Méthodes Numériques pour la Finance

—

Modèles de Black & Scholes et Méthodes de Monte Carlo

Ioane Muni Toke

Laboratoire MICS, Chaire de Finance Quantitative, CentraleSupélec, France

CentraleSupélec

Option Mathématiques Appliquées, Majeure Finance
CentraleSupélec
Octobre - Décembre 2017

Table of contents

Table of contents

Modèle de Black & Scholes I

- Cadre : modèle de Black et Scholes
  - Actif sans risque de taux $r > 0$
  - Actif risqué S de volatilité σ, de dynamique sous la probabilité risque-neutre $\mathbf{Q}$: $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t$, avec (B_t) un $\mathbf{Q}$ mouvement brownien.
- Théorie de l'évaluation risque-neutre / martingale
  - Prix à la date 0 (aujourd'hui) d'un call européen sur le sous-jacent S de strike K et de maturité T :

$$C = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left[e^{-rT}(S_T - K)_+\right] \tag{1}$$

avec $S_T = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B_T}$.

Modèle de Black & Scholes II

- Calcul explicite possible de l'espérance (formule de Black & Scholes) :

$$C = C^{BS} \triangleq S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \tag{2}$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right],$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

et Φ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Table of contents

Méthodes de Monte Carlo

Principe général

Résolution numérique d'un problème par la simulation d'un grand nombre de réalisations de variables aléatoires de distributions connues (ou observées)

Exemple : Intégration numérique

- Pour $f : [0,1] \to [0,1]$, si $(U_n, V_n)_{n \geq 0}$ suite de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0,1]^2$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{V_n < f(U_n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_{[0,1]} f \, d\lambda.$$

- Pas de problème d'explosion en grande dimension

Retour au modèle de Black & Scholes I

- Soit $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi normale centrée réduite, et $X_i = e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma Z_n\sqrt{T}} - K\right)_+$. $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a. i.i.d. d'espérance C et de variance σ_X^2. Alors par la loi (forte) des grands nombres,

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} C.$$

- Le théorème-limite central précise la convergence de l'estimateur C_n :

$$\frac{C_n - C}{\sigma_X/\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Table of contents

Générateurs de nombres aléatoires (RNG) I

- Nombres *pseudo*-aléatoires sur $]0, 1[$ (déterministes...)
- Deux exemples de générateurs répandus :
  - congruentiels linéaires ($x_{n+1} = ax_n + b \ mod.m$),
  - Mersenne-Twister (1997)
- Périodicité et stockage mémoire ; graine (*seed*)
- Qualité des suites obtenues : tests statistiques d'uniformité et d'indépendance (autocorrélations)
- Préoccupation plus récente : usages cryptographiques

Générateurs de nombres aléatoires (RNG) II

- Implémentations variables dépendant des langages, des librairies, des versions et des systèmes utilisés
  - C++ : choix de générateur avec la librairie `<random>`
  - Python : module `random` avec Mersenne-Twister
  - R : Mersenne-Twister par défaut, choix possible avec `RNGkind(...)`
  - ...

Table of contents

Inverse de la fonction de répartition

Fondement de la méthode

Si U est une v.a. de loi uniforme sur $]0,1[$ et si F est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}$, alors $F^{-1}(U)$ est une v.a. de loi $\mathcal{L}$.

- Utile si F^{-1} est aisément calculable.
- Uniforme sur $[a,b]$, exponentielle
- Utilisable pour la gaussienne centrée réduite avec approximation polynômiale de l'inverse
- Cas d'une distribution discrète $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$
- Cas de mélanges de distributions (*mixtures*)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i F_i(x) \text{ avec } \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Méthode par acceptation-rejet

Fondement de la méthode

Si f est une densité sur $\mathbb{R}$ et h une fonction dominant f et telle que l'on sache simuler une v.a. Z de densité $\frac{h}{\|h\|_1}$, alors $X = Z\mathbf{1}_{U \leq f(Z)/h(Z)}$, où U est uniforme sur $]0, 1[$, est une v.a. de densité f

- Exemple : valeur absolue d'une gaussienne avec la fonction $h : x \mapsto \sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-x}$

Méthode de Box-Muller pour les gaussiennes

Fondement de la méthode

Si U et V sont deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1[$, alors $\sqrt{-2\log(U)}\cos(2\pi V)$ et $\sqrt{-2\log(U)}\sin(2\pi V)$ sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes.

- Preuve : théorème de changement de variables (cf. TD Probabilités 1)

Loi normale dans les langages de programmation

- C++ : Box-Muller
- Python : variante acceptation-rejet (Kinderman-Monahan) dans `random`
- R : inverse par défaut, choix avec `RNGkind(...)`

Table of contents

Développement

- une implémentation C++ de la méthode de Monte Carlo pour l'évaluation du call européen.

Rapport

- illustration de la convergence du prix Monte Carlo vers le prix Black & Scholes en fonction du nombre de tirages/simulations ;
- évolution des intervalles de confiance des estimateurs Monte Carlo en fonction du nombre de tirages/simulations ;
- mise en évidence de la normalité asymptotique de l'estimateur Monte Carlo ;
- écart BS-Monte Carlo en fonction du nombre de tirages/simulations (vitesse de convergence).

Pour aller plus loin

- Comparaison de performances Python/C++/R/Java