Algorithmen und Datenstrukturen

Markus Pawellek – 144645 Übung 01

Aufgabe 1

a) + b) siehe Quelltext

c) hanoi1: Zahl der Züge mit Höhe n: $c_1 = 1$, $c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 1$ (siehe Algorithmus)

$\Rightarrow c_n = 2^n - 1$ (allgemein bekannt) (kann durch Induktion direkt gezeigt werden)

$\Rightarrow$ hanoi2:

- ruft hanoi1 mit $2k-2$ auf
- macht zwei Züge
- ruft sich selbst mit $k-1$ auf

$\Rightarrow c_1 = 2$ (für $2 \cdot 1$ Scheiben $\rightarrow$ Index entspricht k)

$$c_{k+1} = 2^{2k} - 1 + 2 + c_k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

$$= 2^{2k} + 1 + c_k$$

$\Rightarrow$ Rekursionsgleichung für hanoi2 mit Eingabe k:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_{k+1} &= 2^{2k} + 1 + c_k \end{aligned}}$$

d) „Raten:"

$$c_{k+1} = 2^{2k} + 1 + c_k = 4^k + 1 + c_k$$

$$= 4^k + 1 + 4^{k-1} + 1 + 4^{k-2} + 1 + \ldots + 4 + 1 + 2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} 4^j + \sum_{j=1}^{k} 1 + 2$$

$$= \frac{4^{k+1} - 4}{3} + k + 2$$

$$\Rightarrow \boxed{c_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2 + 3k + 4^{k+1}\right)} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: $k=1$: $c_1 = \frac{1}{3}(2 + 3\cdot 0 + 4^1) = 2$ (entspricht der induktiven Definition)

$k \Rightarrow k+1$: es gilt also $c_k = \frac{1}{3}(2 + 3(k-1) + 4^k)$

Dann ist: $c_{k+1} \overset{(Def)}{=} 4^k + 1 + c_k$

$$\overset{(Indukt.)}{\Longrightarrow} \quad c_{k+1} = 4^k + 1 + \frac{1}{3}(2 + 3(k-1) + 4^k)$$
$$= \frac{1}{3}(3\cdot 4^k + 3 + 2 + 3(k-1) + 4^k)$$
$$= \frac{1}{3}(2 + (3+1)4^k + 3k)$$
$$= \frac{1}{3}(2 + 4^{k+1} + 3k)$$

(dies war gerade zu zeigen) $\square$

Aufgabe 2

a) Vergleiche: $2\cdot(n-1)$ Vertauschungen: $n-1$

b) Vergleiche: $n\cdot(n-1)$ Vertauschungen: $n-1$

c) Vergleiche: $\frac{n}{2}(n-1)$ Vertauschungen: $\frac{n}{4}(\frac{n}{2}-1)$

Aufgabe 3

a)

n	A_1	A_2
2	20	12
4	80	48
8	240	192
16	640	768
32	1600	3072
64	3840	12288

b) $n = 12$