Méthodes Numériques pour la Finance

—

Modèles de Black & Scholes et Méthodes de Monte Carlo : Réduction de variance

Ioane Muni Toke

Laboratoire MICS, Chaire de Finance Quantitative, CentraleSupélec, France

Option Mathématiques Appliquées, Majeure Finance
CentraleSupélec
Octobre - Décembre 2017

Table of contents

Table of contents

Cadre général des TP précédents

- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de v.a. i.i.d. ; $(h(X_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d. d'espérance C et de variance $\sigma^2_{h(X)}$.
- Par la loi (forte) des grands nombres, convergence :

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} C = \mathbf{E}\left[h(X)\right].$$

- Par le théorème-limite central, normalité asymptotique :

$$\frac{C_n - C}{\sigma_{h(X)}/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

- Exemple fondamental : prix Black-Scholes du call européen C par l'estimateur C_n avec $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de loi $\mathcal{N}(0,1)$, et le payoff $h(X_i) = e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma X_i\sqrt{T}} - K\right)_+$.

Réduction de variance

Objectif

Améliorer la précision de l'estimateur, i.e. diminuer la largeur de l'intervalle de confiance, i.e. réduire la variance de l'estimateur à nombre de simulations et/ou temps de calcul constant.

- Principes généraux :
  - tirer partie de symétries des distributions simulées
  - tirer partie de calculs analytiques partiels possibles au sein du modèle
- Trois méthodes dans ce TP :
  - Variables antithétiques
  - Variables de contrôles
  - Monte Carlo conditionnel
- Autres méthodes non abordées :
  - stratified sampling, importance sampling
  - moment matching
  - ...

Table of contents

Variables antithétiques I

Principe général

Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $1-U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Plus généralement, si $\left(X_i = F^{-1}(U_i)\right)_{i=1,\ldots,n}$ est un n-échantillon aléatoire de fonction de répartition F, $\left(Y_i = F^{-1}(1-U_i)\right)_{i=1,\ldots,n}$ en est un autre.

Soient C_X l'estimateur de Monte Carlo obtenu avec l'échantillon aléatoire $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$, et C_Y l'estimateur de Monte Carlo obtenu avec l'échantillon aléatoire $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$.

- $C_a = \dfrac{1}{2}(C_X + C_Y)$ est un estimateur de C, sans biais, convergent, asymptotiquement normal.
- La variance du nouvel estimateur s'écrit

$$\mathbf{V}[C_a] = \frac{1}{4}\left(\mathbf{V}[C_X] + \mathbf{V}[C_Y] + 2\,\mathbf{Cov}(C_X, C_Y)\right).$$

Variables antithétiques II

- Si $\mathbf{Cov}(C_X, C_Y) < 0$, on a une réduction de la variance de l'estimation par rapport au cas standard à $2n$ simulations i.i.d..
- Dans le cas du Monte Carlo avec des variables aléatoires normales centrées réduites, on a aisément $Y_i = -X_i$.

Variables antithétiques III

- En écrivant $h = h_s + h_a$ avec $h_s(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $h_a(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, on a

$$\mathbf{V}[h(X)] = \mathbf{V}[h_s(X)] + \mathbf{V}[h_a(X)].$$

  Autrement dit, la méthode des variables antithétiques supprime la variance due à la partie impaire du payoff. Si h est symétrique, il n'y a pas de réduction de variance.

Table of contents

Variables de contrôle I

Principe

Soit $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ un n-échantillon aléatoire de la v.a. X. Soit C_X l'estimateur de Monte Carlo calculé avec cet échantillon aléatoire. Supposons maintenant que l'on a accès à une fonction f telle que $f(X)$ soit facilement calculable et que $\mathbf{E}[f(X)]$ soit connue. Posons alors $Z_i = f(X_i)$, et considérons l'estimateur

$$C_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[h(X_i) + c\left(Z_i - \mathbf{E}[Z]\right)\right].$$

- C_c est un estimateur de C, sans biais, convergent, et asymptotiquement normal.
- La variance du terme sommé à chaque itération est

$$\mathbf{V}[h(X_i) + c\left(Z_i - \mathbf{E}[Z]\right)] = \mathbf{V}[h(X)] + c^2\mathbf{V}[Z] + 2c\,\mathbf{Cov}(h(X), Z).$$

Variables de contrôle II

- On choisit c^* de façon à minimiser cette quantité :

$$c^* = -\frac{\mathbf{Cov}(h(X), Z)}{\mathbf{V}[Z]}.$$

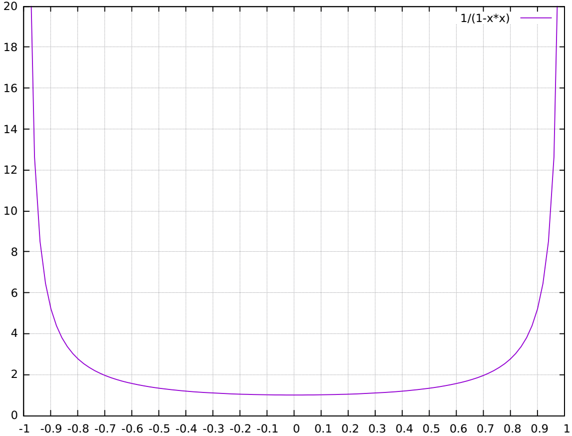
- Par un calcul simple on obtient

$$\mathbf{V}[C_{c^*}] = \mathbf{V}[C_X]\left(1 - \rho^2_{(h(X),Z)}\right).$$

- Ainsi, il y a toujours réduction de la variance, et la réduction est d'autant plus forte que les v.a. $h(X)$ et Z sont corrélées.

Variables de contrôle III

- Facteur de réduction de la variance hors temps de calcul : $\dfrac{1}{1-\rho^2_{(h(X),Z)}}$.



Variables de contrôle IV

- Si $c^* = -\dfrac{\mathbf{Cov}(h(X), Z)}{\mathbf{V}[Z]}$ n'est pas accessible analytiquement, on peut l'estimer avec les variables simulées :

$$\hat{c}_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n \left(h(X_i) - \overline{h(X)}\right)\left(Z_i - \overline{Z}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(Z_i - \overline{Z}\right)^2}$$

avec $\overline{h(X)}$ et $\overline{Z}$ les moyennes empiriques.

- Ajout possible de biais...
- Interprétation graphique de la méthode par variables de contrôle

Variables de contrôle V

- Généralisation de la méthode à d variables de contrôle

$$C_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[h(X_i) + \mathbf{c}^T\left(\mathbf{Z}_i - \mathbf{E}[\mathbf{Z}]\right)\right]$$

  avec $\mathbf{Z}$ vecteur des variables de contrôle et $\mathbf{c}$ vecteur des coefficients.

- Par un calcul similaire au précédent, on obtient :

$$c^* = -\left(\Sigma_{\mathbf{Z}}\right)^{-1}\Sigma_{\mathbf{Z},h(X)}$$

  avec $\Sigma_{\mathbf{Z}}$ la matrice de variance de $\mathbf{Z}$ (taille $d \times d$) et $\Sigma_{\mathbf{Z},h(X)}$ la matrice de covariance de $h(X)$ et $\mathbf{Z}$ (taille $d \times 1$).

- Notion de *regression sampling*.
- Comme dans le cas unidimensionnel, on peut estimer c^* avec les variables simulées.

Variables de contrôle VI

- Dans le cas d'un Monte Carlo pour l'évaluation d'une option asiatique (à moyenne arithmétique discrète), on pourra par exemple considérer :
  - $Z = S_T$ (variante 1) ;
  - $Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_{t_i}$ (variante 2) ;
  - $Z = e^{-rT}(S_T - K)_+$ (variante 3).

Table of contents

Monte Carlo conditionnel

Principe

La méthode consiste à considérer $\mathbf{E}[h(X)|\mathcal{G}]$ au lieu de $h(X)$ comme estimateur de base, avec $\mathcal{G}$ une sous-tribu permettant l'évaluation simple de $\mathbf{E}[h(X)|\mathcal{G}]$. On a

$$\mathbf{V}[h(X)] = \mathbf{V}[\mathbf{E}[h(X)|\mathcal{G}]] + \mathbf{E}[\mathbf{V}[h(X)|\mathcal{G}]],$$

i.e. $\mathbf{V}[\mathbf{E}[h(X)|\mathcal{G}]] \leq \mathbf{V}[h(X)]$ d'où la réduction de variance.

- Par exemple, dans le cas d'un call down-and-in à barrière discrète, on peut utiliser le fait que le prix de l'option est connu au moment où le sous-jacent franchit la barrière.

Table of contents

Développement

- une implémentation C++ de la méthode des variables antithétiques pour l'évaluation du call européen ;
- une implémentation C++ de la méthode par variables antithétiques et de la méthode par variable de contrôle pour l'évaluation du call asiatique (à moyenne arithmétique discrète) ;
- une implémentation C++ de la méthode de Monte Carlo conditionnel pour le call down-and-in ;

Rapport I

- Comparaison des intervalles de confiance obtenus par le Monte Carlo standard et par la méthode des variables antithétiques pour l'évaluation du call européen
- Comparaison des intervalles de confiance obtenus par le Monte Carlo standard, par variables antithétiques et par variable de contrôle (incluant les différentes variantes dans le choix des variables de contrôle) pour l'évaluation du call asiatique
- Influence du choix de la constante c sur la réduction de variance par variable de contrôle
- Comparaison des intervalles de confiance obtenus par le Monte Carlo standard, par variables antithétiques et par le Monte Carlo conditionnel pour l'évaluation du call down-and-in à barrière discrète

Rapport II

Pour aller plus loin :

- Comparaison incluant le temps de calcul
- Variables de contrôle multiples pour l'évaluation de l'option asiatique pour l'illustrer, en le comparant aux réductions à une seule variable ;