нерівностями (2.2).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \mathbf{cX}^T, \quad \mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \quad (2.1)$$

$$G = \left\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{array}{|c|} \leq, \geq \text{ або } = \\ \hline \end{array} b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \right\} \quad (2.2)$$

## 2.1 Типові проблеми

Приведені далі постановки задач є типовими. Вони отримали свою назву від проблеми, у вирішенні якої найкраще використовувати такі означення. Якщо їх проаналізувати, то можна отримати відпрацьований математичний апарат для розв'язання більш специфічних задач.

### 2.1.1 Максимізація прибутку

*Фабрика виробляє продукцію  $n$  видів. Для неї потрібна певна кількість сировини  $m$  видів, при чому її є в обмеженій кількості. Відомо можливий прибуток від реалізації кожного з видів продукції. Якщо існує якийсь оптимальний розподіл всієї сировини на виробництво певних видів продукції так, щоби отримати якнайбільший прибуток, то яким буде такий розподіл?*

Якщо між двома некерованими змінними існує відношення, то доцільно описати його у вигляді матриці. Тому нехай в  $\mathbf{A}$  міститимуться



елементи  $a_{ij}$ , кожен з яких означатиме витрату сировини  $i$ -ого виду на виготовлення продукції  $j$ -ого виду. Ще одна некерована змінна  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$  позначатиме кількість відповідної сировини кожного виду, доступної на фабриці. Прибуток від реалізації можна визначити вектором  $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ .

Керованою змінною є вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , кожен елемент якого позначає кількість продукції, яку має виготовити фабрика – ці дані варто змінювати для досягнення оптимальності.

Тоді умовою допустимості розв'язку буде перш за все виконання обмежень на доступну кількість сировини, та деякі очевидні твердження – наприклад, те, що ця кількість має бути невід'ємною (2.3).

$$\mathbf{X} \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

### Проблема №2.1

Чи можна поставити умову так, щоби знайдені  $x_i$  обов'язково повинні були би бути цілими числами?

В означенні (2.3) формулювання  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  позначає суму використаної сировини певного типу на виготовлення ресурсів всіх можливих видів. Відповідно « $\leq b_i$ » позначає, що цією сировини можна використати не більше певної кількості. Умова  $\forall i$  означає, що така нерівність повинна виконуватись для всіх видів сировини.

Цінову функцію потрібно вводити так, щоби вона визначала прибуток від прийнятого рішення. Тоді оптимальним розв'язком буде такий,

що гарантує досягнення її максимуму (2.4).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.4)$$

### Проблема №2.2

Якщо існує така задача, для якої потрібно вводити кілька цінових функцій, і оптимізувати їх одночасно, то якою буде умова такої задачі? Чи існує якийсь універсальний спосіб поєднання кількох оцінок оптимальності в одну?

#### 2.1.2 Мінімізація витрат

Розглянемо задачу, подібну тій, що поставлена у розділі 2.1.1. *Фабрика отримує сировину  $n$  видів, з якої виготовляє товар за  $m$  різними технологіями. Кожна з технологій потребує певну комбінацію сировини у різних кількостях. Разом з тим, кожна з технологій спричиняє в атмосферу викид певної кількості кілограм вуглецю. Для кожного виду сировини визначена доступна кількість, яку можна використати для виробництва. Потрібно оптимізувати виробництво так, щоби отримати якомога більше готової продукції, але водночас зменшити кількість шкідливих викидів.*

Що в цій задачі уже відомого? Найперше – відношення технології та сировини, яку вона потребує. Запишемо це в матрицю  $\mathbf{A}$ , в якій кожен елемент  $a_{ij}$  позначатиме витрату сировини  $i$ -ого типу за  $j$ -ою технологією. Викиди різних технологій можна зберігати у векторі  $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_m \rangle$ , а кількість доступної сировини кожного виду – як  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ .

Що потрібно знайти? Потрібно знайти кількість товару, яка буде виготовлена за кожною з технологій. Тому позначимо її через вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . При пошуку значення різних  $x_j$  доведеться вирішити

дилему: користуватись технологіями, які потребують меншу кількість сировини, але спричиняють більше викидів, чи навпаки?

Будь-який розв'язок  $\mathbf{X}$  буде допустимим, якщо задовольнятиме дві умови: використано ресурсів не більше, ніж доступно взагалі, і жоден з  $x_j$  не є від'ємним. Тому ознака допустимості розв'язку є такою самою, як і (2.3) – ми використовуємо ті самі назви змінних, тому формула не втрачає свого змісту. Тепер формулювання  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  позначатиме кількість сировини певного виду, використаної загалом, за якими технологіями б не відбувалось виробництво.

Допоки розв'язок допустимий, він використовуватиме лише доступну кількість сировини. Однак різні розв'язки все ще спричиняють різний викид вуглецю, тому оптимальність кожного з них визначатимемо саме за цим параметром. Цінова функція знову така сама, як і в (2.4), проте цього разу її доцільно мінімізувати.

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{X}^T \rightarrow \min_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.5)$$

Тепер, після ознайомлення з двома задачами, важливо розуміти, що не існує жодних правил, як варто складати формулювання ОДР чи цінової функції, так само як і неможливо передбачити всі можливі «типові задачі». Формулювання будь-якої математичної моделі залежить винятково від області дослідження та винахідливості дослідника.

### 2.1.3 План перевезень

Досі ми розглядали задачі, де невідомою керованою змінною був вектор – тобто, кількість чогось різних видів, або оптимальна конфігура-

ція різних характеристик. Чи можливо тепер за допомогою лінійного програмування розв'язати якусь проблему, що встановлюватиме конфігурацію відношення? Тобто, цього разу невідоме  $X$  буде двовимірним – матрицею.

Компанія має у своєму розпорядженні  $n$  зерносховищ та  $m$  постачальників зерна. Кожне зерносховище може зберігати певну кількість тон зерна, купленого у різних постачальників. З ними укладено контракт, за яким компанія зобов'язується викупити щонайменш певну кількість тон за раз. Відомі затрати на перевезення зерна від кожного постачальника до кожного сховища – скажімо, час, відстань, паливе тощо. Потрібно визначити, скільки зерна між різними постачальниками та відповідними сховищами доцільно перевезти, щоби отримати якомога менші витрати, та перевезти якомога більше вантажу.

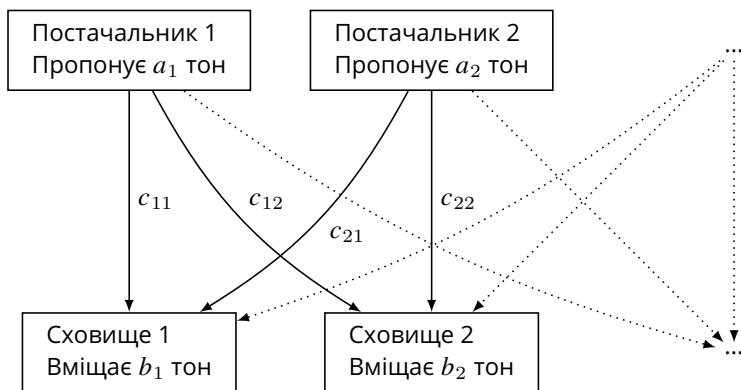


Рис. 2.1: Кожен з постачальників пропонує  $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$  тон, а кожне зі сховищ може зберігати до  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ . Затрати на перевезення між ними задаються матрицею  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Отже, умову проблеми можна зобразити у вигляді графа, що на Рис. 2.1. Зрозуміло, що некерованими змінними є  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  та  $\mathbf{C}$ . Тоді розв'язком

буде матриця  $\mathbf{X}$ , кожен елемент  $x_{ij}$  якої задаватиме «оптимальну» кількість тон, яку варто перевезти між  $i$ -им постачальником та  $j$ -им сховищем. Саме така конфігурація, що буде задана цією матрицею і гарантуватиме найменші витрати та якнайбільше заповнення сховищ.

Ця проблема є класичним випадком транспортної задачі, і для її розв'язку існують інші методи, про які можна дізнатись у наступних розділах. Попри це, розв'язок саме лінійним програмуванням є досить цікавим.

Тепер ОДР повинно мати такі обмеження:

- потрібно вивезти весь товар, що надають постачальники;
- до кожного зі сховищ не можна привезти більше, ніж воно може вмістити.

Тоді умову допустимості розв'язку можна записати як 2.6.

$$\mathbf{X} \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i \quad \forall j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_j \quad \forall i = \overline{1, m} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Щоби порахувати затрати при поточному плані перевезення, достатньо перемножити значення  $c_{ij}$  з матриці затрат на значення  $x_{ij}$ . Оптимальним буде той розв'язок, у якому це значення найменше, тому вводимо цінову функцію (2.7), і вимагаємо її мінімізації.

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.7)$$

**Проблема №2.3**

Нехай матриця  $C$  відображає не затрати на перевезення, а максимальну пропускну здатність маршруту. Скажімо, в день по дорозі між  $i$ -им постачальником та  $j$ -им сховищем можна перевезти не більше, ніж  $c_{ij}$  тон вантажу. Потрібно знайти таке завантаження  $X$  різних доріг, щоби перевезти якомога більше вантажу. Допускається ситуація, коли не весь вантаж буде вивезено від постачальників. Як сформулювати ОДР та цінову функцію?

## 2.2 Геометричний сенс

Двовимірні та (іноді) тривимірні випадки лінійного програмування можна розв'язувати графічно. Розуміння геометричних процесів, які відбуваються при відшукуванні розв'язку допоможуть при розв'язуванні багатовимірних задач.

### 2.2.1 Двовимірний випадок

Розгляньмо випадок, коли вектор  $X$  складається з двох координат  $x_1$  та  $x_2$  (тобто,  $X \in \mathbb{R}^2$ ). В ідеальному випадку множина ОДР  $G \in \mathbb{R}^2$  утворює на площині деяку замкнену область, як показано на Рис. 2.2. Зрозуміло, що коли обрати будь-яку точку з неї, то такі координати  $\langle x_1, x_2 \rangle$  є допустимим розв'язком. Допустимих розв'язків існує безкінечна кількість (оскільки ми оперуємо множиною дійсних чисел, яка сама по собі є континуумом), але найоптимальнішим буде той, для якого цінова функція  $\varphi(X)$  визначає якнайбільше число. Як можна знайти такий розв'язок графічно?

Проаналізуймо цінову функцію. В загальному випадку вона мати-

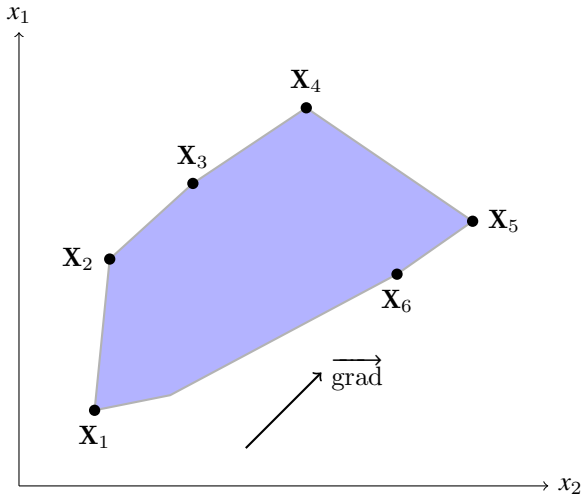


Рис. 2.2: ОДР утворює опуклий багатокутник на площині.

ме вигляд  $\varphi = c_1x_1 + c_2x_2$ , тобто утворюватиме площину в тривимірному просторі з координат  $\langle x_1, x_2, \varphi \rangle$ . Це можна уявити як на Рис. 2.3. Тоді допустимі розв'язки лежатимуть всередині проекції ОДР на площину цінкової функції. З рисунку добре видно, в яку сторону вона зростає, тож тепер зрозуміло, що точка  $X_1$  є допустимим розв'язком з мінімально можливим  $\varphi$ , а  $X_5$  – з максимальним  $\varphi$ . Тоді обидві точки будуть розв'язками задачі на мінімізацію та максимізацію цінкової функції відповідно.

Чи існує більш практичний спосіб, без потреби відмальовування тривимірних площин? Оскільки  $\varphi$  – лінійна функція, то за будь-яких  $x_1$  та  $x_2$  вона є неперервною, і зростає завжди однаково. Тобто, при будь-яких аргументах вектор градієнту завжди буде однакової довжини та спрямований в однаковому напрямку. Це означає, що на звичайному двовимірному малюнку достатньо позначити вектор  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  (як і показано на Рис. 2.2). Тоді розв'язком задачі на максимізацію буде точка, що лежить

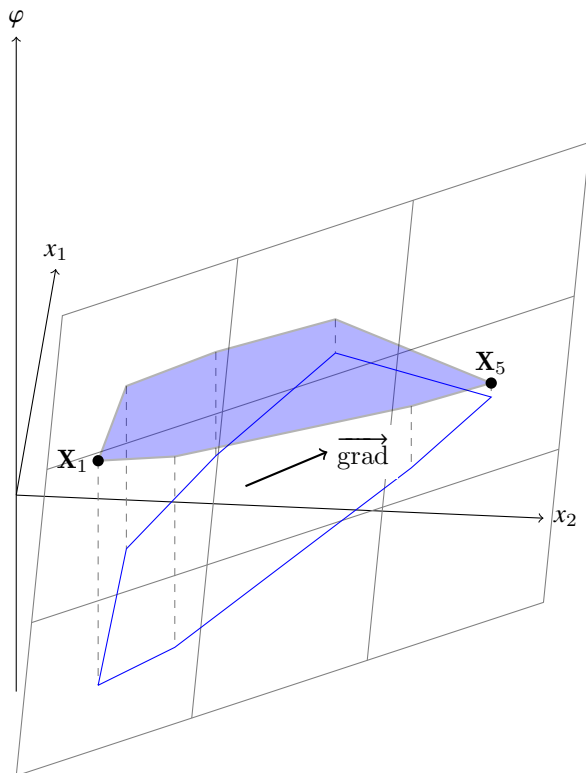


Рис. 2.3: Погляд на ОДР з іншої перспективи. Пунктиром позначено проекцію  $G$  на  $\varphi$ .

якнайдалі у напрямку цього вектору. Аналогічно при мінімізації оптимальна точка розв'язку лежатиме у протилежному напрямку.

Продемонстрованим прикладом також можна пояснити випадок, коли цінова функція не є площиною, а має якийсь складніший вигляд, хоч це вже не буде задачею ЛП. Проекція  $G$  на  $\varphi$  сформує набір точок  $\langle x_1, x_2, \varphi \rangle$ , а оптимальним розв'язком буде та, що матиме найбільшу або найменшу координату  $\varphi$ .



**Проблема №2.4**

Чи можна для розв'язування такої задачі використати метод градієнтного спуску? Яким чином його потрібно модифікувати? Які це дасть переваги? Які можуть виникнути проблеми?

**Проблема №2.5**

Чи можна з допомогою системи лінійних рівнянь описати таку ОДР, яка утворюватиме неопуклий багатокутник? Як це працюватиме у вищих вимірах?

**Висновки**

- оптимальний розв'язок може бути розташований в одній з кутових точок <sup>a</sup>;
- кутова точка є оптимальним розв'язком, якщо жодна з сусідніх точок не є оптимальнішою.

---

<sup>a</sup>(англ.) *extreme point*

## 2.2.2 Розв'язування задачі

Розглянемо деяку специфічну задачу. Броварня виготовляє ель та пиво. Виробництво кожного з них вимагає певної комбінації кукурудзи, хмелю та ячмінного солоду на 1 умовну одиницю (бочку, партію тощо). Кількість ресурсів обмежена. Кожен продукт має свою ціну. Параметри виробництва показано на Рис. 2.4. Потрібно розрахувати оптимальну кількість виробництва двох продуктів, щоби отримати якнайбільший прибуток.

Некеровані змінні можна позначити вектором  $\mathbf{a} = \langle 220, 5, 540 \rangle$  (кількість доступних ресурсів на складі),  $\mathbf{b} = \langle 213, 485 \rangle$  (прибуток від ко-

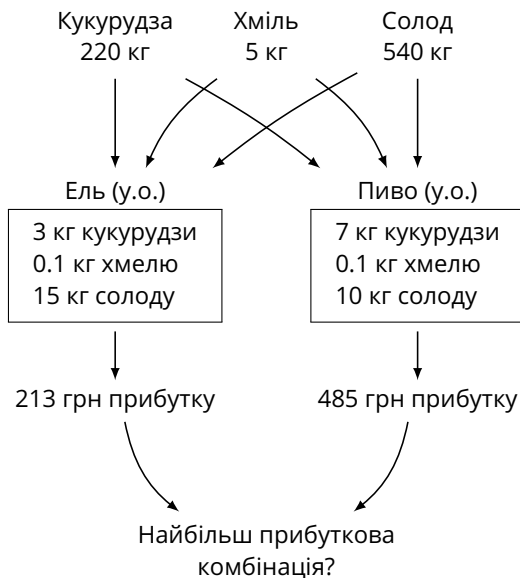


Рис. 2.4: Запаси ресурсів, параметри виробництва та прибутковість елю й пива.

жного з товарів) та матрицею  $\mathbf{A}$  (2.8), де  $a_{ij}$  позначатиме витрату  $i$ -ого ресурсу на  $j$ -ий продукт. Вартість кожного з продуктів визначатиме вектор  $\mathbf{c} = \langle 213, 485 \rangle$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0.1 & 15 \\ 7 & 0.1 & 10 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Тоді керованою змінною є вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle$  координати якого позначають скільки бочок елю та пива потрібно виготовити відповідно. Якщо розв'язок лежить в ОДР, мусять виконуватись такі умови:

- кількість використаних кукурудзи, хмелю та солоду не повинна перевищувати доступної;

- не можна виготовити від'ємну кількість продукції.

Кількість, використаної кукурудзи обраховується як  $3x_1 + 7x_2$  (тобто, залежить від того, скільки виготовляється обох видів продукту). Оскільки маємо на неї обмеження, можна скласти нерівність  $3x_1 + 7x_2 \leq 220$ , що повинна виконуватись для допустимості розв'язку. Аналогічно складаються решту нерівностей, що утворюють ОДР задачі (2.9).

$$\mathbf{X} \in G \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 7x_2 \leq 220 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 5 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 540 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Разом з тим оптимальність будь-якої комбінації  $x_1$  та  $x_2$  доцільно визначати за кількістю прибутку, що вона приносить. Тому цінова функція набуде вигляду (2.10).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{Xc}^T = 213x_1 + 485x_2 \rightarrow \max_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.10)$$

На Рис. 2.5 показано ОДР та градієнт цінової функції. З отриманого рисунку видно, що точка з ОДР, найдалі розташована у напрямку градієнта (а значить у напрямку зростання оптимальності), міститься в координатах  $x_1 = 21.067$  та  $x_2 = 22.4$ . Це і є оптимальним розв'язком задачі.

#### Проблема №2.6

Яким був би оптимальний розв'язок задачі, якби знак « $\leq$ » в ОДР замінити на « $<$ »?

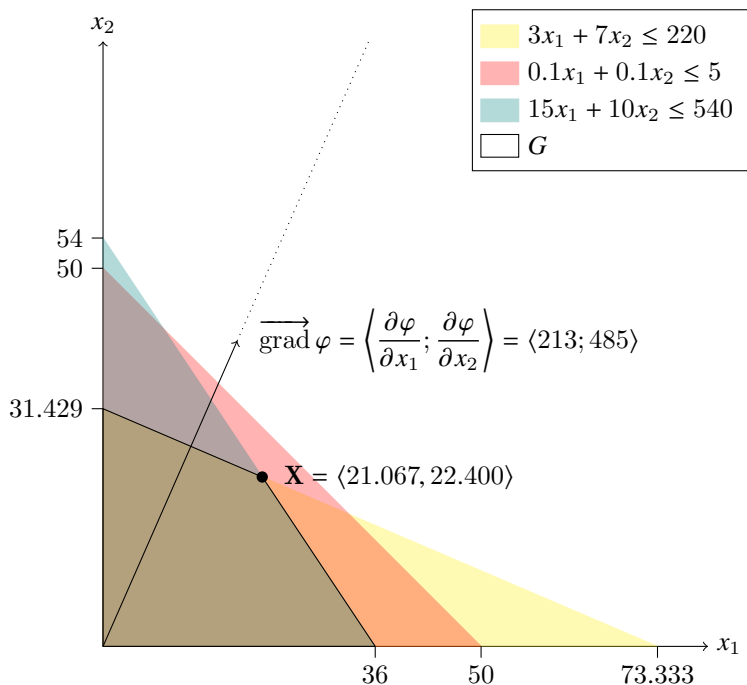


Рис. 2.5: ОДР задачі на двовимірній площині, що утворюється трьома нерівностями та обмеженнями на додатність  $x_1$  і  $x_2$ .

### Проблема №2.7

Якби  $x_1$  та  $x_2$  визначали б не умовні одиниці, а вимірювалися б у бочках (тобто, тепер  $\mathbf{X} \in \mathbb{Z}^2$ ), яким чином розв'язок такої задачі можна знайти графічно?

Як видно, графічний спосіб розв'язку досить зручний і простий. Однак коли результат потрібно отримати з високою точністю, таке розв'язування стає дуже складним та непрактичним, не кажучи вже про те, що реальні задачі рідко коли бувають двовимірними. Проте потрібно віддати належне – графічний спосіб ідеальний для уяочнювання даних.

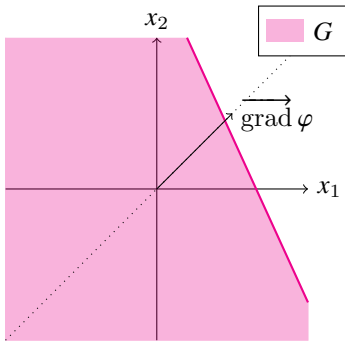


Рис. 2.6: ОДР складається з однієї нерівності, тому є необмеженою зі сторони від'ємних  $x_1$  та  $x_2$ . Тут можна розв'язати задачу на максимізацію, однак розв'язком мінімізації буде точка  $(-\infty, -\infty)$ .

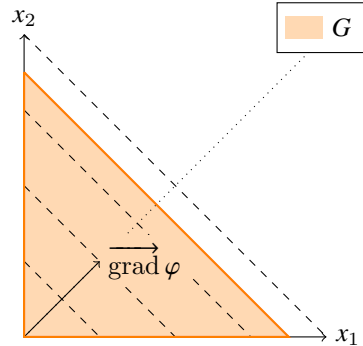


Рис. 2.7: Іноді неможливо визначити точку, що лежить найдалі за напрямком градієнта, оскільки всі точки на деякій лінії мають однакову оптимальність. В такому разі вони всі є оптимальними, і не існує єдиного  $\mathbf{X}$ .

### Проблема №2.8

Чи можна якимось чином зменшити вимірність проблеми  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{>2}$ , щоби скористатись графічним способом розв'язування?

## 2.2.3 Крайнощі

Описані раніше випадки, взагалі кажучи, є ідеальними, а із задачею нам просто пощастило.

Найперша проблема, яку іноді можна отримати – ОДР не є замкнутою, як показано на Рис. 2.6. В такому разі з тієї сторони, з якої ОДР необмежена, єдиного розв'язку не існує, позаяк до нього можна наближу-

ватись безкінечно. Якщо така відповідь є допустимою, розв'язком можна вважати точку  $\langle \pm\infty, \pm\infty \rangle$ , однак найчастіше подібний результат просто не є адекватним.

Іноді оптимальних розв'язків існує *безкінечна кількість*. Подібне формулювання може заплутати, і створити враження, ніби оптимальними є взагалі всі можливі розв'язки, хоча це не так. Така ситуація продемонстрована на Рис. 2.7. У відповіді до цієї задачі доречно просто описати закон розрахунку оптимальних  $x_1$  та  $x_2$ .

Може так трапитись, що нерівності, з яких складається ОДР, ніде не перетинаються одночасно, як показано на Рис. 2.8. В такому разі ОДР порожня, а отже жодного оптимального розв'язку не може існувати за визначенням.

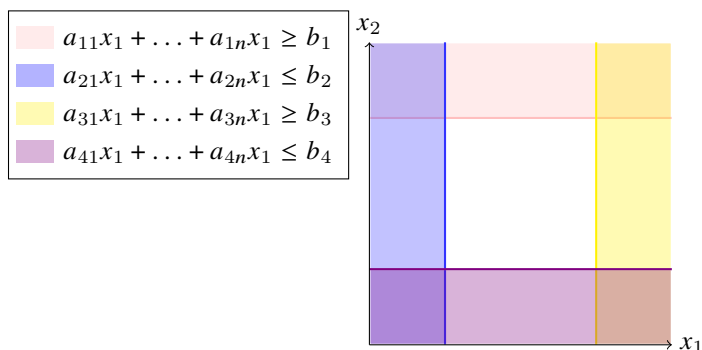


Рис. 2.8: ОДР складається з 4 нерівностей, однак не існує жодної такої області, де вони всі перетиналися б одночасно. Тому  $G = \emptyset$ .

## 2.2.4 Тривимірний випадок

Якщо у двовимірному просторі набір лінійних нерівностей може відтинати багатокутник, то у тривимірній області  $G$  ми отримуємо багато-

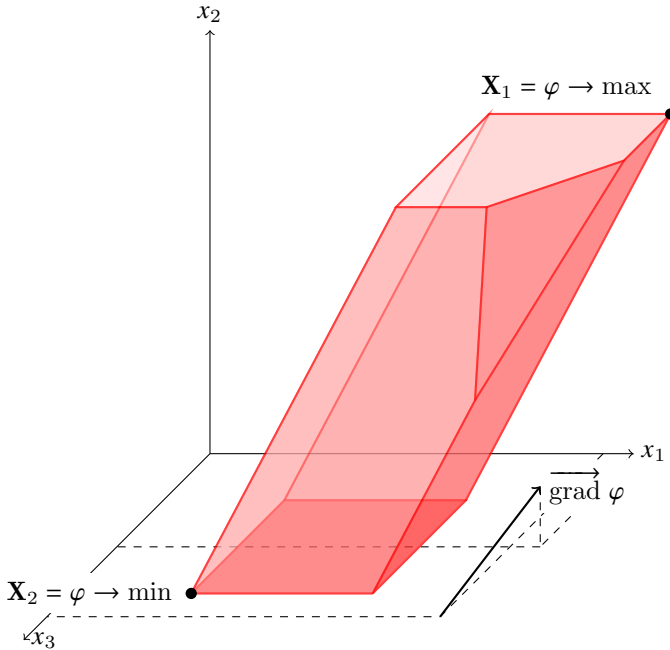


Рис. 2.9: Оскільки така фігура має 7 граней, можна зробити висновок, що вона утворена 7-ома нерівностями. Будь-яка точка  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  всередині неї є допустимим розв'язком. Зважаючи на напрямок вектора градієнту, точка  $X_2$  є розв'язком задачі на мінімізацію, а  $X_1$  – на максимізацію цінової функції.

гранник. Приклад такої фігури показано на Рис. 2.9. В цьому випадку читачу може бути складно уявити цінову функцію  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , позаяк вона є чотиривимірною, однак сенс залишається той самий: якщо перелік всіх точок фігури посортувати за тим, наскільки «далеко» вони розташовані в напрямку вектора-градієнта (а він тривимірний), то це одночасно буде перелік, посортований за зростанням оптимальності. Можна ще уявити це як зростання температури, яскравості чи будь-якої іншої простої для

розуміння характеристики в певному напрямку.

Хоча отримана фігура досить проста на вигляд, малювати площини та визначати їхні перетини від руки насправді дуже складно. У вищих вимірностях проблема стає практично нерозв'язуваною. Тому хороший дослідник потребує більш точних аналітичних методів.

## 2.3 Симплекс-метод

Математичний апарат – це лише інструмент для створення алгоритму. Позаяк ним, ймовірно, користуватимуться не тільки дослідники-математики, а й люди інших професій, які не завжди володіють інструментами лінійної алгебри тощо, новий алгоритм може повністю інкапсулювати всі складні математичні поняття. Саме це сталося із симплекс-методом. Тому в нас неодмінно виникнуть деякі суперечності у поняттях в межах самого алгоритму та математичних інструментів.

Симплекс-метод – це інструмент, яким можна аналітично розв'язувати багатовимірні задачі ЛП за умови, що вони приведені до деякого стандартного вигляду. Його головна ідея природно впливає з висновків на с. 17:

- якщо оптимальний розв'язок розташований в одній з кутових точок, потрібно отримати список всіх їхніх координат;
- опісля обраховуємо значення цінкової функції  $\varphi$  у всіх точках;
- обираємо точку з найбільшим  $\varphi$ , тобто найбільшою оптимальністю – розв'язок знайдено.



## Проблема №2.9

Якщо дійсно реалізовувати таку ідею – як визначити випадок, коли весь відрізок між двома точками визначає оптимальні розв'язки? Як узагальнити це для багатовимірних просторів?

Насправді це не зовсім вдале рішення, бо в промислових умовах задачі ЛП можуть мати тисячі різних рівнянь, тому часові та обчислювальні затрати на те, щоби визначити, які з них утворюють між собою перетини та обчислення їхніх координат, будуть просто неадекватними. Натомість ми трохи ускладнюємо процес:

- починаємо обхід фігури з деякого початкового рішення (**опорного плану**<sup>1</sup>), яке точно є допустимим – наприклад  $X_0 = \langle 0, 0, \dots \rangle$ ;
- аналізуємо цінову функцію: якщо збільшення якоїсь зі змінних призведе до її зростання, то збільшуємо її, наскільки можливо;
- використовуємо при цьому такий базис простору, в якому достатньо збільшувати лише одну координату, щоби потрапити в сусідню точку ОДР;
- перераховуємо коефіцієнти цінової функції так, щоби вона показувала, які зі змінних можна ще збільшувати;
- якщо зміна значень всіх змінних призведе до спадання  $\varphi$ , то найоптимальніший розв'язок вже знайдено.

Для реалізації цього алгоритму використовується апарат лінійної алгебри. Дуже часто його залишають без пояснення, тож допитливий дослідник отримує лише інструкцію до виконання – незрозумілу та дуже аб-

---

<sup>1</sup>(англ.) *basic feasible solution*

стракту. Щоби уникнути такої ситуації, ми дослідимо математичний апарат, який лежить в основі алгоритму, аналізуючи концепти, які спершу, можливо, видаватимуться зовсім непов'язаними один з одним. Проте пізніше читач по-справжньому оцінить їхню елегантність.

### 2.3.1 Математичний апарат

#### Люзові змінні

Будь яку лінійну нерівність  $f(x_1, \dots) \leq b$  можна перетворити у рівність  $f(x_1, \dots) + s = b$ . Тоді при  $s = 0$  ми отримаємо лінію, яка лежить на межі області нерівності. При збільшенні  $s$  вона буде паралельно переноситись все далі від цієї межі, аж доки при  $s = b$  не пройде через центр координат. Отже, при всіх  $s \geq 0$  отримане рівняння описуватиме всі можливі точки  $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  всередині області нерівності. Це показано на Рис. 2.10 та Рис. 2.11. Такі змінні  $s$  називається **люзовими**<sup>2</sup>.

Проаналізуємо нерівність  $f(x_1, x_2, \dots) \leq b$ , якою зазвичай задаються умови на ОДР задачі лінійного програмування. Її можна переписати так:

$$\begin{array}{rcll} f(x_1, x_2, \dots) & \leq b & \equiv & \\ f & + s = b & \forall s > 0 & \equiv (1) \end{array}$$

$$s = b - f \quad \forall x_1, x_2, \dots \quad (2)$$

На кроці (1) ми ввели люзову змінну, а на кроці (2) – перенесли  $f$  в праву частину рівняння. Оскільки  $b$  завжди позначає кількість доступного ресурсу, а  $f$  – функція, що обраховує кількість використаних (перемножуючи  $x_1, x_2, \dots$  на відповідні  $a_{n1}, a_{n2}, \dots$ ), то логічно, що  $s$  можна інтерпретувати як *кількість невикористаних ресурсів*.

<sup>2</sup>(англ.) *slack variables* для нерівностей зі знаком « $\leq$ », *surplus variables* для нерівностей « $\geq$ ».

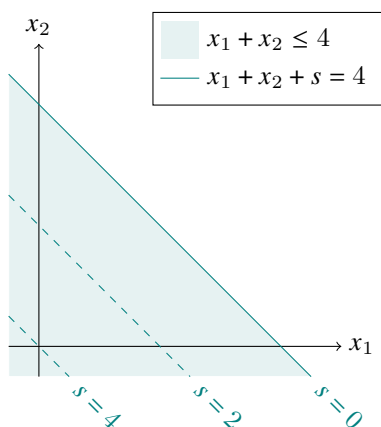


Рис. 2.10: Нерівність  $x_1 + x_2 \leq 4$  утворює область, межу якої можна описати рівнянням  $x_1 + x_2 + s = 4$  при  $s = 0$ . При  $s = b = 4$  ця лінія проходить через центр координат.

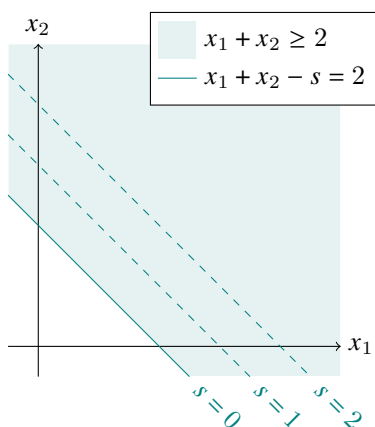


Рис. 2.11: Для того, щоби отримати такий самий ефект для нерівностей « $\geq$ », змінну  $s$  потрібно включити у рівняння прямої зі знаком « $-$ ».

**Система рівнянь з люзовими змінними**

Нехай маємо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{cases}.$$

Введемо змінну  $\delta_n$ . Якщо  $n$ -на нерівність в системі має знак « $\leq$ », то  $\delta_n = 1$ , а якщо навпаки – то  $\delta_n = -1$ . Тепер систему нерівностей можна переписати як систему рівностей, а також отримати аналогічний запис у матрично-векторному вигляді.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - s_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ще коротший запис –  $\mathbf{AX}^T + \delta\mathbf{s}^T = \mathbf{b}^T$ . Аналогічно можна представити систему нерівностей будь-якої вимірності.

**Проблема №2.10**

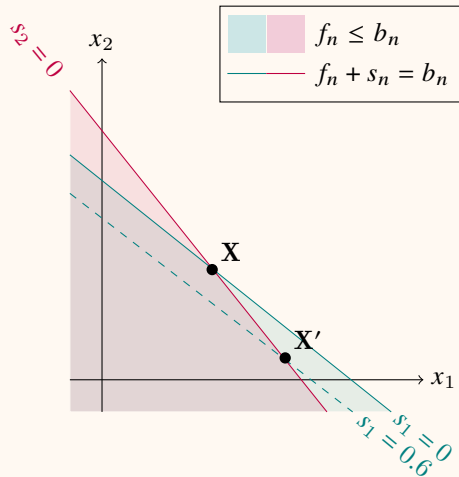
Нехай  $\delta$  – одинична матриця. Який висновок можна зробити про систему нерівностей? Який вигляд матиме ОДР, якщо створити додаткову умову  $\forall i : x_i \geq 0$ ?

## Проблема №2.11

Маємо систему з люзовими змінними за прикладом, що вище. Змінним  $x_1$  та  $x_2$  присвоєно деякі значення так, що вони визначають розв'язок системи. Зрозуміло, що при зміні їхнього значення,  $s_1$  та  $s_2$  потрібно перерахувати, щоби рівності знову справджувались. Якою буде формула для обрахунку нових люзових змінних?

## Проблема №2.12

Аналізуємо ту саму систему рівнянь. Нехай при значеннях  $s_1 = s_2 = 0$  система має деякий розв'язок  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle$ , як показано на рисунку нижче. Очевидно, що якщо змінити значення  $s_1$ , то розв'язок системи теж зміниться. Як знайти його?



## Оцінка росту функції

Нехай маємо цінкову функцію у загальному вигляді  $\varphi = c_1x_1 + c_2x_2$ .

Уявімо також, що на площині визначена деяка точка  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Дозволено

збільшувати одну з її координат. Яку з них доцільно обрати таку, щоби значення  $\varphi$  зростало якнайшвидше?

«Найвигіднішу» координату можна обрати як за допомогою частинного диференціювання, так і користуючись простою арифметичною логікою: у значення  $\varphi$  найбільший вклад вносить така змінна  $x_i$ , біля якої стоїть найбільший коефіцієнт  $c_i$ . Приклад конкретної задачі показано на Рис. 2.12.

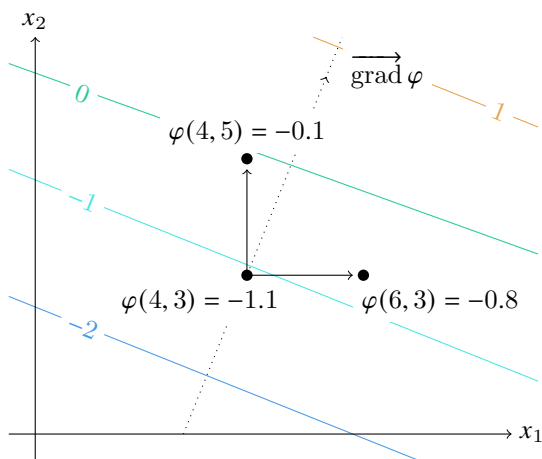
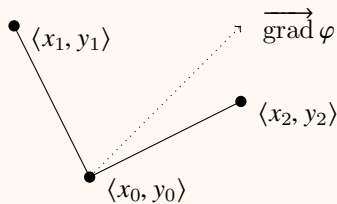


Рис. 2.12: Ізолініями позначено значення функції  $\varphi = 2x_1 + 5x_2$ . Видно, що збільшення координати  $x_2$  дає більший зріст  $\varphi$ , ніж збільшення  $x_1$  на те саме значення. Це стається тому, що  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ , або по-іншому:  $c_1 > c_2$ .

## Проблема №2.13

З точки  $\langle x_0, y_0 \rangle$  можна перейти до  $\langle x_1, y_1 \rangle$  або  $\langle x_2, y_2 \rangle$ , а цінова функція задана як  $\varphi = xc_1 + yc_2$ . Чи можна за рисунком оцінити, перехід до якої точки призведе до найбільшого зростання  $\varphi$ ? Чи можна також зробити це аналітично, не обраховуючи значення  $\varphi$ ? Якщо можна, то як? Чи працюватиме це для багатовимірних просторів?



## Люзові змінні як базис

Погляньмо ще раз на Рис. 2.10. Можна уявити, що  $s$  змінюється по деякій діагональній осі. Спробуймо провести її на графіку, викинувши якусь іншу, наприклад,  $x_2$ , як на Рис. 2.13. Така дія називається «переходом до нового базису». Використовуючи нові осі, можна представити будь-яку точку двовимірного простору. Таку систему координат ми називаємо «простором з базисом  $\langle x_2, s \rangle$ ». Якщо в ньому рухати якусь точку, змінюючи всього одну координату, то легко побачити, що аналогічний рух на графіку з базисом  $\langle x_1, x_2 \rangle$  вимагатиме зміни двох координат одночасно, як на Рис. 2.14.

Чому це може бути зручно? Справа в тім, що в новому базисі  $\langle x_1, s \rangle$  моделювати рух по потрібній лінії досить просто – ми ж змінювали лише одну змінну. Водночас, завжди є можливість повернутись назад, до звичного базису  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , отримавши нові координати, які інакше довелося б розраховувати, наприклад, з рівняння прямої.

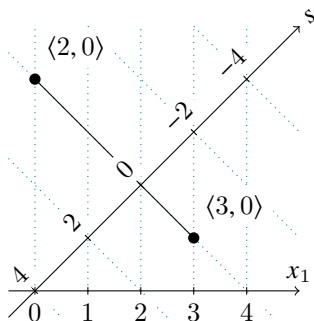


Рис. 2.13: Нові осі теж створюють двовимірний простір – щоправда, трохи «спотворений». Вздовж всієї лінії змінюється лише координата  $x_1$ , а  $s_1$  залишається сталою.

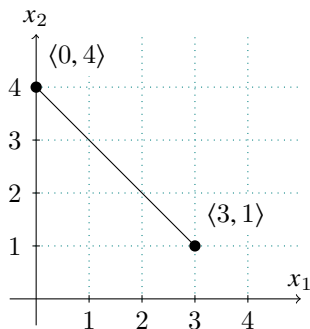


Рис. 2.14: Той самий шлях у базисі  $\langle x_1, x_2 \rangle$  вимагає зміни двох координат  $x_1$  та  $x_2$  одночасно.

Операція заміни базису є тривіальним завданням в лінійній алгебрі. Нові координати можуть бути обчислені за допомогою спеціальних матриць переходу, або з системи рівнянь.

#### Проблема №2.14

Чи можна створити такий простір  $O$ , в якому рух по прямій перетворювався би в рух по колу в просторі  $R$ ? Якими будуть формули переходу? Яку мінімальну вимірність повинні мати такі простори? Чи є таке перетворення лінійним?

Нехай ми маємо, наприклад, систему рівнянь таку, як показана на Рис. 2.15. Можна побачити, що перебуваючи в базисі  $\langle x_1, s_1 \rangle$ , і змінюючи лише координату  $x_1$  при  $s_1 = 0$  можна потрапити з точки  $X_1$  до  $X_2$ . Для



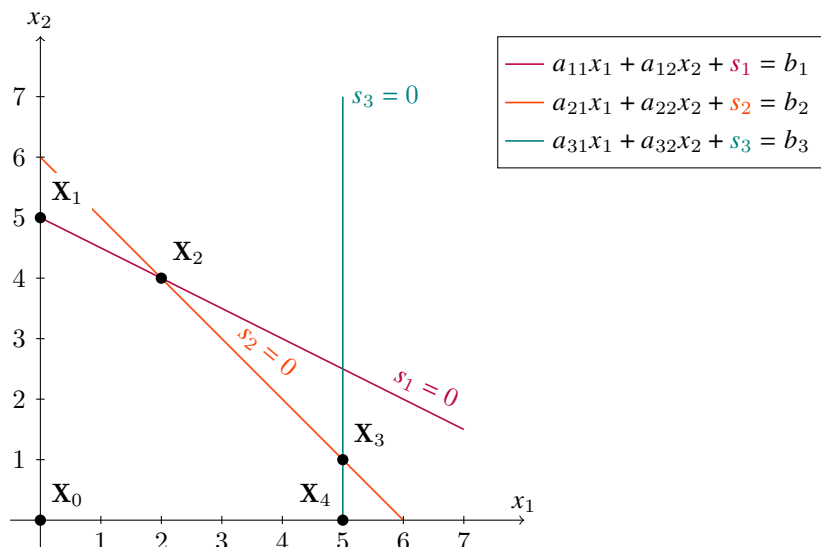


Рис. 2.15: Три рівняння при  $s_{1,2,3} = 0$  та осі  $x_1$  і  $x_2$  замикають область опуклого п'ятикутника. На перетинах усіх ліній позначено точки  $X_0 \dots X_4$ . Для простоти зображення відповідні осі  $s_1$ ,  $s_2$  та  $s_3$  не показано.

того, щоби здійснити наступний перехід до  $X_3$ , зручно включити в базис  $s_2$ . Тепер він складатиметься з трьох змінних, і оскільки ми працюємо з двовимірним простором, одну з них можна «викинути». Зазвичай «викидають» ту змінну, значення якої ми вже змінили раніше.

Читач вже знає, що при збільшенні  $s_i$  лінія рівняння з відповідною люзовою змінною наближатиметься до центру координат. Якщо ж навпаки деяке  $s_i < 0$ , то така лінія виходить за межі ОДР. Тому, вводячи люзові змінні, ми повинні створити ще одне обмеження ОДР –

$$\forall i : s_i \geq 0.$$

Позначатимемо надалі перехід від однієї точки до іншої знаком  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  « $\rightarrow$ » – стрілкою, над якою позначено базис, у якому зручно моделювати таке переміщення.

Отже, рух вздовж фігури, що окреслена заданою системою рівнянь, матиме такий вигляд:  $X_0 \xrightarrow{\langle x_1, x_2 \rangle} X_1 \xrightarrow{\langle x_1, s_1 \rangle} X_2 \xrightarrow{\langle s_2, s_1 \rangle} X_3 \xrightarrow{\langle s_2, s_3 \rangle} X_4 \xrightarrow{\langle x_1, s_3 \rangle} X_0$ . Як видно, така техніка дозволяє навіть, збільшуючи  $s_3$  і утримуючи  $x_1 = 0$ , потрапити у точку  $X_0$ , тобто, фактично, зробити крок назад.

### Висновки

Якщо уважно прослідкувати за поданим рухом, то можна помітити, що змінна, яка входить в новий базис – це завжди та, що визначає лінію, яка перетинається з траєкторією руху найперша. До прикладу: якщо ми рухаємось вздовж осі  $x_2$  в напрямку зростання, то спочатку ми перетинаємо лінію  $s_1 = 0$ , а тоді –  $s_2 = 0$ . Отже в новий базис замість  $x_2$  (яку ми вже змінювали раніше) увійде  $s_1$ .

Якщо повторити цю проблему у тривимірному, або в будь-якому  $n$ -вимірному просторі, то базис переходу міститиме три, або  $n$  змінних відповідно. Такі процеси вже неможливо візуалізувати, саме тому так важливо створити хорошу аналітичну модель.

### Оцінка росту функції в новому базисі

Зрозуміло, що в процесі ходу алгоритму ми переходимо від якогось  $X_a$  до  $X_b$  не просто так, а лише тому, що  $\varphi(X_b) > \varphi(X_a)$ , і ці дві точки є сусідніми. Читач вже знає, що для оцінки того, значення якої змінної варто змінювати, потрібно просто порівняти коефіцієнти  $c_i$ . Однак що робити, коли цінова функція задана як  $\varphi(x_1, x_2)$ , а ми перебуваємо в базисі, наприклад,  $\langle x_1, s_1 \rangle$ ? Маючи систему рівностей таку саму, як приведено на

Рис. 2.15, можна виразити  $x_2$  з першого рівняння. Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 &= b_1 && \equiv (1) \\
 x_2 &= \frac{b_1 - s_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} && ; (2) \\
 \varphi(x_1, x_2) &= c_1x_1 + c_2x_2 && \Rightarrow (2.11) \\
 \varphi(x_1, s_1) &= c_1x_1 + c_2 \left( \frac{b_1 - s_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} \right) && \equiv (3) \\
 \varphi(x_1, s_1) &= c_2a_{12}c_1x_1 - c_2b_1 - c_2s_1 - c_2a_{11}x_1
 \end{aligned}$$

Тепер ми отримали цінову функцію, яка залежить від аргументів нового базису. При чому, вона є лінійною. Тому тепер для оцінки оптимального напрямку достатньо лише порівняти коефіцієнти при відповідних змінних. Аналогічний процес відбуватиметься при переході між будь-якими кутовими точками фігури.

### Базис симплекс-методу

Раніше, для того, щоби вивести з базису змінну  $x_2$ , і ввести  $s_1$ , ми відшукали в системі рівнянь таке, що містить  $s_1$  лише один раз (2.11.1), розв'язали його відносно змінної, яку виводимо (2.11.2), і тоді замінили отриманим виразом виведену змінну (2.11.3). Для того, щоби така операція була завжди зручною, можна підтримувати систему рівнянь у такому вигляді, щоби всі рівняння були розв'язані відносно змінної, яка може бути введена в базис. Наприклад:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \\
 s_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \\
 s_3 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \\
 \varphi(x_1, x_2) &= c_1x_1 + c_2x_2
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Читачу, що вже має розв'язок Проблеми №2.11, така форма запису системи рівнянь видається знайомою. Ми змогли через три змінні виразити всі рівняння: це тому, що кожна змінна трапляється лише в одному з них, і лише один раз. За таку особливість  $s_1$ ,  $s_2$  та  $s_3$  називають **базисними змінними**. Цей момент може бути дуже незрозумілим, позаяк до цього ми називали «базисом» змінні, через які виражена цінова функція, і змінюючи які, нам зручно рухатись вздовж фігури ОДР. Така суперечність у назвах виникла тому, що алгоритм переназиває деякі речі математичного апарату – нам же, задля зрозумілості, потрібно якось розмежувати ці поняття. Тому надалі використовуймо поняття **просторового базису** та **симплекс-базису**.

**Симплекс-базис** – сукупність змінних, кожна з яких трапляється лише в одному з рівнянь системи, і з додатнім знаком. В межах симплекс-методу їх називають просто **базисом**. На початку розв'язку задачі він може складатися лише з люзових змінних.

**Просторовий базис** – змінні, через які виражена цінова функція, і які ми будемо змінювати. В межах симплекс-методу їх називають **вільними змінними**.

Тепер, якщо нам потрібно, наприклад, вивести з просторового базису змінну  $x_1$ , а ввести  $s_3$ , ми виконуємо такі кроки:

1. знаходимо рівняння, яке починається з « $s_3 \Rightarrow$ »;
2. розв'язуємо його відносно  $x_1$ , і отримуємо

$$x_1 = \frac{s_3 - b_3 + a_{32}x_2}{-a_{31}};$$

3. у кожному з рівнянь системи та ціновій функції замінюємо  $x_1$  на отриманий дріб, і маємо нову систему;

4. для зручності приводимо кожен з записів до лінійного вигляду.

Жодне зі значень змінних  $x_1, x_2, s_1, \dots$  при цьому не змінюється, але ми отримуємо запис системи рівнянь у зовсім іншому вигляді – такому, що збільшуючи лише одну координату просторового базису, і відповідно перераховуючи змінні симплекс-базису, ми можемо потрапити у сусідню точку фігури ОДР. Таким чином, змінюючи базиси та збільшуючи значення просторових змінних, ми поступово наближатимемось до оптимального розв'язку задачі.

### Межа збільшення змінних просторового базису

Ми вже знаємо, що збільшуючи деяку змінну просторового базису, можна потрапити у сусідню точку фігури. Однак ми досі не відповіли на дуже важливе запитання: а наскільки потрібно збільшувати цю змінну? Розгляньмо детальніше Рис. 2.15. Нехай на деякій ітерації ми перебуваємо в точці  $X_0$  і маємо просторовий базис  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Це означає, що кожне з рівнянь системи в цей момент розв'язане відносно відповідної змінної симплекс-базису  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$  – так, як у системі (2.12).

Якщо подивитись на деталізованішу інтерпретацію на Рис. 2.16, то можна побачити, що кожне рівняння системи визначає лінії, які перетинатимуть траєкторію руху, якщо ми збільшуватимемо одну зі змінних просторового базису. Нехай, наприклад, ми хочемо збільшувати  $x_1$ , утримуючи  $x_2 = 0$ . Тоді з системи рівнянь ми можемо отримати межі збільшення  $x_1$ , такі щоби виконувалась умова з ОДР  $\forall i : s_i \geq 0$ :

$$\begin{cases} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12} \cdot 0 \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22} \cdot 0 \\ s_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32} \cdot 0 \end{cases} \xrightarrow{s_{1,2,3} \geq 0} \begin{cases} x_1 \leq \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_1 \leq \frac{b_2}{a_{21}} \\ x_1 \leq \frac{b_3}{a_{31}} \end{cases} .$$

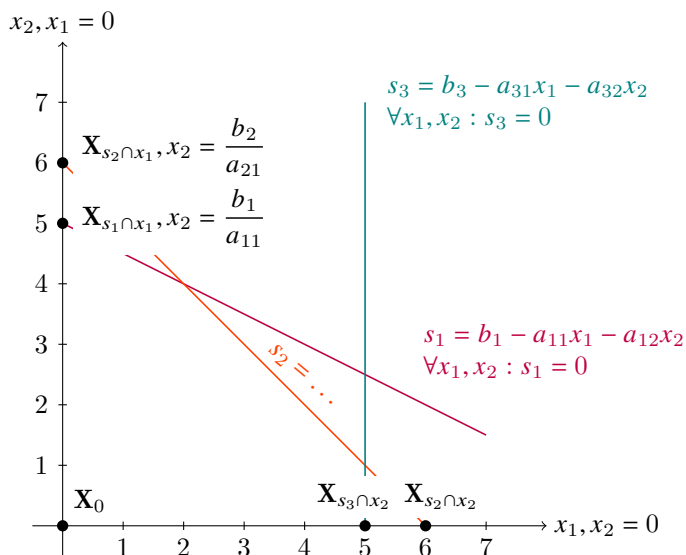


Рис. 2.16: Рухаючись від точки  $X_0$ , ми можемо збільшувати  $x_2$ , доки не досягнемо точки  $X_{s_1 \cap x_1}$ , в якій  $x_1 = s_1 = 0$ , або точки  $X_{s_2 \cap x_1}$ , де  $x_1 = s_2 = 0$ . Якщо підставити відомі  $x_1$ ,  $s_1$  та  $s_2$  в рівняння відповідних прямих, то можна знайти координати  $x_2$  обох точок. Аналогічно змінну  $x_1$  можна збільшувати, доки ми не досягнемо точок  $X_{s_3 \cap x_2}$  або  $X_{s_2 \cap x_2}$ , координати  $x_1$  яких можна знайти з відповідних рівнянь прямих.

Залишається лише присвоїти  $x_1$  таке значення, щоби задовільнити всі отримані нерівності, і перерахувати всі змінні симплекс-базису – читач уже вміє це робити, якщо має розв'язок Проблеми №2.11.

#### Проблема №2.15

Нехай у системі ми маємо рівняння  $s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2$ , при чому  $a_{11} = 0$ . Тобто, ми можемо отримати нерівність  $x_1 \leq \frac{b_1}{a_{12}}$ , у якій буде ділення на нуль. Що тоді можна сказати про таку межу? Які висновки можна зробити про лінію  $s_1 = 0$  на графіку?

## Висновки

Змінні симплекс-базису, прирівняні до нуля завжди визначають лінії, що перетинають траєкторію руху при зміні значення однієї зі змінних просторового базису.

Для зрозумілості спробуємо також проаналізувати перехід  $\mathbf{X}_1 \xrightarrow{\langle x_1, s_1 \rangle} \mathbf{X}_2$ , як показано на Рис. 2.17. Оскільки просторовий базис –  $\langle x_1, s_1 \rangle$ , то це означає, що симплекс базис складається зі змінних  $x_2$ ,  $s_2$ , та  $s_3$ . Дійсно, якщо утримувати  $s_1 = 0$ , збільшуючи  $x_1$ , спочатку ми перетнемо лінію  $s_2 = 0$ , тоді –  $s_3 = 0$ , і наостанок –  $x_2 = 0$ . Якщо ж утримувати  $x_1 = 0$ , збільшуючи  $s_1$ , то найпершою ми перетнемо лінію  $x_2 = 0$ . Для того, щоби перетнути  $s_2 = 0$ , змінну  $s_1$  доведеться навпаки зменшувати.

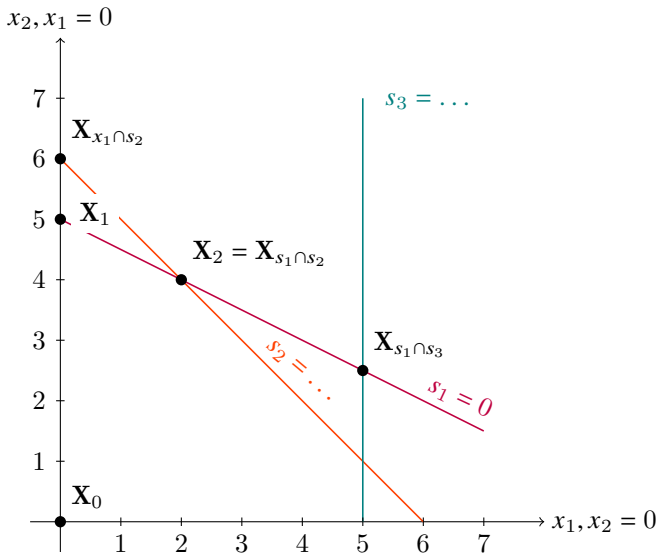


Рис. 2.17: Деталізований перехід  $\mathbf{X}_1 \xrightarrow{\langle x_1, s_1 \rangle} \mathbf{X}_2$  з Рис. 2.15. Щоби не перевантажувати рисунок, сюди не додана нова вісь  $s_1$  замість  $x_2$ .

### 2.3.2 Аналітичне розв'язування

### 2.3.3 Симплекс-таблиці

$$\begin{aligned}
 &\text{оптимізувати} \quad \varphi = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 &\text{з обмеженнями} \quad 2x_1 + x_2 \leq 4; \\
 &\quad \quad \quad x_1 + 3x_2 \leq 4.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

## 2.4 Цілочисельне лінійне програмування

## 2.5 Проблеми оптимального вибору

Припустимо таку ситуацію, коли ми маємо набір різних рішень, з яких складається розв'язок проблеми. Наприклад, *складне обчислення можна розпаралелити на  $n$  процесорів, кожен з яких має свою продуктивність операцій/с та потужність у ватах. Скільки і які процесори потрібно увімкнути, щоби продуктивності вистачило на виконання деякого обчислення у вказаний час, але спожити щонайменше енергії?* Тоді набір всіх можливих рішень

$$P = \{ \text{увімкнути процесор 1, увімкнути процесор 2, \dots,} \\
 \quad \quad \quad \text{увімкнути процесор } n \}$$

Відповідно, будь-який розв'язок задачі буде лише підмножиною  $P$ . Однак такими формулюваннями оперувати дуже не дуже зручно, тому краще ввести характеристичний вектор  $\mathbf{X}$ , кожен елемент  $x_i$  якого позначатиме, чи прийняте деяке  $i$ -те можливе рішення. Так, якщо  $x_i = 0$ , то  $i$ -ий процесор варто вимкнути, але якщо  $x_i = 1$  – то навпаки.



Рядок ціни задає коефіцієнти для цінової функції:

$$\varphi = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

Для збільшення  $x_1$  на 1 потрібно зменшити  $s_1$  на  $a_{11} = 2$ .  
Так само для решти чисел таблиці.

Аналогічно,  
 $x_2 + 1 \rightarrow s_2 - a_{22}$ .

Рядок змінних відображає усі змінні, задіяні в обчисленнях.

Якщо збільшуємо  $x_2$ , то наскільки щонайбільш, враховуючи доступні  $s_1$  та  $s_2$ ?

$$\text{межа} = \frac{\text{план}}{a_{ij}}$$

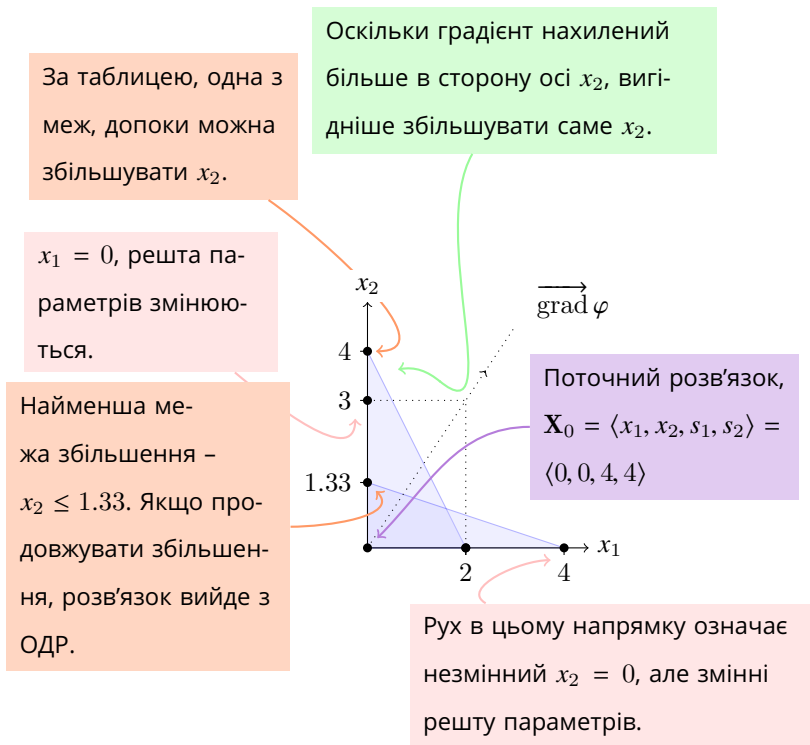
<b>Ціна</b>		2	3	0	0		
<b>Змінні</b>		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	<b>План</b>	<b>Межа</b>
<b>Базис</b>	$s_1$	2	1	1	0	4	4
	$s_2$	1	3	0	1	4	1.33
<b>Ризик</b>		0	0	0	0		
<b>Вигода</b>		2	3	0	0		

Поточне значення  $s_1$ .

Значення втраченої вигоди від прийнятого рішення. На поточному кроці – нульовий рядок.

Базисні змінні – це ті, що не дорівнюють нулю, і не підлягають збільшенню чи зменшенню.  
Отже змінюватимемо  $x_1$  або  $x_2$ .

На поточному кроці немає жодного ризику, тому вигода дорівнює ціні. Оскільки це найбільше значення в рядку, найвигідніше збільшувати  $x_2$ .



Формально такий випадок можна записати як  $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^n$ , або простіше –  $\forall i : x_i \in \{0, 1\}$ .

## Розв'язування проблем

### Проблема №2.1

Звичайно, на світі існує безліч ресурсів, які не вийде представити дробами: не можна відправити на роботу двох з половиною робітників, продати половину телевізора або щось. Тоді до умов ОДР додається ще одна –  $\forall i : x_i \in \mathbb{Z}$ . Пошук такого розв'язку може бути набагато складнішим, ніж коли  $\forall i : x_i \in \mathbb{R}$ .

### Проблема №2.2

Кілька цінових функцій може з'явитись тоді, коли розв'язок описується кількома характеристиками. Звичайно, якщо вони якимось чином залежать одна від одної, для спрощення задачі краще обійтись однією (або будь-яким іншим мінімальним числом). Наприклад, між відстанню, яку проходить автомобіль, та кількістю спожитого палива існує пряма залежність, тому при мінімізації чогось одного інша характеристика також зменшуватиметься вже без будь-якого впливу.

Проте якщо існують деякі  $\varphi_1 \dots \varphi_i$ , і вони не є пов'язаними, то їх можна, наприклад, просто додати:  $\varphi = \sum_i \varphi_i$ . В такому разі мінімізація або максимізація  $\varphi$  означатиме аналогічну зміну всіх  $\varphi_i$ .

Припустимо, що якусь  $\varphi_n$  потрібно мінімізувати, а решту  $\varphi_i \ \forall i \neq n$  – максимізувати. Тоді  $(-\varphi_n) \rightarrow \max \Rightarrow \varphi_n \rightarrow \min$ . В такому разі сумарну оцінку можна сформулювати як  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_i - \varphi_n$  – тоді умова  $\varphi \rightarrow \max$  гарантуватиме правильне знаходження розв'язку.

Коли це може бути корисним? Припустимо, продукція різних видів  $x_i$  по двох магазинах, де продається за різними цінами  $a_i$  та  $b_i$  відповідно. В такому разі «вигода» прийнятого рішення характеризуватиметься

оцінками  $\varphi_a = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots$  та  $\varphi_b = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots$ . Тоді максимізація функції

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b = (a_1 + b_1)x_1 + \dots$$

забезпечуватиме правильне знаходження розв'язку.

### Проблема №2.3

Оскільки за умовою потрібно «перевезти якомога більше вантажу», то задля оцінки прийнятого рішення достатньо просто додати всі елементи матриці  $\mathbf{X}$ :

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

До обмежень, приведених у розділі 2.1.3, потрібно додати ще одне, яке запобігатиме перевантаженню доріг. Тоді ОДР матиме такий вигляд:

$$\mathbf{X} \in G \Leftarrow \begin{cases} \vdots \\ \forall i, j : x_{ij} \leq c_{ij} \end{cases}$$

### Проблема №2.4

Теоретично, з допомогою градієнтного спуску можна знайти екстремум будь-якої диференційовної функції, якщо область допустимих розв'язків є неперервна. Позначимо  $\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X} + \alpha \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \Big|_{\mathbf{X}}$  – точка, зсунута від даної  $\mathbf{X}$  у напрямку вектора градієнту функції  $\varphi$  на деякий коефіцієнт  $\alpha$ . Тоді можна стверджувати, що алгоритм не зможе знайти правильну відповідь, якщо  $\exists \tilde{\mathbf{X}} \in G \exists \alpha > 0 : \varphi(\mathbf{X}_\alpha) < \varphi(\tilde{\mathbf{X}}) \ \& \ \mathbf{X}_\alpha \notin G$ . Неформально кажучи, подальші кроки у напрямку градієнту виводять нас із ОДР, хоча

якщо трохи повернути вектор градієнту, то значення  $\varphi$  – хоч і не так стрімко – можна збільшити ще. Таку ситуацію можна уявити так, як показано на Рис. 2.18.

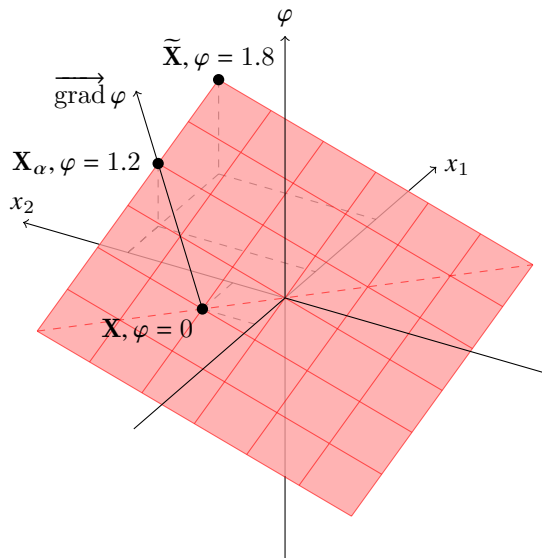


Рис. 2.18: Червона область – це набір всіх точок  $\langle x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2) \rangle$  таких, що  $\langle x_1, x_2 \rangle \in G$ . Якщо слідувати за вектором градієнту, найбільш можлива оптимальність, яку можна досягнути –  $\varphi(\mathbf{X}_\alpha) = 1.2$ . Насправді на ОДР існує точка  $\tilde{\mathbf{X}}$ , яка має ще більшу оптимальність, однак вектор градієнту ніколи на неї не вкаже.

Для того, щоби вирішити цю проблему, можна придумати якийсь алгоритм повороту вектора тощо. Втім, подальші дії виходять за межі звичайної вправи, і можуть перетворитись в актуальне дослідження.

## Проблема №2.5

Опуклим можна вважати такий многокутник, який не містить самоперетинів, а також кожен з його внутрішніх кутів є меншим за  $180^\circ$ . Спробуймо утворити ОДР за допомогою двох нерівностей так, як показано на Рис. 2.19.

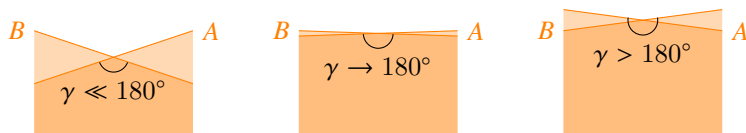


Рис. 2.19: Область ОДР – перетин нерівностей  $A : a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$  та  $B : a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$ .

З рисунку видно, що навіть якщо збільшувати кут  $\gamma$  між межами двох нерівностей так, що він стане більшим за  $180^\circ$ , область ОДР все одно залишатиметься опуклою. Змінюючи знаки нерівностей, узагальнюючи такі висновки на решту кутових точок ОДР та багатовимірні простори, наполегливий дослідник зможе дійти до аналітичного доведення такого явища.

## Проблема №2.6

Для розуміння проблеми найпростіше розглянути її в одновимірному випадку. Нехай ОДР визначена як

$$G = \begin{cases} x \geq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases},$$

тоді зрозуміло, що  $x$  міститься у замкненому відрізку  $[a_1, a_2]$ , і розв'язком задачі буде одна з його меж. Якщо ж відрізок відкритий, і нам

потрібно розв'язати задачу, наприклад, на максимізацію то розв'язком буде деяка границя  $x = \lim_{a \rightarrow a_1} a$ , яку можна обчислити з якою завгодно точністю  $\varepsilon$ . Припустимо, що  $a_1 = 5$ , тоді:

$$x = 4.9, \quad \varepsilon = 10^{-1};$$

$$x = 4.999, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$x = 4.99999, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Розглянемо також двовимірний випадок. Нехай ОДР задана як

$$G = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y < b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y < b_2 \end{cases}.$$

Зрозуміло, що на двовимірній площині до точки розв'язку можна наближатись із якої завгодно сторони, тому розумним рішенням буде знайти деяке гранично допустиме значення  $x$  та  $y$  окремо<sup>3</sup>. Розв'язавши систему відносно  $x$  та  $y$  отримаємо:

$$G = \begin{cases} x < \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \\ x < \frac{b_2 - a_{22}y}{a_{21}} \end{cases}; \quad G = \begin{cases} y < \frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}} \\ y < \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \end{cases}.$$

Тепер до точки перетину двох нерівностей можна наближатись ітеративно:

1. припустимо деяке щонайменш можливе початкове значення  $x \rightarrow -\infty$ ;
2. з системи нерівностей, розв'язаної відносно  $y$  отримаємо найбільше граничне значення  $y$  з заданою точністю;

---

<sup>3</sup>Так само як замість того, щоби говорити про диференціал багатозмінної функції ми аналізуємо натомість частинні похідні.



3. змінюємо  $y$ , аналогічно знаходимо найбільше можливе значення  $x$ ;
4. переходимо до другого кроку;
5. якщо на деякому кроці зміна  $x$  і  $y$  стала меншою за  $\varepsilon$ , то це число можна вважати точністю, з якою обчислений розв'язок.

Попрацювавши над цією проблемою, читач може отримати більш універсальний алгоритм, а також узагальнити його для багатовимірних просторів.

## Проблема №2.7

Разом з ОДР на графіку можна також позначити всі точки  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$  – ті, які лежатимуть всередині ОДР і будуть допустимими розв'язками. Тоді оптимальний розв'язок слід обирати не з однієї з кутових точок, а з тих, що нанесені на графік. Приклад показано на Рис. 2.20

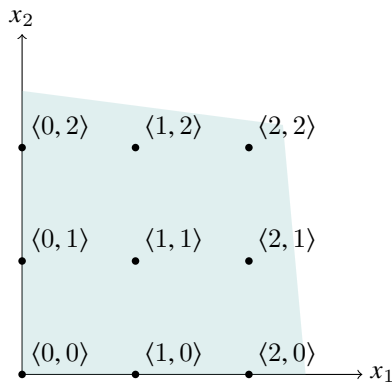


Рис. 2.20: Чорними крапками позначено всі допустимі розв'язки з ОДР.

У випадку, якщо лише одна з координат повинна бути цілочисельною, то на графіку отримаємо набір горизонтальних або вертикальних

ліній.

### Проблема №2.8

*Для розв'язування цієї проблеми читач повинен мати хороше інтуїтивне розуміння принципу вимірності простору.* Якщо ми розв'язуємо тривимірну задачу, то замість того, щоби малювати просторовий многогранник, можна намалювати на площині лише одну з його граней – ту, ну якій за припущенням міститься розв'язок. Таким чином ми перетворюємо тривимірну проблему у двовимірну. Аналогічно можна аналізувати тривимірні перерізи чотиривимірних фігур тощо. Насправді така техніка немає важливого практичного сенсу, але може допомогти при унаочненні даних.

### Проблема №2.9

Якщо весь відрізок визначає оптимальні розв'язки, то це означає, що всі точки на ньому мають однакове значення  $\varphi$  – включно з двома крайніми. Отже, можна стверджувати, що якщо будь-які дві сусідні точки фігури мають однакове значення оптимальності, то всі точки з відрізка між ними є розв'язками задачі – тобто, їх безліч.

У тривимірному просторі оптимальними розв'язками може бути вся грань фігури ОДР. Для того, щоби визначити такий випадок, потрібно знайти таку послідовність точок  $X_1 \dots X_n$ , що вони всі є послідовно сусідніми та мають однакову оптимальність. Аналогічно у чотиривимірному просторі потрібно відшукати такий набір площин, що всі їхні кутові точки мають однакову оптимальність, і утворюють межі якогось багатогранника.

## Проблема №2.10

Розглянемо матрично-векторний запис системи рівностей з люзовими змінними:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^T + \delta \mathbf{s}^T = \mathbf{b}^T.$$

Якщо  $\delta$  – одинична матриця, то рівняння перетворюється в таке:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^T.$$

Це означає, що всі  $s_i$  входять у систему рівнянь зі знаком «+» і лише один раз. Як відомо додатні люзові змінні можуть з'явитись лише внаслідок перетворення нерівностей зі знаком « $\leq$ ». З Рис. 2.21 видно, що якщо для такої задачі створити додаткове обмеження  $\forall i : x_i \leq 0$ , то ОДР завжди буде опуклою та включатиме центр координат. Якщо окрім цього, якщо умова задачі вимагає максимізації цінової функції, і ОДР не порожня, то хоча б одна з координат вектора розв'язку  $\mathbf{X}$  буде ненульовою.

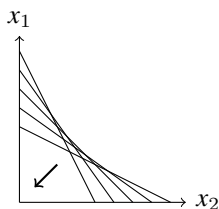


Рис. 2.21: Під яким кутом не була би нахилена межа нерівності « $\leq$ », її область завжди буде спрямована до центру координат.

## Проблема №2.11



## **Розділ 3**

# **Нелінійне програмування**



## **Розділ 4**

# **Динамічне програмування**