

# Зміст

<b>1 Введення</b>	<b>3</b>
1.1 Побудова математичної моделі . . . . .	4
1.2 Класифікація моделей . . . . .	6
<b>2 Лінійне програмування</b>	<b>9</b>
2.1 Типові проблеми . . . . .	10
2.2 Геометричний сенс . . . . .	16
2.3 Симплекс-метод . . . . .	26
2.4 Цілочисельне лінійне програмування . . . . .	52
2.5 Проблеми оптимального вибору . . . . .	52
Розв'язування проблем . . . . .	55
<b>3 Нелінійне програмування</b>	<b>69</b>
<b>4 Динамічне програмування</b>	<b>71</b>



# Розділ 1

## Введення

Говорячи про «дослідження операції», ми маємо на увазі пошук рішення якоїсь проблеми, пов'язаної із реальним життям. Дослідження полягає в тому, щоби знайти якнайкращий спосіб представлення реального світу чисельно: у вигляді матриць, векторів або функціональних залежностей. Тоді, використовуючи математичний апарат, відповідь на задачу можна знайти із будь-якою точністю. Після цього її потрібно інтерпретувати вже у «людських» поняттях.

Мистецтво чисельного опису світу називається побудовою **математичної моделі**. Така потреба виникала настільки часто, що з отриманих результатів можна виділити загальні підходи та ідеї, і використовувати їх на інших, ще не досліджених проблемах (операціях).

Цей посібник надає аналіз різних проблем оптимізації, алгоритмів для їхнього вирішення а також аналіз теорії, що стоїть за ними. Можливо, із набутими знаннями та інтуїцією читач зможе винайти розв'язки набагато складніших, невідомих досі науці проблем.

## 1.1 Побудова математичної моделі

Логічно, що з початком аналізу будь-якої задачі, варто виділити ті дані, які подаються як факт – тобто, на них неможливо вплинути, чи змінити будь-як. Це те, біля чого можна написати «дано», і далі подати перелік змінних з присвоєними їм значеннями. Вони називаються **параметрами операції**<sup>1</sup>, або **некерованими змінними**.

Якщо якісь дані описують одну і ту саму характеристику різних предметів, цілком доцільно об'єднати їх у вектор. Надалі використовуватиметься така нотація:  $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle^T$ . В тих випадках, коли подані дані є двовимірними, чи відображають деякі залежності, можна використовувати матриці. Наприклад, якщо в умові сказано, що *відомо час перевезення вантажу між кожним із обласних центрів*, то їх можна пронумерувати, а дані помістити, скажімо, в матрицю  $\mathbf{T}$ , де кожен елемент  $t_{ij}$  позначатиме час перевезення з  $i$ -ого міста в  $j$ -те.

Опісля маємо з'ясувати, які ж дані в задачі залишились невідомими, і їх потрібно знайти – себто, визначити на основі відомих. Вони називаються **керувальними параметрами**, або ж **керованими змінними**. Присвоєння цим змінним конкретних значень і є вирішенням проблеми.

У будь-яких задачах, які читач міг бачити до цього, зазвичай потрібно було з'ясувати значення одного невідомого параметра (деякого  $x$ ), або навіть кількох. При дослідженні операцій може так траплятись, що невідомою буде ціла матриця, або вектор.

Якщо існує таке рівняння, що явно пов'язувало б некеровані змінні з керованими, то розв'язок можна знайти **аналітично**, тобто, обчислити звичайними арифметичними операціями. Наприклад, якщо відомо, що *пропускна спроможність каналу передачі становить  $n$  Мб/с, і потрібно*

---

<sup>1</sup>(англ.) *constraints*

з'ясувати, скільки максимально  $x$  Мб інформації можна передати за  $t$  секунд, то зрозуміло, що відповідь може бути знайдена з формули  $x = tn$ .

Однак бувають такі проблеми, для яких неможливо – або принаймні дуже складно – скласти будь-яке рівняння, тому що у них взаємодіє між собою велика кількість змінних, кожна з яких по-своєму впливає на оптимальність результату в цілому. Тоді розв'язування може нагадувати намагання збалансувати складну систему тягарців: як тільки потягнути за один, одразу ж починають рух інші. Відповідь на такі проблеми найчастіше можна знайти **алгоритмічно**, на кожному з кроків покращуючи оптимальність результату. Власне, саме такий спосіб і використовується найчастіше для дослідження операцій.

Для того, щоби розв'язати задачу алгоритмічно, прийнятою практикою є побудова (опис) деякої множини  $G$ , що містить всі можливі допустимі розв'язки задачі – **область допустимих розв'язків**<sup>2</sup>. Звичайно, перед цим потрібно визначити, в якому вигляді ми взагалі шукатимемо розв'язок. Скажімо, якщо треба знайти дві змінні  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , то розв'язком буде вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle^T$ , і множина розв'язку –  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Іноді рішенням проблеми може бути матриця, чи складніші багатовимірні об'єкти.

Наостанок, для того, щоб оцінити оптимальність будь-якого розв'язку, прийнято вводити **цінову функцію**<sup>3</sup> (інша назва – **коефіцієнт ефективності**), що встановлює чисельну оцінку якості  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ . Формулювання функції обирається залежно від умови.

Наприклад, якщо невідомі змінні  $x_1, x_2$  встановлюють кількість товару двох видів, яку виготовлятиме завод, а  $c_1, c_2$  – їхню ціну відповідно, то коефіцієнт ефективності можна визначити як прибуток від всього товару загалом:  $\varphi(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2 = \mathbf{c}^T \mathbf{X}$ . Тоді знайти такий  $\mathbf{X}$ , що забезпечу-

<sup>2</sup>аббревіатура – ОДР; (англ.) *domain, feasible set, solution space*

<sup>3</sup>(англ.) *cost function, loss function, objective function*

	Так	Ні
Рішення проблеми знаходиться розв’язком рівняння.	<b>аналітична</b>	<b>алгоритмічна</b>
Хоча б одна з величин є випадковою величиною.	<b>стохастична</b>	<b>детермінована</b>
Кожен з кроків алгоритму розв’язку покращує рішення, знайдене на попередньому.	<b>статична</b>	
На кожному з кроків алгоритму розв’язку приймається найоптимальніше рішення.		<b>динамічна</b>
Хоча б одна з керованих змінних може приймати тільки цілі значення.	<b>дискретна</b>	<b>недискретна</b>

Табл. 1.1: Класифікація математичних моделей за характерною ознакою.

вав би максимальний прибуток, означає знайти екстремум  $\varphi$ .

## 1.2 Класифікація моделей

Запропонована структура математичної моделі дозволяє описати будь-яку операцію чисельно, зводячи розв’язування до пошуку такого  $X \in G$ , щоби досягнути мінімуму або максимуму  $\varphi$ . Зрозуміло, що розв’язувати такі проблеми перебором, щонайменш нефеєктивно. На щастя, для цього існують спеціальні методи, проте вони гарантують знаходження адекватного розв’язку лише для якогось конкретного типу математичної моделі. Тому важливо розрізняти, які типи існують взагалі, і вміти визна-

чити їх для моделі своєї задачі. У Табл. 1.1 приведено класифікацію математичних моделей за характерною ознакою.





## Розділ 2

# Лінійне програмування

Одночасно простим для розуміння та корисним на практиці є математичний апарат розв'язку задач лінійного програмування (ЛП), з яким читач познайомиться у цьому розділі.

- У параграфі [2.1 Типові проблеми](#) читач дізнається про деякі типові проблеми ЛП та отримає інтуїтивне розуміння того, як варто формувати ОДР і цінкову функцію.
- У параграфі [2.2 Геометричний сенс](#) описано графічний метод розв'язку проблем ЛП для  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ .
- Параграф [2.3 Симплекс-метод](#) описує симплекс-метод розв'язування ЛП для  $n$ -вимірних проблем ( $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\geq 2}$ ).
- У параграфі [2.4 Цілочисельне лінійне програмування](#) читач дізнається про принцип границь та галузей для розв'язування цілочисельної задачі ЛП.

- У параграфі 2.5 Проблеми оптимального вибору описано постановку та розв'язування ЛП задачі при  $\mathbf{X} \in \{0, 1\}^n$ .

Задачу можна назвати лінійною тоді, коли цінова функція є функцією першого степеня (2.1), а область допустимих значень може бути описана лінійними рівностями або нерівностями (2.2).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \mathbf{cX}^T, \quad \mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \quad (2.1)$$

$$G = \left\{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{array}{|c|} \leq, \geq \text{ або } = \\ \hline \end{array} b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \right\} \quad (2.2)$$

## 2.1 Типові проблеми

Приведені далі постановки задач є типовими. Вони отримали свою назву від проблеми, у вирішенні якої найкраще використовувати такі означення. Якщо їх проаналізувати, то можна отримати відпрацьований математичний апарат для розв'язання більш специфічних задач.

### 2.1.1 Максимізація прибутку

*Фабрика виробляє продукцію  $n$  видів. Для неї потрібна певна кількість сировини  $m$  видів, при чому її є в обмеженій кількості. Відомо можливий прибуток від реалізації кожного з видів продукції. Якщо існує якийсь оптимальний розподіл всієї сировини на виробництво певних видів продукції так, щоби отримати якнайбільший прибуток, то яким буде такий розподіл?*

Якщо між двома некерованими змінними існує відношення, то доцільно описати його у вигляді матриці. Тому нехай в  $\mathbf{A}$  міститимуться

елементи  $a_{ij}$ , кожен з яких означатиме витрату сировини  $i$ -ого виду на виготовлення продукції  $j$ -ого виду. Ще одна некерована змінна  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle^T$  позначатиме кількість відповідної сировини кожного виду, доступної на фабриці. Прибуток від реалізації можна визначити вектором  $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle^T$ .

Керованою змінною є вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle^T$ , кожен елемент якого позначає кількість продукції, яку має виготовити фабрика – ці дані варто змінювати для досягнення оптимальності.

Тоді умовою допустимості розв'язку буде перш за все виконання обмежень на доступну кількість сировини, та деякі очевидні твердження – наприклад, те, що ця кількість має бути невід'ємною (2.3).

$$\mathbf{X} \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

### Проблема №2.1

Чи можна поставити умову так, щоби знайдені  $x_i$  обов'язково повинні були би бути цілими числами?

В означенні (2.3) формулювання  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  позначає суму використаної сировини певного типу на виготовлення ресурсів всіх можливих видів. Відповідно « $\leq b_i$ » позначає, що цією сировини можна використати не більше певної кількості. Умова  $\forall i$  означає, що така нерівність повинна виконуватись для всіх видів сировини.

Цінову функцію потрібно вводити так, щоби вона визначала прибуток від прийнятого рішення. Тоді оптимальним розв'язком буде такий,

що гарантує досягнення її максимуму (2.4).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.4)$$

### Проблема №2.2

Якщо існує така задача, для якої потрібно вводити кілька цінових функцій, і оптимізувати їх одночасно, то якою буде умова такої задачі? Чи існує якийсь універсальний спосіб поєднання кількох оцінок оптимальності в одну?

#### 2.1.2 Мінімізація витрат

Розглянемо задачу, подібну тій, що поставлена у розділі 2.1.1. *Фабрика отримує сировину  $n$  видів, з якої виготовляє товар за  $m$  різними технологіями. Кожна з технологій потребує певну комбінацію сировини у різних кількостях. Разом з тим, кожна з технологій спричиняє в атмосферу викид певної кількості кілограм вуглецю. Для кожного виду сировини визначена доступна кількість, яку можна використати для виробництва. Потрібно оптимізувати виробництво так, щоби отримати якомога більше готової продукції, але водночас зменшити кількість шкідливих викидів.*

Що в цій задачі уже відомого? Найперше – відношення технології та сировини, яку вона потребує. Запишемо це в матрицю  $\mathbf{A}$ , в якій кожен елемент  $a_{ij}$  позначатиме витрату сировини  $i$ -ого типу за  $j$ -ою технологією. Викиди, спричинені різними технологіями можна зберігати у векторі  $\mathbf{c} = \langle c_1, \dots, c_m \rangle^T$ , а кількість доступної сировини кожного виду – як  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle^T$ .

Що потрібно знайти? Потрібно знайти кількість товару, яка буде виготовлена за кожною з технологій. Тому позначимо її через вектор

$\mathbf{X} = \langle x_1, \dots, x_m \rangle^T$ . При пошуку значення різних  $x_j$  доведеться вирішити дилему: користуватись технологіями, які потребують меншу кількість сировини, але спричиняють більше викидів, чи навпаки?

Будь-який розв'язок  $\mathbf{X}$  буде допустимим, якщо задовольнятиме дві умови: використано ресурсів не більше, ніж доступно взагалі, і жоден з  $x_j$  не є від'ємним. Тому ознака допустимості розв'язку є такою самою, як і (2.3) – ми використовуємо ті самі назви змінних, тому формула не втрачає свого змісту. Тепер формулювання  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$  позначатиме кількість сировини певного виду, використаної загалом, за якими технологіями б не відбувалось виробництво.

Допоки розв'язок допустимий, він використовуватиме лише доступну кількість сировини. Однак різні розв'язки все ще спричиняють різний викид вуглецю, тому оптимальність кожного з них визначатимемо саме за цим параметром. Цінова функція знову така сама, як і в (2.4), проте цього разу її доцільно мінімізувати.

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{X}^T \rightarrow \min_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.5)$$

Тепер, після ознайомлення з двома задачами, важливо розуміти, що не існує жодних правил, як варто складати формулювання ОДР чи цінової функції, так само як і неможливо передбачити всі можливі «типові задачі». Формулювання будь-якої математичної моделі залежить винятково від області дослідження та винахідливості дослідника.

### 2.1.3 План перевезень

Досі ми розглядали задачі, де невідомою керованою змінною був вектор – тобто, кількість чогось різних видів, або оптимальна конфігурація різних характеристик. Чи можливо тепер за допомогою лінійного програмування розв'язати якусь проблему, що встановлюватиме конфігурацію відношення? Тобто, цього разу невідоме  $X$  буде двовимірним – матрицею.

*Компанія має у своєму розпорядженні  $n$  зерносховищ та  $m$  постачальників зерна. Кожне зерносховище може зберігати певну кількість тон зерна, купленого у різних постачальників. З ними укладено контракт, за яким компанія зобов'язується викупити щонайменш певну кількість тон за раз. Відомі затрати на перевезення зерна від кожного постачальника до кожного сховища – скажімо, час, відстань, пальне тощо. Потрібно визначити, скільки зерна між різними постачальниками та відповідними сховищами доцільно перевезти, щоби отримати якомога менші витрати, та перевезти якомога більше вантажу.*

Отже, умову проблеми можна зобразити у вигляді графа, що на Рис. 2.1. Зрозуміло, що некерованими змінними є  $a$ ,  $b$  та  $C$ . Тоді розв'язком буде матриця  $X$ , кожен елемент  $x_{ij}$  якої задаватиме «оптимальну» кількість тон, яку варто перевезти між  $i$ -им постачальником та  $j$ -им сховищем. Саме така конфігурація, що буде задана цією матрицею і гарантуватиме найменші витрати та якнайбільше заповнення сховищ.

Ця проблема є класичним випадком транспортної задачі, і для її розв'язку існують інші методи, про які можна дізнатись у наступних розділах. Попри це, розв'язок саме лінійним програмуванням є досить цікавим.

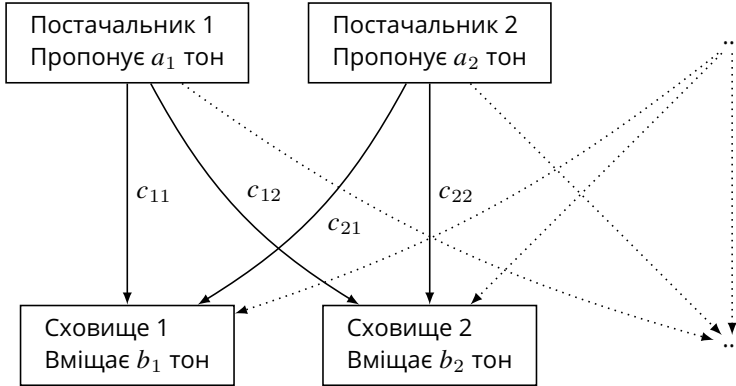


Рис. 2.1: Кожен з постачальників пропонує  $\mathbf{a} = \langle a_1, \dots, a_m \rangle^T$  тон, а кожне зі сховищ може зберігати до  $\mathbf{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle^T$ . Затрати на перевезення між ними задаються матрицею  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Тепер ОДР повинно мати такі обмеження:

- потрібно вивезти весь товар, що надають постачальники;
- до кожного зі сховищ не можна привезти більше, ніж воно може вмістити.

Тоді умову допустимості розв'язку можна записати як 2.6.

$$\mathbf{X} \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = a_i \quad \forall j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq b_j \quad \forall i = \overline{1, m} \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Щоби порахувати затрати при поточному плані перевезення, достатньо перемножити значення  $c_{ij}$  з матриці затрат на значення  $x_{ij}$ . Оптимальним буде той розв'язок, у якому це значення найменше, тому

вводимо цінову функцію (2.7), і вимагаємо її мінімізації.

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.7)$$

### Проблема №2.3

Нехай матриця  $\mathbf{C}$  відображає не затрати на перевезення, а максимальну пропускну здатність маршруту. Скажімо, в день по дорозі між  $i$ -им постачальником та  $j$ -им сховищем можна перевезти не більше, ніж  $c_{ij}$  тон вантажу. Потрібно знайти таке завантаження  $\mathbf{X}$  різних доріг, щоби перевезти якомога більше вантажу. Допускається ситуація, коли не весь вантаж буде вивезено від постачальників. Як сформулювати ОДР та цінову функцію?

## 2.2 Геометричний сенс

Двовимірні та (іноді) тривимірні випадки лінійного програмування можна розв'язувати графічно. Розуміння геометричних процесів, які відбуваються при відшукуванні розв'язку допоможуть при розв'язуванні багатовимірних задач.

### 2.2.1 Двовимірний випадок

Розгляньмо випадок, коли вектор  $\mathbf{X}$  складається з двох координат  $x_1$  та  $x_2$  (тобто,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ ). В ідеальному випадку множина ОДР  $G \in \mathbb{R}^2$  утворює на площині деяку замкнену область, як показано на Рис. 2.2. Зрозуміло, що коли обрати будь-яку точку з неї, то такі координати  $\langle x_1, x_2 \rangle^T \in$  допустимим розв'язком. Допустимих розв'язків існує безкінечна кількість



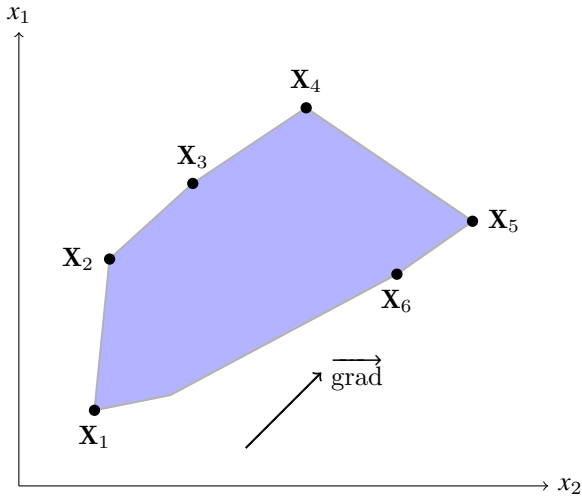


Рис. 2.2: ОДР утворює опуклий багатокутник на площині.

(оскільки ми оперуємо множиною дійсних чисел, яка сама по собі є континуумом), але найоптимальнішим буде той, для якого цінова функція  $\varphi(\mathbf{X})$  визначає якнайбільше число. Як можна знайти такий розв'язок графічно?

Проаналізуймо цінову функцію. В загальному випадку вона матиме вигляд  $\varphi = c_1x_1 + c_2x_2$ , тобто утворюватиме площину в тривимірному просторі з координат  $\langle x_1, x_2, \varphi \rangle$ . Це можна уявити як на Рис. 2.3. Тоді допустимі розв'язки лежатимуть всередині проекції ОДР на площину цінової функції. З рисунку добре видно, в яку сторону вона зростає, тож тепер зрозуміло, що точка  $\mathbf{X}_1$  є допустимим розв'язком з мінімально можливим  $\varphi$ , а  $\mathbf{X}_5$  – з максимальним  $\varphi$ . Тоді обидві точки будуть розв'язками задачі на мінімізацію та максимізацію цінової функції відповідно.

Чи існує більш практичний спосіб, без потреби відмальовування тривимірних площин? Оскільки  $\varphi$  – лінійна функція, то за будь-яких  $x_1$  та  $x_2$  вона є неперервною, і зростає завжди однаково. Тобто, при будь-яких

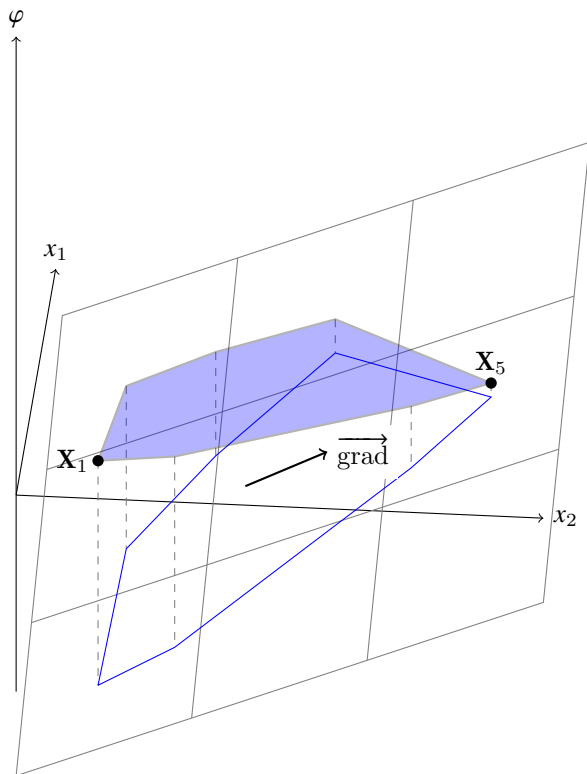


Рис. 2.3: Погляд на ОДР з іншої перспективи. Пунктиром позначено проєкцію  $G$  на  $\varphi$ .

аргументах вектор градієнту завжди буде однакової довжини та спрямований в однаковому напрямку. Це означає, що на звичайному двовимірному малюнку достатньо позначити вектор  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  (як і показано на Рис. 2.2). Тоді розв'язком задачі на максимізацію буде точка, що лежить якнайдалі у напрямку цього вектору. Аналогічно при мінімізації оптимальна точка розв'язку лежатиме у протилежному напрямку.

Читачу також може бути цікаво уявити випадок, коли цінова функція формує не площину, а деяку складну просторову фігуру. Проекція  $G$  на  $\varphi$  сформує набір точок  $\langle x_1, x_2, \varphi \rangle$ , а оптимальним розв'язком буде та, що матиме найменшу координату  $\varphi$ .

#### Проблема №2.4

Чи можна для розв'язування такої задачі використати метод градієнтного спуску? Яким чином його потрібно модифікувати? Які це дасть переваги? Які можуть виникнути проблеми?

#### Проблема №2.5

Чи можна з допомогою системи лінійних рівнянь описати таку ОДР, яка утворюватиме неопуклий багатокутник? Як це працюватиме у вищих вимірах?

#### Висновки

- оптимальний розв'язок може бути розташований в одній з кутових точок <sup>a</sup>;
- кутова точка є оптимальним розв'язком, якщо жодна з сусідніх точок не є оптимальнішою.

---

<sup>a</sup>(англ.) *extreme point*

### 2.2.2 Розв'язування задачі

Розглянемо деяку специфічну задачу. *Броварня виготовляє таке пиво. Виробництво кожного з них вимагає певної комбінації кукурудзи, хмелю та ячмінного солоду на 1 умовну одиницю (бочку, партію тощо). Кількість ресурсів обмежена. Кожен продукт має свою ціну. Параметри ви-*

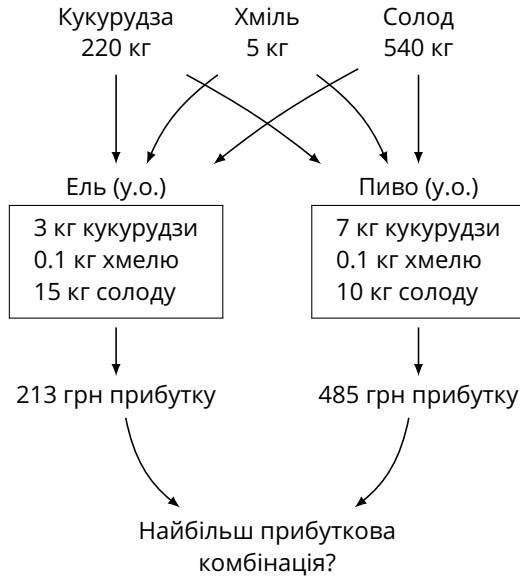


Рис. 2.4: Запаси ресурсів, параметри виробництва та прибутковість елю й пива.

робництва показано на Рис. 2.4. Потрібно розрахувати оптимальну кількість вирбництва двох продуктів, щоби отримати якнайбільший прибуток.

Некеровані змінні можна позначити вектором  $\mathbf{a} = \langle 220, 5, 540 \rangle^T$  (кількість доступних ресурсів на складі),  $\mathbf{b} = \langle 213, 485 \rangle^T$  (прибуток від кожного з товарів) та матрицею  $\mathbf{A}$  (2.8), де  $a_{ij}$  позначатиме витрату  $i$ -ого ресурсу на  $j$ -ий продукт. Вартість кожного з продуктів визначатиме вектор  $\mathbf{c} = \langle 213, 485 \rangle^T$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0.1 & 15 \\ 7 & 0.1 & 10 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Тоді керованою змінною є вектор  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle^T$  координати якого

позначають скільки бочок елю та пива потрібно виготовити відповідно. Якщо розв'язок лежить в ОДР, мусять виконуватись такі умови:

- кількість використаних кукурудзи, хмелю та солоду не повинна перевищувати доступної;
- не можна виготовити від'ємну кількість продукції.

Кількість, використаної кукурудзи обраховується як  $3x_1 + 7x_2$  (тобто, залежить від того, скільки виготовляється обох видів продукту). Оскільки маємо на неї обмеження, можна скласти нерівність  $3x_1 + 7x_2 \leq 220$ , що повинна виконуватись для допустимості розв'язку. Аналогічно складаються решту нерівностей, що утворюють ОДР задачі (2.9).

$$\mathbf{X} \in G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 7x_2 \leq 220 \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \leq 5 \\ 15x_1 + 10x_2 \leq 540 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Разом з тим оптимальність будь-якої комбінації  $x_1$  та  $x_2$  доцільно визначати за кількістю прибутку, що вона приносить. Тому цінова функція набуде вигляду (2.10).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{c}^T = 213x_1 + 485x_2 \rightarrow \max_{\mathbf{X} \in G} \quad (2.10)$$

На Рис. 2.5 показано ОДР та градієнт цінової функції. З отриманого рисунку видно, що точка з ОДР, найдалі розташована у напрямку градієнта (а значить у напрямку зростання оптимальності), міститься в координатах  $x_1 = 21.067$  та  $x_2 = 22.4$ . Це і є оптимальним розв'язком задачі.

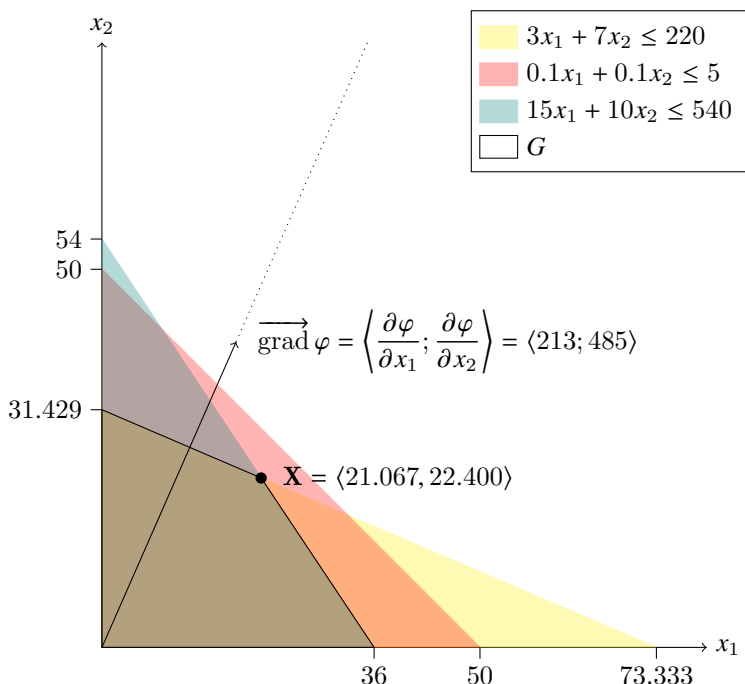


Рис. 2.5: ОДР задачі на двовимірній площині, що утворюється трьома нерівностями та обмеженнями на додатність  $x_1$  і  $x_2$ .

#### Проблема №2.6

Яким був би оптимальний розв'язок задачі, якби знак « $\leq$ » в ОДР замінити на « $<$ »?

#### Проблема №2.7

Якби  $x_1$  та  $x_2$  визначали б не умовні одиниці, а вимірювалися б у бочках (тобто, тепер  $X \in \mathbb{Z}^2$ ), яким чином розв'язок такої задачі можна знайти графічно?

Як видно, графічний спосіб розв'язку досить зручний і простий.

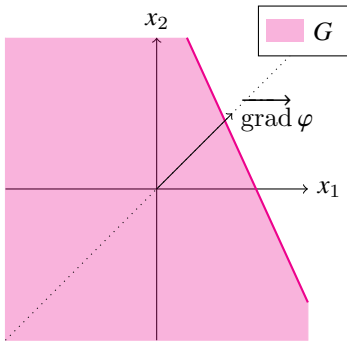


Рис. 2.6: ОДР складається з однієї нерівності, тому є необмеженою зі сторони від'ємних  $x_1$  та  $x_2$ . Тут можна розв'язати задачу на максимізацію, однак розв'язком мінімізації буде точка  $(-\infty, -\infty)$ .

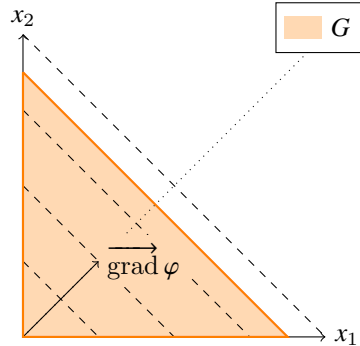


Рис. 2.7: Іноді неможливо визначити точку, що лежить найдалі за напрямком градієнта, оскільки всі точки на деякій лінії мають однакову оптимальність. В такому разі вони всі є оптимальними, і не існує єдиного  $\mathbf{X}$ .

Однак коли результат потрібно отримати з високою точністю, таке розв'язування стає дуже складним та непрактичним, не кажучи вже про те, що реальні задачі рідко коли бувають двовимірними. Проте потрібно віддати належне – графічний спосіб ідеальний для унаочнювання даних.

### Проблема №2.8

Чи можна якимось чином зменшити вимірність проблеми  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{>2}$ , щоби скористатись графічним способом розв'язування?

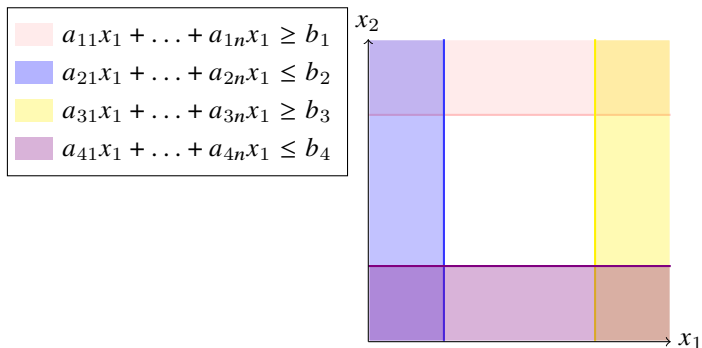


Рис. 2.8: ОДР складається з 4 нерівностей, однак не існує жодної такої області, де вони всі перетиналися б одночасно. Тому  $G = \emptyset$ .

### 2.2.3 Крайнощі

Описані раніше випадки, взагалі кажучи, є ідеальними, а із задачею нам просто пощастило.

Найперша проблема, яку іноді можна отримати – ОДР не є замкненою, як показано на Рис. 2.6. В такому разі з тієї сторони, з якої ОДР не обмежена, єдиного розв'язку не існує, позаяк до нього можна наближуватись безкінечно. Якщо така відповідь є допустимою, розв'язком можна вважати точку  $\langle \pm\infty, \pm\infty \rangle$ , однак найчастіше подібний результат просто не є адекватним.

Іноді оптимальних розв'язків існує *безкінечна кількість*. Подібне формулювання може заплутати, і створити враження, ніби оптимальними є взагалі всі можливі розв'язки, хоча це не так. Така ситуація продемонстрована на Рис. 2.7. У відповіді до цієї задачі доречно просто описати закон розрахунку оптимальних  $x_1$  та  $x_2$ .

Може так трапитись, що нерівності, з яких складається ОДР, ніде не перетинаються одночасно, як показано на Рис. 2.8. В такому разі ОДР



порожня, а отже жодного оптимального розв'язку не може існувати за визначенням.

### 2.2.4 Тривимірний випадок

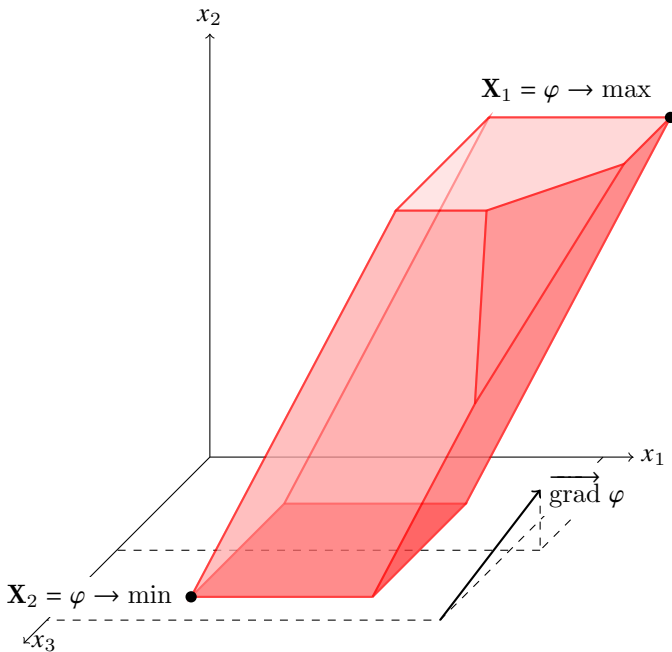


Рис. 2.9: Оскільки така фігура має 7 граней, можна зробити висновок, що вона утворена 7-ома нерівностями. Будь-яка точка  $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$  всередині неї є допустимим розв'язком. Зважаючи на напрямок вектора градієнту, точка  $\mathbf{X}_2$  є розв'язком задачі на мінімізацію, а  $\mathbf{X}_1$  – на максимізацію цінкової функції.

Якщо у двовимірному просторі набір лінійних нерівностей може відтинати багатокутник, то у тривимірній області  $G$  ми отримаємо багатогранник. Приклад такої фігури показано на Рис. 2.9. В цьому випадку чи-

тачу може бути складно уявити цінову функцію  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , позаяк вона є чотиривимірною, однак сенс залишається той самий: якщо перелік всіх точок фігури посортувати за тим, наскільки «далеко» вони розташовані в напрямку вектора-градієнта (а він тривимірний), то це одночасно буде перелік, посортований за зростанням оптимальності. Можна ще уявити це як зростання температури, яскравості чи будь-якої іншої простої для розуміння характеристики в певному напрямку.

Хоча отримана фігура досить проста на вигляд, малювати площини та визначати їхні перетини від руки насправді дуже складно. У вищих вимірностях проблема стає практично нерозв'язуваною. Тому хороший дослідник потребує більш точних аналітичних методів.

## 2.3 Симплекс-метод

Математичний апарат – це лише інструмент для створення алгоритму. Позаяк ним, ймовірно, користуватимуться не тільки дослідники-математики, а й люди інших професій, які не завжди володіють інструментами лінійної алгебри тощо, новий алгоритм може повністю інкапсулювати всі складні математичні поняття – саме це сталося із симплекс-методом. Тому в нас неодмінно виникнуть деякі суперечності у поняттях в межах самого алгоритму та математичних інструментів.

Симплекс-метод – це інструмент, яким можна аналітично розв'язувати багатовимірні задачі ЛП за умови, що вони приведені до деякого стандартного вигляду. Його головна ідея природно впливає з висновків на с. 19:

- якщо оптимальний розв'язок розташований в одній з кутових то-

чок, потрібно отримати список всіх їхніх координат;

- опісля обраховуємо значення цінової функції  $\varphi$  у всіх точках;
- обираємо точку з найбільшим  $\varphi$ , тобто найбільшою оптимальністю – розв'язок знайдено.

### Проблема №2.9

Якщо дійсно реалізовувати таку ідею – як визначити випадок, коли весь відрізок між двома точками визначає оптимальні розв'язки? Як узагальнити це для багатовимірних просторів?

Насправді це не зовсім вдале рішення, бо в промислових умовах задачі ЛП можуть мати тисячі різних рівнянь, тому часові та обчислювальні затрати на те, щоби визначити, які з них утворюють між собою перетини, та обчислення їхніх координат, будуть просто неадекватними. Натомість ми трохи ускладнюємо процес:

- починаємо обхід фігури з деякого початкового рішення (**опорного плану**<sup>1</sup>), яке точно є допустимим – наприклад  $\mathbf{X}_0 = \langle 0, 0, \dots \rangle^T$ ;
- аналізуємо цінову функцію: якщо збільшення якоїсь зі змінних призведе до її зростання, то збільшуємо її, наскільки можливо;
- використовуємо при цьому такий базис простору, в якому достатньо збільшувати лише одну координату, щоби потрапити в сусідню точку ОДР;
- перераховуємо коефіцієнти цінової функції так, щоби вона показувала, які зі змінних можна ще збільшувати;

---

<sup>1</sup>(англ.) *basic feasible solution*

<sup>2</sup>Пізніше читач дізнається, що така точка завжди буде допустимим рішенням, якщо умова задачі задана у канонічному вигляді.

- якщо зміна значень всіх змінних призведе до спадання  $\varphi$ , то найоптимальніший розв'язок вже знайдено.

Для реалізації цього алгоритму використовується апарат лінійної алгебри. Дуже часто його залишають без пояснення, тож допитливий дослідник отримує лише інструкцію до виконання – незрозумілу та дуже абстрактну. Щоби уникнути такої ситуації, ми дослідимо математичний апарат, який лежить в основі алгоритму, аналізуючи концепти, які спершу, можливо, видаватимуться зовсім непов'язаними один з одним. Проте пізніше читач по-справжньому оцінить їхню елегантність.

### 2.3.1 Математичний апарат

#### Люзові змінні

Будь яку лінійну нерівність  $f(x_1, \dots) \leq b$  можна перетворити у рівність  $f(x_1, \dots) + s = b$ . Тоді при  $s = 0$  ми отримаємо лінію, яка лежить на межі області нерівності. При збільшенні  $s$  вона буде паралельно переноситись все далі від цієї межі, аж доки при  $s = b$  не пройде через центр координат. Отже, при всіх  $s \geq 0$  отримане рівняння описуватиме всі можливі точки  $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  всередині області нерівності. Це показано на Рис. 2.10 та Рис. 2.11. Такі змінні  $s$  називається **люзовими**<sup>3</sup>.

Проаналізуймо нерівність  $f(x_1, x_2, \dots) \leq b$ , якою зазвичай задаються умови на ОДР задачі лінійного програмування. Її можна переписати так:

$$\begin{array}{llll}
 f(x_1, x_2, \dots) & \leq b & \equiv & \\
 f & + s = b \quad \forall s > 0 & \equiv & (1) \\
 s = b - f & \quad \forall x_1, x_2, \dots & & (2)
 \end{array}$$

<sup>3</sup>(англ.) *slack variables* для нерівностей зі знаком « $\leq$ », *surplus variables* для нерівностей « $\geq$ ».

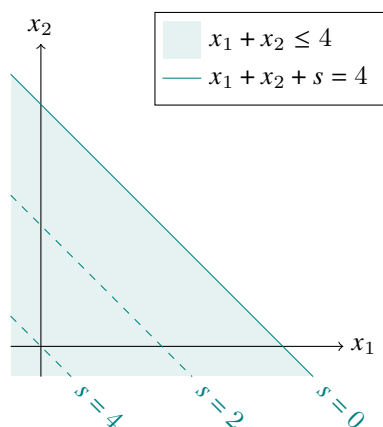


Рис. 2.10: Нерівність  $x_1 + x_2 \leq 4$  утворює область, межу якої можна описати рівнянням  $x_1 + x_2 + s = 4$  при  $s = 0$ . При  $s = b = 4$  ця лінія проходить через центр координат.

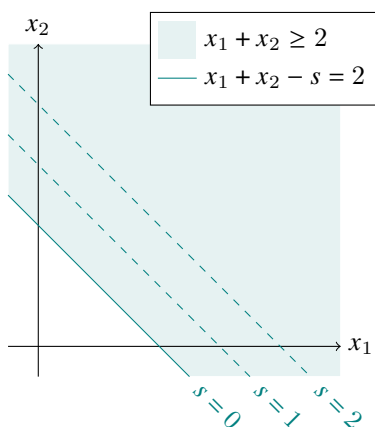


Рис. 2.11: Для того, щоби отримати такий самий ефект для нерівностей « $\geq$ », змінну  $s$  потрібно включити у рівняння прямої зі знаком « $-$ ».

На кроці (1) ми ввели люзову змінну, а на кроці (2) – перенесли  $f$  в праву частину рівняння. Оскільки  $b$  завжди позначає кількість доступного ресурсу, а  $f$  – функція, що обраховує кількість використаних (перемножуючи  $x_1, x_2, \dots$  на відповідні  $a_{n1}, a_{n2}, \dots$ ), то логічно, що  $s$  можна інтерпретувати як *кількість невикористаних ресурсів*.

### Система рівнянь з люзовими змінними

Нехай маємо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \end{cases}.$$

Введемо змінну  $\delta_n$ . Якщо  $n$ -на нерівність в системі має знак « $\leq$ », то  $\delta_n = 1$ , а якщо навпаки – то  $\delta_n = -1$ . Тепер систему нерівностей можна переписати як систему рівностей, а також отримати аналогічний запис у матрично-векторному вигляді.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - s_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Ще коротший запис –  $\mathbf{AX} + \delta\mathbf{s} = \mathbf{b}$ . Аналогічно можна представити систему нерівностей будь-якої вимірності.

#### Проблема №2.10

Нехай  $\delta$  – одинична матриця. Який висновок можна зробити про систему нерівностей?

## Проблема №2.11

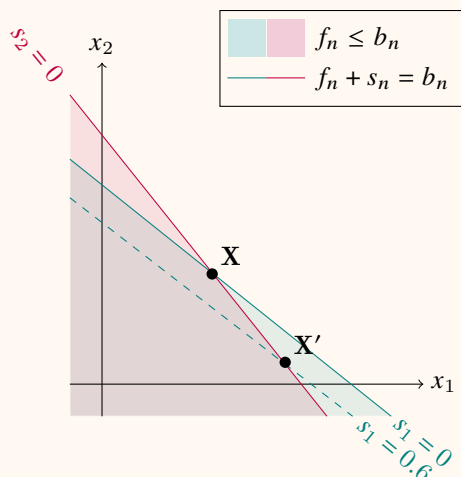
Нехай всі нерівності з ОДР мають знак « $\leq$ », і  $\forall \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in G \quad \forall i : x_i \geq 0$ . Чи можна стверджувати, що точка центру координат  $\langle 0, 0, \dots \rangle \in G$ ?

## Проблема №2.12

Маємо систему з люзовими змінними за прикладом, що вище. Змінним  $x_1$  та  $x_2$  присвоєно деякі значення так, що вони визначають розв'язок системи. Зрозуміло, що при зміні їхнього значення,  $s_1$  та  $s_2$  потрібно перерахувати, щоби рівності знову справджувались. Якою буде формула для обрахунку нових люзових змінних?

## Проблема №2.13

Аналізуємо ту саму систему рівнянь. Нехай при значеннях  $s_1 = s_2 = 0$  система має деякий розв'язок  $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle$ , як показано на рисунку нижче. Очевидно, що якщо змінити значення  $s_1$ , то розв'язок системи теж зміниться. Як знайти його?



### Оцінка росту функції

Нехай маємо цінову функцію у загальному вигляді  $\varphi = c_1x_1 + c_2x_2$ . Уявімо також, що на площині визначена деяка точка  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Дозволено збільшувати одну з її координат. Яку з них доцільно обрати таку, щоби значення  $\varphi$  зростало якнайшвидше?

«Найвигіднішу» координату можна обрати як за допомогою частинного диференціювання, так і користуючись простою арифметичною логікою: у значення  $\varphi$  найбільший вклад вносить така змінна  $x_i$ , біля якої стоїть найбільший коефіцієнт  $c_i$ . Приклад конкретної задачі показано на Рис. 2.12.

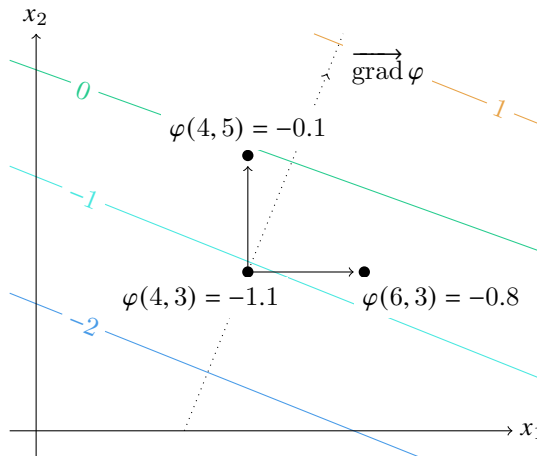
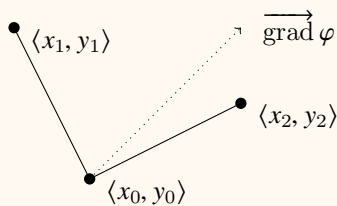


Рис. 2.12: Ізолініями позначено значення функції  $\varphi = 2x_1 + 5x_2$ . Видно, що збільшення координати  $x_2$  дає більший зріст  $\varphi$ , ніж збільшення  $x_1$  на те саме значення. Це стається тому, що  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ , або по-іншому:  $c_1 > c_2$ .



## Проблема №2.14

З точки  $\langle x_0, y_0 \rangle$  можна перейти до  $\langle x_1, y_1 \rangle$  або  $\langle x_2, y_2 \rangle$ , при чому відстань від  $\langle x_0, y_0 \rangle$  до  $\langle x_1, y_1 \rangle$  така сама, як і до  $\langle x_2, y_2 \rangle$ . Цінова функція задана як  $\varphi = xc_1 + yc_2$ . Чи можна за рисунком оцінити, перехід до якої точки призведе до найбільшого зростання  $\varphi$ ? Чи можна також зробити це аналітично, не обраховуючи значення  $\varphi$ ? Якщо можна, то як? Чи працюватиме це для багатовимірних просторів?



## Люзові змінні як базис

Погляньмо ще раз на Рис. 2.10. Можна уявити, що  $s$  змінюється по деякій діагональній осі. Спробуймо провести її на графіку, викинувши якусь іншу, наприклад,  $x_2$ , як на Рис. 2.13. Така дія називається **переходом до нового базису**<sup>4</sup>. Використовуючи нові осі, можна представити будь-яку точку двовимірного простору. Таку систему координат ми називаємо «простором з базисом  $\langle x_2, s \rangle$ ». Якщо в ньому рухати якусь точку, змінюючи всього одну координату, то легко побачити, що аналогічний рух на графіку з базисом  $\langle x_1, x_2 \rangle$  вимагатиме зміни двох координат одночасно, як на Рис. 2.14.

Чому це може бути зручно? Справа в тім, що в новому базисі  $\langle x_1, s \rangle$  моделювати рух по потрібній лінії досить просто – ми ж змінювали лише одну змінну. Водночас, завжди є можливість повернутись назад, до зви-

<sup>4</sup>(англ.) *pivoting*

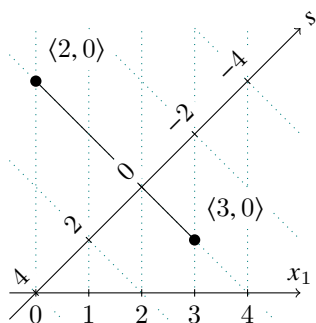


Рис. 2.13: Нові осі теж створюють двовимірний простір – щоправда, трохи «спотворений». Вздовж всієї лінії змінюється лише координата  $x_1$ , а  $s_1$  залишається сталою.

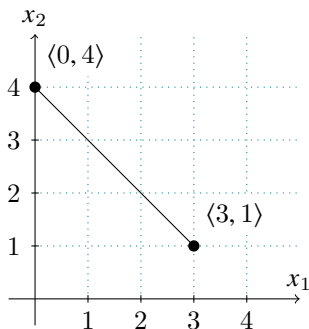


Рис. 2.14: Той самий шлях у базисі  $\langle x_1, x_2 \rangle$  вимагає зміни двох координат  $x_1$  та  $x_2$  одночасно.

чного базису  $\langle x_1, x_2 \rangle$ , отримавши нові координати, які інакше довелося б розраховувати, наприклад, з рівняння прямої.

Операція заміни базису є тривіальним завданням в лінійній алгебрі. Нові координати можуть бути обчислені за допомогою спеціальних матриць переходу, або з системи рівнянь.

#### Проблема №2.15

Чи можна створити такий простір  $O$ , в якому рух по прямій перетворювався би в рух по колу в просторі  $R$ ? Якими будуть формули переходу? Яку мінімальну вимірність повинні мати такі простори? Чи є таке перетворення лінійним?

Нехай ми маємо, наприклад, систему рівнянь таку, як показана на Рис. 2.15. Можна побачити, що перебуваючи в базисі  $\langle x_1, s_1 \rangle$ , і змінюючи

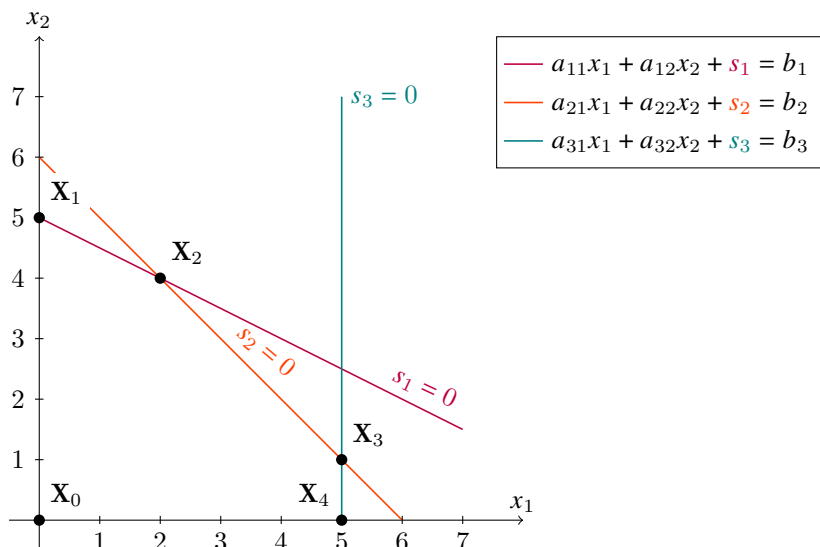


Рис. 2.15: Три рівняння при  $s_{1,2,3} = 0$  та осі  $x_1$  і  $x_2$  замикають область опуклого п'ятикутника. На перетинах усіх ліній позначено точки  $X_0 \dots X_4$ . Для простоти зображення відповідні осі  $s_1$ ,  $s_2$  та  $s_3$  не показано.

лише координату  $x_1$  при  $s_1 = 0$  можна потрапити з точки  $X_1$  до  $X_2$ . Для того, щоби здійснити наступний перехід до  $X_3$ , зручно включити в базис  $s_2$ . Тепер він складатиметься з трьох змінних, і оскільки ми працюємо з двовимірним простором, одну з них можна «викинути». Зазвичай «викидають» ту змінну, значення якої ми вже змінили раніше.

Позначатимемо надалі перехід від однієї точки до іншої знаком « $\langle \cdot, \cdot \rangle$ » – стрілкою, над якою позначено базис, у якому зручно моделювати таке переміщення.

Читаць вже знає, що при збільшенні  $s_i$  лінія рівняння з відповідною люзовою змінною наближатиметься до центру координат. Якщо ж навпаки деяке  $s_i < 0$ , то така лінія виходить за межі ОДР. Тому, щоби уникнути такої ситуації, вводячи люзові змінні, ми повинні створити ще одне обмеження ОДР –

$$\forall i : s_i \geq 0.$$

Отже, рух вздовж фігури, що окреслена заданою системою рівнянь, матиме такий вигляд:  $\mathbf{X}_0 \xrightarrow{\langle x_1, x_2 \rangle} \mathbf{X}_1 \xrightarrow{\langle x_1, s_1 \rangle} \mathbf{X}_2 \xrightarrow{\langle s_2, s_1 \rangle} \mathbf{X}_3 \xrightarrow{\langle s_2, s_3 \rangle} \mathbf{X}_4 \xrightarrow{\langle x_1, s_3 \rangle} \mathbf{X}_0$ . Як видно, така техніка дозволяє навіть, збільшуючи  $s_3$  і утримуючи  $x_1 = 0$ , потрапити у точку  $\mathbf{X}_0$ , тобто, фактично, зробити крок назад.

### Висновки

Якщо уважно прослідкувати за поданим рухом, то можна помітити, що змінна, яка входить в новий базис – це завжди та, що визначає лінію, яка перетинається з траєкторією руху найперша. До прикладу: якщо ми рухаємось вздовж осі  $x_2$  в напрямку зростання, то спочатку ми перетинаємо лінію  $s_1 = 0$ , а тоді –  $s_2 = 0$ . Отже в новий базис замість  $x_2$  (яку ми вже змінювали раніше) увійде  $s_1$ .

Якщо повторити цю проблему у тривимірному, або в будь-якому  $n$ -вимірному просторі, то базис переходу міститиме три, або  $n$  змінних відповідно. Такі процеси дуже важко, або взагалі неможливо візуалізувати, саме тому так важливо створити хорошу аналітичну модель.

### Оцінка росту функції в новому базисі

Зрозуміло, що в процесі ходу алгоритму ми переходимо від якогось  $X_a$  до  $X_b$  не просто так, а лише тому, що  $\varphi(X_b) > \varphi(X_a)$ , і ці дві точки є сусідніми. Читач вже знає, що для оцінки того, значення якої змінної варто змінювати, потрібно просто порівняти коефіцієнти  $c_i$ . Однак що робити, коли цінова функція задана як  $\varphi(x_1, x_2)$ , а ми перебуваємо в базисі, наприклад,  $\langle x_1, s_1 \rangle$ ? Маючи систему рівностей таку саму, як приведено на Рис. 2.15, можна виразити  $x_2$  з першого рівняння. Тоді отримуємо:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1 \quad \equiv \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{b_1 - s_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} \quad ; \quad (2)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \quad \Rightarrow \quad (2.11)$$

$$\varphi(x_1, s_1) = c_1x_1 + c_2 \left( \frac{b_1 - s_1 - a_{11}x_1}{a_{12}} \right) \quad \equiv \quad (3)$$

$$\varphi(x_1, s_1) = c_2a_{12}c_1x_1 - c_2b_1 - c_2s_1 - c_2a_{11}x_1$$

Тепер ми отримали цінову функцію, яка залежить від аргументів нового базису. При чому, вона є лінійною. Тому тепер для оцінки оптимального напрямку достатньо лише порівняти коефіцієнти при відповідних змінних. Аналогічний процес відбуватиметься при переході між будь-якими кутовими точками фігури.

### Базис симплекс-методу

Раніше, для того, щоби вивести з базису змінну  $x_2$ , і ввести  $s_1$ , ми відшукали в системі рівнянь таке, що містить  $s_1$  лише один раз (2.11.1), розв'язали його відносно змінної, яку виводимо (2.11.2), і тоді замінили отриманим виразом виведену змінну (2.11.3). Для того, щоби така опера-

ція була завжди зручною, можна підтримувати систему рівнянь у такому вигляді, щоби всі рівняння були розв'язані відносно змінної, яка може бути введена в базис. Наприклад:

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2, \\ s_2 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2, \\ s_3 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2, \\ \varphi(x_1, x_2) &= c_1x_1 + c_2x_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Читачу, що вже має розв'язок Проблеми №2.12, така форма запису системи рівнянь видається знайомою. Ми змогли через три змінні виразити всі рівняння: це тому, що кожна змінна трапляється лише в одному з них, і лише один раз. За таку особливість  $s_1$ ,  $s_2$  та  $s_3$  називають **базисними змінними**. Цей момент може бути дуже незрозумілим, позаяк до цього ми називали «базисом» змінні, через які виражена цінова функція, і змінюючи які, нам зручно рухатись вздовж фігури ОДР. Така суперечність у назвах виникла тому, що алгоритм переназиває деякі речі математичного апарату – нам же, задля зрозумілості, потрібно якось розмежувати ці поняття. Тому надалі використовуймо поняття **просторового базису** та **симплекс-базису**.

**Симплекс-базис** – сукупність змінних, кожна з яких трапляється лише в одному з рівнянь системи, і з додатнім знаком. В межах симплекс-методу їх називають просто **базисом**. На початку розв'язку задачі він може складатися лише з люзових змінних.

**Просторовий базис** – змінні, через які виражена цінова функція, і які ми будемо змінювати. В межах симплекс-методу їх називають **вільними змінними**.

Тепер, якщо нам потрібно, наприклад, вивести з просторового ба-

зису змінну  $x_1$ , а ввести  $s_3$ , ми виконуємо такі кроки:

1. знаходимо рівняння, яке починається з « $s_3 =$ »;
2. розв'язуємо його відносно  $x_1$ , і отримуємо

$$x_1 = \frac{s_3 - b_3 + a_{32}x_2}{-a_{31}};$$

3. у кожному з рівнянь системи та цінovій функції замінюємо  $x_1$  на отриманий дріб, і маємо нову систему;
4. для зручності приводимо кожен з записів до лінійного вигляду.

Жодне зі значень змінних  $x_1, x_2, s_1, \dots$  при цьому не змінюється, але ми отримуємо запис системи рівнянь у зовсім іншому вигляді – такому, що збільшуючи лише одну координату просторового базису, і відповідно перераховуючи змінні симплекс-базису, ми можемо потрапити у сусідню точку фігури ОДР. Таким чином, змінюючи базиси та збільшуючи значення просторових змінних, ми поступово наближатимемось до оптимального розв'язку задачі.

Позначатимемо надалі симплекс-базис як  $\mathbf{B}_S$ , а просторовий базис –  $\mathbf{B}_A$ . Позначення  $\mathbf{B}_S \xrightarrow{a} \mathbf{B}_A$  означатиме перехід деякої змінної  $a$  з симплекс-базису у просторовий.

### Межа збільшення змінних просторового базису

Ми вже знаємо, що збільшуючи деяку змінну просторового базису, можна потрапити у сусідню точку фігури. Однак ми досі не відповіли на дуже важливе запитання: а наскільки потрібно збільшувати цю змінну? Розгляньмо детальніше Рис. 2.15. Нехай на деякій ітерації ми перебуваємо в точці  $\mathbf{X}_0$  і маємо просторовий базис  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Це означає, що кожне

з рівнянь системи в цей момент розв'язане відносно відповідної змінної симплекс-базису  $\langle s_1, s_2, s_3 \rangle$  – так, як у системі (2.12).

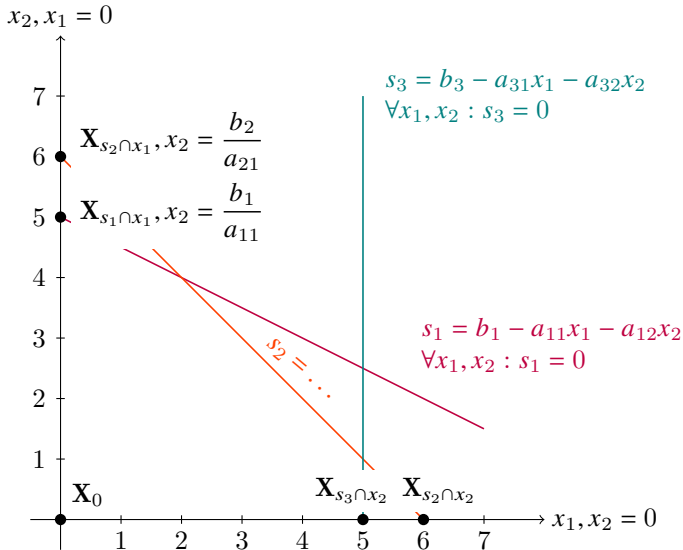


Рис. 2.16: Рухаючись від точки  $X_0$ , ми можемо збільшувати  $x_2$ , доки не досягнемо точки  $X_{s_1 \cap x_1}$ , в якій  $x_1 = s_1 = 0$ , або точки  $X_{s_2 \cap x_1}$ , де  $x_1 = s_2 = 0$ . Якщо підставити відомі  $x_1$ ,  $s_1$  та  $s_2$  в рівняння відповідних прямих, то можна знайти координати  $x_2$  обох точок. Аналогічно змінну  $x_1$  можна збільшувати, доки ми не досягнемо точок  $X_{s_3 \cap x_2}$  або  $X_{s_2 \cap x_2}$ , координати  $x_1$  яких можна знайти з відповідних рівнянь прямих.

Якщо подивитись на деталізованішу інтерпретацію на Рис. 2.16, то можна побачити, що кожне рівняння системи визначає лінії, які перетинатимуть траєкторію руху, якщо ми збільшуватимемо одну зі змінних просторового базису. Нехай, наприклад, ми хочемо збільшувати  $x_1$ , утримуючи  $x_2 = 0$ . Тоді з системи рівнянь ми можемо отримати межі збільшення  $x_1$ , такі щоби виконувалась умова з ОДР  $\forall i : s_i \geq 0$ :



$$\begin{cases} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12} \cdot 0 \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22} \cdot 0 \\ s_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32} \cdot 0 \end{cases} \xRightarrow{s_{1,2,3} \geq 0} \begin{cases} x_1 \leq \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_1 \leq \frac{b_2}{a_{21}} \\ x_1 \leq \frac{b_3}{a_{31}} \end{cases}.$$

Залишається лише присвоїти  $x_1$  таке значення, щоби задовільнити всі отримані нерівності, і перерахувати всі змінні симплекс-базису – читач уже вміє це робити, якщо має розв'язок Проблеми №2.12.

#### Проблема №2.16

Нехай у системі ми маємо рівняння  $s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2$ , при чому  $a_{11} = 0$ . Тобто, ми можемо отримати нерівність  $x_1 \leq \frac{b_1}{a_{11}}$ , у якій буде ділення на нуль. Що тоді можна сказати про таку межу? Які висновки можна зробити про лінію  $s_1 = 0$  на графіку?

#### Висновки

Змінні симплекс-базису, прирівняні до нуля завжди визначають лінії, що перетинають траєкторію руху при зміні значення однієї зі змінних просторового базису.

Для зрозумілості спробуємо також проаналізувати перехід  $\mathbf{X}_1 \xrightarrow{\langle x_1, s_1 \rangle} \mathbf{X}_2$ , як показано на Рис. 2.17. Оскільки просторовий базис –  $\langle x_1, s_1 \rangle$ , то це означає, що симплекс базис складається зі змінних  $x_2$ ,  $s_2$ , та  $s_3$ . Дійсно, якщо утримувати  $s_1 = 0$ , збільшуючи  $x_1$ , спочатку ми перетнемо лінію  $s_2 = 0$  у точці  $\mathbf{X}_2$ , тоді –  $s_3 = 0$  у  $\mathbf{X}_{s_1 \cap s_3}$ , і наостанок –  $x_2 = 0$ . Якщо ж утримувати  $x_1 = 0$ , збільшуючи  $s_1$ , то найпершою ми перетнемо лінію  $x_1 = 0$ . Для того, щоби перетнути  $s_2 = 0$  у точці  $\mathbf{X}_{x_1 \cap s_2}$ , змінну  $s_1$  доведеться навпаки зменшувати.

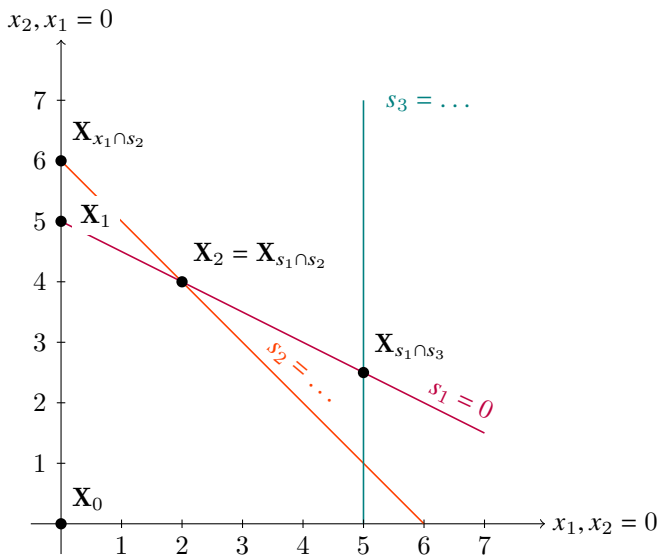


Рис. 2.17: Перехід  $X_1 \rightarrow X_2$  у базисі  $\langle x_1, s_1 \rangle$  з Рис. 2.15. Щоби не перевантажувати рисунок, сюди не додана нова вісь  $s_1$  замість  $x_2$ .

### Канонічна постановка задачі

Ми вже знаємо, що умова задачі лінійного програмування зазвичай задається сукупністю нерівностей. Але читач міг помітити, що насправді ми ніколи не працюємо з самими нерівностями безпосередньо – дійсно, нас не цікавлять точки, що містяться всередині ОДР. Натомість ми аналізуємо лише її межі, рівності, якими вона задана. Окрім того, якщо в умові задачі потрібно максимізувати  $\varphi$ , ми можемо бути точно певні, що пошук розв'язку слід починати з точки з якнайменшими допустимими  $x_i$ , і найчастіше це буде точка початку координат. Тепер, оскільки це настільки досліджений та зручний тип задач, можна ввести поняття **канонічної умови задачі**<sup>5</sup>, яку визначимо як (2.13). Тобто, неформально кажучи, в

<sup>5</sup>(англ.) *canonical form*

«канонічній умові» ОДР складається тільки з рівностей, і цінову функцію завжди потрібно максимізувати.

$$\begin{aligned}
 &\text{оптимізувати} \quad \varphi = \mathbf{c}^T \mathbf{X} \rightarrow \max \\
 &\text{з обмеженнями} \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad \forall i : x_i \geq 0, \\
 &\text{де} \quad \mathbf{c}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \\
 &\quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Окрім цього, якщо всі люзові змінні мають додатний знак, то  $G \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{0} \in G$  (з розв'язку Проблеми №2.11). Цей факт дозволяє нам завжди брати за початковий опорний план точку  $\mathbf{X}_0 = \langle 0, 0, \dots \rangle^T$ .

### 2.3.2 Аналітичне розв'язування

Тепер спробуймо використати всі можливості створеного математичного апарату, розв'язуючи задачу (2.14). Її графічна інтерпретація показана на Рис. 2.18.

$$\begin{aligned}
 &\text{оптимізувати} \quad \varphi = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\
 &\text{з обмеженнями} \quad 2x_1 + x_2 \leq 4; \\
 &\quad \quad \quad x_1 + 3x_2 \leq 4; \\
 &\text{при} \quad x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

#### Приведення до канонічного вигляду

Тепер, щоби привести цю задачу до канонічного вигляду, потрібно перетворити нерівності у рівності з допомогою люзових змінних. Ми вже знаємо, що для нерівностей зі знаком « $\leq$ » люзові змінні повинні бути додатними. Тому ми отримуємо таку умову:

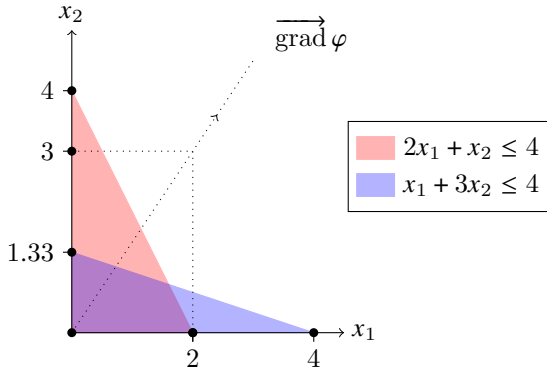


Рис. 2.18: Ілюстрація задачі (2.14).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 4 \end{cases}.$$

Враховуючи, що  $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$ , отримана умова є канонічною, оскільки  $\varphi \rightarrow \max$ , і її можна інтерпретувати як

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \equiv (\mathbf{AX} = \mathbf{b}).$$

Оскільки функція  $\varphi$  виражена через змінні  $x_1$  та  $x_2$ , ми маємо симплекс-базис  $\langle s_1, s_2 \rangle$  і просторовий базис  $\langle x_1, x_2 \rangle$ . Розв'яжімо систему через змінні симплекс-базису:

$$\begin{cases} s_1 = 4 - 2x_1 - x_2 \\ s_2 = 4 - x_1 - 3x_2 \end{cases}.$$

Початковий розв'язок задачі –

$$\mathbf{X}_0 = \langle x_1, x_2, s_1, s_2 \rangle^\top = \langle 0, 0, 4, 4 \rangle^\top, \quad \varphi(\mathbf{X}_0) = 0.$$

**Ітерація №1**

Як можна його покращити? З аналізу цінової функції  $\varphi = 2x_1 + 3x_2$  зрозуміло, що найвигідніше збільшувати змінну  $x_2$ , оскільки  $c_2 > c_1$ . Проаналізуємо, як змінні  $s_1$  та  $s_2$  залежать від  $x_2$ :

$$\begin{cases} s_1 = 4 - x_2 \\ s_2 = 4 - 3x_2 \end{cases}$$

Для того, щоби зберігалась умова  $s_1, s_2 \geq 0$ , змінна  $x_2$  має відповідати таким умовам:

$$\begin{cases} x_2 \leq 4, & \text{щоби } s_1 \geq 0; \\ x_2 \leq \frac{4}{3}, & \text{щоби } s_2 \geq 0. \end{cases}$$

Отже, найбільше можливе значення  $x_2 = \frac{4}{3}$ . Нові значення просторового базису –  $x_1 = 0$  та  $x_2 = \frac{4}{3}$ . Значення симплекс-базису можна обчислити з системи:

$$\begin{cases} s_1 = 4 - 2 \cdot 0 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \\ s_2 = 4 - 0 - 3 \cdot \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

Маємо новий, «покращений» розв'язок –

$$\mathbf{X}_1 = \langle x_1, x_2, s_1, s_2 \rangle^T = \left\langle 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 0 \right\rangle^T, \quad \varphi(\mathbf{X}_1) = 4.$$

Оскільки ми збільшували змінну  $x_2$  до межі, яку визначає лінія  $s_2$ , то  $\mathbf{B}_A \xrightarrow{x_2} \mathbf{B}_S$  і  $\mathbf{B}_S \xrightarrow{s_2} \mathbf{B}_A$ . Графічно це можна уявити так, як показано на Рис. 2.19.

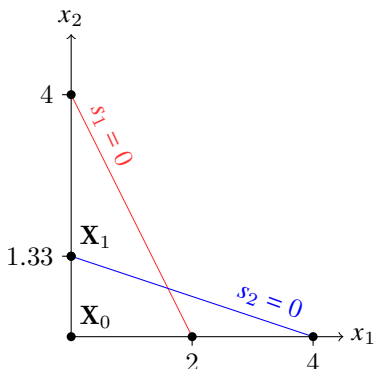


Рис. 2.19: Утримуючи  $x_1 = 0$ , і збільшуючи  $x_2$ , ми перетинаємо спочатку лінію  $s_2 = 0$  у точці  $x_2 = 1.33 = \frac{4}{3}$ , а тоді  $s_1 = 0$  у точці  $x_2 = 4$ . З рисунка видно, що та лінія, яку ми перетинаємо найперше, формує межу фігури ОДР  $- s_2 = 0$ . Тобто, для того, щоби отримати наступну кутову точку, потрібно рухатись саме вздовж неї, а отже в наступній ітерації зручно включити  $s_2$  у просторовий базис, виключивши якусь іншу змінну натомість. Зазвичай ми виключаємо ту змінну, значення якої вже змінювали – у цьому випадку  $x_2$ .

### Ітерація №2

Щоби отримати новий базис, ми застосуємо такі перетворення до системи рівнянь ОДР:

$$(s_2 = 4 - x_1 - 3x_2) \equiv \left( x_2 = \frac{s_2 - 4 + x_1}{-3} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s_1 = 4 - 2x_1 - \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}s_2 \right) \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}s_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} s_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}s_2 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}s_2. \end{cases}$$

Тепер ми отримали систему з просторовим базисом  $\langle x_1, s_2 \rangle$  та

симплекс-базисом  $\langle s_1, x_2 \rangle$ . Аналогічно з ціною функцією:

$$\begin{aligned}\varphi &= 2x_1 + 3x_2 = \\ &= 2x_1 + 3\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}s_2\right) = \\ &= x_1 - s_2 + 4.\end{aligned}$$

Тепер, коли ми маємо нову цінову функцію, можна визначити напрямок подальшого руху, порівнявши коефіцієнти біля змінних. Якщо збільшувати значення  $s_2$ , що має коефіцієнт  $-1$ , то  $\varphi$  лише спадатиме, однак  $x_1$  з коефіцієнтом  $1$  збільшуватиме оптимальність.

Визначмо межі збільшення  $x_1$  з рівнянь системи:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_1 \dots \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x_1 \dots \end{cases} \xRightarrow{s_1, x_2 \geq 0} \begin{cases} x_1 \leq \frac{8}{3} : \frac{5}{3} \\ x_1 \leq \frac{4}{3} : \frac{1}{3} \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 \leq \frac{8}{5} \\ x_1 \leq \frac{8}{2} \end{cases}$$

Нові значення змінних просторового базису:  $x_1 = \frac{8}{5}$ ,  $s_2 = 0$ . Обрахуймо значення змінних симплекс-базису:

$$\begin{cases} s_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5} + \frac{1}{3} \cdot 0 = -\frac{16}{9} \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{5} - \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Маємо новий розв'язок:

$$\mathbf{X}_2 = \left\langle \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{16}{9}, 0 \right\rangle^T, \quad \varphi(\mathbf{X}_2) = \frac{28}{5} = 5.6.$$

Як видно,  $\varphi(\mathbf{X}_2) > \varphi(\mathbf{X}_1)$ , отже оптимальність розв'язку зростає. Окрім того, оскільки ми збільшували просторову змінну  $x_1$  до межі, що визначає змінну  $s_1$ , то тепер  $\mathbf{B}_A \xrightarrow{x_1} \mathbf{B}_S$  такі  $\mathbf{B}_S \xrightarrow{s_1} \mathbf{B}_A$ . Графічно це можна уявити як показано на Рис. 2.20.

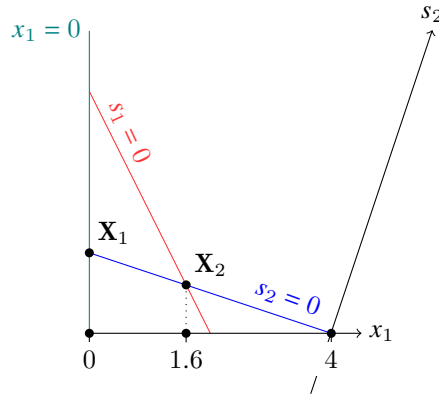


Рис. 2.20: Утримуючи  $s_2 = 0$ , і збільшуючи  $x_1$  у просторовому базисі  $\langle x_1, s_2 \rangle$ , ми перетинаємо спочатку лінію  $s_1 = 0$  у точці  $x_1 = \frac{8}{5} = 1.6$ , а тоді лінію  $x_2 = 0$  у точці  $x_1 = \frac{8}{2} = 4$ . З рисунку видно, що та лінія, яку ми перетинаємо найперше, і формує межу області ОДР. Тому у наступній ітерації зручно включити змінну  $s_1$  у просторовий базис; натомість виключаємо  $x_1$ , бо значення цієї змінної ми вже змінювали раніше.

### Ітерація №3

Щоби отримати запис системи у новому просторовому базисі  $\langle s_1, s_2 \rangle$ , застосуємо такі перетворення:

$$(s_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_1 + \frac{1}{3}s_2) \equiv \left( x_1 = \frac{s_1 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}s_2}{-\frac{5}{3}} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 \\ x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2\right) - \frac{1}{3}s_2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 \\ x_2 = \frac{19}{15} + \frac{3}{15}s_1 - \frac{6}{15}s_2. \end{cases}$$

Аналогічно з ціною функцією:



$$\begin{aligned}\varphi &= x_1 - s_2 + 4 = \\ &\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2\right) - s_2 + 4 = \\ &\frac{21}{5} - \frac{3}{5}s_1 - \frac{4}{5}s_2 + 4 = 0.\end{aligned}$$

Як видно, усі змінні функції  $\varphi(s_1, s_2)$  мають від'ємні коефіцієнти. Це означає, що при збільшенні будь-якої з них, значення  $\varphi$  лише спадатиме. Отож, позаяк усі сусідні кутові точки мають менше значення оптимальності, ніж поточна, розв'язок  $\mathbf{X}_2$  можна вважати оптимальним. І дійсно,

$$\begin{array}{ccc}\varphi(\mathbf{X}_0) < \varphi(\mathbf{X}_1) < \varphi(\mathbf{X}_2). \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ 0 & 4 & 5.6\end{array}$$

### Формування алгоритму

Ми вже знаємо, що для того, щоби скористатись симплекс-методом, задача ЛП має бути подана у канонічному вигляді: система ОДР складається тільки з рівностей, і  $\varphi \rightarrow \max$ . Цю процедуру можна формалізувати так, як показано у Алгоритмі 1.

---

#### **Алгоритм 1** Канонізування задачі ЛП (аналітичне)

---

- 1: **функція** Канонізування ЛП (нерівності  $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ )
- 2: провести перетворення

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

↓

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + s_i = b_i$$

- 3:  $\mathbf{B}_A \leftarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle^T$  ► просторовий базис
  - 4:  $\mathbf{B}_S \leftarrow \langle s_1, \dots, s_m \rangle^T$  ► симплекс-базис
-

- 
- 5:  $\forall i : x_i \leftarrow 0, s_i \leftarrow b_i$  ► початкові значення змінних
- 6: сформувати систему у вигляді

$$G \leftarrow \begin{cases} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ s_m = b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n \end{cases}$$

- 7: **повернути**  $G, B_A, B_S$
- 8: **кінець функція**
- 

Створений алгоритм – це лише формалізований процес приведення умови задачі ЛП до канонічного вигляду. Звичайно, що для того, щоби запрограмувати це, потрібно представити систему нерівностей у вигляді структур даних тощо.

Надалі ми можемо записувати систему ОДР у матрично-векторному вигляді як

$$B_S = Ib - A(-B_A).$$

Приводячи задачу ЛП до канонічного вигляду так, як показано у Алгоритмі 1, ми робимо одне дуже громіздке припущення: *усі нерівності ОДР мають знак « $\leq$ »*. Лише в такому випадку ми можемо сформувати симплекс-базис і брати за опорний план точку  $\langle 0, 0, \dots \rangle$ . Ситуація, коли ми цього зробити не можемо, розглянута у наступних розділах.

Дії, що ми виконували далі, можна описати так, як показано у Алгоритмі 2.

**Алгоритм 2** Симплекс-метод (аналітичний)

- 
- 1: **функція** СимплексМетод(нерівності,  $\varphi = \mathbf{X}\mathbf{c}^\top$ )
  - 2:  $G, \mathbf{B}_A, \mathbf{B}_S \leftarrow$  КанонізуванняЛП(нерівності)
  - 3: **доки**  $\forall 1 \leq i \leq n : c_i > 0$  **виконувати**
  - 4:     вибрати таке  $v_a \in \mathbf{B}_A$ , що  $\varphi$  має доданок  $c \cdot v_a$  де  $c = \max_{c_i \in \mathbf{c}} c_i$   
       *► вибране  $v_a$  буде змінною, що покине просторовий базис*
  - 5:     вибрати таке  $v_s \in \mathbf{B}_S$ , що  
       
$$G = \begin{cases} s_1 = b_1 - a_{1l}v_a - \dots \\ s_2 = b_2 - a_{2l}v_a - \dots \\ \vdots \\ v_s = b_k - a_{kl}v_a - \dots \\ \vdots \end{cases} \quad \text{та} \quad \frac{b_k}{a_{kl}} = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{b_i}{a_{il}}$$
  
       *► вибране  $v_s$  – це змінна, що покине симплекс-базис;  $\forall i : s_i \in \mathbf{B}_S$*
  - 6:      $v_a \leftarrow \frac{b_k}{a_{kl}}$      *► нове значення змінної просторового базису*
  - 7:     розрахувати нові значення змінних в  $\mathbf{B}_S$
  - 8:      $\mathbf{B}_A \xrightarrow{v_a} \mathbf{B}_S, \mathbf{B}_S \xrightarrow{v_s} \mathbf{B}_A$      *► запам'ятати нові базиси*
  - 9:     розв'язати  $G$  та  $\varphi$  відносно нового симплекс-базису  
       *► тепер ми отримали нові коефіцієнти  $c_i$  для  $\varphi = \mathbf{c}\mathbf{B}_S^\top$*   
       *► також маємо нові  $a_{ij}$  та  $b_i$  для системи  $G$*
  - 10:    **кінець доки**
  - 11:     $\mathbf{X} \leftarrow \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$   
       *► нас цікавлять змінні просторового базису, що був з початку задачі*
  - 12:    **повернути**  $\mathbf{X}$
  - 13: **кінець функція**
-

**Проблема №2.17**

Ми представляли систему ОДР у матрично-векторному вигляді як

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{I}\mathbf{b} - \mathbf{A}(-\mathbf{B}_A).$$

Раніше, при заміні базису ми отримували нову систему аналітично, розв'язуючи рівняння відносно потрібної змінної, підставляючи значення в інші рівняння тощо. Чи можна якось знайти нові  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{b}$  працюючи тільки з матрично-векторним виглядом, не виконуючи жодних алгебраїчних перетворень рівнянь?

**2.3.3 Симплекс-таблиці**

далі – незакінчені (непочаті) розділи

**2.4 Цілочисельне лінійне програмування****2.5 Проблеми оптимального вибору**

Рядок ціни задає коефіцієнти для цінової функції:

$$\varphi = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

Для збільшення  $x_1$  на 1 потрібно зменшити  $s_1$  на  $a_{11} = 2$ . Так само для решти чисел таблиці.

Аналогічно,  
 $x_2 + 1 \rightarrow s_2 - a_{22}$ .

Рядок змінних відображає усі змінні, задіяні в обчисленнях.

Якщо збільшуємо  $x_2$ , то наскільки щонайбільш, враховуючи доступні  $s_1$  та  $s_2$ ?

$$\text{межа} = \frac{\text{план}}{a_{ij}}$$

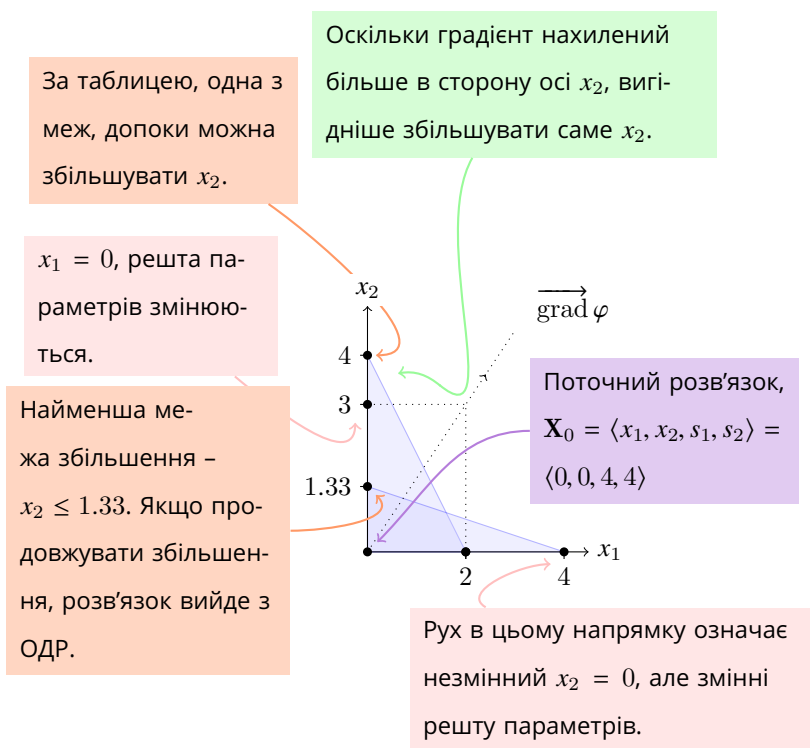
<b>Ціна</b>		2	3	0	0		
<b>Змінні</b>		$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	<b>План</b>	<b>Межа</b>
<b>Базис</b>	$s_1$	2	1	1	0	4	4
	$s_2$	1	3	0	1	4	1.33
<b>Ризик</b>		0	0	0	0		
<b>Вигода</b>		2	3	0	0		

Поточне значення  $s_1$ .

Значення втраченої вигоди від прийнятого рішення. На поточному кроці – нульовий рядок.

Базисні змінні – це ті, що не дорівнюють нулю, і не підлягають збільшенню чи зменшенню. Отже змінюватимемо  $x_1$  або  $x_2$ .

На поточному кроці немає жодного ризику, тому вигода дорівнює ціні. Оскільки це найбільше значення в рядку, найвигідніше збільшувати  $x_2$ .



## Розв'язування проблем

### Проблема №2.1

Звичайно, на світі існує безліч ресурсів, які не вийде представити дробами: не можна відправити на роботу двох з половиною робітників, продати половину телевізора або що. Тоді до умов ОДР додається ще одна –  $\forall i : x_i \in \mathbb{Z}$ . Пошук такого розв'язку може бути набагато складнішим, ніж коли  $\forall i : x_i \in \mathbb{R}$ .

### Проблема №2.2

Кілька цінових функцій може з'явитись тоді, коли розв'язок описується кількома характеристиками. Звичайно, якщо вони якимось чином залежать одна від одної, для спрощення задачі краще обійтись однією (або будь-яким іншим мінімальним числом). Наприклад, між відстанню, яку проходить автомобіль, та кількістю спожитого палива існує пряма залежність, тому при мінімізації чогось одного інша характеристика також зменшуватиметься вже без будь-якого впливу.

Проте якщо існують деякі  $\varphi_1 \dots \varphi_i$ , і вони не є пов'язаними, то їх можна, наприклад, просто додати:  $\varphi = \sum_i \varphi_i$ . В такому разі мінімізація або максимізація  $\varphi$  означатиме аналогічну зміну всіх  $\varphi_i$ .

Припустимо, що якусь  $\varphi_n$  потрібно мінімізувати, а решту  $\varphi_i \forall i \neq n$  – максимізувати. Тоді  $(-\varphi_n) \rightarrow \max \Rightarrow \varphi_n \rightarrow \min$ . В такому разі сумарну оцінку можна сформулювати як  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_i - \varphi_n$  – тоді умова  $\varphi \rightarrow \max$  гарантуватиме правильне знаходження розв'язку.

Коли це може бути корисним? Припустимо, продукція різних видів  $x_i$  по двох магазинах, де продається за різними цінами  $a_i$  та  $b_i$  відповідно. В такому разі «вигода» прийнятого рішення характеризуватиметься

оцінками  $\varphi_a = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots$  та  $\varphi_b = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots$ . Тоді максимізація функції

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b = (a_1 + b_1)x_1 + \dots$$

забезпечуватиме правильне знаходження розв'язку.

### Проблема №2.3

Оскільки за умовою потрібно «перевезти якомога більше вантажу», то задля оцінки прийнятого рішення достатньо просто додати всі елементи матриці  $\mathbf{X}$ :

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

До обмежень, приведених у розділі 2.1.3, потрібно додати ще одне, яке запобігатиме перевантаженню доріг. Тоді ОДР матиме такий вигляд:

$$\mathbf{X} \in G \Leftarrow \begin{cases} \vdots \\ \forall i, j : x_{ij} \leq c_{ij} \end{cases}$$

### Проблема №2.4

Теоретично, з допомогою градієнтного спуску можна знайти екстремум будь-якої диференційовної функції, якщо область допустимих розв'язків є неперервна. Позначимо  $\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X} + \alpha \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \Big|_{\mathbf{X}}$  – точка, зсунута від даної  $\mathbf{X}$  у напрямку вектора градієнту функції  $\varphi$  на деякий коефіцієнт  $\alpha$ . Тоді можна стверджувати, що алгоритм не зможе знайти правильну відповідь, якщо  $\exists \tilde{\mathbf{X}} \in G \exists \alpha > 0 : \varphi(\mathbf{X}_\alpha) < \varphi(\tilde{\mathbf{X}}) \ \& \ \mathbf{X}_\alpha \notin G$ . Неформально кажучи, подальші кроки у напрямку градієнту виводять нас із ОДР, хоча



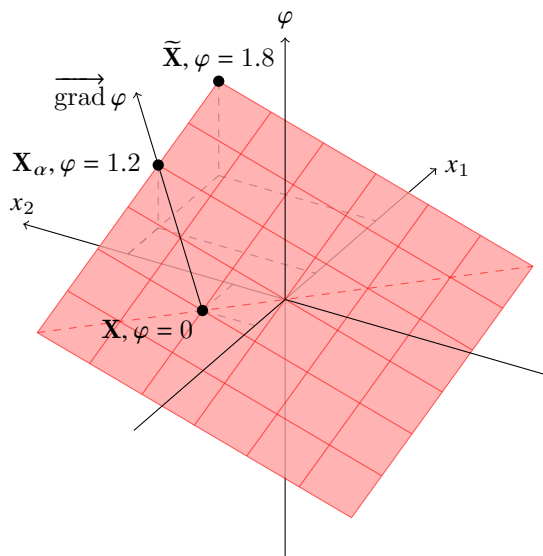


Рис. 2.21: Червона область – це набір всіх точок  $\langle x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2) \rangle$  таких, що  $\langle x_1, x_2 \rangle \in G$ . Якщо слідувати за вектором градієнта, найбільш можлива оптимальність, яку можна досягнути –  $\varphi(\mathbf{X}_\alpha) = 1.2$ . Насправді на ОДР існує точка  $\tilde{\mathbf{X}}$ , яка має ще більшу оптимальність, однак вектор градієнту ніколи на неї не вказе.

якщо трохи повернути вектор градієнту, то значення  $\varphi$  – хоч і не так стрімко – можна збільшити ще. Таку ситуацію можна уявити так, як показано на Рис. 2.21.

Для того, щоби вирішити цю проблему, можна придумати якийсь алгоритм повороту вектора тощо. Втім, подальші дії виходять за межі звичайної вправи, і можуть перетворитись в актуальне дослідження.

## Проблема №2.5

Опуклим можна вважати такий многокутник, який не містить самоперетинів, а також кожен з його внутрішніх кутів є меншим за  $180^\circ$ . Спробуймо утворити ОДР за допомогою двох нерівностей так, як показано на Рис. 2.22.

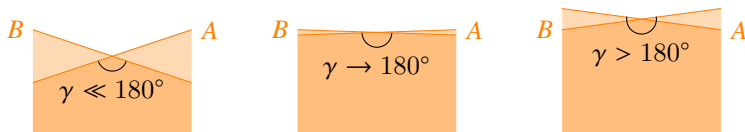


Рис. 2.22: Область ОДР – перетин нерівностей  $A : a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$  та  $B : a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$ .

З рисунку видно, що навіть якщо збільшувати кут  $\gamma$  між межами двох нерівностей так, що він стане більшим за  $180^\circ$ , область ОДР все одно залишатиметься опуклою. Змінюючи знаки нерівностей, узагальнюючи такі висновки на решту кутових точок ОДР та багатовимірні простори, наполегливий дослідник зможе дійти до аналітичного доведення такого явища.

## Проблема №2.6

Для розуміння проблеми найпростіше розглянути її в одновимірному випадку. Нехай ОДР визначена як

$$G = \begin{cases} x \geq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases},$$

тоді зрозуміло, що  $x$  міститься у закритому відрізку  $[a_1, a_2]$ , і розв'язком задачі буде одна з його меж. Якщо ж відрізок відкритий, і нам

потрібно розв'язати задачу, наприклад, на максимізацію то розв'язком буде деяка границя  $x = \lim_{a \rightarrow a_1} a$ , яку можна обчислити з якою завгодно точністю  $\varepsilon$ . Припустимо, що  $a_1 = 5$ , тоді:

$$x = 4.9, \quad \varepsilon = 10^{-1};$$

$$x = 4.999, \quad \varepsilon = 10^{-3};$$

$$x = 4.99999, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

Розглянемо також двовимірний випадок. Нехай ОДР задана як

$$G = \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y < b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y < b_2 \end{cases}.$$

Зрозуміло, що на двовимірній площині до точки розв'язку можна наблизитись із якої завгодно сторони, тому розумним рішенням буде знайти деяке гранично допустиме значення  $x$  та  $y$  окремо<sup>6</sup>. Розв'язавши систему відносно  $x$  та  $y$  отримаємо:

$$G = \begin{cases} x < \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \\ x < \frac{b_2 - a_{22}y}{a_{21}} \end{cases}; \quad G = \begin{cases} y < \frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}} \\ y < \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \end{cases}.$$

Тепер до точки перетину двох нерівностей можна наблизитись ітеративно:

1. припустимо деяке щонайменш можливе початкове значення  $x \rightarrow -\infty$ ;
2. з системи нерівностей, розв'язаної відносно  $y$  отримаємо найбільше граничне значення  $y$  з заданою точністю;

---

<sup>6</sup>Так само як замість того, щоби говорити про диференціал багатозмінної функції ми аналізуємо натомість частинні похідні.

3. змінюємо  $y$ , аналогічно знаходимо найбільше можливе значення  $x$ ;
4. переходимо до другого кроку;
5. якщо на деякому кроці зміна  $x$  і  $y$  стала меншою за  $\varepsilon$ , то це число можна вважати точністю, з якою обчислений розв'язок.

Попрацювавши над цією проблемою, читач може отримати більш універсальний алгоритм, а також узагальнити його для багатовимірних просторів.

### Проблема №2.7

Разом з ОДР на графіку можна також позначити всі точки  $\langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$  – ті, які лежатимуть всередині ОДР і будуть допустимими розв'язками. Тоді оптимальний розв'язок слід обирати не з однієї з кутових точок, а з тих, що нанесені на графік. Приклад показано на Рис. 2.23

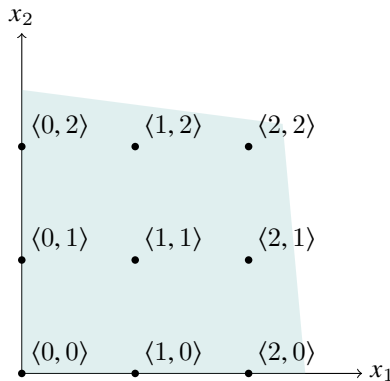


Рис. 2.23: Чорними крапками позначено всі допустимі розв'язки з ОДР.

У випадку, якщо лише одна з координат повинна бути цілочисельною, то на графіку отримаємо набір горизонтальних або вертикальних

ліній.

## Проблема №2.8

*Для розв'язування цієї проблеми читач повинен мати хороше інтуїтивне розуміння принципу вимірності простору.* Якщо ми розв'язуємо тривимірну задачу, то замість того, щоби малювати просторовий многогранник, можна намалювати на площині лише одну з його граней – ту, ну якій за припущенням міститься розв'язок. Таким чином ми перетворюємо тривимірну проблему у двовимірну. Аналогічно можна аналізувати тривимірні перерізи чотиривимірних фігур тощо. Насправді така техніка немає важливого практичного сенсу, але може допомогти при унаочненні даних.

## Проблема №2.9

Якщо весь відрізок визначає оптимальні розв'язки, то це означає, що всі точки на ньому мають однакове значення  $\varphi$  – включно з двома крайніми. Отже, можна стверджувати, що якщо будь-які дві сусідні точки фігури мають однакове значення оптимальності, то всі точки з відрізка між ними є розв'язками задачі – тобто, їх безліч.

У тривимірному просторі оптимальними розв'язками може бути вся грань фігури ОДР. Для того, щоби визначити такий випадок, потрібно знайти таку послідовність точок  $X_1 \dots X_n$ , що вони всі є послідовно сусідніми та мають однакову оптимальність. Аналогічно у чотиривимірному просторі потрібно відшукати такий набір площин, що всі їхні кутові точки мають однакову оптимальність, і утворюють межі якогось багатогранника.

### Проблема №2.10

Розглянемо матрично-векторний запис системи рівностей з лізю-  
вими змінними:

$$\mathbf{AX} + \delta \mathbf{s} = \mathbf{b}.$$

Якщо  $\delta$  – одинична матриця, то рівняння перетворюється в таке:

$$\mathbf{AX} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Це означає, що всі  $s_i$  входять у систему рівнянь зі знаком «+» і лише один раз – а отже кожна з нерівностей, яким задано ОДР має знак « $\leq$ ». Поведінка таких нерівностей продемонстрована на Рис. 2.24.

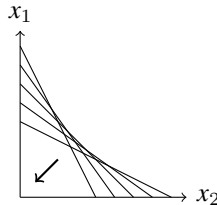


Рис. 2.24: Під яким кутом не була би нахилена межа нерівності зі знаком « $\leq$ », її область завжди буде знизу. Якщо така нерівність проходить через область координат, де всі  $x_i > 0$ , то можна стверджувати, що її область спрямована до центру координат.

### Проблема №2.11

Припустимо, умови ОДР не включають жодної точки  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  такої, що всі її координати додатні. Тоді, якщо створити додаткову умову

$\forall i : x_i \geq 0$ , то ОДР буде взагалі порожньою, а в іншому випадку включатиме в себе точку центру координат. Отже, можна стверджувати, що  $G \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{0} \in G$ .

### Проблема №2.12

Рівняння поданої системи записані у вигляді

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + s_i = b_i,$$

тож якщо ми знаємо всі  $a_{ij}$  та  $x_i$  за умовою, усі рівняння можна розв'язати відносно  $s_i$ :

$$s_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots$$

Взагалі, всю систему можна розв'язати відносно люзових змінних:

$$\begin{cases} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots \\ \vdots \end{cases}$$

Тоді значення усіх  $s_i$  впливає з запису системи очевидним чином. Окрім цього, її можна також представити у матрично-векторному вигляді як

$$\mathbf{s} = \mathbf{Ib} - \mathbf{A}(-\mathbf{X}).$$

### Проблема №2.13

Нехай система задана так само, як і в попередньому завданні. Тоді, якщо ми знаємо усі  $a_{ij}$ ,  $b_i$  та  $s_i$ , щоби знайти  $\mathbf{X}'$ , достатньо лише розв'язати СЛАР відносно  $\langle x_1, x_2 \rangle$ .

## Проблема №2.14

Якщо додати на рисунок задачі умовні ізолінії, що зображали би ріст  $\varphi$  так, як показано на Рис. 2.25, стає більш очевидно, що найвигіднішим буде той перехід, лінія якого утворює найменший кут з вектором градієнту.

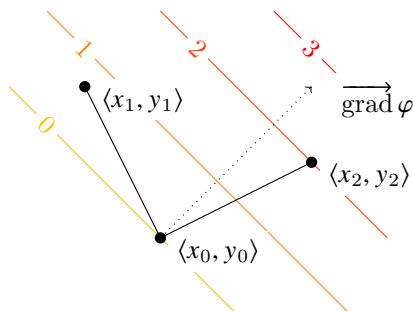


Рис. 2.25: Ізолінії зображають ріст  $\varphi$ . Позначення «1», «2» тощо додані лише для наочності, насправді ж ми не знаємо, яких значень може набувати  $\varphi$  у цих точках.

Якщо нам відомі координати  $\overrightarrow{\text{grad } \varphi} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ , можна оцінити потрібні кути, використовуючи властивості векторного добутку:

$$\cos \theta_i = \frac{\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot \langle x_i, y_i \rangle}{|\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle| \cdot |\langle x_i, y_i \rangle|}.$$

Нам навіть не потрібно знаходити  $\theta_i = \arccos \cos \theta_i$ , оскільки разом із зростанням  $\theta$  значення  $\cos \theta$  рівномірно спадає. Тобто, для знаходження мінімального  $\theta_i$  нам потрібно отримати

$$\max_i \{\cos \theta_i\}.$$

Обране  $i$  позначатиме точку  $\langle x_i, y_i \rangle$  перехід до якої дасть найбільше зростання  $\varphi$ . Звичайно, ці формули працюватимуть так само і для ба-



готовимірних просторів.

### Проблема №2.15

Користуючись параметричним рівнянням кола можна визначити функцію переходу від  $O$  до  $R$ :

$$R(t) = \langle r \cos(t), r \sin(t) \rangle^T.$$

Тоді отримані вектори  $\forall t \in \mathbb{R} \forall O(t) : \langle x, y \rangle^T$  визначатимуть коло з радіусом  $r$  у двовимірному просторі. При чому, лінія  $[0, 2\pi] \in O$  позначатиме повне коло у  $R$ . Ідея зворотної функції може з'явитись з формули переходу від полярної системи координат до прямокутної:

$$O(\langle x, y \rangle^T) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

Перетворення  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  не є лінійними, оскільки не справджується властивість  $cL(\mathbf{v}) = L(c\mathbf{v})$ :

$$\forall c \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} r \cos(ct) \\ r \sin(ct) \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{bmatrix} \Rightarrow R(ct) \neq cR(t).$$

Аналогічно з  $O : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\forall \langle x, y \rangle^T \in \mathbb{R}^2 : \arctg\left(c \frac{y}{x}\right) \neq c \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow O(\langle x, y \rangle^T) \neq cO(\langle x, y \rangle^T)$$

### Проблема №2.16

Розгляньмо випадок  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$ . Нехай  $a_{11} = 0$ , тоді відповідна система рівнянь матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + s_1 = b_1 \end{cases}.$$

Оскільки перше рівняння не залежить від  $x_1$ , то утворена ним лінія буде паралельною до осі  $x_1$ . Наприклад, на Рис. 2.17 лінія  $s_3 = 0$  паралельна до осі  $x_2$ . Це означає, що якщо рухатись із точки  $X_0$  або  $X_1$ , збільшуючи  $x_2$ , ми ніколи не перетнемо лінії  $s_3$ . Отже якщо під час пошуку меж ми отримали ділення на нуль, таку межу можна просто ігнорувати.

## Проблема №2.17

Розгляньмо таку систему:

$$\begin{cases} s_1 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \\ s_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \end{cases}.$$

Поки що  $\mathbf{B}_A = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ , а  $\mathbf{B}_S = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$ . Припустимо, ми проводимо операцію  $\mathbf{B}_A \xrightarrow{x_2} \mathbf{B}_S$  і  $\mathbf{B}_S \xrightarrow{s_1} \mathbf{B}_A$ . Тоді отримуємо таке рівняння:

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + s_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3.$$

Підставляючи  $x_2$  в кожне з рівнянь отримуємо нову систему.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + s_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3 \\ s_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}\left(\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + s_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3\right) - a_{23}x_3 \\ s_3 = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}\left(\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + s_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3\right) - a_{33}x_3 \end{cases},$$

де можемо обрахувати коефіцієнти:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + s_1 - \frac{a_{13}}{a_{12}}x_3 \\ s_2 = \left(b_2 - \frac{a_{22}b_1}{a_{12}}\right) - \left(a_{21} + \frac{a_{22}a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 - s_1 - \left(a_{23} + \frac{a_{22}a_{13}}{a_{12}}\right)x_3 \\ s_3 = \left(b_3 - \frac{a_{32}b_1}{a_{12}}\right) - \left(a_{31} + \frac{a_{32}a_{11}}{a_{12}}\right)x_1 - s_1 - \left(a_{33} + \frac{a_{32}a_{13}}{a_{12}}\right)x_3 \end{cases}.$$

Тепер  $\mathbf{B}_A = \langle x_1, s_1, x_3 \rangle$ , а  $\mathbf{B}_S = \langle x_2, s_2, s_3 \rangle$ . Зважаючи, що наша система подана у вигляді  $\mathbf{B}_S = \mathbf{I}\mathbf{b} - \mathbf{A}(-\mathbf{B}_A)$ , знайдемо відповідні  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{12}} \\ b_2 - \frac{a_{22}b_1}{a_{12}} \\ b_3 - \frac{a_{32}b_1}{a_{12}} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{12}} & -1 & \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ a_{21} + \frac{a_{22}a_{11}}{a_{12}} & 1 & a_{23} + \frac{a_{22}a_{13}}{a_{12}} \\ a_{31} + \frac{a_{32}a_{11}}{a_{12}} & 1 & a_{33} + \frac{a_{32}a_{13}}{a_{12}} \end{bmatrix}.$$

Можна помітити такі закономірності:

- стовбець у  $\mathbf{A}$ , що визначає коефіцієнти введеної в просторовий базис змінної  $x_2$  заповнений одиницями;
- значення рядка у  $\mathbf{A}$ , що визначав коефіцієнти рівняння виведеної з симплекс-базису змінної, поділені на  $a_{12}$  – коефіцієнт біля  $x_2$  у цьому ж рівнянні;
- решту значень  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{b}$  є сумою попередніх значень і деякого дробу зі знаменником  $a_{12}$  та чисельником з двох інших коефіцієнтів – їх теж можна підібрати за певним правилом.

Прораховуючи  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{b}$  для інших базисів, читач помітить, що результат завжди буде мати схожий вигляд, і віднайде правило для підбору коефіцієнтів чисельника.



## **Розділ 3**

# **Нелінійне програмування**



## **Розділ 4**

# **Динамічне програмування**