# 我的研究笔记

liyiqiang(lyq105 AT 163.com)

2012 年 5 月 7 日

## 目录

# 1 快速多极边界元的四叉树生成算法

快速多极边界元方法借助了自适应四叉树，给出了边界元的加速算法。在使用这四叉树的边界元算法中，使得内存的使用量，和迭代计算的代价得到了改善。

下面给出自适应四叉树的生成算法：

**Step 0.** 给定树节点中最大单元数 $emax$。

**Step 1.** 初始化根结点，并设定其所在的层为第 0 层, 并令 $depth = 0$。

**Step 2.** 设 $k = depth$, 遍历第 $k-1$ 层的非叶子树节点，[1]

- **Case 1.** 如果树节点中的单元数小于等于 $emax$, 标记该树节点为叶子节点。
- **Case 2.** 如果树节点中的单元数大于 $emax$, 标记该树节点为非叶子节点，并调用四分树节点算法，生成下一层的树节点。

**Step 3.** 若有新的树节点产生， $depth = depth + 1$, 并转 **Step 2**，否则转 **Step 4**。

**Step 4.** 结束算法。

四分树节点的算法：

1. 读取设定的树节点最大单元数 $emax$;
2. 计算该节点四个象限中的单元数;
3. 遍历四个象限，
   (a) 若该象限中的单元数不为 0，则创建树节点，并将该子节点加入到树节点列表, 若节点中的单元数大于 $emax$, 则将树节点标记为非叶子节点，否则将该树节点标记为叶子节点。
   (b) 若该象限中的单元数为零，转到计算下一个象限。
4. 算法结束。

遍历树算法

[1] 在这一步之前并不知道 $k-1$ 层的节点是否是叶子节点。

# 2 计算边界积分的退化核

若核函数可以表示为 [1]

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x)\varsigma_k(y)$$

那么如下的矩

$$A_k=\sum_{i=1}^{N}\wedge_i\varphi_k(y_i). \tag{1}$$

可以先计算好，要计算源点处的函数值则只需要做 $p$ 次乘法和 $p-1$ 次加法。

$$u(x)=\sum_{i=1}^{p}A_k\varsigma_k(x). \tag{2}$$

则要是计算在 $N$ 个点处的位势值的话，只需要 $O(N)$ 的计算量。

特别地在边界元中，若核函数可以展开为远场和近场同时适用的级数形式，那么计算则十分的简便。

## 参考文献

[1] Beatson R, Greengard L. A short course on fast multipole methods [J]. Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs. 1997: 1–37.

# 3 二维三维 Voronoi 图生成

在多尺度计算中经常会用到一些 Voronoi 图来计算单晶的一些物理过程。下面给出一些 Voronoi 图的生成办法。

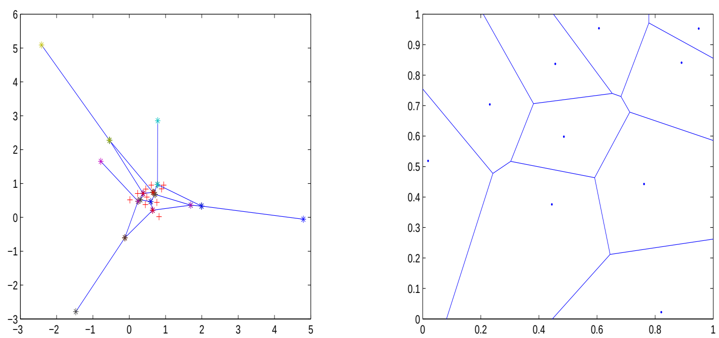
生成 Voronoi 图的软件是 qhull，它可以快速地生成一些点集的凸包，也可以生成一些点集的 Voronoi 图。简单地说 qhull 软件包的功能是输入一些点集，生成的是 Voronoi 图的顶点，以及 cell，也就是 Voronoi 格子。这些格子由一组围成这个格子的顶点的编号来表示。

但是在多尺度计算中经常需要的是一个立方体（3D）或正方性（2D）的单胞，这个单胞与生成的 Voronoi 格子要做一个交，也就说有一个方框将其包住。这个问题貌似很复杂，不好描述。

有一个简便的办法，第一步，输入点集，生成 Voronoi 图；第二步，将不包含无限点的 cell 做一次凸包计算，生成 cell 的面，将这些面导入 ansys；第三步，创建一个体，使得这个体的 $x, y, z$ 坐标在 Voronoi 顶点的范围内。第四步，使用 ansys 的 substract 操作，用体减去面，就可以得到想要的 Voronoi 图。

**注记 1.** 第三步的要求是自然的，单胞结构需要这样构造。

下面给一个二维的图



(a) (b)

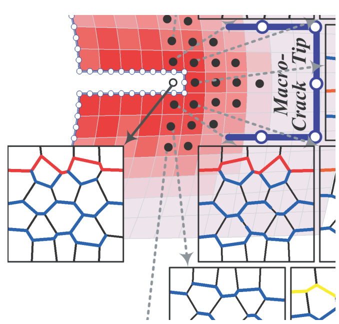



图 1: 计算中的 Voronoi 格子

其中的 $b$ 图是 $a$ 图的局部放大图。可以看出这个才是需要使用的真实计算模型。

## 3.1 使用凸包生成软件 qhull 生成 Voronoi 图

qhull 包含了一系列的工具，其中 qvoronoi 就是用来生成 Voronoi 图的。

软件的输入是一系列的点集例如

```
2
5
0 0.4
1 0
0 1
1 1
0.5 0.5
```

其中第一行指的是点集的维数，第二行指的是点的数目，以后依次为点的坐标。

输出一般指定为

```
qvoronoi p Fv
```

参数 $p$ 表示的是输出点的坐标， $Fv$ 表示的是输出 voronoi 边，三维的情形表示的是面。

例如上述点集的输出为

```
2
4
0.3666666666666666 -0.1333333333333334
     1    0.5
   0.2    0.7
   0.5      1
8
4 0 2 0 3
4 0 1 0 1
4 0 4 1 3
4 1 3 0 2
4 1 4 1 2
4 2 3 0 4
4 2 4 3 4
4 3 4 2 4
```

其中第一行表示的是点集的维数，第二行表示的是有限点的个数，以后四行表示的是有限点的坐标，接下来的一行表示的是 voronoi 边的个数，接着依次是 voronoi 边它里面的数据的表示的是 2+Voronoi 点数，接下来的两个是输入点编号，并且这两个输入点的中面就是 Voronoi 边（面），其余的数字表示的是 Voronoi 边（面）上的 Voronoi 顶点编号。注意，其中有限点的编号从 1 开始，无限点的编号为 0，也就是说包含编号 0 的 Voronoi 边（面）是开放的。

通常为了处理这样的点，将输出加上 Fi 选项，即

```
qvoronoi p Fv Fi
```

输出的结果为

```
2
4
0.3666666666666666 -0.1333333333333334
     1    0.5
   0.2    0.7
   0.5      1
8
4 0 2 0 3
4 0 1 0 1
4 0 4 1 3
4 1 3 0 2
4 1 4 1 2
4 2 3 0 4
4 2 4 3 4
4 3 4 2 4
4
5 0 4 0.9805806756909201 0.196116135138184 -0.3333974297349128
5 1 4 -0.7071067811865476 0.7071067811865476 0.3535533905932738
5 2 4 0.7071067811865476 -0.7071067811865475 0.3535533905932737
5 3 4 -0.7071067811865476 -0.7071067811865476 1.060660171779821
```

这里的增加了 5 行为了输出无限点，他们分别表示的是，第一行表示的是包含无限点的面数，其余的为面的信息，其中第一个数据表示的是该行的数据个数，接下来的两个数表示的是输入点，其余的三个数分别表示的是两个输入点所夹的面的方程系数。

$$Ax + By + C = 0$$

或者是

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

这样就可以用上面生成的数据就可以完整描述一个 Voronoi 图。

直接读取文件可以使用的 qhull 的命令行为

```
qvoronoi TI test TO file2 p Fv Fi
```

其中 test 是输入的文件名，file2 为输出的文件名，其余为输出参数。

# 4 使用 libmesh 求解悬臂梁的弯曲问题

悬臂梁问题的控制方程是如下的弹性力学方程组

$$-\partial_j(c_{ijkl}\partial_k u_l) = f_i, \qquad i = 1 \dots d,$$

其中 $d$ 表示维数，为 3， $c_{ijkl}$ 表示刚度系数张量，描述的是材料系数的，在大多数情形下，材料都是各向同性的材料，张量 $c_{ijkl}$ 可以用两个系数 $\lambda$ 和 $\mu$ 来表示， $c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ 从而弹性力学方程就可以表示为如下形式

上式的右端相应的双线性形式

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda\nabla\cdot\mathbf{u}, \nabla\cdot\mathbf{v})_\Omega + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_k v_l)_\Omega + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_l v_k)_\Omega,$$

或者写为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k,l}(\lambda\partial_l u_l, \partial_k v_k)_\Omega + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_k v_l)_\Omega + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_l v_k)_\Omega.$$

下面讨论如何定义向量值形函数，对位移的每一个分量进行插值，则

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_i \Phi_i(\mathbf{x})\, U_i$$

在每一个单元上有， $u_i(x) = \sum_j \phi_j(x) u_i^j, i = 1, 2, \cdots, d$ 其中 $u_j^i$ 表示第 i 个位移的第 j 个插值系数。将双线性变分原理分解为 $a(u,v) = \sum_k a_k(u,v)$ 则有

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_e \left(\sum_{k,l}(\lambda\partial_l u_l, \partial_k v_k)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_k v_l)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}(\mu\partial_k u_l, \partial_l v_k)_{\Omega_e}\right) \\
&= \sum_e \left(\sum_{k,l}\left(\lambda\partial_l \sum_j \phi_j(x) u_l^j, \partial_k v_k\right)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}\left(\mu\partial_k \sum_j \phi_j(x) u_l^j, \partial_k v_l\right)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}\left(\mu\partial_k \sum_j \phi_j(x) u_l^j, \partial_l v_k\right)_{\Omega_e}\right) \\
&= \sum_e \sum_{k,l}\sum_j u_l^j(\lambda\partial_l\phi_j(x), \partial_k v_k)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}\sum_j u_l^j(\mu\partial_k\phi_j(x), \partial_k v_l)_{\Omega_e} + \sum_{k,l}\sum_j u_l^j(\mu\partial_k\phi_j(x), \partial_l v_k)_{\Omega_e}
\end{aligned}$$

若再取测试函数 v 为 $\phi$ 定义：

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} U_i V_j \sum_{k,l}\left\{\left(\lambda\partial_l(\Phi_i)_l, \partial_k(\Phi_j)_k\right)_\Omega + \left(\mu\partial_l(\Phi_i)_k, \partial_l(\Phi_j)_k\right)_\Omega + \left(\mu\partial_l(\Phi_i)_k, \partial_k(\Phi_j)_l\right)_\Omega\right\} \\
&= \sum_j V_j \sum_l \left(f_l, (\Phi_j)_l\right)_\Omega.
\end{aligned}$$

在单元上就要求解如下的矩阵。

$$\begin{aligned}
A_{ij}^K &= \sum_{k,l}\left\{\left(\lambda\partial_l(\Phi_i)_l, \partial_k(\Phi_j)_k\right)_\Omega + \left(\mu\partial_l(\Phi_i)_k, \partial_l(\Phi_j)_k\right)_\Omega + \left(\mu\partial_l(\Phi_i)_k, \partial_k(\Phi_j)_l\right)_\Omega\right\} \\
f_j^K &= \sum_l \left(f_l, (\Phi_j)_l\right)_K = \sum_l \left(f_l, \phi_j\delta_{l,\mathrm{comp}(j)}\right)_K = \left(f_{\mathrm{comp}(j)}, \phi_j\right)_K.
\end{aligned}$$

```
/* The Next Great Finite Element Library. */
/* Copyright (C) 2003  Benjamin S. Kirk */

/* This library is free software; you can redistribute it and/or */
/* modify it under the terms of the GNU Lesser General Public */
/* License as published by the Free Software Foundation; either */
/* version 2.1 of the License, or (at your option) any later version. */

/* This library is distributed in the hope that it will be useful, */
/* but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of */
/* MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the GNU */
/* Lesser General Public License for more details. */

/* You should have received a copy of the GNU Lesser General Public */
/* License along with this library; if not, write to the Free Software */
/* Foundation, Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA  02111-1307  USA */



 // <h1> Systems of Equations 4 - Linear elastic cantilever </h1>
 //      By David Knezevic
 //
 // In this example we model a homogeneous isotropic cantilever
 // using the equations of linear elasticity. We set the Poisson ratio to
 // \nu = 0.3 and clamp the left boundary and apply a vertical load at the
 // right boundary.


// C++ include files that we need
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>

// libMesh includes
#include ”libmesh.h”
#include ”mesh.h”
#include ”mesh_generation.h”
#include ”exodusII_io.h”
#include ”gnuplot_io.h”
#include ”linear_implicit_system.h”
#include ”equation_systems.h”
#include ”fe.h”
#include ”quadrature_gauss.h”
#include ”dof_map.h”
#include ”sparse_matrix.h”
#include ”numeric_vector.h”
#include ”dense_matrix.h”
#include ”dense_submatrix.h”
#include ”dense_vector.h”
#include ”dense_subvector.h”
#include ”perf_log.h”
#include ”elem.h”
#include ”boundary_info.h”
#include ”zero_function.h”
#include ”dirichlet_boundaries.h”
#include ”string_to_enum.h”
#include ”getpot.h”
```

```
// Bring in everything from the libMesh namespace
using namespace libMesh;

// Matrix and right-hand side assemble
void assemble_elasticity(EquationSystems& es,
                         const std::string& system_name);

// Define the elasticity tensor, which is a fourth-order tensor
// i.e. it has four indices i,j,k,l
Real eval_elasticity_tensor(unsigned int i,
                            unsigned int j,
                            unsigned int k,
                            unsigned int l);

// Begin the main program.
int main (int argc, char** argv)
{
  // Initialize libMesh and any dependent libaries
  LibMeshInit init (argc, argv);

  // Initialize the cantilever mesh
  const unsigned int dim = 2;

  // Skip this 2D example if libMesh was compiled as 1D-only.
  libmesh_example_assert(dim <= LIBMESH_DIM, ”2D support”);

  Mesh mesh(dim);
  MeshTools::Generation::build_square (mesh,
                                       50, 10,
                                       0., 1.,
                                       0., 0.2,
                                       QUAD9);


  // Print information about the mesh to the screen.
  mesh.print_info();


  // Create an equation systems object.
  EquationSystems equation_systems (mesh);

  // Declare the system and its variables.
  // Create a system named ”Elasticity”
  LinearImplicitSystem& system =
    equation_systems.add_system<LinearImplicitSystem> (”Elasticity”);


  // Add two displacement variables, u and v, to the system
  unsigned int u_var = system.add_variable(”u”, SECOND, LAGRANGE);
  unsigned int v_var = system.add_variable(”v”, SECOND, LAGRANGE);


  system.attach_assemble_function (assemble_elasticity);

  // Construct a Dirichlet boundary condition object
  // We impose a ”clamped” boundary condition on the
  // ”left” boundary, i.e. bc_id = 3
  std::set<boundary_id_type> boundary_ids;
```

```
  boundary_ids.insert(3);

  // Create a vector storing the variable numbers which the BC applies to
  std::vector<unsigned int> variables(2);
  variables[0] = u_var; variables[1] = v_var;

  // Create a ZeroFunction to initialize dirichlet_bc
  ZeroFunction<> zf;

  DirichletBoundary dirichlet_bc(boundary_ids,
                                 variables,
                                 &zf);

  // We must add the Dirichlet boundary condition _before_
  // we call equation_systems.init()
  system.get_dof_map().add_dirichlet_boundary(dirichlet_bc);

  // Initialize the data structures for the equation system.
  equation_systems.init();

  // Print information about the system to the screen.
  equation_systems.print_info();

  // Solve the system
  system.solve();

  // Plot the solution
#ifdef LIBMESH_HAVE_EXODUS_API
  ExodusII_IO (mesh).write_equation_systems("displacement.e",equation_systems);
#endif // #ifdef LIBMESH_HAVE_EXODUS_API

  // All done.
  return 0;
}


void assemble_elasticity(EquationSystems& es,
                         const std::string& system_name)
{
  libmesh_assert (system_name == "Elasticity");

  const MeshBase& mesh = es.get_mesh();

  const unsigned int dim = mesh.mesh_dimension();

  LinearImplicitSystem& system = es.get_system<LinearImplicitSystem>("Elasticity");

  const unsigned int u_var = system.variable_number ("u");
  const unsigned int v_var = system.variable_number ("v");

  const DofMap& dof_map = system.get_dof_map();
  FEType fe_type = dof_map.variable_type(0);
  AutoPtr<FEBase> fe (FEBase::build(dim, fe_type));
  QGauss qrule (dim, fe_type.default_quadrature_order());
  fe->attach_quadrature_rule (&qrule);

  AutoPtr<FEBase> fe_face (FEBase::build(dim, fe_type));
  QGauss qface(dim-1, fe_type.default_quadrature_order());
```

```
  fe_face->attach_quadrature_rule (&qface);

  const std::vector<Real>& JxW = fe->get_JxW();
  const std::vector<std::vector<RealGradient> >& dphi = fe->get_dphi();

  DenseMatrix<Number> Ke;
  DenseVector<Number> Fe;

  DenseSubMatrix<Number>
    Kuu(Ke), Kuv(Ke),
    Kvu(Ke), Kvv(Ke);

  DenseSubVector<Number>
    Fu(Fe),
    Fv(Fe);

  std::vector<unsigned int> dof_indices;
  std::vector<unsigned int> dof_indices_u;
  std::vector<unsigned int> dof_indices_v;

  MeshBase::const_element_iterator       el     = mesh.active_local_elements_begin();
  const MeshBase::const_element_iterator end_el = mesh.active_local_elements_end();

  for ( ; el != end_el; ++el)
    {
      const Elem* elem = *el;

      dof_map.dof_indices (elem, dof_indices);
      dof_map.dof_indices (elem, dof_indices_u, u_var);
      dof_map.dof_indices (elem, dof_indices_v, v_var);

      const unsigned int n_dofs   = dof_indices.size();
      const unsigned int n_u_dofs = dof_indices_u.size();
      const unsigned int n_v_dofs = dof_indices_v.size();

      fe->reinit (elem);

      Ke.resize (n_dofs, n_dofs);
      Fe.resize (n_dofs);

      Kuu.reposition (u_var*n_u_dofs, u_var*n_u_dofs, n_u_dofs, n_u_dofs);
      Kuv.reposition (u_var*n_u_dofs, v_var*n_u_dofs, n_u_dofs, n_v_dofs);

      Kvu.reposition (v_var*n_v_dofs, u_var*n_v_dofs, n_v_dofs, n_u_dofs);
      Kvv.reposition (v_var*n_v_dofs, v_var*n_v_dofs, n_v_dofs, n_v_dofs);

      Fu.reposition (u_var*n_u_dofs, n_u_dofs);
      Fv.reposition (v_var*n_u_dofs, n_v_dofs);

      for (unsigned int qp=0; qp<qrule.n_points(); qp++)
      {
          for (unsigned int i=0; i<n_u_dofs; i++)
            for (unsigned int j=0; j<n_u_dofs; j++)
            {
              // Tensor indices
              unsigned int C_i, C_j, C_k, C_l;
              C_i=0, C_k=0;

```

```
              C_j=0, C_l=0;
              Kuu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=0;
              Kuu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=0, C_l=1;
              Kuu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=1;
              Kuu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));
            }

          for (unsigned int i=0; i<n_u_dofs; i++)
            for (unsigned int j=0; j<n_v_dofs; j++)
            {
              // Tensor indices
              unsigned int C_i, C_j, C_k, C_l;
              C_i=0, C_k=1;


              C_j=0, C_l=0;
              Kuv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=0;
              Kuv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=0, C_l=1;
              Kuv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=1;
              Kuv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));
            }

          for (unsigned int i=0; i<n_v_dofs; i++)
            for (unsigned int j=0; j<n_u_dofs; j++)
            {
              // Tensor indices
              unsigned int C_i, C_j, C_k, C_l;
              C_i=1, C_k=0;


              C_j=0, C_l=0;
              Kvu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=0;
              Kvu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=0, C_l=1;
              Kvu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=1;
              Kvu(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));
            }

          for (unsigned int i=0; i<n_v_dofs; i++)
            for (unsigned int j=0; j<n_v_dofs; j++)
```

```
            {
              // Tensor indices
              unsigned int C_i, C_j, C_k, C_l;
              C_i=1, C_k=1;


              C_j=0, C_l=0;
              Kvv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=0;
              Kvv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=0, C_l=1;
              Kvv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));

              C_j=1, C_l=1;
              Kvv(i,j) += JxW[qp]*(eval_elasticity_tensor(C_i,C_j,C_k,C_l) * dphi[i][qp](C_j)*dphi[j][qp](C_l));
            }
      }

      {
        for (unsigned int side=0; side<elem->n_sides(); side++)
          if (elem->neighbor(side) == NULL)
            {
              boundary_id_type bc_id = mesh.boundary_info->boundary_id (elem,side);
              if (bc_id==BoundaryInfo::invalid_id)
                  libmesh_error();

              const std::vector<std::vector<Real> >&  phi_face = fe_face->get_phi();
              const std::vector<Real>& JxW_face = fe_face->get_JxW();

              fe_face->reinit(elem, side);

              for (unsigned int qp=0; qp<qface.n_points(); qp++)
              {
                if( bc_id == 1 ) // Apply a traction on the right side
                {
                  for (unsigned int i=0; i<n_v_dofs; i++)
                  {
                    Fv(i) += JxW_face[qp]* (-1.) * phi_face[i][qp];
                  }
                }
              }
            }
      }

      dof_map.constrain_element_matrix_and_vector (Ke, Fe, dof_indices);

      system.matrix->add_matrix (Ke, dof_indices);
      system.rhs->add_vector    (Fe, dof_indices);
    }
}

Real eval_elasticity_tensor(unsigned int i,
                            unsigned int j,
                            unsigned int k,
                            unsigned int l)
{
```

```
  // Define the Poisson ratio
  const Real nu = 0.3;

  // Define the Lame constants (lambda_1 and lambda_2) based on Poisson ratio
  const Real lambda_1 = nu / ( (1. + nu) * (1. - 2.*nu) );
  const Real lambda_2 = 0.5 / (1 + nu);

  // Define the Kronecker delta functions that we need here
  Real delta_ij = (i == j) ? 1. : 0.;
  Real delta_il = (i == l) ? 1. : 0.;
  Real delta_ik = (i == k) ? 1. : 0.;
  Real delta_jl = (j == l) ? 1. : 0.;
  Real delta_jk = (j == k) ? 1. : 0.;
  Real delta_kl = (k == l) ? 1. : 0.;

  return lambda_1 * delta_ij * delta_kl + lambda_2 * (delta_ik * delta_jl + delta_il * delta_jk);
}
```