Méthodes Numériques pour la Finance

—

Corrélations et dépendances

Ioane Muni Toke

Laboratoire MICS, Chaire de Finance Quantitative, CentraleSupélec, France

CentraleSupélec

Option Mathématiques Appliquées, Majeure Finance
CentraleSupélec
Octobre - Décembre 2017

Table of contents

Table of contents

Simulation de browniens corrélés I

Construction de browniens corrélés

Soit $W = (W_1, \ldots, W_d)$ un mouvement brownien de dimension d.

Soit $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ une matrice de corrélation, i.e. une matrice symétrique, définie positive, de coefficients à valeurs dans $[-1, 1]$ et de diagonale unité.

Soit $\mathbf{L}$ la matrice triangulaire inférieure obtenue par décomposition de Cholesky de la matrice $\boldsymbol{\rho}$ symétrique définie positive : $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{L}\mathbf{L}^*$.

Alors les coordonnées du processus $B_t = \mathbf{L} W_t$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sont des mouvements browniens corrélés suivant la matrice de corrélation $\boldsymbol{\rho}$, i.e. vérifiant $\forall i, j, \langle B_i, B_j \rangle_t = \rho_{ij} t$.

Simulation de browniens corrélés II

- La méthode de simulation découle immédiatement du résultat précédent.
- De façon générale, la méthode permet de simuler un vecteur de gaussiennes corrélées à partir d'un vecteur de gaussiennes indépendantes.
- Dans le cas $d = 2$ et $\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$.

Black & Scholes multidimensionnel I

- On considère le modèle de type Black & Scholes à d actifs sous la probabilité risque-neutre :

$$\forall i = 1, \ldots, d, \quad dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dB_i(t)$$

avec $(B_i)_{i=1,\ldots,d}$ d mouvements browniens de matrice de corrélation $\rho = (\rho_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$.

- D'après ce qui précède,

$$\forall i = 1, \ldots, d, \quad dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t) \sum_{k=1}^{d} l_{ik} dW_k(t)$$

avec $(W_k)_{k=1,\ldots,d}$ un mouvement brownien de dimension d.

Black & Scholes multidimensionnel II

- Le résultat précédent permet d'évaluer par Monte Carlo des options sur le panier de sous-jacents.
- Cas $d = 2$:

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t)$$
$$dS_2(t) = rS_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)\left(\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t)\right)$$

  avec (W_1, W_2) un mouvement brownien de dimension 2.
- Options classiques : maximum du panier, moyenne du panier, minimum du panier, etc.

Table of contents

TP 5 Partie 1

- Développement : une implémentation C++ de simulation d'un modèle de type Black & Scholes en 2D
- Rapport : Tracer en fonction de ρ le prix à la monnaie d'une option d'achat de strike K et de maturité T sur
  (a) le maximum du panier ;
  (b) la moyenne du panier ;
  (c) le minimum du panier.

Table of contents

Table of contents

Première approche I

Théorème de Sklar

Soit F la fonction de répartition de la loi d'un vecteur aléatoire X de dimension n. Soient $F_1, \dots, F_n$ les fonctions de répartition des lois marginales de X.

Alors il existe une fonction $C : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, appelée *copule*, telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)).$$

Le copule est unique si les F_i sont continues.

Première approche II

- Inverse généralisé de F : $F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$
- On vérifie que $\forall (u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$,

$$\begin{aligned}
C(u_1, \ldots, u_n) &= F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \ldots, X_n \leq F_n^{-1}(u_n)) \\
&= \mathbf{P}(F_1(X_1) \leq u_1, \ldots, F_n(X_n) \leq u_n) \\
&= \mathbf{P}(U_1 \leq u_1, \ldots, U_n \leq u_n),
\end{aligned}$$

  avec U_i des v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$.
- Autrement dit, un copule est la fonction de répartition d'une loi de dimension n de marginales uniformes sur $[0,1]$.

Premiers exemples I

- La remarque "Un copule est une fonction de répartition d'une loi de dimension n de marginales uniformes sur $[0, 1]$" donne une première méthode construction de copules.
- Copule indépendant :

$$C(u_1, \dots, u_n) = u_1 \dots u_n$$

en choisissant les U_i indépendantes.
- Copule comonotone :

$$C(u_1, \dots, u_n) = min(u_1, \dots, u_n)$$

en choisissant les U_i égales presque sûrement.

Construction à partir de lois jointes connues I

- Une autre méthode de construction de copules est donnée par l'égalité $C(u_1, \ldots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n))$.
- Copule gaussien, construit avec F_i gaussiennes centrées réduites corrélées :
  - En dimension $n = 2$, avec le coefficient de corrélation $\rho \in [0, 1]$:

$$C(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\, dy,$$

    où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
  - Si $\rho = 0$, on retrouve le copule indépendant.

Construction à partir de lois jointes connues II

- Copule de Student :
  - En dimension 2 de paramètre $\rho \in [0,1], \nu \in \mathbb{R}_+^*$:

$$C(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx\, dy,$$

où t_ν est la fonction de répartition de la loi de Student à ν degrés de liberté.

Copules archimédiens I

Copules archimédiens

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ une fonction continue, strictement décroissante, convexe, telle que $\varphi(0) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

Alors la fonction C définie par :

$$\forall (u_1, u_2) \in [0,1]^2, \quad C(u_1, u_2) = \varphi\left(\varphi^{-1}(u_1) + \varphi^{-1}(u_2)\right)$$

est un copule de dimension 2.

- Énoncé similaire mais conditions plus techniques sur φ si $n > 2$

Copules archimédiens II

- Copule de Clayton de paramètre $\delta > 0$, avec $\varphi(x) = (1+\delta x)^{-\frac{1}{\delta}}$:

$$C(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\delta} + u_2^{-\delta} - 1\right)^{-1/\delta}.$$

- Copule de Gumbel de paramètre $\delta \geq 1$, avec $\varphi(x) = \exp\left(-x^{\frac{1}{\delta}}\right)$:

$$C(u_1, u_2) = \exp\left[-\left((-\ln u_1)^{\delta} + (\ln u_2)^{\delta}\right)^{1/\delta}\right].$$

Table of contents

Simulation de copules I

Le copule gaussien de matrice de corrélation $\boldsymbol{\rho}$ peut être simulé avec l'algorithme suivant :

1. Par Cholesky, calculer L telle que $\mathbf{L}\mathbf{L}^* = \boldsymbol{\rho}$.
2. Simuler $U = (U_1, \ldots, U_n)$ des uniformes indépendantes.
3. $Z = \left(\Phi^{-1}(U_1), \ldots, \Phi^{-1}(U_n)\right)$ est un vecteur de gaussiennes indépendantes.
4. $Y = \mathbf{L}Z$ est un vecteur de gaussiennes corrélées selon $\boldsymbol{\rho}$.
5. $U = (\Phi(Y_1), \ldots, \Phi(Y_n))$ est un vecteur de marginales uniformes liées selon le copule gaussien de corrélation $\boldsymbol{\rho}$.

Simulation de copules II

- Observation : Soit C un copule de dimension 2 admettant une densité c :

$$\forall (u,v) \in [0,1]^2, C(u,v) = \int_{]0,u]} \int_{]0,v]} c(s,t)\, dt\, ds.$$

Alors avec $c_U = \mathbf{1}_{[0,1]}$ (marginales uniformes),

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial u}(u,v) &= \int_{]0,v]} c(u,t)\, dt = \int_{]0,v]} \frac{c(u,t)}{c_U(u)}\, dt \\ &= \int_{]0,v]} c_{V|U=u}(t)\, dt = \mathbf{P}(V \leq v | U = u). \end{aligned}$$

- Conséquence : on peut simuler le copule C en simulant U uniforme puis $V = \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^{-1}(U,Z)$ avec Z uniforme.

Simulation de copules III

- Principe général : Simulation par récurrence avec :

$$\mathbf{P}\left(U_k = u_k \middle| U_1 = u_1, \ldots, U_{k-1} = u_{k-1}\right)$$
$$= \frac{\partial C_{u_1 \ldots u_{k-1}}(u_1, \ldots, u_k, 1, \ldots, 1)}{\partial C_{u_1 \ldots u_{k-1}}(u_1, \ldots, u_{k-1}, 1, \ldots, 1)}$$

Simulation de copules IV

Le copule de Clayton de dimension n et de paramètre δ peut être simulé avec l'algorithme suivant :

1. $S = 0$
2. Simuler U_1 uniforme.
3. Pour $i = 2, \ldots, n$:
   (i) $S = S + U_{i-1}^{-\delta} - 1$.
   (ii) Simuler V uniforme.
   (iii) $U_i = \left[(1+S)V^{\frac{-\delta}{1+(i-1)\delta}} - S\right]^{-1/\delta}$.

Table of contents

Tau de Kendall I

Tau de Kendall

Soit $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ un échantillon aléatoire i.i.d du couple de v.a. (X, Y). On pose

$$N_+ = \sharp\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i < j, (X_i < X_j \wedge Y_i < Y_j) \vee (X_i > X_j \wedge Y_i > Y_j)\right\}$$

$$N_+ = \sharp\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i < j, (X_i < X_j \wedge Y_i > Y_j) \vee (X_i > X_j \wedge Y_i < Y_j)\right\}$$

On appelle alors τ de Kendall la quantité

$$\tau_{(X,Y)} = 2\frac{N_+ - N_-}{n(n-1)}$$

- $\tau_{(X,Y)} \in [-1, 1]$
- $\tau_{(X,Y)}$ est une mesure d'ordre : $\tau_{(X,Y)} = 1$ si les échantillons sont rangés dans le même ordre, $\tau_{(X,Y)} = -1$ si les rangements sont inversés.

Tau de Kendall II

- Si X et Y sont liées par un copule C, alors

$$\tau_{(X,Y)} = 4 \int_{[0,1]\times[0,1]} C(u,v)\, dC(u,v) - 1$$

.

- Pour un copule gaussien : $\tau_{(X,Y)} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{(X,Y)}$
- Pour un copule de Clayton : $\tau_{(X,Y)} = \frac{\delta}{\delta + 2}$

Table of contents

Un modèle de risque de crédit I

n^{th}-to-default

On appelle n^{th}-*to-default* le produit dérivé couvrant le risque de crédit sur un panier d'actifs (prêts, obligations, etc.) avec les caractéristiques suivantes :

- Nombre d'actifs couverts : d
- Maturité T
- Nominal $N = (N_1, \dots, N_d)$
- Taux de recouvrement $R = (R_1, \dots, R_d)$
- Payoff : Si l'actif i du panier est le n-ième actif du panier à faire défaut avant la maturité T du produit, le détenteur du produit dérivé reçoit la prime $N_i(1 - R_i)$.

- Sans perte de généralité, on suppose $N_i = 1$ et $R_i = 0$ pour tout i. On supposera également pour simplifier que le taux sans risque est nul : $r = 0$.

Un modèle de risque de crédit II

Modèle simple

On suppose :

- que le temps de défaut τ_i de l'actif i suit une loi de fonction de répartition F_i ;
- que les v.a. $1 - F_i(\tau_i)$ (de loi uniforme) sont liées par un copule C.

- Le prix p du FTD vaut alors :

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{P}(\exists i \in \{1, \ldots, d\} : \tau_i < T) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\forall i \in \{1, \ldots, d\} : \tau_i \geq T) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\forall i \in \{1, \ldots, d\} : F_i(\tau_i) \geq F_i(T)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\forall i \in \{1, \ldots, d\} : 1 - F_i(\tau_i) \leq 1 - F_i(T)) \\ &= 1 - C(1 - F_1(T), \ldots, 1 - F_d(T)). \end{aligned}$$

Un modèle de risque de crédit III

- Si on sait simuler le copule C, alors on peut alors évaluer le n-th-to-default par Monte Carlo.
- Si le copule est explicitement connu, on peut trouver une formule analytique.
- Dans le cas particulier du copule de Clayton :

$$
\begin{aligned}
p &= 1 - C(1 - F_1(T), \ldots, 1 - F_d(T)) \\
&= 1 - \left\{ 1 + \delta \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{\delta} \left((1 - F_i(T))^{-\delta} - 1 \right) \right\}^{-\frac{1}{\delta}} \\
&= 1 - \left\{ \sum_{i=1}^{d} (1 - F_i(T))^{-\delta} - (d - 1) \right\}^{-\frac{1}{\delta}} .
\end{aligned}
$$

Table of contents

TP 5 Partie 2 I

1. Simulation de copules
   (a) Simuler un copule gaussien en dimension 2 et tracer le nuage de points obtenu pour différentes valeurs de ρ.
   (b) Simuler un copule de Clayton en dimension 2 et tracer le nuage de points obtenu pour différentes valeurs de δ.
2. On considère un first-to-default (FTD) sur N actifs. On suppose que le temps de défaut τ_i de l'actif i suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$. On suppose également que les $(1 - F_i(\tau_i)$ sont liés selon un copule C gaussien de matrice de la matrice de corrélation "flat" $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ vérifiant $\rho_{ij} = \rho$ pour tout $i \neq j$.
   (a) Tracer la convergence du prix Monte Carlo en fonction du nombre de simulations.
   (b) Tracer le prix en fonction de ρ. On donnera les expressions explicites des prix dans les cas limites $\rho \to 0$ et $\rho \to 1$.
   (c) Tracer le prix en fonction de la maturité T.
   (d) Tracer le prix en fonction de ρ pour un nombre d'actifs $N \in \{5, 10, 15, 20\}$.

TP 5 Partie 2 II

(e) On note λ l'intensité de défaut "globale", telle que le prix du FTD sur un actif ($n = 1$) avec $\lambda_1 = \lambda$ soit égal au prix du FTD sur N actifs. Tracer λ en fonction de ρ.

(f) *Facultatif :* Tracer le prix du n^{th}-to-default en fonction de n.

3. On considère un first-to-default (FTD) sur N actifs en supposant que C est un copule de Clayton de paramètre δ.
   (a) Tracer la convergence du prix Monte Carlo en fonction du nombre de simulations.
   (b) Tracer le prix en fonction de δ.
   (c) Tracer le prix en fonction de la maturité T.
   (d) Tracer le prix en fonction de δ pour un nombre d'actifs $N \in \{5, 10, 15, 20\}$.
   (e) Tracer λ en fonction de δ.
   (f) Comparer les prix obtenus avec ceux obtenus avec le copule gaussien dans le cas $N = 2$ (utilisation du tau de Kendall).

TP 5 Partie 2 III

- Pour aller plus loin
  - Autres copules (Gumbel, Student, Frank, etc.)
  - Autres mesures de dépendances (rho de Spearman, *tail dependence*, etc.)