复变函数

ZQW

2019 年 2 月 23 日

1　解析函数

2　解析（Anlyticity）

2.1　惯用记法

任意复数 z 记为

$$z = x + \mathrm{i}y$$

复函数 $f(z)$ 记为

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

例如

$$f(z) = z + z^2 = x + \mathrm{i}y + (x + \mathrm{i}y)^2 = x + x^2 - y^2 + \mathrm{i}(y + 2xy)$$

其中

$$\begin{aligned} u(x, y) =& x + x^2 - y^2 \\ v(x, y) =& y + 2xy \end{aligned}$$

2.2　导数

由于

$$f(z) = f(x, \mathrm{i}y)$$

可以看成是一个二元函数. 那么有类似于一般的二元函数梯度

$$\nabla g(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}g(x,y)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}g(x,y)\vec{j}$$

的定义, 复函数的导数包含两个正交的方向上的导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x,\mathrm{i}y)=&\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,\mathrm{i}y)=&\frac{\partial u}{\partial \mathrm{i}y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial \mathrm{i}y}=-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

解析（Anlyticity）函数的定义是满足以下柯西-黎曼条件 (Cauchy-Riemann conditions)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}=&\quad\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=&-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

的复函数. 可以看出, 对于解析函数, 在 x 方向和在 $\mathrm{i}y$ 方向上的导数是一样的.

2.3 解析函数一定可以写在 z 的函数

一个复函数, 即可以看成是 (x,y) 的函数, 也可以看成是 (z,z^*) 的函数. 因为这是两组独立的变量, 变换关系是

$$\begin{cases} z=x+\mathrm{i}y\\ z^*=x-\mathrm{i}y\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} x=\frac{1}{2}(z+z^*)\\ y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^*)\end{cases}$$

所以, 复函数更加普遍的定义应该写成 $f(z,z^*)$, 但是对于解析函数有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^*}f(x,y)=&\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}\\ =&\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)\\ =&0\end{aligned}$$

所以解析函数不包含 z^* .

3 留数定理

假设一函数函数可以写成

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

的形式, 其中 $f(z)$ 没有奇点. 那么它在 $z = z_0$ 处有奇点. 对任意包含 z_0 点的路径 C 逆时针积分

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

与在奇点附近上一个无穷小的圆的积分是相等的

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

用振幅和辐角来表示 $z - z_0 = re^{\mathrm{i}\phi}$, 因为在圆上积分, 所以 r 是常数, 那么有

$$\begin{aligned}
\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{re^{\mathrm{i}\phi}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}\phi} \mathrm{d}\phi \\
&= \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0) \mathrm{d}\phi \\
&= \mathrm{i}2\pi f(z_0)
\end{aligned}$$

所以最终就有

$$\oint_C g(z) \mathrm{d}z = \oint_C \frac{f_z}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} f(z_0) = 2\pi\mathrm{i} \cdot g(z)(z - z_0)|_{z=z_0}$$

$g(z)(z - z_0)|_{z=z_0}$ 就是留数, 去掉奇点留下的数.

推广到多个奇点的情况

$$\oint_C g(z) \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}[g(z_k)]$$

4 参考文献

Jim, Napolitano, March 9, 2013, Notes on Complex Analysis in Physics
http://www.rpi.edu/dept/phys/Courses/PHYS6520/Spring2018/NotesOnComplexAnalysis.pdf