

Protokoll: Numerische Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen

Clemens Anschütz
Markus Pawellek

21. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	1
2	Grundlagen	2
2.1	Die Navier-Stokes Gleichungen	2
2.2	Randbedingungen	3
3	Numerik und Durchführung	4
3.1	Räumliche Diskretisierung und Gitter	4
3.2	Lösen der Impulsgleichungen	4
3.3	Ableitungs - Stencils	7
3.4	Berechnung des Drucks	8

1 Aufgaben

Schreiben Sie ein Programm, welches die Navier-Stokes Gleichung für eine inkompressible Flüssigkeit in zwei Dimensionen löst. Beschäftigen Sie sich hierfür zunächst mit der Theorie der Navier-Stokes Gleichung und der Finiten-Differenzen Methode. Implementieren Sie anschließend Ihr Programm unter Berücksichtigung der Versuchsanleitung. Simulieren und visualisieren Sie mit Ihrem Programm eine Nischenströmung und vergleichen Sie ihre Resultate mit den aus der Literatur bekannten Werten.

2 Grundlagen

2.1 Die Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen lassen sich aus den Eulergleichungen wie sie aus der Thermodynamik bekannt sind ableiten. Für inkompressible Flüssigkeiten ($\rho = \text{const}$) bilden sie folgendes System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} \quad (\text{Impulsgleichung})$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

Dieses gilt es nun mittels numerischer Verfahren zu berechnen. Re bezeichnet hierbei die Reynoldszahl, eine dimensionslose Zahl, die zur Skalierung von Modellen verwendet wird und sich wie folgt ergibt:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$$

In der Gleichung steht v für die Geschwindigkeit der Strömung, d für eine charakteristische Länge und η für die dynamische Viskosität des Fluids. Im Programm wird Re zu einer Konstanten, die Aussagen über das Strömungsverhalten liefert. Kleine Reynoldszahlen bedeuten dann sehr viskose Fluide und meist laminare Strömung, Fluide mit großen Reynoldszahlen zeigen meist turbulente Strömungen und müssen mit mehr Aufwand simuliert werden.

Da wir im vorliegenden Fall nur zweidimensionale Probleme betrachten wollen, behandeln wir die Entwicklung der Geschwindigkeit \vec{u} komponentenweise in der Form:

$$\vec{u} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y$$

Für diese skalaren Größen lauten die Zeitevolutionen dann:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + g_y$$

Die Kontinuumsgleichung lässt sich dann einfach in der Form schreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2.2 Randbedingungen

Um die Randbedingungen zu formulieren, zerlegen wir die Geschwindigkeitsvektoren an den Rändern in ihre tangentialen und normalen Komponenten zum Rand. Wir bezeichnen diese mit φ_t und φ_n . Die Randbedingungen definieren wir dann mit Hilfe dieser Komponenten und deren Normalenbleitungen. In diesem Versuch betrachten wir nur den einfachen Fall von senkrechten und waagerechten Randstücken.

- Somit ergeben sich für senkrechte Randstücke:

$$\varphi_n = u, \quad \varphi_t = v, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Für waagerechte Randstücke folgt:

$$\varphi_n = v, \quad \varphi_t = u, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen lassen sich dann z.B. die Haftbedingung formulieren. Diese gilt, wenn die Grenzen undurchlässig und star sind. Flüssigkeit kann dann weder in noch aus dem Gebiet Ω fließen und ruht am Rand.

$$\varphi_n(x, y) = 0, \quad \varphi_t(x, y) = 0$$

3 Numerik und Durchführung

3.1 Räumliche Diskretisierung und Gitter

Die Simulation findet im rechteckigen Gebiet $\Omega := [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ statt. Dieses wird in $i_{max} \cdot j_{max}$ rechteckige Zellen zerlegt. Die Zellen des räumlichen Gitters besitzen die Maße $\delta x \cdot \delta y$ wobei gilt:

$$\delta x := \frac{a}{i_{max}} \quad \text{und} \quad \delta y := \frac{b}{j_{max}}$$

Die skalaren Felder u , v , und p ordnen wir auf diesem Gitter wie in Abbildung 1 zu sehen an.

Durch die verschobenen Gitter lassen sich mögliche Oszillationen und Uneindeutigkeiten des Drucks verhindern. Die grauen Zellen in Abbildung 2 bilden die Randzellen, sie erhalten bei Initialisierung des Programms feste Werte entsprechend den jeweiligen Randwertproblemen und behalten diese während der gesamten Simulation bei.

3.2 Lösen der Impulsgleichungen

Die Variablen werden zum Zeitpunkt n betrachtet, die nachfolgenden Geschwindigkeitskomponenten werden mit Hilfe eines einfachen Euler-Vorwärts-Schrittes berechnet:

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}$$
$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t \frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}$$

Dabei sind die Funktionen F und G wie folgt definiert:

$$F = u + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g_x \right]$$
$$G = v + \delta t \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + g_y \right]$$

Das Verfahren ist wie wir sehen explizit in den Geschwindigkeitskomponenten und implizit im Druck. Die Druckberechnung wird unter Abschnitt 3.4 genauer beschreiben. Der Zeitschritt δt muss sorgfältig gewählt werden, um die Stabilität der Simulation zu gewährleisten. Nach Griebel, Dornseifer und Neuhöfer sollte er wie folgendermaßen gewählt werden:

$$\delta t := \tau \min \left(\frac{Re}{2} \frac{1}{\delta x^{-2} + \delta y^{-2}}, \frac{\delta x}{|u_{max}|}, \frac{\delta y}{|v_{max}|} \right)$$

Hierbei ist τ ein Sicherheitsfaktor zwischen 0 und 1. Im Programm wird er meist auf 0.5 gesetzt.

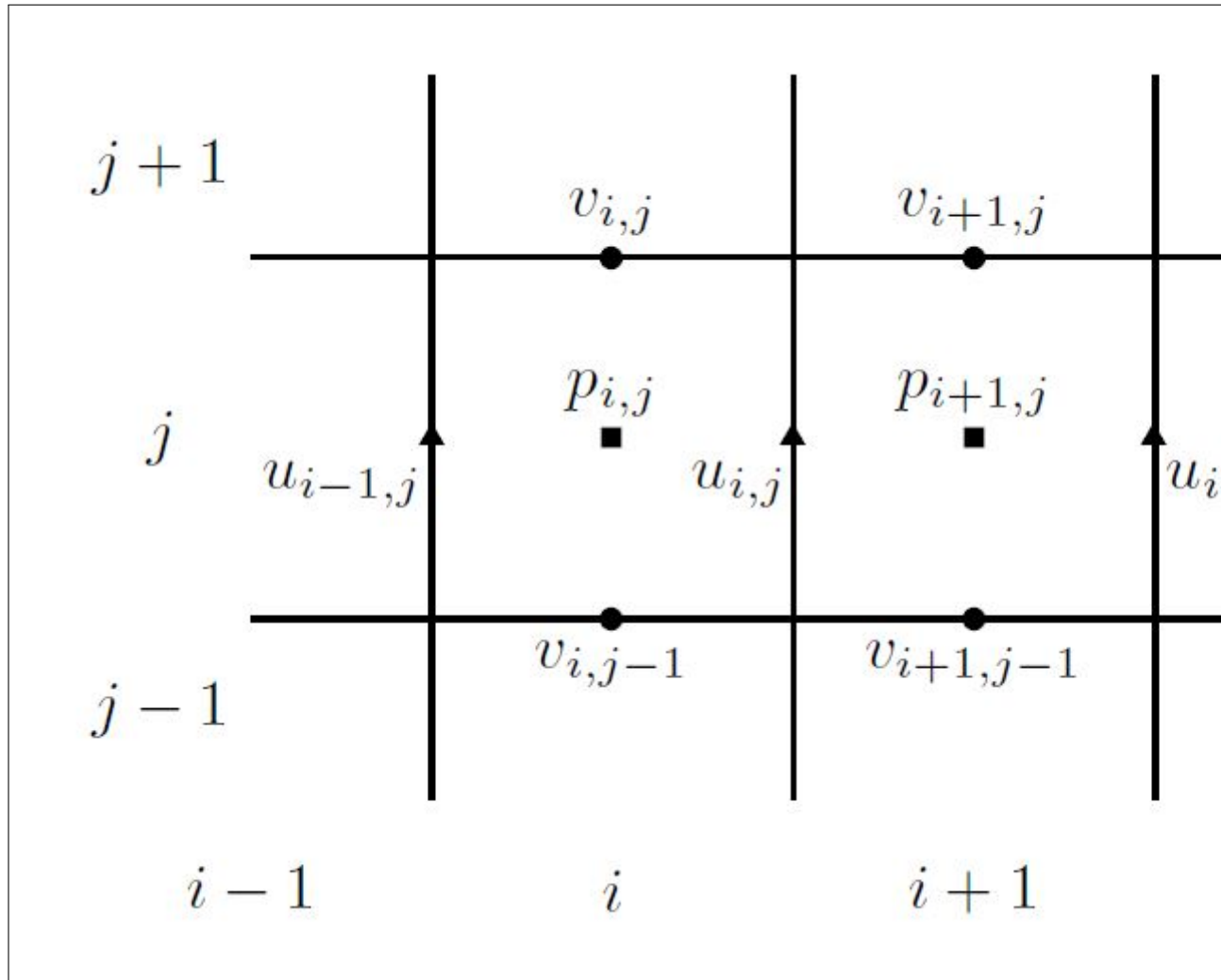


Abbildung 1: Schema für die Position der Geschwindigkeitskomponenten u , v sowie des Drucks p auf dem Gitter

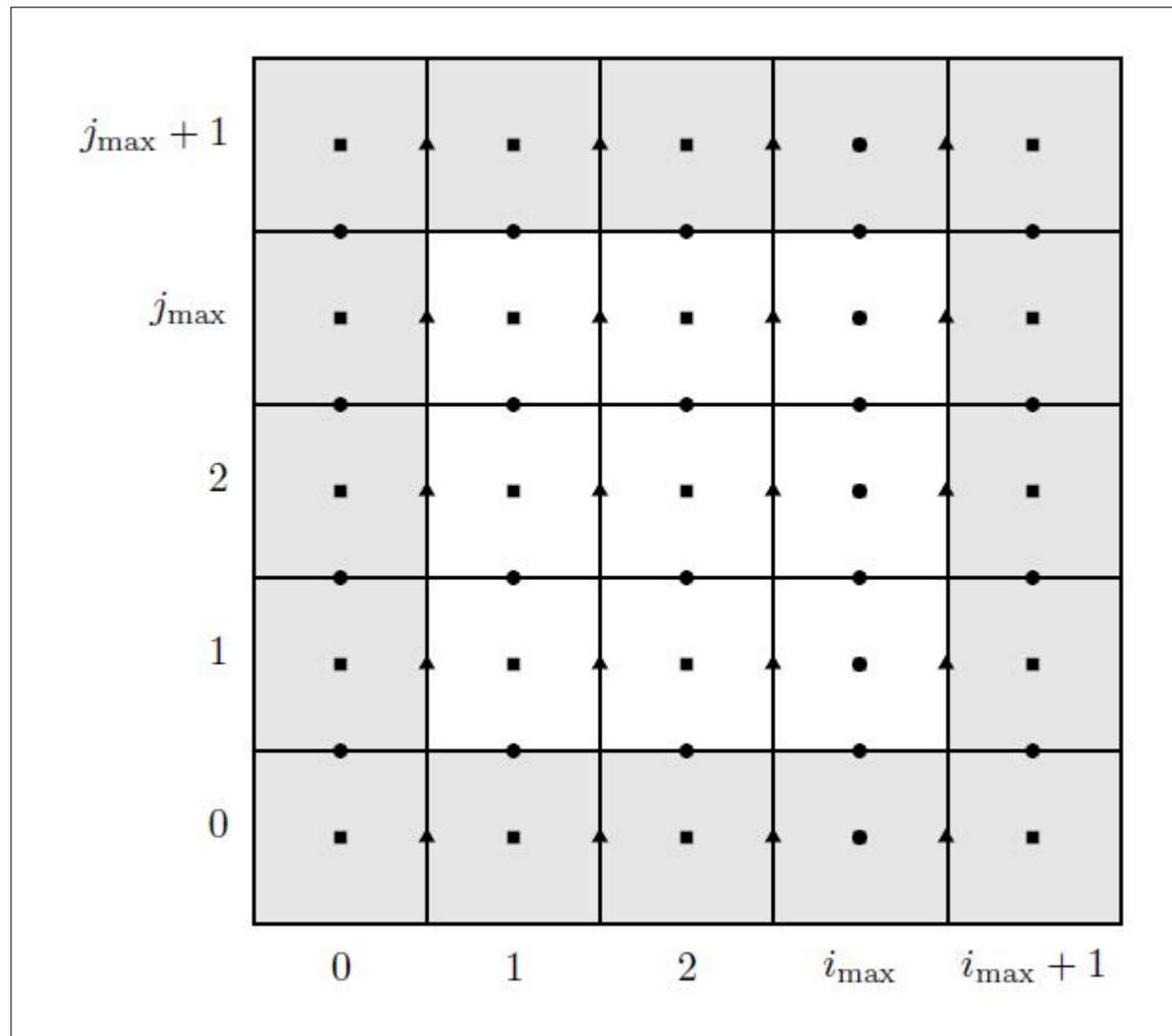


Abbildung 2: Darstellung der Randzellen mit den entsprechenden Randbedingungen

3.3 Ableitungs - Stencils

Die Ableitungen werden mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode berechnet. Dabei werden die ersten Ortsableitungen beispielsweise des Drucks durch den einfachen rechtseitigen Differenzenquotienten approximiert.

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x}, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y}$$

Für die zweiten Ableitungen werden standardmäßig zentrierte Differenzen verwendet.

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\delta x)^2}, \quad \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\delta y)^2}$$

Analoge Vorschriften liegen für die Ableitungen von v vor. Die Ableitungen der gemischten und nichtlinearen Terme werden durch eine Linearkombination von zentrierten Differenzen und Donor-Cell-Stencils ermittelt.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4\delta x} \left((u_{i,j} + u_{i+1,j})^2 - (u_{i-1,j} + u_{i,j})^2 \right) \\ &\quad + \gamma \frac{1}{4\delta x} (|u_{i,j} + u_{i+1,j}| (u_{i,j} - u_{i+1,j}) - |u_{i-1,j} + u_{i,j}| (u_{i-1,j} - u_{i,j})) \\ \left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4\delta y} \left((v_{i,j} + v_{i,j+1})^2 - (v_{i,j-1} + v_{i,j})^2 \right) \\ &\quad + \gamma \frac{1}{4\delta y} (|v_{i,j} + v_{i,j+1}| (v_{i,j} - v_{i,j+1}) - |v_{i,j-1} + v_{i,j}| (v_{i,j-1} - v_{i,j})) \\ \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4\delta x} ((u_{i,j} + u_{i,j+1})(v_{i,j} + v_{i+1,j}) - (u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1})(v_{i-1,j} + v_{i,j})) \\ &\quad + \gamma \frac{1}{4\delta x} (|u_{i,j} + u_{i,j+1}| (v_{i,j} - v_{i+1,j}) - |u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}| (v_{i-1,j} - v_{i,j})) \\ \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i,j} &= \frac{1}{4\delta y} ((u_{i,j} + u_{i,j+1})(v_{i,j} + v_{i+1,j}) - (u_{i,j-1} + u_{i,j})(v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1})) \\ &\quad + \gamma \frac{1}{4\delta y} (|v_{i,j} + v_{i,j+1}| (u_{i,j} - u_{i,j+1}) - |v_{i,j-1} + v_{i,j+1}| (u_{i,j-1} - u_{i,j})) \end{aligned}$$

Der Vorfaktor γ gewichtet hierbei die Anteile von zentrierten Differenzen und Donor-Cell-Stencils. Er sollte nach Hirt so gewählt werden, dass er folgende Bedingung erfüllt:

$$\gamma \geq \max_{ij} \left(\frac{|u_{i,j}| \delta t}{\delta x}, \frac{|v_{i,j}| \delta t}{\delta y} \right)$$

Jedoch wird er in unserem Programm zu Beginn auf einen konstanten Wert gesetzt, wie er auch in anderen Simulationen bereits verwendet wurde.

3.4 Berechnung des Drucks

Zur Bestimmung des Drucks verwenden wir die Kontinuitätsgleichung.

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0$$

Zusammen mit der unter 3.2 angegebenen Gleichung für die Ermittlung der Geschwindigkeiten lässt sich folgende Poisson-Gleichung für den Druck ableiten:

$$\frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{(n+1)}}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta t} \left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y} \right)$$

Die zweiten und ersten Ortsableitungen werden analog zu den unter 3.3 beschriebenen Ableitungen gebildet. Zum lösen der diskreten Poissongleichung wird hier das Successive-Over-Relaxation Verfahren (SOR) angewendet. Bei diesem iterativen Verfahren setzen wir den Startwert zu $p_{i,j}^{(n)}$, jeder weitere Iterationsschritt ergibt sich dann zu:

$$p_{i,j}^{it+1} = (1-\omega)p_{i,j}^{it} + \frac{\omega}{2(\delta x)^{-2} + 2(\delta y)^{-2}} \left(\frac{p_{i+1,j}^{it} + p_{i-1,j}^{it+1}}{(\delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{it} + p_{i,j-1}^{it+1}}{(\delta y)^2} - \text{RHS}_{i,j} \right)$$

Wobei RHS die rechte Seite der Poissongleichung bezeichnet. In jeder Iteration wird das Residuum r berechnet

$$r_{i,j}^{it+1} = \frac{p_{i+1,j}^{it+1} - 2p_{i,j}^{it+1} + p_{i-1,j}^{it+1}}{(\delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^{it+1} - 2p_{i,j}^{it+1} + p_{i,j-1}^{it+1}}{(\delta y)^2} - \text{RHS}_{i,j}$$

bis die Norm des Residuums eine vorgegebene relative Toleranzgrenze unterschreitet.

$$\text{NORM} r^{it+1} \text{NORM} < \epsilon \text{NORM} p^{it} \text{NORM}$$

Wobei die Norm im Versuch durch die Maximumsnorm gebildet wird und ϵ eine festgelegte kleine Konstante darstellt. Die Randzellen werden bei jedem Iterationsschritt einfach durch Kopieren der jeweiligen Nachbarzellen gefüllt.