Méthodes Numériques pour la Finance

—

Modèle de Black & Scholes et Equations aux dérivées partielles

Ioane Muni Toke

Laboratoire MICS, Chaire de Finance Quantitative, CentraleSupélec, France

CentraleSupélec

Option Mathématiques Appliquées, Majeure Finance
CentraleSupélec
Octobre - Décembre 2017

Table of contents

Table of contents

Modèle de Black & Scholes I

- Cadre : modèle de Black et Scholes
  - Actif sans risque de taux continu $r > 0$
  - Actif risqué S de volatilité σ, de dynamique $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t$, avec (B_t) un $\mathbf{Q}$ mouvement brownien.
- $p(t, S_t)$: prix à la date t d'un call européen de strike K et de maturité T sur le sous-jacent S
- $p : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, (t, x) \mapsto p(t, x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles (dite EDP de Black & Scholes)

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial p}{\partial x}(t,x) = rp(t,x), \qquad (1)$$

muni de la condition terminale $p(T, x) = (x - K)_+$.

Modèle de Black & Scholes II

- Calcul explicite possible de la solution (formule de Black & Scholes) :

$$p(t, S_t) = C^{BS}(t, S_t) \triangleq S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \qquad (2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \right],$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

et Φ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Modèle de Black & Scholes III

Résolution numérique de l'EDP "inutile" si on a la formule de Black & Scholes, mais :

- Solution explicite rare (unidimensionnel, r et σ constants)
- EDP obtenues dans les modèles financiers dans un cadre général (panier de sous-jacents, volatilité locale, volatilité stochastique)

Table of contents

Transformations utiles I

- Renversement du temps : $\theta = T - t$
- $v(\theta, x) = p(T - \theta, x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}(\theta, x) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\theta, x) - rx\frac{\partial v}{\partial x}(\theta, x) + rv(\theta, x) = 0, \quad (3)$$

  muni de la condition *initiale* $v(0, x) = p(T, x) = (x - K)_+$.
- Intérêt : condition initiale au lieu de terminale

Transformations utiles II

- Passage aux prix logarithmiques ($y = \ln x$)
- $u : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\theta, y) \mapsto u(\theta, y) = p(T - \theta, e^y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, y) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\theta, y) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}(\theta, y) + ru(t, y) = 0, \tag{4}$$

  muni de la condition initiale $u(0, y) = (e^y - K)_+$.
- Intérêt : EDP à coefficients constants

Différences finies

- Discrétisation en espace sur $[-L, L]$ avec $L >> K$: pour N entier, on pose $h = \frac{2L}{N}$, $y_i = -L + ih, i = 0, \ldots, N$
- Les valeurs $u(\theta, y_i)$ recherchées sont approchées par le vecteur $U(\theta) = (u_i(\theta))_{0 \le i \le N}$ tel que

$$\frac{du_i}{d\theta}(\theta) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}(\theta) - 2u_i(\theta) + u_{i-1}(\theta)}{h^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{i+1}(\theta) - u_{i-1}(\theta)}{2h} + ru_i(\theta) = 0.$$

- Sous forme matricielle, $\frac{dU}{d\theta}(\theta) = \mathbf{A} U(\theta)$, avec $\mathbf{A}$ tridiagonale

Conditions aux bords

- La discrétisation sur $[-L, L]$ suppose d'imposer des conditions aux bords
- Conditions de type Dirichlet : $u(-L) = \mathrm{cste}$, $u(L) = \mathrm{cste}$
- Conditions de type Von Neumann : $\frac{\partial u}{\partial x}(-L) = \mathrm{cste}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) = \mathrm{cste}$
- Les caractéristiques du call européen et la parité call-put permettent d'écrire :

$$\forall \theta \in]0, T[, \quad \lim_{y \to -\infty} u(\theta, y) = 0, \tag{5}$$

$$\forall \theta \in]0, T[, \quad u(\theta, y) \underset{y \to +\infty}{\sim} e^y - Ke^{-r\theta}, \tag{6}$$

Table of contents

Schémas temporels

- Discrétisation de $[0, T]$ en M pas de temps : $\Delta T = \dfrac{T}{M}$
- Vecteur solution $U^j = (u_i^j)_{0 \leq i \leq N} = (u_i(j\Delta T))_{0 \leq i \leq N}$
- Schéma d'Euler explicite :

$$U^{j+1} = (\mathbf{I} + \Delta T \mathbf{A}) U^j$$

- Schéma d'Euler implicite :

$$(\mathbf{I} - \Delta T \mathbf{A}) U^{j+1} = U^j$$

- θ-schéma (Crank-Nicholson $\theta = \dfrac{1}{2}$) :

$$(\mathbf{I} - \theta \Delta T \mathbf{A}) U^{j+1} = (\mathbf{I} + (1-\theta) \Delta T \mathbf{A}) U^j$$

Convergence des solutions discrétisées

- Les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicholson (et de façon générale les θ-schémas pour $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$) sont (inconditionnellement) convergents.
- Le schéma d'Euler explicite (et de façon générale les θ-schémas pour $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$) ne converge que si $\Delta T = o(h^2)$ (i.e. fort accroissement du pas de temps, et donc du temps de calcul lorsqu'on affine le pas d'espace. . .).
- Pour un m-uplet $X = (X^1, \ldots, X^m)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{N+1}$, utilisation possible de la norme

$$\max_{j=1,\ldots,M} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \|X^j\|_2$$

.

Résolution d'un système tridiagonal

Il est important de noter que la matrice $\mathbf{A}$ obtenue est tridiagonale : la résolution du schéma implicite peut donc se faire par la méthode de Gauss, et ne nécessite pas de méthode générale de résolution de systèmes linéaires.

Table of contents

Panier de deux sous-jacents

- Panier de sous-jacents de deux sous-jacents, $dS_t^1 = rS_t^1\,dt + \sigma_1 S_t^1\,dB_t^1$, $dS_t^2 = rS_t^2\,dt + \sigma_2 S_t^2\,dB_t^2$, ρ corrélation des browniens.
- Payoff $\phi(S_T^1, S_T^2)$
- $p : [0, T] \times (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+, (t, x, y) \mapsto p(t, x, y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t}(t,x,y) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_1^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,x,y) + \rho\sigma_1\sigma_2 xy \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t,x,y) \\
&+ rx\frac{\partial p}{\partial x}(t,x,y) + ry\frac{\partial p}{\partial y}(t,x,y) = rp(t,x,y),
\end{aligned}$$

muni de la condition terminale $p(T, x, y) = \phi(x, y)$.

Autres problématiques d'intérêt

- Variable naturelle ou logarithmique
- Grilles irrégulières
- Méthode des éléments finis
- Malédiction de la dimension : *sparse grids*

Table of contents

TP - Développement

- Développement d'un pricer par la formule de Black & Scholes
- Développement d'un pricer de call européen standard par résolution de l'EDP de Black & Scholes (au minimum en variable logarithmique implicite/explicite, Crank-Nicholson si possible)
- ...

TP - Rapport

- Graphe prix EDP vs prix Black & Scholes
- Illustration de l'instabilité du schéma explicite
- Erreur ponctuelle $|u_i^j - u(j\Delta T, y_i)|$ en fonction de $t = T - j\Delta T \in [0, T]$ et $S = e^{y_i} \in [e^- L, e^L]$
- Erreur en fonction de N (à M suffisamment grand fixé) pour différents schémas
- Erreur en fonction de M (à N suffisamment grand fixé) pour différents schémas
- ...

et pour aller plus loin

- Temps de calcul en fonction de M, N, du langage, etc.
- Option sur panier de sous-jacents
- Options américaines
- ...