Analysis II – Übung 2

Aufgabe 4

Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar.

$z: \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ durch Induktion:

$n=0: \quad (fg)^{(0)} = (fg) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung erfüllt

$n \Rightarrow n+1$:

$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})^{(1)} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right]'$ (Anwendung Induk.-Beh.)

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

(für Ableitung wurde jeder Summand einzeln abgeleitet. danach wurde für jeden die Produktregel angewendet $\Rightarrow$ Bildung von zwei Summen)

$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$

(Indexverschiebung beim linken Summenzeichen)

$$= \underbrace{\binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)}}_{\text{n+1. Glied im linken Summenzeichen}} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right)}_{\text{Zusammenfassung beider Summen von } k=1 \text{ bis } n} + \underbrace{\binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}}_{\text{0. Glied im rechten Summenzeich.}}$$

$(*)$

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$\overset{(*)}{=} \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$(**)$

$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$

$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$ (Zusammenfassung aller Summanden)

Dies war gerade für die Induktion zu zeigen.
$\Rightarrow$ nach Induktion ist Aussage erfüllt. $\square$

Sei nun $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 e^x$ k-mal diffbar.
Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x$. Dann gilt:

$h(x) = f(x) g(x) \Rightarrow h^{(1999)} = \sum_{k=0}^{1999} \binom{1999}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

$= \sum_{k=0}^{1999} \binom{1999}{k} (x^3)^{(k)} (e^x)^{(n-k)}$

$(e^x)' = e^x$

$(x^3)^{(4)} = 0$

$\Rightarrow (x^3)^{(n)} = 0$ für $n \geq 4$

$$= x^3 e^x + 1999 \cdot 3x^2 e^x + \frac{1999 \cdot 1998}{2} \cdot 6x e^x + \frac{1999 \cdot 1998 \cdot 1997}{6} 6e^x$$

(Rest der Terme wird Null)

$$= e^x [x^3 + 3 \cdot 1999 x^2 + 3 \cdot 1999 \cdot 1998 x + 1999 \cdot 1998 \cdot 1997]$$

<u>Zusatzaufgabe:</u>

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ f ist unstetig in allen $x \neq 0$

$\Rightarrow$ f ist diffbar in $x = 0$

$x \neq 0$: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x \to 0, \; x \to 0$

$x \neq 0$ $x \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{0}{x} \to 0, \; x \to 0$