Analysis III – Übungsserie 4

Clemens Anschütz – 146390
Markus Pawellek – 144645

Übung: Mi 14 – 16

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene, sternförmige Menge. Sei $p \in U$ das Zentrum von U.

$\overset{(\text{Def})}{\Longrightarrow}$ für alle $x \in U$ ist $\{ tx + (1-t)p \mid 0 \leq t \leq 1 \} \subset U$
(Verbindungsstrecke von x nach p liegt in U)

Sei nun $\gamma : [a,b] \to U$ eine beliebig geschlossene Kurve und $\gamma^* : [a,b] \to U$, $\gamma^*(t) = p$ gegeben.

$\Longrightarrow$ $\gamma^*(a) = \gamma^*(b)$ $\longrightarrow$ γ^* geschlossen Kurve

$\Longrightarrow$ für alle $t \in [a,b]$ ist Verbindungsstrecke von $\gamma(t)$ nach $p = \gamma^*(t)$ in U
$\Longrightarrow$ folgende Definition möglich:

Sei $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ mit $H(t,s) = sp + (1-s)\gamma(t) \in U$

$\Longrightarrow$ H stetig, da auch γ stetig sein muss (Kurve)

$\Longrightarrow$ $H(t,0) = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$
$\Longrightarrow$ $H(t,1) = p = \gamma^*(t)$ für alle $t \in [a,b]$

$\Longrightarrow$ $H(a,s) = sp + (1-s)\gamma(a) = sp + (1-s)\gamma(b) = H(b,s)$
für alle $s \in [0,1]$

$\Longrightarrow$ γ und $\gamma^* = p$ sind frei homotop zueinander

$\Longrightarrow$ jede geschlossen Kurve in U ist frei homotop zur Kurve γ^*, deren Bild nur das Zentrum p enthält

$\overset{(\text{Def})}{\Longrightarrow}$ U ist einfach zusammenhängend. $\square$

Aufgabe 2

Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $F : U \to U$ mit $F(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}(-y, x)$.

$\Longrightarrow$ F stetig diffbar und $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{-(x^2+y^2) - (-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$

$\overset{(U \text{ offen})}{\Longrightarrow}$ F ist lokales Gradientenfeld auf U.

Annahme: U ist einfach zusammenhängend.

$\Rightarrow$ F ist ein Gradientenfeld $\Rightarrow$ für jede geschlossene Kurve γ in U gilt: $\int_\gamma F\, d\gamma = 0$

Sei nun $\gamma: [0, 2\pi] \to U$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Dann gilt: $(\gamma(0) = \gamma(2\pi))$

$$\int_\gamma F\, d\gamma = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0 \; \text{↯}$$

$\Rightarrow$ für γ ist Kurvenintegral nicht Null $\Rightarrow$ U kann nicht einfach zusammenhängend sein

$\square$

Aufgabe 3

Sei $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

a) Sei $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(p) := \left(\frac{\partial u}{\partial y}(p), -\frac{\partial u}{\partial x}(p) \right)$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend

$$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ F ist ein Gradientenfeld

$\square$

b) Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Potential zu F mit $F = \nabla\varphi$.

$$\Rightarrow F_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \overset{\text{(Schwarz}}{\underset{u \text{ 2x stetig diffbar)}}{=}} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$\square$

c) Sei nun $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $G(p) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(p), -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(p) \right)$

Sei $\vartheta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Potential von G mit $\vartheta = \nabla G$.

$$\Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = G_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_y = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = G_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -F_x = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ Wahl von ϑ: $\vartheta = -u$ erfüllt $(*)$ und $(**)$

$\Rightarrow$ $\vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vartheta(x) = -u(x)$ ist ein Potential von G $\square$

Aufgabe 4

Sei R ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf R.

Nicht weiter bearbeitet!