Algorithmen und Datenstrukturen – Übung 02

Markus Pawellek – 144645

Lemma: (Eigenschaften von Θ, O, Ω)

Seien $f,g,h : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ gegeben. Dann gilt:

a) $a \cdot f \in \Theta(f)$ für alle $a > 0$ (insbesondere $f \in \Theta(f)$)

b) $f \in \Theta(g) \Rightarrow hf \in \Theta(hg)$ (analog für O und Ω)

c) $f + g \in \Theta(\max\{f,g\})$

Beweis: a) Sei $a > 0$ beliebig. Dann gilt: $f(n) \leq f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a \cdot f(n) \leq a \cdot f(n) \leq a \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Wähle $c_1 = c_2 = a > 0$ und $n_0 = 1$. Dann gilt:

$c_1 f(n) \leq a \cdot f(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $a \cdot f \in \Theta(f)$

b) $f \in \Theta(g) \Rightarrow$ es gibt $c_1, c_2 > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$

da h positiv ist gilt: $c_1 \cdot h(n) g(n) \leq h(n) f(n) \leq c_2 h(n) g(n)$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $hf \in \Theta(hg)$ (Beweis analog für O und Ω)

c) es gilt allgemein, da $f,g \geq 0$: $\max\{f,g\} \leq f+g \leq 2 \cdot \max\{f,g\}$

$\Rightarrow$ Wähle $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ und $n_0 = 1$. Dann gilt:

$c_1 \cdot \max\{f,g\} \leq f+g \leq c_2 \cdot \max\{f,g\}$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $f+g \in \Theta(\max\{f,g\})$ $\square$

Lemma: (Noch mehr Eigenschaften)

Seien $f,g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schließlich positive Funktionen (d.h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) \geq 0$, $g(n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$). Dann gilt:

$$\boxed{f+g \in \Theta(\max\{f,g\})}$$

Beweis: (analog zu c) $\max\{f,g\}(n) \leq (f+g)(n) \leq 2 \cdot \max\{f,g\}(n)$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ $f+g \in \Theta(\max\{f,g\})$ mit $c_1 = 1, c_2 = 2$ $\square$

Aufgabe 4

Seien $f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt im Allgemeinen weder Aussage a) noch Aussage b), da Funktionen $f_1, \dots, f_k$ auch negativ sein könnten.

Gegenbeispiel: $k = 2$, $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = -1$

$$\Rightarrow \max\{f_1, f_2\} = f_1, \quad \min\{f_1, f_2\} = f_2$$

$$\Rightarrow c_1 \cdot \min\{f_1, f_2\}(n) = c_1 \cdot (-1) < (f_1 + f_2)(n) = 0 < c_2 \cdot (1) = c_2 \cdot \max\{f_1, f_2\}$$

für alle $c_1, c_2 > 0$, da linke Seite immer negativ und rechte Seite immer positiv

$$\Rightarrow f_1 + f_2 \notin \Theta(\min\{f_1, f_2\}), \quad f_1 + f_2 \notin \Theta(\max\{f_1, f_2\})$$

Sind aber $f_1, \dots, f_k$ schließlich positive Funktionen, folgt Aussage a):

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $f_j(n) \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq k$ und alle $n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \left(\max_{1 \leq j \leq k} f_j\right)(n) \leq \sum_{j=1}^{k} f_j(n) \leq \sum_{j=1}^{k} \left(\max_{1 \leq j \leq k} f_j\right)(n) = k \cdot \left(\max_{1 \leq j \leq k} f_j\right)(n)$$

für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow$ Wähle nun $c_1 = 1$, $c_2 = k$, dann folgt gewünschte Aussage:

$$\sum_{j=1}^{k} f_j \in \Theta\left(\max_{1 \leq j \leq k} f_j\right)$$

□

Aufgabe 3

Seien $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$. Dann gilt:

es gibt $c_1 > 0$ und $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) \leq c_1 g(n)$ für alle $n \geq n_1$ und
es gibt $c_2 > 0$ und $n_2 \in \mathbb{N}$, sodass $g(n) \leq c_2 h(n)$ für alle $n \geq n_2$

Sei nun $\tilde{n} := \max\{n_1, n_2\}$. $\Rightarrow f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n)$ für alle $n \geq \tilde{n}$

Wähle nun $\tilde{c} = c_1 c_2 > 0$. Dann folgt: $f_n \leq \tilde{c} h(n)$ für alle $n \geq \tilde{n}$

$\Rightarrow f \in O(h)$

□

Aufgabe 1

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

a) $\log n \in O(n) \Rightarrow \sqrt{\log n} \in O(\sqrt{n}) \Rightarrow \sqrt{n \log n} \in O(n)$
$\Rightarrow \sqrt{n \log n} \in O(\frac{1}{4} n) \Rightarrow \frac{1}{4} n \in \Omega(\sqrt{n \log n})$

b) $6 \cdot 3^{\frac{n}{2}+1} = 18 \cdot \sqrt{3}^n \in O(\sqrt{3}^n)$

Sei $c > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit Bedingung: $\sqrt{3}^n \leq c \cdot 2^n$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}_{\text{monoton fallend } (\sqrt{3} < 2)} \leq c \Rightarrow$ ab bestimmten n_0 gilt Ungleichung

$\Rightarrow \sqrt{3}^n \in O(2^n)$

$\Rightarrow$ umgekehrt: $\underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}_{\text{monoton steigend}} \leq c \Rightarrow$ es gibt immer ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung nicht erfüllt ist

$\Rightarrow 2^n \in O(\sqrt{3}^n)$

$\Rightarrow f \in O(g)$

c) $n \in \Omega(\log n) \Rightarrow (n \log n) \cdot n \in \Omega((n \log n) \log n)$
$\Rightarrow n^2 \log n \in \Omega(n \log^2 n)$

d) $\log(n!) = \log \prod_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n} \log j \leq \sum_{j=1}^{n} \log n = n \log n$

$\Rightarrow \log(n!) \in O(n \log n)$

Ansatz: $n^r = (\log n)^{\log n} \Rightarrow \log n^r = r \cdot \log n = \log(\log n^{\log n})$
$= \log n \cdot \log \log n$

$\Rightarrow r = \log \log n > 1$ ab einem bestimmten n

$\Rightarrow n \log n \in O(n^r) = O(\log n^{\log n})$
$n \log n \notin \Omega(n^r)$

$\Rightarrow f \in O(g)$

e) o.E. $a, b > 1$: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \in \Theta(\log_b n)$