Зміст

Розділ 1

Введення

Говорячи про «дослідження операції», ми маємо на увазі пошук рішення якоїсь проблеми, пов'язаної із реальним життям. Дослідження полягає в тому, щоби знайти якнайкращий спосіб представлення реального світу чисельно: у вигляді матриць, векторів або функціональних залежностей. Тоді, використовуючи математичний апарат, відповідь на задачу можна знайти із будь-якою точністю. Після цього її потрібно інтерпретувати вже у «людських» поняттях.

Мистецтво чисельного опису світу називається побудовою **математичної моделі**. Така потреба виникала настільки часто, що з отриманих результатів можна виділити загальні підходи та ідеї, і використовувати їх на інших, ще не досліджених проблемах (операціях).

Цей посібник надає приклади багатьох популярних задач, що можуть бути розв'язані з допомогою лінійного, нелінійного або динамічного програмування, а також аналіз теорії, що стоїть за ними. Автор сподівається, що це дозволить сформувати хороше розуміння дослідження операцій, а також набути інтуїцію, яку потім можна використовувати при розв'язуванні нових, невідомих досі проблем.

1.1 Побудова математичної моделі

Логічно, що з початком аналізу будь-якої задачі, варто виділити ті дані, які подаються як факт – тобто, на них неможливо вплинути, чи змінити будь-як. Це те, біля чого можна написати «дано», і далі подати перелік змінних з присвоєними їм значеннями. Це називається **параметрами операції**, або **некерованими змінними**.

Якщо якісь дані описують одну і ту саму характеристику різних предметів, цілком доцільно об'єднати їх у вектор. Надалі використовуватиметься така нотація: $\mathbf{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. В тих випадках, коли подані дані є двовимірними, чи відображають деякі залежності, можна використовувати матриці. Наприклад, якщо в умові сказано, що *відомо час перевезення вантажу між кожним із обласних центрів*, то їх можна пронумерувати, а дані помістити, скажімо, в матрицю $\mathbf{T}$, де кожен елемент t_{ij} позначатиме час перевезення з i-ого міста в j-те.

Опісля маємо з'ясувати, які ж дані в задачі залишились невідомими, і їх потрібно знайти – себто, визначити на основі відомих. Вони називаються **керувальними параметрами**, або ж **керованими змінними**. Присвоєння цим змінним конкретних значень і є вирішенням проблеми.

У будь-яких задачах, які читач міг бачити до цього, зазвичай потрібно було з'ясувати значення одного невідомого параметра (деякого x), або навіть кількох. При дослідженні операцій може так траплятись, що невідомою буде ціла матриця, або вектор.

Якщо існує таке рівняння, що явно пов'язувало б некеровані змінні з керованими, то розв'язок можна знайти **аналітично**, тобто, обчислити звичайними арифметичними операціями. Наприклад, якщо відомо, що *пропускна спроможність каналу передачі становить n Мб/с, і потрібно з'ясувати, скільки максимально x Мб інформації можна передати за t секунд*, то зрозуміло, що відповідь може бути знайдена з формули $x = tn$.

Однак бувають такі проблеми, для яких неможливо – або принаймні дуже складно – скласти будь-яке рівняння, тому що у них взаємодіє між собою велика кількість змінних, кожна з яких по-своєму впливає на оптимальність результату в цілому. Тоді розв'язування може нагадувати намагання збалансувати складну систему тягарців: як тільки потягнути за один, одразу ж починають рух інші. Відповідь на такі проблеми найчастіше можна знайти **алгоритмічно**, на кожному з кроків покращуючи оптимальність результату. Власне, саме такий спосіб і використовується найчастіше для дослідження операцій.

Для того, щоби розв'язати задачу алгоритмічно, прийнятою практикою є побудова (опис) деякої множини G, що містить всі можливі допустимі розв'язки задачі. Звичайно, перед цим потрібно визначити, в якому вигляді ми взагалі шукатимемо розв'зок. Скажімо, якщо треба знайти дві змінні $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, то розв'язком буде вектор $\mathbf{X} = \langle x_1, x_2 \rangle$, і множина розв'язку – $G \subset \mathbb{R}^2$. Іноді рішенням проблеми може бути матриця, чи складніші багатовимірні об'єкти.

Наостанок, для того, щоб оцінити оптимальність будь-якого розв'язку, прийнято вводити **цінову функцію** (інша назва – **коефіцієнт ефективності**), що встановлює чисельну оцінку якості $\varphi : G \to \mathbb{R}$. Формулювання функції обирається залежно від умови.

Наприклад, якщо невідомі змінні x_1, x_2 встановлюють кількість товару двох видів, яку виготовлятиме завод, а c_1, c_2 – їхню ціну відповідно, то коефіцієнт ефективності можна визначити як прибуток від всього товару загалом: $\varphi(\mathbf{X}) = c_1x_1 + c_2x_2$. Тоді знайти такий $\mathbf{X}$, що забезпечував би максимальний прибуток, означає знайти екстремум φ.

1.2 Класифікація моделей

Запропонована структура математичної моделі дозволяє описати будь-яку операцію чисельно, зводячи розв'язування до пошуку такого $\mathbf{X} \in G$, щоби досягнути мінімуму або максимуму φ. Зрозуміло, що розв'язувати такі проблеми перебором, щонайменш неефективно. На щастя, для цього існують спеціальні методи, проте вони гарантують знаходження адекватного розв'язку лише для якогось конкретного типу математичної моделі. Тому важливо розрізняти, які типи існують взагалі, і вміти визначити їх для моделі своєї задачі. Далі приведено класифікацію математичних моделей за характерною ознакою.

	Так	Ні
Рішення проблеми знаходиться розв'язком рівняння.	**аналітична**	**алгоритмічна**
Хоча б одна з величин є випадковою величиною.	**стохастична**	**детермінована**
Кожен з кроків алгоритму розв'язку покращує рішення, знайдене на попередньому.	**статична**	
На кожному з кроків алгоритму розв'язку приймається найоптимальніше рішення.		**динамічна**
Хоча б одна з керованих змінних може приймати тільки цілі значення.	**дискретна**	**недискретна**

Розділ 2

Лінійне програмування

Одночасно простою для розуміння та корисною на практиці є задача лінійного програмування (ЗПЛ). Задачу можна назвати лінійною тоді, коли цінова функція є функцією першого степеня (2.1), а область допустимих значень може бути описана лінійними рівностями або нерівностями (2.2).

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mathbf{c}\mathbf{X}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \tag{2.1}$$

$$G = \left\{ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \boxed{\leq, \geq \text{ або } =} b_i \ \forall i = \overline{1, m} \right\} \tag{2.2}$$

2.1 Типові проблеми

Приведені далі постановки задач є типовими. Вони отримали свою назву від проблеми, у вирішенні якої найкраще використовувати такі означення. Якщо їх проаналізувати, то можна отримати відпрацьований математичний апарат для розв'язання більш специфічних задач.

2.1.1 Оптимальне використання ресурсів

Для виробництва продукції n видів потрібна певна кількість ресурсів m видів, при чому фабрика має їх в обмеженій кількості. Відомо можливий прибуток від реалізації кожного з видів продукції. Потрібно визначити, скільки кілограм товару кожного виду варто виготовити, щоби отримати якнайбільший прибуток.

Якщо між двома некерованими змінними існує відношення, то доцільно описати його у вигляді матриці. Тому нехай в $\mathbf{A}$ міститимуться елементи a_{ij}, кожен з яких означатиме витрату ресурсу i-ого виду на виготовлення продукції j-ого виду. Ще одна некерована змінна $\mathbf{b} = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ позначає кількість відповідного ресурсу, доступного на фабриці. Прибуток від реалізації можна визначити вектором $\mathbf{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$.

Керованою змінною є вектор $\mathbf{X} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, кожен елемент якого позначає кількість продукції, яку має виготовити фабрика – ці дані варто змінювати для досягнення оптимальності.

Тоді умовою допустимості розв'язку буде перш за все виконання обмежень на доступну кількість ресурсів (кількість використаних обраховується з кількості виготовлених товарів) та деякі очевидні твердження (наприклад, те, що ця кількість має бути невід'ємною). Якби в умові задачі було вказано не «кілограми», а одиниці, можна було би ще вимагати цілочисельності всіх x_i.

$$\mathbf{X} \in G \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0 \ \forall j = \overline{1,n} \end{array} \right\}$$

Цінову функцію потрібно вводити так, щоби вона визначала прибутковість прийнятого рішення. Тоді оптимальним розв'язком буде такий, що гарантує досягнення її максимуму.

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{\mathbf{X} \in G}$$

Розділ 3

Нелінійне програмування

Розділ 4

Динамічне програмування

4.1 фівдт

asdasd