Méthodes Numériques pour la Finance

—

Options exotiques dans le modèle de Black & Scholes

Ioane Muni Toke

Laboratoire MICS, Chaire de Finance Quantitative, CentraleSupélec, France

CentraleSupélec

Option Mathématiques Appliquées, Majeure Finance
CentraleSupélec
Octobre - Décembre 2017

Table of contents

Table of contents

Modèle de Black & Scholes I

- Cadre : modèle de Black et Scholes
  - Actif sans risque de taux $r > 0$
  - Actif risqué S de volatilité σ, de dynamique sous la probabilité risque-neutre $\mathbf{Q}$: $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t$, avec (B_t) un $\mathbf{Q}$ mouvement brownien.
- Théorie de l'évaluation risque-neutre / martingale
  - Prix à la date t d'un produit dérivé de payoff H et de maturité T :

$$V_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[e^{-r(T-t)}H|\mathcal{F}_t\right].$$

Table of contents

Options asiatiques

Option asiatique à moyenne arithmétique discrète

On appelle option d'achat asiatique (à strike fixe et à moyenne arithmétique discrète) sur le sous-jacent S, de strike K et de maturité T, le produit dérivé payant à la date T le payoff

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_{t_i} - K\right)_+ ,$$

où $(t_1, \ldots, t_N)$ est un N-uplet de N dates déterministes dans l'intervalle $]0, T]$.

- Variante à moyenne arithmétique continue (EDP possible)
- Variante à moyenne géométrique discrète
- Variante à moyenne géométrique continue (formule explicite)

Options sur maximum

Option lookback discrète

On appelle option d'achat lookback (à strike fixe) sur le sous-jacent S, de strike K et de maturité T, le produit dérivé payant à la date T le payoff

$$(\max(S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}) - K)_+ \,,$$

où $(t_1, \ldots, t_N)$ est un N-uplet de N dates déterministes dans l'intervalle $]0, T]$.

- Variante avec maximum pris continûment
- Variante avec strike flottant

Options barrière

Option up-and-out discrète

On appelle option d'achat barrière up-and-out (discrète) sur le sous-jacent S, de strike K, de barrière M et de maturité T, le produit dérivé payant à la date T le payoff

$$(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\max(S_{t_1},\dots,S_{t_n})<M},$$

où $(t_1, \dots, t_N)$ est un N-uplet de N dates déterministes dans l'intervalle $]0, T]$.

- Variante avec barrière surveillée continûment

Table of contents

Evaluation I

- **Variantes discrètes des options** : Monte Carlo avec simulation pas à pas des trajectoire de l'actif :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, \quad S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_i - t_{i-1}) + \sigma(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})}.$$

Evaluation II

- **Variantes continues sur un maximum** : Monte Carlo avec simulation du maximum conditionnel d'un brownien :
  Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien, $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $X_t = \alpha t + B_t$ et $M_t^X = \sup_{0\leq u\leq t} X_u$ le maximum courant de ce processus.
  Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 2T\log(U)}}{2}$ est une v.a. distribuée selon la loi conditionnelle de M_T^X sachant $X_T = x$.

Evaluation III

- **Variante continue de l'option asiatique** : Le prix $v(0, S_0)$ de l'option asiatique à moyenne continue à la date 0 s'écrit $v(0, S_0) = g\left(0, \frac{1-e^{-rT}}{rT} - e^{-rT}\frac{K}{S_0}\right)$ avec
  - $g(t, y)$ solution de l'EDP
  $$\frac{\partial g}{\partial t}(t, y) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rT} - y\right)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) = 0$$
  - $\forall t \in [0, T]$, $\lim_{y \to -\infty} g(t, y) = 0$ et $g(t, y) \sim_{y \to +\infty} y$
  - $\forall ty \in \mathbb{R}$, $g(T, y) = \max(y, 0)$

Table of contents

Développement minimum

- une implémentation C++ de la méthode de Monte Carlo pour les versions discrètes de chacune des trois options présentées ci-dessus ;
- une implémentation C++ de la méthode de Monte Carlo utilisant la simulation conditionnelle du maximum pour les options up-and-out et lookback ;

Rapport

- Convergence du prix ATM des versions discrètes de chacune des trois options en fonction du nombre de tirages Monte Carlo (avec intervalle de confiance) ;
- Prix des versions discrètes de chacune des trois options en fonction de S_0 (avec intervalle de confiance) ;
- Evolution du prix des versions discrètes de chacune des trois options en fonction du nombre de dates N du contrat et convergence vers le cas continu dans le cas des options lookback et up-and-out.

Pour aller plus loin :

- Résolution de l'EDP de l'option asiatique à moyenne arithmétique continue et vérification de la convergence du Monte Carlo
- Option asiatique à moyenne géométrique (Monte Carlo et formule explicite)

Table of contents

24 novembre au plus tard

- Un *unique* rapport par groupe
- Format pdf exclusivement
- Envoi par mail à l'adresse `ioane.muni-toke@centralesupelec.fr`
- Un chapitre indépendant par séance (1. EDP, 2. MC, 3. Options exotiques, 4. Réduction de variance)
- Pour chaque chapitre : description du sujet ; graphes demandés lisibles, avec légende/échelles lisibles ; analyse/commentaire des résultats ; présentation et analyse des résultats supplémentaires
- Pas de code pour le rapport intermédiaire (Rappel : l'implémentation doit utiliser la bibliothèque C++ standard uniquement. Pas de librairie extérieure.)