Analysis für Physiker

Prof. Dr. Daniel Lenz

Friedrich-Schiller-Universität Jena

21. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Analysis 1

0. Vorbemerkungen

Wir setzen Grundlagen der Mengenlehre und eine gewisse Vertrautheit mit den Mengen $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) und $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) voraus und erinnern in diesem Abschnitt nur an einige Begriffe und Notationen.

Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von einer Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift, die jedem Element von X ein Element von Y zuordnet. Wir schreiben $f: X \to Y$ oder $X \to Y$, $x \mapsto f(x)$. Es heißt X der *Definitionsbereich* von f und Y der *Wertebereich* von f und $f(X)$ das *Bild* von f.

Zu zwei Objekten a, b bilden wir das *geordnete Paar* (a, b). Damit können wir aus zwei Mengen X, Y das *kartesische Produkt*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

bilden (siehe Abbildung 0.1).

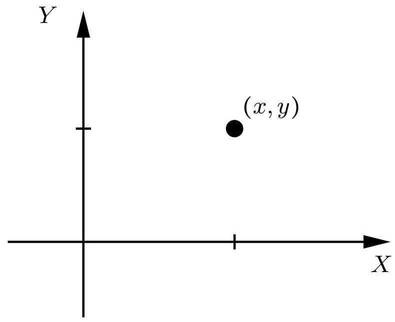


Abbildung 0.1.: Das geordnete Paar (x, y) im kartesischen Produkt aus X und Y.

Eine Abbildung $\star: X \times X \to X$ wird (oft) *Verknüpfung* auf X genannt. Man schreibt dann $x \star y$ statt $\star(x, y)$.

1. Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ als bekannt voraus und diskutieren nur ihre wesentliche strukturelle Eigenschaft, das Induktionsprinzip.

Die charakteristische Struktur der natürlichen Zahlen ist folgende:

$$1 \overset{+1}{\rightsquigarrow} 2 \overset{+1}{\rightsquigarrow} 3 \overset{+1}{\rightsquigarrow} 4 \overset{+1}{\rightsquigarrow} 5 \overset{+1}{\rightsquigarrow} \ldots$$

- Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n + 1$.
- Bildet man ausgehend von 1 sukzessive den Nachfolger, so erhält man alle natürlichen Zahlen.

Eine präzise Fassung erfolgt durch das *Prinzip der vollständigen Induktion*:

Prinzip der vollständigen Induktion

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben, sodass gilt:

- $A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang),
- aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$ (Induktionsschluss),

dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel: Die Summe S_n der ersten n natürlichen Zahlen ist

$$S_n = \frac{1}{2} n(n + 1).$$

Beweis:

$A(1):$	$S_1 = \frac{1}{2} 2 = 1$ wahr
$A(n)$ impliziert $A(n + 1):$	$S_{n+1} = (n + 1) + S_n = \ldots = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$

$\square$

Das Induktionsprinzip erlaubt auch die rekursive Definition von Funktionen:

Sei X eine Menge. Um eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$ zu definieren, reicht es, $f(1)$ festzulegen und eine Vorschrift anzugeben, wie $f(n+1)$ aus $f(1), \ldots, f(n)$ gewonnen werden kann.

Beispiele: a) $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$ ist definiert durch $1! = 1$, $(n+1)! = (n+1)n!$

b) $a \in \mathbb{N}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto a^n$ ist definiert durch $a^1 = a_1$, $a^{n+1} := a \cdot a^n$

Notation: Statt „$A(1)$ wahr" und „$A(n)$ impliziert $A(n+1)$" schreibt man „$n = 1$" und „$n \Rightarrow n+1$"

Beispiel: Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist 2^n.

<u>$n = 1$:</u> Es gibt $2 = 2^1$ Teilmengen, nämlich die Menge selbst und die leere Menge.

<u>$n \Rightarrow n+1$:</u> Sei eine $(n+1)$-elementige Menge gegeben und sei p ein Element der Menge, dann gilt:

→ Es gibt 2^n Teilmengen, die p nicht enthalten.

→ Es gibt genauso viele Teilmengen, die p enthalten, wie Teilmengen, die p nicht enthalten.

→ $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Kontrollfragen

1) Was besagt das Induktionsprinzip?

2) Wie begründen Sie, dass es sich bei dem folgenden Beispiel nicht um eine vollständige Induktion im mathematischen Sinne handelt:

   Das erste Tier in einem Zoo ist ein Elefant. (Induktionsanfang)
   Das zweite Tier im Zoo ist ebenfalls ein Elefant. (Induktionsschluss)
   Also sind alle Tiere im Zoo Elefanten.

2. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind charakterisiert durch:

- Körperaxiome (Arithmetik)
- Anordnungsaxiome
- Vollständigkeitsaxiome (Existenz von Suprema/Infima)

Die reellen Zahlen mit Addition und Multiplikation sind ein Körper:

2.1 Definition (Körper)**:** Eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$+$: $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto x + y$ (Addition)

$\cdot$: $K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ (Multiplikation)

heißt Körper, wenn folgende Axiome gelten:

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in K$. (Assoziativgesetz)

(A2) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in K$. (Kommutativgesetz)

(A3) Es gibt ein Element $0 \in K$ mit der Eigenschaft $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in K$. (Existenz des neutralen Elementes)

(A4) Zu jedem $x \in K$ existiert ein $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0$. (Existenz des Inversen)

(M1) $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$ für alle $x, y, z \in K$. (Assoziativgesetz)

(M2) $xy = yx$ für alle $x, y \in K$. (Kommutativgesetz)

(M3) Es gibt ein Element $1 \in K$ mit der Eigenschaft $1 \neq 0$ und $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$. (Existenz des neutralen Elementes)

(M4) Zu jedem $x \in K$ mit $x \neq 0$ existiert ein $x^{-1} \in K$ mit $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 0$. (Existenz des Inversen)

(D1) $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in K$. (Distributivgesetz)

Bemerkung: Man kann diese Definition auch anders fassen:

$(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0. $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1. Es gilt ein Distributivgesetz.

Notation:
- $x - y$ statt $x + (-y)$
- xy statt $x \cdot y$
- $\frac{x}{y}$ statt xy^{-1}

Beispiel: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der „üblichen“ Addition und Multiplikation sind Körper.

Beachte: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann gilt:

a) $y - x$ ist die eindeutige Lösung z einer Gleichung $x + z = y$

b) $\frac{x}{y}$ ist die eindeutige Lösung z von $x = zy$

c) $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in K$

d) $(-1)x = -x$ für alle $x \in K$

e) $(-x)(-y) = xy$ für alle $x, y \in K$

Beweis: c) $0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \overset{-(0 \cdot x)}{\Longrightarrow} 0 = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x$

d) $(-1)x + x = (-1)x + 1 \cdot x = ((-1) + 1)x = 0 \cdot x = 0$

$\square$

Notation: Statt $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ wird $\sum_{k=1}^{n} a_k$ geschrieben.

In jedem Körper gelten folgende Aussagen:

2.2 Proposition (Geometrische Summenformel)**:** Sei K ein Körper und $x, y \in K$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \neq y$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-1-k}.$$

Insbesondere gilt für $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis: Nach Durchmultiplizieren der ersten Gleichung mit $(x - y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ \text{(umbenennen } k \mapsto k-1) \qquad &= \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n - y^n. \end{aligned}$$

Dies beweist die erste Gleichheit in der ersten Gleichung. Die zweite Gleichheit folgt durch Vertauschen von x und y.

Zu „Insbesondere“: Wir wählen $x = 1$, $y = q \neq 1$ und $n + 1$ statt n. □

2.3 Proposition (Binomischer Satz)**:** Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in K$, dann gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

wobei $\binom{n}{k}$:=Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Diese Zahlen $\binom{n}{k}$ erfüllen die Rekursion:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Beweis: Die zweite Gleichung folgt durch Induktion:

<u>$n = 1$:</u> Klar.

<u>$n \Rightarrow n+1$:</u> Sei eine $(n+1)$-elementige Menge gegeben. Sei p ein Element dieser Menge. Dann gibt es $\binom{n}{k-1}$ k-elementige Teilmengen, die p enthalten (p und $(k-1)$ weitere Elemente). Weiterhin gibt es $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen, die p nicht enthalten.

Nun folgt die erste Gleichung durch Induktion:

<u>$n = 1$:</u> LHS $= x + y$, RHS $= 1 \cdot x^1 y^0 + 1 \cdot x^0 y^1 = x + y$

<u>$n \Rightarrow n+1$:</u> Die rechte Rechnung liefert:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
(A(n)) \qquad &= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n-k+1} + \binom{n}{0} x^0 y^{n-0+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: a) Man kann den Binomischen Satz durch „Ausmultiplizieren“ deuten:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\dots(x+y)}_{n\text{-mal}} \curvearrowright \sum \binom{n}{\alpha} x^\alpha y^{n-\alpha}$$

b)
$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

c)
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(Beweis mit obiger Rekursionsformel und Induktion)

Die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen:

2.4 Definition (Ordnung)**:** Ein Körper K zusammen mit einer ausgezeichneten Menge K^+, den positiven Elementen, heißt *angeordnet*, wenn die folgenden Eigenschaften (Anordnungsaxiome) gelten:

(O1) $K = K^+ \cup \{0\} \cup \{-x : x \in K^+\}$, wobei die Vereinigung disjunkt ist.

(O2) $x, y \in K^+ \Rightarrow x + y \in K^+$

(O3) $x, y \in K^+ \Rightarrow xy \in K^+$

Beispiel (für angeordnete Körper)**:** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Bemerkung: a) Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lassen sich nicht anordnen.

Beweis: Übung. ($i^2 = -1 \ldots$)

b) Der Körper $\mathbb{F}_2$ mit $\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ und $\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ lässt sich nicht anordnen.

Notation: Sei K ein angeordneter Körper. Dann schreiben wir

- $x > y$ oder $y < x$, falls $x - y \in K^+$.
- $x \geq y$ oder $y \leq x$, falls $x - y \in K^+ \cup \{0\}$.

2.5 Proposition (Charakterisierung des Inversen und des Quadrats)**:** Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt:

a) $x \in K^+ \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in K^+$,

b) $x^2 \in K^+$ für $x \neq 0$, insbesondere gilt $1 > 0$.

Beweis: a) „$\Rightarrow$“ $x \in K^+ \Rightarrow x \neq 0$

$$\text{Angenommen: } \frac{1}{x} \notin K^+ \Rightarrow -\frac{1}{x} \in K^+$$
$$\Rightarrow -1 = x\left(-\frac{1}{x}\right) \overset{(O3)}{\in} K^+$$
$$\Rightarrow 1 = \underbrace{(-1)}_{\in K^+}\underbrace{(-1)}_{\in K^+} \overset{(O3)}{\in} K^+$$

Das steht im Widerspruch zueinander, da 1 und ihr entgegengesetztes in K^+ enthalten sind (Mengen disjunkt).

b) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 = xx = (-x)(-x) \in K^+$, da entweder $x \in K^+$ oder $-x \in K^+$.

Zu „Insbesondere“: $1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0$

□

Für einen angeordneten Körper gelten folgende Rechenregeln:

2.6 Proposition (Rechenregeln für angeordnete Körper)**:** Sei K ein angeordneter Körper, dann gilt:

a) $x < y \Leftrightarrow -x > -y$ und insbesondere: $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$,

b) $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$,

c) $x < y,\ x' < y' \Rightarrow x + x' < y + y'$,

d) $a < b, x > 0 \Leftrightarrow ax < bx$,

e) $a < b, x < 0 \Leftrightarrow ax > bx$,

f) $0 < a < b,\ 0 < x < y \Rightarrow ax < by$,

g) $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch einige Aussagen:

d) $bx - ax = (b - a)x \in K^+$

e) $a < b \Rightarrow b - a \in K^+,\ x < 0 \Rightarrow -x \in K^+$
$\Rightarrow (b - a)(-x) \in K^+$
$\Rightarrow ax - bx \in K^+$
$\Rightarrow ax > bx$

g) $0 < x < y \ \Rightarrow \frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0$
„Durchmultiplizieren“ von $0 < x < y$ mit $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} > 0$ liefert nun die Behauptung.

□

Für alle angeordneten Körper gilt außerdem die Bernoulli Ungleichung:

2.7 Proposition (Bernoulli Ungleichung)**:** Sei K ein angeordneter Körper, dann gilt für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis: Induktion nach n:

$\underline{n = 1:}$ LHS $= 1 + x$, RHS $= 1 + x$

$\underline{n \Rightarrow n + 1:}$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + x + nx + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage. □

Bemerkung: a) Für $x \geq 0$ folgt das aus dem binomischen Satz (Proposition 2.3).

b) Frage: Was gilt für $x \leq -1$?

2.8 Definition (Betrag)**:** In einem angeordneten Körper kann man den *Betrag* definieren durch

$$|\cdot| : K \to K^+ \cup \{0\},\ x \mapsto |x| := \begin{cases} x: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -x: & x < 0 \end{cases}.$$

Der Betrag beschreibt eine Art Länge. Das Bilden des Betrags ist in gewisser Weise mit Addition und Multiplikation verträglich:

2.9 Proposition (Eigenschaften des Betrags und die Dreiecksungleichung)**:** Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y, z \in K$

$$|xy| = |x||y|$$

und

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

also insbesondere

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \qquad \text{(2. Dreiecksungleichung).}$$

Für $x \neq 0$ gilt weiterhin

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Beweis:

- $|xy| = |x||y|$ folgt durch Fallunterscheidung ($x \geq 0,\ x < 0,\ y \leq 0,\ y > 0$)
- Für $|x+y| \leq |x| + |y|$ genügt es zu zeigen, dass $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x+y) \leq |x| + |y|$. Das folgt aus $x, -x \leq |x| \quad y, -y \leq |y|$ durch Addition.
- Die 2. Dreiecksungleichung folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|x| = |x - y + y| \overset{\triangle - Ugl.}{\leq} |x - y| + |y|.$$

Analoges gilt für $|y| \leq |x - y| + |x|$. Damit gilt

$$\left.\begin{matrix} |x|-|y| \leq |x-y| \\ |y|-|x| \leq |y-x| \end{matrix}\right\} \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- Die letzte Aussage ist klar für $x > 0$. Für $x < 0$ gilt

$$0 < \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = \left|\frac{1}{x}\right|.$$

Damit folgt die Aussage auch für $x < 0$.

□

Vollständigkeitsaxiome der reellen Zahlen:

2.10 Definition (Beschränkte Menge)**:** Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$ nicht leer.

a) Es heißt $S \in K$ eine $\substack{\text{obere} \\ \text{untere}}$ Schranke von M, wenn gilt $\substack{m \leq S \\ m \geq S}$ für alle $m \in M$.

b) Hat M eine $\substack{\text{obere} \\ \text{untere}}$ Schranke, so heißt M nach $\substack{\text{oben} \\ \text{unten}}$ beschränkt.

c) Hat M eine obere und eine untere Schranke, so heißt M beschränkt.

In gewissen Fällen existieren kleinste obere beziehungsweise größte untere Schranken:

2.11 Definition (Supremum und Infimum)**:** Sei K ein angeordneter Körper und M eine nach $\substack{\text{oben} \\ \text{unten}}$ beschränkte Menge.

- Eine $\substack{\text{obere} \\ \text{untere}}$ Schranke S von M heißt davon $\substack{\text{Supremum} \\ \text{Infimum}}$, wenn für jede weitere $\substack{\text{obere} \\ \text{untere}}$ Schranke S' gilt $\substack{S \leq S' \\ S \geq S'}$.
- Ist S ein $\substack{\text{Supremum} \\ \text{Infimum}}$ von M mit $S \in M$, so heißt S $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$.

Beachte: a) Das Supremum bzw. Infimum einer beschränkten Menge muss nicht existieren:

Beispiel (Übung)**:** $K = \mathbb{Q}$ rationale Zahlen, $M := \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \le 2\}$. Es hat M ein Supremum in $\mathbb{R}$. Dies ist $\sqrt{2}$ und gehört nicht zu $\mathbb{Q}$.

b) Wenn ein Supremum oder Infimum existiert, so ist es eindeutig.

Beweis (nur für Supremum): Seien S,S' Suprema von M. Dann gilt sowohl $S \le S'$ (S Supremum, S' obere Schranke), als auch $S' \le S$ (S' Supremum, S obere Schranke). Also ist $S = S'$. □

c) Das Supremum S einer Menge M ist dadurch charakterisiert, dass gilt:

- $m \le S$ für alle $m \in M$ (S Schranke)
- Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $S - \varepsilon < m$ (Jede kleinere Zahl als S ist nicht obere Schranke).

Entsprechendes gilt für das Infimum!

2.12 Definition (Ordnungsvollständigkeit)**:** Ein angeordneter Körper K heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt und jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.

Bemerkung:

- Grob gesprochen bedeutet Ordnungsvollständigkeit, dass der Körper keine „Lücken“ hat.
- Besitzt in einem angeordneten Körper jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum, so besitzt auch jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum, da $\inf M = -\sup(-M)$.

2.13 Theorem (Charakterisierung von $\mathbb{R}$)**:** Es ist $\mathbb{R}$ der eindeutige angeordnete, ordnungsvollständige Körper.

Beweis: Nicht hier.

2.14 Folgerung (Archimedisches Axiom)**:** In $\mathbb{R}$ gilt das Archimedische Axiom: Für beliebige $x, y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < ny$.

Anders gesagt: Für beliebige $x, y > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{n} < y$.

Beweis: Es reicht die erste Aussage zu zeigen.

Angenommen die Aussage gilt nicht. Dann ist $M := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt (durch x). Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ hat M ein Supremum S. Insbesondere gälte $(n+1)y \le S$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $ny \le S - y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $S - y$ obere Schranke von M. Dann wäre aber S nicht mehr die kleinste obere Schranke. ↯ □

2.15 Folgerung ($\frac{1}{n}$ ist Nullfolge)**:** Sei $\varepsilon > 0$ aus $\mathbb{R}$ beliebig, dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Beweis: Nach voriger Folgerung existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ $(x = 1,\ y = \varepsilon)$.
Für $0 < n_\varepsilon \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ □

2.16 Folgerung ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)**:** Sei $\varepsilon < 0$ beliebig, dann existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $\left|x - \frac{n}{m}\right| < \varepsilon$.

Beweis: Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$ (vorige Folgerung). Betrachte nur das $\frac{1}{m}$-Gitter $M = \{\frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z}\}$. □

2.17 Satz (Existenz k-ter Wurzeln)**:** Sei $k \in \mathbb{N}$, dann existiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ ein eindeutiges $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ mit $y^k = x$. Man definiert $\sqrt[k]{x} := y$. Es gilt $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$ falls $x < y$.

Beweis: Der Fall $x = 0$ ist klar. Wir betrachten nur noch $x > 0$.

<u>Eindeutigkeit:</u> Sei $y^k = \widetilde{y}^k$. Ist $y \neq \widetilde{y}$, so können wir ohne Einschränkung annehmen $y < \widetilde{y}$. Das führt auf $y^k < \widetilde{y}^k$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

<u>Existenz:</u> Sei $M := \{z \geq 0 : z^k \leq x\}$. Dann ist M beschränkt (Falls $x \leq 1$ ist 1 eine Schranke. Falls $x > 1$ ist x eine Schranke.) Außerdem ist M nicht leer $(0 \in M)$. Damit hat M ein Supremum S. Wir zeigen $S^k = x$, indem wir $S^k < x$ und $S^k > x$ zum Widerspruch führen.

Angenommen $S^k > x$: Wir zeigen zunächst, dass dann auch $(S - \varepsilon)^k > x$ für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$. (Stetigkeitseigenschaft).

Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon \leq \min\left\{\frac{S}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\frac{S^k - x}{\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S^l}\right\}.$$

Dann gilt:

$$\varepsilon < S \text{ und } 0 < \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S^l(\varepsilon)^{k-l} \leq \varepsilon\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S^l \leq \frac{1}{2}S^k - x < S^k - x.$$

Nun können wir rechnen:

$$\begin{aligned}
(S - \varepsilon)^k &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}S^l(-\varepsilon)^{k-l} \\
&= S^k + \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S^l(-\varepsilon)^{k-l} \\
&\geq S^k - \sum_{l=0}^{k-1}\binom{k}{l}S^l\varepsilon^{k-l} \\
&> S^k - (S^k - x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Damit gilt also $(S - \varepsilon)^k > x \geq \alpha^k$ für alle $\alpha \in M$. Es ist somit $(S - \varepsilon) > \alpha$ für alle $\alpha \in M$ (sonst: $0 < S - \varepsilon \leq \alpha \Longrightarrow (S - \varepsilon)^k \leq \alpha^k \leq x$ ↯), $S - \varepsilon$ ist obere Schranke für M und $S - \varepsilon \leq S$. Das ist ein Widerspruch, da S ein Supremum von M ist.

Angenommen $S^k < x$: Ähnlich wie im ersten Fall zeigt man nun, dass dann auch $(S + \varepsilon)^k < x$ für genügend kleine $\varepsilon > 0$. Das steht im Widerspruch dazu, dass S eine obere Schranke ist.

Hier sind die Details: Wir definieren $D := x - S^k > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ mit

$$0 < \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} < S^k - x.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(S+\varepsilon)^k &= \sum_{l=0}^{k} (S+\varepsilon)^l S^{k-l} \\
&= S^k + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} \\
&< S^k + D \\
&= x.
\end{aligned}$$

<u>Monotonie:</u> Sei $x < y$. Nach der gezeigten Eindeutigkeit ist $\sqrt[k]{x} \neq \sqrt[k]{y}$. Wäre $\sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y}$, so folgte $x = \left(\sqrt[k]{x}\right)^k > \left(\sqrt[k]{y}\right)^k = y$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

2.18 Folgerung (Potenzgesetze)**:** Für rationale Zahlen $a = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ kann man dann definieren

$$\begin{aligned}
x^a &:= (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m \\
x^{-a} &:= \frac{1}{x^a},
\end{aligned}$$

für $x > 0$. Das ist wohldefiniert und man kann folgende Rechenregeln zeigen:

$$\begin{aligned}
x^b x^c &= x^{b+c} \\
(x^b)^c &= x^{bc} \\
x^c y^c &= (xy)^c,
\end{aligned}$$

für $x, y \geq 0$ und b, c rational.

Kontrollfragen

1) Ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Körper? Begründen Sie anhand der Definition für Körper!
2) Wie lautet der Binomische Satz?
3) Beweisen Sie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mit Hilfe der Rekursionsformel aus Präposition 2.3.
4) Warum handelt es sich bei den komplexen Zahlen nicht um einen angeordneten Körper?
5) Nennen Sie die Bernoulli Ungleichung!
6) Was ist der Unterschied zwischen einer *oberen Schranke* und einem *Supremum*?
7) Wann ist ein Körper ordnungsvollständig?

3. Konvergenz und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ heißt dann Folge (in X).

Notation: Man schreibt dann auch (x_n) oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_n$.

Beispiel: (a) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto c$, also $x_n = c$ für alle n. Dann heißt (x_n) die konstante Folge mit Wert c.

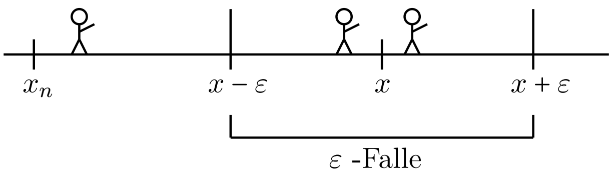
(b) $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto (-1)^n$, also $x_n = (-1)^n$.

(c) $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$, also $x_n = \frac{1}{n}$.

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Analysis, dem Begriff der *Konvergenz*.

Idee: Die Folge (x_n) konvergiert gegen den Wert x, wenn für alle genügend großen n die Zahl x_n der Zahl x beliebig nahe ist: Es geht also um das Verhalten der Folge im unendlichen.

3.1 Definition (Konvergenz einer Folge)**:** Die Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen x, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$. Eine Folge, die nicht gegen ein x konvergiert heißt divergent.

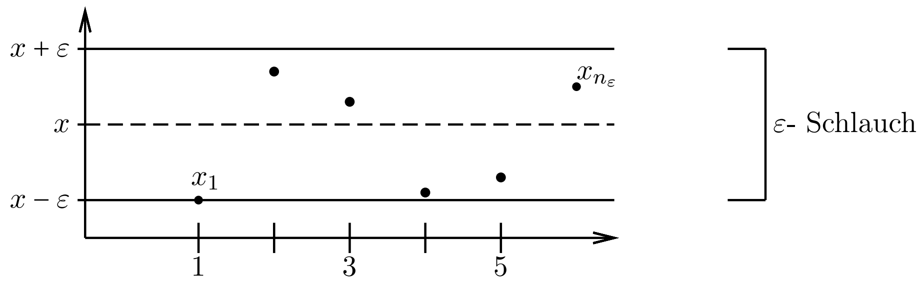


Beachte: Eine Folge (x_n) kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren (d.h. der Grenzwert ist eindeutig, wenn er existiert).

Beweis: Es konvergiere (x_n) gegen x und gegen y. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also n_x mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_x$, und es gibt n_y mit $|y - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_y$. Mit $n \geq n_x, n_y$ gilt dann also

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq \underbrace{|x - x_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|x_n - y|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|x - y| = 0$, also $x = y$. □



Notation: Konvergiert (x_n) gegen x, so schreibt man auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ oder } x_n \longrightarrow x, n \longrightarrow \infty$$

und nennt x *den* Grenzwert der Folge (x_n).

In Quantoren:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon : |x - x_n| < \varepsilon.$$

Hier steht „$\forall \diamond$“ für „Für alle $\diamond$ gilt:“ und „$\exists \clubsuit$“ für „Es existiert $\clubsuit$ mit der Eigenschaft, dass/sodass“.

Beachte (Konvergenz entscheidet sich ganz weit draußen)*:* $x_n \to x$. Sei $N > 0$ und (y_n) Folge mit $x_n = y_n$ für $n \geq N$. Dann gilt $y_n \to x$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon, N$ gilt also $|y_n - x| = |x_n - x| < \varepsilon$. □

Wir geben jetzt noch eine leichte Umformulierung der Definition von Konvergenz. Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ sei die ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ von x gegeben durch

$$U_\varepsilon(x) := \{z : |z - x| < \varepsilon\}.$$

3.2 Proposition (Äquivalenzen der Konvergenz einer Folge)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) (x_n) konvergiert gegen x

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $x_n \in U_\varepsilon(x)$.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(x)\}$ endlich (d.h. für jedes feste $\varepsilon > 0$ liegen bis auf endlich viele Ausnahmen alle x_N in der ε-Umgebung von x).

Beweis: Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar.

$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$: Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist genau dann endlich, wenn ab einem gewissen n_0 keine natürliche Zahl mehr dazu gehört. □

Bevor wir uns der Existenz konvergenter Folgen widmen, sammeln wir hier schon einmal ein paar nützliche Eigenschaften.

3.3 Proposition (Konvergenz einer Folge impliziert Beschränktheit)**:** Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}$ und konvergent, dann ist (x_n) auch beschränkt, dass heißt es existiert ein $C > 0$ mit $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $x := \lim x_n$. Für $n \geq n_1$ gilt $|x - x_n| < 1$, also

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Damit folgt

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x|\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung: Beschränktheit einer Folge hängt nicht von den ersten endlich vielen Gliedern ab.

Die folgenden Eigenschaften zeigen insbesondere, dass Konvergenz mit den Operationen $+$, $\cdot$, $:$ und $|\cdot|$ verträglich ist.

3.4 Proposition (Rechenregeln)**:** Seien (x_n) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$, dann gilt:

(a) $x_n \to x,\ y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$.

(b) $x_n \to x,\ y_n \to y \Longrightarrow x_n y_n \to xy$. Insbesondere $\alpha x_n \to \alpha x$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $x_n \to x,\ x \neq 0 \Longrightarrow x_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ und $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$.

(d) $x_n \to x \Longrightarrow |x_n| \to |x|$.

(e) $x_n \to x,\ x_n \leq c \ /\ x_n \geq c \Longrightarrow x \leq c \ /\ x \geq c$.

Beweis: Wir zeigen nur (b). Die anderen Beweise sind ähnlich (und einfacher). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wähle $C > 0$ mit $|x_n| \leq C$ für alle n. Wegen $x_n \to x$ existiert $n_x \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|+1}$.Wegen $y_n \to y$ existiert $n_y \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Damit gilt für $n \geq n_x, n_y$ also

$$
\begin{aligned}
|x_n y_n - x_y| = |x_n y_n \underbrace{-x_n y + x_n y}_{0} - x_y| &\leq \overbrace{|x_n y_n - x_n y| + |x_n y - x_y|}^{\triangle-Ungl.} \\
&\leq \underbrace{|x_n| \cdot |y_n - y|}_{< \frac{C\varepsilon}{2C}} + \underbrace{|y| \cdot |x_n - x|}_{< \frac{|y|\varepsilon}{2(|y|+1)}} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung: $x_n < c$ $x_n \to x$ impliziert nicht $x < c$. Beispiel $x_n = 1 - 1/n$. Dann $x_n < 1$ aber $x = \lim x_n = 1$

Gibt es denn konvergente Folgen?

Wir kennen schon explizit eine gegen 0 konvergente Folge (Nullfolge).

3.5 Proposition (Nullfolge $\frac{1}{n}$)**:** Die Folge $(1/n)$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Archimedisches Axiom. □

Mit dieser Folge und dem folgenden Satz können wir Konvergenz einiger Folgen untersuchen.

3.6 Satz (Sandwichsatz)**:** Seien $L \in \mathbb{R}$ und konvergente Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{R}$ mit $\lim x_n = L = \lim y_n$ gegeben. Ist (z_n) eine weitere Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle n ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$, so konvergiert (z_n) ebenfalls gegen L.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen $L = \lim x_n$ gibt es ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq L - \varepsilon$ für alle $n \geq n_x$.

Wegen $L = \lim y_n$ gibt es ein $n_y \in \mathbb{N}$ mit $y_n \leq L + \varepsilon$ für alle $n \geq n_y$.

Für $n \geq n_x, n_y, n_0$ gilt dann also

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq L + \varepsilon$$

und damit

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiele: (a) Für jedes $a \neq 0$ konvergiert $(a \cdot \frac{1}{n})$ gegen 0. (Nullfolge).

Beweis: Archimedes oder Rechenregeln. □

(b) (Exponentielles Fallen) Sei $0 < q < 1$. Dann konvergiert $x_n = q^n$ gegen 0.

Beweis: $0 < q < 1$ impliziert $1/q = 1 + a$ mit $a > 0$. Bernoulli impliziert dann $(\frac{1}{q})^n \geq 1 + na$. und damit $0 < q^n \leq \frac{1}{na+1} \leq \frac{1}{an} = \frac{1}{a}\frac{1}{n}$. Nun Sandwichsatz und Beispiel (a). □

(c) Verallgemeinerung von (b) (Exponentielles Fallen schlägt polynomielles Wachsen): Sei $0 < q < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei $x_n = q^n n^k$. Dann gilt $x_n \to 0$, $n \to \infty$.

Beachte: $q^n \to 0$, aber $n^k \to \infty$ für $a > 1$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Beweis: $p := \sqrt[2k]{q} < 1$. (Plan: $q^n = p^{2kn} = p^{kn}p^{kn}$, also $q^n n^k = p^{kn}p^{kn}n^k = p^{kn}(p^{kn}n^k)$: erster Term gegen Null; zweiter Term beschränkt.)

Es gilt:

$$\frac{1}{p} = 1 + a,\ a > 0$$

$$\begin{aligned} &\overset{Bernoulli}{\Longrightarrow} \left(\frac{1}{p}\right)^n = (1+a)^n \geq 1 + na \\ &\Longrightarrow 0 < p^n \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} \\ &\Longrightarrow \underbrace{p^{nk} \leq \left(\frac{1}{na}\right)^k = \frac{1}{n^k}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^k}_{\clubsuit} \end{aligned}$$

Damit gilt also:

$$\begin{aligned} 0 \leq q^n n^k = p^{kn}(p^{kn}n^k) &\overset{\clubsuit}{\leq} p^{kn}\left(\frac{1}{na}\right)^k n^k \\ &= \underbrace{\underbrace{p^{kn}}_{\to 0\ nach\ (b)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^k}_{konstant}}_{\to 0, n\to\infty} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow q^n n^k \to 0$, wegen Sandwichsatz. □

(d) Sei $a > 1$ und $x_n = \sqrt[n]{a}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Beachte: Wettstreit zwischen $\sqrt[n]{a} \to 1$ und $n \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Beweis: Wegen $a > 1$ und $a = x_n^n$ gilt $x_n > 1$. Weiterhin $a = x_n^n = (1 + (x_n - 1))^n \geq 1 + n(x_n - 1)$, also

$\Longrightarrow \frac{(a-1)}{n} \geq x_n - 1 \geq 0$,

$\Longrightarrow \frac{(a-1)}{n} + 1 \geq x_n \geq 1$.

Damit folgt nach (a) und dem Sandwichsatz $x_n \to 1$. □

(e) Verallgemeinerung von (d)): Sei $x_n = \sqrt[n]{n}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Beweis: Es gilt $x_n^n = n$, also insbesondere $x_n > 1$. Mit binomischen Satz folgt

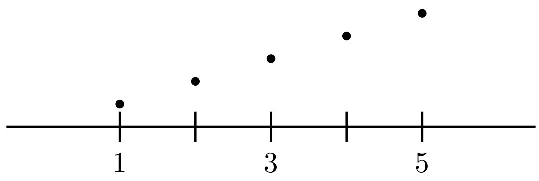
$$n = (1 + (x_n - 1))^n = \sum_{k=0}^{n} (n\ \ k) 1^{n-k}(x_n - 1)^k \geq (n\ 2)(x_n - 1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(x_n - 1)^2,$$

also $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n - 1 \geq 0$, also $1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Mit $\frac{2}{n-1} \to 0$, $n \to \infty$, folgt auch $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$, $n \to \infty$ (Denn: ...$a < \varepsilon^2 \Longrightarrow \sqrt{a} < \varepsilon$.) Daher folgt Behauptung aus dem Sandwichsatz. □

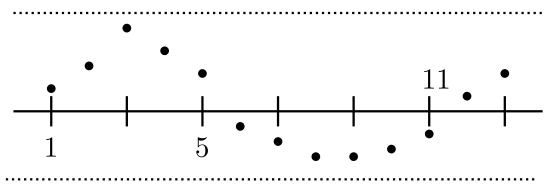
Neben der Konvergenz von $\left(\frac{1}{n}\right)$ gegen 0 haben wir in unseren Zugang zu $\mathbb{R}$ eine Methode zur Erzeugung konvergenter Folgen eingebaut:

Dazu noch zwei Begriffe:

3.7 Definition (Monotonie)**:** Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt monoton $\substack{\text{wachsend}\\ \text{fallend}}$ wenn $\substack{x_{n+1}\geq x_n\\ x_{n+1}\leq x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



Eine Folge (x_n) heißt nach $\substack{\text{oben}\\ \text{unten}}$ beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach $\substack{\text{oben}\\ \text{unten}}$ beschränkt ist.



3.8 Satz (Konvergenz monotoner beschränkter Folgen)**:** Jede monoton $\substack{\text{wachsende}\\ \text{fallende}}$ nach $\substack{\text{oben}\\ \text{unten}}$ beschränkte Folge konvergiert.

Beweis: Sei (x_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann existiert also aufgrund der Ordnungsvollständigkeit $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Definition des Supremum ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$S_\varepsilon - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon}.$$

Damit folgt also für alle $n \geq n_\varepsilon$ aufgrund der Monotonie

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq S$$

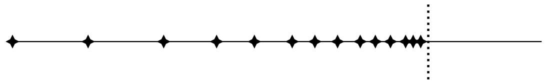
also

$$|S - x_n| < \varepsilon.$$

Der Fall monoton fallender nach unten beschränkter Folgen kann analog behandelt werden.

$\square$

Beispiele: (a) $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert.



Beachte: $1 + 1/n \to 0$, aber $a^n \to \infty$ für $a > 1$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Beweis: Wir zeigen, dass (x_n) wachsend und beschränkt ist. Die Bernoulli Ungleichung liefert

$$(1+1/n)^n(1-1/n)^n = (1-1/n^2)^n \geq (1-1/n)$$

also

$$x_n = (1+1/n)^n \geq \frac{(1-1/n)}{(1-1/n)^n} = \frac{1}{(1-1/n)^{n-1}} = (n/n-1)^{n-1} = (1+1/n-1)^{n-1} = x_{n-1}$$

für alle $n \geq 2$. Die Folge (x_n) ist also wachsend. Die Folge (x_n) ist beschränkt durch 3:

$$\begin{aligned}
x_n &= (1+1/n)^n \\
\text{(Binomialkoeffizient)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \frac{1}{n^k} \\
\text{(Umsortieren)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n\dots n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\
(k! \geq 2^{k-1}) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
\text{(Geometrische Summe)} &\leq 1 + \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \leq 3.
\end{aligned}$$

Damit existiert nach dem vorangehenden Satz der Grenzwert der Folge (x_n). Dieser Grenzwert wird e genannt. Später:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

□

Bemerkung: Die Zahl e spielt bei kontinuierlichen Wachstumsvorgängen eine Rolle, z.B. stetige Verzinsung: Kapital A Zinsatz 100 prozent. Dann hat man nach einem Jahr bei

- 0 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen : $A(1+1)$
- 1 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1+1/2)(1+1/2)$
- 2 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1+1/3)(1+1/3)(1+1/3)$
- etc.

(a') Sei $a > 0$. Sei $x_n := (1 + \frac{a}{n})^n$. Dann konvergiert (x_n). Wir nennen den Grenzwert $e(a)$. (Später: $e(a) = e^a$.)

Beweis: Wir zeigen Monotonie und Beschränktheit.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \\
(siehe (a)) \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \frac{a^k}{k!} \\
(l/r) \le (l+1)/(r+1) \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)} \frac{a^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)} \frac{a^k}{k!} \\
&= x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Beschränkteit:

Die Betrachtungen von (a) führen auf

$$x_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}.$$

Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $N \ge 2a$. Dann gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{N} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^k}{k!} = C + \frac{a^{N+1}}{N!} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^{k-N-1}}{(N+1)\cdots k} \le C + \frac{a^{N+1}}{N!} 3.$$

(Grundidee $a^k/k!$ ist schliesslich a/l mit l gross....) $\square$

(a") Für $b = -a <$ gilt $\lim(1 - \frac{a}{n})^n = \frac{1}{e(a)}$.

Beweis: Übung. Idee $(1 + a/n)^n (1 - a/n)^n = (1 - a^2/n^2)^n$ konvergiert gegen 1...

$\square$

(b) (Übung) Sei $a > 0$ beliebig. Definiere induktiv die Folge (x_n) durch $x_0 := c > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n + \frac{x_n}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right).$$

Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$.

Beweisskizze: Offenbar (?Induktion!) gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bernoulli Ungleichung liefert (Wie?):

$$x_{n+1}^k \ge a$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt nach Definition

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n}{k}\left(1 - \frac{a}{x_n^k}\right).$$

Damit ist also (Warum ?) $(x_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge (x_n) nach dem Satz gegen einen Grenzwert b. Dieser Grenzwert erfüllt (Wieso?)

$$b = \frac{1}{k}\left((k-1)b + \frac{a}{b^{k-1}}\right)$$

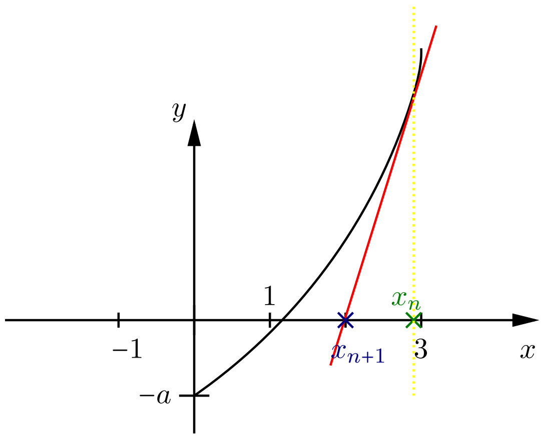
und damit auch $b^k = a$. □

Bemerkung: Die Betrachtungen in (b) sind ein Fall des sogenannten Newton Verfahren. Damit kann man (oft) eine Nullstelle einer Funktion f (hier $x^k - a$) auf folgende Art berechnen:

$n = 0$: Wähle einen (geeigneten) Wert x_0.

$n \Longrightarrow n+1$: Ist x_n schon bestimmt, so berechnet man x_{n+1} wie folgt: Bilde die Tangente an $(x, f(x))$ und berechne ihren Schnitt mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt ist dann x_{n+1}. Rechnung liefert die Rekursion

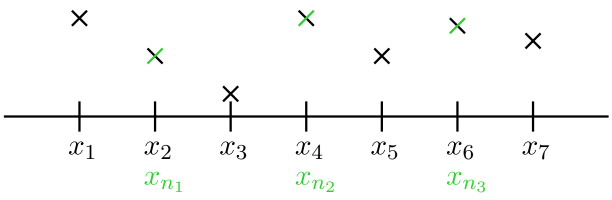
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Der Satz zur Konvergenz monotoner Folgen mag erst einmal speziell erscheinen, da keineswegs jede Folge monoton ist. Aber er hat weitreichende Konsequenzen. Um das näher zu erläutern, brauchen wir noch einen neuen Begriff:

3.9 Definition (Teilfolge)**:** Sei $(x_n)_n$ eine Folge und (n_k) eine strikt wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Dann heißt (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n).

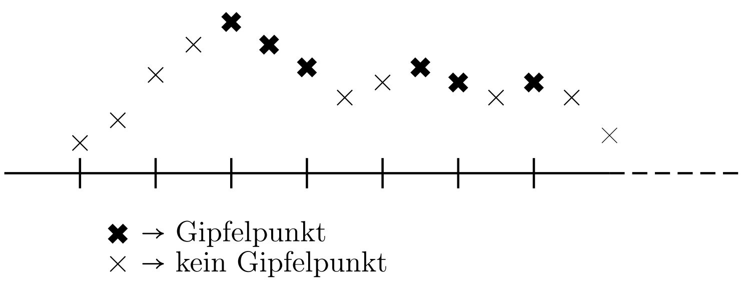
Bemerkung: Für den Begriff der Teilfolge ist nicht wichtig, dass die Werte der Folge in $\mathbb{R}$ liegen.



Beispiel: $x_n = (-1)^n$. Dann ist (x_{2n}) die konstante Folge 1 und (x_{2n+1}) die konstante Folge -1. Diese Teilfolgen sind konvergent also 'schöner' als die Ursprungsfolge. Das ist ein allgemeines Phanomen:

3.10 Lemma (Existenz monotoner Teilfolgen)**:** Jede Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $N \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt von (x_n), wenn gilt $x_N \geq x_n$ für alle $n \geq N$. Wir unterscheiden zwei Fälle.



Fall 1: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte. Sei $n_k :=$ k-ter Gipfelpunkt. Dann ist $n_1 < n_2 < \ldots n_k <$ die Folge von Gipfelpunkten. Daher gilt also

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und (x_{n_k}) ist eine monoton fallende Teilfolge.

Fall 2: Es gibt nur endlich viele Gipfelpunkte. Wir konstruieren induktiv streng monoton wachsende (n_k), so dass x_{n_k} monoton wachsend ist. S

$k = 1$: Wähle n_1 größer als jeden Gipfelpunkt (möglich, da nur endlich viele Gipfelpunkte).

$k \Longrightarrow k+1$: Seien $n_1 < n_2 \ldots < n_k$ schon konstruiert. Da n_k kein Gipfelpunkt ist ($n_k > n_1 > jeder\,Gipfelpunkt$), gibt es ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. □

3.11 Satz (Bolzano/Weierstraï¿½)**:** Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma enthält die Folge eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt (da die Ursprungsfolge beschränkt ist). Damit konvergiert die Teilfolge nach dem Satz über Konvergenz monotoner beschränkter Folgen. □

Wir werden nun Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ charakterisieren. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

3.12 Definition (Cauchy-Folge)**:** Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

<u>In Quantoren:</u>

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq n_\varepsilon \; : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Idee: Folgeglieder sind beliebig nahe aneinander.

3.13 Lemma (konvergente Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow$ Cauchy-Folge)**:** Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: (Eigentlich klar: Wenn Folgeglieder nahe am Grenzwert sind, sind sie auch nahe aneinander.)

Details: Sei $x_n \to x$, $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für $n \geq n_\varepsilon$. Also

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

fï¿½r $n, m \geq \varepsilon$. □

3.14 Lemma (lim Cauchy-Folge = lim konvergente Teilfolge)**:** Eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent (gegen den Grenzwert der Teilfolge).

Beweis: Sei (x_n) eine Cauchy Folge und sei (x_{n_k}) eine gegen x konvergente Teilfolge. Wir zeigen $\lim x_n = x$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ für alle $m, n \geq n_\varepsilon$ (da Cauchy Folge).

Es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2$ für $k \geq k_0$ (da Teilfolge konvergent).

Sei nun $k \geq k_0$ mit $n_k \geq n_\varepsilon$ gewählt. Dann gilt also für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zur angesprochenen Charakterisierung von Konvergenz.

3.15 Satz (Cauchy-Kriterium)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind ï¿½quivalent:

(i) (x_n) ist konvergent.

(ii) (x_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: Die Implikation $(i) \Longrightarrow (ii)$ haben wir in einem vorausgehenden Lemma gezeigt.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei (x_n) eine Cauchy-Folge. Dann ist (x_n) beschränkt (Wähle n_1 mit $|x_n - x_m| < 1$ für $n \geq n_1$. Dann gilt für $n \geq n_1$ also $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$....) Damit hat (x_n) also nach dem Satz von Bolzano/Weierstraï¿½ eine konvergente Teilfolge. Damit ist (x_n) nach dem vorigen Lemma konvergent. □

Bemerkung: (a) Es handelt sich um eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen. Die entscheidende Implikation ist $(ii) \Longrightarrow (i)$.

(b) Der Beweis beruht wesentlich auf der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$. Ein entsprechende Aussage für $\mathbb{Q}$ ist falsch (Bsp: Wähle Cauchy Folge in $\mathbb{Q}$, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.). Tatsächlich lässt sich aus dem Theorem und dem Archimedischen Axiom die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ herleiten.

(c) Beweisdiagramm: Konvergenz Monotone beschränkte Folgen + Jede Folge hat monotone Teilfolge $\Longrightarrow$ Bolzano/Weierstraï¿½

Bolzano/Weierstraï¿½ + Jede Cauchy-Folge beschränkt $\Longrightarrow$ Jede Cauchy Folge hat konvergente Teilfolge.

.. + Cauchy Folge mit konvergenter Teilfolge ist konvergent $\Longrightarrow$ Cauchy Folge ist konvergent.

Es ist sinnvoll, in gewissen Fällen auch $\pm\infty$ als Wert zuzulassen:

- Eine Folge (x_n) heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ / $-\infty$ falls, für alle $C > 0$ / $C < 0$ ein $n_C \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \geq C$ / $x_n \leq C$ für alle $n \geq n_C$. Wir schreiben dann $x_n \to \pm\infty$.
- Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nicht nach oben / unten beschränkt, so setzten wir $\sup M = \infty$ / $\inf M = -\infty$.

Beachte: (a) $\sup M = \infty \Longleftrightarrow$ exisitert Folge (x_n) in M mit $x_n \to \infty$. Entsprechend für Infimum.

(b) $x_n \to \infty \Longleftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$ und $x_n \geq 0$ für n groß

Beispiel: $\sqrt[n]{n!} \to \infty$, $n \to \infty$.

Beweis: $n! = 1(n-1)\cdots 1 \geq n/2 \cdot n/2 = (n/2)^{n/2}$. ($n/2$-Faktoren). Damit $\sqrt[n]{n}1 \geq \sqrt[n]{(n/2)^{n/2}} = (n/2)^{1/2} \to \infty$. □

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, das das Konzept der Teilfolge komplementiert.

3.16 Lemma (Häufungspunktbedingungen)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\}$ unendlich.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: $x_{n_k} \to x$

$\Rightarrow$ Für $\varepsilon > 0$ existiert ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$

$$\Rightarrow \underbrace{\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\}}_{\text{unendlich viele Elemente}} \supseteq \underbrace{\{n_k : k < k_0\}}_{\Leftarrow \text{ unendliche Menge}}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Induktiv konstruieren wir $n_k \in \mathbb{N}$ mit:

·) $n < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1}$ alle $k \in \mathbb{N}$

·) $|x_n - x| < \frac{1}{k}$

$k = 1$: Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < 1\}$ ist nicht leer nach (ii). Sei n_1 ein beliebiges Element dieser Menge.

$k = k + 1$: Seien $n_1, \ldots, n_k$ mit $\star$ schon konstruiert. Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{1}{k+1}\}$ hat unendlich viele Elemente. Insbesondere gibt es ein n_{k+1} in dieser Menge mit $n_{k+1} > n_k$. damit hat (x_{n_k}) die Eigenschaft $\star$.

z.z. $x_{n_k} \to \infty$

Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$ (Archimedisches Axiom).

für $k > k_\varepsilon$ gilt dann also:

$$|x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$$

□

Beachte: Beweis zeigt: $x_n \to x \iff$ Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < 1/k$ für $n \geq n_k$.

3.17 Definition (Häufungspunkt)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt Häfungspunkt von (x_n), wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemma gilt.

Beispiele: (a) $(-1)^n$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1.

(b) Die Folge x_n mit $x_n = \pi$ für n hat Rest 0 bei Division durch 3, $x_n = 7$ fuer n mit Rest 1 bei Division durch 3, $x_n = 42$ für n mit Rest 2 bei Division durch 3 hat die drei Häufungspunkte $\pi, 7$ und 42.

(c) $y_n = x_n + 1/n$ (mit (x_n) aus (b)) hat ebenfalls die Häufungspunkte $\pi, 7$ und 42 (obwohl diese Werte nicht angenommen werden; vgl. Konvergenz!)

Beachte: Der Satz von Bolzano/Weierstraï¿½ lässt sich nun so formulieren: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt.

Für beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ gibt es zwei besondere Häufungspunkte, nämlich den größten und den kleinsten Häufungspunkt.

$\overline{\lim}\, x_n \coloneqq \overline{\lim} x_n \coloneqq$ größter Häufungspunkt.

$\underline{\lim}\, x_n \coloneqq \underline{\lim} x_n \coloneqq$ kleinster Häufungspunkt.

Ist (x_n) nach oben/unten unbeschränkt, so setzt man $\overline{\lim}\, x_n = \infty$ / $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$. In diesen Fällen ist $\pm\infty$ Grenzwert einer bestimmt divergenten Teilfolge.

3.18 Lemma (Charakterisierung von limsup/liminf)**:** Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $x = \overline{\lim}\, x_n$. $\Longleftrightarrow$

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

- Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_n \leq x + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$
- Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$ ist unendlich.

(iii) $x = \underline{\lim}\, x_n$. $\Longleftrightarrow$

(iiii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

- Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq x - \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$
- Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x + \varepsilon\}$ ist unendlich.

Beweis: Nur $\overline{\lim}$:

"$\Rightarrow$": x HP $\Rightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow$ (ii).

Angenommen (i) gilt nicht, dann gibt es $\varepsilon > 0$ sodass $x_n > x + \varepsilon$ für unendlich viele n.

Sei n_k der k-te Index für den $x_n > x + \varepsilon$ gilt, dann gilt $x_{n_k} > x + \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da (x_n) beschränkt ist, ist auch die Teilfolge (x_{n_k}) beschränkt.

$\Rightarrow$ Es existiert konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_l}})$ von (x_{n_k}).

Der Grenzwert von $(x_{n_{k_l}})$ ist $\geq x + \varepsilon$.

$\Rightarrow$ Es gibt einen Häufungspunkt von (x_n) der größer oder gleich $x + \varepsilon$ ist.
$\lightning$ x ist größter Häufungspunkt.

"$\Leftarrow$": Nach (i) und(ii) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele n mit $|x_n - x| < \varepsilon$. $\Rightarrow$ x ist HP von (x_n).

Nach (i) kann es keinen größeren HP geben.

$\square$

Beachte: (x_n) beschränkt

$$
\begin{aligned}
(x_n) \text{ konvergent } &\Longleftrightarrow \overline{\lim}(x_n) = \underline{\lim}(x_n) \\
&\Longleftrightarrow \text{Es gibt nur einen Hï¿½ufungspunkt von } (x_n)
\end{aligned}
$$

4. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Idee: Finde Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, indem $x^2 + 1 = 0$ eine Nullstelle hat. Nenne diese Nullstelle i. Mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann auch $a + ib$ in diesem Körper enthalten und es gilt:

$$\begin{aligned}(a+ib)(a'+ib') &= aa' + iba' + aib' + (ib)(ib') \\ &= aa' + iibb' + i(ba' + ab') \\ &= aa' - bb' + i(ba' + ab')\end{aligned}$$

Die Menge $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ ist in diesem Sinne also abgeschlossen unter Multiplikation.

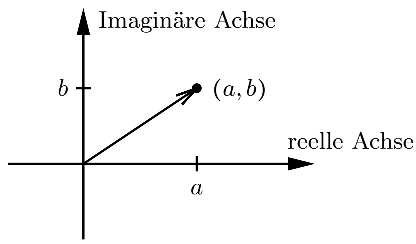
4.1 Definition (Körper $\mathbb{C}$)**:** Die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ versehen mit der Addition

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bd)$$

ist ein Körper mit $(0, 0)$ als neutralem Element der Addition und $(1, 0)$ als neutralem Element der Multiplikation. Das Inverse bezüglich der Addition von (a, b) ist gegeben durch $(-a, -b)$. Das Inverse von $(a, b) \neq (0, 0)$ bezüglich der Multiplikation ist gegeben durch $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. Dieser Körper heißt $\mathbb{C}$.



Notation: Wir schreiben i für $(0, 1)$. Außerdem identifizieren wir $(a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Damit kann man $(a, b) \in \mathbb{C}$ auch schreiben als $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$

4.2 Definition (Imaginäre Einheit i)**:** Wir definieren die imaginäre Einheit $i = (0, 1)$. Es gilt $i^2 = -1$.

4.3 Definition (Operationen der komplexen Zahlen)**:** Für $z = a + ib$ wird definiert:

- Realteil: $\mathrm{Re}(z) = \Re z = a$
- Imaginärteil: $\mathrm{Im}(z) = \Im z = b$
- konjungiert Komplexe zu z: $\overline{z} = a - ib$
- Betrag von z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

4.4 Proposition (Rechenoperationen)**:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ und für $z \neq 0$ gilt $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

c) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

d) $z \neq 0 : z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

e) $|zw| = |z||w|$ und für $z \neq 0$ gilt: $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$

f) $|z + w| \leq |z| + |w|$ ($\triangle$ - Ungleichung)

Nun soll untersucht werden, was Konvergenz im Körper der komplexen Zahlen bedeutet.

4.5 Definition (Konvergenz in $\mathbb{C}$)**:** Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|z - z_n| < \varepsilon.$$

Notation: Wieder kann eine Folge gegen höchstens einen Wert konvergieren. Dieser Wert heißt Grenzwert $z = \lim z_n$, oder $z_n \to z, n \to \infty$

Konvergenz in $\mathbb{C}$ und Konvergenz der Komponenten in $\mathbb{R}$ haben viel miteinander zu tun.

4.6 Proposition (Eigenschaften des Betrages)**:** Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gelten

$$|z| \leq |a| + |b| \text{ und } |a|, |b| \leq |z|.$$

Beweis: Zuerst wird die erste Ungleichung bewiesen:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \\ \Rightarrow |z| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Nun zur zweiten Ungleichung:

$$|a|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$
$$|b|^2 \leq |a|^2 + |b|^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

□

4.7 Proposition (Charakterisierung von Konvergenz in $\mathbb{C}$)**:** Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}$ alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Folge (z_n) konvergiert in $\mathbb{C}$.

(ii) Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren in $\mathbb{R}$.

In diesem Fall gilt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} a_n) + i(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

Konvergenz in $\mathbb{C}$ bedeutet Konvergenz der Komponenten.

Beweis: $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: $z_n \to z = a + ib$
$\Rightarrow |a_n - a| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon$, $|b_n - b| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$ (wobei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$ gewählt ist)
$\Rightarrow a_n \to a, b_n \to b$
$\Rightarrow (a_n), (b_n)$ konvergieren und $z = \underline{\lim a_n} + i(\underline{\lim b_n})$ mit $\lim a_n = a$ $\lim b_n = b$

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$a_n \to a \Rightarrow \exists\, n_a \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_a$
$b_n \to b \Rightarrow \exists\, n_b \in \mathbb{N}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_b$
$\Rightarrow$ für $n \geq n_a, n_b$ gilt: $|z_n - z| = |a_n + ib_n - (a + ib)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon$ □

Damit kann man aus den Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{R}$ leicht die folgenden Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{C}$ ableiten.

4.8 Proposition (Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{C}$)**:** a) $z_n \to z, w_n \to w \Rightarrow z_n + w_n \to z + w$

b) $z_n \to z, w_n \to w \Rightarrow z_n w_n \to zw$

c) $z_n \to z, z \neq 0, z_n \neq 0$ alle $n \Rightarrow \frac{1}{z_n} \to \frac{1}{z}$

d) $z_n \to z \Rightarrow |z_n| \to |z|$

Da es in $\mathbb{C}$ keine Anordnung gibt, gibt es auch keinen Begriff von monotoner Folge. Aber es gilt der Satz von Bolzano/Weierstraß.

Dazu noch 2 Begriffe:

- Folge (z_n) heißt beschränkt, wenn ein $R > 0$ existiert mit $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Ist (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so heißt (z_{n_k}) eine Teilfolge von (z_n).

4.9 Satz (Bolzano/Weierstraß komplex)**:** Sei (z_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$, dann hat (z_n) eine konvergente Teilfolge.

Beweis: $z_n = a_n + ib_n$
(z_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n), (b_n)$ beschränkt
(a_n) beschränkt $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ und Teilfolge (a_{n_k}) von $(a_n) : (a_{n_k}) \to a, k \to \infty$
Betrachte $(b_{n_k})_k$: (b_{n_k}) beschränkt $\overset{\text{B/W reell}}{\Rightarrow} \exists b \in \mathbb{R}$ und Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_l$ von (b_{n_k}) mit $(b_{n_{k_l}}) \to b, l \to \infty$
Damit: $(b_{n_{k_l}})_l$ Teilfolge von (b_n), konvergiert gegen b
$(a_{n_{k_l}})_l$ Teilfolge von (a_{n_k}), also konvergiert auch (a_n) gegen a
$\Rightarrow (z_{n_{k_l}}) = (a_{k_l}) + (ib_{n_{k_l}})$ konvergiert gegen $a + ib$ □

4.10 Definition (Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$)**:** Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

Für jedes $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

4.11 Satz (Charakterisierung von Konvergenz in $\mathbb{C}$)**:** Für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Die Folge (z_n) konvergiert.

(ii) Die Folge (z_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis: $z_n = a_n + ib_n$
(z_n) konvergiert
$\Leftrightarrow (a_n), (b_n)$ konvergieren in $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (a_n), (b_n)$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (a_n + ib_n)$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (z_n)$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ □

Beachte: Die Tatsache, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, wird als Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{C}$ bezeichnet.

5. Betrachtungen zu $\mathbb{R}^d$

Die Konvergenzbetrachtungen des vorigen Abschnitts nutzen nicht die Körperstruktur von $\mathbb{C}$. Sie beruhen darauf, dass $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aufgefasst werden kann. Sie können entsprechend auf Produkte von noch mehr Kopien von $\mathbb{R}$ ausgedehnt werden.[1]

Für $d \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{d\text{-mal}} = \{(x_1, \ldots, x_d) : \ x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, d\}$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_d), \ y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \ \alpha \in \mathbb{R}$ wird definiert

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d) \\ \alpha x &= (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_d) \end{aligned}$$

5.1 Definition (Mehrdimensionaler Betrag)**:** Für $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$$

- Für $d = 1$ ist das der bekannte Betrag.
- Für $d = 2$ stimmt das mit den auf $\mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{C}$ betrachteten Betrag überein.

5.2 Proposition (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**:** Für $x = (x_1, \ldots, x_d), \ y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\sum_{j=1}^{d} |x_j y_j| \le |x||y|$$

Beweis: Es reicht den Fall $x \neq (0, \ldots, 0), \ y \neq (0, \ldots, 0)$ zu betrachten. Dann ist insbesondere $|x|, |y| \neq 0$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{|x_j|}{|x|} \frac{|y_j|}{|y|} \le 1.$$

Wegen $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ gilt

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{|x_j|}{|x|} \frac{|y_j|}{|y|} \le \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2} \left(\frac{|x_j|^2}{|x|^2} + \frac{|y_j|^2}{|y|^2} \right) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{|x|^2} \sum_{j=1}^{d} |x_j|^2}_{=1} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{|y|^2} \sum_{j=1}^{d} |y_j|^2}_{=1} = 1.$$

[1] Die $\mathbb{R}^d$ sind Vektorräume.

$\square$

5.3 Proposition (Eigenschaften des Betrag)**:** Seien $x = (x_1, \dots, x_d),\ y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$

b) $|\alpha x| = |\alpha||x|.$

c) $|x + y| \le |x| + |y|.$

Beweis: a) Anwendung der Betrags-Definition liefert:

$$\begin{aligned} |x| = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{d} x_j^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_j = 0,\ j = 1, \dots, d \\ &\Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

b) Einfach.

c) Rechnung liefert in Verbindung mit der Betrags-Definition und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \sum_{j=1}^{d} (x_j + y_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left(x_j^2 + 2x_j y_j + y_j^2\right) \\ &= \sum_{j=1}^{d} x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{d} x_j y_j + \sum_{j=1}^{d} y_j^2 \\ &\le \sum_{j=1}^{d} x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{d} |x_j y_j| + \sum_{j=1}^{d} y_j^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 . \\ \Rightarrow |x + y| &\le |x| + |y|. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Der Betrag $|\cdot|$ bietet damit eine sinnvolle Art, um Längen und Abstände zu messen. Insbesondere erfüllt der hier definierte Betrag auf dem $\mathbb{R}^d$ gerade die Axiome einer Norm. Doch dazu später mehr.

5.4 Definition (Mehrdimensionale Konvergenz)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Dann heißt (x_n) *konvergent* gegen $x \in \mathbb{R}^d$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, mit der Eigenschaft, dass für alle $n \ge n_\varepsilon$ gilt

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Wieder kann eine Folge gegen höchstens einen Wert konvergieren. Dieser wird dann *Grenzwert* der Folge genannt und wir schreiben:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ oder } x_n \to x,\ n \to \infty.$$

5.5 Definition (Cauchy-Folge)**:** Die Folge (x_n) in $\mathbb{R}^d$ heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

5.6 Proposition (Allgemeine Dreiecksungleichung)**:** Für $x \in \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$ gilt

$$|x_1|, \ldots, |x_d| \leq |x| \leq \sum_{j=1}^{d} |x_j|.$$

Beweis: Wir gehen wieder von der Betrags-Definition aus.

$$|x_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 = |x|^2$$

Die erste Ungleichung folgt nun durch Wurzelziehen. Die zweite Ungleichung ergibt sich durch Wurzelziehen aus

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 \leq (|x_1| + \ldots |x_d|)^2.$$

□

Mit dieser Proposition können wir wie im Falle von $\mathbb{C}$ die folgenden beide Sätze beweisen:

5.7 Satz (Konvergenz ist komponentenweise Konvergenz)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$, d.h. $x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d})$, $n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $x_n \to y$, $n \to \infty$.

(ii) $x_{n,j} \to y_j$, $n \to \infty$ für jedes $j = 1, \ldots, d$.

Beweis: Wie in $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ □

5.8 Satz (Charakterisierung konvergenter Folgen)**:** Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Folge (x_n) konvergiert.

(ii) Die Folge (x_n) ist eine Cauchy Folge.

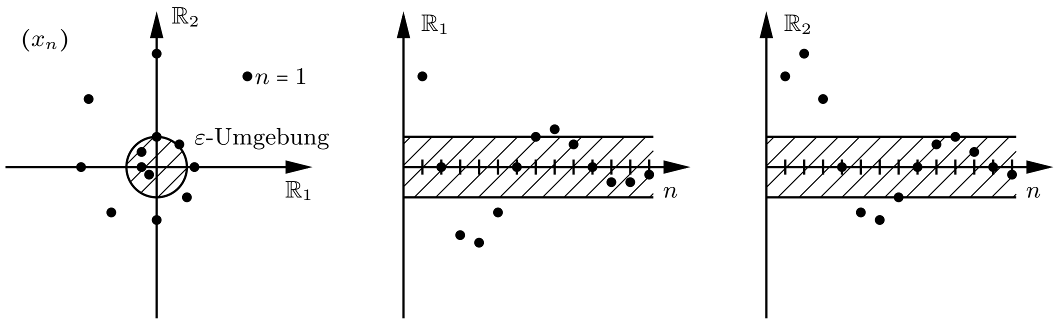


Abbildung 5.1.: Konvergenz von (x_n) impliziert die Konvergenz der Komponenten.

Beweis: Wie in $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$ □

Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung des *Satzes von Bolzano/Weierstrass* (Satz 3.11).

Bemerkung: Eine Menge X in $\mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, wenn es ein $R > 0$ gibt mit $|x| \leq R$ für alle $x \in B$.

5.9 Satz (Satz von Bolzano/Weierstraß)**:** Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Menge X ist beschränkt.

(ii) Jede Folge (x_n) aus X enthält eine konvergente Teilfolge.

Beweis: (i)⇒(ii): (x_n) Folge in $X \Rightarrow (x_n)$ beschränkt $\overset{\text{wie in } \mathbb{C}}{\Rightarrow}$ (x_n) hat konvergente Teilfolge.

(ii)⇒(i): Angenommen X ist nicht beschränkt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $|x_n| \geq n$. Es gilt also $|x_n| \to \infty$, $n \to \infty$. Entsprechend folgt für jede Teilfolge (x_{n_k}) ebenfalls, $|x_{n_k}| \to \infty$, $k \to \infty$. Damit kann die Teilfolge nicht konvergierten. □

Bemerkung: Gilt für eine mehrdimensionale Folge $x_{n_k} \to x$, dann folgt daraus auch $|x_{n_k}| \to |x|$.

Beachte: Der Grenzwert muss nicht in X liegen. (Beispiel: $X = (0,1)$, $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \notin X$)

Wir kommen nun zu den Mengen, bei denen dieses Problem nicht auftritt:

5.10 Definition (Offene und abgeschlossene Intervalle)**:** Für $-\infty < a < b < \infty$ definieren wir

- das offene Intervall $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- und das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

5.11 Definition (Abgeschlossenheit)**:** Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge (x_n) mit $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ auch wieder in A liegt. (“Wenn man immer nur in A läuft, ist man auch am Ende in A.„)

Beispiele:

- $(0, 1)$ ist nicht abgeschlossen (z. B. $(x_n) = (1/n)$).
- $[0, 1]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

5.12 Satz (Charakterisierung Kompaktheit)**:** Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ gegeben. Dann sind äquivalent.

(i) K ist beschränkt und abgeschlossen.

(ii) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in K liegt.

Beweis: Nach Bolzano/Weierstraß ist K beschränkt, genau dann wenn jede Folge aus K eine konvergente Teilfolge hat. Die Abgeschlossenheit von K bedeutet dann gerade, dass konvergente Folgen in K auch ihren Grenzwert in K haben. □

5.13 Definition (Kompaktheit einer Menge)**:** Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, wenn sie eine der Eigenschaften des vorigen Satz erfüllt.

Merke: Ein beschränktes abgeschlossenes Intervall $I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ist kompakt, dass heißt jede Folge aus I hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder in I liegt.

Eine Menge ist kompakt, wenn sie nicht zu klein (d. h. abgeschlossen) und nicht zu groß (d. h. beschränkt) ist.

Bemerkung: Konvergenz lässt sich durch Kugeln beschreiben:

$$B_s(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < s\}.$$

- $d = 1$ Offenes Intervall
- $d = 2$ Kreisscheibe
- $d = 3$ Kugel

Dann gilt:

- $|x - y| < \varepsilon \iff x \in B_\varepsilon(y) \iff y \in B_\varepsilon(x)$
- X beschränkt $\Leftrightarrow$ Es existiert $R \geq 0$ mit $X \subset B_R(0)$.

Damit lassen sich die Definitionen von Konvergenz und Cauchy-Folge umformulieren.

6. Summen und Reihen

Reihen liefern (eigentlich nur) eine spezielle Art Folgen darzustellen. Diese Art ist in vielerlei Zusammenhängen von Interesse.

6.1 Definition (Reihe ist Folge der Partialsummen)**:** Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$). Zu $n \in \mathbb{N}$ sei dann die n-te *Partialsumme* der (a_n) definiert durch

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge (S_n) dieser Partialsummen wird dann als *Reihe* mit den Gliedern a_n bezeichnet. Diese Reihe heißt konvergent mit Grenzwert S, wenn gilt

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Notation: Wir schreiben $\sum_{k \geq 1} a_k$ für die Reihe, d. h. die Folge der Partialsummen. Wir schreiben $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für den Grenzwert der Reihe, falls dieser existiert.

Bemerkung: (x_n) beliebige Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$). Dann ist $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ für $a_1 = x_1$, $a_n := x_n - x_{n-1}$, $n \geq 2$. In diesem Sinne lässt sich jede Folge als Reihe darstellen.

Für konvergente Reihen gelten dieselben Rechenregeln wie für konvergente Folgen. Insbesondere:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k)$$

Beispiel: $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert gegen 1.

Beweis: $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{m} \to 1.$ □

6.2 Satz (Cauchykriterium für Reihen)**:** Sei (a_k) in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$) gegeben. Dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum_{k \geq 0} a_k$ konvergiert.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_\varepsilon \leq m < n$ gilt

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis: $(i) \Leftrightarrow$ Folge (S_n) der Partialsummen konvergiert $\Leftrightarrow$ (S_n) ist Cauchy Folge $\Leftrightarrow$ $|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_\varepsilon$ $\square$

Der Satz liefert eine *notwendige* Bedingung für Konvergenz:

6.3 Folgerung (Voraussetzung für Konvergenz einer Reihe)**:** Die Konvergenz einer Reihe $\sum a_k$ ist nur möglich, wenn (a_k) eine Nullfolge ist (d. h. $\sum a_k$ konvergiert $\Rightarrow |a_k| \to 0$, $k \to \infty$).

Beweis: Dies folgt direkt aus dem vorigen Satz mit $|a_k| = |\sum_{l=k}^{k} a_l| = |S_k - S_{k-1}| \to 0,\ k \to \infty$ $\square$

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend:

Beispiel (Harmonische Reihe ist divergent)**:** $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{n}$ (Harmonische Reihe) ist divergent, obwohl $\frac{1}{n} \to 0$.

$$\underbrace{1}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}} + \ldots$$

Besonders wichtig sind Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Darauf lassen sich viele Konvergenzbetrachtungen zurückführen. Für diese Reihen gilt:

6.4 Lemma (Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern)**:** Sei Folge (a_k) mit $a_k \geq 0$ gegeben. Sei $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ ist konvergent (d. h. (S_n) konvergent).

(ii) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ ist beschränkt (d. h. $\sup S_n < \infty$).

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m < \varepsilon$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon \leq n < m$.

Beweis: Wegen $a_k \geq 0$ ist (S_n) monoton wachsend. Damit sind Konvergenz (i) und Beschränktheit (ii) äquivalent. Weiterhin ist Konvergenz in $\mathbb{R}$ äquivalent dazu, dass (S_n) eine Cauchy-Folge ist. Damit sind (i) und (iii) äquivalent. $\square$

Beispiel (Geometrische Reihe)**:** Ist $0 < q < 1$, so ist $\sum_{k\geq 0} q^k$ konvergent gegen $\frac{1}{1-q}$.

Beweis: $S_n := \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \le \frac{1}{1-q}$ (vgl. 2.2). Damit ist Bedingung (ii) des vorangehenden Lemma erfüllt. □

Bemerkung: Für $q \ge 1$ ist $\sum_{k\ge0} q^k$ divergent, da q^k dann keine Nullfolge ist.

Notation: Ist $a_k \ge 0$, so schreiben wir $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt.

Für Reihen erweist sich eine Verschärfung des Konvergenzbegriffes als sinnvoll.

6.5 Definition (Absolute Konvergenz)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$). Dann heißt die Reihe $\sum_{k\ge1} a_k$ *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k\ge1} |a_k|$ konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty.$$

Bemerkung: Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern ist Konvergenz gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz.

Beispiel (für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe)**:** Sei $a_k := \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Dann ist

- $\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe).
- $\sum_{k\ge1} a_k$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (siehe unten), denn $|a_k| \ge |a_{k+1}|$ und $|a_k| \to 0, k \to \infty$.

6.6 Satz (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$). Ist $\sum_{k\ge1} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k\ge1} a_k$ auch konvergent.

Beweis: $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Zu zeigen: (S_n) ist Cauchy-Folge

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der absoluten Konvergenz, konvergiert $\sum_{k\ge1} |a_k|$. Damit existiert also nach Lemma 6.4 ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \ge n_\varepsilon$. Damit gilt also für $n, m \ge n_\varepsilon$ und $n < m$

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots a_m| \le |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium. □

Bemerkung (siehe unten)*:* Absolute Konvergenz ist stabil unter Umordnungen. Konvergente aber nicht absolut konvergente Reihen sind extrem instabil unter Umordnung. Daher ist absolute Konvergenz oft wesentlich nützlicher als Konvergenz, wenn es um Reihen geht.

Beachte: Absolute Konvergenz und Konvergenz ändern sich nicht, wenn man endlich viele Glieder der Reihe abändert. Es geht immer nur um a_k mit großen k.

Wir wollen nun einige Kriterien diskutieren, mit denen man das Konvergenzverhalten von Reihen untersuchen kann.

6.7 Satz (Majorantenkriterium)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$). Gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ und $b_k \geq 0$ mit

- $|a_k| \leq b_k$ für $k \geq k_0$ und
- $\sum_{k \geq k_0} b_k < \infty$,

so ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Zu zeigen: $\sup \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \infty$ (vgl. Lemma 6.4)

Nach Voraussetzung gibt es $C \geq 0$ mit $\sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq C$ für alle $n \geq k_0$. Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + C < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel: $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.

Beweis: $0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ und $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ konvergent (siehe Beispiel Seite 40). Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ absolut. □

Beispiel: $\sum_{k \geq 1} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert absolut.

Beweis: $\frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2 \ldots k}{k \cdot k \ldots k} \leq \frac{2}{k^2}$ und $\sum \frac{2}{k^2}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k \geq 1} \frac{k!}{k^k}$ absolut. □

Eine Folgerung aus dem Majorantenkriterium ist das Minorantenkriterium.

6.8 Satz (Minorantenkriterium)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$) und $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Gilt $b_k \geq |a_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ab einem k_0 und ist $\sum a_k$ divergent, so ist auch $\sum b_k$ divergent.

Beweis: Angenommen $\sum b_k$ sei konvergent $\Rightarrow \sum |a_k|$ absolut konvergent. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Beispiel: $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ist divergent.

Beweis: $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}$ und $\sum \frac{1}{n+1}$ divergent (harmonische Reihe). □

Beispiel: Sei $a_k := (k\text{-te ungerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k-1}$ und $b_k := (k\text{-te gerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k}$. Dann ist $\sum a_k$ und $\sum b_k$ divergent.

Beweis: Wäre eine der beiden Summen konvergent, so müsste auch die andere konvergieren. Dann wäre aber auch die harmonische Reihe $(\sum a_k + \sum b_k)$ konvergent. □

6.9 Satz (Quotientenkriterium)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$) mit $a_k \neq 0$ für alle k ab einem k_0. Es existiere

$$q := \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

Dann gilt:

- Ist $q < 1$ so konvergiert $\sum a_k$ absolut.
- Ist $q > 1$ so divergiert $\sum a_k$.

Beweis: $\underline{q < 1}$: Sei $\tilde{q}$ eine Zahl mit $q < \tilde{q} < 1$. Wegen $q = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \tilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Das impliziert

$$|a_n| \leq \tilde{q}\,|a_{n-1}| \leq \ldots \leq \tilde{q}^{n-N}|a_N|$$

für alle $n \geq N$. Weiterhin gilt die folgende Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|}_{=C} + \sum_{k=N}^{n} |a_k| \leq C + \sum_{k=N}^{n} \tilde{q}^{k-N}|a_N| \leq C + \frac{1}{1-q}$$

für alle n. Damit ist die geometrische Reihe Majorante von $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ und nach dem Majorantenkriterium folgt absolute Konvergenz.

$\underline{q > 1}$: Ähnlich wie im vorigen Fall schließt man, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$$

für alle $k \geq N$. Damit folgt

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \ldots \geq |a_N| > 0$$

für alle $k \geq N$. Also ist $|a_k|$ keine Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe nicht. □

Bemerkung: Für $q = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

- $a_k = \frac{1}{k}$. Dann $q = \lim \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim \frac{k}{k+1} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = \frac{1}{k^2}$. Dann $q = \lim \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Beispiel: Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und $a_k := \frac{z^k}{k!}$. Dann ist $\sum a_k = \sum \frac{z^k}{k!}$ absolut konvergent.

Beweis: Das folgt aus dem Quotientenkriterium wegen

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{|z|}{|k+1|} \to 0 < 1$$

□

Erinnerung: Sei (b_k) eine Folge nichtnegativer Zahlen. Dann ist $q := \overline{\lim}_{k\to\infty} b_k$ (entspricht dem größten Häufungspunkt) charakterisiert durch

- Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_k \leq q + \varepsilon$ für alle $k \geq N$.
- Für jedes $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele k mit $b_k \geq q + \varepsilon$.

Insbesondere gilt:

$$q < 1 \iff \text{Es gibt ein } \widetilde{q} < 1 \text{ und } N \in \mathbb{N} \text{ mit } b_n \leq \widetilde{q} \text{ für alle } n \geq N.$$

Beweis: Hier wird nur der Beweis für „Insbesondere“ gebracht:

$\Longrightarrow$: Wähle $\widetilde{q}$ mit $q < \widetilde{q} < 1$ beliebig. Dann gilt $\widetilde{q} = q + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Daraus folgt die Aussage.

$\Longleftarrow$: Angenommen $q \geq 1$: Wähle $\varepsilon > 0$ mit $\widetilde{q} < q - \varepsilon$. Dann gilt sowohl $b_k \leq \widetilde{q}$ für alle $k \geq N$ als auch $b_k \geq q - \varepsilon > \widetilde{q}$ für unendlich viele k. ↯ □

6.10 Satz (Wurzelkriterium)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, oder $\mathbb{R}^d$) und

$$q := \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Gilt $q < 1$, so ist $\sum a_k$ absolut konvergent. Gilt $q > 1$ so ist $\sum a_k$ divergent.

Beweis: $\underline{q < 1}$: Sei $\tilde{q}$ mit $q < \tilde{q} < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \tilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Damit gilt also

$$|a_k| \leq \tilde{q}^k$$

für alle $k \geq N$. Die Reihe $\sum_{k\geq N} \tilde{q}^k$ konvergiert (geometrische Reihe). Damit folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergent.

$\underline{q > 1}$: Es gibt unendlich viele k mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, also $|a_k| \geq 1$. Damit ist $|a_k|$ keine Nullfolge.

□

Bemerkung: Für $q = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

- $a_k = \frac{1}{k}$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = \frac{1}{k^2}$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Beispiel: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ konvergiert.

Beweis: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e} < 1$ □

Bemerkung: Das Quotientenkriterium ist (oft) leichter anzuwenden als das Wurzelkriterium. Das Wurzelkriterium ist aber stärker. Genauer gilt:

- Ist $b_n > 0$, so gilt $\overline{\lim}\,\sqrt[n]{b_n} \le \overline{\lim}\,\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

  Beweis: Gute Übung

- Es gibt Reihen, deren Konvergenz aus dem Wurzelkriterium folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium. Ein Beispiel ist:

$$a_k = \begin{cases} 2^{-k}: & k \text{ gerade} \\ 3^{-k}: & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

  Dann ist $\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{2}: & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{3}: & k \text{ ungerade} \end{cases}$, also $\overline{\lim}\,\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2} < 1$. Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum a_k$ damit konvergent. Mit dem Quotientenkriterium kann man aber keine Aussage über Konvergenz treffen: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \begin{cases} \frac{2}{3}^k\frac{1}{3}: & k \text{ gerade} & \to 0 \\ \frac{3}{2}^k\frac{1}{2}: & k \text{ ungerade} & \to \infty \end{cases}$

Beachte: $\sqrt[n]{n!} \to \infty,\ n \to \infty$

Beweis:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 \ge \underbrace{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}\text{ Faktoren}} = \frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}$$

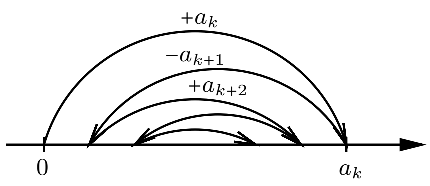
Mit dieser Abschätzung kann man nun die Wurzel ziehen:

$$\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt[n]{\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}} = \frac{n}{2}^{\frac{1}{2}} \to \infty,\ n \to \infty$$

□

Für reelle Reihen gibt es zwei weitere Konvergenzkriterien, die von der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ Gebrauch machen.

6.11 Satz (Leibnizkriterium)**:** Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ (d. h. $a_k \ge a_{k+1} \ge \cdots \ge 0$ und $a_k \to 0,\ k \to \infty$). Dann ist die alternierende Reihe $\sum(-1)^k a_k$ konvergent.



Beweis: Sei $n > l$. Dann gilt

$$\left|\sum_{k=l}^{n}(-1)^k a_k\right| = |a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \ldots a_k| \leq |a_l| \to 0,\ l \to \infty.$$

da (a_l) Nullfolge ist.

Damit ist $\sum(-1)^k a_k$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. □

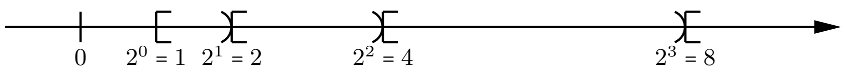
Bemerkung: Die folgenden Voraussetzungen sind nötig:

- (a_n) ist eine Nullfolge (immer nötig).
- (a_n) ist monoton fallend.

Beweis: Übung.

Beispiel: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, ist aber nicht absolut konvergent (harmonische Reihe ist divergent).

6.12 Satz (Verdichtungskriterium)**:** Sei (a_n) eine nichtnegative fallende Folge in $\mathbb{R}$ (d. h. $a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots \geq 0$). Dann konvergiert $\sum_{k\geq 1} a_k$ genau dann wenn $\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ konvergiert.



Beweis: Für $p \in \mathbb{N}$ setze

$$C_p := \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} a_k \ \ (2^p\text{-Terme})$$

Aufgrund der Monotonie gilt

$$2^p a_{2^{p+1}} \leq C_p \leq 2^p a_{2^p}.$$

Aufgrund der Nichtnegativität der C_p und a_k reicht es jeweils Beschränktheit zu zeigen. Es gilt also:

$\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\sum C_p$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\sum a_k$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\sum a_k$ konvergent. □

Beispiel: Sei $\alpha > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent, wenn $\alpha > 1$.

Beweis: Nach dem Verdichtungskriterium ist $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent genau dann wenn $\sum \frac{2^p}{(2^p)^\alpha} = \sum \frac{1}{(2^{\alpha-1})^p}$ konvergiert. Letzteres ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$.

Ist $\alpha > 1$, so ist $2^{\alpha-1} > 1$, also $0 < q < 1$ und die geometrische Reihe konvergiert.

Ist $\alpha \leq 1$, so ist $2^{\alpha-1} \leq 1$, also $1 \leq q$ und die geometrische Reihe divergiert. □

Wir betrachten jetzt noch Doppelsummen. Es geht also um

$$a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (\text{oder } \mathbb{C}, \text{ oder } \mathbb{R}^d),$$

und wir fragen, ob

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Das ist von eigenem Interesse und nützlich zum Studium von Produkten von Reihen und Umordnungen.

Beachte: Es geht um das Vertauschen von Grenzwerten!

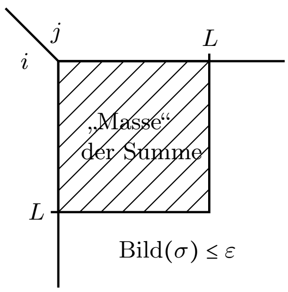
6.13 Proposition (Konvergenz permutierter Reihen)**:** Sei $a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$). Es gebe $C \geq 0$ mit $\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}| \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\sum a_{\tau(k)}$ ist für jedes injektive $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ absolut konvergent.

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma(k)}| \leq \varepsilon$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ und alle injektiven $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\sigma(k) \notin \{1, \ldots, L\}^2$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.



Beweis: (a) Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\{\tau(1), \dots, \tau(n)\} \subset \{1, \dots, m\}^2$. Damit folgt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}| \leq C.$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt (a).

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektiv mit

$$\{\tau(1), \dots, \tau(L^2)\} = \{1, \dots, L\}^2$$

für jedes $L \in \mathbb{N}$. Nach (a) existiert

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\tau(k)}| < \infty.$$

(Das ist die Summe über alle $|a_{ij}|$.) Daher existiert also ein $R \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=R}^{\infty} |a_{\tau(k)}| \leq \varepsilon.$$

Wähle nun $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $L^2 > R + 1$. Dann gilt

$$(*) \qquad \sum_{k=L^2}^{\infty} |a_{\tau(k)}| < \varepsilon.$$

Ist nun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ injektiv mit $\sigma(k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, L\}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{\tau(1), \dots, \tau(L^2)\}$, so folgt aus $(*)$

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=L^2+1}^{\infty} |a_{\tau(k)}| \leq \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis.

□

6.14 Satz (Konvergenz von Doppelsummen)**:** Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder R^d) gegeben. Es gebe ein $C \geq 0$ mit $\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}| \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und es existiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und die Reihen

$$\sum_{i\geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right), \quad \sum_{j\geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right), \quad \sum_{k\geq 1} \left(\sum_{l=1}^{k} a_{k-l,l} \right)$$

sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert.

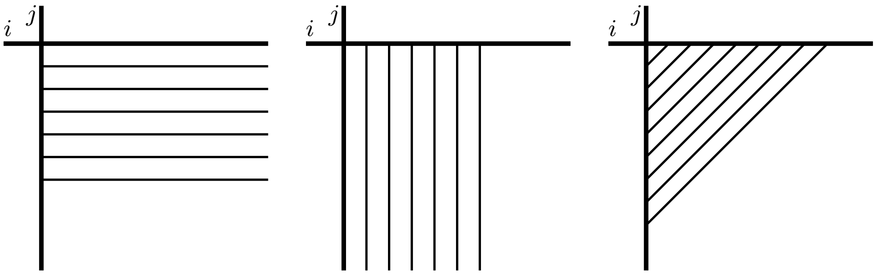
Beweis: Existenz der Summen: Das folgt aus (a) der vorigen Proposition (z.B. $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\tau(k) = a_{ik}$)

Absolute Konvergenz der Doppelsummmen: klar nach Voraussetzung, z. B.

$$\sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \Big| = \sum_{i=1}^{m} \Big| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big| \leq C.$$

(Grenzwert vertauscht mit Beträgen und mit endlichen Summen.)

Gleichheit der Grenzwerte: Wir zeigen Gleichheit des ersten und dritten Grenzwertes. Die übrigen Gleichheiten können analog bewiesen werden. Die Idee ist, dass die Masse in einem genügend großen Quadrat liegt. Dieses Quadrat kommt in beiden Summen vor. Hier sind die Details:



Setze $S_N := \sum_{i=1}^{N}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij})$ und $S'_M := \sum_{k=1}^{M}(\sum_{l=1}^{k} a_{k-l,l})$. Aufgrund der schon diskutierten absoluten Konvergenz existieren

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N \quad \text{und} \quad S' := \lim_{M\to\infty} S'_M.$$

Zu zeigen $S = S'$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Sei $L = L(\varepsilon)$ gemäß Teil (b) der vorigen Proposition gewählt. Sei $N \geq L$ und $M \geq 2L$ beliebig. Dann enthalten sowohl der $N \times N$ Quader als auch das M -Dreieck also den $L \times L$ Quadrat. **Zeichnung**. Insbesondere gilt also nach (b) der vorigen Proposition

$$|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i,j=1}^{L} a_{ij}| \leq \varepsilon$$

für $n \geq N$ und

$$|\sum_{i,j=1}^{L} a_{ij} - \sum_{k=1}^{M}(\sum_{l=1}^{k} a_{k-l,l})| \leq \varepsilon.$$

Damit können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |S_N - S'_M| &= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{k} a_{k-l,l}\right| \\ (0 \textit{ addieren}) &= \lim_{n\to\infty}\left|\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{i,j=1}^{L} a_{ij}}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{L} a_{ij} - \sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{k} a_{k-l,l}}_{\leq\varepsilon}\right| \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da das für alle großen N, M gilt, folgt $|S - S'| \leq 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $S = S'$. □

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Satz.

6.15 Folgerung (Cauchy-Produkt)**:** Seien (b_j), (c_i) Folgen in $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) sodass $\sum b_j$ und $\sum c_i$ absolut konvergent sind. Dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} c_{k-l} b_l$$

Beachte: $\sum_{l=1}^{k} c_{k-l} b_l = \sum_{l=1}^{k} c_l b_{k-l}$

Beweis: $C := \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$, $B := \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$. Setze $a_{ij} := c_i b_j$. Dann gilt

$$\sum_{ij=1}^{m} |a_{ij}| = \sum_{ij=1}^{m} |c_i b_j| = \sum_{ij=1}^{m} |c_i||b_j| = \sum_{i=1}^{m} |c_i| \sum_{j=1}^{m} |b_j| \leq CB < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit erfüllt a die Voraussetzung des vorigen Satz. Dessen Aussage liefert dann die Behauptung. □

6.16 Definition (Umordnung)**:** Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\sum_{k\geq 1} a_{\tau(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.

Beachte: Umordnung summiert ueber 'dieselben' Terme in einer anderen Reihenfolge.

6.17 Folgerung (Absolute Konvergenz impliziert Stabilität unter Umordnung)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$). Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergent, so ist jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Grenzwert.

Beweis: Setze $c_{ij} := a_{\tau(j)} = a_i$ falls $i = \tau(j)$ und 0 sonst. Dann gilt

- i-te Zeile enthält a_i an der Stelle j mit $\tau(j) = i$ (und sonst Nullen).
- j-te Spalte enthält $a_{\tau(j)}$ an der $\tau(j)$-ten Stelle (und sonst Nullen).

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} = a_i$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{ij} = a_{\tau(j)}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$ sowie

$$\sum_{i,j=1}^{m} |c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = C < \infty.$$

Damit liefert der vorige Satz die Behauptung. □

Beispiel (Gegenbeispiel - Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist nötig)**:** Betrachte $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ldots$. Dann gilt für die Partialsummen S_n also $S_n = 0$ falls n gerade und $S_n = \frac{1}{k}$ falls $n = 2k - 1$. Damit folgt $S_n \to 0$, $n \to \infty$. Andererseits kann man die Summe so umordnen, dass sie divergiert:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 + \left(\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{k+1} \ldots \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3} \ldots$$

sodass man immer wieder Summanden $\geq \frac{1}{2}$ erhält.

Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern und führt auf den folgenden Satz:

6.18 Satz (Riemannscher Umordnungsatz)**:** Ist (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sum a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung τ mit

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}.$$

Ebenso existieren divergente Umordnungen.

Beweisskizze: Teile die Folge (a_k) in positive und nichtpositive Terme:

Sei $a_k^+ := k$-tes positives Element von (a_k) und $a_k^- := k$-tes nichtpositives Element von (a_k).

Setze

$$A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^+$$

$$A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^-.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^- \leq A^+ + A^-.$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- \right).$$

Daraus folgen die entscheidende Eigenschaften:

- $A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^+ = \infty$
- $A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^- = \infty$.
- (a_n^+) und (a_n^-) sind Nullfolgen.

Denn: Angenommen beide Werte endlich $\Rightarrow \sum |a_k|$ absolut konvergent. Angenommen ein Wert endlich und der andere unendlich $\Rightarrow \sum a_k$ = nicht konvergent.

Nun gehe so vor: Summiere a_k^+ bis man gerade s überschreitet; summiere nun a_k^- bis man s unterschreitet. Da (a_k^+) und (a_k^-) Nullfolgen sind, folgt die Behauptung. □

6.19 Proposition (Dreiecksungleichung)**:** Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$) und $\sum_{k\geq 1} a_k$ sei konvergent. Dann gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Hier ist $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$, falls $\sum a_k$ nicht absolut konvergent ist.

Beweis: Wir rechnen:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

□

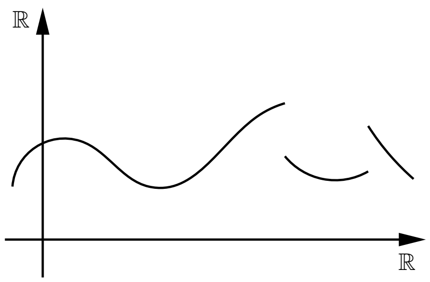
7. Grenzwerte und Stetigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir Funktionen von $\mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}$) nach $\mathbb{R}^k$ (oder $\mathbb{C}$). Eine solche Funktion f heißt stetig im Punkt x_0, wenn sie Punkte, die nahe an einem x_0 liegen, auf Werte abbildet, die nahe an $f(x_0)$ liegen. Eine präzise Fassung kann mit dem Konzept von Grenzwerten von Funktionen definiert werden.

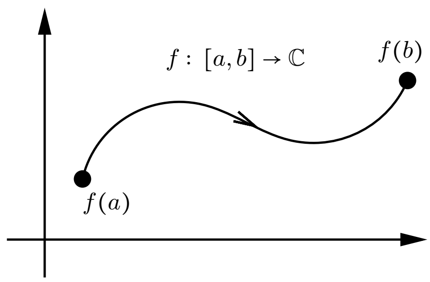
Wir diskutieren zunächst verschiedene Typen von Funktionen:

a) Reellwertige/Skalare Funktionen auf $\mathbb{R}$: $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) Kurven in $\mathbb{C}$: $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\gamma : J \to \mathbb{C}$



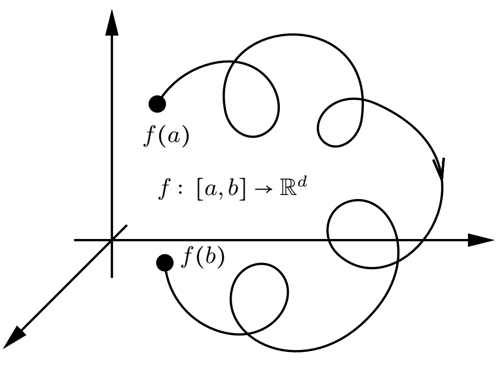
a)



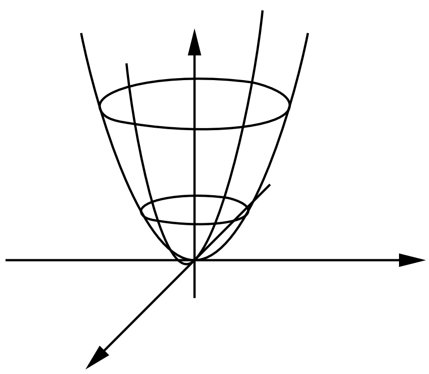
b)

c) Kurven in $\mathbb{R}^d$: $J \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\gamma : J \to \mathbb{R}^d$

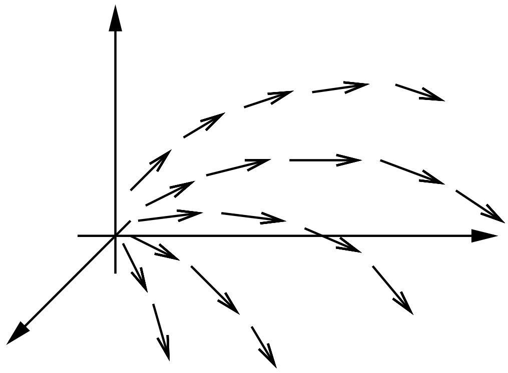
d) Reellwertige/Skalare Funktionen in höheren Dimensionen: $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$



c)


d)

e) Vektorfelder: $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$



e)

Es folgt eine Diskussion von Punkten in denen wir Grenzwerte von Funktionen definieren wollen.

7.1 Lemma (Charakterisierung Häufungspunkt)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ($D \subset \mathbb{C}$). Fuer $x \in \mathbb{R}^d$ (oder $c \in \mathbb{C}$). Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt Folge (x_n) in D mit $x_n \to x$, $n \to \infty$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $x_\varepsilon \in D$ mit $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| \le \varepsilon$ für $n \ge N_\varepsilon$. x_{N_ε} erfüllt dann gerade (ii).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Wähle zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x| \le \frac{1}{n}$. □

7.2 Definition (Häufungspunkt)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ($D \subset \mathbb{C}$). Ein $x \in \mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}$) heißt Häufungspunkt, oder Berührpunkt von D, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt.

Bemerkung: Es gibt zwei Typen von Berührpunkten von D:

1. Punkte aus D.
2. Punkte außerhalb von D, die von D den Abstand 0 haben. Diese Häufungspunkte gibt es nur bei offenen Mengen.

Beispiel: $D = (a, b)$. Dann sind die Berührpunkte D (Typ 1), sowie a und b (Typ 2).

Beispiel: $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (offener Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene) hat als Häufungspunkte B (Typ 1) und $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (Typ 2).

Das nächste Ziel ist es, das Konzept von Grenzwert einer Funktion zu definieren. Wir formulieren eine präzise Version des Konzeptes „*x nahe x_0 impliziert $f(x)$ nahe $f(x_0)$.*“.

7.3 Lemma (Grenzwert einer Funktion an Berührpunkt)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ ($D \subset \mathbb{C}$) und $f : D \to \mathbb{R}^k$. Sei x_0 ein Berührpunkt von D. Für $c \in \mathbb{R}^d$ (oder $c \in \mathbb{C}$) sind äquivalent:

(i) Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to c$, $n \to \infty$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| \leq \varepsilon$,für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Beweis: $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Angenommen nein: Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ „ohne δ“, d.h. mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ existiert mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$. Dann gilt $x_n \to x$, aber $f(x_n) \nrightarrow c$. ↯

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: $x_n \to x$ (z. z. $f(x_n) \to c$.) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach (ii) ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wegen $x_n \to x$ existiert ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für $n \geq N_\delta$. Für $n \geq N_\delta$ gilt damit $|f(x_n) - c| < \varepsilon$. □

7.4 Definition (Grenzwert)**:** In der Situation des Lemma, heißt c der Grenzwert von f bei x_0. Man schreibt

$$c = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ oder } f(x) \to c,\ x \to x_0.$$

Beachte: Ist $x_0 \in D$, so muss gelten $c = f(x_0)$.

Beweis: Wähle $x_n \equiv x_0$. Dann gilt $f(x_n) \equiv f(x_0)$. □

7.5 Definition (Stetigkeit)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ (oder $D \subset \mathbb{C}$) und $f : D \to \mathbb{R}^k$ (oder nach $\mathbb{C}$). Sei $x_0 \in D$. Dann heißt f stetig in x_0, wenn gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dass bedeutet, dass eine der beiden äquivalenten Bedingungen ist erfüllt:

(i) Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Ist f in jedem $x_0 \in D$ stetig, so heißt f stetig auf D.

Beispiele:

- Die konstante Funktion $f:\ D \to \mathbb{R}^k$, $x \mapsto c$ ist stetig.

  Beweis: Da $f(x) \equiv c$ für alle x, existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ für jedes x_0. Damit ist f stetig. □

- $\mathrm{id}:\ D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x$ ist stetig.

  Beweis: Wähle eine beliebige Folge (x_n) mit $x_n \to x$. Dann gilt mit $\mathrm{id}(x_n) = x_n$ und $\mathrm{id}(x) = x$ auch $\mathrm{id}(x_n) \to \mathrm{id}(x)$ und id ist stetig. □

- Dann ist auch $\mathrm{id}:\ D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ stetig.

- $|\cdot|: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$) ist stetig.

Beweis: $x_n \to x \Rightarrow |x_n| \to |x|$ □

- $\sqrt{}: [0,\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Tatsächlich gilt $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die zweite Aussage: Ohne Einschränkung gilt $b = a + \delta$ mit $\delta \geq 0$. Dann folgt nach Erweitern mit $\sqrt{a+\delta} + \sqrt{a}$ für $\delta \neq 0$

$$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{a+\delta} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a+\delta} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+\delta} + \sqrt{a}}\left(\sqrt{a+\delta} + \sqrt{a}\right) \leq \frac{\delta}{\sqrt{a+\delta}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} = \sqrt{b-a}$$

Offenbar gilt diese Formel auch für $\delta = 0$. Damit folgt die erste Aussage mit $\delta = \varepsilon^2$. □

- $\sqrt[k]{}: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ist stetig.

Beweis: Sei $a > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon^k$. Ohne Einschränkung $\delta < a$. Es gelten $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{a - \varepsilon^k} + \varepsilon$ und $\sqrt[k]{a} > \sqrt[k]{a + \varepsilon^k} - \varepsilon$. Ist also $|b - a| < \varepsilon^k$, d.h. $a - \varepsilon^k < b < a + \varepsilon^k$, so folgt

$$\sqrt[k]{a} - \varepsilon < \sqrt[k]{a - \varepsilon^k} < \sqrt[k]{b} < \sqrt[k]{a + \varepsilon^k} < \sqrt[k]{a} + \varepsilon.$$

□

- Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig.

Beweis: Die Reihe ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium.

Stetigkeit: Es gilt mit $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \sum_{k=0}^{n} a^k b^k$:

$$\exp(z) - \exp(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(z^k - z_0^k) = (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} z^{k-1-l} z_0^l.$$

Für z mit $|z| \leq |z_0| + 1$ können wir dann abschätzen:

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} |z|^l |z_0|^{k-1-l} \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k(|z_0|+1)^{k-1} \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}(|z_0|+1)^{k-1}$$

Damit folgt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| \leq |z - z_0| \exp(|z_0| + 1).$$

Für z mit $|z| \leq |z_0| + 1$ und $|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{\exp(|z_0|+1)}$ gilt dann also $|\exp(z) - \exp(z_0)| < \varepsilon$. Damit folgt Stetigkeit mit $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\exp(|z_0|+1)}\right\}$. □

- Verallgemeinerung: (Potenzreihe) Sei (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $\rho := \overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} > 0$ und $R := \frac{1}{\rho}$. Dann ist $f: B_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \subset \mathbb{R}\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ stetig.

Beweis: Reihe ist nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent: $\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = \underbrace{|z|}_{<R} \underbrace{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|}}_{=\rho} < 1$.

Stetigkeit: Wie im vorigen Beispiel ergibt sich

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{l=0}^{k-1} |z|^{k-1-l} |z_0|^l.$$

Für z mit $|z| < \frac{|z_0|+R}{2} =: S < R$ ergibt sich dann

$$|f(z) - f(z_0)| \le |z - z_0| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k S^{k-1}}_{=C} = C|z - z_0|$$

mit $C := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k S^{k-1} < \infty$, wegen

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|S^k} = \underbrace{S}_{<R} \underbrace{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \sqrt[k]{|a_k|}}_{=\rho} < 1.$$

Damit folgt Stetigkeit mit $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{C}, S - |z_0|\right\}$. □

Wir notieren noch folgende wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion.

7.6 Proposition (Multiplikation von exp)**:** Es gilt $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Es gilt $\exp(0) = 1$.

Beweis: Letzte Aussage ist klar. Erste Aussage folgt mittels Cauchy-Produkt:

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{z_1^m z_2^{n-m}}{m!(n-m)!}$$

Erweitern mit $1 = \frac{n!}{n!}$ liefert zusammen mit dem binomischen Satz

$$\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} z_1^m z_2^{n-m} = \sum \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2)$$

und die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Eine stetige Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $E(x+y) = E(x)E(y)$ ist durch ihren Wert an der Stelle $x = 1$ eindeutig bestimmt.

7.7 Proposition (Rechenregeln)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ oder $D \subset \mathbb{C}$.

a) Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ stetig in $x_0 \in D$. Dann ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $f + \alpha g : D \to \mathbb{R}^k$ stetig in x_0.

b) (Komposition) Seien $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $g : E \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ gegeben mit $f(D) \subset E$. Ist f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0) \in E$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^l$, $x \mapsto g(f(x))$ stetig in $x_0 \in D$.

c) Seien $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ und $h : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Sind f und h stetig in x_0, so ist $hf : D \to \mathbb{R}^k$, $x \mapsto h(x)f(x)$ stetig in $x_0 \in D$.

Beweis: a) Klar nach Rechneregeln für Folgen: $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, $g(x_n) \to g(x) \Rightarrow f(x_n) + \alpha g(x_n) \to f(x) + \alpha g(x)$

b) Da f, g stetig gilt: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow g(f(x_n) \to g(f(x_0))$

c) $x_n \to x$ impliziert nach Voraussetzungen an h, f

- $h(x_n) \to h(x)$ und
- $f(x_n) \to f(x)$, also insbesondere $f(x_n)$ beschränkt, d.h. existiert $C \geq 0$ mit $|f(x_n)| \leq C$.

Damit folgt nach Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
|h(x_n)f(x_n) - h(x)f(x)| &= |h(x_n)f(x_n) - h(x)f(x_n) + h(x)f(x_n) - h(x)f(x)| \\
(\Delta Ugl) \quad &\leq |h(x_n)f(x_n) - h(x)f(x_n)| + |h(x)f(x_n) - h(x)f(x)| \\
&= |h(x_n) - h(x)||f(x_n)|| + |h(x)||f(x_n) - f(x)| \\
&\leq |h(x_n) - h(x)|C + |h(x)||f(x_n) - f(x)| \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

□

Beachte: Aussagen gelten entsprechend, wenn $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt werden.

Beispiel (Polynome)**:** Seien $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist das Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, stetig.

Beweis: Es handelt sich um Linearkombinationen von Produkten der Identität $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ mit sich selber. (Beachte: z^0 ist ebenfalls stetig). □

7.8 Proposition (Stetigkeit von $\Re$ und $\Im$)**:** Die Abbildungen $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + ib \mapsto a$ und $\Im : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $a + ib \mapsto b$, sind stetig.

Insbesondere ist die Funktion $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ stetig.

Beweis: $\underline{\Re}$: $|\Re z - \Re z_0| \leq |z - z_0| \Rightarrow$ Stetigkeit (mit $\delta = \varepsilon$)

$\underline{\Im}$: analog

<u>Insbesondere:</u> Summe von stetigen Funktionen. □

Beispiel: Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Im \exp(ix)$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Im \exp(ix)$ sind stetig.

Beweis: Verknüpfung stetiger Funktionen. □

Analog zeigt man Stetigkeit der Koordinatenfunktionen.

7.9 Proposition (Stetigkeit der Komponenten von id)**:** Für $j \in \{1, \dots, d\}$ ist die Abbildung

$$p_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \ (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j$$

stetig.

Beweis: $|x_j - x_j^0| \leq |x - x_0| \Rightarrow$ Stetigkeit □

Mithilfe der p_j können wir eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ zerlegen:

Sei $f_j := p_j \circ f$, $j = 1, \ldots, d$. Dann gilt also

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x))$$

7.10 Proposition (Komponentenweise Stetigkeit impliziert Stetigkeit)**:** Sei $f: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ gegeben. Dann ist f genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für alle $j = 1, \ldots, d$ die Funktion $f_j: D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Beweis: $\underline{\Rightarrow:}$ $f_j = p_j \circ f$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $x_n \to x$. Dann gilt $f_j(x_n) \to f_j(x)$. Mit $y_n := f(x_n)$ und $y := f(x)$ folgt dann aus den Betrachtungen zu $\mathbb{R}^d$, dass $y_n \to y$. □

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

Beweis: Rechnung liefert

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| = \frac{1}{|x||y|}|x-y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für y mit $|y - x| \leq |x|/2$ gilt nun $|y| = |x - (x-y)| \geq |x| - |x-y| \geq |x|/2$ und damit

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{2}{x^2}|x-y|$$

Damit folgt Stetigkeit mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}|x^2|$. □

Es gibt zwei globale Sätze für stetige Funktionen.

Erinnerung: $K \subset \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge enthält.

Bemerkung: Kompaktheit bedeutet, dass die Menge abgeschlossen und beschränkt ist.

7.11 Theorem (Stetige Funktionen bilden Kompakta auf Kompakta ab)**:** Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$ und $f: K \to \mathbb{R}^k$ (oder $\mathbb{C}$) stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann gibt es x_n mit $f(x_n) = y_n$. Da (x_n) Folge im kompakten K ist gibt es Teilfolge x_{n_k}, die gegen $x \in K$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) = y \in f(K)$. □

7.12 Folgerung (Stetige reelle Funktionen auf Kompakta nehmen Minimum und Maximum an)**:** Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Maximum an (d.h. es gibt $x_M \in K$ mit $f(x_M) \geq f(x)$ für alle $x \in K$). Ebenso nimmt f auf K sein Minimum an (d.h. es gibt $x_M \in K$ mit $f(x_M) \geq f(x)$ für alle $x \in K$).

Beweis: Wir betrachten nur das Maximum (anderer Fall analog). Da f stetig ist und K kompakt, ist $f(K)$ kompakt, also insbesondere beschränkt. Daher existiert $\sup f(K)$. Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$ mit $y_n \to \sup f(K)$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, gehört auch $\sup f(K)$ zu $f(K)$ und es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sup f(K) = \max f(K)$. □

7.13 Folgerung (Stetige Funktionen auf Intervallen)**:** Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f Maximum und Minimum an.

Beweis: $[a,b]$ ist kompakt. □

7.14 Definition (wegzusammenhängende Menge)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ oder $D \subset \mathbb{C}$. Dann heißt D wegzusammenhängend, wenn es zu beliebigen $x_1, x_2 \in D$ eine stetige Abbildung (Weg)

$$\gamma : [0,1] \to D$$

mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$ gibt.

Beispiele: a) Intervall in $\mathbb{R}$: $\gamma(t) = x + t(y - x)$

b) Kugeln in $\mathbb{R}^d$: $B_R(P) = \{x : |x - P| < R\}$, $\gamma(t) = x + t(y - x)$

c) Ist $d \geq 2$, so ist auch $B_R(P) \setminus \{P\}$ wegzusammenhängend.

d) Ist $d = 1$, so ist $B_R(P)$ wegzusammenhängend, aber $B_R(P) \setminus \{P\}$ ist <u>nicht</u> wegzusammenhängend.

e) Sind $B_{R_1}(P_1)$ und $B_{R_2}(P_2)$ disjunkt, d. h. $B_{R_1}(P_1) \wedge B_{R_2}(P_2) = \varnothing$, so ist $D = B_{R_1}(P_1) \cup B_{R_2}(P_2)$ nicht wegzusammenhängend.

7.15 Satz (Stetige Funktionen bilden wegzusammenhängende Menge auf wegzusammenhängende Mengen ab)**:** Sei D eine wegzusammenhängende Menge und $f : D \to \mathbb{R}^k$, dann ist $f(D)$ wegzusammenhängend.

Beweis: Seien $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ beliebige Elemente in $f(D)$. Dann existiert eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to D$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = y_2$. Dann ist $\rho = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ stetig mit $\rho(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) = y_1$ und $\rho(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) = y_2$. □

Bemerkung: Wir werden sehen, dass die wegzusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}$ gerade die Intervalle sind. Damit liefert der Satz, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen, reellwertigen Funktion gerade ein Intervall ist.

Folgerung: Sei D wegzusammenhängend und kompakt und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $f(D) = [a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$.

Die Menge der stetigen Funktionen ist stabil unter gleichmäßiger Konvergenz:

7.16 Definition (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen)**:** Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ und $f_n : D \to \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ und $f: D \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Dann heißt (f_n) gleichmäßig gegen f konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

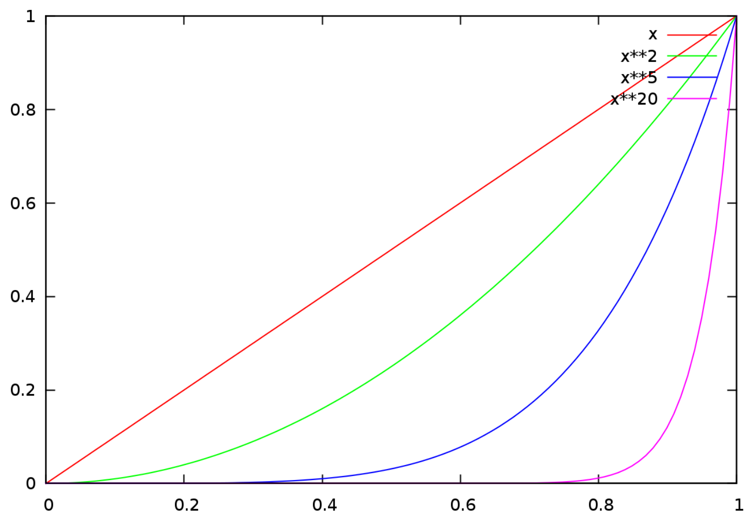
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in D \text{ und } n \geq N_\varepsilon \ .$$

Beispiele:

- Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f.

  Beweis: $|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$, $n \to \infty$ (unabhängig von x!) □

- Sei $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x^n$ und $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $x < 1$ und $f(1) = 1$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$, f_n stetig für jedes n, aber f_n konvergieren nicht gleichmäßig.



  Beweis: Das kann man direkt sehen, oder aus dem folgenden Satz folgern, da f nicht stetig ist. □

7.17 Satz (Stetigkeit ist stabil unter gleichmäßiger Konvergenz)**:** Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ und $f_n : D \to \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$, und $f: D \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Sind alle f_n stetig und konvergieren gleichmäßig gegen f, so ist auch f stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt für diese x also

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

□

Wir führen nun noch eine Verschärfungen des Konzeptes der stetigen Funktion ein.

7.18 Definition (Gleichmäßige Stetigkeit)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^k$ oder $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}$) heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| \leq \delta$.

<u>In Quantoren:</u>

f stetig auf D: Für festes $x \in D$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall y \in D \qquad |y - x| \leq \delta,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f gleichmäßig stetig (selbes δ für alle x und ε):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D \qquad |y - x| < \delta,\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis: $a > 0$: $|f(n) - f(n + a)| = |n^2 - (n + a)^2| = 2an + a^2 \to \infty,\ n \to \infty$ □

7.19 Satz (Stetige Funktionen auf Kompakta sind gleichmäßig stetig)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^d$ oder $D \subset C$ kompakt. Ist $f : D \to \mathbb{R}^k$ (oder $f : D \to \mathbb{C}$) stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen Nein! Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ („ohne δ") mit der Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in D$ existieren mit $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_n \to x \in D$. Wegen $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt dann auch $y_n \to x \in D$. Damit folgt $\varepsilon \leq |f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x) + f(y) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(y) - f(y_n)| \to 0, n \to \infty$. ↯ □

7.20 Definition (Lipschitz-Stetigkeit)**:** $f : D \to \mathbb{R}^k$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $C > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

für alle $x, y \in D$.

Beachte: Lipschitz-stetig heißt gleichmäßig stetig mit $\delta = \varepsilon / C$.

Beispiel: Die Funktion $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Beweis: $|f(0) - f(x)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} x = \frac{1}{\sqrt{x}} |x - 0|$. □

8. Stetige Funktionen auf Intervallen

In diesem Abschnitt untersuchen wir stetige Funktionen auf Intervallen in $\mathbb{R}$.

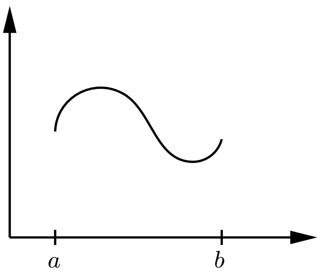


Abbildung 8.1.: eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$

Erinnerung: Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn mit $a, b \in I$ mit $a < b$ auch jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $a \le x \le b$ zu I gehört. Es gibt vier Typen von beschränkten Intervallen:

- geschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}$
- halboffen bei a: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b\}$
- halboffen bei b: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \le b\}$
- offen: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$

mit $-\infty < a \le b < \infty$. Es gilt jeweils $a := \inf I$ und $b := \sup I$.

Einen Satz zu stetigen Funktionen auf Intervallen kennen wir schon:

8.1 Satz (Minimum und Maximum auf Kompakta)**:** Sei $-\infty < a \le b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f *Minimum*, genannt $\min f$, und *Maximum*, genannt $\max f$, an.

Beweis: Das war eine Folgerung im vorigen Abschnitt. ($[a, b]$ kompakt, etc...) □

Der andere Satz zu stetigen Funktionen auf Intervallen ist der Zwischenwertsatz.

8.2 Satz (Zwischenwertsatz)**:** Sei $a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $f(a) < f(b)$. Sei y mit $f(a) < y < f(b)$ gegeben. Gesucht ist ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Sei

$$M := \{t \in [a, b] : f(t) \leq y\}.$$

Dann ist M beschränkt und nicht leer. Damit existiert $x := \sup M$ und es gilt $a < x < b$. Wir zeigen nun $f(x) = y$.

<u>Angenommen $f(x) < y$:</u> Da f stetig ist, gilt dann $f(x') < y$ für alle $x' \in [a, b]$, die nahe an x sind. Insbesondere gibt es $x' > x$ mit $f(x') < y$ (da $x < b$). Dann folgt also $\sup M \geq x' > x$. ↯

<u>Angenommen $f(x) > y$:</u> Da f stetig ist, gilt dann $f(x') > y$ für alle $x' \in [a, b]$, die nahe an x sind. ↯ □

8.3 Folgerung (Nullstellen auf Kompakta)**:** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen, so hat f in (a, b) mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Es 0 liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz wird daher der Wert 0 angenommen. □

Beachte: Ist I ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so kann man die vorigen Sätze natürlich auch auf jedes Teilintervall $[a, b]$ von I anwenden.

8.4 Definition (wegzusammenhängende Menge)**:** Eine Menge M heißt wegzusammenhängend, wenn sich zwei beliebige Punkte $a, b \in M$ durch eine stetige Kurve verbinden lassen, die vollständig in M liegt.

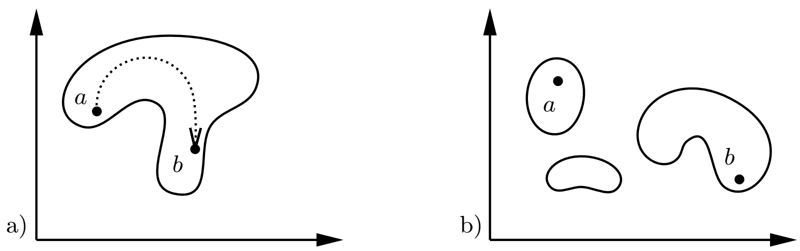


Abbildung 8.2.: Beispiele für eine wegzusammenhängende Menge (a) und eine nicht wegzusammenhängende Menge (b) im $\mathbb{R}^2$

8.5 Satz (Wegzusammenhängende Mengen in $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle)**:** Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend, und ist D eine wegzusammenhängende Menge in $\mathbb{R}$, so ist D ein Intervall und umgekehrt.

Beweis: Sei $D \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend. Seien $x, y \in D$. Dann existiert ein $\gamma : [0, 1] \to D$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt γ jeden Wert zwischen x und y an. Da γ ganz in D verläuft, gehört damit jeder Wert zwischen x und y zu D. Also ist D ein Intervall.

Sei $D \subset I$ ein Intervall. Seien $x, y \in D$. Ohne Einschränkung $x < y$. Dann ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = x + t(y - x)$ eine stetige Funktion mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ und $\gamma([0,1]) \subset D$. □

Damit können wir die Bilder von Intervallen unter stetigen Funktionen ganz genau beschreiben.

8.6 Folgerung (Stetige Bilder von Intervallen sind Intervalle)**:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I)$ ein Intervall. Hat I die Form $[a, b]$ mit $-\infty < a \le b < \infty$, so hat $f(I)$ die Form $[c, d]$.

Beweis: Erste Aussage: I Intervall $\Longrightarrow$ I wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $f(I)$ wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $f(I)$ Intervall.

Zweite Aussage: $I = [a, b] \Longrightarrow I$ kompakt $\Longrightarrow f(I)$ kompakt. Da $f(I)$ nach erster Aussage ein Intervall ist, folgt die Behauptung. □

8.7 Definition (Einseitiger Grenzwert)**:** Ist $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}^k$ (oder $\mathbb{C}$), so ist es sinnvoll einseitige Grenzwerte einzuführen. Man definiert den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = c \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D,\; x_0 < x < x_0 + \delta,\; |f(x) - c| < \varepsilon,$$

sowie den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = c \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D,\; x_0 - \delta < x < x_0,\; |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Man kann einseitige Grenzwerte gut untersuchen indem man in die Funktion konvergente Folgen einsetzt.

8.8 Theorem (Charakterisierung von Berührpunkten)**:** $D \subset \mathbb{R}$, x_0 Berührpunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}^k$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} f(x) = c \iff \lim_{x \to x+} f(x) = c \text{ und } \lim_{x \to x_0-} f(x) = c$$

Beweis: Folgt mit der ε-δ-Schreibweise des Grenzwertes direkt aus den Definitionen. □

8.9 Definition (Monotonie)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt f

- monoton wachsend/steigend, wenn $f(x) \le f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.
- streng monoton wachsend/steigend, wenn $f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.
- monoton fallend, wenn $f(x) \ge f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.
- streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(y)$ für alle $x, y \in D$ mit $x < y$.

8.10 Satz (Eigenschaften monotoner Funktionen)**:** Sei $-\infty < a \le b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann existieren in jedem Punkt $x_0 \in [a,b]$ die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0-} f(x)$. Insbesondere ist f in einem Punkt x_0 entweder stetig, oder hat dort eine Sprungstelle (d.h. $|\lim_{x\to x_0+} f(x_0) - \lim_{x\to x_0-} f(x_0)| > 0$).

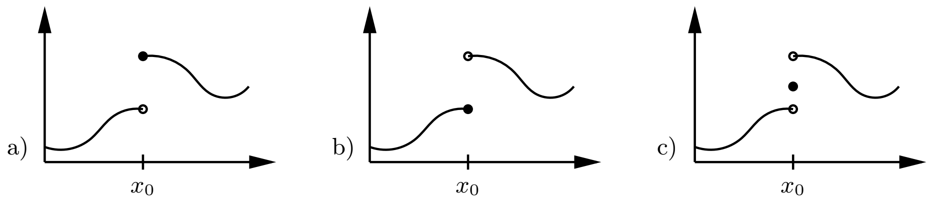


Abbildung 8.3.: Es gibt drei Typen von Sprungstellen: a) Funktionswert gleich Grenzwert von rechts b) Funktionswert gleich Grenzwert von links c) Funktionswert strikt zwischen Grenzwert von links und von rechts

Beweis: Existenz der Grenzwerte: Betrachte nur den Grenzwert von links. Grenzwert von rechts analog.

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend. Dann ist die Menge $\{f(x) : x < x_0\}$ durch $f(x_0)$ nach oben beschränkt und besitzt daher ein Supremum c. Ist (x_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $x_n \to x_0$ und $x_n < x_0$ für alle n, so gilt $\lim f(x_n) = c$. Denn:

Wegen $x_n < x_0$ gilt $f(x_n) \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $x < x_0$ mit $c - \varepsilon < f(x)$. Für große $n \in \mathbb{N}$ gilt nun wegen $x_n \to x_0$ natürlich $x_n \ge x$ und damit wegen der Monotonie $c - \varepsilon < f(x) \le f(x_n) \le c$.

Zu Insbesondere: Sei $c_- := \lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $c_+ := \lim_{x\to x_0+} f(x)$. Aufgrund der Monotonie gilt $c_- \le f(x_0) \le c_+$. Sind also c_- und c_+ gleich, so stimmen sie mit $f(x_0)$ überein und f ist in x_0 stetig. Stimmen c_- und c_+ nicht überein, so hat man eine Sprungstelle. □

8.11 Satz (Umkehrfunktion)**:** Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv.

Insbesondere existiert die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = x$ für $x \in I$ mit $f(x) = y$. Ist f streng monoton wachsend/fallend, so ist auch g streng monoton wachsend/fallend.

Beweis: Ohne Einschränkung sei f streng monoton wachsend. Für ein beliebiges $\tilde{x} \neq x$ mit $x < \tilde{x}$. Es ist dann $f(x) < f(\tilde{x})$.

Zu Insbesondere: Sei $y < y'$ und x, x' mit $f(x) = y$, $f(x') = y'$. Dann gilt also $x \neq x'$. Wäre $x > x'$, so folgte $y = f(x) > f(x') = y'$. ↯ □

Beispiel: $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$. Dann ist f streng monoton wachsend mit $f([0,\infty)) = [0,\infty)$ und die Umkehrfunktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $g(y) = \sqrt[k]{y}$.

Beachte: Die Umkehrfunktion entsteht durch „vertauschen“ von x und y im Graphen von f. Das entspricht einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

8.12 Satz (Umkehrfunktion stetiger streng monotoner Funktionen ist stetig)**:** Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $f(I)$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : f(I) \to I \subset \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Nach der Folgerung aus dem Zwischenwertsatz ist $f(I)$ ein Intervall. Es ist g streng monoton. Wegen $g(f(I)) = I$ hat g keine Sprungstellen. Also ist g stetig. □

Bemerkung: Auch wenn f nicht stetig ist, ist g stetig. Allerdings ist dann $f(I)$ kein Intervall.

Beispiel: Sei $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann ist exp streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis: Offenbar $\exp(0) = 1$ und $\exp(s) > 1$ für $s > 0$. Insbesondere gilt $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Für $x < x'$ also $x' = x + s$ mit $s > 0$ gilt dann also

$$\exp(x') = \exp(x + s) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \underbrace{\exp(s)}_{>1} > \exp(x)$$

und exp ist streng monoton wachsend. Weiterhin gilt $\exp(n) \geq n$ und $\exp(-n) \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also enthält $\exp(\mathbb{R})$ das Intervall $[\frac{1}{n}, n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist und $\exp(x) > 0$ folgt die Aussage über $\exp(\mathbb{R})$. □

8.13 Definition (uneigentlicher Grenzwert)**:** Ist $D \subset \mathbb{R}$ nach oben/unten unbeschränkt, und $c \in \mathbb{R}$, so definiert man:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c$$

$:\Longleftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $L \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x \geq L / x \leq L$.

$\Longleftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$ für jede Folge $(x - n)$ in D mit $x_n \to \pm\infty$.

Man nennt solche Grenzwerte auch uneigentliche Grenzwerte, da sie dem Grenzwertbegriff eigentlich nicht vollständig entsprechen.

9. Differenzierbarkeit und Ableitung

Idee: Eine Funktion f ist in einem Punkt differenzierbar, wenn sie in der *Nähe* des Punktes *gut* durch eine lineare (affine) Funktion approximiert wird. Die lineare Funktion liefert dann die Ableitung von f.

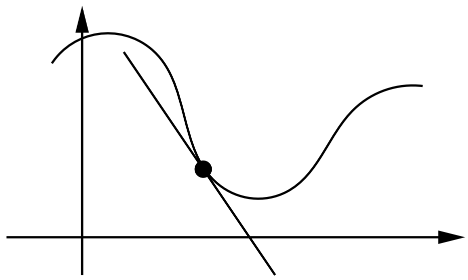
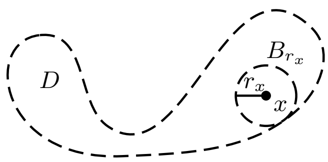


Abbildung 9.1.: Idee der Ableitung - Approximation von f durch eine lineare Funktion

Nähe zu einem Punkt bedeutet hierbei, dass um den Punkt noch Platz ist. Dieser Platz wird durch den Begriff der *offenen Menge* beschrieben. *Gute Approximation* meint, dass die Abweichung zwischen der linearen Funktion und f sehr klein ist.

9.1 Definition (offene Menge)**:** Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^k$ heißt offen, wenn „um jeden Punkt noch Platz in der Menge“ ist, d. h. zu jedem Punkt $x \in U$ ein $r_x > 0$ existiert mit

$$B_{r_x}(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r_x\} \subset U$$



Beispiele:

- offene Kugel: $B_R(P) = \{y : |y - P| < R\}$
- offenes Intervall[1]: $(a,b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{b-a}{2}\right)$

Erinnerung (lineare Abbildung)*:* Eine Abbildung $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ heißt linear, wenn $L(\alpha x + y) = \alpha Lx + Ly$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^k$ gilt. Jede lineare Abbildung wird durch eine Matrix beschrieben, d.h. es gilt

$$(Lx)_i = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} x_j, i = 1, \dots, d$$

mit geeigneten L_{ij}, $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, k$. Insbesondere ist jede lineare Abbildung stetig, da jede Komponente eine Summe stetiger Abbildungen ist.

Wir geben nun eine präzise Fassung obiger Idee der Ableitung.

9.2 Definition (Differenzierbarkeit)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Sei $x_0 \in U$. Dann heißt f in x_0 differenzierbar, wenn eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \varphi_{x_0}(x),$$

sodass für den Fehler

$$\varphi_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - L \cdot (x - x_0)$$

gilt

$$\frac{\varphi_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \to 0, x \to x_0.$$

In diesem Fall heißt L die Ableitung von f in x_0 und man schreibt $Df(x_0) = L$.

Ist f in jedem $x_0 \in U$ differenzierbar, so heißt f auf ganz U differenzierbar.

Beachte: L ist eindeutig.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + L_1 \cdot (x - x_0) + \varphi_1(x)$$
$$f(x) = f(x_0) + L_2 \cdot (x - x_0) + \varphi_2(x)$$

Dann gilt

$$(L_1 - L_2)(x - x_0) = \phi_1(x) - \phi_2(x) = \frac{\phi_1(x) - \phi_2(x)}{|x - x_0|} |x - x_0|$$

Betrachtet man $x = x_0 + hy$ mit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ und $y \in \mathbb{R}^d$, so gilt also

$$(L_1 - L_2)(hy) = \frac{\phi_1(x) - \phi_2(x)}{|hy|} |hy|$$

und damit

$$(L_1 - L_2) y = \frac{\phi_1(x) - \phi_2(x)}{|hy|} \frac{|hy|}{h} \to 0.$$

[1] ein Intervall ist der eindimensionale Spezialfall einer Kugel

Also ($h \to 0$)

$$(L_1 - L_2)y = 0.$$

Da y beliebig war, folgt $L_1 = L_2$. □

9.3 Satz (Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist es dort auch stetig.

Beweis: Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \varphi(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|}|x - x_0|.$$

Damit sieht man, dass rechte Seite gegen $f(x_0)$ konvergiert für $x \to x_0$. □

Wir haben nun die Ableitung L charakterisiert. Als Nächstes soll es darum gehen, wie man diese lineare Funktion berechnet.

9.4 Satz (Berechnen der Ableitung)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Dann existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f_i(x_0) := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{h}(f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0))$$

für $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, k$ und die Ableitung L wird durch die Jacobi-Matrix / Differentialmatrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j}$$

gegeben.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + L \cdot (x - x_0) + \varphi(x)$$

mit $\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \to 0$ und $L = (L_{i,j})$. Wir setzen $x = x_0 + he_j$ und betrachten die i-te Komponente:

$$f_i(x_0 + he_j) = f_i(x_0) + (L \cdot (he_j))_i + \varphi_i(x)$$

$$f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0) = h(Le_j)_i + \varphi_i(x)$$

$$\frac{f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0)}{h} = L_{i,j} + \frac{\varphi(x_0 + he_j)}{h}$$

Wegen $\frac{|\varphi_i(x_0 + he_j)|}{|h|} = \frac{|\varphi_i(x_0 + he_j)|}{|x - x_0|} \to 0$, $h \to 0$, folgt

$$\frac{f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0)}{h} \to L_{i,j},\ h \to 0.$$

Das beendet den Beweis. □

9.5 Definition (Stetig partielle Differenzierbarkeit)**:** Falls die partiellen Ableitungen von $f: U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ existieren und stetig sind, so heißt f *stetig partiell differenzierbar.*

9.6 Satz (Stetige partielle Differenzierbarkeit impliziert Differenzierbarkeit)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^d$ gegeben. Existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f_i(x_0) := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{1}{h}(f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0))$$

für $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, k$ und sind stetig in x_0, so ist f differenzierbar in x_0 und die Ableitung L wird durch die Jacobi-Matrix / Differentialmatrix

$$L = \left(\frac{\delta f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j}$$

gegeben.

Beweis: Später.

Nun wollen wir detailliert auf den eindimensionalen Fall eingehen.

Beachte: Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist durch eine 1×1 Matrix (d.h. eine Zahl c) gegeben. Eine linear affine Abbildung ist damit eine Gerade!

9.7 Lemma (Charakterisierung der Differenzierbarkeit in einer Dimension)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(i) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x),$$

für $\varphi: D \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} = 0$.

(ii) Der Grenzwert $\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

In diesem Fall gilt

$$c = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Beweis: $(i) \Longrightarrow (ii)$: Es gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c + \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \to c, x \to x_0.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Setze $c := \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Dann erfüllt φ mit $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \varphi(x)$ also

$$\frac{\varphi(x)}{(x - x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \to 0, x \to x_0.$$

□

Beachte: • Im eindimensionalen Fall gilt:

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)} = 0 \iff \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} = 0$$
$$\iff \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{|\varphi(x)|}{|x-x_0|} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \left|\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)}\right| = 0$$

- Erinnerung Grenzwert: $\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$ bedeutet

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D,\ x \neq x_0,\ |x-x_0| < \delta : \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - c\right| < \varepsilon$$

  oder äquivalent

  $$x_n \to x_0 \Longrightarrow \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} \to c.$$

- Ausrechnen des Grenzwerts:

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x-x_0} \text{ mit } h = x - x_0$$

- Der *Differenzenquotient* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist gerade die Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.
- Der *Differentialquotient* $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0)$.
- Die *Tangente* durch $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben durch die Gerade

  $$T = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

  Das ist gerade die lineare Approximation.

9.8 Proposition (Rechenregeln)**:** Sei $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

(a) $f + \alpha g : (a,b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + \alpha g(x)$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f+\alpha g)'(x_0) = f'(x_0) + \alpha g'(x_0)$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) (Produktregel) Das Produkt $fg : (a,b) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

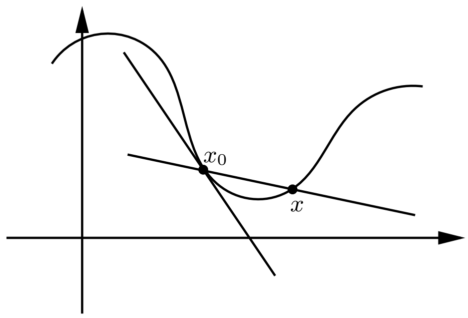


Abbildung 9.2.: geometrische Deutung von Differenzen- und Differentialquotient

(c) (Quotientenregel) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis: (a) Einfach.

(b) $\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)g(x_0)+ f(x_0)g'(x_0),\ x \to x_0$

(c) Es reicht das 'Insbesondere' zu zeigen. (Dann folgt erste Aussage durch Anwenden der Produktregel.) Es gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)} \to g'(x_0)\frac{1}{g(x_0)g(x_0)},\ x \to x_0$$

□

9.9 Proposition (Kettenregel)**:** Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ und $g:(c,d) \to (a,b)$ gegeben. Ist g differenzierbar in x_0 und f differenzierbar in $g(x_0)$, so ist $f \circ g : (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

Beweis: Idee:

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Da $g(x) - g(x_0) = 0$ möglich ist, muss man etwas genauer sein. Man ersetzt dazu für $g(x) = g(x_0)$ den Quotienten $\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$ durch $f'(g(x_0))$. Genauer:

Setze $y_0 := g(x_0)$ und definiere:

$$f^*(\eta) = \begin{cases} \frac{f(\eta)-f(y_0)}{\eta-y_0}, & \eta \neq y_0 \\ f'(y_0), & \eta = y_0 \end{cases}$$

Dann gilt:

- $\lim_{\eta\to y_0} f^*(\eta) = f'(y_0) = f^*(y_0)$.
- $f(\eta) - f(y_0) = f^*(\eta)(\eta - y_0)$ für alle η.

Damit können wir nun mit $\eta = g(x)$ schließen

$$\frac{f\circ g(x) - f\circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\eta) - f(y_0)}{x - x_0} = f^*(\eta)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Nun folgt die Behauptung leicht. □

9.10 Proposition (Ableitung der Umkehrfunktion)**:** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend, stetig und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1} : f(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweis: $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, also $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$. Dann folgt $x \to x_0$ aus $y \to y_0$.Damit erhält man

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$$

für $x \to x_0$. □

Bemerkung: Die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ ist nötig, andernfalls hat man eine waagrechte Tangente. Bsp. Quadrat und Wurzel bei 0.

Beispiele (Ableitungen)**:**

- Die konstante Funktion hat die Ableitung 0.

  Beweis: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0$ □

- Die Ableitung der linear (affinen) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ist die konstante Funktion mit dem Wert a. Die Ableitung beschreibt damit immer eine lineare Approximation.

  Beweis: $\frac{(ax+b)-(ax_0+b)}{x-x_0} = \frac{a(x-x_0)}{x-x_0} = a$ □

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ hat die Ableitung $f'(x) = kx^{k-1}$.

  Beweis: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^k-x_0^k}{x-x_0} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j x_0^{k-1-j} \to \sum_{j=0}^{k-1} x_0^j x_0^{k-1-j} = kx_0^{k-1}$. □

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ hat die Ableitung $\sum_{j=1}^n a_j j x^{j-1}$.

  Beweis: Das folgt direkt aus obigen Beispiel. □

- $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^k}$ hat die Ableitung $f'(x) = -kx^{k-1}$.

  Beweis: Die Quotientenregel liefert $f'(x) = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}}$. □

- Es gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0)$$

Insbesondere hat die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp x$ die Ableitung $\exp(x)$.

Beweis: Aufgrund der Funktionalgleichung gilt

$$\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0}.$$

Daher reicht es $\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h)-1}{h-0} = 1$ zu zeigen. Dazu:

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(h) - 1}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1\right) \\
&= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} \\
&= 1 + h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}.
\end{aligned}$$

Für $|h| \leq 1$ gilt $\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2}}{k!}\right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \exp(1)$. Damit folgt

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \to 1, h \to 0.$$

□

- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sin(x) = \Im \exp(ix)$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos(x) = \Re(\exp(ix)$ sind differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = \sin$. Insbesondere gilt $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis: Wir betrachten nur sin. (Der andere Fall kann analog behandelt werden.)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \Im\left(\frac{\exp(ix) - \exp(ix_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \Im\left(i \frac{\exp(ix) - \exp(ix_0)}{ix - ix_0}\right) \\
&= \Re\left(\frac{\exp(ix) - \exp(ix_0)}{ix - ix_0}\right) \\
&\to \Re \exp(ix_0) = \cos(x_0).
\end{aligned}$$

Zum „Insbesondere“: $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \to \sin'(0) = \cos(0) = 1$. □

Beispiele (Umkehrfunktionen):

- $k-te$ Wurzel: $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[k]{y} = y^{1/k}$ ist differenzierbar mit der Ableitung $g'(y) = 1/ky^{1/k-1}$.

Beweis: g ist Umkehrfunktion von $f(x) = x^k$. Damit gilt mit $y = f(x)$, $x = g(y) = y^{1/k}$ also

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{kx^{k-1}} = \frac{1}{k}\frac{1}{y^{1-\frac{1}{k}}}.$$

□

- Logarithmus: $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = \ln y$ ist differenzierbar mit $\ln'(y) = 1/y$.

  Beweis: ln ist Umkehrfunktion von exp. Damit gilt mit $y = \exp(x)$, $x = \ln y$ also

  $$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

  □

Beispiel: Die Funktion $\text{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in $x \neq 0$ differenzierbar und in $x = 0$ nicht differenzierbar. (Dort existieren die links und rechtsseitigen Ableitungen und sind verschieden).

Beweis: Für $x_0 > 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x)-\text{abs}(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \to 1$, $x \to x_0$.

Für $x_0 < 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x)-\text{abs}(x_0)}{x-x_0} = \frac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1 \to -1$, $x \to x_0$.

Für $x_0 = 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x)-\text{abs}(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \pm 1$ für $x > 0$ bzw. $x < 0$. Damit existiert die Ableitung nicht. □

Zum Ende des Abschnittes geben wir noch einige wichtige Beispiele in höheren Dimensionen.

Beispiel (differenzierbare Kurve)**:** Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^d$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \dots \\ \gamma_d(t) \end{pmatrix}$. Dann ist γ genau dann differenzierbar in t_0, wenn jedes γ_i, $i = 1,\dots,d$ differenzierbar in t_0 ist. In diesem Fall gilt

$$D\gamma(t_0) \equiv \gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \dots \\ \gamma_d'(t_0) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Ist γ differenzierbar, so existieren die partiellen Ableitungen und damit die Ableitungen der γ_i. Für die Umkehrung setzten wir

$$c := \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \dots \\ \gamma_d'(t_0) \end{pmatrix}$$

und betrachten

$$\varphi(t) = \gamma(t) - \gamma(t_0) - c(t - t_0).$$

Dann folgt:

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t - t_0}\right| = \frac{1}{|t - t_0|}\left|\begin{pmatrix} \gamma_1(t) - \gamma_1(t_0) - \gamma_1'(t_0)(t - t_0) \\ \dots \\ \gamma_d(t) - \gamma_d(t_0) - \gamma_d'(t_0)(t - t_0) \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{|t - t_0|}\sum_{j=1} |\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0) - \gamma_j'(t_0)(t - t_0)|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)}{t - t_0} - \gamma_j'(t_0) \right|.$$

Nach Voraussetzung geht jeder Summand gegen 0. □

Beispiel (Skalares Feld)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben. Ist f differenzierbar in $x_0 \in U$, so ist

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right)$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h} = f'_{e_i, x_0}(0)$$

wobei $f_{e_i, x_0}(h) = f(x_0 + he_i)$.

Beachte: Partielle Ableitungen sind Ableitungen einer eindimensionalen Funktion.

Beweis: Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Notation: $\nabla f(x_0) = Df(x_0)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix}.$

10. Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

In diesem Kapitel wollen wir differenzierbare Funktionen auf Intervallen detaillierter behandeln. Dabei geht es insbesondere um Extrema von Funktionen und einen zentralen Satz der Analysis, den Mittelwertsatz.

Im Folgenden betrachten wir Funktionen

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Diese Funktionen sind meist

- stetig auf $[a,b]$
- differenzierbar in (a,b)

10.1 Definition (Lokale Extrema)**:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann hat f in $\xi \in [a,b]$ ein *lokales* $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$ wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $\substack{f(x) \leq f(\xi) \\ f(x) \geq f(\xi)}$, für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - \xi| < \delta$.

Sind die Ungleichungen strikt für $x \neq \xi$, so spricht man von einem *strikten lokalen* $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$.

Gilt $\substack{f(x) \leq f(\xi) \\ f(x) \geq f(\xi)}$ für alle $x \in [a,b]$, so spricht man von einem *globalen* $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$ in ξ.

Sind diese Ungleichungen strikt für $x \neq \xi$, so spricht man von einem *strikten globalen* $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$.

10.2 Satz (Notwendige Bedingung für lokale Extrema)**:** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f in $\xi \in (a,b)$ ein lokales Extremum, so gilt

$$f'(\xi) = 0$$

Beweis: Wir betrachten nur den Fall, dass f in ξ ein lokales Maximum besitzt (für Minimum ist der Beweis analog).

<u>Für $x > \xi$</u> (x nahe an ξ)

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

Für $x < \xi$ (x nahe an ξ)

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$f'(\xi) = 0$$

□

Bemerkung:

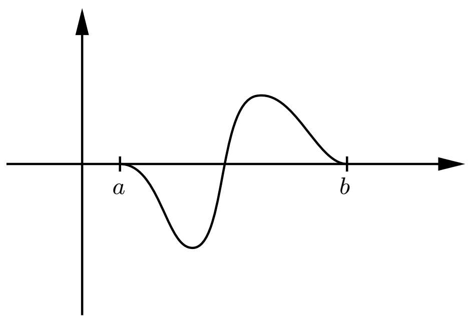
- Das ist eine notwendige Bedingung, aber keine hinreichende, wie das Beispiel $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ zeigt.
- Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ kann ein Extremum in a oder b haben.

  Beispiel: Die Funktion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ hat Extrema in 0 und 1.
- Eine differenzierbare Funktion muss auf (a,b) kein Extremum haben.

  Beispiel: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

10.3 Satz (Rolle)**:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Weiterhin sei $f(a) = f(b) = 0$.

Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



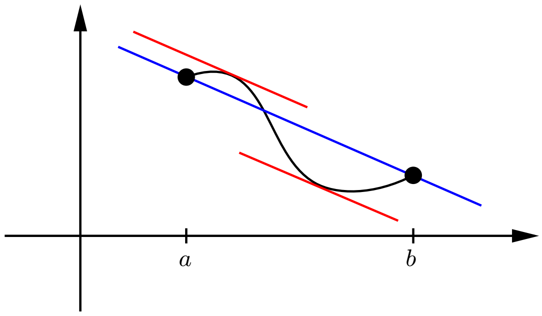
Beweis: f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Daher nimmt f ein Minimum und ein Maximum an.

Fall 1: $\min f = \max f = 0$
$\Rightarrow f \equiv 0 \quad \Rightarrow f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a,b)$

Fall 2: $\min f \neq 0$ oder $\max f \neq 0$
o.E. $f(\xi) = \max f \neq 0$ (Minimum analog) $\Rightarrow \xi \in (a,b)$ Extremum $\Rightarrow f'(\xi) = 0$ □

10.4 Satz (Mittelwertsatz)**:** Sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b). Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Beweis: Betrachte ein $F:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ mit

$$F(x)=f(x)-\underbrace{f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{Gerade durch }(a,f(a)),(b,f(b))}$$

Dann ist F steig und differenzierbar auf (a,b) und es gilt $F(a)=0=F(b)$.

Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $\xi\in(a,b)$ mit $F'(\xi)=0$, dass heißt $0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

10.5 Satz (Verallgemeinerung des Mittelwertsatz)**:** Seien $f,g:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$(f(b)-f(a))g'(\xi)=(g(b)-g(a))f'(\xi)$$

Beweis: Wende Satz von Rolle an auf

$$F(x)=(f(b)-f(a))(g(x)-g(a))-(g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

F ist stetig, differenzierbar auf (a,b) und $F(a)=0,\ F(b)=0$.

Das liefert mit $\xi\in(a,b)$ mit

$$0=F'(\xi)=(f(b)-f(a))g'(\xi)-(g(b)-g(a))f'/\xi)$$

die Behauptung. □

Beachte:
- aus dem Mittelwertsatz folgt der Satz von Rolle
- aus der Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes folgt der Mittelwertsatz mit $f=f$ und $g=\mathrm{id}$

- aus dem Satz von Rolle folgt die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

10.6 Satz (Charakterisierung von Monotonie mittels Ableitungen)**:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:

a) f konstant $\Leftrightarrow$ $f' \equiv 0$ auf (a,b)

b) f monoton $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$ $\Leftrightarrow$ $\substack{f' \geq 0 \\ f' \leq 0}$ auf (a,b)

c) $\substack{f' > 0 \\ f' < 0}$ $\Rightarrow$ f ist strikt $\substack{\text{wachsend} \\ \text{fallend}}$

Beweis: a) $\underline{\Rightarrow}$: klar

$\underline{\Leftarrow}$: Ohne Einschränkungen seien $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$ (anderer Fall analog). Dann gilt nach dem Mittelwertsatz für ein ξ mit $x < \xi < y$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0$$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = 0 \quad \Rightarrow f(y) = f(x) \quad \Rightarrow f = \text{const}$

b) Wir beweisen: f monoton wachsend $\Leftrightarrow f' \geq 0$ auf (a,b).

$\underline{\Rightarrow}$: $\xi \in (a,b)$. Dann gilt für $x \neq \xi$

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad \Rightarrow f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

$\underline{\Leftarrow}$: Seien $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$. $\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0 \quad \overset{y-x>0}{\Rightarrow} f(y) - f(x) \geq 0$

c) Wir beweisen: $f' > 0 \quad \Rightarrow f$ strikt wachsend.

MWS $\quad \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) > 0 \quad \Rightarrow f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$

□

Bemerkung: • Die Umkehrung in c) gilt nicht. Betrachte dazu $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ in 0.

- a) folgt aus b) da: f konstant $\Leftrightarrow$ f wachsend und fallend

10.7 Folgerung (Ableitung bestimmt Funktion bis auf eine Konstante)**:** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Gilt $f' = g'$ auf (a,b), so ist $f - g$ konstant.

Insbesondere folgt $f = g$, falls $f' = g'$ und $f(\xi) = g(\xi)$ für *ein* $\xi \in (a,b)$.

Beweis: Definiere $h := f - g$. Dann gilt $h' = f' - g' = 0$ auf (a,b). Nach obigem Satz ist h =const.

Zu Insbesondere: h =const und $h(\xi) = 0$ □

Nachdem wir nun die erste Ableitung untersucht haben, wollen wir sehen, was man aus der zweiten Ableitung lernen kann.

Notation: Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar, so nennt man $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f.

10.8 Satz (Hinreichende Bedingung für strikte lokale Extrema)**:** Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar (d. h. f' und f'' existieren). Gilt für ein $\xi \in (a,b)$ sowohl $f'(\xi) = 0$ als auch $\substack{f''(\xi)<0 \\ f''(\xi)>0}$, so hat f in ξ ein striktes lokales $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$.

Beweis: Wir betrachten $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) < 0$ (anderer Fall analog).

$0 > f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim \frac{f'(x)}{x-\xi}$
$\Rightarrow$ für alle x nahe an ξ gilt $\frac{f'(x)}{x-\xi} < 0$
$\Rightarrow$ Es gibt ein $\delta > 0$ mit

- $f'(x) < 0$ für $x \in (\xi, \xi + \delta)$
- $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi)$

$\Rightarrow f$ strikt $\substack{\text{fallend} \\ \text{wachsend}}$ in $\substack{(\xi,\xi+\delta) \\ (\xi-\delta,\xi)}$
$\Rightarrow$ striktes Maximum in ξ $\square$

Bemerkung: Diese hinreichende Bedingung ist nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$. Dann hat f ein striktes Minimum in $\xi = 0$. Aber $f''(\xi) = 12\xi^2 = 0$.

10.9 Definition (konkav und konvex)**:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt $\substack{\text{konkav} \\ \text{konvex}}$, wenn für alle $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt:

$$f(\lambda c + (1-\lambda)d) \substack{\geq \\ \leq} \lambda f(c) + (1-\lambda) f(d)$$

<u>konvex:</u> Sekantenabschnitt verläuft oberhalb der Funktion

<u>konkav:</u> Sekantenabschnitt verläuft unterhalb der Funktion

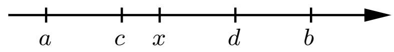
Beachte: f konvex $\Leftrightarrow -f$ konkav

10.10 Satz (Charakterisierung konkaver und konvexer Funktionen)**:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar au (a,b). Dann ist f $\substack{\text{konkav} \\ \text{konvex}}$ genau dann, wenn gilt $\substack{f''\geq 0 \\ f''\leq 0}$ auf (a,b).

Beweis: Wir zeigen nur „$\Leftarrow$“. Wir betrachten nur $f'' \geq 0$ (anderer Fall analog).

<u>Idee:</u> $f'' \geq 0 \Leftrightarrow f'$ monoton wachsend $\Leftrightarrow f$ konvex

Sei $a < c < d < b$, $\lambda \in (0,1)$. Dann definieren wir $x := \lambda c + (1-\lambda)d$.



Mit dem Mittelwertsatz folgt dann:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi) \leq f'(x) \qquad (\xi \in (c,x))$$

$$\frac{f(d)-f(x)}{d-x} = f'(\eta) \geq f'(x) \qquad (\eta \in (c,x))$$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq \frac{f(d)-f(x)}{d-x} \Rightarrow (f(x)-f(c))d-x) \leq (f(d)-f(x))(x-c)$

Nun gilt:

$$d-x = d-\lambda c-(1-\lambda)d = \lambda(d-c)$$

$$x-c = \lambda c+(1-\lambda)d-c = (1-\lambda)(d-c)$$

$\Rightarrow (f(x)-f(c))\lambda \leq (f(d)-f(x)(1-\lambda) \Rightarrow f(x) = f(\lambda c+(1-\lambda)d) \leq f(d)(1-\lambda)+f(c)\lambda \Rightarrow f$ konvex $\square$

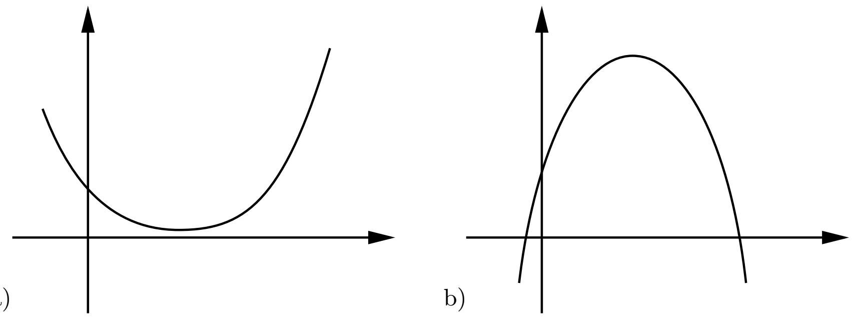


Abbildung 10.1.: a) konvexe Funktion, b) konkave Funktion

Beispiele:

- Die Funktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ ist konkav.

  Beweis: $\ln'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\square$

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp x$ ist konvex.

  Beweis: $\exp''(x) = \exp x > 0$ $\square$

Bemerkung: Allgemein gilt: Ist f konvex mit der Umkehrfunktion g, so ist g konkav.

Beispiel (Allgemeine Potenz)**:** Für $a > 0$ definiert man $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x$ durch $a^x := \exp(x\ln a)$. Dann ist (nach der Kettenregel) die erste Ableitung geben durch $\ln a \exp(x \ln a) = (\ln a)a^x$ und die zweite Ableitung ist gegeben durch $(\ln a)^2 a^x$.

Insbesondere ist die zweite Ableitung positiv für $a \neq 1$.

Bemerkung (Rechenregeln für Potenzen)*:*

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Beweis:

- $a^x b^x = \exp(x \ln a)\exp(x \ln b) = \exp(x(\ln a + \ln b)) = \exp(x \ln(ab)) = (ab)^x$
- $a^x a^y = \exp(x \ln a)\exp(y \ln a) = \exp((x+y)\ln a) = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(y \ln(\exp(x \ln a))) = \exp(yx \ln a) = a^{xy}$

Oben nutzten wir die Beziehung $\ln a + \ln b = \ln(ab)$. Das gilt wegen

$$x = \ln a,\ y = \ln b \Rightarrow ab = e^x e^y = e^{x+y} \Rightarrow \ln(ab) = x + y = \ln a + \ln b.$$

□

Um das Verhalten am Rand von Intervallen zu untersuchen kann die rechtsseitige/linksseitige Ableitung nützlich sein: $a < b$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, rechtsseitige Ableitung von f in a

$$:= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, linksseitige Ableitung von f in b

$$:= \lim_{h \to 0} \frac{f(b-h) - f(b)}{h} = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Dann: $f: (a,b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a,b)$
f differenzierbar in x_0 $\Leftrightarrow$In x_0 existieren links- und rechtsseitige Ableitung von f und stimmen überein.

11. Taylorscher Satz und L'Hospitalsche Regeln

In diesem Abschnitt diskutieren wir zwei nützliche Konsequenzen aus der Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.

11.1 Definition (k-te Ableitung)**:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$. Man definiert induktiv die k-te Ableitung $f^{(k)}$ durch

$$f^{(0)} := f,$$

$$f^{(k+1)} := \left(f^{(k)}\right)',$$

falls $f^{(k)}$ auf D differenzierbar ist.

Wir wollen nun einen zentralen Satz der Analysis diskutieren, der auch für die Physik von großer Bedeutung ist: der *Taylorsche Satz*.

Idee:

- Wenn f stetig in x_0 ist, so kann man die Funktion in der Umgebung von x_0 auch schreiben als $f(x) = f(x_0) +$ kleiner Fehler$r(x)$. Für den kleinen Fehler gilt dann
$$r(x) = f(x) - f(x_0); \qquad r(x) \to 0,\ x \to x_0.$$
- Wenn f differenzierbar in x_0 ist, so kann man schreiben $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) +$ kleiner Fehler $\varphi(x)$. Es gilt
$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \to 0,\ \ x \to x_0$$
- f k-mal differenzierbar in x_0
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \ sehr\ kleiner\ Fehler$$

11.2 Definition (Das n-te Taylorpolynom)**:** Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann definiert man zu $x_0 \in (a, b)$ das n-te Taylorpolynom von f im Punkt x_0 durch:

$$P_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

11.3 Proposition (verschwindendes Taylorpolynom)**:** Sei P ein Polynom vom Grad n (oder kleiner) mit: (für ein c)

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(n)}(c) = 0$$

Dann gilt

$$P \equiv 0.$$

Beweis: Induktion nach n.

$\underline{n = 0:}$ $P(x) = a_0 \overset{P(c)=0}{\Longrightarrow} a_0 = 0$

$\underline{n \Rightarrow n+1:}$ $\tilde{P} := P'$. Dann hat $\tilde{P}$ den Grad n (oder kleiner) und es gilt:

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}^{(k)}(c) = P^{k+1}(c) = 0 \ , \quad k = 0, \ldots, n \\
&\Longrightarrow \tilde{P} = 0 \\
&\Longrightarrow P = \text{konstant} \\
&\Longrightarrow P \equiv 0.
\end{aligned}$$

□

11.4 Lemma (Charakterisierung Taylorpolynom)**:** Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$. Dann ist P_{n,x_0} das eindeutige Polynom vom Grad höchstens n mit:

$$P_{n,x_0}(x) = f^{(k)}(x_0) \quad , k = 0, \ldots, n$$

("P und f stimmen dis zur n-ten Ableitung in x_0 überein.")

Beweis:

<u>Eindeutigkeit:</u> folgt sofort aus voriger Proposition.

(P,Q) sind solche Polynome $\Rightarrow R = P - Q$ erfüllt $R(x_0) = R'(x_0) = \ldots = R^{(n)}(x_0) = 0 \overset{Prop.}{\Rightarrow} R \equiv 0$.

<u>P_{n,x_0} hat diese Eigenschaft:</u> Direkte Rechnung:

$$P_{n,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

<u>Nutze:</u> l-te Ableitung von $(x - x_0)^k$ an der Stelle x_0.

$$= \begin{cases} k! & l = k \\ 0 & l > k \\ 0 & l < k \quad (x = x_0) \end{cases}$$

□

Wir wollen uns nun die Frage stellen, wie sich f von P_{n,x_0} unterscheidet. Dazu betrachten wir das sogenannte Restglied.

11.5 Satz (Taylorsche Formel mit Lagrange Restglied)**:** Sei $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar und $x_0\in(a,b)$. Dann existiert zu jedem $x\in(a,b)$ ein $t=t(x)$ zwischen x und x_0 mit:

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\&=P_{n,x_0}(x)+R_{n+1,x_0}(t)\end{aligned}$$

mit dem Lagrange Restgleid:

$$R_{n+1,x_0}(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Beweis: Beachte x,x_0 gegeben! Sei:

$$\begin{aligned}h(\xi)&:=(x-\xi)^{n+1} && (\textit{Entwickeln um }\xi),\\ g(\xi)&:=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\end{aligned}$$

gegeben. Dann gilt

- $g(x)=f(x)\quad(k=0)$
- $g(x_0)=P_{n,x_0}(x)$
- $g'(\xi)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ (!) (Teleskopsumme)

Nach verallgemeinertem Mittelwertsatz existiert ein t zwischen x und x_0 mit:

$$(g(x)-g(x_0))h'(t)=(h(x)-h(x_0))g'(t).$$

Also folgt

$$\begin{aligned}&(f(x)-P_{n,x_0}(x))(n+1)(-1)(x-t)^n=(x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\\ \Rightarrow\ & f(x)-P_{n,x_0}(x)=\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{=R_{n+1,x_0}(t)}\\ \Rightarrow\ & f(x)=P_{n,x_0}(x)+R_{n+1,x_0}(t).\end{aligned}$$

<u>Zu (!):</u>

$$\begin{aligned}g(\xi)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k\\ g'(\xi)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}k(x-\xi)^{k-1}\\ &=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}\\ &=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\end{aligned}$$

□

11.6 Satz (Taylorsche Formel mit Abschätzung)**:** Sei $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar mit $n\geq 1$ und $x_0\in(a,b)$. Dann gibt es eine Funktion $r\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ mit $r(x)\to 0$, $x\to 0$ und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r(x)\ (x-x_0)^n.$$

Beachte: <u>n=1:</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\ (x-x_0) + \varphi(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\ (x-x_0) + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)}}_{=r(x)}(x-x_0) \end{aligned}$$

Beweis: Setzen $g(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$. Dann gilt

$$g(x_0) = g'(x_0) = \ldots = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $r\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ mit $r(x)\to 0$, $x\to 0$ und $|g(x)|\leq r(x)\ |x-x_0|^n$ existiert.

Dazu betrachten wir

$$|g(x)| \leq \frac{\left|g^{(n-1)}(t_x)\right|}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1} \qquad (\diamond)$$

für ein t_x zwischen x und x_0 (einschließlich).

Denn:

<u>$n=1:$</u> $t_x = x$

<u>$n\geq 2:$</u> Anwenden der Taylorformel mit $n-2$

Nun ist $g^{(n-1)}$ differenzierbar, dass heißt

$$g^{(n-1)}(t_x) = \underbrace{g^{(n-1)}(x_0)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(t_x - x_0)}_{=0} + \varphi(t_x) \qquad (\diamond\diamond)$$

mit

$$\frac{\varphi(y)}{y-x_0}\to 0,\ \ y\to x_0.$$

$$\begin{aligned} \left\{\begin{smallmatrix}(\diamond)\\(\diamond\diamond)\end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow |g(x)| &\leq \frac{\varphi(t_x)}{(n-1)!}|x-x_0|^{n-1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\frac{|\varphi(t_x)|}{|t_x-x_0|}}_{\to 0,\ x\to x_0}\underbrace{\frac{|t_x-x_0|}{|x-x_0|}}_{\leq 1}}_{\to 0,\ x\to x_0}|x-x_0|^n \\ &=: r(x)\ |x-x_0|^n \end{aligned}$$

□

Übung: Sei $g\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ $n+1$-mal differenzierbar. Dann ist für $g^{(n+1)}=0$ die Funktion g ein Polynom vom Grad höchstens n.

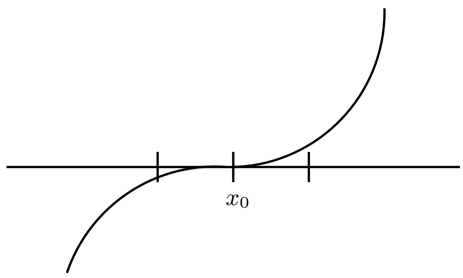
Damit können wir Funktionen mit vielen verschiedenen Ableitungen auf Extrema untersuchen.

11.7 Proposition (Wendepunkte und Extrema)**:** Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$-mal differenzierbar mit

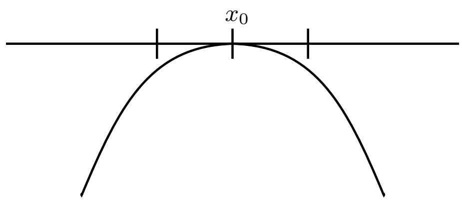
$$f(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \;\; f^{(n)}(x_o) \neq 0.$$

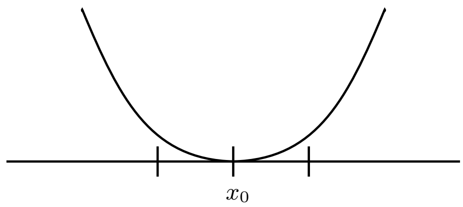
Dann gilt:

- Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Wendepunkt, dass heißt $f(x) - f(x_0)$ wechselt in x_0 das Vorzeichen.



- Ist n gerade, so hat f in x_0 ein lokales $\substack{\text{Maximum}\\ \text{Minimum}}$, falls $\substack{f^{(n)}(x_0)<0\\ f^{(n)}(x_0)>0}$.





Beweis: Aus vorigem Satz folgt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + r(x)\;\;(x - x_0)^n.$$

Für x nahe x_0 hat $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$ (da $r(x) \to 0,\; x \to x_0$). Man kann also schreiben

$$f(x) = f(x_0) + (\text{Vorzeichen})(x - x_0)^n.$$

Das liefert die Behauptung □

Notation: Passende Notation für diese Resultate liefern die Landausymbole:

o „klein oh von"
$\mathcal{O}$ „groß Oh von"

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ gegeben. Dann definiert man die Landausymbole durch

$$f(x) = o(g(x)),\ \ x \to x_0 :\Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0,$$
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),\ \ x \to x_0 :\Leftrightarrow\ \exists\, \mathfrak{C} > 0\ mit\ |f(x)| \leq \mathfrak{C} \cdot |g(x)|,\ f\ddot{u}r\ x\ nahe\ x_0.$$

Man schreibt dann:

Ist $f(n \geq 1)$-mal differenzierbar, dann gilt $f(x) = P_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$.
Ist $f(n+1)$-mal differenzierbar, dann gilt $f(x) = P_{n,x_0}(x) + \mathcal{O}((x-x_0)^n)$.

Denn es gilt

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + o((x-x_0)^{n+1})}_{=\mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})}.$$

11.8 Definition (Taylor-Reihe)**:** Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so können wir die sogenannte *Taylor-Reihe* von f im Entwicklungspunkt x_0

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

bilden.

Beachte: ! Es ist <u>nicht</u> klar, dass die Reihe für $x \neq x_0$ konvergiert.

! Selbst wenn $T_f(x)$ konvergiert, ist nicht automatisch auch $f(x) = T_f(x)$.

Beispiel: Betrachte

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}.$$

Dann ist f in $x > 0$ und in $x < 0$ beliebig oft differenzierbar. Tatsächlich gilt für $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{-1}{x}}$$

mit geeignetem Polynom P_n.

Damit folgt (durch Induktion), dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$\underline{n = 0:}$ klar

$\underline{n \Rightarrow n+1:}$

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

und
$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \frac{0}{x} = 0, \qquad x < 0$$

und
$$\frac{f^{(n)}(x)}{x} = \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}}{x} = \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \to 0, \ x \to 0^+$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \overset{(y=\frac{1}{x})}{=} \lim_{y\to\infty} yP_n(y)\, e^{y} = 0.$$

Damit folgt dann

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}(x)^k = 0$$

Gleichzeitig gilt aber auch $f \neq 0$. Ist nun $R_n(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$ so gilt

$$f(x) = T_{f,x_0}(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0, \ n \to \infty.$$

Wir kommen nun zu den Regeln von **L'Hospital**.

Dazu betrachten wir zwei in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen f, g mit

$$f(a) = g(a) = 0, \ g'(a) \neq 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Allgemein können wir Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$“ und „$\frac{\infty}{\infty}$“ mit folgenden Sätzen behandeln.

11.9 Satz (L'Hospital für „$\frac{0}{0}$" bei $a \in \mathbb{R}$)**:** Sei $a < b$ und $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ und $f(a) = 0 = g(x)$.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Entsprechende Aussage gilt für $f, g\colon (a,b] \to \mathbb{R}$.

Beweis: Der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \overset{\text{MWS}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

existiert und ist gleich

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

11.10 Satz (L'Hospital für "$\frac{0}{0}$"bei $\pm\infty$)**:** Sei $\mathfrak{C} > 0$ und f, g differenzierbar in $(\mathfrak{C}, \infty)$ mit

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} g(x).$$

Existiert

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Eine analoge Aussage gilt bei $(-\infty, \mathfrak{C})$.

Beweis: Wir nutzen den vorigen Satz um diese Aussage zu zeigen.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(x = \frac{1}{t})}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{\text{voriger Satz}}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{-1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{(x = \frac{1}{t})}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

11.11 Satz (L'Hospital für „$\frac{\infty}{\infty}$“ bei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = +\infty$)**:** Sei

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$

und f, g differenzierbar links von a (bzw. für große x). Dann gilt

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: (für $a = \infty$, $\lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$)
Zu $\mathfrak{C} > 0$ existiert ein d mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq \mathfrak{C}$ für $x \geq d$. Ist $x > d$, dann gilt zusammen mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq \mathfrak{C}$$

Da g monoton wachsend ist, folgt

$$f(x) - f(d) \geq \mathfrak{C}(g(x) - g(d)) \frac{f(x)}{g(x)} \geq \mathfrak{C} - \mathfrak{C} \underbrace{\frac{g(d)}{g(x)}}_{\to 0, x \to \infty} + \underbrace{\frac{f(d)}{g(x)}}_{\to 0, x \to \infty},$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \mathfrak{C}.$$

Da $\mathfrak{C} > 0$ nun beliebig ist, folgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

□

11.12 Definition (Stetig differenzierbar)**:** Ist $f, g\colon (a, b) \to R$ differenzierbar und f' stetig, so heißt f steig differenzierbar.

Beispiele: (L'Hospital):

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - cos(x)}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

  Beachte: Die Funktion $\operatorname{sinc}(x) := \frac{sin(x)}{x}$ im Argument des Limes ist in der Physik von großer Bedeutung.

- $$\lim_{x \to 0} \frac{log(x)}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} 2\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

- $\alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} x^\alpha log(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\alpha} \frac{x^{\alpha+1}}{x} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Gegebenenfalls kann man L'Hospital auch iterieren (mehrmals anwenden):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{falls\ ex.}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{falls\ ex.}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Beachte: Die Vorausetzungen für den Satz von L'Hospital müssen erfüllt sein!

12. Exponentialfunktionen und ihre Verwandten

Erinnerung: Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ (abs. konvergent)}$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit: $\lim_{z \to z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z)$
- $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$
- $\exp(0) = 1$
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, insbesondere: $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

12.1 Proposition (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe)**:** Sei $R_N(z) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Dann gilt für $|z| \leq 1 + \frac{N}{2} = \frac{2+N}{2}$

$$|R_N(z)| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Beweis: Sei $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$ und $M > N$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{M} \frac{|z|^k}{k!} &= \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \underbrace{\frac{|z|}{N+2}}_{\leq \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{|z|^{M-N-1}}{(N+1)\ldots M}}_{\leq (\frac{1}{2})^{M-N-1}} \right) \\
&\leq \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l \\
&= 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Die Zahl $e = \exp(1)$ ist *irrational.*

Beweis: Annahme: $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ ist rational. Sei o. E. $q \geq 2$

$$\Rightarrow \underbrace{q!e}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\lim_{M\to\infty}\left(q!\sum_{k=q+1}^{M}\frac{1}{k!}\right)}_{=:R_q}$$

$$\Rightarrow R_q \in \mathbb{Z}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
0 < R_q &= \lim_{M\to\infty}\frac{1}{q+1}\left(1+\frac{1}{q+2}+\ldots+\frac{1}{(q+2)\ldots M}\right)\\
&\leq \frac{1}{q+1}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{2}{q+1}\\
&\leq \frac{2}{3}\\
&< 1\\
&\lightning R_q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

e ist somit irrational. □

Weitere Darstellung für $\exp(z)$:

12.2 Satz (Exponentialfunktion als Grenzwert)**:** Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Bemerkung: Konvergenz in 12.2 ist sehr langsam.

Beweis: Für $n, N \in \mathbb{N}$ mit $N < n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{z}{n}\right)^n &\overset{(2.3),(c))}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{z^k}{n^k}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\underbrace{\frac{n!}{(n-k)n^k}}_{\approx 1}\frac{z^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\frac{z^k}{k!}}_{R_N(|z|)}
\end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=N+1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!n^k}\frac{z^k}{k!}\right| &\leq \sum_{k=N+1}^{n}\frac{1\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot\underbrace{n\ldots n}_{k-mal}}\frac{|z|^k}{k!}\\
&\leq \sum_{k=N+1}^{n}\frac{|z|^k}{k!}\\
&\leq R_N(|z|)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{n^k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} + \sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{N}\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|$$
$$\overset{\triangle\text{-Ugl.}}{\leq} \left|\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{n!}{(n-k)!n^k}-1\right)\frac{z^k}{k!}\right| + |R_N(z)| + R_N(z)$$

Nun wähle zunächst N groß, sodass $R_N(z)$ und $R_N(|z|)$ klein. Wähle dann n groß, sodass der erste Term klein wird.

$$\left(\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{(n-k+1)!\dots n}{\underbrace{n\dots n}_{\to 1}} \to 1,\ n\to\infty\right)$$

□

Interpretation: Wachstum mit Rate α (z. B. Zinsen)

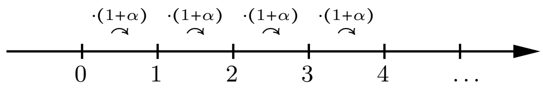


Abbildung 12.1.: diskrete Werte - zur Zeit n: $x(1+\alpha)^n$

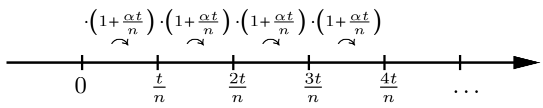


Abbildung 12.2.: kontinuierliche Werte - nach Zeit t: $x\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n = x\exp(\alpha t)$

12.3 Definition (Allgemeine Potenz)**:** Für $a > 0$ ist mit

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x\ln a)$$

die *allgemeine Potenz* definiert. a^x ist dann streng monoton, stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\exp_a'(x) = \ln a\exp_a(x)$$

und besitzt die Grenzwerte

$$\exp_a(x)\to\infty,\ x\mapsto \operatorname{sgn}(\ln a)\infty \tag{12.1}$$
$$\exp_a(x)\to 0,\ x\mapsto -\operatorname{sgn}(\ln a)\infty \tag{12.2}$$

Insbesondere existiert die Umkehrfunktion $\log_a$ („Logarithmus zur Basis a“) von $\exp_a$ und ist differenzierbar mit

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R} \tag{12.3}$$

$$\log_a'(y) = \frac{1}{y \ln a} \tag{12.4}$$

Bemerkung: Zu $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

1. $F(x + y) = F(x)F(y)$ alle $x, y \in \mathbb{R}$
2. $a = F(1)$

Diese ist gegeben durch $F(x) = \exp_a(x)$

Beweis: <u>Existenz:</u> $F(x) = \exp_a x$

<u>Eindeutigkeit:</u> Zeige F erfüllt notwendigerweise $F\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}} = \exp_a\left(\frac{p}{q}\right)$ für $p, q \in \mathbb{Z}$

$$F(p) = \underbrace{F(1) \dots F(1)}_{p\text{-mal}} = a^p$$

$$F\underbrace{\left(\frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}\right)}_{q\text{-mal}} = F\left(\frac{p}{q}\right)^q = F(p) = a^p \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist und F stetig ist, folgt die Aussage. □

Wir können nicht nur $x \mapsto a^x$ (a fest), sondern auch $a \mapsto a^x$ (x fest) betrachten.

12.4 Proposition (Potenzfunktion)**:** Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann ist die Ableitung der Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^s$, gegeben durch $(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto sx^{s-1}$

Beweis:

$$\begin{aligned} x^s &= \exp(s \ln x) \\ (x^s)' &= \exp(s \ln x) s \frac{1}{x} \\ &= x^s \frac{1}{x} s \\ &= s x^{s-1} \end{aligned}$$

□

Beachte: „0^0“

- Für $a > 0$ setzt man $0^a = 0$.
- Es gilt für $x > 0$: $x^0 \equiv 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} x^0 = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

Beispiele (einige Grenzwerte)**:**

- $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \qquad \forall k > 0$

Beweis: Übung □

- $\lim_{x\to 0} x^k e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^k e^y = \infty$ für alle $k > 0$
- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

  Beweis: $x \geq e^k \Rightarrow \ln x \geq k$ □

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

  Beweis: $\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{y\to\infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty}(-\ln y) = -\infty$ □

- $\alpha > 0$ $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ (Darum ist $0^\alpha \equiv 0$ für $\alpha > 0$.)

  Beweis: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \lim_{x\to 0^+} \exp(\alpha \ln x) = \lim_{y\to -\infty} \exp(y) = 0$ □

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall \alpha > 0$ (Der Logarithmus wächst schwächer als jede Potenz.)

  Beweis: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{x=e^y}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{\ln(e^y)}{e^{\alpha y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0$ □

- $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \forall \alpha > 0$

  Beweis: $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to\infty} \left(-\frac{1}{y^\alpha} \ln y\right) = 0$ □

Wir untersuchen nun die Exponentialfunktion auf dem Einheitskreis

$$S = \{x \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Wir betrachten also:

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ u(x) = e^{ix} \tag{12.5}$$

und definieren:

$$\Re u = \cos x \tag{12.6}$$
$$\Im u = \sin x \tag{12.7}$$

Wir zeigen, dass man $u(x) = e^{ix}$ erhält, indem man auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn die Strecke x entlang geht.

12.5 Lemma (Eigenschaften von sin und cos)**:** a) für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots \tag{12.8}$$
$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \ldots \tag{12.9}$$

b) sin ist ungerade, d. h. $\sin(-t) = -\sin(t)$
cos ist gerade, d. h. $\cos(t) = -\cos(t)$

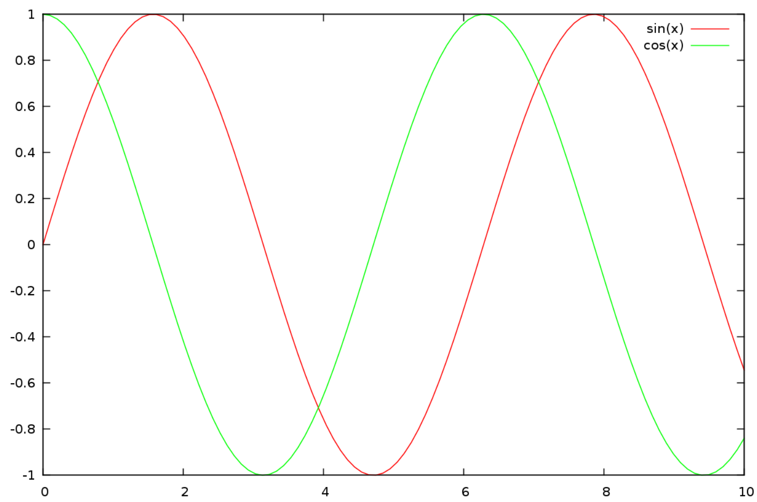
c) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Beweis: a) Reihendarstellung für $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ verbunden mit den Definitionen $\sin t = \Im e^{it}$, $\cos t = \Re e^{it}$

b) Direkt aus den Definitionen von sin und cos, oder aus a).

c) $\sin^2 t + \cos^2 t = (\sin t + \cos t)^2 = \left(e^{it}\right)^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{\overline{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1$

$\square$



Beachte: $e^{it} \in S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

12.6 Proposition (Additionstheoreme)**:**

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \pm \sin u \sin v$$

Beweis: Nutze $e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv}$ und betrachte auf beiden Seiten nur Real- bzw. Imaginärteil. $\square$

12.7 Lemma (Reihenentwicklung von sin und cos)**:** Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$.
Für $t > 0$ gilt $\sin t \geq t - \frac{t^3}{3!}$.

Beweis: Hier wird nur der cos bewiesen (sin analog):

$\underline{|t| < 7}$: $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \underbrace{- \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!}}_{<0} \underbrace{- \dots}_{<0} \le 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!}$

$\underline{|t| \ge 7}$: $1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} = 1 + t^2 \left(\frac{t^2}{24} - \frac{1}{2} \right) \ge 1 \ge \cos t$ □

12.8 Proposition („Entdeckung von $\frac{\pi}{2}$"): Die Funktion sin erfüllt $\sin 0 = 0$ und $\sin t > 0$ auf $(0, 2)$. Die Funktion cos erfüllt $\cos 0 = 1$ und ist auf $(0, 2)$ strikt fallend mit $\cos 2 < 0$.

Insbesondere hat cos in $(0, 2)$ genau eine Nullstelle.

Beweis: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ da $1 = e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0$. Nach vorangegangenem Lemma gilt auf $(0, 2]$

$$\sin t \ge t - \frac{t^3}{3!} = t \left(1 - \underbrace{\frac{t^2}{3!}}_{<1} \right) > 0$$

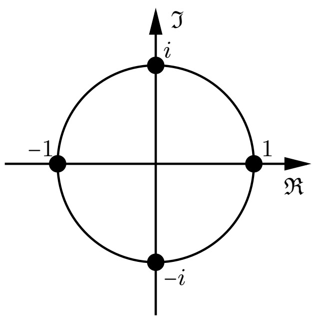
Wegen $\cos' = -\sin$ ist also cos strikt fallend auf $(0, 2]$ (Mittelwertsatz).

Weiterhin gilt $\cos 2 \le 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{16}{24} < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat also cos auf $(0, 2)$ eine Nullstelle. Da cos strikt fallend ist, ist diese Nullstelle eindeutig. □

12.9 Definition (Kreiszahl π): Sei $\pi \in \mathbb{R}$ so, dass $\frac{\pi}{2}$ die eindeutige Nullstelle von cos in $(0, 2)$ ist.

12.10 Satz (Exponentialfunktion auf dem Einheitskreis): Die Abbildung $e^{i\cdot} : [0, 2\pi) \to S$, $t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$ ist bijektiv und stetig mit $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$.

Man erhält e^{it}, indem man von $(1, 0)$ startend gegen den Uhrzeigersinn auf S die *Bogenlänge* t zurücklegt.



Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $e^{i\cdot} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \to S_1$ bijektiv und stetig ist mit $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, wobei $S_1 = \{(x,y) : x \geq 0,\ y > 0\}$ der erste Quadrant ist.

Nach voriger Proposition und Definition ist $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ strikt fallend mit $\cos(0) = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Damit ist $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ injektiv (da strikt fallend) und sein Bild ist nach dem Zwischenwertsatz $[0,1]$.

Da $\cos t = \Re e^{it}$ injektiv ist folgt, dass auch $e^{i\cdot} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to S_1,\ t \mapsto \cos t + i \sin t$ injektiv ist.

Weiterhin ist $e^{i\cdot} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to S_1$ surjektiv:

Sei $a, b \geq 0$ mit $a^2 + b^2 = 1$ gegeben. Dann existiert nach dem schon Bewiesenen ein $t \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $a = \cos t$. Dann gilt: $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t \overset{b \geq 0,\, \sin t \geq 0}{\Rightarrow} b = \sin t \Rightarrow a + ib = \cos t + i \sin t = e^{it}$

Wegen $e^{i(t+s)} = e^{it} e^{is}$ folgen nun die Aussagen für die übrigen drei Quadranten einfach. □

Bemerkung (zur Bogenlänge)*:* Wir betrachten den Polygonzug von 1 nach e^{it} mit Stützstellen $e^{i\frac{t}{n}k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Seine Länge ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \left| e^{it\frac{k+1}{n}} - e^{it\frac{k}{n}} \right| &= \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left| e^{itk} \right|}_{=1} \left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right| \\ &= n \left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right| = \frac{\left| e^{i\frac{t}{n}} - 1 \right|}{\frac{1}{n}} = t \underbrace{\left| \frac{e^{i\frac{t}{n}} - 1}{i\frac{t}{n}} \right|}_{\to 1,\ n \to \infty}\end{aligned}$$

da $\frac{e^z - 1}{z} \to 1,\ z \to 0$.

12.11 Folgerung (Periodizität von sin und cos)**:** Die Funktionen sin und cos sind 2π*-periodisch.*

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beweis: Argumentation am Einheitskreis □

12.12 Definition (Tangens)**:** Für x mit $\cos x \neq 0$, d. h. $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Dann ist $\tan x$ π-periodisch und stetig differenzierbar (Quotientenregel anwenden) mit:

$$tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$$

Wegen $\tan' > 0$ existiert die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Es ist arctan stetig differenzierbar mit

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2} \quad (y = \tan x)$$

12.13 Definition (Cotangens)**:** Definiert man auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ durch

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Dann ist cot π-periodisch und stetig differenzierbar mit

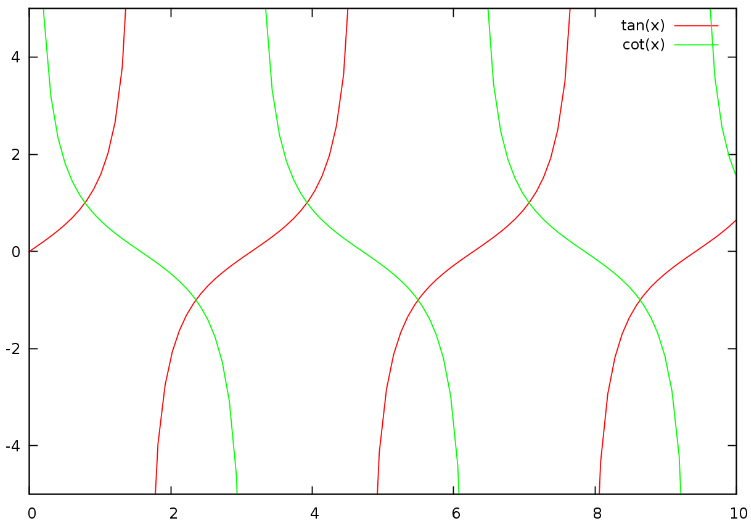
$$\cot' x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

Insbesondere ist cot strikt fallend und es existiert die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Es ist arccot stetig differenzierbar mit

$$\operatorname{arccot}'(y) = \frac{1}{-1 - \cot^2 x} = \frac{1}{-1 - y^2} = -\frac{1}{1 + y^2} \quad (y = \cot x)$$



12.14 Definition (hyperbolische Funktionen)**:** Weiterhin sind die hyperbolischen Funktionen definiert:

cosinus hyperbolicus	$\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
sinus hyperbolicus	$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
tangens hyperbolicus	$\tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}$
cotangens hyperbolicus	$\coth: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\cosh x}{\sinh x}$

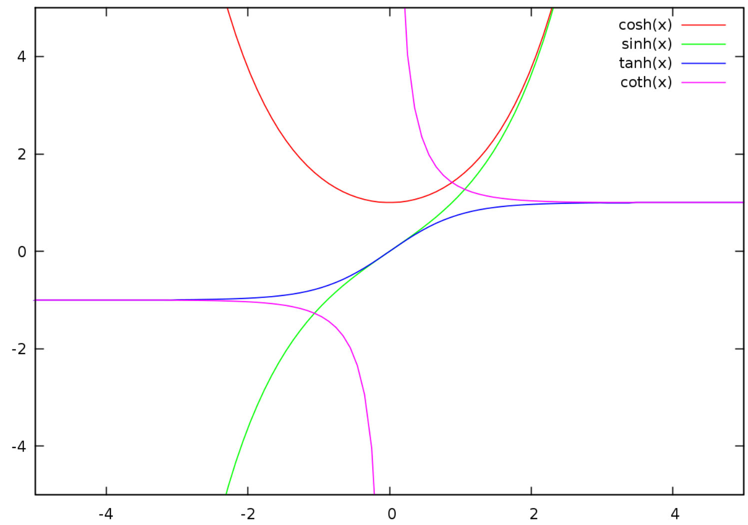
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
1 &= \cosh^2(x) - \sinh^2(x) \\
\cosh' &= \sinh,\ \sinh' = \cosh \\
\tanh' &= \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\
\coth' &= -\frac{1}{\sinh^2} = 1 - \coth^2
\end{aligned}
$$

Auf entsprechenden Intervallen existieren auch die Umkehrfunktionen (auch Area-Funktionen genannt):

- $\operatorname{arcosh}: [1, \infty) \to [0, \infty)$
  $\operatorname{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad (y = \cosh x)$

- $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$
- $\operatorname{artanh}: (-1,1) \to \mathbb{R}$
  $\operatorname{artanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \quad (y \in (-1,1))$
- $\operatorname{arcoth}: (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R}$
  $\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \quad (y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1])$



Zum Abschluss des Abschnitts noch etwas zur Polarzerlegung:

12.15 Satz (Polarzerlegung)**:** Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus [0,2\pi)$ existieren eindeutige $\rho > 0$ mit

$$z = \rho e^{i\phi}$$

Beweis: Existenz: $z = |z| \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{\in S}$ Dann existiert $\phi \in [0,2\pi)$ mit $e^{i\phi} = \frac{z}{|z|}$. Mit ϕ und $\rho = |z|$ folgt dann $z = \rho e^{i\phi}$.

Eindeutigkeit: $z = \rho e^{i\phi} \Rightarrow |z| = \rho \left|e^{i\phi}\right| = \rho \Rightarrow \rho = |z|$

Sei $e^{i\phi} = e^{i\psi} \Rightarrow 1 = e^{i(\phi-\psi)} \Rightarrow \phi - \psi = k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \phi = \psi$, da $\phi, \psi \in [0,2\pi)$ □

Notation: $z = \rho e^{i\phi}$ mit ρ - Betrag von z, ϕ - Argument von z

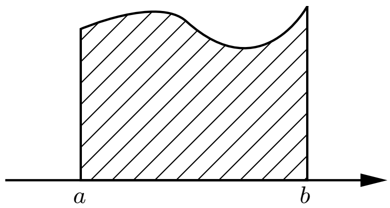
Bemerkung: $z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \rho_2 e^{i\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$

Der Betrag des Produkts ist damit gleich dem Produkt der Beträge.

13. Das Riemann-Integral

Idee: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Ordne der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse einen Wert zu (wobei unterhalb der x-Achse negativ gezählt wird), sodass gilt:

- $f(x) \equiv c \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = c(b-a)$
- $c \in [a,b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $f \le g \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$



Das Riemann-Integral wird folgende wichtige Eigenschaften erfüllen:

- Integral ist linear und positiv

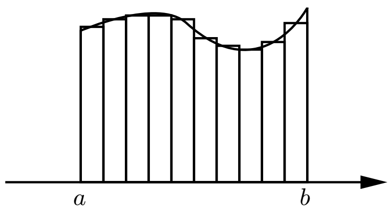
  linear: $\int_a^b f(x) + \lambda g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$

  positiv: $f \ge 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \ge 0$
- Stetige Funktionen und monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar. Ebenso stückweise stetige und stückweise monotone Funktionen.

Dafür stellen wir zwei Voraussetzungen:

- Intervall $[a,b]$ ist kompakt, d.h. $-\infty < a < b < \infty$
- Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt

Wir wollen nun das Intervall zerlegen und f auf die Teilstücke durch konstante Funktionen approximieren. Danach werden wir den Grenzübergang machen.



13.1 Definition (Zerlegung)**:** Ein Tupel

$$Z = (x_0, \dots, x_n)$$

mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ heißt *Zerlegung* von $[a, b]$.

Die *Feinheit* $|Z|$ der Zerlegung Z ist definiert als

$$|Z| = \max\{x_i - x_{i-1},\ i = 1, \dots, n\}$$

Eine Zerlegung $Z' = (y_1, \dots, y_k)$ heißt *Verfeinerung* von $Z = (x_0, \dots, x_n)$, wenn gilt

$$\{y_i :\ i = 0, \dots, k\} \supset \{x_i :\ i = 0, \dots, n\}$$

Man schreibt dann $Z' \supset Z$.

Zur Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (y_0, \dots, y_k)$ definieren wir die Vereinigung $Z \cup Z'$ als die Zerlegung mit den Punkten $\{x_i :\ i = 0, \dots, n\} \cup \{y_i :\ i = 0, \dots, k\}$.

Approximiert man f entlang einer Zerlegung Z, so gibt es mehrere Möglichkeiten:

- „Durch Rechtecke von unten“ (jeweils kleinster Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)
- „Durch Rechtecke von oben“ (jeweils größter Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)
- „Durch irgendwelche Rechtecke“ (irgendein Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)

Uns wird es um Funktionen gehen, bei denen alle drei Möglichkeiten im Grenzwert den selben Wert ergeben.

13.2 Definition (Obersumme und Untersumme)**:** Zu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a, b]$ definieren wir

- die *Obersumme* von f bezüglich Z:

$$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

- die *Untersumme* von f bezüglich Z:

$$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

13.3 Proposition (Eigenschaften von U_Z, O_Z)**:** a) $U_Z(f) \leq O_Z(f)$ für alle Zerlegungen Z

b) $Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow U_{Z_1}(f) \leq U_{Z_2}(f),\ O_{Z_1}(f) \geq O_{Z_2}(f)$

c) $Z_1,\ Z_2$ beliebig $\Rightarrow U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$

Beweis: a) anschaulich klar

b) Wir betrachten nur U_Z (O_Z kann analog behandelt werden).

o.E.: Z_2 hat genau einen Punkt mehr als Z_1.

$Z_1 :\ a = x_0 < \ldots < \alpha < \beta < \ldots = b$
$Z_2 :\ a = x_0 < \ldots < \alpha < \gamma < \beta < \ldots = b$

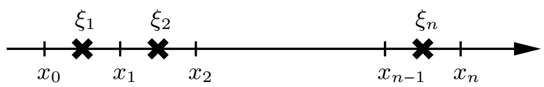
In Z_1: $(\beta - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) = (\beta - \gamma) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) + (\gamma - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)$
In Z_1: $(\beta - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) \leq (\beta - \gamma) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x) + (\gamma - \alpha) \inf_{\alpha \leq x \leq \beta} f(x)$

Damit folgt die Behauptung.

c) $U_{Z_1}(f) \overset{\text{b)}}{\leq} U_{Z_1 \cup Z_2}(f) \overset{\text{a)}}{\leq} O_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq O_{Z_2}(f)$

□

13.4 Definition (Riemann-Summe)**:** Ist $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegeben.



So definiert man die *Riemann-Summe* von f bezüglich der Zerlegung Z und den Stützstellen ξ als

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

13.5 Lemma (Charakterisierung Riemann-Integrierbarkeit)**:** Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(i) $\sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $O_Z(f) - U_Z(f) \leq \varepsilon$

(iii) Es existiert ein $I_f \in \mathbb{R}$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|S_{Z,\xi}(f) - I_f| \le \varepsilon$$

für alle Zerlegungen Z mit Feinheit $|Z| \le \delta$.

In diesem Fall gilt:

$$I_f = \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

Beweis: <u>$(ii) \Rightarrow (i)$</u>: Da $U_{Z_1}(f) \le O_{Z_2}(f)$ für alle Z_1, Z_2 (s.o.) folgt

$$\sup_{Z_1} U_{Z_1}(f) \le \inf_{Z_2} O_{Z_2}(f)$$

Wähle nun $Z_1 = Z_2 = Z$. Damit ergibt sich:

$$0 \le \inf O_Z(f) - \sup U_Z(f) \le \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, gilt (i).

<u>$(i) \Rightarrow (ii)$</u>: Zu $\varepsilon > 0$ existieren Z_1 und Z_2 mit

$$0 \le O_{Z_2}(f) - U_{Z_1}(f) \le \varepsilon$$

Da $O_{Z_2}(f) \ge O_{Z_1 \cup Z_2}(f)$ und $U_{Z_1}(f) \le U_{Z_1 \cup Z_2}(f)$ folgt

$$O_{Z_1 \cup Z_2}(f) - U_{Z_1 \cup Z_2}(f) \le \varepsilon$$

und damit (ii) mit $Z = Z_1 \cup Z_2$.

<u>$(ii) \Rightarrow (iii)$</u>: Sei $c > 0$ mit $|f(x)| \le C$ für alle $x \in [a,b]$. Sei $I_f := \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach (ii) existiert eine Zerlegung $\tilde{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ mit

$$0 \le O_{\tilde{Z}}(f) - U_{\tilde{Z}}(f) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Für eine sehr kleine Zerlegung Z liegen die Terme von $S_{Z,\xi}$ zwischen den Termen von $O_{\tilde{Z}}(f)$ und $U_{\tilde{Z}}(f)$ außer an den Punkten $x_0, \ldots, x_n$. Für $Z = (y_0, \ldots, y_k)$ mit Feinheit δ gilt:

$$U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \le S_{Z,\xi}(f) \le O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC$$

wobei N die Anzahl der Intervalle ist. Nach der Definition von I_f ergibt sich

$$I_f - \frac{\varepsilon}{2} - \delta NC \le U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \le S_{Z,\xi}(f) \le O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC \le I_f + \frac{\varepsilon}{2} + \delta NC$$

Für ein $\delta > 0$ mit $\delta NC \le \frac{\varepsilon}{2}$ ergibt sich gerade

$$|S_{Z,\xi}(f) - I_f| \le \varepsilon$$

<u>$(iii) \Rightarrow (ii)$</u>: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ gemäß (iii) gewählt. Dann gilt

$$I_f + \varepsilon \ge S_{Z,\xi}(f) \ge I_f - \varepsilon$$

für jede Wahl der Stützstellen ξ. Damit folgt auch

$$I_f + \varepsilon \ge O_Z(f), \; U_Z(f) \ge I_f - \varepsilon$$

Das liefert gerade

$$O_Z(f) - U_Z(f) \le 2\varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt die Behauptung. □

13.6 Definition (Riemann-Integrierbarkeit)**:** Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt ist.

Dann definiert man das *Riemann-Integral* von f in $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f dx := \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f) = I_f =: \lim_{|Z|\to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

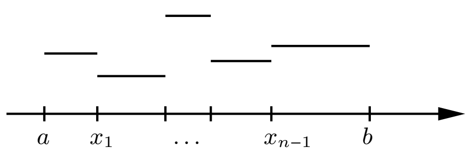
Bemerkung: Weiterhin gelten $\int_b^a f(x) := -\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Es gibt im Wesentlichen drei Klassen von Riemann-integrierbaren Funktionen:

- Treppenfunktionen
- stetige Funktionen
- monotone Funktionen

13.7 Definition (Treppenfunktion)**:** Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ und $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ gibt mit

$$f \equiv c_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i)$$



13.8 Proposition (Treppenfunktionen sind Riemann-integrierbar)**:** Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i$$

Die Werte von f an den Stellen x_i spielen keine Rolle.

Beweis: Übung

13.9 Proposition (stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar)**:** Jede (stückweise) stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.

Beweis: f stetig auf $[a,b] \overset{[a,b]\text{kpt.}}{\Rightarrow}$ f ist beschränkt und f ist gleichmäßig stetig, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| \le \varepsilon$ für $|x - \tilde{x}| < \delta$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben (Ziel: finde Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$). Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\star \qquad |f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für } |x - \tilde{x}| < \delta$$

Wähle nun eine beliebige Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$. Damit gilt

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\Big(\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \Big)}_{\le \frac{\varepsilon}{b-a},\ \text{nach } \star} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

□

13.10 Proposition (Monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar)**:** Jede (stückweise) monotone Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis: Sei f o.E. monoton wachsend (anderer Fall analog). Sei $Z = \left(a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-1}{n}, b\right)$ eine äquidistante Zerlegung mit Feinheit $\frac{b-a}{n}$. Dann gilt wegen der Monotonie:

$$\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_i) \qquad \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_{i-1})$$

Damit folgt

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \to 0,\ n \to \infty$$

Damit folgt die Riemann-Integrierbarkeit. □

13.11 Proposition (Rechenregeln: linear und positiv)**:** Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $f + \alpha g$ Riemann-integrierbar und $\int_a^b f + \alpha g dx = \int_a^b f dx + \alpha \int_a^b g dx$ [1]

b) $f \le 0 \ \Rightarrow \int_a^b f dx \le 0$

Insbesondere: $g \le f \ \Rightarrow \ \int_a^b g dx \le \int_a^b f dx$

Beweis: a) Folgt aus Betrachtungen zu Riemann-Summen durch Grenzübergang.

[1] Riemann-integrierbare Funktionen bilden einen unendlichdimensionalen Vektorraum (vgl. Lineare Algebra)

b) Folgt aus Betrachtungen zu Riemann-Summen durch Grenzübergang.

Insbesondere: $g \le f \Rightarrow 0 \le f - g \Rightarrow \int_a^b f - g dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f dx - \int_a^b g dx$

□

13.12 Proposition (Rechenregel: Zusammensetzen von Intervallen)**:** Sei $a < b$ und $c \in (a,b)$ gegeben.

a) Ist $f : [a,b]$ Riemann-integrierbar, so sind auch die Einschränkungen $f|_{[a,c]}, f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

b) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch

$$h : [a,b] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) : & x \in [a,c) \\ 0 : & x = c \\ g(x) : & x \in (c,b] \end{cases}$$

Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b h dx = \int_a^c f dx + \int_c^b g dx$$

Beweis: a) Einfach (Einschränkung von „guten“ Zerlegungen auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$)

b) Einfach (Zusammensetzen von „guten“ Zerlegungen)

□

13.13 Proposition (Rechenregeln: einfache Operationen)**:** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

a) $|f|$ ist Riemann-integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \le \int_a^b |f| dx$$

b) $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.

Beweis: a) Nach der Dreiecksungleichung gilt $|S_{Z,\xi}(f)| \le S_{Z,\xi}(|f|)$. Nach Grenzübergang folgt dann die Behauptung.

b) Es gelten

$$\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}, \ \max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

Nun folgt die Behauptung aus a) und der Linearität des Integrals.

□

Beispiel (nicht Riemann-integrierbare Funktion)**:** Sei

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 1: & x \text{ rational} \\ 0: & x \text{ irrational} \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt für jede Zerlegung z von $[0,1]$

$$U_Z(f) = 0 \text{ und } O_Z(f) = 1$$

Insbesondere ist f nicht Riemann-integrierbar.

Beweis: Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist (siehe 2.16) gilt:

$$U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 0$$

$$O_Z(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = 1$$

□

Beispiel: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}, \ f = c \equiv \text{const.}$ gegeben. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

Beweis: Es handelt sich um eine Treppenfunktion. □

Beispiel: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}, \ f = x$ gegeben. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Beweis: f ist stetig und damit Riemann-integrierbar. Damit ergibt sich das Integral aus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|z| \to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

Seien $Z_n = \left(a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \ldots, b\right)$ und $\xi_n = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S_{Z_n,\xi_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= (b-a)a + \frac{b-a}{n}\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} = ba - a^2 + \frac{b^2-2ab+a^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} ba - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

□

Das war mühsam!

Für stetige Funktionen gibt es eine andere Methode das Riemann-Integral zu berechnen:

13.14 Definition (Stammfunktion)**:** Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ gegeben. F heißt *Stammfunktion* zu f, wenn gilt $F' = f$.

Beachte: F wird also als differenzierbar vorausgesetzt.

Bemerkung: Seien $F, f: [a,b]\to\mathbb{R}$ gegeben, f stetig und $F' = f$ auf (a,b). Dann gilt:

In a existiert die rechtsseitige Ableitung von F, $F'(a) = f(a)$.
In b existiert die linksseitige Ableitung von F, $F'(b) = f(b)$.

Nun zur angekündigten Methode zur Integration stetiger Funktionen:

13.15 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**:** Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Die Funktion $G: [a,b]\to\mathbb{R}$, $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f. Insbesondere gibt es eine Stammfunktion von f.

b) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Beweis: a) Aus der Definition von G folgt

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Durch Multiplizieren mit $\frac{1}{h}$ und Subtrahieren von $f(x)$ erhält man

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{h}{h}f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt$$

Daraus folgt dann durch Bilden des Betrages

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h}-f(x)\right| &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\\
&\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\sup_{x\le s\le x+h}|f(s)-f(x)|\,dt\\
&= \frac{1}{h}\sup_{x\le s\le x+h}|f(s)-f(x)|\int_x^{x+h}dt\\
&= \sup_{x\le s\le x+h}|f(s)-f(x)|\\
&\to 0,\ h\to 0,\ \text{ da } f \text{ stetig}
\end{aligned}
$$

b) Ist F eine Stammfunktion zu f, so gilt

$$F' = f = G' \;\Rightarrow\; (F-G)' = 0$$

Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich deshalb

$$F - G = \text{const.} \;\Rightarrow\; f = \text{const.} + G$$

$$F(b) - F(a) = (G(b)+\text{const.}) - (G(a)+\text{const.}) = G(b) - G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)dt$$

□

Beachte: Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich durch eine Konstante.

Bemerkung: Integrale unstetiger Funktionen sind im Allgemeinen nicht differenzierbar.

$$f(x) = \begin{cases} 0: & x < 0\\ 1: & x \ge 0\end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0: & x \le 0\\ x: & x > 0\end{cases}$$

G ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Notation:

- $F = \int f(x)dx \;:\Leftrightarrow\; F$ ist Stammfunktion zu f
- $F|_a^b := F(b) - F(a)$

Merke: Der HDI liefert eine Methode zur Integration, nämlich „Finde Stammfunktion“. In diesem Sinne ist die Integration die Umkehrung der Differentiation.

Beispiele (Stammfunktionen)**:**

- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq 1$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C$ für $a > 0$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin + C$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh} x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x + C$

Zum Finden von Stammfunktionen gibt es drei Methoden:

- Nachschauen in einer Liste (z. B. Bronstein)
- Substitutionsregel
- partielle Integration

Oft sind auch Kombinationen dieser Methoden nützlich.

13.16 Satz (Substitutionsregel)**:** Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_c^d f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx$$

Beweis: Sei F eine Stammfunktion zu f. Dann ist nach der Kettenregel $F \circ \varphi$ differenzierbar mit

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

d. h. $F \circ \varphi$ ist eine Stammfunktion zu $f \circ \varphi \cdot \varphi'$. Damit folgt

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi(d) - F \circ \varphi(c) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx$$

□

Bemerkung: Die Substitutionsregel ist also die Umkehrung der Kettenregel.

Die Substitutionsregel kann in zwei verschiedenen Varianten angewandt werden:

1. „von links nach rechts“: Im Integral stehen bereits die Funktion φ und die Ableitung φ', sodass man direkt substituieren kann. Die wichtigste Anwendung ist die *logarithmische Integration.*

Beispiele: • $\int_a^b (2t)e^{t^2}dt \overset{\varphi(t)=t^2}{=} \int_a^b \varphi'(t)e^{\varphi(t)}dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^x dx = e^{b^2} - e^{a^2}$

- Logarithmische Integration:

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt \overset{\varphi(t)=f(t)}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{x}dx = \ln|f(b)| - \ln|f(a)| = \ln\frac{(b)}{f(a)}$$

- $\int_a^b \tan x dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \ln\cos(a)) - \ln(\cos(b))$

2. „von rechts nach links“: Durch geschicktes Substituieren versucht man das Integral zu vereinfachen. Dazu wird x durch $\varphi(t)$ ersetzt und die Ableitung gebildet:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \qquad „dx = \varphi'(t)dt“$$

Ersetze dann die Grenzen a, b mit c, d, wobei $\varphi(c) = a, \varphi(d) = b$.

Das Beispiel von oben kann nun auch so gelöst werden:

Beispiel: $\int_c^d 2ye^{y^2} \overset{y=\sqrt{t}}{=} \int_{c^2}^{d^2} 2\sqrt{t}e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int_{c^2}^{d^2} e^t dt = e^{d^2} - e^{c^2}$.

13.17 Satz (partielle Integration)**:** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und g stetig differenzierbar und F Stammfunktion zu f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Beweis: Nach Produktregel gilt $(Fg)'(x) = F'g + Fg' = fg + Fg'$ und es gilt $fg = (Fg)' - Fg'$. Integrieren liefert dann:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b (Fg)'(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx = Fg|_a^b \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

□

Beispiele:

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sin x dx &= x(-\cos x)|_a^b - \int_a^b 1(-\cos x)dx \\ &= -x\cos x|_a^b + \int_a^b \cos x dx \\ &= -b\cos c + a\cos a + \sin b - \sin a\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x^2 e^x dx &= x^2 e^x\Big|_a^b - \int_a^b 2xe^x dx \\
&= x^2 e^x\Big|_a^b - \left(2xe^x\big|_a^b - \int_a^b 2xe^x dx\right) \\
&= x^2 e^x\Big|_a^b - 2xe^x\big|_a^b + 2e^x\big|_a^b \\
&= (x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_a^b
\end{aligned}
$$

Manchmal liefert partielle Integration eine Iterationsformel für ein Integral.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sin^n x dx &= \int_a^b \underbrace{\sin x}_{f} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{g} dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b - \int_a^b (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b + \int_a^b (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow n\int_a^b \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b \sin^{n-2} x dx
$$

$$
\Rightarrow \int_a^b \sin^n x dx = \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Bigg|_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \sin^{n-2} x dx
$$

Es kann auch nützlich sein, die konstante Funktion 1 ins Integral zu schreiben.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \ln x dx &= \int_a^b \underbrace{1}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} dx \\
&= x \ln x\big|_a^b - \int_a^b x\frac{1}{x} dx \\
&= x \ln x\big|_a^b - x\big|_a^b
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Wir haben partielle Integration und Substitution bisher nur für bestimmte Integrale eingeführt. Für die unbestimmten Integrale (Stammfunktionen) gelten analoge Regeln.

Wir diskutieren nun die Integration rationaler Funktionen. Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form $\frac{P_1}{P_2}$ mit den Polynomen P_1 und P_2. Ist der Grad von P_1 größer (oder gleich) dem Grad von P_2, so kann man durch *Polynomdivision* $\frac{P_1}{P_2}$ schreiben als $\frac{P_1}{P_2} = Q + \frac{R}{P_2}$ mit geeigneten Polynomen Q und R, wobei der Grad von R kleiner ist als der Grad von P_2.

Beispiel (Polynomdivision)**:**

$$\frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 4}{2x - 8} \qquad P_1 = x^3 + 5x^2 - 7x + 4,\ P_2 = 2x - 8$$

$$(x^3 + 5x^2 - 7x + 4) : (2x - 8) = \frac{1}{2}x^2 + 4,5x + 14,5 + \frac{120}{2x - 8}$$

Für die Integration rationaler Funktionen reicht es also Funktionen der Form $\frac{R}{P}$ mit $\mathrm{Grad} R < \mathrm{Grad} P$ zu betrachten.

Hat P den Grad n, so hat P genau n Nullstellen (über $\mathbb{C}$), d. h.

$$P(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - z_i) \quad \text{mit } z_i \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

Ist P ein reelles Polynom, d. h. Koeffizienten von P sind reell, so ist mit z auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ($\overline{P(z)} = P(\overline{z})$). Tatsächlich stimmen dann sogar die Vielfachheit von der Nullstelle z und der Nullstelle $\overline{z}$ überein.

Mit $z = \xi + i\mu$ gilt

$$(x - z)(x - \overline{z}) = (x - \xi - i\mu)(x - \xi + i\mu) = (x - \xi)^2 + \mu^2$$

$$\Rightarrow\ (x - z)^l(x - \overline{z})^l = \left((x - \xi)^2 + \mu^2\right)^l$$

Ein reelles Polynom hat daher die Produktdarstellung

$$P(x) = a\prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}\left[(x - \xi_j)^2 + \mu_j^2\right]^{l_j}$$

mit den reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ der Vielfachheit k_i und den komplexen Nullstellen $\xi_j + i\mu_j$ $j = 1, \ldots, s$ der Vielfachheit l_j. Der Grad ist dann gerade

$$\sum_{i=1}^{r} k_i + \sum_{j=1}^{s} l_j.$$

13.18 Satz (Partialbruchzerlegung)**:** Zu reellen Polynomen R und P mit

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - x_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}\left[(x - \xi_j)^2 + \mu_j^2\right]^{l_j}$$

und Grad$R <$ Grad$P$ gibt es Koeffizienten a_{ik}, b_{jl}, c_{jl} mit

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{k_i} \frac{a_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{l_j} \frac{b_{jl}x + c_{jl}}{\left((x-\xi)^2+\mu_j^2\right)^l}.$$

Beweis: Übung

Die Zahlen b_{ik}, b_{jl}, c_{jl} werden durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen spezieller Werte für x bestimmt.

Beispiel:

$$\frac{-x^2-6x+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{12}}{(x-1)^2} + \frac{b_{11}x+c_{11}}{x^2+1} + \frac{b_{12}x+c_{12}}{(x^2+1)^2}$$

Nun Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$= \frac{a_{11}(x-1)(x^2+1)^2 + a_{12}(x^2+1)^2 + (b_{11}x+c_{11})(x-1)^2(x^2+1) + (b_{12}x+c_{12})(x-1)^2}{x-1)^2(x^2+1)^2}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned}
x^5: &\quad 0 = a_{11} + b_{11} \\
x^4: &\quad 0 = -a_{11} + a_{12} - 2b_{11} + c_{11} \\
x^3: &\quad 0 = 2a_{11} + 2b11 - 2c11 + b12 \\
x^2: &\quad -1 = -2a_{11} + 2a_{12} - 2b_{11} + 2c_{11} - 2b_{12} + c_{12} \\
x^1: &\quad -6 = a_{11} + b_{11} - 2c_{11} + b_{12} - 2c_{12} \\
x^0: &\quad 3 = a_{11} + a_{12} + c_{11} + c_{12}
\end{aligned}$$

Auflösen des Gleichungssystems liefert:

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = -1,\ b_{11} = 0,\ b_{12} = 2,\ c_{11} = 1,\ c_{12} = 3$$

Damit folgt:

$$\frac{-x^2-6x+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x+3}{(x^2+1)^2}$$

Beachte: Man kann die Koeffizienten auch durch Einsetzen geeigneter Werte von x bestimmen.

Sei x_{i_0} die k-fache Nullstelle von P. Dann gilt für a_{i_0k}:

$$a_{i_0k} = \frac{R(x)}{P(x)}(x-x_0)^k\bigg|_{x=x_0}$$

Im Beispiel:

$$a_{12} = \left.\frac{-x^2 - 6x + 3}{(x^2+1)^2}\right|_{x=1} = -1$$

Beispiele (Integration der Partialbrüche)**:**

- $\int \frac{a}{x-x_0} dx = a \ln|x - x_0| + C$
- $\int \frac{a}{(x-x_0)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{a}{(x-x_0)^{n-1}} + C$
- $\int \frac{bx+c}{(x-\xi)^2+\mu^2} dx = \frac{b}{2} \int \frac{2x-2\xi}{(x-\xi)^2+\mu^2} dx + \frac{b\xi+c}{\mu} \int \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right)^2+1}$
  $= \frac{b}{2} \log\left((x-\xi)^2 + \mu^2\right) + \frac{b\xi+c}{\mu} \arctan\left(\frac{x-\xi}{\mu}\right) + C$
- $\int \frac{bx+c}{((x-\xi)^2+\mu^2)^n} dx = \frac{b}{2(1-n)} \frac{1}{((x-\xi)^2+\mu^2)^{n-1}} + \frac{b\xi+c}{\mu^{2n-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ mit $t = \frac{x-\xi}{\mu}$

  Für $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ gilt die Rekursion

  $$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)I_n(t)\right).$$

  Insbesondere

  $$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right) + C.$$

Wir kommen nun zu zwei wichtigen Vertauschungssätzen.

Erinnerung (gleichmäßige Konvergenz)*:*

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } [a,b] \;\Leftrightarrow\; \forall x \in I, \varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N} \;:\; \forall n \geq N \;:\; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

13.19 Satz (1. Vertauschungssatz)**:** Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, Riemann-integrierbar und f_n konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Beweis: f ist Riemann-integrierbar: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Zu zeigen: Es gibt Zerlegung Z von $[a,b]$, sodass für die zugehörigen Ober-/Untersummen gilt

$$O_Z(f) - U_Z(f) \leq \varepsilon$$

Da (f_n) gleichmäßig konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_N(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ für alle $x \in [a,b]$.

Insbesondere gilt also für jede Zerlegung Z

$$|O_Z(f) - O_Z(f_N)| \leq \sum (x_i - x_{i-1}) \left| \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x) - \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f_N(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}$$

und analog

$$|U_Z(f) - U_Z(f_N)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_N Riemann-integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung Z mit

$$|O_Z(f_N) - U_Z(f_N)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Damit folgt mit Dreiecksungleichung also

$$\begin{aligned}|O_Z(f) - U_Z(f)| &= |O_Z(f) - U_Z(f) + O_Z(f_N) + U_Z(f_N) - O_Z(f_N) - U_Z(f_N)| \\ &\leq |O_Z(f) - O_Z(f_N)| + |U_Z(f) - U_Z(f_N)| + |O_Z(f_N) - U_Z(f_N)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Aussage über Grenzwert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $n \geq N$ und $x \in [a,b]$. Damit folgt für $n \geq N$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx \leq \varepsilon$$

□

13.20 Satz (2. Vertauschungssatz)**:** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Gibt es stetig differenzierbare Funktionen $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

(i) $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [a,b]$,

(ii) $f_n' \to g$ gleichmäßig,

so ist f stetig differenzierbar und $f' = g$.

Beweis: Da (f_n') stetig und gleichmäßig gegen g konvergent, ist g stetig. Weiterhin gilt nach dem HDI (angewendet auf f_n)

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt.$$

Bildet man nun Grenzwert und nutzt gleichmäßig Konvergenz der f_n' gegen g und den vorigen Satz so folgt

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Nach dem HDI (beachte g stetig) ist dann f differenzierbar mit $f' = g$. □

Gegenbeispiel (Punktweise Konvergenz von f_n und f_n' reicht nicht)**:** Betrachte $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Dann $f_n \to |\cdot|$ punktweise und $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}} \to \operatorname{sgn}(x)$ punktweise.

Zum Abschluss des Abschnitts kommen wir nun zur uneigentlichen Integration.

Bisher hatten wir immer vorausgesetzt:

- $[a,b]$ kompakt, d. h. a, b endlich

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Wir schwächen das nun ab.

13.21 Definition (uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit): a) Sei $a \geq \infty$ und $a < b < \infty$. Die Funktion $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar* bei a, wenn für $x > a$ die Einschränkung von f auf $[x, b]$ Riemann-integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)dt$$

existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_a^b f(t)dt$$

b) Sei $b \leq \infty$ und $-\infty < a < b$. Die Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar bei b, wenn für $x < b$ die Einschränkung von f auf $[a, x]$ Riemann-integrierbar ist und der Grenzwert

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)dt$$

existiert. In diesem Fall bezeichnen wir den Grenzwert mit $\int_a^b f(t)dt$.

c) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ gegeben und sind für ein (jedes) $c \in (a, b)$ die Einschränkungen von f auf $(a, c]$ bzw. $[c, b)$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so nennen wir f bei a und b uneigentlich Riemann-integrierbar und setzen

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Beachte: Die Definition enthält zwei relevante Situationen:

- a (b) endlich und f hat Singularität, d. h. ist unbeschränkt bei a (b).
- $a = -\infty$ ($b = \infty$)

Beispiele: • Sei $\alpha > 0$, $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt &= \lim_{x \to 0+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \overset{\alpha \neq 1}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \Big|_x^1 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} : & 0 < \alpha < 1 \\ \infty : & \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Sei $\alpha > 0$, $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt \overset{\alpha\neq 1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha}\Big|_1^x$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}: & 0<\alpha<1 \\ \infty: & \alpha > 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ existiert } \textit{nie}$$

- $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(-t)$. Dann gilt

$$\int_0^\infty \exp(-t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \exp(-t)dt = \lim_{x\to\infty} -\exp(-t)|_0^s = 1$$

Eine wichtige Funktion (siehe später) wird mittels uneigentlichem Integral definiert.

13.22 Definition (Γ-Funktion)**:** Für $x > 0$ definieren wir das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Die Abbildung

$$\Gamma(0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \Gamma(x)$$

heißt *Gammafunktion*.

13.23 Proposition (Eigenschaften Γ-Funktion)**:** Es gilt

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
3. $\Gamma(n+1) = n!$ mit $n \in \mathbb{N}$

Beweis: 1. Zeigen zunächst Konvergenz des Integrals bei 0 und ∞

Bei 0: Für $x < 1$ ist der Integrand unbeschränkt. Damit existiert $\int_0^1 t^{x-1}dt$ für alle $x - 1 > -1$, da e^{-t} bei 0 beschränkt und stetig ist.

Bei ∞: Für t groß genug gilt

$$|t^{x-1}e^{-t}| = \Big|\underbrace{t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}}}_{\le 1}\Big| \left|e^{-\frac{t}{2}}\right| \le \left|e^{-\frac{t}{2}}\right|.$$

Es ergibt sich

$$\int_1^R t^{x-1}e^{-t}dt = \int_1^{R_0} t^{x-1}e^{-t}dt + \int_{R_0}^R t^{x-1}e^{-t}dt \le C + \int_{R_0}^R t^{x-1}e^{-t}dt < \tilde{C}$$

Damit existiert

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_r^R t^{x-1}e^{-t}dt.$$

2.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_r^R t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= \lim_{R\to\infty, r\to 0} -t^{x-1}e^{-t}\Big|_r^R + \int_r^R xt^{x-1}e^{-t}dt \\ &= 0 + x\Gamma(x).\end{aligned}$$

3. Es gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1.$$

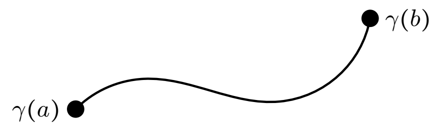
Mit 2. und Induktion folgt dann

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

□

14. Etwas zu Kurvenintegralen

14.1 Definition (Kurve)**:** Eine *Kurve* in $\mathbb{R}^d$ (oder $\mathbb{C}$) ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ ($\gamma : I \to \mathbb{C}$), wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

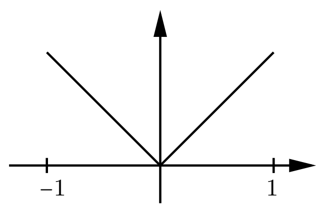


14.2 Definition (stückweise stetige Differenzierbarkeit)**:** Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es Intervalle I_j, $j = 1, \ldots, n$ gibt mit $I = \bigcup_{j=1}^n$, sodass die Einschränkungen von γ auf I_j stetig differenzierbar sind.

Eine stetig differenzierbare Kurve heißt *regulär*, wenn die Ableitung nirgends verschwindet.

Bemerkung:
- Durch Zerlegen kann man sich in konkreten Fällen oft auf reguläre Kurven beschränken.
- Auch wenn γ stetig differenzierbar ist, kann doch das Bild $\gamma(t)$ einen „Knick" haben.

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (t^3, |t|t^2)$$

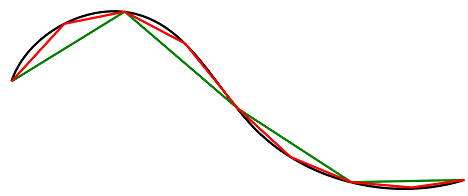


- Man kann eine Kurve auffassen als die Bewegung eines Massenpunktes im Raum. Dann ist γ' gerade die Geschwindigkeit. Dann kann der Punkt seine Richtung ändern, während er auf der Stelle steht.

Beispiel: $I = [0, 2\pi)$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Wir wollen nun die Länge einer Kurve bestimmen.

Idee:
- Approximiere γ mit Polygonzügen
- Berechne Länge des Polygonzuges
- Bilde Grenzwert



14.3 Definition (Polygonzug)**:** Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ (bzw. $[a,b] \to \mathbb{C}$) eine Kurve und $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so definiert man die Länge des *Polygonzuges* $(\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n))$ als

$$L_Z(\gamma) = \sum_{i=0}^{n} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \,.$$

14.4 Definition (Rektifizierbarkeit)**:** Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ (bzw. $\mathbb{C}$) heißt *rektifizierbar*, wenn

$$\sup_Z L_Z(\gamma) < \infty.$$

In diesem Falle definieren wir die Länge $L(\gamma)$ als eben dieses Supremum.

14.5 Definition (Äquivalenz von Kurven)**:** Zwei Kurven $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ und $\rho : [c,d] \to \mathbb{R}^d$ heißen *äquivalent*, wenn es ein strikt wachsendes bijektives

$$\varphi : [a,b] \to [c,d]$$

gibt mit $\gamma = \rho \circ \varphi$.

Bemerkung: In äquivalenten Kurven werden dieselben Punkte in derselben Reihenfolge durchlaufen. Es ändert sich lediglich die „Geschwindigkeit“.

14.6 Lemma (Charakterisierung äquivalenter Kurven)**:** Sind γ und ρ äquivalente Kurve, so ist γ genau dann rektifizierbar, wenn ρ rektifizierbar ist und in diesem Fall stimmen ihre Längen überein.

Beweis: Es wird das Supremum über dieselben Polygonzüge gebildet. □

14.7 Proposition (Umparametrisierung einer Kurve)**:** Sei $t\colon[\alpha,\beta]\to[a,b],\ \tau\mapsto t(\tau)$ mit $t(\alpha)=a,\ t(\beta)=b,\ t(\tau)\in[a,b]$ und stetig differenzierbar mit $\frac{dt}{d\tau}\neq 0$. Dann sind die rektifizierbaren Kurven

$$\gamma(t) \text{ und } \tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(t(\tau))$$

äquivalent und haben die gleiche Länge.

Beweis: Nach Kettenregel gilt

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{\gamma}(\tau) = \frac{d}{dt}\gamma(t(\tau))\frac{d}{d\tau}t(\tau)$$

und damit folgt

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t(\tau))|\,|t'(\tau)|\,d\tau = \int_\alpha^\beta |\tilde{\gamma}'(\tau)|\,d\tau = L(\tilde{\gamma})$$

□

14.8 Satz (Bogenlänge)**:** Ist $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ (bzw. $[a,b]\to\mathbb{C}$) stückweise stetig differenzierbar, so ist γ rektifizierbar und es gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^d \gamma_i'(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

Beweis: o. E. ist γ stetig differenzierbar (sonst stückweise argumentieren)

Sei $Z=(t_0,\dots,t_n)$ eine Zerlegung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| &= \sum_{j=1}^n \frac{|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})|}{t_j-t_{j-1}}(t_j-t_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \left|\frac{1}{t_j-t_{j-1}}\begin{pmatrix}\gamma_1(t_j)-\gamma_1(t_{j-1})\\ \vdots \\ \gamma_d(t_j)-\gamma_d(t_{j-1})\end{pmatrix}\right|(t_j-t_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \left|\begin{pmatrix}\gamma_1'(\tilde{t}_j^{(1)})\\ \vdots \\ \gamma_d(\tilde{t}_j^{(d)})\end{pmatrix}\right|(t_j-t_{j-1}) \\
\Rightarrow \sup_Z \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})| &= \sup_Z \sum_{j=1}^n \left|\begin{pmatrix}\gamma_1'(\tilde{t}_j^{(1)})\\ \vdots \\ \gamma_d(\tilde{t}_j^{(d)})\end{pmatrix}\right|(t_j-t_{j-1}) \\
&= \sup_Z \sum_{j=1}^n \left|\begin{pmatrix}\gamma_1'(t_j)\\ \vdots \\ \gamma_d(t_j)\end{pmatrix}\right|(t_j-t_{j-1}) \\
\text{(Riemannsumme)} \qquad &= \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Der Satz besagt, dass die Länge des zurückgelegten Weges gerade das Integral über die (Norm der) Geschwindigkeit ist.

Beispiel:

- $\gamma:\ [-1,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma(t)=\binom{t^2}{t^3}$ $\hat{=}$ Neil'sche Parabel

- $\gamma: \ [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \binom{t^3}{|t|^3}$ Physikalische Interpretation: Massepunkt wird immer langsamer und dreht sich dann auf der Stelle.

14.9 Definition (Kurvenintegral 1. Art)**:** Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige differenzierbare Kurve und $f : \ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine auf der Spur $\gamma([a,b])$ definierte stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f(x)ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \left|\gamma'(t)\right| dt$$

Kurvenintegral von f längs γ bzgl. Bogenlänge, Kurvenintegral 1. Art.

Begründung: Ist t eine „schöne" Zerlegung von $[a,b]$, so folgt

$$\int_\gamma f(x)ds \approx \sum_{k=1}^{m} f(\gamma(t_k)) \left|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\right|$$

Wir kommen nun zum Kurvenintegral 2. Art. Dieses beschreibt (z. B.) die Arbeit/Energie, die die Bewegung eines Massenpunktes in einem Kraftfeld kostet.

Idee: Ist die Kraft F konstant und die Bewegung linear mit der Geschwindigkeit v, so gilt

$$\text{Arbeit} = \langle F, v\rangle\, \delta t$$

Im allgemeinen Fall können wir die Bewegung und das Feld lokal als beinahe konstant annehmen und erhalten für die Arbeit

$$W = \sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle F(\gamma(t_j)), \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\rangle (t_j - t_{j-1})$$

Macht man die Zerlegung immer feiner, so erhält man ein Integral.

$$W = \int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle dt$$

14.10 Definition (Kurvenintegral 2. Art - Kurvenintegral über Vektorfeld)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$, U offen und $F : \ U \to \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definiert man für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to U$ das Kurvenintegral 2. Art.

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_\gamma F(x)dx = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{d} F_j(\gamma(t))\gamma_j'(t)dt$$

Bemerkung: $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig, wenn $\forall (x_n) \subset U,\ x_n \to x \in U \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$

Kurvenintegrale ändern sich nicht, wenn dieselbe Kurve mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchlaufen wird.

14.11 Lemma (Integrale über äquivalente Kurven)**:** Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $F: U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Sind $\gamma: [a,b] \to U$ und $\rho: [c,d] \to U$ äquivalente, stetig differenzierbare Kurven, so gilt

$$\int F d\gamma = \int F d\rho.$$

Beweis: Sei $\gamma = \rho \circ \varphi$ mit $\varphi: [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, streng monoton und stetig. sei weiterhin $Z = (t_0, \dots, t_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann ist für ein genügend feines Z

$$S_Z(F) = \sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$$

eine gute Approximation von $\int F d\gamma$. Dann ist aber (da φ stetig ist) auch

$$Z' = (\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n))$$

eine sehr feine Zerlegung von $[c,d]$ und damit auch

$$S_{Z'}(F) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle F(\gamma(t'_j)), \gamma(t'_j) - \gamma(t'_{j-1}) \right\rangle$$

mit $t'_j = \varphi(t_j)$ eine gute Approximation von $\int F d\rho$. Wegen $\gamma = \rho \circ \varphi$ gilt aber $S_Z(f) = S_{Z'}(F)$ und es folgt

$$\int F d\gamma = \int F d\rho.$$

□

Beachte: Man kann tatsächlich das Kurvenintegral für alle rektifizierbaren Kurven definieren. Wir gehen hier nicht darauf ein, da es für Anwendungen kaum von Belang ist.

14.12 Definition (Inverse Kurve)**:** Zu einer Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^d$ (bzw. $\mathbb{C}$) definieren wir die inverse Kurve $\tilde{\gamma}: [-b,-a] \to \mathbb{R}^d$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$. Ist γ (stückweise) stetig differenzierbar, so auch $\tilde{\gamma}$ und es gilt $\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(-t)$. Insbesondere gilt

$$\int_\gamma F d\gamma = -\int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Wir untersuchen nun, ob das Kurvenintegral von der Kurve, oder nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt. Wenn es um die Beschreibung von Arbeit/Energie geht, sollte es nur von diesen beiden Punkten abhängen, da man sonst Energie gewinnen könnte.

Erinnerung (Gradienten, bzw. partielle Ableitungen)*:* Ist $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi: U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so liefert der Gradient $\nabla\varphi: U \to \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld (oft auch $\nabla\varphi \mathrel{\hat{=}} \operatorname{grad}\varphi$).

Wir haben schon diskutiert (ohne Beweis), dass für ein differenzierbares $\gamma: [a,b] \to U$ dann gilt:

$$(\varphi \circ \gamma)'(t) = \left\langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle.$$

Eine Kurve heißt *geschlossen*, wenn gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$.

14.13 Satz (Abstrakte Charakterisierung von Gradientenfeldern)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $F: U \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) Für jedes (stückweise) stetig differenzierbare γ hängt $\int_\gamma F d\gamma$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

(ii) Ist γ eine geschlossene (stückweise) stetig differenzierbare Kurve, so gilt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.

(iii) F ist ein Gradientenfeld, d. h. es existiert ein stetig differenzierbares $\varphi: U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla\varphi$.

In diesem Fall gilt $\int_\gamma d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$

Beweis: (i)⇒(ii) Sei γ eine geschlossene Kurve. Dann ist $\tilde{\gamma}$ eine Kurve mit demselben Anfangs- und Endpunkt.

$$\int_\gamma F\,d\gamma \overset{(i)}{=} \int_{\tilde{\gamma}} F\,d\tilde{\gamma} \overset{\text{Inverse}}{=} -\int_\gamma F\,d\gamma = 0$$

(ii)⇒(i) Seien γ, ρ stückweise stetig differenzierbar mit denselben Anfangs- und Endpunkten, so kann man γ und $\tilde{\rho}$ zu einer geschlossenen Kurve $\gamma + \tilde{\rho}$ zusammenfügen.

$$\int_\gamma F\,d\gamma + \int_{\tilde{\rho}} F\,d\tilde{\rho} = \int_{\gamma+\tilde{\rho}} F\,d(\gamma+\tilde{\rho}) \overset{(ii)}{=} 0 \Rightarrow \int_\gamma F\,d\gamma = \int_\rho F\,d\rho$$

(i)⇒(iii) o.E. sei U zusammenhängend (sonst zerlegen). Wähle $x_0 \in U$ fest. Definiere φ auf U durch

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F\,d\gamma_x,$$

wobei γ_x eine Kurve von x_0 nach x ist. Es ist φ wohldefiniert nach (i). Dann gilt nach (i)

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_{\gamma_h} F\,d\gamma_h$$

mit $\gamma_h: [0,h] \to \mathbb{R}^d$, $\gamma_h(t) = x + te_j$. Es gilt $\gamma_h'(t) = e_j$. Damit folgt

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_0^h \langle F(x + te_j), e_j\rangle\,dt = \int_0^h F_j(x + te_j)\,dt.$$

Da $t \mapsto F_j(x + te_j)$ stetig ist folgt nach dem HDI

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x + te_j) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j)\,dt = F_j(x) \Rightarrow \nabla\varphi = F$$

(iii)⇒(i) Sei $F = \nabla\varphi$. Dann gilt für die stetig differenzierbare Kurve $\gamma: [a,b] \to U$:

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_a^b \big\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\,dt = \int_a^b \big\langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\big\rangle\,dt = \int_a^b (\varphi\circ\gamma)'(t)\,dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

□

Beachte: Die Funktion φ heißt das Potential von F. Ist φ ein Potential, so ist auch $\varphi + \text{const}$ ein Potential. Hat U mehrere Zusammenhangskomponenten, so kann man auf ihnen verschiedene Konstanten addieren.

14.14 Folgerung (Potential eines Gradientenfeldes)**:** Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ ein Gradientenfeld und U zusammenhängend. dann ist (mit einem fest gewählten $p \in U$)

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F\, d\gamma_x$$

mit γ_x Kurve von p nach x ein Potential zu F.

Beweis: Sei $F = \nabla\Psi$. Dann gilt

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F\, d\gamma_x = \Psi(x) - \Psi(p) \ \Rightarrow\ \nabla\varphi = \nabla\Psi = F$$

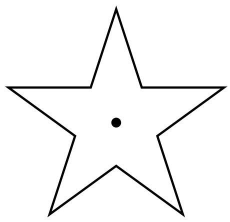
□

14.15 Definition (Sternförmige Menge)**:** Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $p \in U$ gibt, sodass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von p und x ganz in U liegt. Ein solches p heißt *Zentrum* von U.

Bemerkung: U sternförmig $\Leftrightarrow$ $\exists_{x_0 \in U}\ \forall_{x \in U}\ \forall_{t \in [0,1]}\ x_0 + t(x - x_0) \in U$

Beispiel:

- Jede konvexe Menge ist sternförmig. (Jeder Punkt der Menge ist Zentrum.)
- Sterne



- $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist *nicht* sternförmig. (Die Verbindung von p und $-p$ enthält 0.)
- $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) :\ x \le 0\}$ ist sternförmig mit z. B. Zentrum $(1, 0)$.

14.16 Theorem (Lemma von Poincaré)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und sternförmig. Sei $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar (d. h. partielle Ableitungen sind stetig). Dann ist F genau dann ein Gradientenfeld, wenn gilt

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}$$

für alle $j, k = 1, \ldots, d$.

Beweis: „⇒“ Sei $F = \nabla\varphi$. Dann ist φ zweimal stetig differenzierbar. Daher gilt

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi \overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

„⇐“ o.E. sei 0 das Zentrum von U (Sonst verschieben). Zu $x \in U$ wählen wir die Kurve $\gamma : [0,1] \to U$, $\gamma(t) = tx$ und definieren

$$\varphi(x) = \int_\gamma F\, d\gamma = \int_0^1 \langle F(tx), x\rangle\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^d F_j(tx) x_j\, dt.$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ ein Potential von F ist. Mit $t\frac{\partial F_j}{\partial x_k}x_j = t\frac{\partial F_k}{\partial x_j}x_j$ gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k}(F_j(tx)x_j)\, dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^d \left(t\frac{\partial F_j}{\partial x_k}x_j + F_k(tx)\right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_k(tx))\, dt = tF_k(tx)|_0^1 = F_k(x).$$

□

Bemerkung: a) Die Voraussetzung „sternförmig“ ist nicht unbedingt notwendig um ein Gradientenfeld zu erhalten. Zum Beispiel ist $F : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = \frac{1}{|x|^3}x$ ein Gradientenfeld.

b) Durch Wegnehmen von Punkten kann eine Menge sternförmig werden.

14.17 Verfahren (Auffinden des Potentials)**:** Variante 1: Integrieren entlang „schöner“ Wege $\varphi(x) = \int F d\gamma_x$ mit γ_x von p nach x beliebiger Weg.

Variante 2: Anwenden des HDI auf einzelne Komponenten von F und Vergleichen.

Beispiel: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ Dann gilt $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ ⇒ es gibt ein Potential ϕ. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} &= F_1 = x_1 \rightsquigarrow \phi = \frac{1}{2}x_1^2 + C(x_2) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} &= F_2 = x_2 \rightsquigarrow \phi = \frac{1}{2}x_2^2 + D(x_1) \\ &\Rightarrow \phi = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + const. \end{aligned}$$

Probe!

Wie in Bemerkung a) beschrieben, ist die Voraussetzung „sternförmig“ nicht notwendig um ein Gradientenfeld zu erhalten. Eine nicht sternförmige Menge kann man aber in sternförmige Teilmengen überführen:

14.18 Definition (Lokales Gradientenfeld)**:** Sei $F: U \to \mathbb{R}^d$ mit $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei F weiterhin stetig differenzierbar (kurz: $F \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$) so, dass für jedes $x \in U$ ein $R > 0$ existiert und $F|B_R(x)$ ein Gradientenfeld ist[1]. F heißt dann *lokales Gradientenfeld.*

[1] F eingeschränkt auf die offene Kugel um x mit Radius R

14.19 Definition (Homotopie)**:** Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ Kurven mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Wenn eine stetige Funktion $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ existiert mit

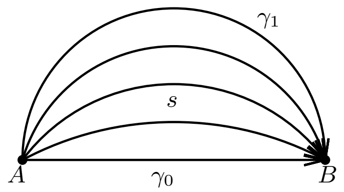
- $H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t),\ t \in [a,b]$
- $H(a,s) = A,\ H(b,s) = B,\ s \in [0,1],$

dann heißen γ_0 und γ_1 *homotop.*

Gilt sogar

- $H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t),\ t \in [a,b]$
- $H(a,s) = H(b,s)$ für alle $s \in [0,1]$,

dann heißen γ_0 und γ_1 *frei homotop.*



14.20 Definition (einfach wegzusammenhängende Menge)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$. Dann heißt U einfach wegzusammenhängend, wenn ein $x_0 \in U$ existiert, sodass für alle geschlossenen Kurven γ in U γ (frei) homotop zu $\gamma_0^{x_0}$ ist.

14.21 Satz (Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen)**:** Seien $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to U$ Kurven mit gleichem Anfangs- (A) und Endpunkt (B), γ_1 und γ_2 homotop und F lokales Gradientenfeld. Dann gilt

$$\int_{\gamma_1} F\, d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F\, d\gamma_2.$$

Beweis: Da γ_1 und γ_2 homotop sind, gibt es ein $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ mit den Eigenschaften aus der Definition.

Sei $B = \bigcup_j B_j$ so, dass F auf B_j ein Gradientenfeld ist. Dann existieren Zerlegungen $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = b$ und $Z' : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ so, dass $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset B_k$.

Sei $P_{ij} := H(t_i, s_j)$ für $t_i \in Z$ und $s_j \in Z'$. Dann definieren wir mit Γ_{ij} den Streckenzug zwischen P_{ij} und $P_{i+1\,j}$ und mit σ_{ij} den Streckenzug zwischen P_{ij} und $P_{i\,0}$. Die Länge des Streckenzuges ist durch die Funktion I gegeben.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} F\,d\gamma_1 &= \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{i0}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij}) + I(\sigma_{ij}) - I(\sigma_{i+1\,j}) \\
\text{(Teleskopsumme)} \qquad &= \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij}) \\
(j = m) \qquad &= \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{i1}) \\
&= \int_{\gamma_2} F\,d\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Zerlegungen Z und Z' geeignet existieren. Angenommen die Zerlegungen existierten nicht. Dann lässt sich $[a,b]\times[0,1]$ in n^2 Rechtecke R_{ij} unterteilen, wobei die Mittelpunkte der Rechtecke immer in $[a,b]\times[0,1]$ enthalten sind. Der Mittelpunkt $(R_{i_n j_n}(n)) = P_n$ bildet dabei eine beschränkte Folge. Diese Folge besitzt eine beschränkte Teilfolge, deren Folgeglieder für große n in B liegen. Dies steht im Widerspruch zur Annahme. □

14.22 Satz (Gradientenfelder auf einfach wegzusammenhängenden Mengen)**:** Sei $U \in \mathbb{R}^d$ einfach wegzusammenhängend und $F: U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\partial_j F_k = \partial_k F_j \text{ auf } U \;\Rightarrow\; F \text{ Gradientenfeld}$$

Beweis: Da U wegzusammenhängend ist, existiert eine Überdeckung β von U durch Kugeln. Nach dem Lemma von Poincaré ist F eingeschränkt auf $B \in \beta$ ein Gradientenfeld, da B sternförmig ist. Da γ eine geschlossene Kurve ist und homotop zu $\gamma_0^{x_0}$, folgt

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_{\gamma_0^{x_0}} F\,d\gamma_0^{x_0} = 0$$

Damit ist F konservativ und ein Gradientenfeld. □

Teil II.

Analysis 2

15. Mehrdimensionale Riemann-Integrale

In diesem Abschnitt führen wir das Riemann-Integral im $\mathbb{R}^d$ ein und diskutieren einfache Eigenschaften.

Eine Menge

$$I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d] = \{x \in \mathbb{R}^d | a_j \leq x_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, d\} \subset \mathbb{R}^d$$

heißt abgeschlossenes, beschränktes Intervall.

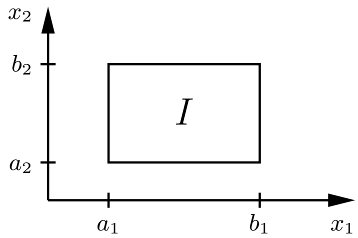


Abbildung 15.1.: das Intervall $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Das Innere $\mathring{I}$ von I ist dann definiert durch

$$\mathring{I} := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d)$$

Das Volumen $|I|$ von I ist definiert durch

$$|I| := \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

und der Durchmesser $\operatorname{diam} I$ ist definiert als

$$\operatorname{diam} I := \max |x - y| \mid x, y \in I.$$

Eine Zerlegung $Z = \left(I^{(j)}\right)_{j=1,\ldots,N}$ eines Intervalls I besteht aus abgeschlossenen Intervallen $I^{(j)},\ j = 1, \ldots, N$ mit

- $I = \bigcup_{j=1}^N I^{(j)}$
- die Inneren $\mathring{I}^{(j)}$ sind paarweise disjunkt, d. h. $\mathring{I}^{(j)} \cap \mathring{I}^{(k)} = \emptyset$ für alle j, k, $j \neq k$

Die Feinheit $|Z|$ der Zerlegung Z ist definiert als

$$|Z| := \max\{\operatorname{diam} I^{(j)} | \, j = 1, \dots, N\}$$

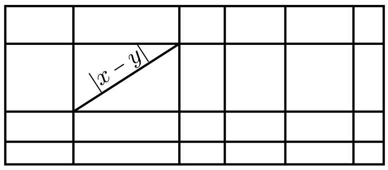


Abbildung 15.2.: die Feinheit ist definiert durch den größten Radius der Intervalle $I^{(j)}$

15.1 Definition (Ober-, Unter- und Riemann-Summe im Mehrdimensionalen)**:** Sei I ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, eine beschränkte Funktion. Dann definiert man zu jeder Zerlegung $Z = \left(I^{(j)}\right)_{j=1}^N$
Obersumme von f bzgl. Z

$$O_Z(f) := \sum_{j=1}^N |I^{(j)}| \sup_{x \in I^{(j)}} f(x)$$

Untersumme von f bzgl. Z

$$U_Z(f) := \sum_{j=1}^N |I^{(j)}| \inf_{x \in I^{(j)}} f(x)$$

Weiterhin definiert man zu den Stützstellen $\xi_j \in I^{(i)}$ die Riemann-Summe

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{j=1}^N |I^{(j)}| f(\xi_j)$$

Wie im eindimensionalen Fall kann man folgendes Lemma beweisen:

15.2 Lemma (Charakterisierung des Riemann-Integrals)**:** Sei I ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall in $\mathbb{R}^d$. Für $f : I \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) $\inf_Z O_Z(f) = \sup_Z U_Z(f)$

(ii) Es existiert ein $I_f \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|S_{Z,\xi}(f) - I_f| \leq \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z mit $|Z| \leq \delta$

15.3 Definition (Mehrdimensionales Riemann-Integral)**:** Sei I ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall $I \subset \mathbb{R}^d$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn sie eine der Bedingungen des obigen Lemmas erfüllt. Dann definiert man das Riemann-Integral von f als

$$\int_I f dx = \inf_Z O_Z(f) = \sup_Z U_Z(f) = I_f = \lim_{|Z| \to 0} S_{Z,\xi}(f).$$

Wesentliche Eigenschaften des Integrals folgen nun wie im eindimensionalen Fall. Insbesondere folgt die Positivität und die Linearität des Integrals, sowie die Abschätzung

$$\left| \int_I f dx \right| \leq \int_I |f| dx \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Ebenso kann man wieder zeigen, dass jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall Riemann-integrierbar ist (wesentlich ist wieder die gleichmäßige Stetigkeit). Schließlich überträgt sich auch folgender Konvergenzsatz:

15.4 Satz (Konvergenz mehrdimensionaler Funktionen)**:** Sei I ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall im $\mathbb{R}^d$. Sind die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und konvergieren sie gleichmäßig gegen $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt:

- f ist Riemann-integrierbar
- $\int_I f dx = \lim_{n \to \infty} \int_I f_n dx$

Für konkrete Rechnungen ist von entscheidender Bedeutung, dass man mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführen kann.

15.5 Satz (Fubini für das Riemann-Integral)**:** Sei $I' = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{d-1}, b_{d-1}]$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall im $\mathbb{R}^{d-1}$, $a_d < b_d$, $I = I' \times [a_d, b_d]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\int_I f(x) dx = \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x', x_d) dx_d \right) dx'$$

mit $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, falls die Integrale auf der rechten Seite existieren. Insbesondere gilt

$$\int_I f(x) dx = \int_{a_d}^{b_d} \left(\int_{a_{d-1}}^{b_{d-1}} \cdots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_d) dx_1 \right) dx_2 \right) \ldots dx_{d-1} \right) dx_d,$$

falls die Integrale auf der rechten Seite existieren. Entsprechendes gilt für eine (jede) Permutation der Koordinaten.

Beweis: Es reicht die erste Gleichung zu zeigen (die zweite Gleichung folgt dann direkt durch Iteration). Für jedes abgeschlossene, beschränkte Intervall $I \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_I dx = |I| = \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} \mathbb{1}_I dx_d \right) dx'$$

mit der charakteristischen Funktion (bzw. Indikatorfunktion) $\mathbb{1}_I$ von I gegeben durch

$$\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1: & x \in I \\ 0: & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $Z = \left(I^{(j)}\right)$ eine Zerlegung von I mit $O_Z(f) - U_Z(f) \leq \varepsilon$. Sei

$$\overline{f_j} := \sup_{x \in I^{(j)}} f(x), \ \underline{f_j} := \inf_{x \in I^{(j)}} f(x)$$

und

$$u = \sum_{j=1}^{N} \underline{f_j} \mathbb{1}_{I^{(j)}}, \ o = \sum_{j=1}^{N} \overline{f_j} \mathbb{1}_{I^{(j)}}.$$

Dann gilt $u \leq f \leq o$ (fast überall). Also folgt

$$\begin{aligned} U_Z(f) &= \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} u(x', x_d) dx_d \right) dx' \\ &\leq \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x', x_d) dx_d \right) dx' \\ &\leq \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} o(x', x_d) dx_d \right) dx' \\ &= O_Z(f). \end{aligned}$$

Hierbei folgen die erste und letzte Gleichung aus der Linearität der iterierten Integrale und aus der ersten Gleichung des Beweises. Mit $O_Z(f) - U_Z(f) \leq \varepsilon$ folgt also für den Wert S des iterierten Integrals $|O_Z(f) - S| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung. □

Beispiel: Sei $d = 2$ und $I = [0,1] \times [0,1]$. Sei $f(x_1, x_2) : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

- $f(x_1, x_2) = 1$ für $x_2 \neq \frac{1}{2}$
- $f(x_1, \frac{1}{2}) = 1$ für $x_1 \in \mathbb{Q}$
- $f(x_1, \frac{1}{2}) = 0$ für $x_1 \notin \mathbb{Q}$

Dann ist f Riemann-integrierbar mit $\int_I f dx = 1$.

Achtung: Es existiert jedoch nicht das Riemann-Integral

$$\int_0^1 f\left(x_1, \frac{1}{2}\right) dx_1.$$

Aber für jedes x_1 existiert $\int_0^1 f(x_1, x_2) dy = 1$. Damit können wir den Satz anwenden und erhalten

$$\int_I f dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 1 dx_2 = 1.$$

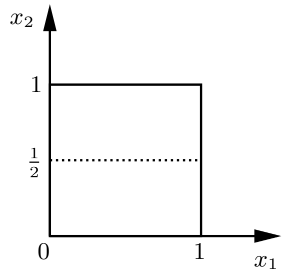


Abbildung 15.3.: die Funktion f dem Intervall $I = [0,1] \times [0,1]$

An diesem Beispiel sehen wir zweierlei: Erstens ist die Voraussetzung der Existenz der iterierten Integrale im Satz nötig (folgt also nicht aus der Riemann-Integrierbarkeit von f). Zweitens, kann es sinnvoll sein, die Reihenfolge der Integration zu verändern.

In den Anwendungen hat man es oft mit Funktionen zu tun, die nicht auf einem Intervall (sondern auf etwas anderen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$) definiert sind. Diese Funktionen setzt man dort durch 0 fort und integriert anschließend. Genauer geht man wie folgt vor:

15.6 Definition (Riemann-Integral auf beschränkten Mengen)**:** Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f Riemann-integrierbar, wenn für ein/jedes abgeschlossene Intervall I mit $A \subset I$ die Fortsetzung f^* von f auf I gegeben durch

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in A \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Man definiert dann

$$\int f dx := \int_A f dx := \int_I f(x) dx.$$

Beachte: Diese Definition hängt tatsächlich nicht von dem Intervall I mit $A \subset I$ ab.

Beispiel: Der *Schwerpunkt* S eines Körpers in $A \subset \mathbb{R}^d$ mit der Massenverteilung $f : A \to [0, \infty)$ auf einer Menge A ist gegeben durch

$$S := \frac{1}{\int f(x) dx} \left(\int f(x) x_1 dx, \ldots, \int f(x) x_d dx \right).$$

Handelt es sich um einen homogenen Körper so gilt $f \equiv$const und wir erhalten (nach Kürzen der Konstanten)

$$S = \frac{1}{\int_A dx} \left(\int_A x_1 dx, \ldots, \int_A x_d dx \right).$$

In konkreten Fällen ist auch folgende Konsequenz des Satzes von Fubini nützlich.

15.7 Proposition (Fubini für beschränkte Mengen): Sei I' ein Intervall im $\mathbb{R}^{d-1}$, $\phi, \psi : I' \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $a_d \le \phi \le \psi \le b_d$ und

$$A := \{x \in \mathbb{R}^d : (x_1, \dots, x_{d-1}) \in I' \text{ und } \phi(x_1, \dots, x_{d-1}) \le x_d \le \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Sei $f : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\int f dx = \int_{I'} \left(\int_c^d \mathbb{1}_A(x', x_d) f(x', x_d) dx_d \right) dx' = \int_I \left(\int_{\phi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_d) dx_d \right) dx'$$

falls die Integrale auf der rechten Seite existieren.

Beweis: Seien $I := I' \times [a_d, b_d]$. Sei f durch 0 auf I bzw. $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt. Dann gilt $f = f 1_A$. Nach dem Satz von Fubini erhalten wir (wenn die entsprechenden Integrale existieren)

$$\begin{aligned} \int f dx &= \int_I f dx \\ &= \int_I \mathbb{1}_A f dx \\ &= \int_{I'} \left(\int_{a_d}^{b_d} 1_A(x', x_d) f(x', x_d) dx_d \right) dx' \\ &= \int_{I'} \left(\int_{\phi(x')}^{\psi(x')} f(x', x_d) dx_d \right) dx'. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Beispiel: Sei A die rechte Hälfte der Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$, dass heißt

$$A := \{(x_1, x_2) : x_1 \ge 0, x_1^2 + x_2^2 \le 1\} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0,1], -\sqrt{1 - x_1^2} \le x_2 \le \sqrt{1 - x_1^2}\}.$$

Die Gesamtmasse erhält man dann durch Integration über die gesamte Fläche:

$$\int_A 1\, dx = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} 1\, dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 2\sqrt{1 - x_1^2}\, dx_1 = \frac{\pi}{2}$$

Dann können wir den Schwerpunkt einer homogenen Massenverteilung auf A berechnen.

$$\int_A x_2 dx = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} x_2\, dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 0 dx_1 = 0$$

(Das folgt auch direkt durch Symmetrieerwägungen.)

$$\int_A x_1 dx = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{+\sqrt{1-x_1^2}} x_1\, dx_2 \right) dx_1 = \int_0^1 2x_1 \sqrt{1 - x_1^2}\, dx_1 = -\frac{2}{3} \left(1 - x_1^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Nach teilen durch die Gesamtmasse erhält man den Schwerpunkt

$$S = \left(\frac{4}{3\pi}, 0 \right).$$

Unter Umständen lässt sich das Verfahren in der Proposition iterieren:

Beispiel: Sei B_d die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$.

$$B_d = \{x \in \mathbb{R}^d : \; x_1^2 + \ldots + x_d^2 = |x|^2 \leq 1\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
B_d =& \{x \in \mathbb{R}^d : \; x_1^2 + \ldots + x_d^2 \leq 1\} \\
=& \{x \in \mathbb{R}^d : \; x_1^2 + \ldots + x_{d-1}^2 \leq 1, \; -(1 - x_1^2 - \ldots - x_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_d \leq (1 - x_1^2 - \ldots - x_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}\} \\
=& \{x \in \mathbb{R}^d : \; x_1^2 + \ldots + x_{d-2}^2 \leq 1, \; -\sqrt{\ldots} \leq x_{d-1} \leq \sqrt{\ldots}, \; -\sqrt{\ldots} \leq x_d \leq \sqrt{\ldots}\} \\
=& \ldots \\
=& \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_1 \leq 1, \; -(1 - x_1^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_2 \leq (1 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}, \; \ldots, \\
& - (1 - x_1^2 - \ldots - x_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}} \leq x_d \leq (1 - x_1^2 - \ldots - x_{d-1}^2)^{\frac{1}{2}}\}.
\end{aligned}$$

Es wird also die höherdimensionale Kugel durch Integration über niederdimensionale Kugeln ausgedrückt.

Im $\mathbb{R}^3$ führt das zu

$$\int_{B_3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} f(x_1, x_2, x_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen strukturellen Erwägungen zum Riemann-Integral.

15.8 Definition (Jordan-messbar)**:** Eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ heißt *Jordan-messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion Riemann-integrierbar ist.

Damit definiert das Riemann-Integral ein *Volumen*:

$$|\cdot| : \text{Beschränkte Jordan-messbare Mengen} \to [0, \infty), \; |A| := \int \mathbb{1}_A\,dx.$$

15.9 Proposition (Charakterisierung Volumenfunktion)**:** Die oben definierte Volumenfunktion erfüllt die folgenden drei Eigenschaften:

(i) $|[0,1]^d| = 1$ (Normierung),

(ii) $|A| = |t + A|$ (Translationsinvarianz),

(iii) $|A| = \sum_{j=1}^{N} |A_j|$, falls A die disjunkte Vereinigung der A_j ist (Endliche Additivität).

Beweis: (i) Das ist klar, da $[0,1]^d$ ein Intervall ist.

(ii) Das ist klar für Intervalle. Für Jordan-messbaren Mengen folgt die Translationsinvarianz durch Grenzübergang.

(iii) Folgt wegen $\mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}$ aus der Linearität des Integrals.

□

15.10 Definition (Jordan-Nullmenge)**:** Eine Jordan-messbare Menge A heißt Jordan-Nullmenge, wenn gilt

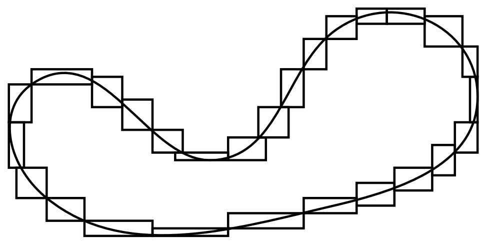
$$|A| = 0.$$

15.11 Proposition (Charakterisierung Jordan-Nullmengen)**:** Eine beschränkte Menge A ist eine Jordan-Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Intervalle $I_1, \dots, I_N$ existieren mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j \text{ und } \sum_j |I_j| \le \varepsilon.$$

Beweis: Offenbar sind alle Untersummen nichtnegativ. Daher gilt $|A| = 0$ genau dann wenn $\inf O_Z(f) = 0$. Das liefert die Behauptung. □

Beispiel: Ein Beispiel für eine Jordan-Nullmenge ist der Rand einer „schönen" Menge.



Für weiterführende Betrachtungen führen wir noch den Begriff der Nullmenge ein.

15.12 Definition (Nullmenge)**:** Eine Teilmenge B des $\mathbb{R}^d$ heißt Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Intervalle $I_1, I_2, I_3, \dots$ existieren mit

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \le \varepsilon.$$

15.13 Proposition (kompakte Nullmengen sind Jordan-Nullmengen)**:** Eine kompakte Menge ist genau dann eine Jordan-Nullmenge, wenn sie eine Nullmenge ist.

Beweis: Jede Jordan-Nullmenge ist auch eine Nullmenge.

Sei nun A eine kompakte Nullmenge und (I_j) eine Überdeckung von A mit $\sum |I_j| \leq \varepsilon$. Dann können wir zu jedem j ein offenes Intervall J_j finden mit $I_j \subset J_j$ und $|J_j| \leq 2|I_j|$. Aufgrund der Kompaktheit überdecken bereits endlich viele J_j die Menge K. Die Behauptung folgt, in dem wir jedes dieser endlich vielen offenen Intervalle abschließen. □

15.14 Satz (Charakterisierung von Jordan-messbaren Mengen)**:** Sei A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A ist eine Jordan-Menge.

(ii) Der Rand von A ist eine Jordan-Nullmenge.

(iii) Der Rand von A ist eine Nullmenge.

Beweis: <u>*(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*</u>: Das folgt aus der vorigen Proposition, da der Rand einer beschränkten Menge kompakt ist.

$$\text{Rand von } A = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \forall\, s > 0 \quad B_s(x) \cap A \neq \emptyset, \quad B_s(x) \cap A^C \neq \emptyset\}$$

Daraus folgt, dass der Rand einer beschränkten Menge beschränkt ist. Außerdem ist der Rand einer beschränkten Menge abgeschlossen.

<u>*(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)*</u>: Dies folgt aus der Betrachtung eines Intervalls $I \subset A$ als Zerlegung in viele Teilintervalle. Dann können diejenigen Teilintervalle, die den Rand enthalten gesondert betrachtet und auf eine Jordan-Nullmenge zurückgeführt werden. □

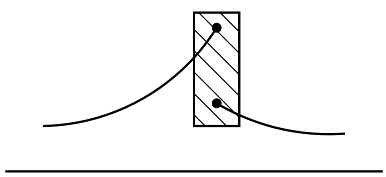
Zum Abschluss des Kapitels wollen wir die bisherigen Betrachtungen nutzen, um ein Kriterium für die Riemann-Integrierbarkeit von Funktionen zu formulieren.

15.15 Theorem (Charakterisierung Riemann-Integrierbarkeit)**:** Eine beschränkte Funktion auf einem Intervall ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie in allen Punkten außerhalb einer Nullmenge stetig ist.

Bemerkung: Ist $\mathbb{1}_A$ die charakteristische Funktion von A, so sind die Unstetigkeitspunkte von $\mathbb{1}_A$ gerade die Punkte des Randes von A.

Beweis: Wir geben hier nur eine Idee der Beweisführung.

Bei Riemann-Integrierbarkeit geht es darum, eine Funktion von oben und von unten „gleichmäßig“ zu approximieren. Probleme bei diesem Prozess entstehen genau in den Unstetigkeitsstellen von f. Handelt es sich bei diesen Unstetigkeitsbereichen um Nullmengen, so kann man durch geschicktes aufteilen der Integrationsintervalle trotzdem über die Funktion integrieren.



Bei manchen Unstetigkeitsmengen handelt es sich allerdings nicht um Nullmengen. In diesem Fall kann man auch kein Riemann-Integral bestimmen. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist

$$f: \mathbb{R} \to \{0,1\},\ f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{Q} \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

16. Determinanten und Volumina

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Determinanten und Volumina.

Erinnerung (Determinante auf $V = \mathbb{R}^n$)*:* Es gibt genau eine multilineare, alternierende, normierte n-Form auf V. Diese ist gegeben durch die Determinante det:

- *Alternierend*: $\det(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\det(\dots, w, \dots, v, \dots)$
- *Normiert*: $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$
- *Multilinear*: $\det(\dots, \lambda u + v, \dots) = \lambda \det(\dots, u, \dots) + \det(\dots, w, \dots)$

Es gilt:

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi (v_1)_{\pi(1)} \dots (v_n)_{\pi(n)}.$$

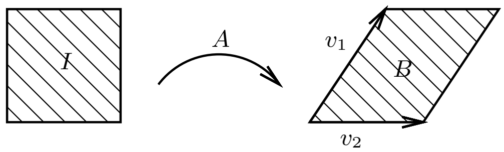
16.1 Theorem (Determinanten messen Volumina)**:** Sei $A = (v_1, \dots v_n)$ eine $n \times n$-Matrix und $I := [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Sei

$$B := B(v_1, \dots, v_n) := \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n : 0 \le t_i \le 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Dann ist

$$B = AI = \{Ax : x \in I\} \text{ und } |B| = |\det A| = (\det A^T A)^{1/2}.$$

Notation: Die Menge B aus dem Satz heißt der von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Spat, Block, oder Parallelepipep. Er ist Jordan-messbar, da sein Rand eine Nullmenge ist.



Bemerkung: Der Satz besagt, dass das Volumen eines Spats durch den Betrag der Determinante gegeben ist. Der Betrag ist nötig, da Volumina positiv sein müssen und invariant unter Vertauschung von Spalten sind, Determinanten jedoch nicht.

Beweis: Wir benutzen die Charakterisierung der Determinante und zeigen, dass die Funktion

$$\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \delta(v_1, \ldots, v_n) := \begin{cases} |B| : \det(v_1, \ldots, v_n) > 0 \\ -|B| : sonst. \end{cases}$$

n-linear, alternierend und normiert ist.

Dazu verwenden wir im Wesentlichen zwei Eigenschaften des Riemann-Volumens:

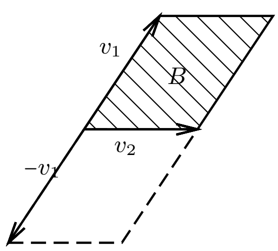
- Translationinvarianz ($|B| = |x + B|$).
- Nullmengeneigenschaft von Hyperebenen. (Jede kompakte Teilmenge eines $n-1$-dimensionalen Teilraumes hat verschwindendes Volumen.)

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

<u>Schritt 0</u> (Alternierend): Es gilt:

$$\delta(-v_1, v_2, \ldots, v_n) = -\delta(v_1, \ldots, v_n)$$
$$\delta(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -\delta(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$$

Beweis: 1. Gleichung: $B(-v_1, v_2, \ldots, v_n) = -v_1 + B(v_1, \ldots, v_n)$
Mit Translationsinvarianz folgt:



$$|B(-v_1, \ldots, v_n)| = |B(v_1, \ldots, v_n)|.$$

Außerdem:

$$\det(-v_1, v_2, \ldots, v_n) = -\det(v_1, \ldots, v_n).$$

Mit diesen beiden Gleichungen folgt die Aussage.

2. Gleichung: Offenbar gilt $B(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = B(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$. Damit folgt

$$|B(\ldots v_i \ldots v_j \ldots)| = |B(\ldots v_j \ldots v_i \ldots)|.$$

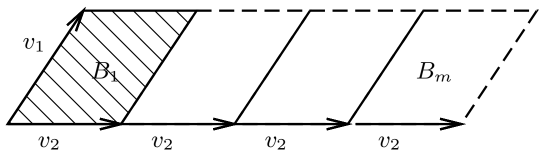
Außerdem:

$$\det(\ldots v_i \ldots v_j \ldots) = -\det(\ldots v_j \ldots v_i \ldots).$$

Mit diesen beiden Gleichungen folgt die zweite Aussage.

<u>Schritt 1</u>: Für $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$\delta(v_1, \ldots, mv_i, \ldots, v_n) = m\delta(v_1, \ldots, v_n).$$



Beweis: Das folgt aus der Translationsinvarianz. Mit

$$B_1 := (v_1, \ldots, v_n)I,\ B_m := (v_1, \ldots, mv_i, \ldots v_n)I.$$

gilt

$$B_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} [B(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)I + kv_i] = \bigcup_{k=0}^{m-1} (kv_i + B_1).$$

Daher gilt $|B_m| = m|B_1|$.

Schritt 2: Für $q \in \mathbb{Q}_+$ gilt:

$$\delta(v_1, \ldots, qv_i, \ldots v_n) = q\delta(v_1, \ldots, v_n).$$

Beweis: Sei $q = \frac{m}{l}$ mit $m, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Schritt 1:

$$l\delta(v_1, \ldots, \frac{1}{l}v_i, \ldots, v_n) = \delta(v_1, \ldots, \frac{l}{l}v_i, \ldots, v_n)$$
$$\delta(v_1, \ldots, \frac{1}{l}v_i, \ldots v_n) = \frac{1}{l}\delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Damit folgt:

$$\delta(v_1, \ldots, \frac{m}{l}v_i, \ldots v_n) \overset{\text{Schritt 1}}{=} m\delta(v_1, \ldots, \frac{1}{l}v_i, \ldots v_n) = \frac{m}{l}\delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

□

Schritt 3 (Erster Teil der Linearität): Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\delta(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots v_n) = \lambda\delta(v_1, \ldots, v_n).$$

Beweis: Ohne Einschränkung $\lambda \geq 0$ (sonst: $\lambda \mapsto -\lambda$ und Schritt 0). Sei $B_s := B(v_1, \ldots, sv_i, \ldots v_n)$. Seien $q, q' \in \mathbb{Q}_+$ gegeben mit $q \leq \lambda \leq q'$. Dann gilt $B_q \subset B_\lambda \subset B_{q'}$ und damit

$$q|B_1| \overset{\text{Schritt 2}}{=} |B_q| \leq |B_\lambda| \leq |B_{q'}| \overset{\text{Schritt 2}}{=} q'|B_1|.$$

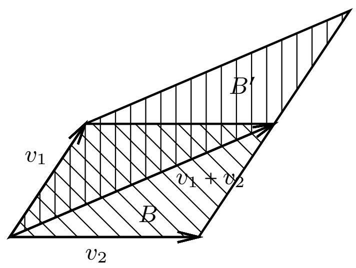
Da q, q' mit $q \leq \lambda \leq q'$ beliebig war folgt

$$|B_\lambda| = \lambda|B_1|.$$

Schritt 4: Falls $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, so gilt $\delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Beweis: Es ist dann B eine kompakte Teilmenge eines $n-1$-dimensionalen Teilraumes.

Schritt 5: Es gilt $\delta(v_1 + v_2, v_2, \ldots, v_n) = \delta(v_1, \ldots, v_n)$.



Beweis: Seien B und B' die beiden Spate. Dann gilt

$$B' \setminus B = B \setminus B' + v_2$$

(bis auf Ränder). Damit folgt die Behauptung aus Translationsinvarianz.

<u>Schritt 6</u> (Zweiter Teil der Linearität):

$$\delta(v + w, v_2, \ldots, v_n) = \delta(v, v_2, \ldots, v_n) + \delta(w, v_2, \ldots, v_n)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$(\star) \qquad \delta(x + cv_i, v_2, \ldots, v_n) = \delta(x, v_2, \ldots, v_n).$$

für $i = 2, 3, \ldots, n$.

<u>$i = 2$</u>: Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(x + cv_2, v_2, \ldots, v_n) &\overset{\text{Schritt 3}}{=} \frac{1}{c}\delta(x + cv_2, cv_2, \ldots, \ldots, v_n) \\ &\overset{\text{Schritt 5}}{=} \frac{1}{c}\delta(x, cv_2, \ldots, v_n) \\ &\overset{\text{Schritt 3}}{=} \delta(x, v_2, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

<u>$i \geq 3$</u>: Nach Schritt 0 gilt

$$\delta(x + cv_i, v_2, \ldots, v_i, \ldots v_n) \overset{\text{Schritt 0}}{=} -\delta(x + cv_i, v_i, \ldots, v_2, \ldots, v_n)$$

Nun kann man weiter wie im Fall von $i = 2$ argumentieren und erhält

$$\delta(x + cv_i, v_2, \ldots, v_n) = -\delta(x, v_i, \ldots, v_2, \ldots, v_n) \overset{\text{Schritt 0}}{=} \delta(x, v_2, \ldots, v_n)$$

Nun nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig, also eine Basis sind. (Wenn weder $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ noch $\{w, v_2, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig sind, ist auch $\{v + w, v_2, \ldots, v_n\}$ linear abhängig und alle Terme sind 0 nach Schritt 4.) Damit gilt dann also

$$w = cv + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j$$

und damit

$$\begin{aligned}
\delta(v+w,v_2,\dots,v_n) &= \delta(v+cv+\sum_{j=2}^{n-1}\lambda_j v_j+\lambda_n v_n,v_2,\dots,v_n)\\
&\overset{\star}{=} \delta((1+c)v+\sum_{j=2}^{n-2}\lambda_j v_j+\lambda_{n-1}v_{n-1},v_2,\dots,v_n)\\
&\overset{\star}{=} \dots \text{ iterativ}\\
&= \delta((1+c)v,v_2,\dots,v_n)\\
&= \delta(v,v_2,\dots,v_n)+c\delta(v,v_2,\dots,v_n)\\
&= \delta(v,v_2,\dots,v_n)+\delta(cv,v_2,\dots,v_n)\\
(\star \text{ im zweiten Term}) \qquad &= \delta(v,v_2,\dots,v_n)+\delta(cv+\lambda_2 v_2,v_2,\dots,v_n)\\
&\overset{\star}{=} \dots \text{ iterativ rückwärts}\\
&= \delta(v,v_2,\dots,v_n)+\delta(cv+\sum_{j=2}^{n-1}\lambda_j v_j+\lambda_n v_n,v_2,\dots,v_n)\\
&= \delta(v,v_2,\dots,v_n)+\delta(w,v_2,\dots,v_n).
\end{aligned}$$

Schritt 7: Es gilt $\delta(e_1,\dots,e_n)=1$.

Beweis: Das ist klar, da A =Identität also $AI = I$.

Damit haben wir gezeigt, dass δ alternierend (Schritt 0), linear (Schritt 3 und Schritt 6, plus alternierend) und normiert (Schritt 7) ist. Als folgt $\delta = \det$ aus der abstrakten Charakterisierung der Determinanten. Damit folgt die Aussage des Theorems. □

Wir können auch Volumina in Unterräumen messen. Dabei können wir obiges Verfahren aber nicht direkt anwenden, da A nicht quadratisch ist. Daher betrachten wir folgende Situation:

Seien $a_1,\dots,a_k$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^d$ (mit $d\ge k$). Sei $b_1,\dots,b_k$ eine Orthonormalbasis von $V := Lin\{a_i : i = 1\dots k\}$. Mittels dieser Orthonormalbasis kann V mit $\mathbb{R}^k$ identifiziert werden durch

$$\Phi\colon \mathbb{R}^k \to V, x \mapsto \sum_{j=1}^{k} x_j b_j.$$

16.2 Theorem (Volumen in Unterräumen)**:** Seien $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{R}^d$ linear unabhängige Vektoren. Sei $A = (a_1,\dots,a_k)$ und $C := (\langle b_l, a_i\rangle)_{l,i=1,\dots,k}$. Sei außerdem $S := \left\{\sum_{i=1}^k t_i a_i :\ 0\le t_i\le 1\right\} \subset V$. Dann gilt

$$A^T A = (\langle a_i, a_j\rangle) = C^T C$$

und

$$|S|^2_{\mathbb{R}^d} = \det A^T A = \det(\langle a_i,a_j\rangle) = \det C^T C = (\det C)^2$$

Insbesondere ist $|S|$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $\{b_1,\dots,b_k\}$.

Beweis: Es ist $A^TA = (\langle a_i, a_j\rangle)$ nach Definition der Matrixmultiplikation. Entwickeln von $a_i = \sum\langle a_i, b_l\rangle b_l$ nach der Orthonormalbasis liefert dann einfach $(\langle a_i, a_j\rangle) = C^tC$.

Nun zur Berechnung von $|S|$: Es gilt

$$\sum t_i a_i = \sum_{i=1}^{k} t_i \sum_{l=1}^{k}\langle a_i, b_l\rangle b_l = \sum_{l=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\langle a_i, b_l\rangle t_i\right) b_l = \sum_{l=1}^{k} C(t_1,\dots,t_k)^T(l) b_l.$$

Damit wird also S in den neuen Koordinaten gerade durch CI beschrieben mit $I = [0,1]^k$ und die Aussage über S folgt aus dem Satz über Volumina.

Es ist $|S| = \det A^TA$ unabhängig von B, da A unabhängig von B ist. $\square$

16.3 Folgerung (Verzerrung von Volumina unter linearen Abbildungen)**:** Sei J ein Translat eines Spates. Dann gilt $|AJ| = |\det A||J|$. Insbesondere gilt diese Formel, falls Q ein Intervall (d.h. achsenparalleler Spat) ist.

Beweis: Es gilt $J = x + BI$ mit geeigneter linearer Abbildung B und Vektor x. Damit folgt $AJ = A(x + BI) = Ax + ABI$ also

$$|AJ| = |Ax + ABI| = |ABI| = |\det(AB)| = |\det A||\det B| = |\det A||BI| = |\det A||x + BI| = |\det A||J|$$

$\square$

17. Die Transformationsformel

Die Transformationsformel ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel. Als solche ist sie besonders nützlich bei der Berechnung von Integralen mittels problemangepasster Koordinatensysteme.

Erinnerung: $U, V \in \mathbb{R}^d$ offen, $f : U \to V$ heißt differenzierbar in U, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ eine lineare Abbildung $L = L(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$$

mit $\frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} \to 0$, $x \to x_0$. Das heißt f ist um x_0 herum sehr gut durch die lineare Abbildung L approximierbar.

17.1 Definition (Jacobi-Matrix)**:** Im üblichen Koordinatensystem auf $\mathbb{R}^d$ wird L dargestellt durch die *Jacobi-Matrix* der partiellen Ableitungen:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\ldots,k\\ j=1,\ldots,k}} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1} & \frac{\partial f_d}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \cdots \\ \nabla f_d \end{pmatrix}$$

Sind die $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig, so heißt f stetig differenzierbar.

Die Determinante der Jacobi-Matrix heißt *Funktionaldeterminante.*

17.2 Satz (Transformationsformel)**:** Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\Phi : U \to V$ bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarem Inversen. Sei $f : V \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist auch $f \circ \Phi |\det D\Phi(x)|$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_V f(x)dx = \int_U f \circ \Phi(y) |\det D\Phi(y)| dy$$

wobei $D\Phi$ die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen von Φ ist.

Bemerkung (Vergleich mit $d = 1$)*:* Ist $\varphi : [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\varphi' \geq 0$ (orientierungserhaltend), so gilt

$$\int_I f = \int_a^b f \circ \varphi \varphi' dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_{\varphi(I)} f(x)dx.$$

Ist $\varphi : [a,b] \to [\varphi(b), \varphi(a)]$ bijektiv, stetig differenzierbar mit $\varphi' \le 0$ (orientierungsumkehrend), so gilt

$$\int_I f = \int_a^b f \circ \varphi\varphi' dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx = -\int_{\varphi(I)} f(x)dx.$$

Insgesamt gilt also

$$\int_I f \circ \varphi|\varphi'|dt = \int_{\varphi(I)} f(x)dx.$$

Beweis: (Nur Skizze) Da f Riemann-integrierbar ist, kann es beliebig gut zwischen Treppenfunktionen eingeschachtelt werden. Es reicht also die Behauptung für Treppenfunktionen zu zeigen.
Da das Integral linear ist, reicht es also $f = \mathbb{1}_I$ mit Intervall I zu betrachten. Indem wir das Intervall in *sehr* kleine Intervalle zerlegen, können wir annehmen, dass Φ auf I linear ist, da Φ gut durch seine Ableitung approximiert wird. (Dieser Schritt bedarf eigentlich größerer Aufmerksamkeit.) Es reicht also zu zeigen, dass

$$\int \mathbb{1}_I \circ A|\det A|dy = \int \mathbb{1}_I dx$$

für jedes Intervall I und jede lineare invertierbare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt. Offenbar gilt:

$$\mathbb{1}_I \circ A = \mathbb{1}_{A^{-1}I}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_A \circ A|\det A|dy &= |\det A| \int \mathbb{1}_{A^{-1}I} dy \\ &= |\det A||A^{-1}I| \\ (s.o.) &= |\det A||\det A^{-1}||I| \\ &= |I| \\ &= \int \mathbb{1}_I dx \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Anwendung (Homogenität des Integrals)*:* Sei $s > 0$ und $\Phi_s : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $x \mapsto sx$. Dann gilt $D\Phi_s = sI$, also $\det D\Phi_s = s^d$. Damit folgt

$$\int f(sx)dx = \int f \circ \Phi_s(x)dx = s^{-d} \int f(\Phi_s(x))|\det D\Phi_s(x)|dx = s^{-d} \int f(x)dx.$$

Beachte: Integration ist stabil bei Änderung auf Jordan-Nullmengen. Daher reicht es, wenn die Voraussetzungen der Transformationsformel bis auf eine Jordan-Nullmenge erfüllt sind. Das werden wir im folgenden oft (stillschweigend) verwenden.

Die vielleicht wichtigste Anwendung der Transformationsformel liegt in der Benutzung von neuen (dem Problem besser angepassten) Koordinatensystemen. Wir studieren nun noch einige gängige Koordinatensysteme.

Polarkoordinaten in der Ebene

Sei $\Phi : [0,\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$

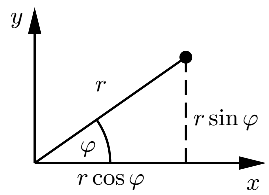


Abbildung 17.1.: Polarkoordinaten in der Ebene

Dann ist
$$\Phi: (0,\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\ x\geq 0\}$$
bijektiv und stetig differenzierbar mit
$$D\Phi(x,y)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}$$

Nun zu Flächenveränderungen:

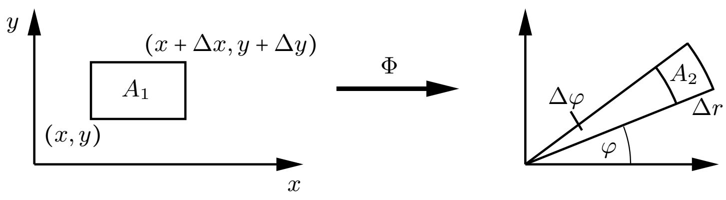


Abbildung 17.2.: Flächenelement A in kartesischen (a) und Polarkoordinaten (b)

Die Fläche A_1 ist gegeben durch $\Delta x\Delta y$.
Die Fläche A_2 ist im Wesentlichen gegeben durch $\Delta r(r\Delta\varphi)$.

Tatsächlich liefert die Funktionaldeterminante
$$\det D\Phi(x,y)=\cos\varphi r\cos\varphi+r\sin\varphi\sin\varphi=r$$
und damit gilt für ein kleines Flächenstück $\det D\Phi(x,y)drd\varphi=rdrd\varphi$

Polar-/Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

Sei $\Phi: [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \Phi(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ r\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}$

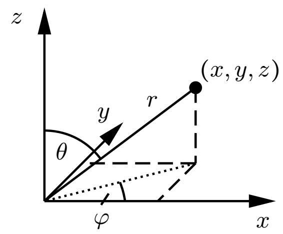


Abbildung 17.3.: Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

Dann ist

$$\Phi: \ (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(o,\pi)\to\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z):\ z\in\mathbb{R},\ x\geq 0\}$$

bijektiv und stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$D\Phi(r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix}$$

und der Funktionaldeterminante

$$\det D\Phi(r,\varphi,\theta)=-r^2\sin\theta$$

Deutung der Funktionaldeterminante:
Sei $P=\Phi(r,\varphi,\theta)$. Dann führt $r\rightsquigarrow r+\Delta r$ zu:

$$\begin{aligned}\Phi(r+\Delta r,\varphi,\theta)&=P+\frac{\Phi(r+\Delta r,\varphi,\theta)-\Phi(r,\varphi,\theta)}{\Delta r}\Delta r\\&\approx P+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Delta r\\&=P+\tilde{e}_r\Delta r\end{aligned}$$

$\varphi\rightsquigarrow\varphi+\Delta\varphi$ liefert:

$$\Phi(r,\varphi+\Delta\varphi,\theta)\approx P+\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Delta\varphi=P+r\sin\theta\Delta\varphi\tilde{e}_\varphi$$

und analog gilt für $\theta\rightsquigarrow\theta+\Delta\theta$:

$$\Phi(r,\varphi,\theta+\Delta\theta)\approx P+\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Delta\theta=P+r\Delta\theta\tilde{e}_\theta$$

Der Spat S mit den Seiten $\Delta r e_r$, $\Delta\varphi e_\varphi$, $\Delta\theta e_\theta$ im (r,φ,θ)-Raum wird durch Φ also (im Wesentlichen) abgebildet auf den Spat S' mit den Seiten $\Delta r\tilde{e}_r$, $\Delta\varphi r\sin\theta\tilde{e}_\varphi$, $\Delta\theta r\tilde{e}_\theta$.

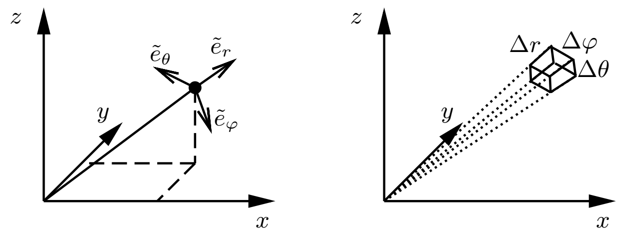


Abbildung 17.4.: (a) Lage der Einheitsvektoren $\tilde{e}_i$, (b) Spat S

Dann sind $\tilde{e}_r$, $\tilde{e}_\varphi$, $\tilde{e}_\theta$ orthogonal und es folgt:

$$\begin{aligned}
|\tilde{S}| &= \left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Delta r, \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\Delta\varphi, \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Delta\theta\right)\right| \\
&= \Delta r\Delta\varphi\Delta\theta\left|\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right| \\
&= \Delta r\Delta\varphi\Delta\theta\left|\det\left(\tilde{e}_r, r\sin\theta\tilde{e}_\varphi, r\tilde{e}_\theta\right)\right| \\
&= r^2\sin\theta\Delta r\Delta\varphi\Delta\theta\left|\det\left(\tilde{e}_r, \tilde{e}_\varphi, \tilde{e}_\theta\right)\right| \\
&= r^2\sin\theta\Delta r\Delta\varphi\Delta\theta
\end{aligned}$$

Polar-/Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^n$

Um nun Kugelkoordinaten für $\mathbb{R}^n$ aufzustellen, erweitern wir die Kugelkoordinaten des $\mathbb{R}^3$ um weitere Koordinaten $\theta_2, \dots, \theta_{n-2}$. Dazu gehen wir induktiv vor. Sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$. Sei für $n-1$ schon

$$\Phi_{n-1}: [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) \times \ldots \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^{n-1}$$

definiert mit $\Phi_{n-1}(r,\ldots) = r\Phi_{n-1}(1,\ldots)$. Dann betrachtet man die bijektive Abbildung

$$A: (0,\infty) \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ (r,\xi) \mapsto r\xi$$

Weiterhin sei die Abbildung B gegeben mit

$$B: S^{n-2} \times [0,\pi] \to S^{n-1},\ (\xi,\theta) \mapsto (\sin\theta\xi, \cos\theta)$$

Dann ist B surjektiv und bildet $S^{n-2}\times[0,\pi]$ auf $(0,\pm 1)$ ab und außerhalb von $S^{n-2}\times[0,\pi]$ injektiv. Verknüpfen bildet dann die Abbildung

$$\Phi_n: [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \times \ldots \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\Phi_n(r,\varphi,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-2}) &= A(r,\underbrace{B(\underbrace{\Phi_{n-1}(1,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3})}_{\in S^{n-2}},\vartheta_{n-2})}_{\in S^{n-1}})\\
&= A(r,(\sin\vartheta_{n-2}\Phi_{n-1}(1,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3}),\cos\vartheta_{n-2}))\\
&= (r\sin\vartheta_{n-2}\Phi_{n-1}(1,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3}),r\cos\vartheta_{n-2}))\\
&= (\sin\vartheta_{n-2}\Phi_{n-1}(r,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{n-3}),r\cos\vartheta_{n-2}))
\end{aligned}$$

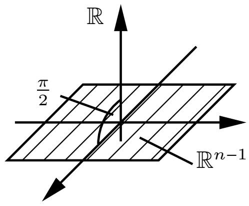


Abbildung 17.5.: Die Hyperebene $\mathbb{R}^{n-1}$ wird durch die Abbildung B um $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}^n$ erweitert. Dazu wird die neue Koordinate $\theta_{n-2}\in[0,\pi]$ eingeführt.

Die Jacobimatrix von Φ_n hat also die Form:

$$D\Phi_n = \left(\begin{array}{cc|c}
\sin\vartheta_{n-2} & D\Phi_{n-2} & \cos\vartheta_{n-2}\Phi_{n-1}\\
\hline
\cos\vartheta_{n-2} & 0\cdots0 & -r\sin\vartheta_{n-2}
\end{array}\right)$$

Entwickeln nach der letzten Zeile liefert:

$$\begin{aligned}
\det D\Phi_n &= (-1)^{n+1}\cos\vartheta_{n-2}\det(\sin\vartheta_{n-2}\overset{\overset{1}{\vee}}{D}\Phi_{n-1},\cos\vartheta_{n-2}\Phi_{n-1})\\
&\quad+(-1)^{n+n}(-r)\sin\vartheta_{n-2}\det(\sin\vartheta_{n-2}D\Phi_{n-1})\\
&= (-1)^{n+1}\cos\vartheta_{n-2}\det(\sin\vartheta_{n-2}\overset{\overset{1}{\vee}}{D}\Phi_{n-1},\cos r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_{n-1})\\
&\quad- r\sin\vartheta_{n-2}\det(\sin\vartheta_{n-2}D\Phi_{n-1})\\
&= (-1)^{n+1}(\cos\vartheta_{n-2})^2(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}\det(\overset{\overset{1}{\vee}}{D}\Phi_{n-1},r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_{n-1})\\
&\quad- r(\sin\vartheta_{n-2})^n\det(D\Phi_{n-1})\\
&= (-1)(\cos\vartheta_{n-2})^2(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}r\det D\Phi_{n-1}-r(\sin\vartheta_{n-2})^n\det D\Phi_{n-1}\\
&= -(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}\left[\cos\vartheta_{n-2})^2+\sin\vartheta_{n-2})^2\right]\det D\Phi_{n-1}\\
&= -(\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}\det D\Phi_{n-1}
\end{aligned}$$

Wendet man diese Formel induktiv an, so erhält man:

$$\det D\Phi_n = (-1)^n r^{n-1} \sin\vartheta_1 (\sin\vartheta_2)^2 \dots (\sin\vartheta_{n-2})^{n-2}$$

Zylinderkoordinaten in $\mathbb{R}^3$

$$\Phi : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi,z) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det D\Phi = r$$

17.3 Definition (Riemann-Integral unbeschränkter Funktionen)**:** Sei $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben, sodass A unbeschränkt ist, oder f auf A unbeschränkt ist. Gibt es eine Folge (A_n) Jordan-messbarer Mengen mit

- $\mathbb{1}_{A_n} f$ Riemann-integrierbar
- $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup A_n = A$ (bis auf Nullmenge)
- $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f dx$ existiert

so heißt f über A entlang (A_n) uneigentlich Riemann-integrierbar und wir setzen

$$\int_A f dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f dx$$

Beachte: Hat f ein festes Vorzeichen, so hängt diese Definition nicht von der Wahl von (A_n) ab.

Beispiel: Berechnen von $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt$$

Sei $J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx$. Dann gilt mit $Q_R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_i| \le R, \ i = 1, 2\}$

$$
\begin{aligned}
J &= \lim_{R\to\infty} \int_{Q_R} e^{-|x|^2} dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{R\to\infty} \underbrace{\left(\int_{-R}^{R} e^{-x_1^2} dx_1 \right)}_{\to I} \underbrace{\left(\int_{-R}^{R} e^{-x_2^2} dx_2 \right)}_{\to I} \\
&= I^2
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt mit Transformation in Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
J &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} dx_1 dx_2 \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \int_{0}^{\pi} e^{r^2} r d\varphi dr \\
&= \lim_{R\to\infty} 2\pi \int_{0}^{R} r e^{r^2} dr \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-e^{-R^2}}{2} 2\pi + \pi \right) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \ I = \sqrt{J} = \sqrt{\pi}$

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty)$, $f(x) = h(|x|)$ mit $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$. Dann gilt nach der Substitution Φ auf Kugelkoordinaten mit $g = \frac{1}{r^{d-1}} |\det D\Phi|$

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx &= \lim_{R\to\infty} \int \mathbb{1}_{B_R} f(x) dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R r^{d-1} h(r) \left(\int |g(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_d)| d(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{n-2}) \right) dr \\
&= C_D \lim_{R\to\infty} \int_0^R r^{d-1} h(r) dr \\
&= C_D \int_0^\infty r^{d-1} f(r) dr
\end{aligned}
$$

mit $C_D > 0$. Tatsächlich ist C_D die Oberfläche von S^{d-1}. Da $\int_1^\infty \frac{1}{r^\alpha} dr < \infty$ gilt, genau dann wenn $\alpha > 1$ (vgl. Analysis 1) folgt insbesondere

$$
\int \frac{1}{1 + |x|^\beta} dx < \infty
$$

genau dann wenn $\beta > d$.

18. Metrische Räume und topologische Grundbegriffe

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konzepte und Ideen, die wir schon kennen gelernt haben, zusammen.

Idee: Eine Metrik misst die Abstände zwischen Punkten.

18.1 Definition (Metrik)**:** Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt Metrik, wenn gilt

- $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$. (nicht ausgeartet)
- $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$. (Symmetrie)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$. (Dreiecksungleichung)

18.2 Folgerung (Umgekehrte Dreieckungleichung)**:** Es gilt

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z).$$

Beweis: Aus $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ und $d(z, y) \leq d(y, x) + d(x, z)$ folgen $d(x, y) - d(z, y) \leq d(x, z)$ und $d(z, y) - d(x, y) \leq d(x, z)$. Damit folgt die Behauptung. □

Beispiele:

- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{R}^d$, $d(x, y) = |x - y|$
- $X = \mathbb{C}^d$, $d(x, y) = |x - y|$
- Ist (X, d) ein metrischer Raum und S eine Teilmenge von X, so ist auch (S, d) ein metrischer Raum.
- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die abgeschlossene Kugel um X mit Radius R ist definiert durch
  $$B_R(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq R\}.$$
  Die offene Kugel um x mit Radius R ist definiert durch
  $$U_R(x) := \{y \in X : d(x, y) < R\}.$$

Offenbar gilt

$$y \in U_R(x) \Leftrightarrow d(x,y) < R.$$

18.3 Definition (Offenheit und Abgeschlossenheit, Umgebung)**:** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Menge $U \subset X$ heißt *offen*, wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(x) \subset U$. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus A$ offen ist. Eine offenen Menge in X, die den Punkt x enthält heißt *Umgebung* von x.

Beispiel: Die offene Kugel $U_R(x)$ ist offen und die abgeschlossene Kugel $B_R(x)$ ist abgeschlossen.

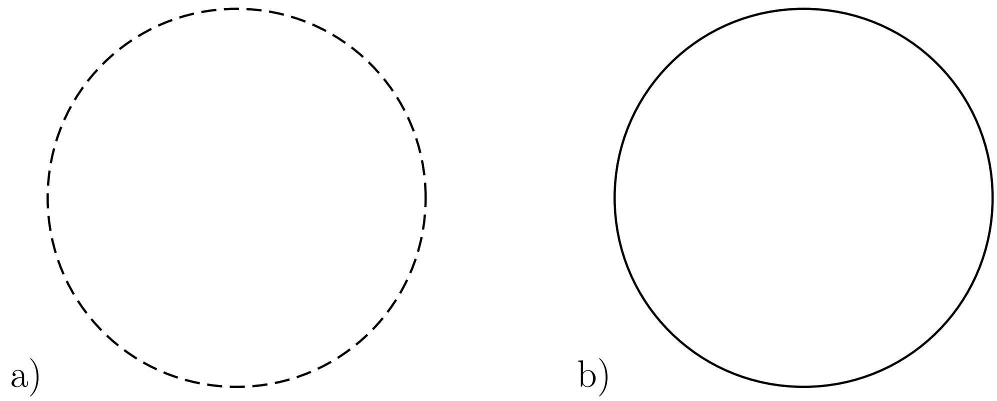


Abbildung 18.1.: Bei der offenen Kugel (a) gehört der Rand nicht zur Menge, bei der abgeschlossenen Kugel (b) gehört er dazu.

18.4 Lemma (Charakterisierung Konvergenz)**:** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei (x_n) eine Folge in X und (x_n) Folge in X und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n,x) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ (d.h. $d(x_n,x) \to 0$, $n \to \infty$).

(ii) Zu jeder offenen Umgebung U von x existiert ein $N_U \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq N_U$.

Beweis: Es gilt $d(x_n,x) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in U_\varepsilon(x)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei U offene Umgebung von x. Dann existiert also ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$. Für $n \geq N_\varepsilon$ gilt dann $d(x_n,x) < \varepsilon$ und damit $x_n \in U_\varepsilon(x) \subset U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es ist U_ε eine offene Umgebung von x. □

18.5 Definition (Konvergenz im metrischen Raum)**:** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei (x_n) eine Folge in X. Dann heißt (x_n) *konvergent* gegen $x \in X$, wenn sie eine der Bedingungen des vorigen Lemma erfüllt. Dann schreibt man $x_n \to x$.

18.6 Lemma (Charakterisierung Stetigkeit)**:** Seien (X,d) und (Y,e) metrische Raume und $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann sind äquivalent:

(i) Aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$.

(ii) Ist V offen in Y, so ist $f^{-1}(V)$ offen in X.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x \in f^{-1}(V)$ beliebig.
Zu zeigen: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$.
Angenommen nein! Dann gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_{1/n}(x)$ mit $x_n \notin f^{-1}(V)$ d.h. mit $f(x_n) \notin V$.
Damit gilt also

- $x_n \to x$, da $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$
- $f(x_n) \notin V$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. es konvergiert $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$.

Das steht im Widerspruch zu (i).

(ii) $\Rightarrow$(i): Sei $x_n \to x$. Sei V eine beliebige Umgebung von $f(x)$.
Zu zeigen: Für genügend große n gilt $f(x_n) \in V$.
Nach (i) ist $f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x. Damit gibt es also (wegen $x_n \to x$) ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in f^{-1}(V)$ für $n \geq N$. Dann gilt also $f(x_n) \in V$ für alle $n \geq N$. □

18.7 Definition (Stetigkeit im metrischen Raum)**:** Seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann heißt f *stetig*, wenn es eine der Bedingungen des vorigen Lemma erfüllt.

18.8 Proposition (Kartesisches Produkt metrischer Räume)**:** Sind (X,d), (Y,e) metrische Räume. Dann ist auch $X \times Y$ mit

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := d(x_1,x_2) + e(y_1,y_2)$$

ein metrischer Raum. Es gilt $(x_n, y_n) \to (x,y)$ genau dann, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$.

Beweis: Der Beweis ist einfach. □

Bemerkung: Man könnte auch definieren:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \left(d(x_1,x_2)^2 + e(y_1,y_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dann gilt wieder die gleiche Charakterisierung von Konvergenz. Auf diese Art haben wir $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mithilfe der Metrik von $\mathbb{R}$ metrisiert.

18.9 Folgerung (Stetigkeit der Metrik d)**:** Sei (X,d) ein metrischer Raum, dann ist $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ stetig.

18.10 Definition (Inneres, Abschluss und Rand einer Menge)**:** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $S \subset X$ beliebig. Dann definiert man das *Innere* S° von S durch

$$S^\circ := \{x \in S : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset S\}$$

den *Abschluss* $\overline{S}$ von S durch

$$\overline{S} := \{x \in X : \exists (x_n) \in S \text{ mit } x_n \to x\}$$

und den *Rand* ∂S von S durch

$$\partial S := \{x \in X : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset,\ U_\varepsilon(x) \cap X \setminus S \neq \emptyset\}.$$

18.11 Theorem (Vereinigung von Rand und Innerem)**:** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $S \subset X$ beliebig. Dann ist S° offen und $\overline{S}$ ist abgeschlossen. Weiterhin gilt $\overline{S} = \partial S \cup S^\circ$.

Beweis: Übung.

18.12 Theorem (Charakterisierung Kompaktheit)**:** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

(i) Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge.

(ii) X ist vollständig und zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$ mit $X = \cup U_\varepsilon(x_j)$.

(iii) Ist U_α, $\alpha \in I$, eine Familie von offenen Mengen mit $X = \cup U_\alpha$, so existiert eine endliche Teilmenge $A \subset I$ mit $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Beweis: Nicht hier und jetzt. Beweis von $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ist sinngemäß enthalten in Beweisen im ersten Semester zur Charakterisierung von Kompaktheit in $\mathbb{R}^d$. □

18.13 Definition (Kompaktheit metrischer Räume)**:** Ein metrischer Raum heißt *kompakt*, wenn er eine der Bedingungen des vorigen Theorem erfüllt.

18.14 Theorem (Bilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt)**:** Seien (X, d), (Y, e) metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis: Variante 1: über Folgen (vgl. Analysis I).

Variante 2: Sei U_α, $\alpha \in I$, eine Familie von offenen Mengen mit $f(X) = \cup U_\alpha$. Dann ist gilt für $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, dass $X = \cup V_\alpha$. Aufgrund der Kompaktheit von X existiert also ein endliches $A \in I$ mit $X = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Damit folgt dann aber

$$\cup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset \cup_{\alpha \in A} f(V_\alpha) \supset f(X).$$

Das beendet den Beweis. □

18.15 Definition (Cauchy-Folge)**:** Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq N_\varepsilon$.

18.16 Definition (Vollständigkeit)**:** Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bemerkung: Jede konvergente Folge ist auch ein Cauchy-Folge.

Beweis: Wir können die Bedingung für Cauchy-Folgen in die Bedingung für konvergente Folgen umschreiben:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq 2\varepsilon$$

für $n, m \geq N_\varepsilon$. □

19. Ableitungen in höheren Dimensionen

Wir haben die Ableitung in höheren Dimensionen schon kennengelernt. In diesem Abschnitt beginnen wir eine systematische Untersuchung.

Erinnerung: Seien $U \subset \mathbb{R}^d$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to V$ heißt differenzierbar in U wenn es zu jedem $x_0 \in U$ eine $m \times d$-Matrix L gibt mit $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$ mit $\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \to 0$ für $x \to x_0$. Bezüglich der Standard-Basis in $\mathbb{R}^d$ wird L durch die Jacobi-Matrix von f gegeben.

$$(\partial_j f_i)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,d}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d} & \end{pmatrix} = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots, \nabla f_m)^\top$$

Sind die $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig, so heißt f stetig differenzierbar ($f \in C^1(U)$). Anschaulich bedeutet die Differenzierbarkeit von f, dass sich f gut durch seine Ableitung approximieren lässt.

Beispiel: Sei $f : U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann ist

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \varphi(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \varphi(x).$$

Beispiel: Sei $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar in t_0. Dann ist

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma(t)(t - t_0) + \varphi(t).$$

Insbesondere haben wir für $\gamma(t) = t_0 + vt$, $\gamma'(t) = v$.

Beispiel: Ist $f : \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, so gilt

$$\partial_j f(x) = \tfrac{x_j}{|x|}, \text{ also } \nabla f(x) = \tfrac{x}{|x|}.$$

Wir lernen als nächstes einige Rechenregeln für die Ableitung kennen.

19.1 Satz (Kettenregel)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ gegeben. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = D_g(f(x_0) \cdot D_f(x_0)).$$

Insbesondere gilt

$$D(g \circ f)_{ij}(x_0) = \partial_j (g \circ f)_i = \sum_{k=1}^{m} \partial_k g_i(f(x_0) \cdot \partial_j f_k(x_0).$$

Achtung: Reihenfolge der Matrizen ist <u>wichtig</u>.

Beweis: Es reicht die erste Aussage zu zeigen. Die Insbesondere Aussage folgt dann durch einsetzen. Mit $y_0 = f(x_0)$ gilt nach Voraussetzung:

$$f(x) = f(x_0) + D_f(x_0) \cdot (x - x_0) + \varphi_f(x)$$

mit $\frac{\phi_f(x)}{|x-x_0|} \to 0$, $x \to x_0$ und

$$g(y) = g(y_0) + D_g(y_0) \cdot (y - y_0) + \varphi_g(x)$$

mit $\frac{\phi_g(y)}{|y-y_0|} \to 0$, $y \to y_0$

also gilt für $h(x) = g(f(x))$ mit $f(x) = y$ (und weiterhin $f(x_0) = y_0$)

$$\begin{aligned} h(x) = \underbrace{g(f(x_0))} &+ Dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \varphi_g(f(x)) \\ &= h(x_0) + Dg(f(x_0))(Df(x_0) * (x - x_0) + \varphi_f(x)) + \varphi_g(f(x)) \\ &= h(x_0) + Dg(f(x_0))Df(x_0)(x - x_0) + Dg(f(x_0))\varphi_f(x) + \varphi_g(f(x)) \\ &= h(x_0) + Dg(f(x_0))Df(x_0)(x - x_0) + \phi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\phi(x) = Dg(f(x_0))\varphi_f(x) + \varphi_g(f(x)) =: T(x) + S(x).$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\frac{\phi(x)}{|x - x_0|} \to 0, x \to x_0.$$

Es gilt

$$\frac{T(x)}{|x - x_0|} = \frac{1}{|x - x_0|} Dg(f(x_0))\varphi_f(x) = \underbrace{Dg(f(x_0))}_{beschränkt} \underbrace{\frac{\varphi_f(x)}{|x - x_0|}}_{\to 0} \to 0.$$

Fuer den zweiten Term gilt

$$\frac{1}{|x - x_0|}\varphi_g(f(x)) = \frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

falls $f(x) \neq f(x_0)$. (Falls $f(x) = f(x_0)$ gilt $\varphi_g(f(x)) = \varphi_g(f(x_0)) = 0$ und es ist nichts zu zeigen.) Nun gilt aber

$$\frac{\varphi_g(f(x))}{|f(x) - f(x_0)|} \to 0, x \to x_0 \text{ (da } f(x) \to f(x_0) \text{ für } x \to x_0)$$

und

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \le \frac{|Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)|}{|x - x_0|} \le \frac{|Df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} + \frac{|\varphi_f(x)|}{|x - x_0|}$$

beschränkt für $x \to x_0$. Damit folgt

$$\frac{|T(x) + S(x)|}{|x - x_0|} \to 0, x \to x_0$$

und der Beweis ist beendet. □

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\gamma : (a,b) \longrightarrow U$ differenzierbar in t_0 und $f : U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\gamma(t_0)$. Dann ist $f \circ \gamma$ differenzierbar und es gilt

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{d} \partial_k f(\gamma(t_0))\gamma_k'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0), \gamma'(t_0)\rangle.$$

Sonderfall: $\gamma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_d(t), t)$.
$F : \mathbb{R}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto F(x,t)$, differenzierbar. Dann gilt

$$(F \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^{d} \partial_k F(\gamma(t_0))\gamma_k'(t_0) + \partial_{d+1} F(\gamma(t_0)).$$

(Das wird manchmal unter dem Begriff der totalen Ableitung von F gefasst.)

Beispiel: Energie: $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = g(|x|)$. Dann ist f in $x \neq 0$ differenzierbar und es gilt $Df(x_0) = g'(|x|)\frac{1}{|x|}x$.

19.2 Satz (Produktregel)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in U$. Dann ist auch $fg : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$D(fg)(x_0) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto g(x_0)\langle \nabla f(x_0), y\rangle + f(x_0)\langle \nabla g(x_0), y\rangle.$$

Insbesondere ist also

$$\partial_j(gf)(x_0) = f(x_0)(\partial_j g)(x_0) + g(x_0)\partial_j f(x_0)$$

fuer alle $j = 1, \ldots, d$.

Beweis: Es reicht die erste Aussage zu beweisen. Die 'Insbesondere'-Aussage folgt dann durch Einsetzen von e_j.

Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \varphi_f(x)$$

mit $\varphi_f(x)/|x - x_0| \to 0$, $x \to x_0$, und

$$g(x) = g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + \varphi_g(x)$$

mit $\varphi_g(x)/|x - x_0| \to 0$, $x \to x_0$. Damit folgt

$$g(x)f(x) = g(x_0)f(x_0) + (Dg(x_0)(x - x_0))f(x_0) + g(x_0)Df(x_0)(x - x_0) + \varphi,$$

wobei φ aus Termen besteht, die mindestens den Faktor $\varphi_f(x)$ bzw. $\varphi_g(x)$ oder zweimal den Faktor $(x - x_0)$ enthalten. Also gilt

$$\frac{\varphi(x)}{|x - x_0|} \to 0, x \to x_0$$

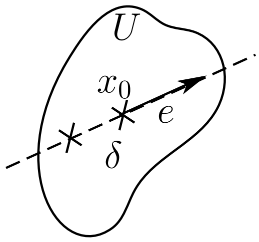
und die Aussage folgt. □

Wir gehen nun noch auf eine geometrische Deutung des Gradienten ein. Dazu benoetigen wir noch einen Begriff.

19.3 Definition (Richtungsableitung)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $x_0 \in U$ und e ein beliebiger Einheitsvektor in $\mathbb{R}^d$. Sei $\delta > 0$ mit $x_0 + te \in U$ fuer $t \in (-\delta, \delta)$. Sei $g : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(x_0 + te)$. Ist g differenzierbar in 0, so heisst der

$$\partial_e f(x_0) := g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + te) - f(x_0))$$

die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung e.
Zeichnung.



19.4 Satz (Geometrische Deutung Gradient)**:** Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann gilt:

- Es ist $\nabla f(x_0)$ senkrecht auf der Konstantflaeche $M := \{y : f(y) = f(x_0)\}$ d.h. ist $\gamma : I \longrightarrow M$ stetig differenzierbar, mit $\gamma(0) = x_0$, so gilt $\langle \gamma'(0), \nabla f(x_0) \rangle = 0$.
  Zeichnung. (siehe unten)
- Es gilt $\partial_e f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle$ für alle $e \in \mathbb{R}^d$.
- Ist $\nabla f(x_0) \neq 0$, so zeigt $\nabla f(x_0)$ in die Richtung in der f am staerksten waechst (d.h. die Richtungsableitung von f der Richtung von $\nabla f(x_0)$ ist maximal unter den Richtungsableitungen).

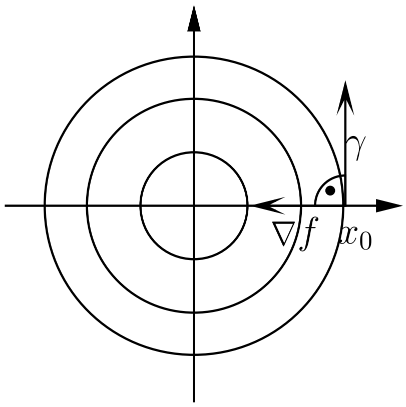


Abbildung 19.1.: Gradient steht senkreckt auf den Konstantzflächen.

Beweis: Nach der Kettenregel gilt für jedes differenzierbare $\gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow U$ mit $\gamma(0) = x_0$

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle.$$

Mit $\gamma(t) = x_0 + te$ folgt also

$$\partial_e f(x_0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t_0) = \langle \nabla f(x_0), e \rangle.$$

Ist andererseits γ eine Kurve mit Werten in M so gilt also $f \circ \gamma = constant$ und es folgt

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(x_0), \gamma'(0) \rangle.$$

Für jeden Richtungsvektor e gilt

$$|\partial_e f(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), e \rangle| \leq |\nabla f(x_0)|$$

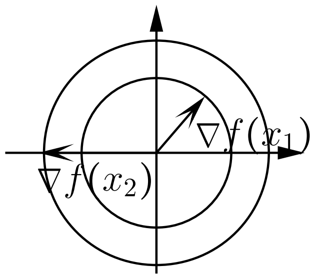
und für $e = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \nabla f(x_0)$ gilt dann

$$|\partial_e f(x_0)| = |\langle \nabla f(x_0), \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} \nabla f(x_0) \rangle| = \frac{1}{|\nabla f(x_0)|} |\nabla f(x_0)|^2 = |\nabla f(x_0)|.$$

Damit folgt die letzte Aussage. □

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $f(x) = |x|$. Dann gilt $Df(x) = \nabla f(x) = \frac{1}{|x|} x$. Das ist in der Tat der Einheitsvektor in Richtung des staerksten Anstieges von f.

Zeichnung.



Bisher haben wir unter der Annahme der Differenzierbarkeit von f gearbeitet. Hier lernen wir nun ein Kriterium kennen, dass die Differenzierbarkeit von f liefert.

19.5 Satz (Stetige partielle Ableitung impliziert Differenzierbarkeit)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial_j f_i(x_0) := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) := \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{1}{h}(f_i(x_0 + he_j) - f_i(x_0))$$

fuer $i = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$ und sind stetig, so ist f differenzierbar auf U (und die Ableitung L wird durch die Jacobimatrix / Differentialmatrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j}$ gegeben.

Beweis: Sei $x_0 \in U$ und $L := Df(x_0)$. Zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{1}{|x - x_0|}|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| \leq \varepsilon$$

für alle $|x - x_0| \leq \delta$. Sei also $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit der $\partial_j f_i$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\partial_j f_i(x) - \partial_j f_i(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{d} \cdot m} \quad (*)$$

für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \delta$. Sei nun $x \in U_\delta(x_0)$ und

$$t = (\tau_1, \dots, \tau_m) := x - x_0,\ t_j := (\tau_1, \dots, \tau_j, 0, \dots, 0) = \sum_{l=1}^{j} \tau_l e_l,\ t_0 = 0$$

für $j = 0, \dots, m$. Dann gilt (Teleskopsumme)

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{m} (f_i(x_0 + t_j) - f_i(x_0 + t_{j-1}))\,.\ (T)$$

Nach dem 1-dimensionalen Mittelwertsatz der Differentialrechnung exisistieren $\sigma_{j,i}$ zwischen 0 und τ_j mit

$$f_i(x_0 + t_j) - f_i(x_0 + t_{j-1}) = f_i(x_0 + t_{j-1} + \tau_j e_j) - f_i(x_0 + t_{j-1}) = \tau_j \partial_j f_i(x_0 + t_{j-1} + \sigma_{j,i} e_j)$$

für $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$. Mit $(*)$ folgt dann

$$|f_i(x_0 + t_j) - f_i(x_0 + t_{j-1}) - \tau_j \partial_j f_i(x_0)| \leq |tau_j| \| \partial_j f_i(x_0 + t_{j-1} + \sigma_{j,i} e_j) - \partial_j f_i(x_0)| \overset{(*)}{\leq} |x - x| \frac{\varepsilon}{\sqrt{d} \cdot m}.$$

Mit (T) und dieser Abschaetzung folgt

$$|f_i(x) - f_i(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \partial_j f_i(x_0) \tau_j| \leq \sum_{j=1}^{m} |f_i(x_0 + t_j) - f_i(x_0 + t_{j-1}) - \tau_j \partial_j f_i(x_0)| \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}.$$

Damit ergibt sich für x mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|^2 &= \sum_{i=1}^{d} |f_i(x) - f_i(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \partial_j f_i(x_0) \tau_j|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} \left| |x - x_0| \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} \right|^2 \\ &\leq |x - x_0|^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{|x - x_0|} |f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)| \leq \varepsilon.$$

□

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Diskussion von Mittelwertsätzen ab.

19.6 Satz (Mittelwertsatz)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x, y \in U$ und $x + t(y - x) \in U$ (U konvex) für $t \in [0, 1]$. Dann existiert ein $\vartheta \in (0, 1)$, sodass

$$f(y) - f(x) = Df(x + \vartheta(y - x))(y - x).$$

Beweis: Sei $g : [0, 1] \to U$, $g(t) = x + t(y - x)$ und $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g$. h ist stetig auf $[0, 1]$ und differenzierbar auf $(0, 1)$.

Kettenregel:

$$h'(t) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle$$

1-dimensionaler Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} & h(1) - h(0) = h'(\vartheta)(1 - 0) \\ (g'(t) = y - x) \quad & f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x + \vartheta(y - x)), y - x \rangle \\ \Rightarrow \; & f(y) - f(x) = Df(x + \vartheta(y - x))(y - x) \end{aligned}$$

□

19.7 Folgerung: Aus dem mehrdimensionalen Mittelwertsatz folgt für $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$|D_k f_i| \leq M < \infty \to |f(y) - f(x)| \leq M\sqrt{nm}\,|y - x|$$

wobei $M\sqrt{nm} =: L$ die Lifshitz-Konstante ist. Dies ist gerade die Bedingung für die Lifshitz-Stetigkeit.

Beweis:

$$\begin{aligned}
|f_i(y) - f_i(x)| &= |\langle \nabla f_i(x + \theta(y - x)), y - x\rangle| \qquad \text{(MWS)}\\
&\leq \sum_{j=1}^{m} M|y_i - x_i|\\
&\leq M\sqrt{m}\,|y - x| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz-Ugl.)}\\
|f(x) - f(y)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)|\\
&\leq M\sqrt{m}\,\sum |y_i - x_i|\\
&\leq M\sqrt{mn}\,|x - y|
\end{aligned}$$

□

Der Satz hat Konsequenzen für Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

19.8 Folgerung: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gilt:

(a) Gilt $|\partial_k f_i(x)| \leq M$ für alle $1 \leq k \leq m$, $1 \leq i \leq n$, so gilt

$$|f(y) - f(x)| \leq M\sqrt{mn}|y - x|$$

für alle x, y, deren Verbindungstrecke ganz in U liegt.

(b) Für alle $x, y \in U$, deren Verbindungstrecke ganz in U liegt existiert ein ξ der Form $x + \vartheta(y - x)$ fuer $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$|f(y) - f(x)| \leq \|Df(\xi)\||y - x|.$$

(c) Ist U zusammenhängend (d.h. zu x, y in U existiert stetiges $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$) und $Df(x) = 0$ fuer alle $x \in U$, so folgt $f \equiv$ *constant* auf U. (Erinnerung: $\|L\| := \sup\{|Lx| : |x| \leq 1\}$. Es gilt $|Lx| \leq \|L\||x|$.)

Beweis: (a) Nach dem vorigen Mittelwertsatz gibt es $\vartheta_i \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, d$ mit

$$|f_i(y) - f_i(x)| = |\langle \nabla f_i(x + \vartheta_i(y - x), (y - x)\rangle| \leq \sum_{j=1}^{m} M|y_j - x_j| \leq M\sqrt{m}|y - x|.$$

(Hier wurde Cauchy Schwartz in der letzten Abschätzung benutzt). Mit einer weiteren Anwendung von Cauchy Schwartz folgt dann

$$|f(y) - f(x)| = \left(\sum_{i=1}^{n} 1|f_i(y) - f_i(x)|^2\right)^{1/2} \leq M\sqrt{mn}|y - x|.$$

(b) *Spezialfall.* Es gilt $f_i(x) = f_i(y)$ für alle $i \neq 1$. Dann folgt aus obigem Mittelwertsatz

$$|f(y) - f(x)| = |f_1(y) - f_1(x)| = |\langle \nabla f_1(x + \vartheta(y - x)), (y - x)\rangle| \leq |Df(\xi)|y - x|.$$

Allgemeiner Fall. Sei U eine Drehung, sodass $Uf(y)$ und $Uf(x)$ sich nur in der ersten Komponente unterscheiden. Dann gilt mit $f^* := Uf$ nach dem Spezialfall

$$|f(y) - f(x)| = |f^*(y) - f^*(x)| \leq \|Df^*(\xi)\||y - x| = \|UDf(\xi)\||y - x| = \|Df(\xi)\||y - x|.$$

(c) Wir deuten ∇f als Vektorfeld mit Potential f. Dann ergibt sich f durch Integration. Wegen $\nabla f \equiv 0$ gilt $f \equiv constant$.

Alternative: Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ gegeben. Da U offen ist und γ stetig, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass γ stueckweise linear ist, d.h. es gibt $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y \in U$, so dass γ durch die Verbindungsstrecken zwischen x_i und x_{i+1} beschrieben ist . Dann gilt nach (a) oder (b) $f(x_i) = f(x_{i+1})$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

20. Der Satz von Taylor und Extrema von Funktionen

20.1 Satz (H.A. Schwarz)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$D_i D_j f_k(x_0) = D_j D_i f_k(x_0)$$

und f ist zweimal stetig differenzierbar.

Beweis:
- es genügt eine Komponente $k \in \{1, \dots, n\}$ zu betrachten
- für $i = j$ gibt es nichts zu beweisen
- betrachte $i = 1,\ j = 2$, ansonsten umnummerieren
- betrachte o. B. d. A. $x_0 = 0$

Es ist somit zu zeigen: $D_1 D_2 f(0) = D_2 D_1 f(0)$.
Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f(s,t) - f(s,0)) - (f(0,t) - f(0,0)) &= \star \\
&= g(s) - g(0) \\
&= g'(s_1)(s - 0) \qquad \text{für } s_1 \in (0,s) \\
&= s(D_1 f(s,t) - D_1 f(s_1, 0)) \\
&= s(h(t) - h(0)) \\
&= sth'(t_1) \qquad \text{mit } t_1 \in (0,t) \\
&= st D_2 D_1 f(s_1, t_1)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\star &= (f(s,t) - f(0,t)) - (f(s,0) - f(0,0)) \\
&= \dots = s + D_1 D_2 f(s_2, t_2) \qquad \text{mit } s_2 \in (0,2),\ t_2 \in (0,t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow s^2 + t^2 = \varepsilon^2 \to 0 \Rightarrow t_1 s \to 0 \Rightarrow t_1, t_2, s_1, s_2 \to 0$$

$$\Rightarrow D_1 D_2 f(0,0) = D_2 D_1 f(0,0) \qquad \text{da } \varepsilon > 0 \text{ beliebig}$$

□

20.2 Korollar (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ p-mal stetig differenzierbar, so können in

$$D_{\gamma_1}, \dots, D_{\gamma_p} f$$

die partiellen Ableitungen beliebig vertauscht werden.

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Satz von Schwarz. □

Notation: Für $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $p \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{C}^p(U, \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum der p-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^n$. Für $f \in \mathfrak{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q < p$ definieren wir

$$D_j^q f = \underbrace{D_j \ldots D_j}_{q\text{-mal}} f \qquad (D_j^0 f := f)$$

Für $\{j_1, \ldots, j_q\} \in \{1, \ldots, m\}^q$ bezeichne α_i die Anzahl, wie oft die Zahl i unter den j_k vorkommt. Dann gilt $f \in \mathfrak{C}^p(U, \mathbb{R}^n)$, $q \leq p$

$$D_{j_1} \ldots D_{j_q} f = D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m} f.$$

Für *Multiindizes* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei im folgenden

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j \qquad \text{der Betrag/die Länge von } \alpha,$$

$$\alpha! := \prod_{j=1}^m \alpha_j! \qquad \text{die Fakultät von } \alpha,$$

$$x^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_m^{\alpha_m} = \prod_{j=1}^m \xi_j^{\alpha_j} \qquad \text{mit } x = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \ldots D_m^{\alpha_m} f = (\prod_{j=1}^m D_j^{\alpha_j}) f \qquad \text{mit } f \in \mathfrak{C}^p(U, \mathbb{R}^n),\ |\alpha| \leq p$$

Anwendung: Die Multiindexschreibweise kann anhand des *Polynomischen Satzes* verdeutlicht werden (auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet):

$$\left(\sum_{j=1}^m \xi_j\right)^k = \sum_{\alpha : |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

Wendet man diese Formel zum Beispiel auf $(a+b)^3$ an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{\alpha : |\alpha| = 3} \frac{3!}{\alpha!} x^\alpha = \frac{3!}{(3,0)!} x^{(3,0)} + \frac{3!}{(2,1)!} x^{(2,1)} + \frac{3!}{(1,2)!} x^{(1,2)} + \frac{3!}{(0,3)!} x^{(0,3)} \\ &= \frac{3!}{3!} a^3 b^0 + \frac{3!}{2!} a^2 b^1 + \frac{3!}{2!} a^1 b^2 + \frac{3!}{3!} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Mit den vorigen Resultaten und den obigen Beziehungen sind wir nun in der Lage den Taylor'schen Satz auf Funktionen von m Variablen zu übertragen.

20.3 Satz (Taylor)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \geq 0$, $f \in \mathfrak{C}^p(U, \mathbb{R})$ und $x_0 \in U$. Dann gilt für alle $x \in U$, für die die Verbindungsstrecke von x_0 und x in U liegt:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + R_p(x)$$

mit

$$R_p(x) = \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^\alpha \qquad \text{mit } \vartheta \in (0,1)$$

Bemerkung: Zur Verdeutlichung geben wir dieses Resultat für $p = 0, 1, 2$ expliziter an:

$\underline{p = 0}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^m D_j f(x_0 + \vartheta(x - x_0))(\xi_j - \xi_{0,j}) \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0 + \vartheta(x - x_0)), x - x_0 \rangle \end{aligned}$$

$\underline{p = 1}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^m D_j f(x_0)(\xi_j - \xi_{0,j}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m D_j D_k f(x_0)(\xi_j - \xi_{0,j}) \\ &+ (x_0 + \vartheta(x - x_0))(\xi_j - \xi_{0,j})(\xi_k - \xi_{0,k}) \end{aligned}$$

$\underline{p = 2}$:

$$f(x) = f(x_0) + ...$$

Bemerkung: Die Terme zweiter Ordnung können als quadratische Form der *Hesse-Matrix*

$$H(\cdot) = (D_j D_k f(\cdot))_{j,k=1}^m$$

aufgefasst werden. Für $p = 2$ lautet dann $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \langle H(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + R_2(x)$$

Beweis: Der Satz wird bewiesen durch Rückführung auf den eindimensionalen Fall. Dazu sei

$$\begin{gathered} y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) := (x - x_0) \\ g : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \to \mathbb{R} \\ g(t) = f(x_0 + ty) = (f \circ h)(t), \text{ mit } h(t) = x_0 + ty \end{gathered}$$

wobei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt sei, dass das Gesamtstück

$$\{x_0 + ty \mid t \in [-\varepsilon, 1 + \varepsilon]\}$$

ganz in U liegt (möglich, da U offen).

Offensichtlich ist g stetig differenzierbar und mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(h(t))h'(t) \\ &= \sum_{j=1}^m D_j f(h(t)) \underbrace{h_j'(t)}_{\eta_j} \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j D_j f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

Ist $p \geq 1$, so ist auch g' stetig differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{d}{dt} D_j f(x_0 + ty) \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j \sum_{i=1}^m D_i D_j f(x_0 + ty) \eta_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \eta_j D_j \right)^2 f(x_0 + ty) \end{aligned}$$

wobei der Term $(\sum \eta_j D_j)^2$ formal auszumultiplizieren ist. Allgemeiner erhält man durch induktive Anwendung des Verfahrens für $k \le p+1$

$$g^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} \eta_j D_j\right)^2 f(x_0 + ty)$$

wobei auch hier die k-te Potenz formal auszurechnen ist.

Nach dem Polynomischen Satz (siehe Anwendung) gilt für beliebige $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \zeta_j\right)^k = \sum_{\alpha:|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} z^\alpha$$

In dieser Formel ersetzen wir $(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ durch $(\eta_1 D_1, \ldots, \eta_m D_m)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} g^{(k)}(t) &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{m} \eta_j D_j\right)^k f(x_0 + ty) \\
&= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}(\eta_1 D_1, \ldots, \eta_m D_m)^\alpha\right) f(x_0 + ty) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \frac{y^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + ty)
\end{aligned}$$

Die Taylorsche Formel liefert für $t \in [0,1]$

$$g(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) t^k + \widetilde{R_p}(t)$$

mit $\widetilde{R_p}(t) = \frac{1}{(p+1)!} t^p g^{(p)}(\vartheta t)$ mit $0 < \vartheta < 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) = g(t) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \widetilde{R_p}(1) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x_0) + \widetilde{R_p}(1) \\
&= \sum_{|\alpha| \le p} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + R_p(x)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
R_p(x) = \widetilde{R_p}(1) &= \frac{1}{(p+1)!} g^{(p+1)}(\vartheta) \\
&= \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{y^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \vartheta y) \\
&= \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^\alpha
\end{aligned}$$

□

Wie im eindimensionalen Fall werden wir Kriterien für (lokale) Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher (im Inneren eines Gebietes U) angeben.

20.4 Definition (Extrema im mehrdimensionalen Fall)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. Dann hat f in x_0 ein lokales $\substack{\text{Maximum}\\\text{Minimum}}$, falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \substack{\leq \\ \geq} f(x_0) \qquad \forall\ x \in U,\ |x - x_0| < \delta$$

f hat in x_0 in strenges lokales $\substack{\text{Maximum}\\\text{Minimum}}$, falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$f(x) \substack{< \\ >} f(x_0) \qquad \forall\ x \in U,\ |x - x_0| < \delta$$

20.5 Satz (Notwendige Kriterien für Extrema)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in x_0. Hat f in x_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum, so gilt

$$\nabla f(x_0) \equiv 0$$

Beweis: Da f bei x_0 differenzierbar ist, sind die Funktionen

$$g_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R},\ g_j(t) = f(x_0 + te_j)$$

in $t = 0$ differenzierbar. Außerdem haben sie bei 0 ein Extremum

$$\Rightarrow\ g_j'(0) = 0 = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)$$

□

20.6 Satz (Kriterien für Extrema)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathfrak{C}^2(U, \mathbb{R})$ und $x_0 \in U$

(a) (Notwendiges Kriterium) Hat f bei x_0 ein (lokales) $\substack{\text{Maximum}\\\text{Minimum}}$, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix $(D_k D_j f(x_0))_{j,k=1}^m$ ist $\substack{\text{negativ}\\\text{positiv}}$ semidefinit.

(b) (Hinreichendes Kriterium) Gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und die Hesse-Matrix ist $\substack{\text{negativ}\\\text{positiv}}$ definit in x_0, so hat f ein lokales $\substack{\text{Maximum}\\\text{Minimum}}$ in x_0.

Erinnerung: A heißt positiv (semi)definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\langle Ax, x\rangle > (\geq) 0 \Leftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv (nicht negativ)}$$

Beweis: (a) nach obigen Satz gilt $\nabla f(x_0) = 0$. Angenommen $H(x_0)$ ist nicht negativ semidefinit, dann existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$, $|y| = 1$ und $\langle H(x_0)y, y\rangle > 0$. Da $f \in \mathfrak{C}^2(U, \mathbb{R})$ ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\langle H(x_0)y, y\rangle > 0 \quad \forall x \in U,\ |x - x_0| < \delta$$

Dann folgt mit dem Satz von Taylor für alle $t \in (0, \delta]$

$$\begin{aligned} f(x_0 + ty) &= f(x_0) + 0 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \vartheta ty) t^{|\alpha|} y^\alpha \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m t^2 D_i D_j f(x_0 + \vartheta ty) \eta_i \eta_j \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \langle H(x_0 + \vartheta ty), y\rangle \\ &> f(x_0) \end{aligned}$$

(b) Sei $Df(x_0) = 0$ und $(D_iD_jf(x_0))_{i,j}$ negativ definit, dann gilt also mit $y = (\eta_1, \dots, \eta_m)$

$$0 > \sum_{i,j=1}^{m} D_iD_jf(x_0)\eta_i\eta_j = \langle H(f)(x_0)y, y\rangle$$

für alle y mit $y \neq 0$.

Da die Abbildung

$$S^m = \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ |y| = 1\} \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle H(f)(x_0)y, y\rangle$$

stetig ist, nimmt sie auf dem kompakten S^m ihr Maximum an. Es gibt also ein $\lambda > 0$ mit $\langle H(f)(x_0)y, y\rangle \leq -\lambda$ für alle y mit $|y| = 1$. Da alle D_iD_jf stetig sind, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|D_iD_jf(x) - D_iD_jf(x_0)| \leq \frac{\lambda}{2m^2}$$

für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle H(f)(x)y, y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{m} D_iD_jf(x)\eta_i\eta_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} (D_iD_jf(x) - D_iD_jf(x_0))\eta_i\eta_j \ \langle H(f)(x_0)y, y\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2} - \lambda = -\frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

für alle y mit $|y| = 1$,

$$\Rightarrow \langle H(f)(x)y, y\rangle \leq -\frac{\lambda}{2}|y|^2$$

für alle $|y| \neq 0$,

$$\Rightarrow \langle H(f)(x)y, y\rangle < 0$$

für alle $y \neq 0$ und x mit $|x - x_0| < \delta$.

Mit dem Satz von Taylor folgt also

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\langle H(f)(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0), (x - x_0)\rangle$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$, also

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

für $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$.

$\Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes Maximum.

Die Aussage über Minima folgt analog (z. B. f durch $-f$ ersetzt)

□

Bemerkung: (a) nutzt: A nahe $B \Rightarrow \langle Ay, y\rangle$ nahe $\langle By, y\rangle$

(b) nutzt/beweist: A negativ definit, größter Eigenwert ist $-\lambda$, B nahe $A \Rightarrow$ größter Eigenwert von B ist nahe $-\lambda$, B ist symmetrisch

21. Implizite Funktionen und lokale Invertierbarkeit

In diesem Abschnitt geht es um das Auflösen von Gleichungen

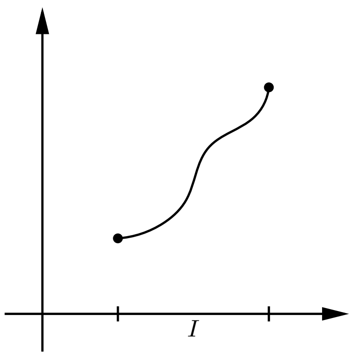
$$F(x,y) = 0$$

nach y beziehungsweise x bei gegebenen x beziehungsweise x.

Wir beginnen mit der Diskussion von lokaler Invertierbarkeit.

Zur Einstimmung liefern wir zunächst zwei Spezialfälle:

Beispiel ($n = 1$)**:** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f bijektiv auf $f(I)$ falls f streng monoton ist und umgekehrt.



Ist f stetig differenzierbar, so folgt aus $f'(x_0) \neq 0$ wegen der Stetigkeitseigenschaft, dass f' ein festes Vorzeichen in einer Umgebung von x_0 besitzt. Also ist f in dieser Umgebung von x_0 streng monoton. Das impliziert, dass

$$f|_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)}\colon (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to f((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ bijektiv ist.

Weiterhin ist $g = \left(f|_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)}\right)^{-1}$ stetig differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ (für $f(x) = y$).

Beispiel: Es sei die Dimension m beliebig und f linear affin

$$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ f(x) = a + Lx.$$

Dann ist, genau dann wenn f invertierbar ist, auch die lineare Abbildung invertierbar. In diesem Fall ist $g = f^{-1}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch

$$g(y) = b + L^{-1}y \text{ mit } b = -L^{-1}a.$$

Es gilt $L = Df(x_0)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Damit gilt also

$$f \text{ invertierbar } \Leftrightarrow \ Df(x_0) \text{ invertierbar.}$$

Dann ist auch g differenzierbar und $Dg(y) = L^{-1} = (Df(x))^{-1}$.

In beiden Beispielen gilt also:

- f ist lokal invertierbar, genau dann wenn $Df(x_0)$ invertierbar ist.
- In diesem Fall ist $g = f^{-1}$ differenzierbar mit

$$Dg(y_0) = Df^{-1}(x_0).$$

Tatsächlich gilt folgender allgemeiner Satz.

21.1 Satz (Umkehrfunktion)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0)$ und $Df(x_0)$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung V von x_0 in U und eine offene Umgebung W von y_0, sodass gilt:

- $f|_V: V \to W, x \mapsto f(x)$ ist bijektiv (f ist lokal invertierbar),
- für alle $x \in V$ ist $Df(x)$ invertierbar,
- die Umkehrabbildung $g := (f|_V)^{-1}: W \to V$ ist stetig differenzierbar mit $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ für $y = f(x)$.

Beweis: Auf einen ausführlichen Beweis wollen wir hier verzichten. Die Intuition ist, dass f aufgrund seiner Differenzierbarkeit nahe an eine invertierbaren linearen Abbildung ist. $\square$

Beachte: Sind g und f differenzierbar mit $g \circ f = id$, so gilt nach der Kettenregel

$$Dg(f(x))Df(x) = \mathbb{1}.$$

Die Invertierbarkeit von $Df(x)$ und die Formel $Dg(f(x)) = Df(x)^{-1}$ sind also Konsequenzen der Differenzierbarkeit von g.

Auch wenn Df überall invertierbar ist, so ist f im Allgemeinen *nicht* global invertierbar. Der Satz ist also eine *strikt* lokale Aussage.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 - \xi_2^2, 2\xi_1\xi_2)$. Dann gilt

$$Df(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 2\xi_1 & -2\xi_2 \\ 2\xi_2 & 2\xi_1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det Df(\xi_1, \xi_2) = 4(\xi_1^2 + \xi_2^2) \neq 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Damit ist Df überall auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ invertierbar.

Aber f ist nicht injektiv, denn es gilt $f(-\xi_1, -\xi_2) = f(\xi_1, \xi_2)$.

Setzt man $z = \xi_1 + i\xi_2$, so ist $f(\xi_1, \xi_2) = (\Re z^2, \Im z^2)$. Es handelt sich also bei f um die komplexe Quadratfunktion und bei Df und die Multiplikation mit $2z$.

Beispiel: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \begin{pmatrix} \cos \xi_2 \\ \sin \xi_2 \end{pmatrix}$. Dann ist f nicht injektiv. Aber die Ableitung ist auf dem gesamten $\mathbb{R}^2$ invertierbar:

Es ist

$$Df(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} \begin{pmatrix} \cos \xi_2 & -\sin \xi_2 \\ \sin \xi_2 & \cos \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det Df = e^{\xi_1} \neq 0$. Aber es ist $f(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1, \xi_2 + 2\pi)$.

Setzt man $z = \xi_1 + i\xi_2$ so ist $f(z) = (\Re e^z, \Im e^z)$. Es handelt sich also um die komplexe Exponentialfunktion und ihre Ableitung.

Beachte: In einer Dimension ist die Lage besser: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $Df(x) = f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so hat f' nach dem Zwischenwertsatz ein festes Vorzeichen, f ist streng monoton und damit global invertierbar.

In der bisherigen Diskussion haben wir versucht, die Gleichung

$$g(x, y) = f(x) - y = 0$$

bei gegebenen y nach x aufzulösen, dass heißt x als Graph einer Funktion von y darzustellen.

Wir fragen nun, wieweit das für allgemeinere Funktionen g möglich ist. Dazu vertauschen wir die Rollen von x und y und betrachten $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und

$$M := \{(x, y) : g(x, y) = 0\}.$$

Die Frage lautet, ob M lokal als Graph $(x, y(x))$ darstellbar ist, dass heißt ob man y als Funktion von x schreiben kann. Anders gesagt geht es um das Auflösen der Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y als Funktion von x.

Zunächst diskutieren wir wieder zwei Beispiele.

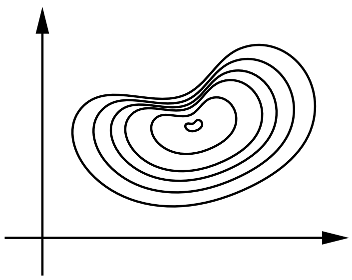
Beispiel (Höhenlinien einer Landkarte)**:** Sei

$$g\colon \text{Landkarte} \to \mathbb{R}$$

mit $g(P)$ der Höhe von P über dem Meeresspiegel. Zu $c \in \mathbb{R}$ sei

$$M_c := \{P\colon g(P) - c = 0\}.$$

Dann ist M_c gerade die Höhenlinie zu c. Offensichtlich lässt sich nicht die gesamte Höhenlinie mit einem mal invertieren, sondern nur stückweise.



Beispiel (Einheitskreislinie)**:** Sei $g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dann gilt:

- *oberer Halbkreis* $M \cap \{y > 0\}$: $y = \sqrt{1 - x^2}$
- *linker Halbkreis* $M \cap \{x < 0\}$: $x = \sqrt{1 - y^2}$
- *unterer Halbkreis* $M \cap \{y < 0\}$: $y = \sqrt{1 - x^2}$
- *rechter Halbkreis* $M \cap \{x > 0\}$: $x = \sqrt{1 - y^2}$

Die Gleichung kann also lokal nach x beziehungsweise y aufgelöst werden. Das Auflösen nach y ist dabei in Bereichen mit $\partial_y f(x,y) = 2y \neq 0$ möglich und das Auflösen nach x in Bereichen mit $\partial_x g(x,y) = 2x \neq 0$.

Notation: Für $z \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ schreiben wir $z = (x,y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Ist $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so setzen wir

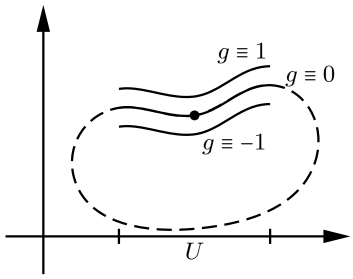
$$D_x g(z) := (\partial_j g_i(z))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \cdots & \partial_m g_1 \\ \partial_1 g_n & \cdots & \partial_m g_n \end{pmatrix}$$

$$D_y g(z) := (\partial_{j+m} g_i(z))_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \partial_{n+1} g_1 & \cdots & \partial_{n+m} g_1 \\ \partial_{n+1} g_n & \cdots & \partial_{n+m} g_n \end{pmatrix}.$$

Damit gilt dann also
$$Dg(z) = (D_x g(z)\ D_y g(z)).$$

$D_y g(z))$ ist eine quadratische Matrix ($n \times n$ Matrix)!

21.2 Satz (Implizite Funktionen)**:** Sei $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $g: W \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei weiterhin
$$M := \{(x,y) \in W : g(x,y) = 0\}.$$
Sei $z_0 := (x_0, y_0) \in M$ und $D_y g(z_0)$ invertierbar. Dann existieren offenen Umgebungen U von x_0 und V von y_0 und ein stetig differenzierbares $f: U \to V$ mit
$$M \cap (U \times V) = \text{Graph von } f = \{(x, f(x)) : x \in U\},$$
sowie $Df(x) = -D_y g(x, f(x))^{-1} D_x g(x, f(x))$.

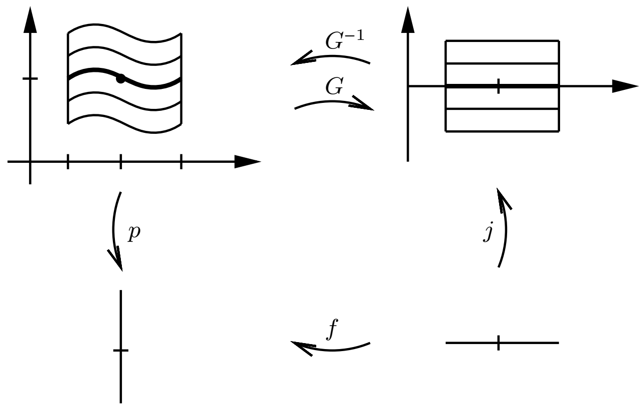


Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz von f:

Idee: Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist um (x_0, y_0) herum jeder Punkt eindeutig durch seine x Koordinate und den Wert von $g(x,y)$ beschrieben. Daher können wir (x, g) als Koordinatensystem verwenden. Das liefert eine Zerlegung in Konstanzflächen von g. Diese sind nach Konstruktion Graphen.

Details: Sei $G: W \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(x,y) \mapsto (x, g(x,y))$. Dann gilt
$$G(x_0, y_0) = (x_0, 0),$$
sowie
$$DG(x_0, y_0) \equiv \begin{pmatrix} 1_m & 0_{mn} \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$
Damit folgt
$$\det DG(x_0, y_0) = \det D_y g(x_0, y_0) \neq 0$$
nach unserer Voraussetzung an die Invertierbarkeit von $D_y g(x_0, y_0)$. Daher ist auch $DG(x_0, y_0)$ invertierbar.

Nach dem Satz über Umkehrfunktionen gibt es also offenen Umgebungen W von (x_0, y_0) und $\widetilde{W}$ von $G(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, so dass
$$G: W \to \widetilde{W}$$
bijektiv mit stetig differenzierbarem Inversen ist. Ohne Einschränkung (sonst Verkleinern) können wir
$$\widetilde{W} = \widetilde{U_{x_0}} \times \widetilde{U_0}$$



mit Umgebungen $\widetilde{U}_{x_0}$ von x_0 und $\widetilde{U}_0$ von 0 annehmen. Damit liefert die Zerlegung von $\widetilde{W}$ in Konstanzflächen (der zweiten Koordinate) eine Zerlegung von $M \cap W$ in Konstanzflächen von g. Nach Konstruktion sind diese Konstanzflächen aber gerade Graphen.

Wir wählen nun eine Umgebung U von x_0 und V von y_0 mit $U \times V \subset W$ und $G^{-1}(U \times \{0\}) \subset U \times V$. Sei

$$p\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y = (0 \ 1_m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_m \\ 0 \end{pmatrix} x.$$

Dann hat

$$f = p \circ G^{-1} \circ j\colon U \to V$$

die gewünschten Eigenschaften.

Es bleibt die Ableitung zu berechnen. Nach Kettenregel ist f differenzierbar und es gilt

$$Df(x) = Dp(G^{-1}(j(x))DG^{-1}(j(x))Dj(x).$$

Dann gilt $Dj = j, Dp = p$ (p, j linear) und

$$DG(x,y) \equiv \begin{pmatrix} 1_m & 0_{mn} \\ D_x g(x,y) & D_y g(x,y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 1_m & 0_{mn} \\ L_1 & L_2 \end{pmatrix}$$

mit $L_1 = D_x g(x,y)$ und $L_2 = D_y g(x,y)$. Damit ergibt sich das Inverse zu

$$DG^{-1} = \begin{pmatrix} 1_m & 0_{mn} \\ -L_2^{-1} L_1 & L_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt

$$Df(x) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1_m & 0_{mn} \\ -L_2^{-1} L_1 & L_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c1_m \\ 0 \end{pmatrix} = -L_2^{-1} L_1 = -D_y g^{-1} D_x g$$

und das ist die Behauptung. □

Beachte: • Sind f, g differenzierbar mit $g(x, f(x)) \equiv 0$, so folgt aus der Kettenregel

$$0 \equiv Dg(x, f(x)) \begin{pmatrix} 1_m \\ Df(x) \end{pmatrix} = D_x g(x, f(x)) + D_y g(x, f(x)) Df(x).$$

Damit ergibt sich die Formel für die Ableitung von f

$$Df(x) = -D_y g^{-1}(x, f(x)) D_x g(x, f(x)).$$

- Ist $D_y g(x_0, y_0)$ nicht invertierbar, so ist im Allgemeinen kein eindeutiges Auflösen von y nach x in Umgebung von x_0 möglich:

  Beispiel (kein eindeutiges Auflösen möglich)**:**

  $$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = x^2 + y^2 - 1, (x_0, y_0) = (1,0).$$

  Beispiel (gar kein Auflösen möglich)**:**

  $$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x,y) = x^2 + y^2, (x_0, y_0) = (0,0).$$

- Statt $g \equiv 0$ kann man auch $g \equiv c$ betrachten. Dazu ersetzt man einfach g durch $\widetilde{g} = g - c$.
- Ist $W \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $g: W \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $g(z_0) = 0$ und $\operatorname{Rang} Dg(z_0) = n$, so kann man den Satz, gegebenenfalls nach Umsortieren der Koordinaten anwenden. (vgl. Beispiel mit Einheitskreis)
- Wir haben den Satz über Implizite Funktionen mittels dem Satz über die Umkehrfunktion gezeigt. Man kann auch umgekehrt vorgehen.

22. Untermannigfaltigkeiten, bedingte Extrema und all das

Untermannigfaltigkeiten sind „glatte" Gebilde im Raum (Torus, Sphäre, ...). Diese können lokal als Nullstellenmengen beziehungsweise Graphen von stetig differenzierbaren Funktionen dargestellt werden. Sie können außerdem linear durch die Tangentialräume approximiert werden.

22.1 Definition (Nullstellenmengen, Graphen, reguläre Funktionen)**:** Die *Nullstellenmenge* einer Funktion g bezeichnen wir mit $N(g)$, d.h. zu $g : W \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ definieren wir

$$N(g) := \{z \in W : g(z) = 0\} = \bigcap_{j=1}^{k} N(g_j).$$

Den *Graphen* einer Funktion f bezeichnen wir mit $G(f)$, d.h. zu $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär* in $p \in U$, wenn $Dh(p)$ vollen Rang hat. (Also Rang $Dh(p) = m$ falls $m \leq n$ und Rang $Dh(p) = n$ falls $n \leq m$.) Ist die Funktion in jedem $p \in U$ regulär, so heißt die Funktion regulär.

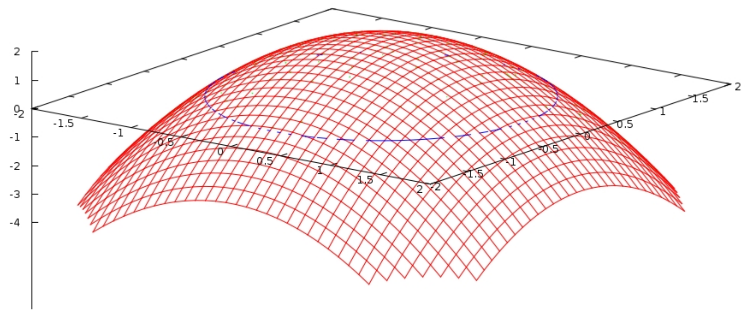


Abbildung 22.1.: Graph $G(f)$ (rot) und Nullstellenmenge $N(f)$ (blau) der regulären Funktion $g(x, y) = -x^2 - y^2 + 2$

Beispiel: Ist $g : W \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist g genau dann in x regulär, wenn $\nabla g(x) \neq 0$.

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist $F : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $F(x) = (x, f(x))$ regulär.

Dies kann man leicht mit der Jacobi-Matrix zeigen:

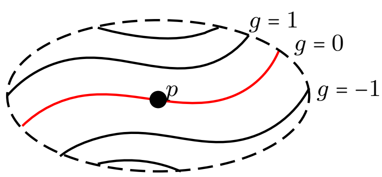
$$DF(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & Df(x) & \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat m Spalten und $m+n$ Zeilen und aufgrund der Identität im oberen Bereich den vollen Rang $\operatorname{Rang} DF(x) = m$.

Notation: Ist h in jedem Punkt regulär, so heißt h regulär.

22.2 Lemma (lokale Nullstellenmengen entsprechen lokalen Graphen)**:** Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $p \in M$ und $k \leq N$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^N$ und ein reguläres $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ mit
$$M \cap W = N(g).$$
(M ist lokal eine Nullstellenmenge.)



(ii) Es existiert eine offenen Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$, eine offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$, eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ und eine Permutation $P : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit
$$M \cap W = PG(f).$$
(M ist lokal Graph.)

Beweis: $\underline{(ii) \Longrightarrow (i)}$: Das folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.
$\underline{(i) \Longrightarrow (ii)}$: Die andere Implikation folgt einfach durch Betrachten von $g(x, y) = y - f(x)$. Dann folgt
$$M \cap W = G(f) = \{(x, f(x)), x \in U\} = N(g)$$
$\square$

22.3 Definition (Untermannigfaltigkeit)**:** Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^N$ heißt *Untermannigfaltigkeit* der Dimension k, wenn sie in jedem Punkt $p \in M$ eine der Bedingungen des Lemma erfüllt.

Beispiele:
- Sphere: $\{x \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 1\}$
- Torus
- der Graph einer Funktion
- Nullstellenmenge einer regulären Funktion

22.4 Definition (Hyperfläche)**:** Eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $N-1$ heißt *Hyperfläche*. Hyperflächen sind also (lokal) Nullstellenmengen von reellwertigen Funktionen $g: W \to \mathbb{R}$.

Beachte: Untermannigfaltigkeiten sind lokal Schnitte von Hyperflächen, da $N(g) = \bigcap_i^{N-k} N(g_i)$.

Bemerkung: Eine Untermannigfaltigkeit hat die Dimension k, wenn sie lokal Bild einer Funktion $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{N-k}$ ist.

Untermannigfaltigkeiten können linear durch Unterräume approximiert werden.

Wir führen nun die Tangentialflächen und Normalen an Untermannigfaltigkeiten ein.

22.5 Definition (Tangentialraum und Normalraum)**:** Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeiten und $p \in M$. Dann heißt

$$T_pM := \{\gamma'(0) : \gamma : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^N, \text{stetig diffbar, } \gamma(0) = p, \gamma(-1,1) \subset M\}$$

der Tangentialraum von M in p.

Der Normalraum N_pM im Punkt p ist definiert als

$$N_pM := T_pM^\perp = \{v \in \mathbb{R}^N : < v, t >= 0 \text{ für alle } t \in T_pM\}.$$

22.6 Satz (Beschreibung Tangentialraum und Normalraum)**:** Sei die Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben. Sei $p \in M$ und $W \subset \mathbb{R}^N$ offen mit

$$p \in M \cap W = N(g) = G(f) = \text{Bild}(F),$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^k$, offen, $f: U \to \mathbb{R}^{N-k}$ stetig differenzierbar, $F: U \to \mathbb{R}^N,\ F(x) = (x, f(x))$, $g: W \to \mathbb{R}^{N-k}$, stetig differenzierbar und regulär. Dann gilt

$$T_pM = \text{Kern}\, Dg(p) = \text{Bild}\, DF(p_0)$$

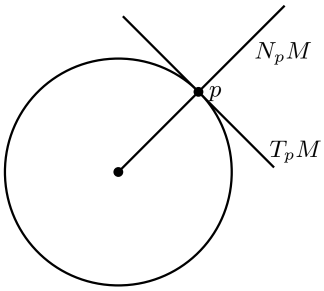


Abbildung 22.2.: Tangential- und Normalraum einer zweidimensionalen Sphäre in p

für $p = F(p_0)$.

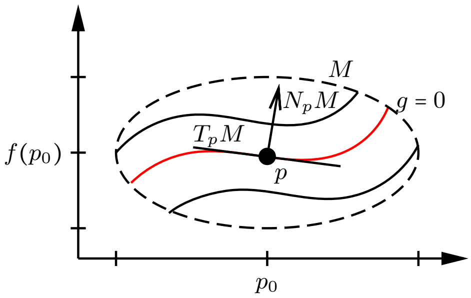
Insbesondere gilt

$$T_pM = \bigcap_{j=1}^{N-k} \{\nabla g_j(p)\}^\perp$$
$$N_pM = \mathrm{Lin}\{\nabla g_j(p) : j = 1, \ldots, N-k\}$$

sowie $\dim T_pM = k$, $\dim N_pM = N - k$.

Beachte:

- 22.6 ist die linearisierte Fassung von 22.6.
- T_pM ist ein Unterraum.
- In Richtung ∇g_i stärkstes Wachstum von g_i. In Richtung T_pM kein Wachstum der g_i (da Nullstellenmenge).



Beweis: $\underline{T_pM \subset \mathrm{Kern}\, Dg}$: Sei $v \in T_pM$ beliebig und γ zugehörige Kurve d.h $\gamma : (-1,1) \to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann gilt $g \circ \gamma \equiv 0$ und damit auch

$$0 = (g \circ \gamma)'(0) = Dg(\gamma(0))\gamma'(0) = Dg(p)v.$$

Bild $DF \subset T_pM$: Sei $w \in \mathbb{R}^{N-k}$ beliebig und $\gamma : (-1,1) \to M$, $\gamma(t) = F(p_0 + tw)$. Dann gilt

$$DF(p_0)w = \gamma'(0) \in T_pM.$$

Damit ergibt sich Bild $DF(p_0) \subset T_pM \subset$ Kern $Dg(p)$.

Weiterhin gilt

$$\dim \operatorname{Bild} DF(p_0) = k$$

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Kern} Dg(p) &= N - \dim \operatorname{Bild} Dg(p) \\ (g \text{ regulär}) \quad &= N - (N-k) \\ &= k \end{aligned}$$

Das bedeutet $\dim \operatorname{Bild} DF(p_0) = \dim \operatorname{Kern} Dg(p)$. Damit folgt 22.6.

Zu „Insbesondere“:

$$\begin{aligned} v \in \operatorname{Kern} Dg &\Leftrightarrow Dgv = 0 \\ &\Leftrightarrow (\nabla g_1, \dots, \nabla g_{N-k})^T v = 0 \\ &\Leftrightarrow v \perp \nabla g_j \, \forall j \\ &\Rightarrow T_pM = \bigcap_{j=1}^{N-k} \nabla g_j^{\perp} \\ &\Rightarrow N_pM = T_pM^{\perp} = \operatorname{Lin}\{\nabla g_j\} \end{aligned}$$

□

Die Betrachtung von Untermannigfaltigkeiten ist in vielerlei Hinsicht nützlich. Wir lernen jetzt eine Anwendung auf sogenannte bedingte Extrema kennen. Diese ist unter dem Namen *Methode der Lagrange-Multiplikatoren* bekannt.

22.7 Definition (Bedingte Extrema)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $M \subset U$, $f : U \to \mathbb{R}$, $p \in M$. Es nimmt f in p ein lokales Maximum / Minimum auf M an, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) \le f(p) \;/\; f(x) \ge f(p)$$

für alle $x \in M$ mit $|x - p| \le \delta$.

Da M im Allgemeinen nicht offen ist, können die bisher entwickelten Methoden zur Untersuchung von Extrema nicht angewendet werden. Wir untersuchen nun den Fall, dass M eine Nullstellenmenge ist.

22.8 Theorem (Extrema unter Nebenbedingungen)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $g : U \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbar, $k := N - l$, (d.h. $l = N - k$)

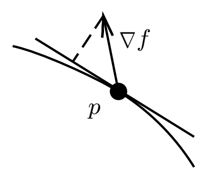
$$M := N(g) = \bigcap_{i=1}^{l} N(g_i).$$

Sei p ein regulärer Punkt von g also $\operatorname{Rang} Dg(p) = l$ (äquivalent: $\nabla g_i(p)$ linear unabhängig). Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Hat f in p ein bedingtes lokales Extremum auf M, so gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ mit

$$\nabla f(p) = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla g_j(p).$$

Ist insbesondere M ein Untermannigfaltigkeit (d.h. jeder Punkt von M ist regulär), so gilt $\nabla f(p) \in N_p M = T_p M^{\perp}$.

Interpretation: Angenommen $\nabla f(p)$ wäre nicht senkrecht auf $T_p M$, so könnte man auf M in dieser Richtung „wandern" und dabei den Wert von f vergrößern bzw. durch Wandern in Gegenrichtung verkleinern. Dann wäre aber p kein Extremum.
In einem Extremum kann also $\nabla f(p)$ keine Komponente in Richtung von $T_p M$ haben, muss also in $N_p M$ liegen. Da $N_p M$ die lineare Hülle der Gradienten der g_i ist, muss auch $\nabla f(p)$ eine lineare Hülle der Gradienten der g_j sein.



Beweis: Ohne Einschränkung sei M eine Untermannigfaltigkeit (sonst Verkleinern). Ist $\gamma : (-1,1) \to M$, stetig differenzierbare Kurve in M mit $\gamma(0) = p$. Dann hat $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $h(t) = f(\gamma(t))$ in 0 ein lokales Extremum. Daher muss gelten

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \gamma'(0) \rangle.$$

Da γ beliebige Kurve in M durch p war, folgt $\nabla f(p) \perp T_p M$, also $\nabla f(p) \in N_p M = \operatorname{Lin}\{\nabla g_i(p) : \ j = 1, \dots, l\}$. Damit folgt 22.8. □

Verfahren zum Finden von bedingten Extrema: Um die Punkte zu finden, in denen *möglicherweise* Extrema vorliegen, hat man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_j(p) &= 0\,, \quad j = 1, \dots, l && (l - \mathit{Gleichungen}) \\ \nabla f(p) &= \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla g_j(x) && (N - \mathit{Gleichungen}) \end{aligned}$$

nach $p = (p_1, \dots, p_N)$ und $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ aufzulösen. Das sind $l + N$ Gleichungen und $l + N$ Unbekannte. Man erhält diese Gleichungssystem auch durch Betrachten von

$$F : U \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_l) = f(x) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j g_j(x)$$

und Bilden des Gradienten

$$\nabla F(p,\lambda) = (\nabla f(p) - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j \nabla g_j(p), g_1(p), \dots, g_l(p))$$

und Nullsetzen des Gradienten. In diesem Sinne entsprechen die Extrema von F den bedingten Extrema von f. Man nennt dieses Verfahren auch *'Ankoppeln der Nebenbedingungen'*.

Notation: Die λ_j heißen auch *Lagrange-Multiplikatoren.*

Beachte: Die gesuchte Menge der Extrema und die berechnete Menge, in der 22.1 gilt, können sehr verschieden sein:

Seien
$M_1 := \{\text{Extrempunkt von } f \text{ auf } M\}$,
$M_2 := \{\text{Extrempunkt von } f \text{ auf } M, \text{ in denen } Dg \text{ vollen Rang hat}\}$,
$M_3 := \{\text{Punkte aus } M \text{ für die 22.1 gelöst werden kann}\}$.

Dann gilt

$$M_1 \supset M_2 \subset M_3.$$

Dabei sind M_1 diejenigen Punkte, die uns interessieren und M_3 diejenigen, die wir durch Lösen von 22.1 berechnen. Es gilt:

- M_1 nicht leer, falls M kompakt.
- Die erste Inklusion ist eine Gleichheit, falls Dg überall auf M vollen Rang hat, d. h. M eine Untermannigfaltigkeit ist.
- Es können in M_3 Punkte dazukommen.

22.9 Folgerung (Extrema auf Untermannigfaltigkeiten)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $M \subset U$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit. Dann nimmt f sein Maximum / Minimum auf M an und zwar in denjenigen Punkten von

$$\{p \in M : \nabla f(p) \in N_p M\}$$

in denen es maximalen / minimalen Funktionswert hat.

Beweis: Da M kompakt und f stetig ist folgt, dass f ein Maximum / Minimum annimmt. Da M außerdem eine Untermannigfaltigkeit ist, gilt $M_1 = M_2 \subset M_3$. Damit ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel: $U = \mathbb{R}^2$, $g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1$, $M = N(g) = S$.

Gesucht sind die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \xi_1 + 2\xi_2$ auf M.

Da f stetig und M kompakt ist, nimmt f auf M auf jeden Fall Minimum und Maximum an. Wir berechnen nun Gradienten von f und g. Es gilt

$$\nabla f(x) = (1,2)^T, \;\; \nabla g(x) = 2(\xi_1, \xi_2)^T.$$

Insbesondere gilt $\nabla g \neq 0$ auf ganz M und M ist eine Untermannigfaltigkeit. Auflösen von 22.1 liefert dann die Extrempunkte von f auf M (und möglicherweise noch mehr Punkte). Es wird 22.1 zu

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 - 1 &= 0 \\ (1,2) - \lambda 2(\xi_1, \xi_2) &= 0 \end{aligned}$$

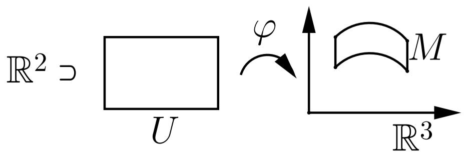
$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \;\; (\xi_1, \xi_2) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Es gilt $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$ (Maximum) und $f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$ (Minimum).

23. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir Integrale über parametrisierte Gebilde im Raum ein. Das erlaubt es insbesondere über Untermannigfaltigkeiten zu integrieren. Ein Spezialfall sind die schon bekannten Kurvenintegrale.

23.1 Definition (Parameterdarstellung)**:** Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ geben. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen $k < N$, und $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Gilt $M = \varphi(U)$, so heißt (U, φ) eine Parameterdarstellung von M.



Die Parameterdarstellung heißt regulär, wenn $D\varphi$ überall Rang k hat. Die Funktion

$$G_\varphi : U \longrightarrow [0, \infty),\ G_\varphi(x) := \det(D\varphi(x)^T D\varphi(x))$$

heißt *Gramsche Determinante* der Parameterdarstellung.

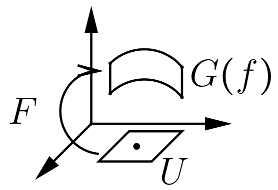
Beachte: Die Parameterdasrstellung ist genau dann regulär, wenn G_φ nirgends verschwindet.

Beispiel (Kurven als reguläre Parameterdarstellungen)**:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist γ eine Parameterdarstellung. Sie ist regulär, wenn γ' nirgends verschwindet.

Beispiel (Graphen sind reguläre Parameterdarstellungen)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist

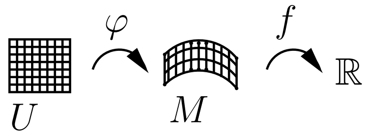
$$\text{Bild}\, F = G(f)$$

und (U, F) ist eine reguläre Parameterdarstellung.



Auf Gebilden, die durch (reguläre) Parameterdarstellungen gegeben sind, können wir Funktionen integrieren (vgl. Kurvenintergral).

Idee: $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei (U, φ) eine Parameterdarstellung von M. Dann können wir U in sehr kleine disjunkte Würfel Q_j zerlegen. In jedem Würfel können wir nun einen Punkt p_j wählen.



p_j, Q_j,$\varphi(Q_j)$, $D\varphi(Q_j)$. Dann sollte das gesuchte Integral im wesentlichen durch seine Riemann summe

$$\sum_j \operatorname{vol}(\varphi(Q_j))f(p_j)$$

gegeben sein (und der Fehler umso kleiner, je kleiner die Q_j sind). Da φ stetig diffbar ist, ist für kleine Würfel Q_j aber $\varphi(Q_j) \sim D\varphi(p_j)Q_j$. Entsprechend folgt

$$\begin{aligned}
\int f dS &\sim \sum_j \operatorname{vol}(\varphi(Q_j))f(\varphi(p_j)) && (1)\\
&\sim \sum_j \operatorname{vol}(D\varphi(p_j)Q_j))f(\varphi(p_j)) && (2)\\
&= \sum_j \sqrt{\det(D\varphi^T(p_j)D\varphi(p_j))}|Q_j|f(\varphi(p_j)) && (3)\\
&\simeq \int_U f(\varphi(p))\sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi(p))}dp && (4)
\end{aligned}$$

Hier: Erste Gleichung: Riemannsumme; zweite Gleichung : linear Approximation; dritte Gleichung: Betrachtungen zu Volumina und Determinanten; vierte Gleichung: Riemannsummme.

23.2 Definition (Integral bzgl. einer Parameterdarstellung)**:** Sei (U, φ) eine Parameterdarstellung von M und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann definieren wir das Integral von f auf M

bzgl. der Parameterdarstellung (U, φ) als:

$$\int_M f dS := \int_U f(\varphi(p))\sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)(p)}dp.$$

23.3 Proposition (Unabhängigkeit des Integrals von der Parameterdarstellung)**:** Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ mit einer regulären injektiven Parameterdarstellung (V, ψ) gegeben. Dann gilt für jede weitere bijektive Parameterdarstellung (U, φ) von M, dass

$$\int_V f(\psi(x))\sqrt{G}_\psi(x)dx = \int_U f(\varphi(y))\sqrt{G}_\varphi(y)dy.$$

$$\begin{tikzcd} & M & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\circ\varphi"'] & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $T := \psi^{-1} \circ \varphi : U \longrightarrow V$. Dann ist T bijektiv (klar, da φ, ψ bijektive sind) und stetig diffbar (! hier nutzt man Regularität von ψ s.u.), und es gilt $\varphi = \psi \circ T$. Entsprechend folgt

$$D\varphi = D\psi \circ DT$$

und damit

$$D\varphi^t D\varphi = DT^t(D\psi^t \circ D\psi)DT$$

also nach Bilden der Determinante

$$G_\varphi = |\det DT|^2 G_\psi.$$

Zieht man die Wurzel erhÄlt man

$$\sqrt{G_\varphi} = |\det DT|\sqrt{G_\psi}$$

und die gewünschte Aussage folgt aus der Substitutionsregel.

(! Betrachte ψ regulär, also $Rang D\psi = k$ fuer $V \subset \mathbb{R}^k$. OE sind die letzten k Zeilen von $D\psi$ linear unabhängig. Dann ist $G : V \times \mathbb{R}^{N-k} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $G(x,y) := \psi(x) + (y, 0)$ stetig diffbar und lokal invertierbar und es gilt $(\psi^{-1}(z), 0) = G^{-1}(z)$. Damit ist ψ^{-1} als Verknüpfung stetig diffbarere Funktionen, ebenfalls stetig diffbar.) □

23.4 Definition (Integral einer Parameterdarstellung)**:** Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ geben, so dass M das Bild einer regulären Parameterdarstelllung ist, so definiert man

$$\int_M f(p)dS(p) := \int_U f(\varphi(x))\sqrt{G_\varphi(x)}dx$$

wobei (U, φ) eine beliebige injektive Parameterdarstellung von M ist.

Beispiel (Kurve)**:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist $G_\gamma(t) = |\gamma'(t)|^2$ und damit

$$\int f d\gamma := \int_I f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Beweis: Es gilt $D\gamma = \gamma'(t)$. Damit folgt

$$G_\gamma(t) = D\gamma^T D\gamma = \gamma'^T \gamma' = \langle \gamma', \gamma' \rangle = |\gamma'|^2.$$

□

Beispiel (Graph einer Funktion)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist (U, F) eine reguläre injektive Parameterdarstellung. Für die Gramschedeterminante gilt

$$G_F(x) = (1 + |\nabla f(x)|^2).$$

Beweis: Das kann man (mit etwas Mühe) direkt nachrechnen. Wir lernen zum Ende dieses Abschnittes einen strukturellen Zugang kennen. □

Nach Definition kann man eine Untermannigfaltigkeit immer lokal als Graph d.h. lokal mittels einer regulären injektiven Parameterdarstellung darstellen. Damit kann man dann ein Integral über Untermannigfaltigkeiten durch Zusammensetzen dieser Parameterdarstellungen definieren. Dabei darf man durchaus auch Nullmengen vernachlässigen. In konkreten Fällen ist meist leicht sichtbar, wie man zusammensetzen muss. Daher verzichten wir hier auf eine genaue Diskussion und begnügen uns mit einigen Beispielen.

23.5 Definition (Volumen einer Untermannigfaltigkeit)**:** Das Volumen von M ist definiert als

$$\int_M \mathbb{1} dS(x).$$

Beachte:

- Das Volumen einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit heißt auch Länge.
- Das Volumen einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit heißt auch Fläche.
- Das Volumen einer dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit heißt auch Volumen.

Beispiel (Kreis)**:** Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \longrightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine reguläre injektive Parameterdartellung von $S_R \backslash \{(1, 0)\}$. Dann gilt $D\varphi(t) = R(-\sin t, \cos t)$ und für die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t) = R^2.$$

Damit gilt für das Oberflächenintegral einer Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p)dS(p) = \int_0^{2\pi} Rf(R\cos t, R\sin t)dt.$$

Insbesondere folgt für das Volumen der Kreislinie (Länge der Kreislinie) also

$$Länge = \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R.$$

Beispiel (Sphäre in $\mathbb{R}^3$)**:** Sei $S_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

eine reguläre injektive Parameterdarstellung von $S_R \backslash Nullmenge$. Es gilt

$$D\psi(\varphi, \vartheta) = ...$$

Damit folgt

$$D\psi^T D\psi = R^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

und

$$det(D\psi^T D\psi) = G_\varphi = R^4 \sin^2\vartheta.$$

Damit gilt für das Oberflächenintegral einer Funktion $f : S_R \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p)dS(p) = \int_{(0,2\pi)\times(0,\pi)} f(\psi(\varphi,\vartheta) R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Bemerkung: Es ist kein Zufall, dass man für die Gramschen Determinanten des Kreises und der Sphäre denselben Faktor bekommt, wie in der entsprechenden Substitutionsmatrix. Der Grund liegt darin, dass die Spalten der Ableitungsmatrix der Transformation ein Orthogonalsystem bilden. Damit sind dann die entsprechenden Determianten gerade die Produkte aus den Längen der Spaltenvektoren (Übung) und es gilt

$$\begin{aligned} \text{Verzerrung Volumen} &= \text{Produkt der drei Spaltenlängen} \\ &= \text{Verzerrrung Fläche} \times \text{Verzerrung Radialkomponente} \\ &= \text{Wurzel Gramschedeterminante} \times 1. \end{aligned}$$

23.6 Definition (Äußere Produkt von $a_1, \dots, a_k$)**:** Seien $a_1, \dots, a_{N-1}$ Vektoren in $\mathbb{R}^N$. Sei A_k die (quadratische) Matrix, die aus $A = (a_1, \dots, a_{N-})$ durch Streichen der k-ten Zeile entsteht. Dann heißt

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1} := (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$$

mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A_k$ das äußere Produkt von $a_1, \dots, a_k$.

23.7 Lemma (Eigenschaften äußeres Produkt)**:** Seien $a_1, \dots, a_{N-1}$ Vektoren in $\mathbb{R}^N$, $A = (a_1, \dots, a_N)$ und $\nu := a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt:

(a) $\langle b, \nu \rangle = \det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ für alle $b \in \mathbb{R}^N$.

(b) 1. $\nu \perp a_j$, $j = 1, \dots, N-1$. (Richtung modulo Vorzeichen)

2. $\|\nu\| = \sqrt{\det(a_1, \dots, a_{N-1})^T (a_1, \dots, a_{N-1})}$. (Länge)

3. $\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) \geq 0$. (Vorzeichen)

Sowohl durch (a) als auch durch (b) ist ν eindeutig bestimmt.

Beweis: (a) folgt durch Entwickeln nach der ersten Spalte.

(b) Es folgen (1) und (3) sofort aus (a).

Zu 2. Es gilt

$$(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) = Blockmatrix(\nu^T \nu, A^T A).$$

Damit folgt

$$|\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 = \|\nu\|^2 \det A^T A.$$

Mit (a) ergibt sich

$$\left(\|\nu\|^2\right)^2 \overset{(a)}{=} |\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 = \|\nu\|^2 \det A^T A.$$

Das liefert

$$\|\nu\| = \sqrt{\det A^T A}.$$

Die letzte Aussage ist klar. □

Wir können das nun auf Parametrisierungen von Flächen anwenden.

Anwendung: Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{N-} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine (reguläre) Parametrisierung von $\varphi(U)$ (Hyperfläche). Sei $\nu := \partial_1 \varphi \wedge \dots \wedge \partial_N \varphi$. Dann gilt:

- $\nu \perp \partial_j \varphi$ d.h. ν ist normal zu der Fläche. (vgl. (b), 1. des vorigen Lemma).
- $\|\nu\| = \sqrt{G_\varphi}$ d.h. Länge von ν ist Flächenelement. (vgl. (b), 2. des vorigen Lemma.)

In Worten: Der Vektor ν ist senkrecht auf der Fläche und seine Länge ist gerade das Flächenelement.

Beispiel: Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow R$ stetig diffbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $F(u) = (u, f(u))$ die zugehörige Parameterdarstellung. Dann gilt

$$\partial_1 F(u) \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} = (-1)^N (\partial_1 f(u), \dots, \partial_{N-1} f(u), -1).$$

Insbesondere ist also

$$G_F(u) = 1 + \|\nabla f(u)\|^2.$$

Beweis: Das insbesondere ist klar nach dem vorigen Lemma. Es reicht also die erste Aussage zu beweisen. Berechne DF. Nun gilt nach Definition

$$\nu_j := j - te\ Komponenten\ von\ = partial_1 F(u) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1} = (-1)^{j+1}(DF)_j.$$

Nachrechnen liefert dann die Behauptung. □

23.8 Definition (Normale)**:** Sei M eine Hyperfläche. Eine stetige Funktion $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\nu(x) \in N_x M$ heißt für alle $x \in M$ Normale.

24. Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist ein wesentlicher Satz der höherdimensionalen Analysis. Er kann als eine Verallgemeinerung des HDI auf höhere Dimensionen verstanden werden. Es gibt verschiedene allgemeine Versionen. Wir geben eine „mittelallgemeine“ Version.

Es geht um offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ deren Rand „schön“ ist und ein „klares“ Äußeres besitzt.

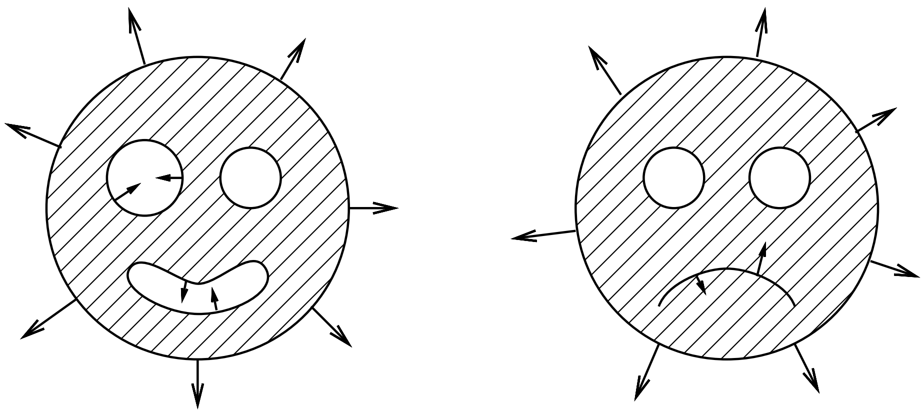


Abbildung 24.1.: Teilmenge mit und ohne „klarem“ Äußeren

24.1 Definition (Glatter Rand)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann hat U einen glatten Rand, wenn der Rand ∂U von U eine Untermannigfaltigkeit ist, dass heißt lokal ein Nullstellengebilde einer regulären stetig differenzierbaren Funktion, und es ein „Außen“ gibt, dass heißt eine stetige Funktion

$$\nu : \partial U \to \mathbb{R}^N$$

mit

- $\nu(x) \in N_x \partial U$
- $\|\nu(x)\| \equiv 1$
- $x + s\nu(x) \notin U$ für alle kleinen $s > 0$ und $x + s\nu(x) \in U$ für alle großen $s < 0$,

für alle $x \in \partial U$.

Die Funktion ν ist dann eindeutig bestimmt und heißt die *äußere Normale* von U.

Bemerkung: Da der Rand die Nullstellenmenge einer reellen Funktion ist, hat der Normalenraum $N_x M$ die Dimension 1. Die Funktion ν ist also durch die ersten beiden Bedingungen bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt. Das Vorzeichen wird durch die letzte Bedingung festgelegt.

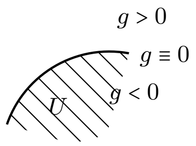
Liegt der Rand als Nullstellenmenge vor, so ist die Berechnung der äußeren Normalen ν nicht schwer:

24.2 Proposition (Äußere Normale)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in \partial U$. Es gelte in einer Umgebung W von p für ein stetig differenzierbares und reguläres $g : W \to \mathbb{R}$, dass

$$W \cap U = \{x : g(x) < 0\},\ W \cap \partial U = \{x : g(x) = 0\}.$$

Dann ist lokal die äußere Normale gegeben durch

$$\nu(x) := \frac{1}{\|\nabla g(x)\|} \nabla g(x).$$



Beweis: Nach Konstruktion ist $\partial U = N(g)$. Damit gilt also (s.o.) $\nabla g(x) \in N_x \partial U$ für alle $x \in \partial U$. Insbesondere ist also $\nu(x) \in N_x \partial U$. Nach Konstruktion ist ν normiert. Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} g(x + s\nu(x)) &= \underbrace{g(x)}_{=0} + s \langle \nabla g(x), \underbrace{\nu(x)}_{=\frac{1}{\|\nabla g(x)\|}\nabla g(x)} \rangle + \text{kleiner Fehler} \\ &= s\|\nabla g(x)\| + \text{kleiner Fehler} \\ &\begin{cases} > 0 : s > 0 \\ < 0 : s < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist gerade die dritte Eigenschaft der äußeren Normalen. □

Notation: Eine Funktion $f : U \cup \partial U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heißt stetig differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung W von $U \cup \partial U$ und eine stetig differenzierbare Fortsetzung von f auf W existiert.

Wir beginnen nun mit einer Vorversion des Satzes von Stokes.

24.3 Lemma (Kleiner Stokes)**:** Seien

$$Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N) \in \mathbb{R}^N$$

offen und nichtleer und

$$Q' := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_{N-1}, b_{N-1})$$

gegeben mit einer stetig differenzierbaren Funktion

$$h : Q' \to (a_N, b_N).$$

Sei außerdem

$$\Omega := \left\{ (x', x_N) \in Q' \times (a_N, b_N) = Q : x_N > h(x') \right\}$$

und die Menge M gegeben durch

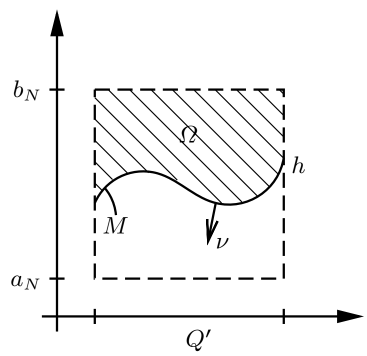
$$M := \text{Graph von } h$$

mit der äußeren Normale ν an $M = \partial\Omega$, dass heißt

$$\nu(x) := \frac{1}{\|(\nabla h(x'), -1)\|} (\nabla h(x'), -1).$$

Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger in Q, dann gilt für jedes $j = 1, \ldots, N$

$$\int_\Omega \partial_j f(x) dx = \int_M f(x) \nu_j(x) dS(x).$$



Beachte: Sei $g(x', x_N) := h(x') - x_N$. Dann gilt

- $M = N(g)$,
- $g < 0$ auf Ω und
- $g > 0$ auf Ω^C.

Beweis: Wir unterscheiden zwei Fälle für den Wert von j.

$j = N$: Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_N f(x)dx &= \int_{Q'} \int_{h(x')}^{b_N} \partial_N f(x', x_N)\, dx_N dx' \\
\text{(HDI)} \qquad &= \int_{Q'} (f(x', b_N) - f(x', h(x')))\, dx' \\
(f \text{ besitzt kompakten Träger}) \qquad &= - \int_{Q'} f(x', h(x'))\, dx' \\
&= \int_{Q'} f(x', h(x')) \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}}_{\nu_N} \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx' \\
&= \int_{Q'} f(x', h(x'))\nu_N(x)\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx' \\
\text{(Definition Oberflächenintegral)} \qquad &= \int_M f(x)\nu_N(x)\, dS(x).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage in diesem Fall.

$j < N$: Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_j f(x)\, dx &= \int_{Q'} \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t)\, dt dy \\
&\overset{(!)}{=} \int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt \right) dy + \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y))\, dy \\
&\overset{(!!)}{=} \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y))\, dy \\
&= \int_{Q'} f(y, h(y)) \frac{\partial_j h(y)}{\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}\, dy \\
\text{(Definition } \nu) \qquad &= \int_{Q'} f(y, h(y))\nu_j(y)\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}\, dy \\
&= \int_M f(x)\nu_j(x)\, dS(x).
\end{aligned}$$

Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen.

Zu (!): Für Funktionen $F:\ y \mapsto F(h(y), y)$ auf Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_{y_j} F(h(y), y) = (\partial_1 F)(h(y), y)\partial_j h(y) + (\partial_{y_j} F)(h(y), y).$$

Betrachtet man nun $F(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} f(y, t)\, dt$ so gilt mit dem HDI

$$(\partial_1 F)(h(y), y) = -f(y, h(y)),$$

sowie

$$(\partial_{y_j} F)(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t)\, dt.$$

Damit folgt (!).

Zu (!!): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t)\, dt \right) dy &= \int_{Q''} \int_{a_j}^{b_j} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y'', y_j, t)\, dt \right) dy_j dy'' \\
\text{(HDI)} \qquad &= \int_{Q''} \left(\int_{h(y'', b_j)}^{b_N} f(y'', b_j, t)\, dt - \int_{h(y'', a_j)}^{b_N} f(y'', a_j, t)\, dt \right) dy'' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

24.4 Theorem (Allgemeiner Satz von Stokes)**:** Sei U eine beschränkte, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit glattem Rand $M = \partial U$ und äußerer Normale ν. Ist $f : U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, dann gilt für $j = 1, \ldots, N$:

$$\int_U \partial_j f(x) dx = \int_{\partial U} f(x)\nu_j(x)\, dS(x)$$

Insbesondere gilt für $N = 1$

$$\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a).$$

Beweis: Es ist $\overline{U} = U \cup \partial U$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Für jedes $x \in \overline{U}$ wählen wir nun einen offenen achsenparallelen Quader Q_x mit

- $Q_x \cap M$ ist als Graph darstellbar, falls $x \in M$ und
- $Q_x \cap M = \varnothing$, falls $x \notin M$.

Dann ist $\{Q_x\}$ eine offene Überdeckung von $\overline{U}$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, gibt es eine endliche $Q_{x_1}, \ldots, Q_{x_N}$ mit

$$\overline{U} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} Q_{x_k}.$$

Setze $Q_k := Q_{x_k}$ und wähle eine dazu untergeordnete Partition der Eins $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = \{\varphi_k\}_{k=1}^n$ so, dass

$$\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq Q_k.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f\, dx &= \int_U \partial_j \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k f \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_U \partial j(\varphi_k f)\, dx \\ (\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq Q_k) \qquad &= \sum_{k=1}^n \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\, dx. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Summanden und zeigen

$$(*) \qquad \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\, dx = \int_M \nu_j(x)(\varphi_k f)\, dS(x)$$

für alle k.

Sei $Q_k \cap M = \varnothing$, dass heißt $Q_k \subseteq U$. Da $Q_k \subset U$ und da $\varphi_k f$ auf dem Rand von Q_k verschwindet gilt mit dem HDI

$$\int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\, dx = \int_{Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\, dx = 0.$$

Ebenso folgt, da $\varphi_k = 0$ auf M, dass

$$\int_M (\varphi_k f) dS(x) = 0.$$

Das zeigt $(*)$ in diesem Fall.

Sei $Q_k \cap M \neq \varnothing$ dass heißt $Q_k \cap M$ ist als Graph darstellbar. Dann folgt aus dem „kleinen Stokes“ und $\operatorname{supp} \varphi_k \subset Q_k$

$$\int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\, dx = \int_{M \cap Q_k} \nu_j(x)(\varphi_k f)\, dS(x) = \int_M \nu_j(x) f \varphi_k(x)\, dS(x).$$

Das zeigt $(*)$ auch in diesem Fall.

Aus $(*)$ und der obigen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f\,dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{U\cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)\,dx \\ (*) \qquad &= \sum_{k=1}^{n} \int_M \nu_j(x)(\varphi_k f)\,dS(x) \\ \text{(Partition der Eins)} \qquad &= \int_M \nu_j(x) f\,dS(x). \end{aligned}$$

Das beweist den Satz. □

Bemerkung: Auch wenn die Menge U keinen glatten Rand hat, gilt unter geeigneten Voraussetzungen immer noch der Satz von Stokes.

25. Die klassischen Integralsätze

Hier lernen wir eine Reihe von Folgerungen aus dem allgemeinen Satz von Stokes des letzten Abschnittes kennen.

Grundlegende Größen der Vektoranalysis

25.1 Definition (Divergenz, Rotation, Laplace)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Ist $F: U \to \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so wird die Funktion

$$U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \partial_j F_j(x)$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes F genannt und mit $\nabla \cdot F$ bzw. $\operatorname{div} F$ bezeichnet.

Für ein zweimal stetig differenzierbares reelles $F: U \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Laplace* von F als die Funktion $\Delta F: U \to \mathbb{R}$ mit

$$\Delta F(x) := \sum_{j=1}^{N} \partial_j^2 F(x).$$

Es gilt

$$\Delta F = \nabla \cdot (\nabla F).$$

Ist $N = 2$ oder $N = 3$ so führen wir noch die *Rotation* des Vektorfeldes F ein durch

$$\operatorname{rot} F(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)$$

falls $N = 2$ und

$$\operatorname{rot} F(x) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_3, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

falls $N = 3$. Man schreibt $\operatorname{rot} F$ sowie $\nabla \times F$.

Beachte: Es handelt sich um zyklische Vertauschungen von $1, 2, 3$ beginnend mit der Koordinate.

Ist $N = 3$, so gilt für alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad}\ f \equiv 0,$$

sowie für alle zweimal stetig differenzierbaren Vektorfelder $F: U \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot}\ F \equiv 0.$$

Beweis: Übung. □

Schließlich erweist sich noch der Begriff des Flusses als nützlich.

25.2 Definition (Fluss)**:** Sei M eine Hyperfläche und $\nu : M \to \mathbb{R}^N$ eine normierte stetige Normale. Ist F eine Vektorfeld in einer Umgebung von M, so nennt man

$$\int_M \langle F, \nu \rangle \, dS(x)$$

den Fluss von F durch M (in Richtung ν).

Die Sätze von Gauß und Green

25.3 Theorem (Satz von Gauß)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei ν die äußere Normale. Sei $F : U \cup \partial U \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} F \, dx = \int_U \sum_{j=1}^N \partial_j F_j \, dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x).$$

Beweis: Das folgt sofort aus dem Satz von Stokes durch Summieren.

Rechenhilfe: Ist ∂U durch die Funktion $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^{N-1} \to \partial U$ parametrisiert, so gilt nach dem oben Diskutiertem mit $n := \partial_1 \psi \wedge \ldots \wedge \partial_{N-1} \psi$, also $\nu = \frac{1}{\|n\|} n$ und $|n| = G_\psi$. Damit folgt

$$\int_{\partial U} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x) = \int_{\partial U} \langle F(x), \frac{1}{\|n\|} n \rangle \, dS(x) = \int_V \langle F(x), n(x) \rangle \, d\nu.$$

Wir geben nun zwei Interpretationen des Satzes von Gauß.

Variante 1 - statische, inkompressible Situation (Quellen vorhanden, aber keine Verdichtung möglich)

Betrachte einen zeitunabhängigen Fluss $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit einer Quellendichte $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Dann gilt im inkompressiblen Fall

$$\text{Nettofluss aus } U = \text{Nettoerzeugnis in } U.$$

Wir rechnen beide Seiten aus:

$$\text{Nettofluss} = \int_{\partial U} \langle F, \nu \rangle \, dS \overset{\text{(Gauß)}}{=} \int_U \nabla \cdot F \, dx$$

und

$$\text{Nettoerzeugnis} = \int_U q(x) \, dx.$$

Gleichsetzen ergibt, da U beliebig,

$$q = \operatorname{div} f.$$

Die Divergenz ist also eine Quellendichte.

Variante 2 - Substanzerhaltung (Keine Quellen vorhanden, aber Verdichtung möglich)

Es fließe eine Substanz im $\mathbb{R}^N$, beschrieben durch den Strom $j = j(x,t)$ und die Dichte $\varrho(x,t)$. Dann ist die Masse m in einer Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ gegeben durch

$$m = m_U(t) = \int_U \varrho(x,t)\,dx.$$

Für die zeitliche Änderung der Masse gilt bei Substanzerhaltung

$$\text{Fluss aus } U = \text{Zeitliche Änderung der Masse in } U.$$

Es gilt

$$\text{Änderung der Masse } = \partial_t m = \int_U \partial_t \varrho\,dx$$

sowie nach Gaußschem Satz

$$\text{Fluss aus } U = \int_{\partial U} \langle j, \nu\rangle\,dS(x) = \int_U \operatorname{div} j\,dx.$$

Gleichsetzen ergibt (da U beliebig)

$$\partial_t \varrho = \operatorname{div} j.$$

Das ist als Kontinuitätsgleichung bekannt.

25.4 Theorem (Greensche Formel)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen mit glattem Rand. Sei ν die äußere Normale. Seien $f, g : U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_U (f(x)\Delta g(x) - \Delta f(x) g(x))\,dx = \int_{\partial U} f(x)\langle \nabla g(x), \nu(x)\rangle - g(x)\langle \nabla f(x), \nu(x)\rangle\,dS(x).$$

Bemerkung: Es ist $\langle \nabla g(x), \nu(x)\rangle$ gerade die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normale. Diese wird oft auch als Normalenableitung von f bezeichnet und als $\partial_\nu f$ geschrieben. Damit lautet dann der Satz

$$\int_U (f\Delta g - \Delta f g)\,dx = \int_{\partial U} f\partial_\nu f - g\partial_\nu f\,dS(x).$$

Beweis: Direkte Rechnung zeigt, dass

$$\nabla \cdot (f(x)\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle + f(x)\Delta g(x)$$

und entsprechend

$$\nabla \cdot (g(x)\nabla f(x)) = \langle \nabla g(x), \nabla f(x)\rangle + g(x)\Delta f(x).$$

Bilden der Differenz und Anwenden des Gaußschen Satzes liefert die Behauptung. □

25.5 Folgerung (Satz von Gauß für Gradientenfelder)**:** Sei die Situation wie im vorigen Satz. Sei außerdem $\varphi : U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_U \Delta\varphi(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle \nabla\varphi(x), \nu(x)\rangle\, dS(x).$$

Beweis: Setze $f \equiv 1$ und $g = \varphi$ im vorigen Satz. □

Interpretation: Sei φ Potential des Kraftfeldes $\nabla\varphi$. Dann ist

$$\int_{\partial U} \langle \nabla\varphi(x), \nu(x)\rangle\, dS(x)$$

der Fluss des Feldes durch den Rand (nach Außen). Interpretiert man $\Delta\varphi$ als Quellendichte, so ist $\int_U \Delta\varphi(x)dx$ die in U erzeugte „Menge an Feld". Die Gleichung sagt also, dass die erzeugte Menge gerade gleich dem Ausfluss ist.

Der Satz von Stokes in der Ebene

Wir betrachten eine Menge, die durch eine Kurve berandet ist.

25.6 Theorem (Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M, der eine reguläre injektive Parametrisierung durch eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ besitzt, sodass U „links" von γ liegt. Ist $F : U \cup M \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt

$$\int_U \operatorname{rot} F\, dx = \int_\gamma F\, d\gamma.$$

Beweis: Wir beginnen mit einer kleinen Vorüberlegung: Ist (ν_1, ν_2) die äußere Normale an M, so ist $(-\nu_2, \nu_1)$ also ein normierter Tangentialvektor, der durch Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht. Da das Gebiet U links von γ liegt, ist dann $(-\nu_2, \nu_1)$ der normalisierte Tangentialvektor in Richtung der Kurve γ. Es gilt also

$$(-\nu_2, \nu_1) = (-\nu_2(\gamma(t)), \nu_1(\gamma(t))) = \frac{1}{|\gamma'(t)|}(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)).$$

Nun zum eigentlichen Schluss: Mit dem Satz von Stokes (oder dem Satz von Gauß) und der Parametrisierung γ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \int_U \operatorname{rot} F\, dx = \int_U (\partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x))\, dx \\
(\tilde F := (F_2, -F_1)) \quad & = \int_U \operatorname{div} \tilde F\, dx \\
(\text{Gauß}) \quad & = \int_M (F_2(x)\nu_1(x) - F_1(x)\nu_2(x))\, dS(x) \\
& = \int_M \langle (F_1, F_2), (-\nu_2, \nu_1)\rangle\, dS(x) \\
(\text{Parametrierung}) \quad & = \int_a^b \langle (F_1, F_2), (-\nu_2, \nu_1)\rangle (\gamma(t)) |\gamma'(t)|\, dt \\
(\text{Vorüberlegung}) \quad & = \int_a^b \left\langle (F_1, F_2)(\gamma(t)), \frac{1}{|\gamma'(t)|}(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \right\rangle |\gamma'(t)|\, dt \\
& = \int_a^b \langle f \circ \gamma, \gamma' \rangle\, dt \\
& = \int_\gamma F\, d\gamma.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

25.7 Folgerung (Flächeninhalt)**:** Seien U und γ wie im Satz. Dann ist die Fläche $F(U)$ von U gleich der Hälfte des Kurvenintegrals über das Vektorfeld $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $k(x,y) = (-y,x)$ über die Kurve γ, dass heißt es gilt

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_\gamma k(x,y)\, d\gamma = \int_a^b \langle (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

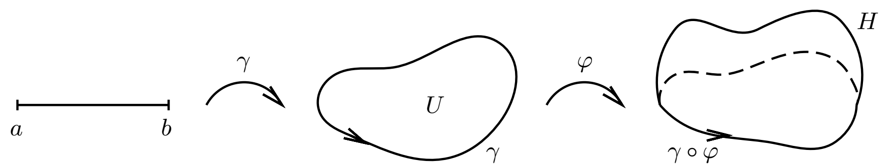
Beweis: Übung. □

Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten folgende Situation: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M, der eine reguläre, injektive Parametrisierung besitzt, die gegeben ist durch eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, sodass U „links" von γ liegt. Sei $\varphi : U \cup M \to \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare, reguläre Parametrisierung mit Bild H (Haube). Dann gilt mit $\varrho := \varphi \circ \gamma$

$$\int_H \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, dS(x) = \int_\varrho F \, d\varrho$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : H \to \mathbb{R}^3$.



Die Aussage kann mit Hilfe einer längeren Rechnung auf den zweidimensionalen Fall zurückgeführt werden. Wir verzichten hier auf Details.

26. Potenzreihen

„Potenzreihen sind schön, weil man alles darf!"

26.1 Definition (Potenzreihe)**:** Sei a_n eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt

$$\sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihe mit Koeffizienten a_n um den Entwicklungspunkt z_0.

Frage: Für welche z konvergiert diese Reihe? Was sind die Eigenschaften der dadurch definierten Funktion?

Erinnerung:

- Für eine reelle Folge x_n gilt

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \text{ größter Hochpunkt der Folge } x_n,$$

dass heißt mit $s := \overline{\lim} x_n$ gilt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gerade $x_n \le s + \varepsilon$ für alle genügend großen n.

- *Wurzelkriterium*: Betrachte $\sum_n b_n$. Dann gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n b_n \text{ absolut konvergent,}$$

beziehungsweise

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n b_n \text{ divergent } (b_n \text{ ist keine Nullfolge}).$$

Anwendung: Sei $\sum \underbrace{a_n (z - z_0)^n}_{=b_n}$ gegeben. Dann ergibt sich

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n||z - z_0|^n} = |z - z_0| \, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Damit gilt also

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} \gtrless 1 \iff |z - z_0| \gtrless \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

26.2 Theorem (Grundlegendes zur Konvergenz von Potenzreihen)**:** Sei $(a_n) \in \mathbb{C}$ und $\rho := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Dann gilt:

- Für $|z - z_0| < \rho$ konvergiert $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ absolut und für $|z - z_0| > \rho$ divergiert $\sum_n a_n(z - z_0)^n$.
- Sei $0 < \rho' < \rho$. Dann konvergiert
$$P_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n$$
auf $B_{\rho'}(z_0)$ gleichmäßig gegen
$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Zeichnung: Zu (a): Kreis: Innererс, Ausseres, auf Rand unklar.

(b) Kreis in Kreis...

Beweis:
- Das folgt gerade aus dem Wurzelkriterium und der Rechnung oben: Mit $b_n := a_n(z - z_0)^n$ gilt
$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} \gtrless 1 \Longleftrightarrow |z - z_0| \gtrless \rho$$
- Es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(\rho')^n < \infty$. Damit folgt also $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|\rho'^n \to 0$ für $N \to \infty$. Damit können wir für alle z mit $|z - z_0| \leq \rho'$ abschätzen und es ergibt sich
$$|(P - P_N)(z)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\rho'^n \to 0$$
unabhängig von z.

□

26.3 Definition (Konvergenzradius)**:** Sei $\sum a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Dann heißt
$$\rho := \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
der *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Beachte: Potenzreihe $\sum a_n(z - z_0)^n$ konvergiert absolut in $U_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \rho\}$.

26.4 Folgerung: Sei $\sum a_n(z{-}z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Potenzradius ρ und $P: U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ und die zugehörige Funktion $P(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$. Dann ist P stetig.

Beweis: Es reicht, die Stetigkeit von P auf $U_{\rho'}(z_0)$ für alle $\rho' < \rho$ zu zeigen. Das folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe in $U'_\rho(z_0)$ □

Beispiele:
- $\sum_{n\geq 0} nz^n$ hat den Konvergenzradius 1(da $\sqrt[n]{n} = 1$), konvergiert für kein z mit $|z| = 1$ (keine Nullfolge).

- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} z^n$ hat den Konvergenzradius 1, konvergiert nicht für $z = 1$ (harmonische Reihe), konvergiert für $z = -1$ (Leibnitzkriterium).
- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} z^n$ hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert für alle z mit $|z| = 1$.
- $\sum_{n\geq 0} n! z^n$ hat den Konvergenzradius 0.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ hat den Konvergenzradius ∞.
- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^n} z^n$ hat den Konvergenzradius ∞.

Potenzreihen verhalten sich „schön“ unter Ableitung.

26.5 Theorem (Ableiten von Potenzreihen)**:** Sei $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Sei $P : U_{\rho_0}(z_0) \to \mathbb{C}$ die assoziierte Funktion. Dann hat auch die formale differenzierte Reihe

$$\sum_{n\geq 1} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

den Konvergenzradius ρ. Es gilt

$$\lim_{\tilde{z}\to z} \frac{P(\tilde{z}) - P(z)}{\tilde{z} - z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$$

für alle $z \in U_\rho(z_0)$.

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)$$
$$Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Aussage zum Konvergenzradius:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)|a_n+1|} &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n+1|} \underbrace{\sqrt[n]{(n+1)}}_{\to 1, n\to\infty} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_n+1|} \\ &= \frac{1}{\rho}\end{aligned}$$

Insbesondere: Für $0 \leq \rho' \leq \rho$ gilt

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n(\rho')^{n-1} \to 0, N \to \infty$$

Nun zur Aussage über die "Ableitung". Ohne Einschränkung ist $z_0 = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{P(\tilde{z}) - P(z)}{\tilde{z} - z} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{\tilde{z}^n - z^n}{\tilde{z} - z} \\ &= \sum_{n\geq 1} a_n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{z^k \tilde{z}^{n-1-k}}_{\to z^{n-1}, \tilde{z}\to z} \right)}_{\to n z^{n-1}, \tilde{z}\to z}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{P(\tilde{z}) - P(z)}{\tilde{z} - z} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} (z^k \tilde{z}^{n-1-k} - z^{n-1}) \right) \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=1}^{n-1} (z^k \tilde{z}^{n-1-k} - z^n) \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n| (\dots)}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (\dots)}_{\text{Term 2}}$$

Term 1:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N} |a_n| \left(\sum_{n=0}^{n-1} \underbrace{\left| z^k \tilde{z}^{n-1-k} - z^n \right|}_{\to 0} \right)}_{\to 0, \tilde{z} \to z, N = \text{const}}$$

Term 2: Für $|z|, |\tilde{z}| \leq \rho' < \rho$ gilt

$$Term2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| 2n (\rho')^{n-1} \to 0, N \to \infty$$

Die Differenz geht damit gegen 0. □

26.6 Folgerung (Ableiten reeller Potenzreihen)**:** Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$. Sei P die zugehörige Funktion. Dann ist

$$h = P \mid_{(x_0 - \rho, x_0 + \rho)} : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$$

beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$h^{(n)}(x_0) = a_n n! \text{ bzw. } a_n = \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Beweis: Es reicht die Aussage zur ersten Ableitung zu beweisen, der Rest folgt aus der vollständigen Induktion. Diese Aussage folgt direkt durch vorigen Satz. □

Potenzreihen verhalten sich „gut“ unter Bildern von Stammfunktionen.

26.7 Theorem (Stammfunktion einer Potenzreihe)**:** Sei $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ und $P : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ die assoziierte Funktion. Dann hat die formal integrierte Potenzreihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

den Konvergenzradius ρ und für die zugehörige Funktion

$$Q : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}, \; Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

gilt

$$\lim_{\overline{z}\to z} \frac{Q(\overline{z}) - Q(z)}{\overline{z} - z} = P(z)$$

für alle $z \in U_\rho(z_0)$. In diesem Sinne ist Q Stammfunktion zu P.

Beweis: Zunächst machen wir eine Aussage zum Konvergenzradius:

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \sqrt[n]{|a_{n-1}|}\, \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$$

$$\to \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{1}{\rho}$$

Nun zur zweiten Aussage: Wende voriges Theorem auf

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$

an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\overline{z}\to z} \frac{Q(\overline{z}) - Q(z)}{\overline{z} - z} &= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{n+1}(n+1)(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n \\ &= P(z). \end{aligned}$$

□

26.8 Folgerung (Stammfunktionen reeller Fall)**:** Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ habe den Konvergenzradius ρ. Sei P eine Stammfunktion zu

$$f = P\big|_{(x_0-\rho, x_0+\rho)}$$

Beweis: Das folgt aus dem vorigen Satz, durch Einschränken auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ □

Wir diskutieren nun einige gängige Potenzreihen.
Exponentialreihe: Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{\exp(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ ist ∞ und es gilt

$$\exp(z) = \sum_{n=0} \frac{\exp(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Beweis: Konvergenzradius $\sqrt[n]{\frac{|\exp(z_0)|}{n!}} = \frac{\overbrace{\sqrt[n]{|\exp(z_0)|}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\to\infty}} \to 0$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{\exp(z_0)}{n!}(z - z_0)^n &= \exp(z_0) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(z - z_0)^n \\ &= \exp(z_0)\exp(z - z_0) \\ &= \exp(z_0 + z - z_0) \\ &= \exp(z) \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich

$$\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$$
$$\cos x = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$$

durch Potenzreihen mit Konvergenzradius ∞ darstellen □

Logarithmusreihe: Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ ist 1.
Für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$f_n(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Tatsächlich gilt Konvergenz auch für $x = 1$.

Bemerkung:

$$x = -1 : \ln(1 + x) = \ln 0 = -\infty = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}^n$$

Beweis: Konvergenzradius: klar
$\ln(1 + x) = \sum$: Für $|x| < 1$ d.h. $x \in (-1, 1)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &\overset{HDI}{=} \int_0^x \frac{1}{t+1} \overset{geom. Reihe}{=} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\right) dt \\
&= \int_0^x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^k dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k
\end{aligned}$$

zum "tatsächlich"
Für $0 \le x \le 1$ gilt für $n \le m$ beliebig.

$$\left|\sum_{k=n}^{m} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \le \frac{|x^n|}{n} \le \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow f_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ konvergieren auf $[0, 1]$ gleichmäßig.
$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ stellt auf ganz $[0, 1]$ eine stetige Funktion dar.
$\overset{ln(1+.) \text{ auf } [0,1] stetig}{\Rightarrow} \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ □

Anwendung:

$$\ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k - 1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots$$

Arcustangensreihe:
Der Konvergenzradius der Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ist 1 und für $x \in (-1,1)$ gilt

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Tatsächlich gilt dies auch für $x = \pm 1$

Beweis: Konvergenzradius: klar

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$$

weiterhin gilt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}\arctan x &\overset{HDI}{=} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\ &\overset{geom.Reihe, q=-t^2}{=} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\right) dt \\ &\overset{vorigesBsp.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{1n+1}\end{aligned}$$

zum "Tatsächlich":
Es gilt $\left|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0$
$\Rightarrow$ gleichmäßige konvergenz von $f_n = sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ auf ganz $[-1,1]$
$\Rightarrow sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ist eine auf ganz $[-1,1]$ eine stetige Funktion.
$\overset{\arctan stetig}{\Rightarrow}$ Reihe stimmt auf ganz $[-1,1]$ mit arctan überein. □

Anwendung: Wegen $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$
Bisherige Betrachtungen zeigen:
Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit konvergenzradius $\rho > 0$, so ist f auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ beliebig oft diffbar und es gilt
$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ d.h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ Ist $f : (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$ beliebig oft diffbar, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

die Taylorreihe von f.

Achtung:
- Der Konvergenzradius der Taylorreihe kann 0 sein.
- Auch wenn die Taylorreihe auf einem offenen Intervall konvergiert, muss sie dort nicht die Funktion darstellen.

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} : x > 0 \\ 0 : x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ beliebig oft diffbar mit $f^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Taylorreihe von $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0$, Konvergenzradius $= 0$
$\Rightarrow$ großer Unterschied von Potenzreihen und Taylorreihen.

Es gilt

- Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, so ist die Potenzreihe die Taylorreihe. $\left(\text{da } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right)$
- Taylorscher Satz: f $(n+1)$mal diffbar

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_n(x)$$

  mit Abschätzung für R_n
- Taylorreihe konvergiert gegen f in x
  $\Leftrightarrow R_n(x) \to 0, n \to \infty$ (für beliebig oft differenzierbares f)

27. Holomorphe Funktionen und Kurvenintegrale

In diesem Abschnitt diskutieren wir Funktionen

$$f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

die (in der naheliegenden Weise) komplex differenzierbar sind. Diese Differenzierbarkeit hat ganz starke Konsequenzen.

27.1 Lemma (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ gegeben und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

(ii) Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + \varphi(z),$$

wobei $\frac{\varphi(z)}{z - z_0} \to 0$ für $z \to z_0$.

In diesem Fall gilt

$$w = \lim_{z \to z_0 z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Beweis: Die Beweisführung ist wie im reellen Fall. □

27.2 Definition (Komplexe Differenzierbarkeit)**:** Sei $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$ gegeben. Dann heißt f in z_0 komplex differenzierbar, wenn eine der Bedingungen des Lemma erfüllt ist.

Dann setzen wir

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

und nennen $f'(z_0)$ die Ableitung von f in z_0.

Wie im reellen Fall kann man außerdem zeigen:

- f ist differenzierbar in z_0. $\Rightarrow$ f ist stetig in z_0.
- f, g sind differenzierbar in z_0. $\Rightarrow$ $f + ag$ ist differenzierbar in z_0 mit $(f + ag)'(z_0) = f'(z_0) + ag'(z_0)$.
- Kettenregel: $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \circ g'(z_0)$
- Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ für $g \neq 0$

Eine Funktion $f = u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man auch als Funktionen

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ v(x+iy) \end{pmatrix}$$

auffassen. Wir wollen nun untersuchen, was komplexe Differenzierbarkeit von f für F bedeutet.

Dazu betrachten wir ein $w := a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Man kann dann die Abbildung ‘"Multiplikation mit w’": $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto wz = ax - by + i(bx + ay)$ definieren, die gerade einer linearen Abbildung entspricht:

$$M_w\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit kann man nun leicht folgendes Lemma zeigen.

27.3 Lemma (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ und die zugehörige reelle Funktion $F : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\} \to \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + iy_0$.

(ii) F ist reell differenzierbar in (x_0, y_0) und $DF(x_0, y_0)$ hat die Form

$$DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: f ist genau dann komplex differenzierbar in z_0, wenn f gut approximierbar ist durch die Abbildung „Multiplikation mit $f'(z_0) = w$“. Das ist genau dann der Fall, wenn F gut approximierbar ist durch eine lineare Abbildung der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Das ist gerade (ii).

Damit sind (i) und (ii) äquivalent. □

Interpretation: Sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $w \neq 0$ und $r := \sqrt{a^2 + b^2}$. Dann kann man die „Multiplikation mit w“ im Komplexen geometrisch interpretieren:

$$\text{Multiplikation mit } w = \underbrace{\text{Multiplikation mit } |w|}_{\text{Streckung}} \cdot \underbrace{\text{Multiplikation mit } \frac{w}{|w|}}_{\text{Drehung}}$$

Das wird besonders deutlich, wenn man die Abbildung im $\mathbb{R}^2$ betrachtet:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \frac{a}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{pmatrix} = \underbrace{r}_{\text{Streckung}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}}$$

Die Ableitungen sind also Drehstreckungen und damit winkeltreu.

Notation: Sei $f = u + iv: U \to \mathbb{C}$ und $F = \begin{pmatrix} u(x+iy) \\ v(x+iy) \end{pmatrix}: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die assoziierte Funktion. Dann schreiben wir

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} v, \qquad v_y = \frac{\partial}{\partial y} v,$$
$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u, \qquad u_y = \frac{\partial}{\partial y} u.$$

27.4 Definition (Holomorphie)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt $f: U \to \mathbb{C}$ *holomorph* auf U, wenn f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist.

Beispiel (Potenzreihen)**:** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist

$$P: U_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \rho\} \to \mathbb{C},\ P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine holomorphe Funktion.

Wir werden sehen, dass jede holomorphe Funktion lokal durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann und damit insbesondere beliebig oft komplex differenzierbar ist. Das ist ganz anders bei reellen Funktionen.

27.5 Theorem (Cauchy-Riemann-Differentialgleichung)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv: U \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist f genau dann holomorph auf U, wenn es reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung

$$u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y$$

erfüllt.

Beweis: Nach obigem Lemma ist die Holomorphie von f äquivalent dazu, dass das zugehörige F reell differenzierbar ist und

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = DF = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

gilt. □

27.6 Folgerung: Sei U offen, zusammenhängend und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f durch seinen Realteil (beziehungsweise Imaginärteil) bis auf eine Konstante bestimmt.

Beweis: Seien f, g holomorph auf U mit gleichem Realteil und $h := f - g$. Dann gilt $\Re h = \Re f - \Re g = 0$. Nach der Cauchy-Riemann-Differentialgleichung gilt dann für $v := \Im h$ $v_x \equiv 0$ und $v_y \equiv 0$. Mit dem Mittelwertsatz ist somit $v \equiv \text{const}$. □

27.7 Folgerung: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, sowie $F: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Liegt der Wertebereich von f auf einer Geraden, so ist f konstant.

Beweis: Übung.

27.8 Folgerung: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv: U \to \mathbb{C}$ holomorph und zweimal stetig, partiell differenzierbar. Dann gilt

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

Beweis: Es ist

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Nun gilt mit der Cauchy-Riemann-Differentialgleichung

$$(u_x)_x = (v_y)_x = v_{yx}, \qquad (u_y)_y = (-v_x)_y = -v_{xy}.$$

Mit dem Satz von Schwarz folgt dann

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Für v kann man analog verfahren. □

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung holomorpher Funktionen sind Kurvenintegrale.

Zunächst wollen wir untersuchen, was das Integral einer komplexen Funktion bedeutet. Dazu sei $h: [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und ihr Real- und Imaginärteil jeweils Riemann-integrierbar. Dann definieren wir

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b (\Re h)(t)\,dt + i \int_a^b (\Im h)(t)\,dt.$$

Seien weiterhin $h(t) = u(t) + iv(t)$ und $H(t) = U(t) + iV(t)$ mit $H'(t) = U'(t) + iV'(t) = u(t) + iv(t) = h(t)$, dann gilt

$$\int_a^b h(t)\,dt = H(b) - H(a).$$

27.9 Definition (Kurvenintegral)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma: [a, b] \to U$ stetig differenzierbar. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt$$

das Kurvenintegral von f entlang γ.

Entsprechend definiert man für ein stückweise stetig differenzierbares γ (dass heißt für $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ist $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ stetig differenzierbar)

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Beachte: Aus der Substitutionsregel folgt die Unabhängigkeit des Integrals von der Art des Durchlaufens des Weges $\gamma([a, b])$. Ist $\tau: [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\tau(c) = a$ und $\tau(d) = b$, so gilt

$$\int_{\gamma \circ \tau} f(z)\, dz = \int_c^d f(\gamma(\tau(s)))\gamma'(\tau(s))\tau'(s)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz$$

27.10 Proposition (Berechnen des Kurvenintegrals bei Kenntnis einer Stammfunktion)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ stetig und $F: U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f. Sei außerdem die Kurve $\gamma: [a, b] \to U$ gegeben. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Beweis: Es gilt

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(z))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Damit folgt durch Integration

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = F \circ \gamma|_a^b.$$

□

27.11 Folgerung (Integral über geschlossene Kurven)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig mit der Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede geschlossene Kurve $\gamma: [a, b] \to U$ (dass heißt $\gamma(b) = \gamma(a)$).

Beweis: Da die Stammfunktion zu f bekannt ist, kann man die obige Proposition anwenden und es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

□

Beispiel: Sei die Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = Re^{it}$ gegeben mit $R > 0$ fest. Dann gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

Beweis: Wir rechnen

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

□

Beispiel (Verallgemeinerung)**:** Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_\gamma (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & : n \neq -1 \\ 2\pi i & : n = -1 \end{cases}.$$

Beweis: Es gilt

$$\int_\gamma (z - z_0)\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n iRe^{it}\,dt = R^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & : n \neq -1 \\ 2\pi i & : n = -1 \end{cases},$$

da die Stammfunktion zu $f(t) = e^{i(n+1)t}$ gerade $F(t) = \frac{1}{n+1} e^{i(n+1)t}$ ist. □

27.12 Proposition (Abschätzung Kurvenintegral)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \text{Länge von } \gamma \cdot \sup_{z \in \text{Bild}(\gamma)} |f(z)| \overset{f stetig}{=} \text{Länge von } \gamma \cdot \max_{z \in \text{Bild}(\gamma)} |f(z)|.$$

Beweis: Wir rechnen

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \right| \\ \text{(Dreiecksungleichung)} \qquad &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)|\,dt \\ &\leq \sup_{z \in \text{Bild}(\gamma)} |f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \\ &= \sup_{z \in \text{Bild}(\gamma)} |f(z)| \cdot \text{Länge von } \gamma. \end{aligned}$$

□

Notation:

- Wir schreiben $\int_{|z-z_0|<R} f(z)\,dz$ für $\int_\gamma f(z)\,dz$ mit $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$.
- Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0, z_1, z_2 \in U$ so, dass ihre Verbindungsstrecken ganz in U liegen. Dann heißt der Weg der linear von z_0, über z_1 und z_2, zurück nach z_0 führt, ein *Dreiecksweg*.

27.13 Theorem (Charakterisierung holomorpher Funktionen)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und die Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist holomorph auf U.

(ii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden Dreiecksweg γ in U, dessen Inneres ganz in U enthalten ist.

(iii) Ist $R > 0$ und $z_0 \in U$ mit $B_R(z_0) \subset U$, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\rho - z_0| = R} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\,d\rho$$

für jedes $z \in U_R(z_0)$ (Cauchy-Integral-Formel).

(iv) Ist $R > 0$ und $z_0 \in U$ mit $B_R(z_0) \subset U$, so gibt es eine Potenzreihe $\sum a_n (z - z_0)^n$ mit dem Konvergenzradius mindestens R, sodass gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ auf } U_R(z_0)$$

(lokal Potenzreihe).

(v) Für jedes $z_0 \in U$, $R > 0$ mit $U_R(z_0) \subset U$ hat f auf $U_R(z_0)$ eine Stammfunktion (lokale Stammfunktion).

Insbesondere ist jede holomorphe Funktion beliebig oft komplex differenzierbar. Weiterhin gilt in (iv)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\rho - z_0| = R} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^n}\,d\rho.$$

Bemerkung:

- (iii) heißt Cauchy-Integral-Formel.
- „Insbesondere“ heißt auch Satz von Goursat.
- (i)⇒(ii) ist eine Version des Cauchy-Integral-Satzes.
- (ii)⇒(i) ist der Satz von Morera.

Beweis: <u>(i)⇒(ii):</u> Sei Δ_0 ein Dreiecksweg in U, dessen Inneres kompakt in U enthalten ist. Sei außerdem

$$C = \int_{\Delta_0} f(z)\,dz.$$

Wir unterteilen Δ_0 durch halbieren der Seiten in 4 kongruente Wege. Dann gilt für eines der entstehenden Dreiecke Δ_1, dass

$$\left| \int_{\Delta_1} f(z)\,dz \right| \geq \frac{1}{4} C.$$

Iterieren liefert eine Folge $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ von Dreieckswegen mit den Eigenschaften

1. Dreieck von $\Delta_n \supset$ Dreieck von Δ_{n+1}.
2. Durchmesser von $\Delta_n = \frac{1}{2^n}$ Durchmesser von Δ_0. (Durchmesser $K := \sup\{|x-y| : x, y \in K\}$)
3. Umfang von $\Delta_n = \frac{1}{2^n}$ Umfang von Δ_0.
4. $\left| \int_{\Delta_n} f(z)\,dz \right| \geq \frac{1}{4^n} C$.

Da die Mittelpunkte nach 1) und 2) eine Cauchy-Folge bilden, ziehen sich die Dreiecke zu einem Punkt $z_0 \in U$ zusammen. In z_0 ist f komplex differenzierbar. Damit ist

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)$$

mit $\left| \frac{\varphi(z)}{z-z_0} \right| \to 0,\ z \to z_0$. Integration nach z liefert dann

$$\int_{\Delta_n} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\Delta_n} f(z_0)\,dz}_{0} + \underbrace{\int_{\Delta_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz}_{0} + \int_{\Delta_n} \varphi(z)\,dz = \int_{\Delta_n} \varphi(z)\,dz.$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n} C &\leq \left| \int_{\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\Delta_n} \varphi(z)\,dz \right| \\
&\leq \text{Länge}\Delta_n \cdot \max\{|\varphi(z)| : z \in \Delta_n\} \\
&= \text{Länge}\Delta_n \cdot \max\left\{ \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|} |z - z_0| : z \in \Delta_n \right\} \\
&\leq \frac{1}{2^n} \text{Länge}\Delta_0 \cdot \text{Durchmesser}\Delta_n \cdot \max\left\{ \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|} : z \in \Delta_n \right\} \\
&= \frac{1}{4^n} \text{Länge}\Delta_0 \cdot \text{Durchmesser}\Delta_0 \cdot \max\left\{ \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|} : z \in \Delta_n \right\}
\end{aligned}$$

Mit 4) und dem Grenzübergang für $z \to z_0$ ergibt sich nun:

$$0 \leq C \leq \text{Länge}\Delta_0 \cdot \text{Durchmesser}\Delta_0 \cdot \underbrace{\max\left\{ \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|} : z \in \Delta_n \right\}}_{\to 0, z \to z_0} \to 0, n \to \infty$$

Also ist die Konstante $C = 0$ und es verschwindet das Integral

$$\int_{\Delta_0} f(z)\,dz = 0.$$

<u>(ii)⇒(iii):</u> Für ein beliebiges $z \in U_r(z_1) \subset U_R(z_0) \subset U$ gilt

$$\int_{|\rho - z_1| = r} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\,d\rho = \int_{|\rho - z_0| = R} \frac{f(\rho)}{\rho - z}\,d\rho.$$

Beweis: Das kann man zeigen, indem man die Kreise durch Polygonzüge approximiert. Es ist also zu zeigen, dass die Integrale über die Polygonzüge gleich sind. Durch Addition von Nullwegen kann man die Differenz der beiden Polygonzüge als Summe von Dreieckswegen schreiben. Nach (ii) sind die Integrale über die Polygonzüge gleich.

Damit folgt für kleines $r > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z_0|=R}\frac{f(\rho)}{\rho-z}d\rho - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z|=r}\frac{f(\rho)}{\rho-z}d\rho - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z|=r}\frac{f(z)}{\rho-z}d\rho$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z_0|=z}\frac{f(\rho)}{\rho-z}d\rho - f(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{|\rho-z|=r}\frac{f(\rho)-f(z)}{\rho-z}d\rho\right|$$

und

$$\begin{aligned}|\cdot| &\le \frac{1}{2\pi}2\pi r\max\left\{\frac{|f(\rho)-f(z)|}{|\rho-z|} : |\rho-z| = r\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi r\frac{1}{r}\max\{|f(\rho)-f(z)| : |\rho-z| = r\}\\ &= \max\{|f(\rho)-f(z)| : |\rho-z| = r\}\\ &\to 0,\ r\to 0,\end{aligned}$$

da f stetig ist.

<u>(iii)⇒(iv):</u> Die Idee besteht darin, $\frac{1}{\rho-z}$ in eine geometrische Reihe zu entwickeln und dann Summe und Integral zu vertauschen. Dazu rechnen wir für ein $z \in U_R(z_0)$

$$\frac{1}{\rho-z} = \frac{1}{\rho-z_0+z_0-z} = \frac{1}{\rho-z_0}\frac{1}{1+\frac{z_0-z}{\rho-z_0}} = \frac{1}{\rho-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{z_0-\rho}} = \frac{1}{\rho-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{z_0-\rho}\right)^n.$$

Diese Reihe konvergiert nun gleichmäßig in ρ. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z|=R}\frac{f(\rho)}{\rho-z}d\rho\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z|=R}f(\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\rho-z)^{n+1}}d\rho\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\rho-z|=R}\frac{f(\rho)}{(\rho-z)^{n+1}}d\rho.\end{aligned}$$

<u>(iv)⇒(v):</u> Betrachtungen im Abschnitt zu Potenzreihen zeigen, dass jede Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius holomorph ist.

<u>(v)⇒(ii):</u> Diese Aussage folgt durch Zerlegen des Dreiecksweges in Dreieckswege auf einer Kugel mit Stammfunktion.

<u>(ii)⇒(v):</u> Sei $U_R(z_0) \subset U$ gegeben. Wähle nun zu jedem $z \in U_R(z_0)$ den Weg γ_z als direkte Verbindung von z_0 nach z. Wir definieren uns eine Funktion $F(z) := \int_{\gamma_z} f(z)\,dz$ und zeigen dann $F' = f$ auf $U_R(z_0)$.

$$\frac{F(\tilde z)-F(z)}{\tilde z - z} = \frac{1}{\tilde z - z}\int_{\gamma_{\tilde z z}} f(\rho)\,d\rho \to f(z)$$

<u>„Insbesondere“:</u> Das folgt, da f lokal als Potenzreihe dargestellt werden kann. Dies wurde in der Aussage über Koeffizienten der Potenzreihe mitbewiesen ((iii)⇒(iv)). ☐

Beachte: Der Beweis (ii)⇒(iii) zeigt im Wesentlichen, dass Integrale über geschlossene Kurven verschwinden, wenn das Innere der Kurve ganz in U enthalten ist.

27.14 Folgerung (Darstellung holomorpher Funktionen als Potenzreihen)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f um jeden Punkt $z_0 \in U$ in eine Potenzreihe entwickelbar, deren Konvergenzradius mindestens so groß ist, wie der Radius des größten offenen Kreises um z_0, der noch ganz in U enthalten ist. Für die Koeffizienten a_n der Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\rho - z_0| = r} \frac{f(\rho)}{|\rho - z_0|^{n+1}} \, d\rho = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

für $U_r(z_0) \in U$.

Insbesondere folgt

$$|a_n| = \frac{\max\{f(\rho) : |\rho - z_0| = r\}}{r^n}$$

für $U_r(z_0) \in U$.

Beweis: Folgt im Wesentlichen beim Beweis von (iii)⇒(iv).

„Insbesondere" folgt im Wesentlichen aus

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\rho - z_0| = r} \frac{f(\rho)}{(\rho - z_0)^n} \, d\rho \right|.$$

□

27.15 Satz (Satz von Lionville)**:** Ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Beweis: Da f auf ganz definiert ist, gibt es eine Potenzreihe $\sum a_n z^n$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Weiterhin folgt mit $M = \sup_z |f(z)| < \infty$, dass $|a_n| \le \frac{M}{r^n}$ für alle $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und es ist $f(z) = a_0$. □

Notation: Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion heißt *ganze* Funktion.

27.16 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)**:** Jedes Polynom von Grad $N \ge 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Insbesondere gilt für ein solches Polynom

$$P(z) = C \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)$$

mit den Nullstellen z_j und $j = 1, \ldots, N$.

Beweis: Angenommen P hat keine Nullstelle. Dann ist $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Weiterhin gilt

$$f(z) \to 0, \ |z| \to \infty,$$

da $P(z) \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Damit ist f eine beschränkte ganze Funktion und nach dem Satz von Lionville ist f konstant. Da aber $f \to 0$ für $|z| \to \infty$ müsste dann aber $f(z) \equiv 0$ sein, was im Widerspruch zur Konstruktion von f steht.

"Insbesondere": Sei z_0 eine Nullstelle. Dann gilt

$$P(z) = P(z) - P(z_0) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k - \sum_{l=0}^{N} a_l z_0^l = \sum_{k=0} a_k (z^k - z_0^k) = \sum_{k=1}^{N} a_k (z^k - z_0^k).$$

Außerdem ist $(z^k - z_0^k) = (z - z_0)(\ldots)\ldots = (z - z_0)Q(z)$ mit einem Polynom Q vom Grad $N-1$. Durch Induktion erhält man nun die Behauptung. □

27.17 Satz (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)**:** Sei $U \subset \{z \in \mathbb{C}: \Im z \geq 0\}$ mit $U \setminus \mathbb{R}$ offen. Sei außerdem $f: U \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $U \setminus \mathbb{R}$ und nehme auf $U \cap \mathbb{R}$ reelle Werte an. Dann ist

$$\tilde{f}: U \cup \bar{U} \to \mathbb{C}, \ \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : z \in U \\ \overline{f(\bar{z})} & : z \in \bar{U} \end{cases}$$

holomorph.

Beweis: $\tilde{f}$ ist stetig, da f auf $U \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte annimmt.

Es genügt also zu zeigen, dass Integrale über Dreieckswege verschwinden. Offenbar is f in $U \setminus \mathbb{R}$ holomorph. Daher verschwinden die Integrale über Dreieckswege in $\{Z: \Im z > 0\}$. Außerdem ist $\tilde{f}$ auf $\bar{U} \setminus \mathbb{R}$ holomorph und es verschwinden auch die Dreieckswege in $\bar{U} \setminus \mathbb{R}$.

Sei nun ein beliebiger Dreiecksweg mit Innerem in $U \cup \bar{U}$ gegeben. Dann kann man ihn in Dreieckswege zerlegen, über die das Kurvenintegral von f verschwindet. Damit folgt die Aussage. □

Nun noch einige Klassen von Beispielen nicht holomorpher Funktionen.

Beispiel: Die Funktion $\tau: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = a + ib \mapsto a - ib$ ist nicht holomorph.

Beweis: Es gilt nicht die Cauchy-Riemann-Differentialgleichung, da $D\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Beispiel: Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $|f|: U \to \mathbb{C}$ nicht konstant, so ist $|f|: U \to \mathbb{C}$ nicht holomorph.

Beweis: $|f|$ nimmt nur reelle Werte an. □

28. Nullstellen holomorpher Funktionen und der Identitätssatz

Wir untersuchen in diesem Abschnitt Nullstellen und das Verhalten holomorpher Funktionen in deren Nähe.

28.1 Definition (Nullstelle)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann heißt $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f für $k \in \mathbb{N}_0$, wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, \; f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Es ist z_0 Nullstelle der Vielfachheit ∞, wenn $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

28.2 Proposition (Verhalten von f bei z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $f'(z_0) \neq 0$. Außerdem sei U_0 eine offene Umgebung um z_0 und V_0 eine offene Umgebung von $f(z_0)$. Dann gibt es eine Funktion $g: V_0 \to U_0$ holomorph mit $f \circ g = \mathrm{id}_{V_0}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{U_0}$.

Notation: Man sagt f ist bei z_0 lokal *biholomorph*.

Beweis: Wir betrachten die zu f gehörende Abbildung F auf $\mathbb{R}^2$. Gilt $f'(z_0) = a + ib \neq 0$, so folgt

$$DF(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Also gilt $\det DF(z_0) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$. Nach dem Satz über Umkehrfunktionen ist F nun lokal invertierbar durch eine stetig differenzierbare Funktion G.

Sei g die zu G gehörige Funktion auf $\mathbb{C}$. Dann ist g die (lokale) Umkehrfunktioon zu f. Weiterhin ist g holomorph:

Ist $w_n = f(z_n)$ und $w = f(z)$ mit $z_n \to z$ und $w_n \to w$. Dann gilt

$$\frac{g(w_n) - g(w)}{w_n - w} = \frac{z_n - z}{f(z_n) - f(z)} \to \frac{1}{f'(z)}.$$

□

28.3 Satz (Bei k-facher Nullstelle hat f holomorphe k-te Wurzel)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f. Dann gibt es eine Umgebung U_0 von z_0 und eine holomorphe Funktion $h: U_0 \to \mathbb{C}$ mit einer einfachen Nullstelle in z_0, sodass $f = h^k$ auf U_0 ist.

Beweis: Da f holomorph ist, kann die Funktion nahe z_0 durch eine Potenzreihe dargestellt werden, dass heißt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dabei verschwinden die ersten k Koeffizienten, sodass gilt

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k g(z).$$

Dabei ist $g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$ und $g(z_0) = a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$.

Die Idee ist nun, dass $h(z) = (z - z_0)\sqrt[k]{g(z)}$ ist. Jedoch ist die k-te Wurzel nicht eindeutig. Wir wählen daher eine k-te Wurzel $v_0 := \sqrt[k]{R}e^{i\frac{\varphi}{k}} \neq 0$ von $g(z_0) = Re^{i\varphi} \neq 0$. Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto zk$ hat nun die Ableitung kz^{k-1} und ist nach der vorigen Proposition (außer bei 0) lokal biholomorph. Daher hat die Abbildung $z \mapsto zk$ lokal eine holomorphe Umkehrfunktion ρ, bei $g(z_0)$ mit $\rho(g(z_0)) = v_0$. Dann hat $h(z) = (z - z_0)\rho \circ g(z)$ die gewünschten Eigenschaften:

- $h^k(z) = (z - z_0)^k \rho^k(g(z)) = (z - z_0)^k g(z) = f(z)$, da $\rho^k = \mathrm{id}$ ist.
- $h(z_0) = 0$
- h ist holomorph und für die Ableitung gilt $h'(z_0) = \rho \circ g(z_0) + (z - z_0)|_{z=z_0}(\dots) = v_0 \neq 0$.

□

28.4 Theorem (Verhalten bei k-facher Nullstelle)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem genügend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε von z_0, die durch f auf $\{w \in \mathbb{C} : |w| < \varepsilon\}$ abgebildet wird, sodass

- jeder Wert w mit $0 < w < \varepsilon$ k-mal angenommen wird,
- der Wert 0 einmal angenommen wird.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 0$ annehmen. Ansonsten wird das Koordinatensystem verschoben. Offenbar hat dann $z \mapsto z^k$ die gewünschten Eigenschaften. Nach dem vorigen Satz können wir $f = h^k$ voraussetzen mit h holomorph, $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$, wobei z_0 eine einfache Nullstelle ist. Dann ist h lokal biholomorph und es folgt die Behauptung. □

Notation: Eine offene zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *Gebiet*.

28.5 Satz (Identitätssatz)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z_n) = 0$ für eine Folge $(z_n) \subset U$ mit dem Häufungspunkt $z_0 \in U$ (dass heißt es existiert eine Teilfolge $z_{n_k} \to z_0$ mit $z_{n_k} \neq z_0$), dann gilt

$$f \equiv 0.$$

Beweis: Wir gehen bei diesem Beweis in zwei Schritten vor.

Behauptung 1: Hat die Nullstellenmenge von f den Häufungspunkt $p \in U$ und ist $U_R(p) \subset U$ für $R > 0$, so gilt $f \equiv 0$ auf $U_R(p)$.

Da f holomorph ist, wird f auf $U_R(p)$ durch eine Potenzreihe $\sum_n a_n(z-p)^n$ dargestellt. Nun kann man eine Induktion über n anwenden, um zu zeigen, dass $a_n = 0$ ist für alle n.

$n = 0$: $a_0 = f(p) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim f(p_n) = 0$

$n \Rightarrow n+1$: Wir rechnen hier

$$f(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-p)^k = (z-p)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-p)^{k-n-1}.$$

Damit erfüllt

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z-p)^{k-n-1}$$

die Gleichung $g(z_n) = 0$ für alle n und ist außerdem stetig. Es ist dann

$$a_{n+1} = g(p) = \lim_{l\to\infty} g(z_{n_l}) = 0 \qquad (z_{n_l} \to p)$$

und die Behauptung 1 ist gezeigt.

Behauptung 2 (Kreiskettenverfahren): Sei $z \in U$ beliebig. Dann gibt es einen Weg γ von z_0 nach $\tilde{z}$ in U.

Sei P das Bild von γ. Wähle dann ein $R > 0$ mit $U_R(w) \subset U$ für jedes $w \in P$. Überdecke das P mit offenen Kugeln $U_{\frac{R}{2}}(z_j)$, $j = 0, \ldots, n$ mit $z_0 = z_0$ und $z_n = \tilde{z}$, sodass gilt $U_R(z) \cap U_R(z_{j+1}) \neq 0$. Unter Umständen muss dabei umsortiert werden.

Induktiv folgt nun aus Behauptung 1, dass $f \equiv 0$ auf $U_R(z_j)$ für alle $j = 0, \ldots, n$. Damit ist $f(z_n) = f(\tilde{(z)}) = 0$. □

28.6 Folgerung (Identitätssatz)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und die Funktionen $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Stimmen f und g auf einer Teilmenge von U überein, die einen Häufungspunkt in U hat, so gilt $f = g$.

Beweis: Sei $h := f - g$. Dann hat h einen Häufungspunkt von Nullstellen in U und es kann der vorige Satz angewendet werden. □

Beachte: Die Folgerung liefert gerade den Satz für $f = f$ und $g = 0$.

28.7 Folgerung (Nullstelle der Vielfachheit ∞)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat f eine Nullstelle der Vielfachheit ∞, so gilt $f \equiv 0$.

Beweis: Wir betrachten f als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

in Umgebung der Nullstelle z_0 der Vielfachheit ∞. Dann gilt $a_n = 0$ für alle n, da $f^{(n)}(z_0) = 0$. Damit folgt $f \equiv 0$ auf $U_R(z_0)$ mit $R > 0$ und jedes $z \in U_R(z_0)$ ist ein Häufungspunkt von Nullstellen. Nach dem Identitätssatz gilt dann global $f \equiv 0$. □

28.8 Theorem (Gebietstreue)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(U)$ ein Gebiet.

Beweis: Es ist U zusammenhängend und f stetig. Damit ist auch $f(U)$ zusammenhängend.

Bleibt daher noch zu zeigen, dass $f(U)$ offen ist. Sei dazu $p \in U$ und $w := f(p)$. Betrachte dann $\tilde{f} := f - w$. Dann ist p eine Nullstelle von $\tilde{f}$. Diese Nullstelle hat eine endliche Vielfachheit, da sonst f konstant wäre. Dann bildet $\tilde{f}$ eine Umgebung von p auf eine Umgebung von 0 ab. Folglich bildet auch f eine Umgebung von p auf eine Umgebung von w ab. □

28.9 Theorem (Maximumsprinzip)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann hat $|f|$ auf U kein Maximum.

Beweis: Angenommen es ist

$$|f(z)| \leq |\underbrace{f(z_M)}_{=:R}|$$

für alle $z \in U$. Dann könnte $f(U)$ keine offene nichtleere Kugel um $f(z_M)$ enthalten. Dies steht aber im Widerspruch zur Gebietstreue. Also kann |f| auf U kein Maximum haben. □

Beachte: Nach dem Satz muss das Maximum von $|f|$ auf jeder kompakten Teilmenge K von U auf dem Rand von K liegen.

29. Singularitäten und Laurentreihen

Sei f holomorph auf $U_R(z_0)$, dann folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

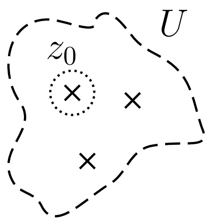
Ist f holomorph auf $U_R(z_0) \backslash \{z_0\}$, dann folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Beachte: Für $n < 0$ hat $(z - z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^{|n|}}$ eine Singularität in z_0.

29.1 Definition (Isolierte Singularität)**:** Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann heißen die isolierten Punkte von $\mathbb{C} \backslash U$ die isolierten Singularitäten von f.

Beachte: Ist also z_0 eine isolierte Singularität von f, so gibt es eine Kugel $U_\varepsilon(z_0)$ sodass z_0 in $U_\varepsilon(z_0)$ der einzige Punkt ist, in dem f nicht definiert ist.



Es gibt drei Typen von isolierten Singularitäten.

29.2 Definition (Die Typen von Singularitäten)**:** Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f.

a) Die Singularität z_0 von f heißt <u>hebbar</u>, wenn f durch geeignete Fortsetzung $f(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion auf $U \cup \{z_0\}$ fortgesetzt werden kann.

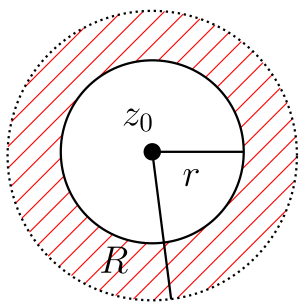
b) Die Singularität z_0 heißt <u>Pol</u>, wenn sie nicht hebbar ist, aber ein $n \geq 1$ existiert sodass
$$(z - z_0)^n f(z)$$
eine hebbare Singularität besitzt. Das bedeutet es gilt
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$
mit einer holomorphrn Funktion g auf $U \cup \{z_0\}$. Das kleinste solche n heißt Ordnung des Poles.

c) Die Singularität z_0 heißt <u>wesentliche Singularität</u>, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist.

Beachte:

- Besitzt f eine hebbare Singularität in z_0, so folgt
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
mit z nahe z_0.
- Besitzt f einen Pol der Ordnung n bei z_0, so gilt
$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$
mit einer holomorphen Funktion g und $g(z_0) \neq 0$.

29.3 Satz (Laurent-Reihenentwicklung)**:** Seien $0 \leq r < R$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Weiterhin möge f auf dem Kreisring
$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$
holomorph sein.



Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

für $0 < r < \varrho < R$ beliebig und die Konvergenz absolut ist.

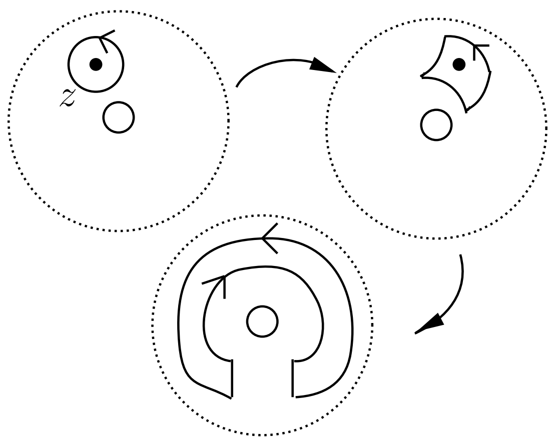
Beweis:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\varrho - z| = \varepsilon} \frac{f(\varrho)}{(\varrho - z)}\, d\varrho \tag{29.1}$$

für $\delta > 0$ genügend klein

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\varrho| = R-\delta} \frac{f(\varrho)}{(\varrho - z)}\, d\varrho - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\varrho| = r+\delta} \frac{f(\varrho)}{(z - \varrho)}\, d\varrho \tag{29.2}$$

Nun geht man weiter wie bei der Entwicklung von f in der Potenzreihe vor.



□

29.4 Folgerung (Cauchy-Abschätzung der Laurentreihe)**:** Sei die Situation wie im vorigen Satz. Ist $|f(z)| \le M$ für alle $|z - z_0| = \varrho$, so gilt

$$|c_n| \le \frac{M}{\varrho^n}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$

Beweis: Nach dem vorigen Satz gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

woraus folgt

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} 2\pi\varrho \frac{M}{\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n}.$$

□

Das können wir nun auf die Singularitäten anwenden.

29.5 Satz (Riemanscher Hebbarkeitssatz)**:** Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f, dann gilt

$$z_0 \text{ hebbar } \Leftrightarrow f \text{ bei } z_0 \text{ beschränkt.}$$

Beweis: $\underline{\Rightarrow:}$ Das ist klar, da wir f zu holomorpher, also stetiger, Funktion fortsetzen können.

$\underline{\Leftarrow:}$ Sei f auf $U_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ durch M beschränkt. mit der obigen Folgerung folgt

$$|c_n| \le \frac{M}{\varrho^n}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $0 < \varrho < r$. Für $n < 0$ folgt

$$|c_n| \le M\varrho^{|n|} \to 0, \quad \varrho \to 0$$

für alle $0 < \varrho < r$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad c_n = 0 \text{ für alle } n < 0\\
&\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n (z - z_0)^n\\
&\Rightarrow \quad z_0 \text{ hebbar}
\end{aligned}$$

□

29.6 Satz (Satz von Casorali/Weierstraß)**:** Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f, dann gilt

z_0 wesentliche Singularität $\Leftrightarrow f(U_r(z_0)\backslash\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ für alle genügend kleinen $r > 0$.

Das bedeutet

$$\forall \omega \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in U_r(z_0)\backslash\{z_0\} : \ |f(z) - \omega| < \varepsilon.$$

Beweis: $\underline{\Leftarrow:}$ Es ist zu zeigen, dass z_0 weder hebbar noch ein Pol ist.

<u>z_0 ist kein Pol:</u> Wäre z_0 ein Pol, so gälte

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$. Es folgt

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^n} \to \infty, \quad z \to z_0$$

und damit, dass $f(U_r(z_0)\backslash\{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist.

<u>z_0 nicht hebbar:</u> Wäre z_0 hebbar, so müsste nach dem Riemanschen Hebbarkeitssatz f bei z_0 beschränkt sein, was ein Widerspruch ist.

$\Rightarrow$: Es ist zu zeigen, dass $f(U_r(z_0)\backslash\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. Dazu nehmen wir an es wäre nicht so. Dann existieren ein $\omega \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ mit $|f(z) - \omega| \geq \varepsilon$ für alle $z \in U_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Daraus folgt

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \omega}$$

ist holomorph auf $U_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ und beschränkt. Somit kann g zu einer holomorphen Funktion h auf $U_r(z_0)$ fortgesetzt werden (Riemanscher Hebbarkeitssatz). daraus folgt $f(z) = \frac{1}{hz)} + \omega$ auf $U_r(z_0)\backslash\{z_0\}$. Falls $h(z_0)\neg 0$ so ist z_0 eine hebbare Singularität. Falls $h(z_0) = 0$, also $h(z) = (z - z_0)^k h_0(z)$ mit $h_0(z_0) \neq 0$, so hat f bei z_0 einen Pol. In beiden Fällen folgt ein Widerspruch, da f bei z_0 eine wesentliche Singularität besitzt.

□

29.7 Satz (Charakterisierung der Pole)**:** Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f, dann gilt

$$z_0 \text{ ist ein Pol} \Leftrightarrow |f(z)| \to \infty,\ z \to z_0.$$

Beweis: $\Rightarrow$: Da

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

mit einer holomorphen Funktion g, $g(z_0) \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$|f(z)| = |g(z)| \frac{1}{|z - z_0|^n} \to \infty, \quad z \to z_0;$$

wegen $|g(z_0)| \to \infty$, $z \to z_0$.

$\Leftarrow$: Gilt

$$|f(z)| \to \infty, \quad z \to z_0$$

so ist f weder beschränkt noch können die Bilder punktierter (kleiner) Kreise dicht sein. Aus diesem Grund ist z_0 weder eine hebbare noch eine wesentliche Singularität.

□

30. Residuen

30.1 Definition (Residuen)**:** Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f. Dann heißt der (-1) erste Koeffizient der Laurentreihe

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\, dz$$

das Residuum von f in z_0 und wird mit $Res(f, z_0)$ bezeichnet.

Beachte: • Das Residuum kann auf zwei Arten gedeutet werden: als -1-Koeffizient der Laurentreihe oder als Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\, dz.$$

• Ist f bei z_0 holomorph, so gilt

$$0 = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\, dz.$$

30.2 Proposition (Berechnung des Residuums bei Polstellen)**:** Sei z_0 ein Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ der holomorphen Funktion f. Dann gilt

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} \left((z-z_0)^p f(z)\right)^{(p-1)} && (30.1) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{(p-1)}}{dz^{(p-1)}} \left((z-z_0)^p f(z)\right)|_{z=z_0} && (30.2) \end{aligned}$$

Beweis: Die Laurentreihe von f bei z_0 lautet

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z - z_0^n)$$

für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, mit $\varepsilon > 0$ geeignet. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-1)!} \left((z-z_0)^p f(z)\right)^{(p-1)} &= \frac{1}{(p-1)!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{n-p} (z-z_0)^n \right)^{(p-1)} && (30.3) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{n=p-1}^{\infty} c_{n-p} \underbrace{n(n-1)\ldots(n-p+2)}_{=(p-1)! \text{ für } n=p-1} (z-z_0)^{n-p+1} && (30.4) \\ &\xrightarrow{z \to z_0} \frac{1}{(p-1)!} c_{-1} (p-1)! = c_{-1} && (30.5) \end{aligned}$$

□

30.3 Folgerung (Residuen bei einfachen Nullstellen im Nenner)**:** Sind g, h holomorphe Funktionen bei z_0 und es habe h eine einfache Nullstelle bezüglich z_0, so gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Beweis: $f = \frac{g}{h}$ hat einen Pol der Ordnung 1 bei z_0

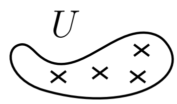
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{0!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^1 \frac{g(z)}{h(z)} \right)^{(0)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} \cdot g(z) \\
&= \lim_{z \to z_0} \underbrace{\frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}}_{\to \frac{1}{h'(z_0)}} \cdot \underbrace{g(z)}_{\to g(z_0)} \\
&= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}
\end{aligned}$$

□

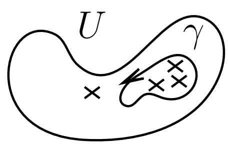
Beispiel: Sei f holomorph bei z_0. Dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{z - z_0}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{1} = f(z_0) \left(= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z - z_0| = \varrho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right).$$

30.4 Satz (Residuensatz)**:** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten $\{z_j, j \in J\}$.



Sei γ eine geschlossene, doppelpunktfreie und positiv orientierte Kurve in $U \setminus \{z_j : j \in J\}$, deren Inneres θ ganz in U liegt.



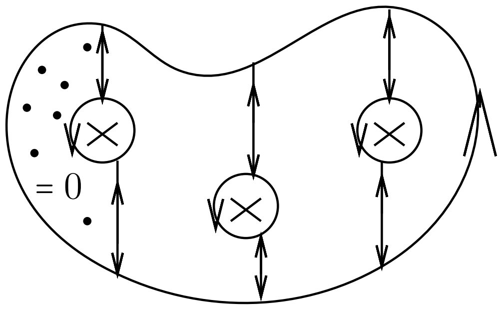
Dann liegen in θ endlich viele isolierte Singularitäten und es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j\in\theta} Res(f, z_j)$$

Beweis: Die isolierten Singularitäten einer holomorphen Funktion können sich nicht im Inneren von U häufen. Wäre z_0 ein solcher Häufungspunkt, so gäbe es zwei Möglichkeiten

- f holomorph bei $z_0 \Rightarrow f$ ist eine Potenzreihe nahe $z_0 \Rightarrow$ es gibt keine Singularitäten bei z_0.
- f hat Singularitäten bei z_0, dann wäre z_0 aber nicht isoliert, was wiederum ein Widerspruch ist.

Deshalb liegen in θ nur endlich viele Singularitäten. Weiterhin kann γ auf eine Summe kleiner Kreise um die $z_j \in \theta$ zurückgeführt werden.



Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{z_j\in\theta} \int_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\,dz \\ &= 2\pi i \sum_{z_j\in\theta} \mathrm{Res}(f, z_j)\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Betrachtet man Kurven, die die einzelnen z_j mehrfach, nämlich $n(z_j)$ mal umlaufen, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z_j\in\theta} n(z_j)\,\mathrm{Res}(f, z_j).$$

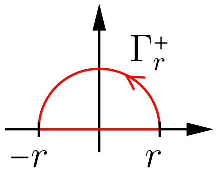
Beispiel: Sei f holomorph auf U und $z_0 \in U$:

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{f}{z-z_0}, z_0\right) = 2\pi i f(z_0).$$

Das alles kann zur Berechnung reeller Integrale verwendet werden.

30.5 Satz: a) Sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : \Im z > -\varepsilon\}$ bis auf isolierte Singularitäten, die nicht auf $\mathbb{R}$ liegen. Weiterhin gebe es auf $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ nur endlich viele Singularitäten. Gilt

$$\int_{\Gamma_r^+} f(z)\, dz \to 0, \quad r \to \infty$$



für den Halbkreisbogen Γ_r^+ von $-r$ nach r in der oberen Halbebene, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

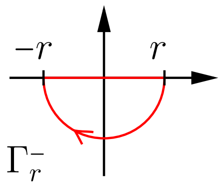
b) Entsprechend gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\Im z_j < 0} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

falls

$$\int_{\Gamma_r^-} f(z)\, dz \to 0, \quad r \to \infty$$

für den Halbkreisbogen Γ_r^- in der unteren Halbebene von r bis $-r$, wenn f die analogen Bedingungen zu a) erfüllt.



Beachte: Gilt

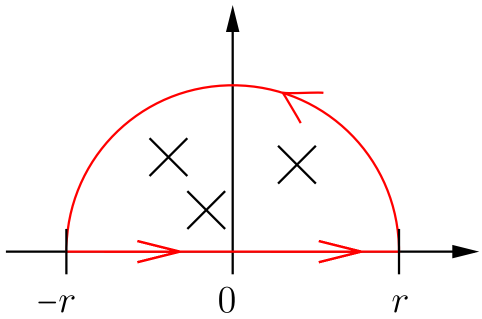
$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{\delta+1}}$$

für ein $\delta > 0$ und alle großen z, so verschwindet das Integral über Γ_r^+ bzw.Γ_r^- für $r \to \infty$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_r^+} f(z)\, dz \right| &\leq \pi r \cdot \sup_{z \in \Gamma_r^\pm} |f(z)| \\ &\leq \pi r \frac{c}{r^{\delta+1}} \\ &= \frac{const.}{r^\delta} \to 0, \quad r \to \infty \end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes benutzen wir folgende Idee



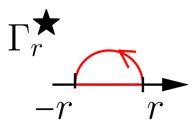
mit Ausführung des Grenzüberganges $r \to \infty$.

a)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx \\
(\Gamma_r^{\bigstar}) \qquad &= \lim_{r\to\infty} \left(\int_{\Gamma_r^{\bigstar}} f(z)\,dz - \underbrace{\int_{\Gamma_r^{+}} f(z)\,dz}_{\to 0} \right) \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r^{\bigstar}} f(z)\,dz \\
(\text{Resudiensatz}) \qquad &= \lim_{r\to\infty} 2\pi i \sum_{z_j \in \text{Inneres von } \Gamma_r^{\bigstar}}^{r} \operatorname{Res}(f, z_j) \\
&= 2\pi \sum_{\Im z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j)
\end{aligned}$$

b) Analog!

Dabei bedeutet $\Gamma_r^{\bigstar}$:



□

Beispiel:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Beweis:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

hat Pole erster Ordnung bei $\pm i$.

·) Der Term verschwindet wie $\frac{1}{|z|^2}$ für große z, weshalb die Integrale über die Halbkreisbögen $\Gamma_r^\pm$ verschwinden (für $r \to \infty$).

·) Berechnung der Residuen:

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

Äquivalent ergibt sich

$$Res(f,-i) = \ldots = \frac{-1}{2i}.$$

Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \begin{cases} +2\pi i \sum_{\Im z_j > 0} Res(f,z_j) = \pi \\ -2\pi i \sum_{\Im z_i > 0} Res(f,z_i) = \pi \end{cases}.$$

□

Beispiel:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e} \in \mathbb{R}!$$

Beweis:

$$\frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$$

hat Pole der Ordnung 1 bei $\pm i$.

·) Es gilt

$$\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| = \frac{e^{-\Im z}}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z^2|}$$

für große z mit $\Im z > 0$.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_r^+} \to 0, \quad r \to \infty$$

wobei aber $\int_{\Gamma_r^-}$ nicht gegen Null konvergieren muss. Aus diesem Grund berechnen wir nur die Residuen von z_j mit $\Im z_j > 0$.

·)

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2ie}$$

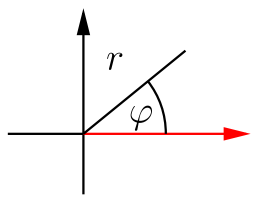
Damit folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \sum_{\Im z > 0} Res(f,z_j) = 2\pi i \frac{1}{2ie} = \frac{\pi}{e}.$$

□

Integrale über positive reelle Halbachsen

Auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$



definiert man

$$\ln : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}, \quad \ln z = \ln r + i\varphi$$

wobei $z = r^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ sind. Dann ist ln holomorph, da es die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist.

$$\exp(\ln(z)) = \exp(\ln(r) + i\varphi) = \exp(\ln(r)) \cdot \exp(i\varphi) = r^{i\varphi} = z$$

Damit definiert nun auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^+$ für $p \in \mathbb{R}^+$ die Potenz z^p durch

$$z^p = e^{p \ln z}$$

was uns den bekannten Regeln entspricht.

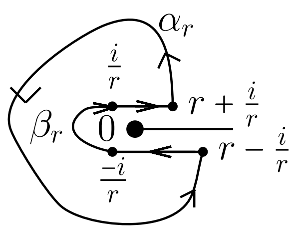
30.6 Satz (Integrale über positive Halbachsen)**:** Sei $0 < \lambda < 1$ und R holomorph, bis auf endlich viele Singularitäten, und ohne Pole auf $\mathbb{R}_0^+$. Gilt

$$|R(z) \cdot z^2| \to 0, \quad |z| \to \infty,$$

so folgt

$$\int_0^\infty x^\lambda R(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\lambda\pi i}} \sum_j \operatorname{Res}(z^\lambda R(z), z_j).$$

Beweis: Wir betrachten eine geschlossene Kurve aus 4 Stücken.



- ·) von $\frac{i}{r}$ nach $\frac{i}{r} + r$ ("Strecke")
- ·) Kreisbogen α_r um 0 von $\frac{i}{r} + r$ nach $r - \frac{i}{r}$

·) von $r - \frac{i}{r}$ nach $\frac{-i}{r}$ ("Strecke")

·) Kreisbogen β_r von $\frac{-i}{r}$ nach $\frac{i}{r}$

Mit dem Inneren Θ_r der Kurve gilt nach dem Resudiensatz

$$\left(\int_{\frac{i}{r}}^{\frac{i}{r}+r} + \int_{\alpha_r} + \int_{r-\frac{i}{r}}^{\frac{-i}{r}} + \int_{\beta_r} \right) z^\lambda R(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \Theta_r} Res(f, z_j).$$

Es gilt im einzelnen

- $\int_{\frac{i}{r}}^{\frac{i}{r}+r} z^\lambda R(z)\, dz \to \int_0^\infty x^\lambda R(x)\, dx$
- $\left| \int_{\alpha_r} z^\lambda R(z)\, dz \right| \leq |\alpha_r| \cdot \max_{z \in \alpha_r} \left| z^\lambda R(z) \right| = 2\pi \left| r + \frac{i}{r} \right| \max \left| |z|^\lambda R(z) \right| \to 0, \quad |z| \to \infty \; da \; |z^2| \cdot |R(z)| \to 0$
- $\int_{r-\frac{i}{r}}^{\frac{-i}{r}} z^\lambda R(z)\, dz \to \int_\infty^0 e^{\lambda(\ln x + 2\pi i)} R(x)\, dx = -e^{2\pi i} \int_0^\infty x^\lambda R(x)\, dx$
- $\left| \int_{\beta_r} z^\lambda R(z)\, dz \right| \to 0, \; da \; |\beta_r| = 2\pi \frac{1}{r} \to 0, \quad r \to \infty.$

Damit ergibt sich insgesamt mit dem Grenzübergang $r \to \infty$,

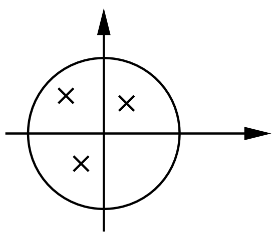
$$2\pi i \sum_{z_j} Res(z^\lambda R(z), z_j) = 1 \cdot \int_0^\infty x^\lambda R(x)\, dx - e^{2\pi i} \int_0^\infty x^\lambda R(x)\, dx,$$

woraus wiederum die Behauptung folgt. □

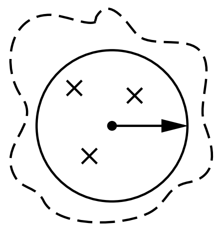
Integrale über einem Intervall

30.7 Satz: Sei $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen und $R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi]$ definiert. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta = 2\pi i \sum_{|z_j|<1} Res\left(\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{zi}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right); z_j \right)$$



Beweis: Sei f holomrph, bis auf isolierte Singularitäten, in einer Umgebung von $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq i\}$ und ohne Singularitäten auf $\{z : |z| = 1\}$.



Nach dem Residuensatz folgt

$$2\pi i \sum_{|a|<1} Res(f,a) = \int_{|z|=1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) i e^{i\vartheta}\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) i(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,d\vartheta,$$

mit

$$R(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = f(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) i(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und ($|z| = 1$)

$$\begin{aligned} \cos &= \frac{1}{2}\left(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ \sin &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Teil III.

Analysis 3

31. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei A eine $m \times m$-Matrix (über $\mathbb{C}$). Wir suchen Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ mit

$$x'(t) = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{C}^m$$

Ein solches x ist gegeben durch $x(t) = \exp((t - t_0)A)x_0$.

Erinnerung: Die Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist definiert durch:

$$\|A\| = \sup\{|Ax| : |x| \le 1\}$$

Dann gilt $|Ax| \le \|A\||x|$ für alle x. Damit gilt auch $\|A^n\| \le \|A\|^n$. Weiterhin ist $M^{m\times m}(\mathbb{C})$ ein vollständiger metrische Raum mit $d(A,B) = \|A - B\|$. Es gilt $A_n \to A \Leftrightarrow A_n(i,j) \to A(i,j),\ i,j = 1,\dots,m$

31.1 Proposition (Matrixexponentialfunktion)**:** Die Reihe $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{n!}A^n$ konvergiert absolut für jedes $A \in M^{m\times m}(\mathbb{C})$ (d. h. $\sum \frac{1}{n!}\|A^n\|$ konvergiert). Für

$$\exp : M^{m\times m}(\mathbb{C}) \to M^{m\times m}(\mathbb{C}),\ A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

gilt

- exp ist stetig
- $\exp(0) = 1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
- $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ falls $AB = BA$

Beweis: Das folgt wie für $\exp(z) = \sum_{n\ge 0} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. □

31.2 Satz (Halbgruppe)**:** Sei $A \in Mm \times m\ (\mathbb{C})$ und $\exp_A : \mathbb{R} \to M^{m\times m}(\mathbb{C})$, $\exp_A(t) = \exp(tA)$. Dann gilt:

1. $\exp_A(0) = 1$

2. $\exp_A(t+s) = \exp_A(t) + \exp_A(s)$
3. $\exp_A'(t) = \lim_{s\to t} \frac{\exp_A(s)-\exp_A(t)}{s-t} = A\exp_A(t) = \exp_A(t)A$ (vgl. Ableitung von e^{at})

Beweis: 1. Das folgt direkt aus der Proposition.

2. Das folgt direkt aus der Proposition.
3. $$\lim_{t\to s} \frac{\exp_A(t) - \exp_A(s)}{t-s} = \lim_{t\to s}\left(\frac{\exp_A(t-s) - \exp_A(0)}{t-s}\right)\exp_A(s)$$

   Es reicht zu zeigen, dass $\frac{\exp_A(t)-\exp_A(0)}{t} \to A,\ t\to 0$.

   Wir rechnen

   $$\begin{aligned}\frac{1}{t}(\exp_A(t) - \exp_A(0)) &= \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1}\frac{t^n A^n}{n!}\\ &= A + t\sum_{n\geq 2}\frac{t^{n-2}A^n}{n!}\\ &= A + t\phi(t) \to A,\ t\to 0\end{aligned}$$

   mit $|\phi(t)| \leq \sum_{n\geq 2}\frac{\|t^{n-2}A^n\|}{n!} \leq \sum_{n\geq 2}\frac{\|A^n\|}{n!} \leq \exp(\|A\|)$, da $t\leq 1$.

□

31.3 Folgerung (Lösung lineare Differentialgleichung)**:** Die Differentialgleichung

$$x' = Ax,\ x(t_0) = x_0$$

hat auf $\mathbb{R}$ die Lösung

$$x : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^m,\ x(t) = \exp_A(t-t_0)x_0.$$

Jede weitere Lösung stimmt mit x überein.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $t_0 = 0$

Lösung: $x(0) = \exp_A(0)x_0 = x_0$
$x'(t) = A\exp_A(t)x_0 = Ax(t)$ (nach 3. im vorigen Satz)

Eindeutigkeit: Sei y eine weitere Lösung. Betrachte $z(t) = \exp_A(-t)y(t) = e^{-tA}Ay(t)$
$\Rightarrow z'(t) = e^{-tA}(-A)y(t) + e^{-tA}Ay(t) = 0$ für alle $t\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow z \equiv \text{const.} = z(0) = x_0 \Rightarrow y(t) = e^{tA}z(t) = e^{tA}x_0 = x(t)$ □

Bemerkung: Die j-te Spalte von $\exp_A(t)$ erfüllt das Anfangswertproblem $x' = Ax,\ x(0) = e_j$, denn die ist durch $\exp_A(t)e_j$ gegeben.

Nachdem wir nun die Lösung für die lineare Differentialgleichung gefunden haben, wollen wir die Matrix A näher untersuchen.

31.4 Proposition (Charakterisierung der Matrix A)**:** Gilt $A = UBU^{-1}$, so folgt

$$\exp(A) = U\exp(B)U^{-1}.$$

Insbesondere gilt also $\exp_A(t) = U\exp_B(t)U^{-1}$.

Beweis: Wir nutzen die Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$$\exp(A) = \sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(UBU^{-1})^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} U\frac{B^n}{n!}U^{-1} = U\left(\sum_{n\geq 0}\frac{B^n}{n!}\right)U^{-1} = U\exp(B)U^{-1}$$

„Insbesondere“: $tA = U(tB)U^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = U\exp(tB)U^{-1}$ □

31.5 Folgerung (Berechne e^{tA} für diagonalisierbare A)**:** Ist A diagonalisierbar, d. h. gilt $A = UDU^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix}$, so folgt:

$$\exp_A(t) = U\begin{pmatrix} \exp(td_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(td_m) \end{pmatrix}U^{-1}$$

Beweis: $\exp_A(t) = U\left(\sum_{n\geq 0}\frac{t^nD^n}{n!}\right)U^{-1} = U\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\begin{pmatrix} t^nd_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t^nd_m^n \end{pmatrix}U^{-1}$ □

Beachte: Ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt $\exp_A(t)v = \exp(t\lambda)v$.

Beweis: $\exp_A(t)v = \sum_{n\geq 0}\frac{t^nA^n}{n!}v = \sum_{n\geq 0}\frac{t^n\lambda^n}{n!}v = \exp(t\lambda)v$ □

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar. Aber man kann jede (quadratische) Matrix in Jordanblöcke zerlegen.

31.6 Definition (Jordanblock)**:** Eine Matrix der Form

$$J = J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}$$

heißt Jordanblock (Jordankästchen).

Erinnerung: Jede quadratische Matrix A kann zerlegt werden als

$$A = U \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} U^{-1}$$

mit invertierbarem U und Jordanblöcken $J_1, \dots, J_k$. Dabei sind die Diagonalelemente der Jordanblöcke gerade die Eigenwerte von A.

Damit folgt also nach der Proposition

$$\exp_A(t) = U \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_k) \end{pmatrix} U^{-1}$$

Die Berechnung von $\exp_A(t)$ reduziert sich auf die Berechnung von $\exp_J(t)$.

31.7 Proposition (Exponentialfunktion eines Jordanblocks)**:** Ist $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in$ $M^{m\times m}(\mathbb{C})$ ein Jordanblock, so gilt

$$\exp(tJ) = \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & 1 & t & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die rechte Seite $X(t)$ die Differentialgleichung

$$X'(t) = JX(t), \ X(0) = 1$$

erfüllt. Das folgt durch direkte Rechnung.

(Siehe Übung für einen alternativen Beweis.) □

Ist A eine reelle $m\times m$-Matrix, so kann man A durch eine invertierbare Matrix U in reelle Jordanblöcke der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \text{ reelle Eigenwerte}$$

beziehungsweise

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} R & I_2 & & 0 \\ & R & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & R \end{pmatrix}$$

mit $R = \begin{pmatrix} \Re\lambda & \Im\lambda \\ -\Im\lambda & \Re\lambda \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Eigenwerte von A und $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ überführen.

Beachte: Ist $p(\lambda)$ charakteristisches Polynom von A, so hat p reelle Koeffizienten. Insbesondere folgt $p(\overline{\lambda} = \overline{p(\lambda)} = 0$ für den Eigenwert λ. Also ist dann auch $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert.

31.8 Proposition (exp von reellen Jordanblöcken)**:** Ist $\tilde{J} = \begin{pmatrix} R & I_2 & & 0 \\ & R & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & R \end{pmatrix}$ ein reeller Jordanblock, so gilt

$$\exp_{\tilde{J}}(t) = \begin{pmatrix} \exp(tR) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tR) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & tI_2 & \frac{t^2}{2} I_2 & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} I_2 \\ & I_2 & tI_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & tI_2 \\ 0 & & & & I_2 \end{pmatrix}$$

mit $\exp(tR) = \exp(t\alpha) \begin{pmatrix} \cos(t\beta & \sin(t\beta) \\ -\sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix}$ für $R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Beweis: $A = \tilde{R} + \tilde{D}$ mit $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R \end{pmatrix}$, $\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R}\tilde{D} = \tilde{D}\tilde{R}$. Damit folgt

$$\exp(tA) = \exp(t\tilde{R}) \exp(t\tilde{D})$$

Berechnen von $\exp(t\tilde{R})$ und $\exp(t\tilde{D})$ kann durch Überprüfen der Gültigkeit der entsprechenden Differentialgleichungen erfolgen. □

31.9 Verfahren (zur Lösung von $x' = Ax$)**:**

1. Zerlege A in Jordanblöcke (Spezialfall: diagonalisiere A)

$$A = U \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} U^{-1}$$

2. Verwende obige Formeln zur Berechnung von $\exp(tJ)$.

3. Zusammensetzung:

$$\exp(tA) = U \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(tJ_k) \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Noch etwas zur Deutung von $x' = Ax$. Die rechte Seite $x \mapsto Ax$ liefert ein Vektorfeld in $\mathbb{R}^m$ (bzw. $\mathbb{C}^m$).

Eine Lösung $x(t)$ ist dann eine Kurve, deren Tangentialvektor $x'(t)$ mit dem Vektor $Ax(t)$ des Feldes an der Stelle $x(t)$ übereinstimmt.

Eine Lösung $x(t)$ heißt auch *Trajektorie* und ihr Bild heißt auch *Orbit*. Oft kann man durch Zeichnen einiger Orbits schon einen guten Einblick in das Verhalten der Differentialgleichung bekommen.

Ein ν mit $A\nu = 0$ liefert die (eindeutige) Lösung $x(t) \equiv \nu$. Ein solches ν heißt *Fixpunkt* der Differentialgleichung.

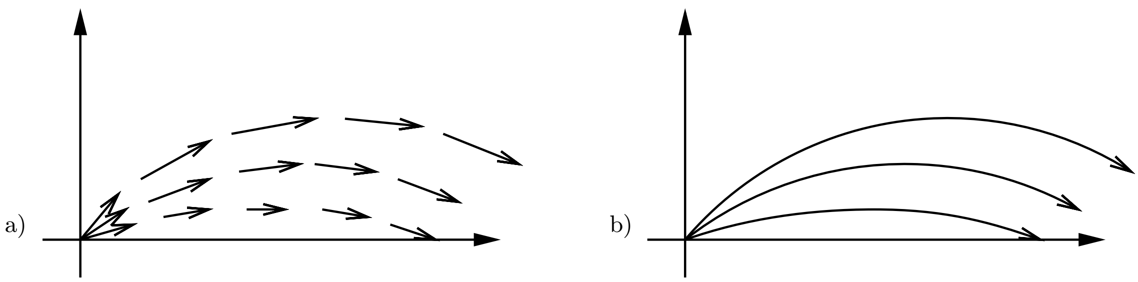


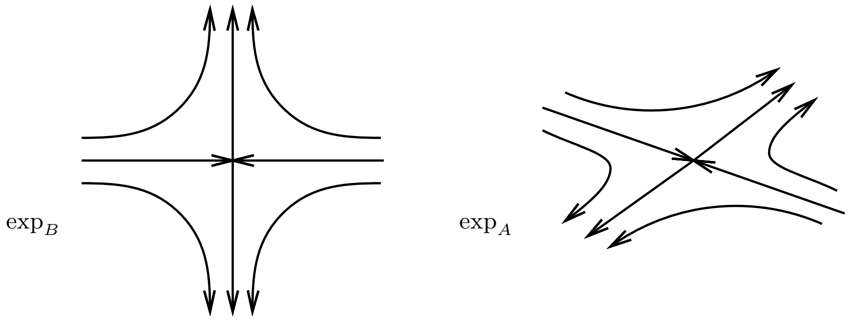
Abbildung 31.1.: a) Tangentenvektoren, b) Trajektorien

Beispiel: Sei $x' = Ax$ mit einer reellen 2×2-Matrix A mit $\det A \neq 0$ (A ist also invertierbar).

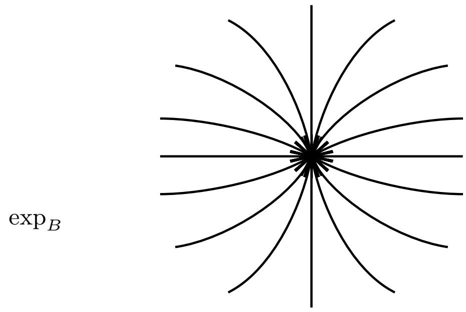
Fall 1: A hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten λ, μ (mit $\lambda \neq \mu$).

$$\Rightarrow \; A = U \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{=:B} U^{-1} \Rightarrow \exp_A(t) = U \underbrace{\begin{pmatrix} \exp(t\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(t\mu) \end{pmatrix}}_{\exp_B(t)} U^{-1}$$

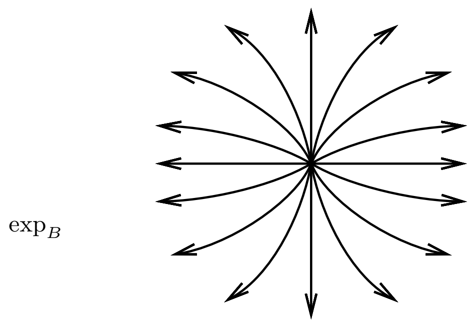
1. $\lambda < 0 < \mu$: $\exp_A$ ist verzerrt durch $U \dots U^{-1}$



2. $\lambda < \mu < 0$: 0 heißt hier *stabiler Knoten*

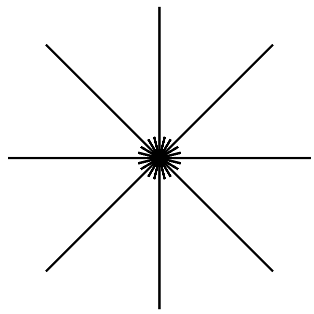


3. $0 < \mu < \lambda$: 0 heißt hier *instabiler Knoten*



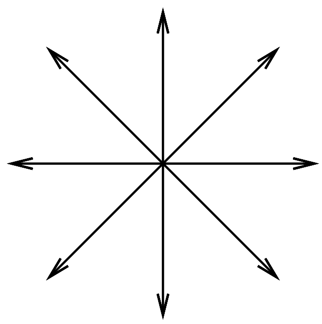
4. $\underline{\lambda = \mu < 0:}$

$\exp_B$



5. $\underline{0 < \lambda = \mu:}$

$\exp_B$



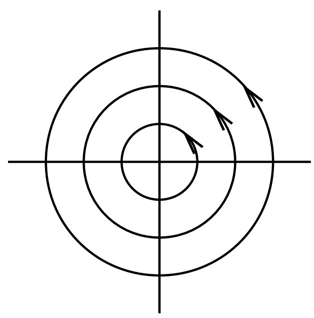
Fall 2: A hat 2 linear unabhängige Eigenvektoren zu den nicht reellen Eigenwerten λ und μ

$\Rightarrow\ \lambda = \overline{\mu}$ (da A reell) $\Rightarrow\ A = U \underbrace{\begin{pmatrix} \Re\lambda & \Im\lambda \\ -\Im\lambda & \Re\lambda \end{pmatrix}}_{B} U^{-1}\ \Rightarrow\ \exp_A(t) = U \exp -B(t) U^{-1} \quad \exp_B(t) =$

$e^{t\Re\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\Im\lambda t) & \sin(\Im\lambda t) \\ -\sin(\Im\lambda t) & \cos(\Im\lambda t) \end{pmatrix}$

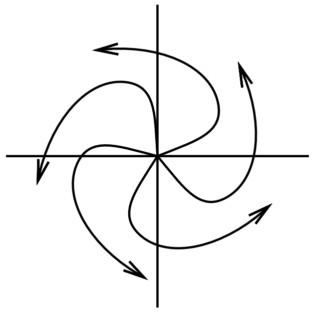
1. $\underline{\Re\lambda = 0:}$

$\exp_B$



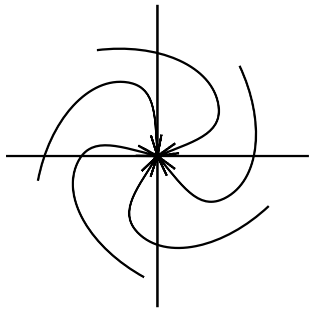
2. $\underline{\Re\lambda > 0:}$

$\exp_B$



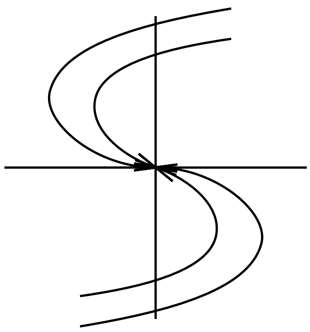
3. $\underline{\Re\lambda < 0:}$

$\exp_B$

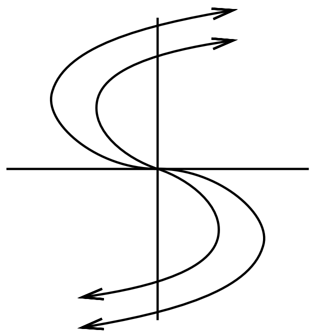


<u>Fall 3:</u> $A = U \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} U^{-1}$ mit λ reell

1. $\underline{\lambda < 0:}$



2. $\underline{\lambda > 0:}$



Bisher haben wir lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form

$$y' = Ay \quad (A \text{ eine } m \times m\text{-Matrix})$$

die sogenannte homogene Gleichung, kennen gelernt. Wir haben gezeigt, dass die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y'(t) = Ay(t) \quad y(t_0) = y_0$$

gegeben ist durch

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0.$$

Dabei ist die Matrixexponentialfunktion e^{tB} gegeben durch

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n$$

Wir untersuchen nun die Gleichung

$$y'(t) = Ay(t) + b(t)$$

mit einer Funktion $b: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$. Diese Gleichung wird also inhomogene Gleichung bezeichnet.

31.10 Satz (Lösen der inhomogenen Gleichung mittels Lösung der homogenen Gleichung)**:** Sei $b: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^m$ stetig und A eine $m \times m$-Matrix über $\mathbb{C}$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = Ay + b, \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung, die gegeben ist durch

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds.$$

Beachte: Das Integral ist hier komponentenweise zu verstehen

$$\int \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int x_1(s)ds \\ \vdots \\ \int x_n(s)ds \end{pmatrix}$$

Jede Komponente ist stetige, also Riemann-integrierbare Funktion.

Interpretation ($t_0 = 0$)*:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds \\ &= e^{tA}\left(y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds\right) \end{aligned}$$

Der Einfluss der Funktion b wird auf den Zeitpunkt 0 zurückgerechnet und als veränderte Anfangsbedingung interpretiert.

Beweis: Wir müsen zeigen, dass y die Gleichung löst und eindeutig ist.

Lösung: Nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ae^{(t-t_0)A}y_0 + \left(e^{tA}\int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds\right)' \\ &= Ae^{(t-t_0)A}y_0 + Ae^{tA}\int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds + e^{tA}e^{-tA}b(t) \\ &= A\left(e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds\right) + b(t) \\ &= Ay(t) + b(t) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Wir nehmen an y_1 und y_2 seien zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Dann erfüllt $z := y_1 - y_2$

$$z' = y_1' - y_2' = Ay_1 + b - (Ay_2 + b) = Az$$

sowie

$$z(t_0) = y_1(t_0) - y_2(t_0) = 0$$

Damit ist z die eindeutige Lösung der homogenen Gleichung $z' = Az, \quad z(t_0) = 0$. Also folgt $z \equiv 0$, dass heißt $y_1 = y_2$ und die Eindeutigkeit. □

Der Satz verrät nicht, wie man diese Lösung findet. Die Methode zum Auffinden der Lösung wird *Variation der Konstanten* genannt.

31.11 Verfahren (Variation der Konstanten)**:** Sei o. E. $t_0 = 0$. Da e^{tA} invertierbar ist, können wir die Lösung beschreiben mit dem Ansatz

$$y(t) = e^{tA}\eta(t)$$

mit geeigneter Funktion η mit $\eta(t_0) = y_0$. Für die Ableitung gilt nach der Differentialgleichung

$$y' = Ay + b = Ae^{tA}\eta + b$$

und nach der Produktregel

$$y' = Ae^{tA}\eta + e^{tA}\eta'$$

Gleichsetzen ergibt

$$b = e^{tA}\eta'$$

Es folgt also

$$e^{tA}b = \eta.$$

Mit $\eta(0) = y_0$ und dem HDI (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) gilt

$$\eta(t) = y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds$$

Damit hat $y = e^{tA}\eta$ die gewünschte Darstellung.

32. Grundlegende Begriffe zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n ist eine Gleichung der Form:

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

wobei t eine reelle Variable ist, $y = y(t)$ eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^m, \mathbb{C}, \mathbb{C}^m$) und F eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$. (Um von Ordnung n zu sprechen setzen wir voraus, dass F tatsächlich von $y^{(n)}$ abhängt.)

Beachte: Üblicherweise wird in der Differentialrechnung die Variable t in $y, y', \dots, y^{(n)}$ nicht mitgeschrieben.

Gleichungen der bisher betrachteten Form heißen implizite Differentialgleichungen. Sie sind im allgemeinen nicht lösbar.

Beispiel:

$$F(t, y, y') = t^2 + (y')^2 + 4 = 0$$

Daher betrachten wir meist den Fall, dass F nach $y^{(n)}$ aufgelöst werden kann. Damit hat man es mit einer expliziten Differentialgleichung der Form:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

zu tun. Dabei ist f definiert auf einer Teilmenge:

$$D \subseteq \mathbb{R}^{1+n} (oder\ \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, R \times \mathbb{R}^{mn}, R \times \mathbb{C}^{nm})$$

Eine wichtiger Spezialfall ist $n = 1$. Es geht dann um die Gleichung:

$$y' = f(t, y)$$

Hängt f nicht von der ersten Komponente (also t) ab, so spricht man von einer autonomen Differentialgleichung. (Die Differentialgleichungen in der Physik sind oft autonome Differentialgleichungen, da die physikalischen Gesetzte meist nicht von der Zeit abhängen.)

32.1 Definition (Lösung der Differentialgleichung)**:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}(\ldots)$. Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

besteht aus einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer n-mal stetig differenzierbaren Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ mit

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D \qquad (t \in I), \qquad \varphi^{(n)} = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \\ y(t_0) &= y_0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

ist eine Lösung (I, φ) der Differentialgleichung mit

$$(\varphi(t-0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) = (y_0, \ldots, y_{n-1})$$

Notation:

- Die Funktion f wird oft als rechte Seite bezeichnet.
- Das Lösen einer Differentialgleichung wird oft als Integration der Differentialgleichung bezeichnet, da es in gewisser Weise um das Finden einer Stammfunktion zu gegebener Ableitung geht.

Differentialgleichungen mit nur von t abhängiger rechter Seite

Allgemeiner Fall:

$$y' = f(t)$$

Das heißt y ist Stammfunktion von f. Ist f stetig, so kann die Gleichung durch „Integration“ gelöst werden.

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

Für $f = f_i : t_i \to t_0$, $y_i \to y_0$ geht $y_i(\cdot) \to y(\cdot)$ gleichmäßig. Die Lösung hängt also stetig vom Anfangspunkt (t_i) und der Anfangsbedingung (y_i) ab. Sie hängt weiterhin lokal stetig von der rechten Seite (f bzw. f_i) ab. Das heißt konvergiert $f_i \to f$ gleichmäßig, dann konvergiert $y_i \to y$ lokal.

Beachte: Ist f nicht stetig, so gibt es natürlich keine stetig differenzierbare Funktion y. Tatsächlich gibt es i.A. nicht einmal eine differenzierbare y (keine Stetigkeit der Ableitung vorausgesetzt), sodass $y' = f$.

Beispiel: (Übung)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tipp: Mittelwerteigenschaften der Ableitung

Spezialfall: konstante rechte Seite:

$$x'' = b, \qquad b = konst.$$

Dann liefert zweimalige Integration

$$x' = bt + v_0 \qquad (v_0 = x'(0))$$

sowie

$$x = \frac{1}{2}bt^2 + v_0 t + x_0 \qquad (x_0 = x(0))$$

Insbesondere liefert $x_{0,n} \to x_0$, $v_{0,n} \to v_0$, $b_n \to b$ für entsprechende Lösungen x_n, dass $x_n(t) \to x(t)$ gleichmäßig auf beschränkten Intervallen in $\mathbb{R}$. ABER für große t weichen x_n und x stark voneinander ab, selbst wenn b_n, b; $x_{0,n}, x_0$ und $v_{0,n}, v_0$ nahe beieinander liegen. Man sagt die Gleichung ist nicht stabil.

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Dabei handelt es sich um Differentialgleichung der Form

$$y' = f(t) + g(y)$$

32.2 Satz: Seien I_1, I_2 offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $t_0 \in I_1$, $y_0 \in I$. Sei $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung von t_0 in der das Anfangswertproblem

$$y' = f(t)g(y), \quad y(t_0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt. Ist G eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F eine Stammfunktion von f mit

$$G(y_0) = F(t_0)$$

(solche Stammfunktionen existieren immer), so erhalten wir eine Lösung durch Auflösen von

$$G(y) = F(t)$$

G(y)=F(t).

Beweis: Da f stetig ist, existiert eine Stammfunktion, da g stetig ist und $g(y_0) \neq 0$ hat $\frac{1}{g}$ in einer Umgebung von y_0 festes Vorzeichen. Dort existiert eine Stammfunktion G von $\frac{1}{g}$ und G ist streng monoton, also umkehrbar. Nach Addition von geeigneten Konstanten erfüllen F und G

$$F(t_0) = G(y_0)$$

Existenz: Wegen $F(t_0) = G(y_0)$ und der Umkehrbarkeit von G existiert

$$y(t) = G^{-1}(F(t))$$

auf einer Umgebung von t_0 und erfüllt $y(t_0) = y_0$. Weiterhin sind G und damit G^{-1} und F stetig differenzierbar (da Stammfunktion!) und es gilt nach Kettenregel

$$y'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(t)))} F'(t) = \frac{1}{G'(y(t))} F'(t) = g(y)f(t).$$

Eindeutigkeit: Sei z eine Lösung des Anfangswertproblems. Da $g(\underbrace{z(t_0)}_{=y_0}) \neq 0$ ist $g(z(t)) \neq 0$ auf Umgebung von t_0.

Aufgrund der Differentialgleichung

$$\frac{z'(t)}{g'(t)} = f(t)$$

für t nahe t_0. Seien wieder F Stammfunktion von f und G Stammfunktion von $\frac{1}{g}$, mit $F(t_0) = G(y_0)$. Integration t_0 bis t liefert

$$F(t) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{g(z(s))}\, ds \overset{s=z(s)}{=} \int_{y_0}^{z(t)} \frac{1}{g(s)}\, ds = G(z(t)) - G(y_0)$$

d.h.

$$F(t) = G(z(t))$$

Da G streng monoton, also umkehrbar erhalten wir

$$z = G^{-1}(F(t)).$$

Damit ist z eindeutig bestimmt. □

Beachte:

- Gegeben der Aussage über Existenz, kann man den Schluss im Eindeutigkeitsbeweis benutzen um eine Lösung auszurechnen. (So wird es in Anwendungen oft gemacht.)
- Es handelt sich um eine lokale Aussage. Der Beweis zeigt, dass Existenz und Eindeutigkeit solange gelten wie $g(x) \neq 0$. Für $g(x) = 0$ muss man neu nachdenken.

Der Fall $f \equiv 1$ ist besonders einfach:

32.3 Folgerung: Sei $\subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in I$. Dann gibt es eine Umgebung von t_0 in der das Anfangswertproblem

$$y' = g(y), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung hat. Man erhält die Lösung durch Auflösen von

$$G(t) = t - t_0$$

wobei G Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ ist mit

$$G(y_0) = F(t_0) = t - t_0 = 0$$

Beweis: $F : t \mapsto t - t_0$ ist Stammfunktion von $f \equiv 1$ mit $F(t_0) = 0$, G ist Stammfunktion von $\frac{1}{g}$

$$G(y_0) = F(t_0) = 0.$$

Die Aussage folgt aus vorhergehendem Satz. □

Beachte: Die Lösungen der Gleichungen haben folgende Invarianzeigenschaft. Löst φ das Anfangswertproblem zu $t_0 = 0$ und y_0, so löst $\varphi(0 - t_0)$ das Anfangswertproblem zu $t_0 = 0$ und y_0 (Nachrechnen). Das ist eine Folge der Tatsache, dass die rechte Seite nicht von t abhängt.(Gilt für alle autonomen Gleichungen.)

Beispiel:

$$y' = -ay$$

(Vergleich mit Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten). Es ist

$$G(y) = -\int_{y_0}^{y} \frac{1}{as}\, ds = \frac{1}{a}(\ln|y| - \ln|y_0|)$$

so lange y und y_0 das gleiche Vorzeichen haben. Durch Anwenden der Folgerung (Auflösen $G(y) = t - t_0$) ist

$$y(t) =^{+}_{-} e^{-a(t-t_0)\ln|y_0|}$$

für $y_0 > 0$ bzw. $y_0 < 0$. Damit ist

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)}$$

für $y_0 \neq 0$. Für $y_0 \equiv 0$ ist $y \equiv 0$. Insbesondere ist

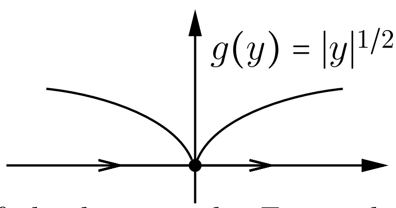
$$y = y_0 e^t$$

die eindeutige Lösung von

$$y' = y \quad y(0) = y_0.$$

Beispiel:

$$y' = |y|^{\frac{1}{2}}$$

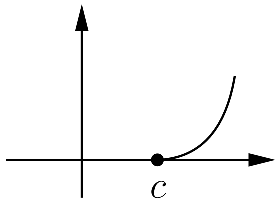


Pfeilrichtung gibt Zeitverlauf an

Für $y_0 > 0$ (und $y > 0$) gilt $G(y) = \int_{y_0}^{y} s^{-1/2} ds = 2(y^{1/2} - y_0^{1/2})$. Somit folgt nach Anwenden des Korollar (d.h. Auflösen von $t - t_0 = G(y)$)

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}(t - t_0) + y_0^{1/2}\right)^2 = \frac{1}{4}(t - c)^2$$

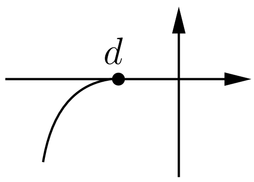
mit $c = t_0 - 2y_0^{1/2}$. Dies ist nur für $t \geq c$ eine Lösung. (Unsere Betrachtungen gelten nur solange $g(y) \neq 0$ ist.)



Für $y_0 < 0$ und $y < 0$ erhält man entsprechend

$$y(t) = -\frac{1}{4}(t - d)^2$$

für $t < d := t_0 + 2(-y_0)^{1/2}$.



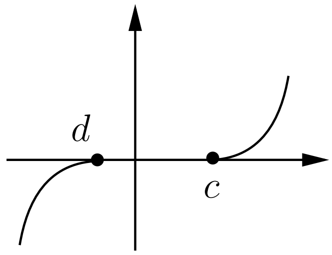
Außerdem ist natürlich auch $y \equiv 0$ eine Lösung. Tatsächlich kann man die Lösungen zusammenstückeln. Damit erhält man die Gesamtheit aller Lösungen auf $\mathbb{R}$ wie folgt:

(i) $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $y(t) = 0$ für $t \leq c$ und $y(t) = \frac{1}{4}(t - c)^2$ für $t \geq c$.

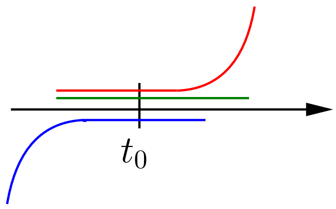
(iii) $y(t) - \frac{1}{4}(t - d)^2$ für $t \leq d$ und $y(t) = 0$ für $t \geq d$.

(iv) $y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t-d)^2 & : t \leq d \\ 0 & : d \leq t \leq c \,. \\ \frac{1}{4}(t-c)^2 & : t \geq c \end{cases}$



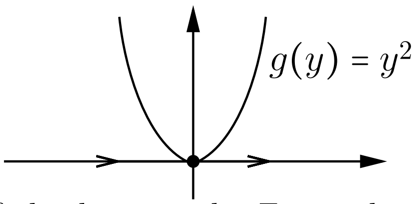
Lässt man $d = -\infty$ und $c = +\infty$ zu, so sind in (iv) alle Lösungen enthalten.

Beachte: Diese Gleichung bietet ein Beispiel für nicht eindeutige Lösbarkeit. Die Anfangsbedingung $y_0 = 0$ erlaubt nämlich viele Lösungen.



Beispiel:

$$y' = y^2$$



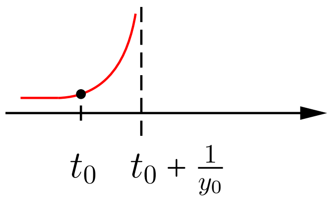
Für $y_0 > 0$ und $y > 0$ ist

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}$$

und es gilt nach Anwenden des Korollar (d.h. Auflösen von $t - t_0 = G(y)$)

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - (t - t_0)}.$$

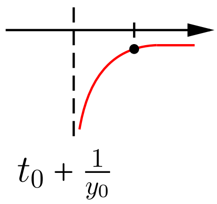
Die Lösung existiert also auf $(-\infty, \frac{1}{y_0} + t_0)$.



Für $y_0 < 0$ und $y < 0$ liefert eine analoge Betrachtung

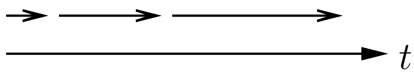
$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - (t - t_0)}.$$

Diese Lösung existiert auf $(\frac{1}{y_0} + t_0, \infty)$.



Beachte:

- Die Lösungen erreichen den Gleichgewichtspunkt $y_g = 0$ mit $g(y_g) = 0$ nicht in endlicher Zeit.
- Auch wenn g auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, existiert die Lösung nicht auf ganz $\mathbb{R}$.



Pfeile haben die Länge $g(y)$ über y.

Bemerkung: Das in diesem Beispiel sichtbare 'Explodieren' der Lösung in endlicher Zeit tritt für $y' = |y|^{1+\delta}$ für jedes $\delta > 0$ auf. (Übung.)

33. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Im vorigen Abschnitt haben wir für konkrete Differentialgleichungen lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gezeigt. Dabei haben wir aber auch gesehen, dass im allgmeinen Lösungen von Anfangswertproblemen

- nicht existieren müssen,
- nicht eindeutig sein müssen,
- nicht beliebig lange existieren müssen.

In diesem Abschnitt lernen wir grundlegende Sätze kennen, die uns, zumindest lokal, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung garantieren, falls die rechte Seite geeignete Bedingungen erfüllt.

Beachte: Wir betrachten in diesem Abschnitt meist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Man kann genauso auch $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$ betrachten, da $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$.

33.1. Die Lokale Lipschitzbedingung

Die lokale Lipschitzbedingung ist die entscheidende Voraussetzung in den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssätzen.

33.1 Definition (lokale Lipschitzbedingung)**:** Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ (bzw. $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$) offen und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ (t, y) \mapsto f(t, y)$$

gegeben.

(a) Es erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung bzgl. y , wenn eine Konstante L (die Lipschitzkonstante) existiert mit

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in D.$$

Wobei: t = const. und y = variabel

(b) Es erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y, wenn es zu jedem Punkt $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ gibt, sodass die Einschränkung $f|_U : U \to \mathbb{R}^m$ eine Lipschitzbedingung erfüllt.

Beachte: Die Lipschitzbedingung ist eine starke Form der Stetigkeit (in y). Man kann sie auch als eine schwache Form der Differenzierbarkeit verstehen.

Es kann sehr wohl passieren, dass eine Funktion einer lokalen Lipschitzbegingung genügt, aber keiner globalen (wenn nämlich die Konstanten $L(U)$ für wachsende U gegen ∞ konvergieren). Dazu diskutieren wir ein Beispiel.

Beispiel (Funktion mit lokaler LB, aber ohne globale LB)**:** Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t,y) = ty^2$. Dann genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Denn es gilt

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |ty_1^2 - ty_2^2| = |t(y_1+y_2)(y_1-y_2)| \leq \underbrace{|t(y_1+y_2)|}_{\leq L}|y_1-y_2|.$$

Für y_1, y_2, t aus einer beschränkten Menge, bleibt der Vorfaktor $|t(y_1+y_2)|$ beschränkt. Daher erfüllt f eine lokale LB.
Allerdings genügt f nicht einer globalen Lipschitzbedingung: Betrachtet man nämlich $y_2 = y_1 + 1$ so gilt mit der gerade durchgeführten Rechnung

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |t(2y+1)| * 1$$

und damit führt

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \leq L$$

auf $|t||2y_1+1| \leq L$ also $L \to \infty$ für $y \to \infty$ und $t \neq 0$. Daher genügt f keiner globalen LB.

Es kann auch sein, dass eine Funktion nicht einmal lokal einer Lipschitzbedingung genügt:

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t,y) = |y|^{1/2}$ genügt (bei 0) keiner Lipschitzbedingung. Denn es gilt bei $y = 0$

$$|f(t,0) - f(t,\frac{1}{n^2})| \leq L\left(0 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{L}{n^2}$$

$$|f(t,0) - f(t,\frac{1}{n^2})| = |\frac{1}{n^2}|^{1/2} = \frac{1}{n} = n|\frac{1}{n^2} - 0|.$$

Der folgende Satz zeigt, dass stetige partielle Differenzierbarkeit (bzgl. y) eine Lipschitzbedingung impliziert.

33.2 Theorem (Hinreichende Bedingung für LB)**:** Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(t, y) \mapsto f(t, y)$ stetig und stetig nach y partiell diffbar (d.h. die partiellen Ableitungen von f nach Komponenten von y sind stetig auf D). Dann genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Ist zusätzlich D konvex und sind die partiellen Ableitungen von f bzgl. y auf D beschränkt, so genügt f sogar einer globalen Lipschitzbedingung.

Beachte: Eine entsprechende Aussage gilt natürlich für Funktionen auf $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m$, wenn man $\mathbb{C}^m$ als $\mathbb{R}^{2m}$ auffasst.

Beweis: Der Beweis ist im wesentlichen eine Folge des Mittelwertsatzes.

Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine stetig diffbare Funktion $g : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit $|\partial_k g(y)| \le M$ für alle $y \in U$ die Abschätzung

$$|g(y_1) - g(y_2)| \le M\sqrt{kd}|y_1 - y_2|$$

falls die Verbindungsstrecke von y_1 und y_2 ganz in U enthalten ist.

Da D offen ist und die partiellen Ableitungen von f nach y stetig sind, können wir zu jedem (t_0, y_0) eine Umgebung

$$V = (t_0 - r, t_0 + r) \times U_r(x_0) \subset G$$

wählen, auf der die partiellen Ableitungen von f nach y beschränkt sind. Da V konvex ist, folgt aus dem Mittelwertsatz sofort die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt aus dem Mittelwertsatz mit der Wahl $V = D$. □

33.2. Der Eindeutigkeitssatz

In diesem Abschnitt lernen wir die grundlegenden Sätze über Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher DGL kennen.

33.3 Theorem: (Lokale Lipschitzbedingung impliziert globale Eindeutigkeit) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y. Sind $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ und $\psi : I \to \mathbb{R}^m$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = f(t, y), \text{ mit } \varphi(t_0) = \psi(t_0)$$

für ein $t_0 \in I$, so gilt$\varphi = \psi$.

Beachte: sind in dieser Situation des Satzes φ und ψ Lösungen auf verschiedenen Invervallen, die in einem Punkt übereinstimmen,so müssen sie auf dem Schnitt der beiden Intervalle übereinstimmen.

Bemerkung: Der Satz gilt entsprechend mit $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ statt $\mathbb{R}^m$!

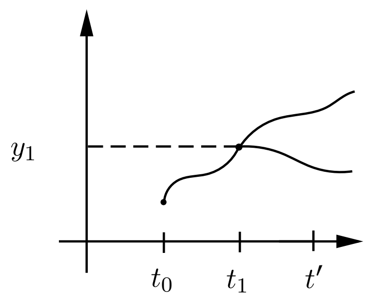
Beweis: Würde die Aussage nicht gelten, so gäbe es ein

- $t' < t_0$ mit $t \in I$ und $\varphi(t') \neq \psi(t')$,

  oder

- $t' > t_0$ mit $t \in I$ und $\varphi(t') \neq \psi(t')$.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der zweite Fall vorliegt.
Wir betrachten nun das maximale Intervall rechts von t_0 auf dem φ und ψ übereinstimmen. Genauer sei



$$t_1 := \sup\{t \in I : \varphi(s) = \psi(s) \text{ für alle } t_0 \leq s \leq t\}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$t_1 \leq t'.$$

Aufgrund der Stetigkeit von φ, ψ gilt auch

$$y_1 := \varphi(t_1) = \psi(t_1).$$

Sei $r > 0$, so dass

$$U := (t_1 - r, t_1 + r) \times U_r(y_1) \subset D$$

und f auf U einer lokalen Lipschitzbedingung mit der Konstante $L = L_U$ efüllt. Da φ und ψ stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(t) \in U_r(y_1) \text{ und } \psi(t) \in U_r(y_1)$$

für alle $t \in (t_1 - \delta, t + \delta)$.
Ohne Einschränkung $\delta \leq r$ (sonst Verkleinern von δ).

Wir betrachten nun $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_r(y_1) \subset D$.
Für $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$ gilt dann aufgrund der DGL und der Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \psi(t)| &= |\varphi(t) - y_1 - (\psi(t) - y_1)| \\
&= \left| \int_{t_1}^t \varphi'(s) ds - \int_{t_1}^t \psi'(s) ds \right| \\
&\overset{Dreiecks-Ugl.}{=} \left| \int_{t_1}^t (f(s, \varphi(s))) - f(s, \psi(s)) ds \right| \\
&\leq \int_{t_1}^t L |\varphi(s) - \psi(s)| ds.
\end{aligned}$$

Sei für $t \geq t_1$

$$S(t) := \sup\{|\varphi(s) - \psi(s)| : t_1 \leq s \leq t\}.$$

Dann gilt also für $t_1 \leq s \leq t \leq t_1 + \delta$

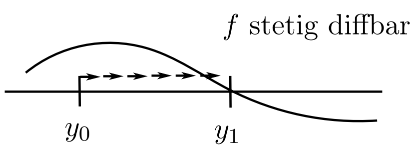
$$\begin{aligned}
|\varphi(s) - \psi(s)| &\leq L \int_{t_1}^s |\varphi(x) - \psi(x)| dx \\
&\leq L \int_{t_1}^t |\varphi(x) - \psi(x)| dx \\
&\leq L(t - t_1) S(t).
\end{aligned}$$

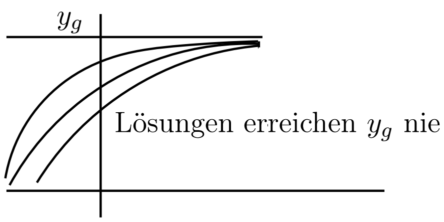
$$\overset{sup; s \in [t_1, t]}{\Rightarrow} S(t) \leq \underbrace{L(t - t_1)}_{<1 \text{ für } t \text{ nahe } t_1} S(t).$$

Das ist für t nahe t_1 nur möglich, falls $S(t) = 0$. Widerspruch zur Konstruktion von t_1. □

33.4 Folgerung (Bei Eindeutigkeit können Gleichgewichtspunkte nicht in endlicher Zeit erreicht werden)**:** Genügt $f(y) = f$ einer lokalen Lipschitzbedingung und gilt für y_g, dass $f(y_g) = 0$, so kann eine Lösung (I, φ) von $y' = f(y)$ mit dem Anfangswert $f(\varphi(t_0)) \neq 0$ den Wert y_g nicht annehmen.

Beweis: Es ist $\psi(t) \equiv y_g$ eine Lösung von $y' = f(y)$. Würde ϕ den Wert y_g annehmen, so müsste es mit ψ übereinstimmen, also $f(\varphi(t)) \equiv 0$ gelten. Das wäre ein Widerspruch. □





Beispiel: $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$

33.3. Der Existenzsatz

In diesem Abschnitt lernen wir einen (recht) allgmeinen Existenzsatz für Lösungen kennen.

33.5 Theorem (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)**:** Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung bzgl. y. Dann gibt es zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ ein $\varepsilon > 0$ so dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y), \;\; y(t_0) = y_0$$

auf $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Beweis: Die Grundidee besteht darin, das Anfangswertproblem in eine Integralgleichung umzuwandeln und diese iterativ zu lösen.

Behauptung: Es löst (φ, ε) das AWP

$$y' = f(t,y), y(t_0) = y_0$$

genau dann, wenn gilt

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

Beweis: Das folgt aus dem HDI, denn

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds \\ &\overset{AWP}{=} y_0 + \int_{0}^{t} f(s, \varphi(s)) \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun die Integralgleichung durch Iteration lösen, d.h. wir setzen

$$(*) \quad y_0(t) \equiv y_0, \;\; y_{k+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s))ds$$

und zeigen Konvergenz der y_k gegen die gewünschte Lösung y auf einem geeigneten Intervall.
Hier sind die Details:

Da D offen ist, können wir ein $r > 0$ finden, mit

$$A := \{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |t - t_0| \le r, |y - y_0| \le r\} \subset D$$

und f auf A eine Lipschitzbedingung mit Konstante L genügt. Da f stetig ist, existiert weiter ein $M \ge 0$ mit

$$|f(t,y)| \le M$$

für alle $(t,y) \in A$. Sei nun

$$\varepsilon := \min\{r, \frac{r}{M}\}, \;\; I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

Dann kann eine Lösung des AWP auf I die Menge A nicht verlassen, denn

$$y' = f(,y) \Rightarrow |y'| \leq M \text{ auf } A$$
$$\Rightarrow |y(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} y' ds \right| \leq M(t - t_0) \leq M\varepsilon \leq r$$

Wir definieren nun die Funktionen y_k gemäß $(*)$.

Alle y_k sind auf ganz I definiert:
Wir zeigen induktiv, dass $|y_k(t) - y_0| \leq r$ für alle $t \in I$, $k \in \mathbb{N}_0$:

$\underline{k = 0}$: ist klar.

$\underline{k \to (k+1)}$:

$$\begin{aligned} |y_{k+1} - y_0| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_k(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, y_k(s))}_{\leq M \,\mathrm{da}\, |y_k - y_0| \leq r} ds \\ &\leq M \underbrace{(t - t_0)}_{\leq \varepsilon \leq \frac{r}{M}} \\ &\leq r \end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung $|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$:

Induktion:

$k = 0$: Es gilt

$$|y_1(t) - y_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0) ds \right| \leq M|t - t_0| = ML^0 \frac{|t - t_0|^{0+1}}{(0+1)!}.$$

$k^{-1} \Rightarrow k$:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq & \quad \int_{t_0}^{t} |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds \\ (LB) \leq & \quad L \int_{t_0}^{t} |y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds \\ (k-1) \leq & \quad L \frac{ML^{k-1}}{k!} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^k ds \\ = & \quad ML^k \frac{|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Die Folge y_k konvergiert gleichmäßig auf I gegen ein stetiges y:
Für alle $t \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach der vorigen Behauptung

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Die rechte Seite hängt nicht von t ab und ist summierbar (vgl. Exponentialfunktion $\sum_{l=0}^{\infty} ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!} \leq ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}$)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \text{konvergiert gleichmäßig auf } I.$$

Damit konvergiert auch

$$y_{k+1} = y_0 + \sum_{l=0}^{k}(y_{l+1} - y_l)$$

gleichmäßig auf I gegen ein (dann stetiges) y.

Dieses y löst die Integralgleichung:
Wegen

$$|f(t, y(t)) - f(t, y_k(t))| \leq L|y(t) - y_k(t)|$$

und der gleichmäßigen Konvergenz der y_k gegen y, konvergiert $f(t, y_k(t))$ gleichmäßig auf I gegen $f(t, y(t))$. Damit folgt für $t \in I$

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{k\to\infty} y_k(t) \\ &= y_0 \lim \int_{t_0}^{t} f(s, y_{k-1}(s))ds \\ \left(f(s, y_k(s)) \overset{glm}{\to} f(s, y(s))\right) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y$ löst Integralfomel
$\Rightarrow y$ löst AWP

$\square$

Bemerkung: Gilt im konkreten Fall gleichmäßige Konvergenz der y_k auf größeren Intervallen, so ist der Grenzwert y auch auf denm größeren Intervall eine Lösung.

Beispiel (Picard Lindelöff zum Lösen von $y' = ay, a \in \mathbb{R}, y(0) = y_0$)**:** Picardsche Iteration liefert ($a = 1$):

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_0^t y_0 ds & &= y_0 + ty_0 \\ y_2(t) &= y_0 + \int_0^t y_1(s)ds & &= y_0 + ty_0 + \frac{t^2}{2}y_0 \end{aligned}$$

und Induktion

$$y_k = y_0 \sum_{l=0}^{k} \frac{t^l}{l!}.$$

$$\Rightarrow y_k \to y = y_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} = y_0 e^t$$

gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall

$$\Rightarrow y_0 e^t \text{ Lösung auf ganz } \mathbb{R}$$

Der Satz liefert nur eine lokale Existenzaussage. Wir wenden uns nun der Existenz maximaler Lösungen zu. Dazu eine Definition.

33.6 Definition (Maximale Lösung)**:** Eine Lösung (φ, I) der DGL $y' = f(t,y)$ heißt rechtsmaximal, wenn es keine Lösung (ψ, J) gibt mit $I \subset J, supI < supJ$ und $\psi = \varphi$ auf I. Entsprechend definieren wir linksmaximal. Eine Lösung heißt maximal, wenn sie sowohl rechts-, als auch linksmaximal ist.

33.7 Lemma (Existenz maximaler Lösungen)**:** Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetit mit lokaler LB bezüglich y. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y), \;\; y(t_0) = y_0$$

für jedes $(t_0, y_0) \in D$ eine eindeutige maximale Lösung.

Beweis: Eindeutigkeit folgt aus lokaler LB.
Sei L die Menge der Lösungen (φ, I) des Anfangswertproblems. Dann ist L nicht leer nach dem lokalen Existenzsatz (da f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt). Nach dem Eindeutigkeitssatz stimmen zwei Lösungen des Anfangswertproblems auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein. Damit ist (ψ, J) mit

$$J := \bigcup_{(\varphi,I)\in L} I, \;\; \psi(t) := \varphi(t) \quad \text{für } t \in I \text{ mit } (\varphi, I) \in L$$

wohldefiniert und nach Konstruktion eine maximale Lösung. □

Bemerkung: Auch für nur stetige f kann man Existenz von maximalen Lösungen zeigen.

33.8 Theorem (Charakteristische Eigenschaft maximaler Lösungen)**:** Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to R^m$ stetig mit lokaler LB bezüglich y.
Sei $[t_0, \hat{t}]$ das größte rechts von t_0 gelegene Intervall, auf dem die Lösung φ das AWP

$$y' = f(t,y) \;,\; y(t_0) = y_0$$

existiert (d.h. $(\varphi, [t_0, \hat{t}])$ ist rechtsmaximal). Dann existiert zu jedem Kompaktum K ein $t_k \subset (t_0, \hat{t})$ mit $(t, \varphi(t)) \notin K$ für $t > t_k$.

Beweis: Angenommen die Aussage des Satzes gilt nicht:
Dann existiert ein Kompaktum $K \subset D$ und eine Folge $(t_n) \in (t_0, \hat{t})$ mit $t_n \to \hat{t}$ mit $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $(t_n, \varphi(t_n))$ gegen $(\hat{t}, y_1) \in K$ konvergiert.(sonst. Teilfolge)

Nach dem lokalen Existenzsatz gibt es dann ein $\varepsilon > 0$, sodass das AWP

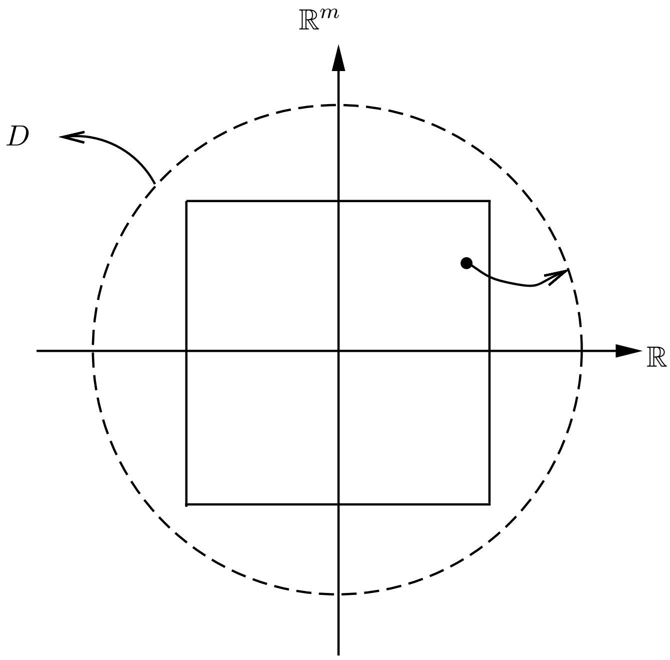
$$y' = f(t,y), y(t*) = y*$$

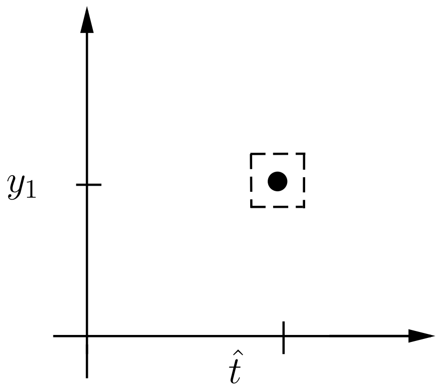
für alle $(t*, y*)$ nahe an $(\hat{t}, y_1)$ auf ganz $[t*, t * + \varepsilon)$ lösbar ist. Da $(t_n, \varphi(t_n))$ gegen $(\hat{t}, y_1)$ konvergiert, können wir dann also das AWP

$$y' = f(t,y), \; y(t_n) = \varphi(t_n)$$

für alle großen n auf $[t_n, t_n + \varepsilon)$ lösen. Für große n ist dann aber $t_n + \varepsilon > \frac{1}{t}$ und wir können die Lösung fortsetzen. □

Bemerkung: • Es gibt im wesentlichen zwei Arten, wie die maximale Lösung jedes Kompaktum verlassen kann:

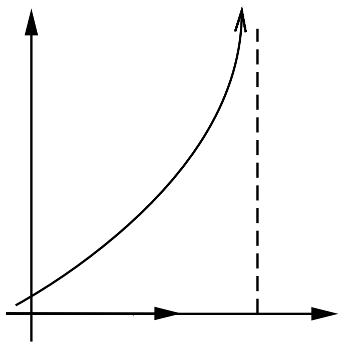


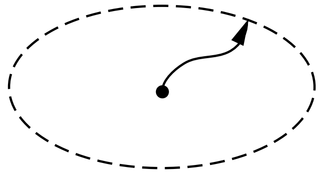


  - sie kann für alle Zeiten existieren
  - sie kann nur endlich lange existieren, wandert aber in dieser Zeit ins ünendliche"

- Eine Lösung mit der angegebenen Eigenschaft kann nicht fortegesetzt werden, ist also maximal.
- Das maximale Existenzintervall ist offen (sonst könnte die Lösung fortgesetzt werden).

Wir können aus dem Satz leicht eine Folgerung für Mengen D der Form $D = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ziehen.



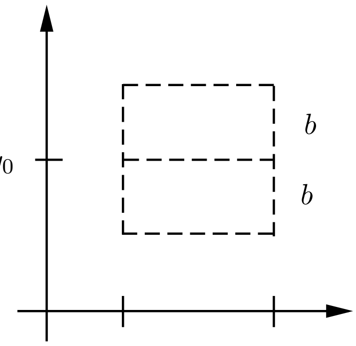


33.9 Folgerung: Sei $D = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle eine lokale LB bzgl. y. Ist (φ, I) die maximale Lösung von $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, so existiert zu jedem $K \subset U$ eine $t_K \in I$ mit $\varphi(t) \notin K$ für $t > t_K$ falls $\hat{t} < \infty$.

Die Folgerung erlaubt es auf "langes"Existieren der Lösung zu schliessen, wenn nämlich die Lösung Kompakta nicht verlassen kann. In diesem Sinne ist eine allgemeine "Philosophie", dass Schranken an das Wachstum von Lösungen effektiv Existenz von Lösungen garantiert.

33.10 Folgerung: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit globaler Lipschitzbedingung. Sei $(t_0, y_0) \in D$. Dann gilt für das zugehörige Anfangswertproblem

$$y' = f(t,y),\ y(t_0) = y_0 :$$



(a) Enthält D die Menge $A := [t_0, t_0 + a] \times B_b(y_0)$ und ist $|f|$ auf A durch M beschränkt, so ist das Anfangswertproblem auf ganz $[t_0, t_0 + \alpha]$ mit $\alpha = \min\{a, b/M\}$ lösbar.

(b) Enthält D den Streifen $S = [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^m$ so ist das Anfangswertproblem auf ganz $[t_0, t_0 + a]$ lösbar.

(c) Ist $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ so ist das Anfangswertproblem auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar.

Beweis: Aufgrund des vorangegangenen Satzes reicht es jeweils zu zeigen, dass die Lösung den Rand des Definitionsbereiches frühstens zum angebenen Zeitpunkt erreichen kann.

(a) Solange y existiert gilt $|y'| = |f(t,y)| \leq M$. Daher kann die Lösung den Rand von A frühestens zur Zeit $\alpha = \min\{a, b/M\}$ erreichen.

(b) Mit $M_0 := \max\{f(t,0) : t_0 \leq t \leq t_0 + a\}$ gilt aufgrund der Lipshitzbedingung

$$|f(t,y)| \leq |f(t,0)| + |f(t,0) - f(t,y)| \leq M_0 + L|y|.$$

Damit folgt für $g(t) = (1 + |y(t)|^2)^{\frac{1}{2}}$ also

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{< y(t), y'(t) >}{g(t)} &\leq \frac{|y(t)||y'(t)|}{g(t)} \\ &\leq |y'(t)| \\ &= |f(t, y(t))| \\ &\leq M_0 + L|y(t)| \\ &\leq M_0 + Lg(t) \\ &\leq Kg(t) \end{aligned}$$

mit $K = L + |M_0|$. Damit folgt

$$|y(t)| \overset{\text{Def.}}{\leq} g(t) \leq Ae^{Kt}$$

mit geeignetem A
$\Rightarrow y$ kann nicht in endlicher Zeit explodieren
$\Rightarrow y$ existiert bis $t = t_0 + a$

(c) aus (b) folg, dass die LÖsung auf jedem Streifen der Form $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^m$ existiert. Da a beliebig ist, folgt die Existenz auf ganz $[t_0, \infty]$

□

Wir betrachten noch zeichnerisch einige Situationen mit

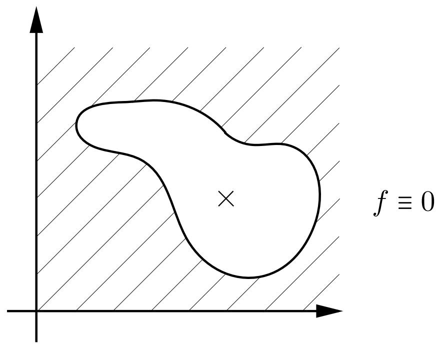
$$y' = f(y),\ y(0) = y_0$$

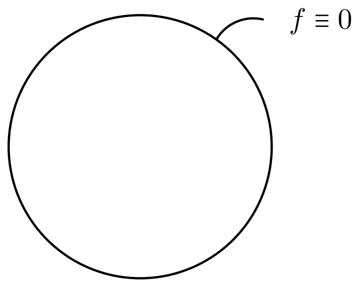
f stetig diffbar ($\Rightarrow$ lokale LB).

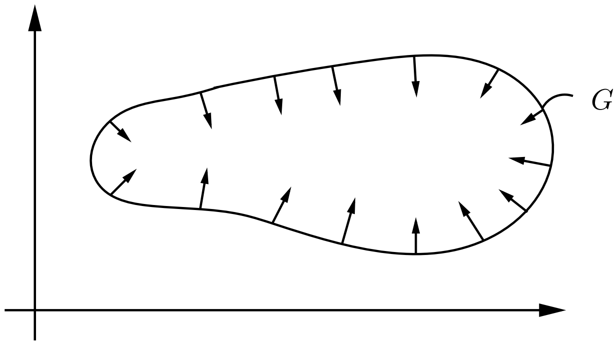
Beispiele:

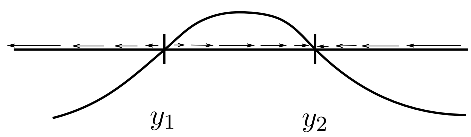
- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ verschwindet ausserhalb eines Kompaktums. Für $y_0 \notin$ Kompaktum sind die LÖsungen des AWP gerade $y \equiv y_0$(existier also für alle Zeit). Für $y_0 \in$ Kompaktum können die Lösungen des AWP das Kompaktum nicht verlassen,müssen also auch für alle Zeiten existieren.
- $f : \mathbb{R}^2 \to R^2$ verschwindet auf Kreislinie.

  Aufgrund der Eindeutigkeit können Lösungen, die im Inneren des Kreises starten diesen nicht verlassen (und müssen also für alle Zeiten existieren).
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Lösungen, die in G starten, können G nicht verlassen (existieren also für alle positiven Zeiten).
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

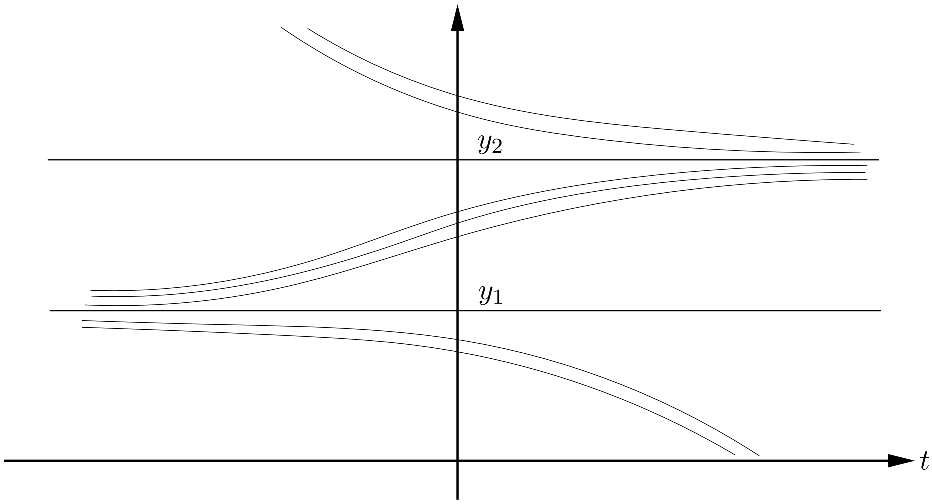








1. Lösungen, die zwischen y_1 und y_2 starten, bleiben für immer dort. Für $t \to \infty$ konvergieren sie gegen y_2, für $t \to -\infty$ konvergieren sie gegen y_1.
2. Für y_1 bzw. y_2 also Anfangswert gibt es genau die konstanten Lösungen.
3. Für $y_0 > y_2$ laufen die Lösungen für $t \to \infty$ gegen y_2 (ohne es zu erreichen).
4. Für $y_0 < y_1$ laufen die Lösungen für $t \to -\infty$ gegen y_1.



Beispiele (Lineare DGL der Form $y' = Ay + b$ mit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $b : \mathbb{R} \to R^n$.)**:**

Wir betrachten zunächst den homogenen Fall (d.h. $b \equiv 0$):

Behauptung:

1. Die Lösungen der DGL $y' = Ay$ existieren auf ganz $\mathbb{R}$ und sind eindeutig durch ihren Anfangswert bestimmt.
2. Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension n. Jedes Basis dieses Vektorraums wird Fundamentalssystem genannt.
3. Das matrixwertige System $Y' = AY$, $Y(t_0) = I$, hat eine eindeutige Lösung Φ auf ganz $\mathbb{R}$. Die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$, ist dann gerade gegeben durch $y = \Phi y_0$. Es heißt Φ die Lösungsmatrix des System zum Anfangspunkt t_0.
4. Ist $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein beliebiges Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, so ist $Z(t)$ für jedes t invertierbar und man erhält die Lösungsmatrix zu t_0 als $\Phi = Z(t)Z(t_0)^{-1}$.

Beachte: Es ist die charakteristische Eigenschaft von linearen Gleichungen, dass die Lösungen einen Vektorraum bilden.

Beachte: Spezialfall $A = const.$, $\Phi(t) = e^{tA}$ $(t_0 = 0)$

Beweis: Wir zeigen zunächst (1) und (3): Auf jedem Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}^{n \times n}$ erfüllt $f(t, Y) = A(t)Y$ eine globale

Lipschitzbedingng, denn

$$\begin{aligned} |f(t,Y)-f(t,Y^*)| &= |A(t)(Y-Y^*)| \\ &\le |A(t)||Y-Y^*| \\ &\le \max\{|A(t)| : a \le t \le b\}|Y-Y^*| \\ &= M|Y-Y^*|. \end{aligned}$$

Damit folgt aus der vorigen Folgerung auf dem Streifen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWP $Y' = AY, Y(t_0) = I$. Da der Streifen beliebig ist, folgt die Aussage auf ganz $\mathbb{R}$.
Völlig analog sieht man Existenz und Eindeutigkeit des AWP $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$. Weiterhin ist $y := \Phi y_0$ eine Lösung von $y' = Ay_0$, $y(t_0) = y_0$, denn

- $y' = \phi' y_0 = (A\phi)y_0 = A(\phi y_0) = Ay$
- $y(t_0) = \phi(t_0)y_0 = Iy_0 = y_0$.

Aufgrund der Eindeutigkeit ist also y die einzige Lösung des AWP.

(2) Für Lösungen φ, ψ von $y' = Ay$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund der Linearität von A

$$(\varphi + \lambda\psi)' = \varphi' + \lambda\psi' = A\varphi + \lambda A\psi \overset{A linear}{=} A(\varphi + \lambda\psi).$$

Damit bilden die Lösungen einen Vektorraum.
Nach (3) bilden die ϕe_j, $j = 1, \ldots, n$, ein Erzeugendensystem des Vektorraumes. ($\phi y_0 = \sum_{j=1}^n y_j \phi e_j$) Offenbar sind diese Vektoren linear unabhängig.

(4) Wir zeigen zunächst die lineare Unabhängigkeit der Spalten von Z für jedes t (also $Z(t)$) invertierbar. Sei $t_1 \in \mathbb{R}$ beliebig. Seien a_j, $j = 1, \ldots, n$ mit

$$\sum_{j=1}^n a_j z_j(t_1) = 0$$

gewählt. Dann ist also $z = \sum_{j=1}^n a_j z_j$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \; y(t_1) = 0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung ist dann $y \equiv 0$. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der z_j folgt $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Da die Spalten von Z Lösungen von $y' = Ay$ sind, ist Z eine Lösung von $Y' = AY$. Daher ist auch $\Psi = Z(t)Z(t_0)^{-1}$ eine Lösung dieses Systems.
Denn: $\Psi' = Z'Z(t_0)^{-1} = AZZ(t_0)^{-1} = A\Psi$
Weiterhin gilt offenbar $\Psi(t_0) = Z(t_0)Z(t_0)^{-1} = I$. Aufgrund der Eindeutigkeit folgt $\Psi = \phi$. □

Bemerkung: Es ist die charakteristische Eigenschaft linearer DGL, dass die Lösungen einen Vektorraum bilden.

Wir kommen nun zu dem inhomogenen Fall. Sei also $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und das System gegeben durch

$$y' = Ay + b.$$

Behauptung: Es gilt:

1. Zu jedem Anfangswert ist das Problem eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar.
2. Ist ψ eine Lösung des inhomogenen Systems, so läßt sich jede weitere Lösung φ eindeutig schreiben als $\varphi = \psi + u$, wobei u eine Lösung des homogenen Systems $y' = Ay$ ist. (Die Lösungen bilden also einen affinen Raum über dem Raum der Lösungen des homogenen System.)

3. Die Lösung des AWP $y' = Ay + b$, $y(t_0) = y_0$, ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \underbrace{\phi(t)y_0}_{\text{Lsg des hom. Sys., } y(0)=y_0} + \underbrace{\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)ds.}_{\text{Lsg des inhom. Sys., } y(0)=0}$$

Beweis: (1) Das folgt, wie im homogenen Fall. Denn bei der Untersuchung der Lipschitzbedingung auf einem Streifen fällt der Term mit b weg.

(2) Das ist eine direkte Rechnung.

(3) Das folgt durch Variation der Konstanten auf dieselbe Weise wie bei Betrachtung mit konstantem A.

□

Bemerkung: Die vorangehenden Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn man $\mathbb{R}^m$ durch $\mathbb{C}^m$ ersetzt.

33.4. Das allgemeine System n-ter Ordnung

In diesem Abschnitt haben wir uns bisher mit Gleichungen 1. Ordnung beschäftig (d.h. es kam nur die erste Ableitung von y vor). Hier diskutieren wir kurz, wie damit Aussagen für Gleichungen n-ter Ordnung folgen. Wir betrachten also

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

und zeigen

- eine DGL n-ter Ordnung ist äquivalent zu einer DGL 1. Ordnung;
- die DGL erster Ordnung erfüllt eine (lokale) LB, wenn die DGL n-ter Ordnung eine erfüllt.

Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$ offen und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ (t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \mapsto f(t, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$$

(mit $\eta_j \hat{=} y^{(j)} \in \mathbb{R}^m$)). Wir definieren zu f die Funktion

$$\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^{mn},\ \widetilde{f}(t, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \ldots \\ \eta_{n-1} \\ f(t, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Wir setzen auch $Y = (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$. Es gilt:

Ist (φ, I) eine Lösung von $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (mit Anfangsbedingung $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ für t_0) so ist $Y = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ auf I eine Lösung der DGL

$$Y' = \widetilde{f}(t, Y)$$

mit Anfangsbedingung $Y(t_0) = (y_0, \dots, y_{n-1})$.

Umgekehrt ist zu einer Lösung $Y = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$ auf I von $Y' = \widetilde{f}(t, Y)$ (mit Anfangsbendingung $Y(t_0) = (y_0, \dots, y_{n-1})$) dann η_0 auf I eine Lösung von $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (mit Anfangsbedingung $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ für t_0))

Beweis: Das folgt durch Nachrechnen!

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \\ f(t, y_1, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Die Nummerierung der η gibt die Nummer der Ableitung an. □

Damit haben wir Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit etc. von Lösungen zu Gleichungen n-ter Ordnung zurückgeführt auf die entsprechenden Fragen zu Lösungen von Gleichungen 1.- Ordnung.

33.11 Lemma: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, (t, Y) \longrightarrow f(t, Y)$ stetig (wobei $Y = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$). Dann sind äquivalent:

(i) Es erfüllt f eine (lokale) Lipschitzbedingung bzgl. Y.

(ii) Es erfüllt $\widetilde{f}$ eine (lokale) Lipschitzbedingung bzgl. Y.

Beweis: Mit $Y = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1})$ und $Y^* = (\eta_1^*, \dots, \eta_{n-1}^*)$ gilt

$$\begin{aligned} |f(t, Y) - f(t, Y^*)| &\le |\widetilde{f}(t, Y_1) - \widetilde{f}(t, Y_2)| \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} |\eta_j - \eta_j^*|^2 + |f(t, Y) - f(t, Y^*)|^2 \right)^{1/2} \\ &\le \left(|Y - Y^*|^2 + |f(t, Y) - f(t, Y^*)|^2 \right)^{1/2} \\ &\le |Y - Y^*| + |f(t, Y) - f(t, Y^*)|. \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage sofort. □

Nach diesen Vorbereitungen erhält man aus den Sätzen über Systeme erster Ordnung sofort Sätze für Sytleme n-ter Ordnung. Wir halten hier folgendes fest.

33.12 Theorem: Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$ offen und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung. Dann ist das Anfangwertproblem

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \;\; (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$$

zu jedem $(t, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in D$ lokal lösbar. Je zwei Lösungen stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Beweis: Umschreiben in ein System 1. Ordnung (s.o.). Dieses System erfüllt nach vorigem Lemma eine lokale Lipschitzbedingung. Damit folgen die Aussagen. □

Beachte: Die Ausssgen über Systeme 1. Ordnung liefern direkt Aussagen über den Definitionsbereiche der Lösungen.

Beispiel: Lineare DGL $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ Es handelt sich um

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f(t, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \eta_j,$$

(das also gar nicht von t abhängt). Damit ist $\widetilde{f}$ gegeben durch eine lineare Abbidlung nämlich

$$\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \\ \sum_{j=0}^{n-1} a_j n_j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:F} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix}$$

Die von uns gesuchten Lösungen des Systems n-ter Ordnung sind also gegeben durch die ersten Komponenten der Lösungen des Systems $y' = Fy$. Damit gilt:

- Die Lösungen der DGL bilden einen Vektorraum der Dimension n.

Beweis: Das folgt direkt aus dem entsprechenden Resultat für Systeme erster Ordnung. □

Die Lösungen des Systems erster Ordnung haben die Form

$$e^{t\lambda} v$$

mit λ Eigenwert von F und v Eigenvektor zu λ von F. Stimmen für den Eigenwert λ die algebraische und die geometrische Multiplizietät nicht ueberein, so gibt es noch weitere Lösungen der Form

$$e^{t\lambda}\sum_{j=0}^{k} a_j t^j v_j$$

mit geeigneten v_j und k = algebraische Vielfachheit − geometrische Vielfachheit von λ. Da wir uns nur für die ersten Komponenten dieser Lösungen interessieren, bedeutet das für uns: Die Lösungen haben die Form $e^{t\lambda}$ mit λ Eigenwert von F bzw. $q(t)e^{t\lambda}$ mit q Polynome vom Grad ≤ alg. Vielfachheit − geom. Vielfachheit von λ. Wir müssen also das charakteristische Polynom von F bestimmen.

Behauptung: Es gilt: $\det(F-\lambda I) = (-1)^{n+1}(\lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\lambda^j) =: (-1)^{n+1}p(\lambda)$.

Beweis: Das folgt durch Entwickeln von $F-\lambda I$ nach der letzten Zeile. □

Damit können wir dann die Lösungen der Gleichung gemäß obigen Erwägungen bestimmen. Auf die Lösungen kann man auch mit dem Ansatz $y = e^{t\lambda}$ kommen. Einsetzen führt auf

$$\lambda^n e^{t\lambda} = e^{t\lambda}\sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j$$

also

$$0 = \lambda^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j\lambda^j = p(\lambda).$$

Es gilt.

- Ist ρ eine Nullstelle der Vielfachheit ν von p, so sind

  $$e^{\rho t}, te^{\rho t}, \ldots, t^{\nu-1}e^{\rho t}$$

  Lösungen der DGL.

Beweis: Bezeichnen wir mit L den Operator $L = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{d^j}{d^j t} - \frac{d^n}{dx^n}$. Dann ist also

$$L(t^s e^{\rho t}) = 0$$

zu zeigen für $s = 0, 1, \ldots, \nu-1$. Offenbar gilt $t^s e^{\rho t} = \frac{d^s}{d\lambda^s}|_{\lambda=\rho} e^{t\lambda}$. Da der Operator L mit der Differentiation nach λ vertauscht, folgt

$$L(t^s e^{\rho t}) = L(\frac{d^s}{d\lambda^s}|_{\lambda=\rho} e^{t\lambda}) = \frac{d^s}{d\lambda^s} Le^{t\lambda} = -\frac{d^s}{d\lambda^s}|_{\lambda=\rho} p(\lambda) = \frac{d^s}{d\lambda^s}|_{\lambda=\rho}((\lambda-\rho)^\nu \ldots) = 0.$$

für $s = 0, 1, \ldots, \nu-1$ □

Damit können wir jetzt die Lösungen komplett darstellen.

- Es habe p die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit den Vielfachheiten $\nu_1, \dots, \nu_k$. Dann kann man jede Lösung der DGL
$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$
eindeutig als Linearkombination der Funktionen
$$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\nu_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\nu_k - 1} e^{\lambda_k t}$$
schreiben.

Beweis: $\sum_{p=1}^{k} \nu_p = n$ (da p den Grad n hat)
Damit reicht es zu zeigen, dasss die n- angegebenen Funktionen Lösungen und linear unabhängig sind. Lösungen: s.o. Linear unabhh./Erzeugendensystem: nicht hier. □

Auch in diesem Fall gibt es eine Lösungsformel für das inhomogene System
$$y^{(n)} = a_0 y + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + g$$
mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Behauptung: Sei u die Lösung des Anfangswertproblems
$$y^{(n)} = a_0 y + \dots a_{n-1} y^{(n-1)}$$
$$u(0) = \dots = u^{(n-2)}(0) = 0$$
$$u^{(n-1)}(0) = 1.$$
Dann ist
$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} u(t-s) g(s) ds$$
die Lösung der inhomogenen Gleichung
$$y^{(n)} = a_0 y + \dots a_{n-1} y^{(n-1)} + g$$
$$y(t_0) = \dots = y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Bemerkung:
- Wäre auch noch $u^{(n-1)}(0) = 0$, so wäre $u \equiv 0$ (aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit).
- Die Lösung des inhomogenen AWP zu beliebiger Anfangsbedingung erhält man durch Addition einer Lösung des homogenen Problems mit der "richtigen'Anfangsbedingung.

Beweis: Wir betrachten das zugehörige System 1. Ordnung
$$y' = Fy + b$$

mit $b = (0, \ldots, 0, g)$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Dann ist Φ die erste Komponente des Vektors

$$\phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1} b(s) d$$

mit $\phi t = exp((t - t_0)F)$

$$\begin{aligned} \Phi = \quad & \text{1. Komponente von } \exp((t-t_0)F) && \int_{t_0}^{t} \exp((s-t_0)F)^{-1} b(s) ds \\ & \ldots && \int_{t_0}^{t} \exp((t-s)F) b(s) ds \\ & \ldots && \int_{t_0}^{t} g(s) \underbrace{\exp((t-s)F)(0, \ldots, 0, 1)}_{\text{Lsg. von } y' = Fy} ds \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ 1. Komponente } (\ldots) = u$$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \int_{t_0}^{t} g(s) u(t-s) ds$$

□

Bemerkung: Hier geht es um die Bestimmung des Inversen des linearen Operators

$$L : \{y \in C^{(n)}(I) : \varphi(t_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(t_0) = 0\} \longrightarrow C(I),$$

$$L\varphi = \varphi^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Phi^{(k)}.$$

Gesucht sind nämlich φ mit $L\varphi - g$, das heißt $\Phi = L^{-1} g$. Damit ist also L^{-1} ein Integraloperator mit dem Kern

$$h(t, s) = u(t-s) 1\!\!1_{(-\infty, t]}(s)$$

Integraloperator: $A\Phi(t) = \int h(t, s) \Phi(s) ds$

34. Autonome Differentialgleichungen, Stabilität und Flüsse

Wir betrachten das System
$$y' = f(y)$$

34.1 Definition (Ruhelage, Gleichgewichtspunkt, Fixpunkt)**:** Ein p heißt *Ruhelage*, *Gleichgewichtspunkt*, oder *Fixpunkt*, wenn

$$f(p) = 0$$

Dann ist $u \equiv p$ eine Lösung von 34.

34.2 Definition (Stabilität von Ruhelagen)**:** Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und $p \in D$ eine Ruhelage.

a) Die Ruhelage heißt *stabil*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit der Eigenschaft, dass jede Lösung von $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$ mit $y_0 \in U_\delta(p)$ für alle $t \geq t_0$ existiert und in $U_\varepsilon(p)$ bleibt.

b) Die Ruhelage heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil ist und ein $\tilde{\delta} > 0$ existiert, sodass jede Lösung u von $y' = f(y)$, $y(t_0) = y_0$ mit $y_0 \in U_{\tilde{\delta}}(p)$ die Gleichung

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = p$$

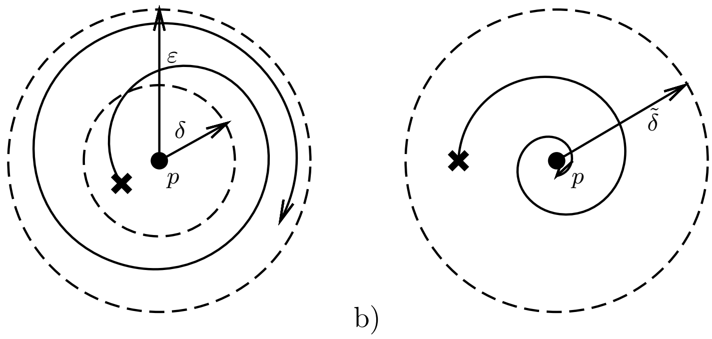
erfüllt.

34.3 Theorem (Stabilität linearer Flüsse)**:** Sei A eine $n \times n$-Matrix und $\exp_A(t) = e^{tA}$ (d. h. $\exp_A$ löst $Y' = AY$, $Y(0) = I$ wird als linearer Fluss bezeichnet).

a) Für die Ruhelage $p = 0$ von $y' = Ay$ sind äquivalent:

   (i) Die Ruhelage $p = 0$ ist stabil.

   (ii) Alle Eigenwerte von A haben einen nicht positiven Realteil und für die Eigenwerte mit verschwindendem Realteil stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit überein.



a) b)

Abbildung 34.1.: stabile (a) und asymptotisch stabile Ruhelage (b)

(iii) Es gibt ein $M \geq 0$ mit $\|\exp_A(t)\| \leq M$ für alle $t \geq 0$.

b) Für die Ruhelage $p = 0$ von $y' = Ay$ sind äquivalent:

(i) Die Ruhelage $p = 0$ ist asymptotisch stabil.

(ii) Alle Eigenwerte von A haben einen negativen Realteil.

(iii) Es gibt $M, \alpha \geq 0$ mit $\|\exp_A(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$.

Beweis: Nur für diagonalisierbares A:

Dann gilt $A = VDV^{-1}$ mit einer Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sowie

$$\exp_A(t) = e^{At} = e^{VDV^{-1}t} = Ve^{Dt}V^{-1}.$$

Ohne Einschränkung können wir $A = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ setzen und es folgt

$$\exp_A(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\exp(t\lambda) = \underbrace{\exp(it\Im\lambda)}_{|\cdot|=1} \exp(t\Re\lambda)$ folgen a) und b) sofort. □

34.4 Lemma (Linearisierte asymptotische Stabilität)**:** Seien $0 \in D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$, $f(y) = Ay + r(y)$ mit der $n \times n$-Matrix A, deren Eigenwerte alle negativen Realteil habe und r mit $r(0) = 0$ und

$$\lim_{x \to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Dann ist $p = 0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage des Systems $y' = f(y)$.

Beweis: nicht hier!

Idee: Der Fall $r = 0$ wurde gerade bewiesen. Ein allgemeines r ist nach Voraussetzung gerade eine kleine Störung.

34.5 Folgerung (Test für asymptotische Stabilität)**:** Seien $D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $p \in D$ mit $f(p) = 0$ und alle Eigenwerte von $Df(p)$ haben negativen Realteil. Dann ist die Ruhelage p von $y' = f(y)$ asymptotisch stabil.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $p = 0$ (sonst Verschieben).

Da f in p differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = f(p) + Df(p)(x - p) + r(x)$$

mit $r(p) = 0$, $\lim_{x\to p} \frac{\|r(x)\|}{\|x-p\|} = 0$.

Also (wegen $p = 0$ und $f(p) = 0$):

$$f(x) = Df(p) \cdot x + r(x)$$

mit $\lim_{x\to 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0$, $r(0) = 0$.

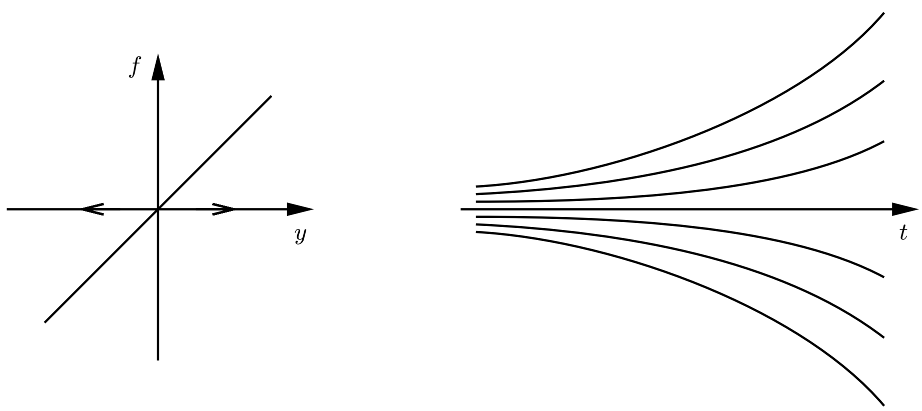
Nach vorigem Lemma folgt die Behauptung. □

Bemerkung:

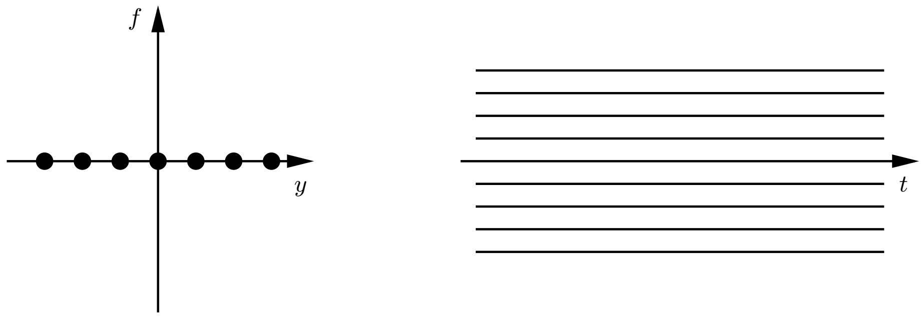
- Das ist der „übliche" Test für asymptotische Stabilität.
- Es gibt weitere wichtige Aussagen zu der Frage, wie die lineare Approximation das Verhalten bei Gleichgewichtspunkten bestimmt.

Beispiel (einfachster Fall)**:** $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ (Lösung: $y(t) = y_0 e^{ta}$)

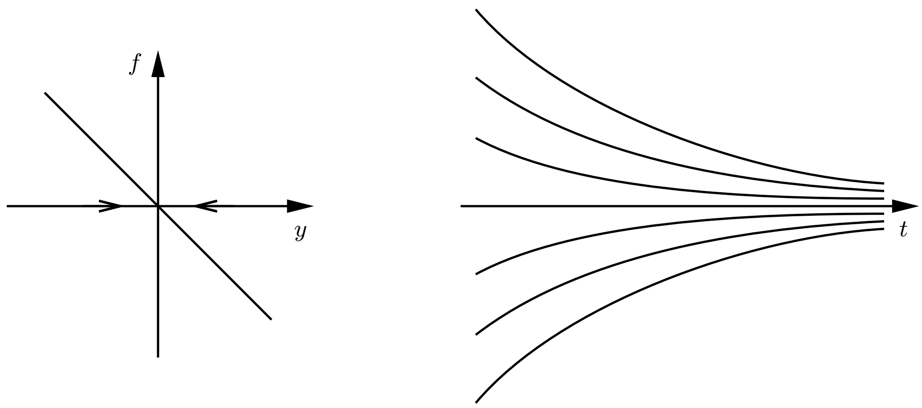
$\mathfrak{R}(a) > 0$: nicht stabil



$\underline{\Re(a) = 0}$: stabil



$\underline{\Re(a) < 0}$: asymptotisch stabil



Wir diskutieren nun noch etwas das Konzept des Flusses:

34.6 Definition (Fluss)**:** Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$, sodass die Lösungen von

$$y' = f(y),\ y(t_0)y_0$$

- eindeutig sind,
- auf ganz $\mathbb{R}$ existieren,

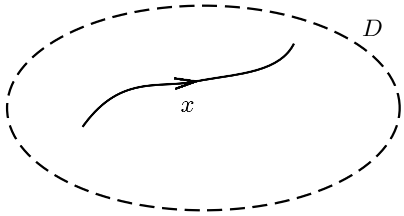
für alle $y_0 \in D$.

Dann definieren wir

$$\varphi: \mathbb{R} \times D \to D,\ (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$$

mit $\varphi_t(x) = u(t)$ (Lösung zur Zeit t), wobei φ die Lösung von $y' = f(y),\ y(0) = x$ ist.

Es heißt φ der *Fluss* zu $y' = f(y)$.



Beispiel: Sei $y' = Ay$ mit der $n \times n$-Matrix A. Dann gilt $\varphi_t(x) = e^{tA}x = \exp_A(t)$.

34.7 Proposition (Charakteristische Eigenschaften des Flusses)**:** 1. $\varphi_0 = id$

2. $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$
3. φ ist stetig. Insbesondere ist φ_t ein Homeomorphismus von D für jedes $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: 1. Das ist klar.

2. Folgt aus eindeutiger Lösbarkeit der Differentialgleichung und der Lösung u von $y' = f(y)$, $y(0) = x$.

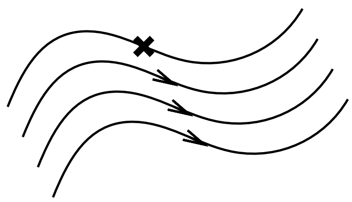
$$\Rightarrow v = u(\cdot + t) \text{ löst } y' = f(y),\ y(0) = u(t)$$
$$\Rightarrow \varphi_{t+s}(x) = u(t+s) = v(s) = \varphi_s(u(t)) = \varphi_s(\varphi_t(x))$$

3. Fehlt.

□

Beachte: 1. und 2. besagen, dass φ eine Gruppeneigenschaft hat.

34.8 Definition (Bahn,Orbit und Periode)**:** Die *Bahn* (der *Orbit*) von x ist gegeben durch $\mathbb{R} \to D$, $t \mapsto \varphi_t(x)$.



$\mathrm{Per}(x) = \{t \in \mathbb{R} : \varphi_t(x) = x\}$ heißen die *Perioden* von x.

34.9 Proposition (Eigenschaften der Perioden)**:** $\mathrm{Per}(x)$ ist eine abgeschlossene *Untergruppe* von $\mathbb{R}$.

Beweis: Das folgt aus den Gruppeneigenschaften des Flusses. □

Damit gilt also:

- $\mathrm{Per}(x) = \mathbb{R}$: x ist Ruhelage.
- $\mathrm{Per}(x) = T\mathbb{Z}$ $(T > 0)$: periodischer Orbit.
- $\mathrm{Per}(x) = \{0\}$: Orbit ist injektiv.

Eine Folgerung der obigen Erwägungen ist, dass Grenzpunkte immer Fixpunkte sind.

34.10 Proposition (Grenzpunkte sind Fixpunkte)**:** Gilt

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = p \in D,$$

so ist p ein *Fixpunkt* von φ.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_s(p) &= \varphi_s\left(\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x)\right) = \lim_{t\to\infty} \varphi_s\left(\varphi_t(x)\right)\\ &= \lim_{t\to\infty} \varphi_{s+t}(x) = \lim_{t'\to\infty} \varphi_{t'}(x) = p.\end{aligned}$$

Da s beliebig ist gilt $\varphi_s(p) = p$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und p ist ein Fixpunkt □

Bemerkung: Entsprechende Aussagen gelten, falls die Lösungen nur auf Teilintervallen von $\mathbb{R}$ existieren.

35. Etwas Fourieranalysis

In diesem Kapitel lernen wir ein wichtiges Hilfsmittel für viele Bereiche der Mathematik kennen - die *Fouriertransformation.*

Die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^N$

Wir geben zunächst einen kurzen Überblick der kommenden Attraktionen:

Für *geeignete* Funktionen f auf $\mathbb{R}^N$ definieren wir $\mathcal{F}f$ durch

$$\mathcal{F}f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y)\, dy$$

Die Fouriertransformation ist dann invertierbar

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} f(y)\, dy$$

und vertauscht Differentiation und Multiplikation mit der Koordinatenfunktion.

Erinnerung (Multiindexnotation)*:* Ein Multiindex α der Dimension N ist gegeben durch $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Für einen solchen Multiindex definiert man den Betrag von α:

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|$$

und die Potenz

$$x^\alpha := \prod_{j=1}^{N} x_j^{\alpha_j}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Weiterhin sei die Multiplikation mit $(x \mapsto x^\alpha)$ definiert durch

$$M_\alpha f\colon x \mapsto x^\alpha f(x).$$

Mit $D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ sei der Ableitungsoperator

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^{N} D_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{N} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

gegeben.

35.1 Definition (Schwartz'scher Raum)**:** Der Schwartz'sche Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (nach Laurent Schwartz) der schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ ist der Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ ein $C := C_{\alpha,\beta}(r)$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|x^\beta||D^\alpha f(x)| \leq C.$$

Das ist äquivalent zu

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 - |x|)^p |D^\alpha f(x)| < \infty$$

für alle $p \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass der Raum $\mathcal{S}$ invariant ist unter Anwendung von D^α und M^α (d.h. für jedes $f \in \mathcal{S}$ ist auch $D^\alpha f$ und $M_\alpha f$ in $\mathcal{S}$ für jeden Multiindex α).

Für Funktionen aus $\mathcal{S}$ können wir die Fouriertransformation definieren.

35.2 Proposition (Fouriertransformation für Funktionen aus $\mathcal{S}$)**:** Für $f \in \mathcal{S}$ existiert

$$g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{R^N} e^{-ixy} f(y) dy$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ und die Funktion g ist stetig und beschränkt.

Beweis: Sei $h(y) := e^{-ixy} f(y)$. Dann ist h stetig und es gilt

$$|h(y)| = \frac{|f(y)|}{(1 + |y|)^{N+1}} (1 + |y|)^{N+1} \overset{f \in \mathcal{S}}{\leq} \frac{C}{(1 + |y|)^{N+1}}.$$

Daher existiert g als uneigentliches Integral und es gilt

$$|g(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy < \infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Es ist also g beschränkt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (e^{-ixy} - e^{-ix'y}) f(y)\, dy \right| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| e^{-ixy} - e^{-ix'y} \right| |f(y)| \frac{(1 + |y|)^{N+1}}{(1 + |y|)^{N+1}}\, dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy \to 0,\ x \to x'. \end{aligned}$$

Zum letzten Schritt: Zerlege $\mathbb{R}^N$ in B_R und $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ mit großem R so dass

$$C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun konvergiert $e^{-ix'y} \to e^{-ixy}$, $x' \to x$ gleichmäßig auf B_R, d. h. für x nahe x' gilt

$$C \int_{B_R} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}}\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

35.3 Definition (Fouriertransformation): Für $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ von f durch

$$\mathcal{F}f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{R^N} e^{-ixy} f(y)\, dy.$$

Notation: Statt $\mathcal{F}f$ wird auch $\hat{f}$ geschrieben.

35.4 Lemma (Grundlegende Eigenschaften von $\mathcal{F}$): Es gilt $\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und

$$D^\alpha \mathcal{F}f = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F} M_\alpha f \qquad \text{und} \qquad M_\alpha \mathcal{F} f = \mathcal{F} D^\alpha f$$

für alle $f \in \mathcal{S}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Bemerkung: Die Fouriertransformation vertauscht Ableiten und Multiplizieren mit x.

Beweis: Sei M_j die Multiplikation mit x_j und e_j der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^N$ für $j = \{1, \ldots, N\}$. Mit f gehört auch $M_j f$ zu $\mathcal{S}$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(x + he_j) - \mathcal{F}f(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy}(e^{-ihy_j} - 1) f(y)\, dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{R^N} e^{-ixy} f(y) \left(\int_0^h (-iy_j) e^{-ity_j}\, dt \right) dy \\
&= -i(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_0^h \left(\int e^{-i(x+te_j)y} y_j f(y)\, dy \right) dt \\
&= -i \int_0^h (\mathcal{F} M_j f)(x + te_j)\, dt.
\end{aligned}$$

Damit folgt nach dem HDI

$$\partial_j \mathcal{F} f(x) = -i(\mathcal{F} M_j f)(x)$$

also

$$D_j \mathcal{F} f = -\mathcal{F} M_j f.$$

Es ist also $D_j \mathcal{F} f$ wieder das Fourierbild einer Funktion aus $\mathcal{S}$ nämlich $M_j f$ und wir können das Verfahren iterieren. Induktiv erhält man dann

$$D^\alpha \mathcal{F} f = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F} M_\alpha f.$$

Damit ergibt eine kleine Rechnung

$$\begin{aligned}
(M_\beta D^\alpha \mathcal{F} f)(x) &= (-1)^{|\alpha|} M_\beta (\mathcal{F} M_\alpha f)(x) \\
&= x^\beta (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} y^\alpha f(y) dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int (D_y^\beta e^{-ixy})(y^\alpha f(y)) dy \\
\text{(partielle Integration)} \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} D^\beta (y^\alpha f(y)) dy \\
(D^\beta (y^\alpha f(y)) \in \mathcal{S}) \quad &= (-1)^{|\alpha|} (\mathcal{F} D^\beta M_\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

Mit $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ folgen sofort die beiden im Lemma genannten Gleichungen. Da $D^\beta M_\alpha f$ zu $\mathcal{S}$ gehört, ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}(D^\beta M_\alpha f)$ beschränkt nach der vorigen Proposition für alle Multiindizes α und β. Damit ist dann also nach der kleinen Rechnung $(M_\beta D^\alpha \mathcal{F} f)$ beschränkt für alle Multiindizes α und β. Damit gehört $\mathcal{F}f$ zu $\mathcal{S}$. □

Wir berechnen nun eine spezielle Fouriertransformation. Damit können wir dann die Bijektivität der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ anschließend leicht beweisen.

35.5 Proposition (Fouriertransformation der Gauß-Glocke)**:** Sei

$$\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}|x|^2\right).$$

Dann gehört φ zu $\mathcal{S}$ und es gilt $\mathcal{F}\varphi = \varphi$.

Beweis: Offenbar ist φ beliebig oft stetig differenzierbar. Weiterhin fällt φ (und alle Ableitungen) schneller als jedes Polynom. Also gehört φ zu $\mathcal{S}$.

Nun zu $\varphi = \mathcal{F}\varphi$:

<u>$N = 1$</u>: Die Funktion $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ löst offenbar das Anfangswertproblem

$$\varphi_1'(x) + x\varphi(x) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Für $\psi := F\varphi_1$ gilt nach dem vorigen Lemma aber ebenfalls

$$\begin{aligned}
\psi' + M_x\psi &= iD\mathcal{F}\varphi_1 + M_x\mathcal{F}\varphi_1 \\
\text{(voriges Lemma)} \qquad &= -i\mathcal{F}M_x\varphi_1 + \mathcal{F}D\varphi_1 \\
&= -i\mathcal{F}(M\varphi + iD\varphi) \\
&= -i\mathcal{F}(\text{Nullfunktion}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und

$$\psi(0) = \mathcal{F}\varphi_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

Damit lösen φ_1 und ψ das gleiche Anfangswertproblem. Nach dem Eindeutigkeitssatz gilt also

$$\mathcal{F}\varphi_1 = \psi = \varphi_1.$$

<u>N beliebig</u>: Offenbar gilt

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{N} \varphi_1(x_j).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\varphi(x) &= \mathcal{F}\left(\prod_{j=1}^{N} \varphi_1(x_j)\right) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} \prod_{j=1}^{N} \varphi_1(y_j)dy = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^{N} e^{-ix_jy_j}\varphi_1(y_j)dy \\
&= \prod_{j=1}^{N} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix_jy_j}\varphi_1(y_j)dy_j = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1)(x_j) = \prod_{j=1}^{N} (\varphi_1)(x_j) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

□

35.6 Theorem (Bijektivität der Fouriertransformation)**:** Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} :\ \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

ist bijektiv. Es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} f(y)\, dy.$$

Insbesondere folgt also $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ und $\mathcal{F}^4 f = f$.

Beweis: Wir zeigen zunächst einige Hilfsformeln:

Formel (A): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int e^{-ixy} g(y)(\mathcal{F}f)(y)dy &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} g(y) \left(\int e^{-iyz} f(x)dz \right) dy \\
\text{(Fubini)} \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(z) \left(\int e^{-i(z-x)y} g(y)dy \right) dz \\
&= \int f(z)(\mathcal{F}g)(z-x)dz \\
(\text{verschieben } z \to z+x) \quad &= \int (\mathcal{F}g)(z) f(z+x)dz.
\end{aligned}$$

Formel (B): Mit $g_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$ für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}g_\varepsilon)(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ixy} g(\varepsilon y)dy \\
(\text{Trafo } z = \varepsilon y) \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \varepsilon^{-N} \int e^{-ixz\frac{1}{\varepsilon}} g(z)dz \\
&= \varepsilon^{-N} (\mathcal{F}g)\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Formel (C): Mit den obigen Formeln kann man außerdem zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned}
\int e^{ixy} g(\varepsilon y)(\mathcal{F}f)(y)dy &= \int e^{ixy} g_\varepsilon(y)(\mathcal{F}f)(y)dy \\
(A) \quad &= \int (\mathcal{F}g_\varepsilon)(z) f(z+x)dz \\
(B) \quad &= \varepsilon^{-N} \int (\mathcal{F}g)\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) f(z+x)dz \\
(\text{Trafo}) \quad &= \int (\mathcal{F}g)(z) f(\varepsilon z + x)dz.
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zur Bijektivität von $\mathcal{F}$:

Wir setzen in (C) die Funktion $g = \varphi = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ aus der vorangehenden Proposition und nutzen $\mathcal{F}\varphi = \varphi$ und $\varphi(0) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} (\mathcal{F}f)(y)dy &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} \varphi(0)(\mathcal{F}f)y)dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(\varepsilon y) \right) (\mathcal{F}f)y)dy \\
(!) \quad &= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} \varphi(\varepsilon y)(\mathcal{F}f)y)dy \\
(C) \quad &= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int (\mathcal{F}\varphi)(z) f(\varepsilon z + x)dz \\
(\mathcal{F}\varphi = \varphi) \quad &= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \varphi(z) f(\varepsilon z + x)dx \\
(!!) \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \varphi(z) \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon z + x)dx \\
&= f(x)(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \varphi(z)dz \\
&= f(x)(\mathcal{F} \circ \varphi)(0) = f(x).
\end{aligned}$$

Zu (!) und (!!): Die Integrale auf $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ sind klein für R groß. Auf B_R hat man gleichmäßige Konvergenz.

Das liefert

$$f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x).$$

Damit folgt sofort $\mathcal{F}^4 = I$. Damit ist $\mathcal{F}$ bijektiv mit Inverser $\mathcal{F}^3$. Weiterhin folgt aus der Formel noch

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x).$$

□

Die bisher bewiesenen Sätze lassen sich zur Untersuchung von Differentialoperatoren verwenden.

Beispiel (Laplaceoperator)**:** Es gilt

$$-\Delta = \mathcal{F}^{-1} M_{|x|^2} \mathcal{F}$$

auf $\mathcal{S}$ (d. h. $-\Delta f = \mathcal{F}^{-1}(|x|^2 \mathcal{F} f)$ für $f \in \mathcal{S}$).

Beweis: Folgt aus der Bijektivität von $\mathcal{F}$ und den bewiesenen Formeln zur Ableitung. □

Beispiel: Für gegebenes $g \in \mathcal{S}$ hat die Gleichung $(-\Delta + 1)f = g$ genau eine Lösung $f \in \mathcal{S}$. Diese ist gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{1 + |\cdot|^2} \mathcal{F} g.$$

Beweis: Da F den Raum $\mathcal{S}$ in sich selber abbildet ist $(-\Delta + 1)f = g$ nach Anwenden von $\mathcal{F}$ und der obigen Aussage äquivalent zu

$$(M_{|\cdot|^2} + 1)\mathcal{F} f = \mathcal{F} g$$

und damit zu

$$\mathcal{F} f = \frac{1}{1 + |\cdot|^2} \mathcal{F} g.$$

Mit g gehört auch $\mathcal{F} g$ und $\frac{1}{1+|\cdot|^2} \mathcal{F} g$ zu $\mathcal{S}$. Damit ist letztere Gleichung äquivalent zu

$$f = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{1 + |\cdot|^2} \mathcal{F} g \right).$$

□

Bemerkung: Entsprechendes gilt auch für $-\Delta + \alpha$ mit $\alpha > 0$.

Zur Berechnung des Inversen von $-\Delta$ reicht das noch nicht. Das liegt tatsächlich daran, dass $-\Delta$ in einem später noch zu präzisierenden Sinne nicht invertierbar ist. Immerhin erhalten wir aus unseren Betrachtungen eine notwendige Bedingung.

Beispiel: Hat die Gleichung $-\Delta f = g$ für ein $g \in \mathcal{S}$ eine Lösung $f \in \mathcal{S}$, so ist diese gegeben durch

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{|\cdot|^2} \mathcal{F} g.$$

Beweis: Wie eben. (Wichtig: Es gehört zu den Voraussetzungen der Aussage, dass f also auch $\mathcal{F} f = \frac{1}{|\cdot|^2} \mathcal{F} g$ zu $\mathcal{S}$ gehört.) □

Für weitergehende Betrachtungen erweist sich noch das Konzept der Faltung als nützlich. Wir führen es als nächstes ein.

35.7 Proposition (Faltung)**:** Für $f \in \mathcal{S}$ und $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ beschränkt, so dass die Einschränkung von g auf jedem Würfel Riemann-integrierbar ist, existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^N$

$$g * f(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(y) f(x-y)\, dy = f * g(x).$$

Beweis: Die Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Substitutionsregel ($y \rightsquigarrow x+y$ und spiegeln). Die Existenz des Integrals folgt, da g beschränkt ist und f schnell fällt. □

35.8 Proposition (Eigenschaften der Faltung)**:** Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ beschränkt, so dass die Einschränkung von g auf jeden Würfel Riemann-integrierbar ist. Dann gilt:

(a) Es ist $f * g$ beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f * g).$$

(b) Fällt g schneller als jedes Polynom, so fällt auch $f * g$ schneller als jedes Polynom.

(c) Haben f und g kompakte Träger, so hat auch $f * g$ kompakten Träger.

Beweis: (a) Es reicht die Formel für die Ableitung zu zeigen. Wir zeigen das durch Induktion nach $|\alpha|$. Um Schreibarbeit zu sparen, diskutieren wir nur den Fall einer Ableitung ($|\alpha| = 1$). Zu zeigen ist also:

$$\frac{1}{h}(f * g(x + he_j) - f * g(x)) \to (\partial_j f) * g(x)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f * g(x + he_j) - f * g(x) &= \int (f(x + he_j - y) - f(x-y)) g(y)\, dy \\ \text{(HDI)} \quad &= \int g(y) \left(\int_0^h \partial_j f(x + se_j - y)\, ds \right) dy \\ \text{(Fubini)} \quad &= \int_0^h \left(\int \partial_j f(x + se_j - y) g(y)\, dy \right) ds. \end{aligned}$$

Es ist nun die Funktion $s \mapsto \int \partial_j f(x+se_j-y) g(y) dy$ stetig in s. Daher folgt aus dem HDI die Behauptung:

$$\frac{1}{h}(f*g(x+he_j) - f*g(x)) = \frac{1}{h}\left(\int_0^h \int \partial_j f(x + se_j - y) g(y)\, dy\, ds \right) \overset{\text{(HDI)}}{\to} \int \partial_j f(x+se_j-y) g(y)\, dy = \partial_j f * g(x)$$

(b) Es gilt offenbar

$$(1 + |x+y|^2) \le 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |(1+|x|^2)^m f * g(x)| &= \left| (1+|x|^2)^m \int f(x-y) g(y)\, dy \right| \\ &\le \int (1+|x|^2)^m |f(x-y)||g(y)|\, dy \\ &= \int (1 + |(x-y) + y|^2)^m |f(x-y)||g(y)|\, dy \\ &\le 2^m \int \underbrace{(1 + |x-y|^2)^m |f(x-y)|}_{\le D, \text{ da } f \in \mathcal{S}} \underbrace{(1+|y|^2)^m |g(y)|}_{\le \frac{C}{(1+|y|^2)^{N+1}}} dy \\ &\le 2^m C D \int \frac{1}{(1+|y|^2)^{N+1}}\, dy \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(c) Seien $K, L \subset \mathbb{R}^N$ kompakt mit $f = 0$ auf $\mathbb{R}^m \setminus K$ und $g = 0$ auf $\mathbb{R}^m \setminus L$. Es gilt

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy.$$

Es kann also $f * g(x) \neq 0$ nur gelten, falls ein y existiert mit $x - y \in K$ und $y \in L$, d. h. $x \in y + K \subset L + K$. Es verschwindet also $f * g$ außerhalb von $K + L$.

□

35.9 Folgerung (Faltung liegt in $\mathcal{S}$)**:** Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gehört auch $f * g$ zu $\mathcal{S}$.

Beweis: Das folgt sofort aus a) und b) der vorigen Proposition. □

Damit kommen wir nun zu Fouriertransformationen von Faltungen.

35.10 Lemma (Fouriertransformation der Faltung)**:** Seien $f, g \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann gelten:

(a) Es gehört $f * g$ zu $\mathcal{S}$ und es gilt

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

(b) Es gehört $f \cdot g$ zu $\mathcal{S}$ und es gilt

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \mathcal{F}(g \cdot f) = \mathcal{F}g * \mathcal{F}f.$$

Beweis: Es genügt a) zu zeigen, da $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bijektiv ist.

Dazu genügt folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(x) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ixy}(f * g)(y)dy \\
\text{(Definition)} \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ixy} \left(\int g(y-z)f(z)\,dz \right) dy \\
\text{(Fubini)} \quad &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ixz} f(z) \left(\int e^{-ix(y-z)} g(y-z)\,dy \right) dz \\
\text{(Substition } y - z \to y) \quad &= \int e^{-ixz} f(z) \mathcal{F}g(x)\,dz \\
&= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}g(x).
\end{aligned}$$

□

Anwendung: Ist $f \in \mathcal{S}$ gegeben und $u \in \mathcal{S}$ eine Lösung von

$$(-\Delta + \alpha)u = f$$

für ein $\alpha > 0$, so erfüllt $w := u * \varrho$ fuer jedes beschränkte ϱ (das auf allen Würfeln Riemann-integrierbar ist) die Gleichung

$$(-\Delta + \alpha)w = f * \varrho.$$

Beweis: Nach dem Bewiesenen gilt

$$(-\Delta+\alpha)w = (-\Delta+\alpha)(u*\varrho) = ((-\Delta+\alpha)u)*\varrho = f*\varrho.$$

□

Diese Anwendung lässt sich verallgemeinern. Sei u eine Lösung von

$$(-\Delta+\alpha)u = \delta_0,$$

wobei δ_0 die Eigenschaft hat, dass

$$\delta_0 * f = f$$

für alle $f \in \mathcal{S}$ (es handelt sich bei δ_0 um die Delta-Distribution). Dann ist auch $w = u * f$ eine Lösung von

$$(-\Delta+\alpha)w = ((-\Delta+\alpha)u)*f = \delta_0 * f = f.$$

Bemerkung: Ist $P(x_1,\dots,x_N) = \sum_{|\alpha|\in K} c_\alpha x^\alpha$ ein Polynom vom Grad $\le K$ in $x_1,\dots,x_N$, so definiert man den Operator $P(D)$ auf $\mathcal{S}$ durch

$$P(D)f = \sum_{|\alpha|\le K} c_\alpha D^\alpha f.$$

Dann gilt (siehe oben)

$$\mathcal{F}P(D)f = P\mathcal{F}f.$$

Entsprechend lassen sich viele Aussagen für Δ ($\leftrightsquigarrow P(x) = |x|^2$) auf den Fall allgemeiner Polynome erweitern.

Notation: Nachfolgend verwenden wir die Schreibweise

$$\tilde{f} := \overline{f(-x)},$$

wobei $\bar{\cdot}$ die komplex Konjugation bedeutet.

35.11 Lemma (komplexe Konjugation einer Fouriertransformation)**:** Für $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mathcal{F}(\tilde{f}) = \overline{\mathcal{F}f}.$$

Beweis: Dieser Zusammenhang folgt durch direkte Rechnung. □

35.12 Proposition (Parsevalsche Gleichung für $\mathcal{S}$)**:** Für $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}f(x)|^2\,dx.$$

Beweis: Sei $g = f * \tilde{f}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int |f(x)|^2\,dx &= g(0) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g)(0) \\
\text{(Definition } \mathcal{F}^{-1}\text{)} \qquad &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \mathcal{F}g(y)\,dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int (2\pi)^{\frac{N}{2}} \mathcal{F}f(y)\mathcal{F}\tilde{f}(y)\,dy \\
\text{(voriges Lemma)} \qquad &= \int \mathcal{F}f(y)\overline{\mathcal{F}f(y)}\,dy \\
&= \int |\mathcal{F}f(y)|^2\,dy.
\end{aligned}$$

□

Die Fouriertransformation auf $\mathbb{T}^N$

In diesem Abschnitt untersuchen wir Darstellungen von periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ in der Form

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}.$$

Wir beginnen mit der Untersuchung auf $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Dann betrachten wir auch Darstellungen der Form

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k\geq 0} a_k \cos(kx) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin(kx) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}.
\end{aligned}$$

35.13 Definition (2π-Periodizität)**:** Eine Funktion auf $\mathbb{R}$ heißt 2π-periodisch, wenn gilt

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:

- Andere Perioden können durch Skalieren auf diesen Fall zurückgeführt werden.
- Offenbar ist f 2π-periodisch genau dann, wenn

  $$f(x + l(2\pi)) = f(x)$$

  für alle $x \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Man definiert dann

$$\mathbb{T} := \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} := \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$$

mit der kanonischen Projektion

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ p(x) = x + 2\pi\mathbb{Z} =: [x].$$

Dann ist f genau dann periodisch, wenn $f = g \circ p$ mit einem g auf $\mathbb{T}$. Es ist dann $[0, 2\pi)$ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{T}$ in $\mathbb{R}$, dass heißt $p: [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ ist bijektiv.

Erinnerung: Man kann die trigonometrischen Funktionen auch schreiben als

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

und für die komplexe Exponentialfunktion gilt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Beispiel (Trigonometrische Polynome)**:** Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\underbrace{(a_k - ib_k)}_{\sim c_k} e^{ikx} + \underbrace{(a_k + ib_k)}_{\sim c_{-k}} e^{-ikx}\right)\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \\ &= \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & : k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + ib_k) & : k < 0 \\ \frac{a_0}{2} & : k = 0 \end{cases}$$

und $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = ic_k - ic_{-k}$.

35.14 Proposition (Fourierkoeffizienten)**:** Die Koeffizienten a_k, b_k, beziehungsweise c_k sind durch g eindeutig bestimmt gemäß

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)\,dx && \text{für } k=0,1,\dots,n,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(kx)\,dx && \text{für } k=1,\dots,n, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx \qquad \text{für } k=-n,\dots,n.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst die zweite Darstellungsform.

Es gilt offenbar

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ilx}e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-l)x}\,dx = \begin{cases}1 & : k=l\\ 0 & : k\neq l\end{cases} = \delta_{kl}.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum e^{ilx}c_k\right)e^{-ikx}\,dx = \sum_{|l|\le n} c_k\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k-l)x}\,dx = \sum_{|l|\le n} c_k\delta_{kl}.$$

In ähnlicher Weise folgt die erste Darstellung unter Nutzung von

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0 && k,l\in\mathbb{Z}\\ &\int_0^{2\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,dx = \delta_{kl}\pi && k,l\ge 1\\ &\int_0^{2\pi}\cos(kx)\cos(lx)\,dx = \begin{cases}0 & : k\neq l\\ \pi & : k=l\neq 0\\ 2\pi & : k=l=0\end{cases} && k,l\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Beispiel: Für ein $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit gleichmäßig konvergenter Darstellung

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$$

gelten analoge Formeln.

Es geht nun darum „beliebige“ periodische Funktionen als Grenzwert von trigonometrischen Polynomen zu schreiben. Dabei werden wir hauptsächlich Darstellungen der Form $\sum c_k e^{ikx}$ untersuchen. In die andere Darstellungsform kann dann leicht umgerechnet werden. Dazu noch etwas Notation:

Notation: Die Menge der periodischen, auf jedem beschränkten Intervall Riemann-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{R}$ bezeichnet.

Für $f, g \in \mathcal{R}$ definieren wir das Semiskalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx$$

und die Halbnorm

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

Gilt $\|f_n - f\| \to 0$, so sagt man, dass (f_n) im Quadratmittel gegen f konvergiert. Offenbar impliziert gleichmäßige Konvergenz die Konvergenz im Quadratmittel. Die Umkehrung gilt allerdings nicht, wie einfache Beispiele zeigen.

35.15 Definition (Semiskalarprodukt und Skalarprodukt)**:** Sei V ein Vektorraum über K und die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \to K$ gegeben. Dann heißt diese Abbildung ein Semiskalarprodukt, wenn für $f, g, h \in V$ gilt

- $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$,
- $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$,
- $\langle f, f\rangle \geq 0$.

Gilt insbesondere noch $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$, so heißt sie Skalarprodukt.

35.16 Proposition: Es ist $\mathcal{R}$ ein Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Semiskalarprodukt auf $\mathcal{R}$.

Beweis: Übung.

35.17 Folgerung: Für das Semiskalarprodukt gilt

- $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung),
- $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$,
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Damit ist $\|\cdot\|$ eine Halbnorm.

Beweis: Übung.

35.18 Proposition: Sei $e_k: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(x) = e^{ikx}$. Dann bilden die e_k ein Orthonormalsystem in $\mathcal{R}$, d.h. es gilt

$$\langle e_k, e_l\rangle = \delta_{k,l}.$$

Beweis: Wir berechnen das Skalarprodukt:

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{e_k(x)} e_l(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \delta_{k,l}.$$

□

Für $f \in \mathcal{R}$ definiert man die Fourierkoeffizienten von f durch

$$c_k := c_k(f) := \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Man definiert weiterhin die approximierten trigonometrischen Polynome s_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$s_n := s_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \le n} \langle e_k, f \rangle e_k.$$

Der Ausdruck $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ heißt dann die Fourierreihe von f. Wie bei Potenzreihen ist erstmal *nicht* klar, in welchem Sinne dieser Ausdruck eine Funktion ist.

35.19 Lemma: (Besselsche Ungleichung) Sei $f \in \mathcal{R}$ und $c_k = c_k(f)$ und $s_n = s_n(f)$ wie oben definiert. Dann gilt

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{|k| \le n} |c_k|^2.$$

Insbesondere gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \le \|f\|^2.$$

Beweis: Wir zeigen die Ungleichung durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
\|f - s_n\|^2 &= \|f - \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k\|^2 \\
&= \langle f - \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k, f - \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k \rangle \\
&= \|f\|^2 - \langle f, \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k \rangle - \langle \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k, f \rangle + \langle \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k, \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k \rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{c_k} - \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2.
\end{aligned}$$

Zum Insbesondere: Das folgt sofort aus dem ersten Teil, da $\|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \|c_k\|^2 \ge 0$ gilt. □

35.20 Folgerung: Sei die Situation wie im vorangegangenen Lemma. Dann gilt

$$\|f\|^2 \geq \left|\frac{a_0}{2}\right| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Beweis: Es gilt $c_0 = \frac{a_0}{2}$, sowie $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp i b_k)$ und damit

$$|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Das grundlegende Resultat der Theorie ist nun das folgende Theorem:

35.21 Theorem: (Konvergenz im Quadratmittel und Parsevalsche Gleichung) Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\|f - s_n\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Insbesondere gilt also die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Beweis: Nach der vorangegangenen Proposition reicht es die zweite Aussage zu zeigen. Für Treppenfunktionen kann die Aussage (mit gewisser Mühe) direkt gezeigt werden. Für allgemeine Funktionen aus $\mathcal{R}$ folgt sie dann durch Approximation. □

Beachte: Es gilt also

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

im Sinne, dass $\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\| \to 0$. Es konvergieren also die s_n im Quadratmittel gegen f. Der Ausdruck

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

heißt dann Fourierreihe von f.

Ist f genügend glatt, so sind auch gleichmäßige Aussagen möglich:

35.22 Lemma (Fourierkoeffizienten der Ableitung)**:** Sei $f \in \mathcal{R}$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar und $f^{(n-1)}$ stückweise stetig differenzierbar (d.h. es gibt $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 2\pi$ mit $f^{(n-1)}|_{[t_j,t_{j+1}]}$ stetig differenzierbar) mit Fourierkoeffizienten c_k für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind für $l = 1, \ldots, n$ die Fourierkoeffizienten von $f^{(l)}$ gegeben durch $(ik)^l c_k$.

Insbesondere gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2n} |c_k|^2 < \infty.$$

Beweis: Ohne Einschraenkung sei f n-mal stetig differenzierbar (sonst auf einzelnen Intervallen argumentieren). Dann ist $f^{(l)}$ stetig und gehört ebenfalls zu $\mathcal{R}$. Für die Fourierkoeffizienten $c_k^{(l)}$ von $f^{(l)}$ erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} c_k^{(l)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f^{(l)}(x)dx \\ &= (ik)^l \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)dx \\ &= (ik)^l c_k. \end{aligned}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt dann für $l = n$ die zweite Aussage. □

Für glatte Funktionen können wir damit gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe zeigen.

35.23 Theorem (Gleichmäßige Konvergenz der s_n)**:** Ist $f \in \mathcal{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar, so konvergieren die s_n gleichmäßig (und insbesondere punktweise) gegen f.

Beweis: Aufgrund des vorigen Lemma gilt für die Fourierkoeffizienten c_k von f

$$\sum |k|^2 |c_k|^2 < \infty.$$

Damit folgt wegen

$$|c_k| = |c_k k|\frac{1}{|k|} \le \frac{1}{2}(|kc_k|^2 + \frac{1}{|k|^2})$$

also

$$\sum |c_k| = \sum |c_k k| \frac{1}{|k|} \le \frac{1}{2}\sum |kc_k|^2 + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{|k|^2} < \infty.$$

Damit konvergiert also

$$s_n = \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}$$

gleichmäßig gegen eine stetige Funktion g. Außerdem konvergiert s_n auch im Quadratmittel gegen g. Damit folgt

$$\|g - f\| \le \|g - s_n\| + \|s_n - f\| \to 0,\ n \to \infty$$

also

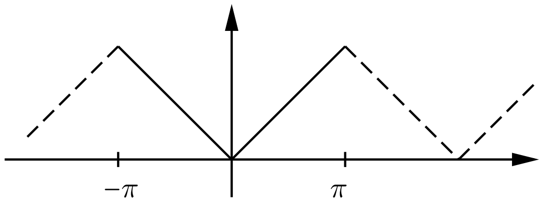
$$0 = \|g - f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Da f und g stetig sind, folgt $f = g$. □

Bemerkung: Ist f lediglich als stetig vorausgesetzt, so konvergiert die Fourierreihe im Allgemeinen nicht für alle Punkte, aber in den meisten.

Beispiel: Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f(x) = |x|$ auf $[-\pi, \pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig und ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}.$$



Insbesondere gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

Beweis: Da f gerade ist, kann man f durch eine reine Kosinusreihe darstellen. Es gilt also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(ks) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin(kx)|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2 \pi} & : k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage über die Fourierkoeffizienten.

„Insbesondere" folgt für $x = 0$. □

Notation: $\sum c_k e^{ikx}$ heißt Fourierreihe von f.

Die obigen Betrachtungen lassen sich auf den höherdimensionalen Fall verallgemeinern. Das diskutieren wir nun kurz.

Eine Funktion f auf $\mathbb{R}^N$ heißt periodisch, wenn gilt

$$f(x) = f(x + 2\pi l)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$ und $l \in \mathbb{Z}^N$. Man definiert

$$\mathbb{T}^N := \frac{\mathbb{R}^N}{2\pi\mathbb{Z}^N} := \{x + 2\pi\mathbb{Z}^N : x \in \mathbb{R}^N\}$$

($\mathbb{T}$ steht hier für Torus) mit der kanonischen Projektion

$$p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{T}^N,\ x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}^N =: [x].$$

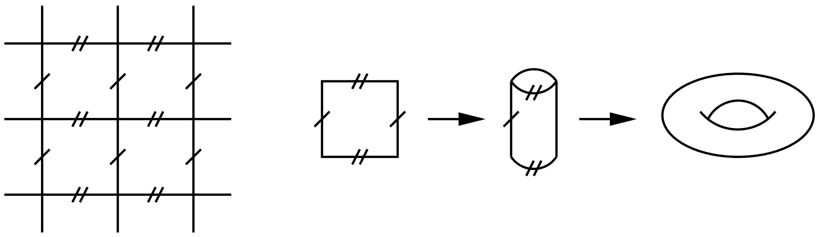


Abbildung 35.1.: $\mathbb{T}^2$: durch Verbinden der / und der // erhält man einen Torus

Dann ist eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ also genau dann periodisch, wenn es ein g auf $\mathbb{T}^N$ gibt mit

$$f = g \circ p.$$

Offenbar ist $I = I_N := [0, 2\pi)^N$ ein Repräsentantensystem von $\mathbb{T}^N$ in $\mathbb{R}^N$, d.h. jedes $z \in \mathbb{T}^N$ kann eindeutig als $p(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)^N$ geschrieben werden.

Sei $R = R_N$ die Menge der periodischen Funktionen, deren Einschränkung auf jeden Würfel Riemann-integrierbar ist. Dann definiert man für $f, g \in \mathbb{R}$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_I \overline{f(x)} g(x) dx, \ \|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

Die $e_k := e^{ik\cdot}$ bilden wieder ein Orthonormalsystem und man definiert die Fourierkoeffizienten von f durch

$$c_k := c_k(f) := \langle e_k, f\rangle$$

für $k \in \mathbb{Z}^N$ und die approximierenden Polynome durch

$$s_n := s_n(f) := \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}.$$

Damit gelten dann die analogen Aussagen zu bereits bewiesenen. Lediglich das Konzept der stückweisen Differenzierbarkeit hat keinen guten Sinn mehr und wird durch Differenzierbarkeit ersetzt.

Die allgemeine Fouriertransformation

Wir untersuchen kurz, was die beiden von uns untersuchten Fouriertransformationen auf $\mathbb{R}^N$ und auf $\mathbb{T}^N$ gemeinsam haben.

Sei $G = \mathbb{R}^N$, beziehungsweise $G = \mathbb{T}^N$. Dann ist G eine abelsche Gruppe.

Die duale Gruppe $\widehat{G}$ zu G ist definiert als

$$\widehat{G} := \{\gamma: G \to \mathbb{T} \text{ stetig} : \gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s),\ \gamma(e) = 1\}.$$

Beispiel ($G = \mathbb{R}^N$)**:** Jedes $k \in \mathbb{R}^N$ definiert durch $e_k: \mathbb{R}^N \to \mathbb{T}$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus $\widehat{G}$. Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von $\widehat{G}$ sind. (Übung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} \simeq \mathbb{R}^N$.

Beispiel ($G = \mathbb{T}^N$)**:** Jedes $k \in (2\pi\mathbb{Z})^N$ definiert durch $e_k: \mathbb{T}^N \to \mathbb{T}$ mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus $\widehat{G}$. Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von $\widehat{G}$ sind. (Übung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} \simeq 2\pi\mathbb{Z}^N$.

Die Fouriertransformation für (geeignete) Funktionen f auf G ist dann definiert als die Funktion $F(f)$ auf $\widehat{G}$, die gegeben ist durch

$$F(f)(\gamma) := \int_G \overline{\gamma(t)} f(t)\, dt.$$

Die Parsevalsche Gleichung lautet dann

$$\int_G |f(t)|^2\, dt = \int_{\widehat{G}} |F(f)(k)|^2\, dk.$$

In den Beispielen heißt das

- $\underline{G = \mathbb{R}^N:}$ $\int_{\mathbb{R}^N} |f(t)|^2\, dt = \int_{R^N} |F(f)(k)|^2\, dk$
- $\underline{G = \mathbb{T}^N:}$ $\int_I |f(t)|^2\, dt = \int_{Z^N} |c_k|^2\, dk = \sum_k |c_k|^2$

Diese Aussage gelten tatsächlich für alle lokal-kompakten abelschen Gruppen.

36. Etwas Hilbertraumtheorie

In diesem Abschnitt studieren wir Vektorräume und ihr Skalarprodukt mit einer Vollständigkeitseigenschaft. Das Skalarprodukt erlaubt es Längen und Winkel zu messen.

Vektorräume mit (Semi-)Skalarprodukt

36.1 Definition ((Semi-)Skalarprodukt)**:** Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$s\colon V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt Semiskalarprodukt auf V, wenn gilt

- $s(x, \lambda y + \mu z) = \lambda s(x,y) + \mu s(x,z)$
- $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$
- $s(x,x) \geq 0$

für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Gilt darüber hinaus noch $s(x,x) > 0$ für $x \neq 0$, so heißt s ein Skalarprodukt. Dann schreibt man meist $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bemerkung:

- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt

$$s(\lambda x, +\mu y, z) = \overline{\lambda} s(x,z) + \overline{\mu} s(y,z),$$

dass heißt s ist antilinear im ersten Argument.

- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt

$$s(0,0) = 0,$$

denn mit $0 = 0x$ und der Linearität folgt $s(0,0) = s(0,0x) = 0s(0,x) = 0$.

- Manchmal fordert man in der Definition auch Linearität im ersten Argument. Das ändert strukturell nichts, führt aber zu (leichten) Veränderungen in manchen Formeln.

Beispiele:

- Der Vektorraum $\mathbb{K}^N$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{N} \overline{x_j} y_j.$$

- $C[0,1]$ ist der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$
$\langle f, f\rangle = 0$ ist nur für $f \equiv 0$ möglich, da f stetig ist.
- $\mathcal{R}$ ist der Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit
$$s(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,dt.$$
Das ist kein Skalarprodukt, da man eine Funktion $f = \begin{cases} 1 & : x = \pi, \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \neq 0$ definieren kann mit $s(f,f) = 0$.
- $\ell^2 := \{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}\colon \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt
$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{x(k)}y(k).$$
Die Summe existiert wegen: $|\overline{x(k)}y(k)| \leq \frac{1}{2}(|x(k)|^2 + |y(k)|^2)$.

Interpretation: Ist $s(y,y) = 1$, so ist
$$z = x - s(y,x)y$$
senkrecht auf y, d.h. es gilt $s(z,y) = 0$. Es gibt also $s(y,x)$ die Länge der Komponente von x in Richtung y an.

Das kann man durch Nachrechnen zeigen:
$$s(z,y) = s(x - s(y,x)y, y) = s(x,y) - \overline{s(y,x)}s(y,y) = 0.$$

36.2 Proposition (Polarisierung)**:** Ist s ein Semiskalarprodukt auf V, so gilt mit $q(x) := s(x,x)$ für $x \in V$
$$s(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) & : \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy)) - iq(x+iy)) & : \mathbb{K} = \mathbb{R} \end{cases}.$$

Beweis: Das folgt leicht durch Einsetzen. □

Für Semiskalarprodukte gelten zwei fundamentale Formeln: die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Parallelogrammidentität.

36.3 Proposition (Cauchy-Schwarz Ungleichung)**:** Sei V ein Vektorraum mit Semiskalarprodukt $s(\cdot,\cdot)$. Dann gilt

$$|s(x,y)| \le s(x,x)^{1/2} s(y,y)^{1/2}.$$

für alle $x, y \in V$.

Beweis: Sei

$$F(t) := s(x+ty, x+ty) = s(x,x) + ts(x,y) + ts(x,y) + t^2 s(y,y).$$

Da s ein Semiskalarprodukt ist, gilt $F \ge 0$. Das ist nur möglich, wenn die behauptete Ungleichung gilt:

Ohne Einschränkung ist $s(x,y) \ge 0$ (sonst x mit $e^{i\alpha}$ multiplizieren) und weiterhin $s(x,y) > 0$ (sonst ist die Aussage klar). Damit gilt also

$$F(t) = s(x,x) + 2ts(x,y) + t^2 s(y,y).$$

Wegen $F \ge 0$ und $s(x,y) \ne 0$ folgt $s(y,y) \ne 0$. Dann ist auch

$$\frac{1}{s(y,y)} F = \frac{s(x,x)}{s(y,y)} + 2t \frac{s(x,y)}{s(y,y)} + t^2 = \left(t + \frac{s(x,y)}{s(y,y)}\right)^2 + \frac{s(x,x)}{s(y,y)} - \left(\frac{s(x,y)}{s(y,y)}\right)^2$$

ein nichtnegatives Polynom. Damit folgt

$$\frac{s(x,x)}{s(y,y)} - \left(\frac{s(x,y)}{s(y,y)}\right)^2 \ge 0.$$

Das liefert die Aussage

$$|s(x,y)| \le \sqrt{s(x,x)s(y,y)}.$$

□

Bemerkung: Ist s ein Skalarprodukt, so gilt $|s(x,y)| = s(x,x)^{1/2} s(y,y)^{1/2}$ für $x, y \in V$ genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. (Übung: Ohne Einschränkung gilt $s(x,x) = s(y,y) = 1$. Betrachte $z = x - s(y,x)y$.)

36.4 Folgerung: Ist s ein Semiskalarprodukt auf V, so ist

$$\|x\| := s(x,x)^{1/2}$$

eine Halbnorm, dass heißt es gilt

- $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x\| \ge 0$,

für alle $x \in V$ und $\lambda \ne 0$. Ist s sogar ein Skalarpodukt, so ist $\|\cdot\|$ sogar eine Norm, dass heißt es gilt $\|x\| > 0$ für alle $x \ne 0$.

Beweis: Bis auf die erste Eigenschaft folgt alles sofort. Wir zeigen die erste Eigenschaft:

$$\|x+y\|^2 = s(x+y, x+y) = s(x,x) + s(x,y) + s(y,x) + s(y,y) \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zur Parallelogrammidentität.

36.5 Proposition (Parallelogrammidentität)**:** Sei s eine Semiskalarprodukt auf V und $q(x) = s(x,x)$. Dann gilt für alle $x, y \in V$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(Zeichnung)

Beweis: Das folgt durch direkte Rechnung.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = s(x+y,x+y) + s(x-y,x-y) = s(x,x) + s(y,y) + s(x,x) + s(y,y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

□

Bemerkung (Jordan/von Neumann)*:* Eine (Halb)Norm auf einem Vektorraum wird genau dann durch ein (Semi)Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammidentität gilt. Dieses Skalarprodukt ist durch Polarisierung bestimmt. In diesem Sinne ist die Parallelogrammidentität die fundamentale Eigenschaft eines Raumes mit innerem Produkt.

Ein wesentliches Konzept in Räumen mit (Semi)Skalarprodukt ist das der Orthogonalität.

36.6 Definition (Orthogonalität)**:** Sei V ein Vektorraum mit (Semi)Skalarprodukt. Dann heißen $x, y \in V$ orthogonal $x \perp y$, wenn gilt

$$s(x,y) = s(y,x) = 0.$$

Ist $A \subset V$, so definiert man das orthogonale Komplement von A durch

$$A^\perp := \{u \in V : s(u,a) = 0 \text{ für alle } a \in A\}.$$

36.7 Proposition (Orthogonales Komplement ist abgeschlossen)**:** Sei V Vektorraum mit innerem Produkt und $A \subset V$. Dann ist $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum.

Beweis: <u>$A^\perp$ ist Unterraum:</u> Das folgt aus der Linearität von s:

$$s(a, x + \lambda y) = s(a,x) + \lambda s(a,y) = 0, \text{ mit } x, y \in A^\perp,\ \lambda \in \mathbb{K}$$

<u>Abgeschlossenheit:</u> Sei $x_n \in A^\perp$ und $x \in V$ mit $\|x_n - x\| \to 0$. Dann gilt

$$s(a,x) = s(a,x_n) + s(a, x - x_n) = 0.$$

Damit liegt x in $A^\perp$. □

36.8 Definition (Orthogonalsystem)**:** Sei V ein Vektorraum mit Semiskalarprodukt s. Dann heißen die Vektoren $e_1, e_2, \dots, e_N$, beziehungsweise $e_1, e_2, \dots$ ein Orthonormalsystem, wenn gilt

$$s(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

für alle $i, j \in I$.

Wir sammeln einige wesentliche Eigenschaften orthogonaler Vektoren:

36.9 Proposition (Eigenschaften orthogonaler Vektoren)**:** Sei V ein Vektorraum mit (Semi)Skalarprodukt s.

a) (Pythagoras) Gilt $x \perp y$ so folgt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

b) Ist (e_j), $j = 1, \dots, N$ ein endliches Orthonormalsystem so gilt für jedes $x \in V$

$$x - \sum_{j=k}^{N} s(e_k, x) e_k \perp e_j, \;\; j = 1, \dots, N.$$

c) (Besselsche Ungleichung) Ist (e_j) ein beliebiges Orthonormalsystem, so gilt für jedes $x \in V$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |s(e_k, x)|^2.$$

Beweis: a) Das kann man durch direkte Rechnung zeigen:

$$\|x + y\|^2 = s(x + y, x + y) = s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) = \|y\|^2 + \|x\|^2$$

b) Für den Fall eines Vektors e_1 rechnet man

$$s\left(x - \sum_{k=1}^{N} s(e_k, x) e_k, e_j\right) = s(x, e_j) - \sum_{k=1}^{N} s(e_k, x) s(e_k, e_j) = s(x, e_j) - s(x, e_j) = 0.$$

c) Sei $e_{j_1}, \dots, e_{j_N}$ ein beliebiges endliches Teilsystem von (e_j). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|x - \sum_{k=1}^{N} s(e_{j_k}, x) e_{j_k} + \sum_{k=1}^{N} s(e_{j_k}, x) e_{j_k}\|^2 \\
&\overset{(a)}{=} \|x - \sum_{k=1}^{N} s(e_{j_k}, x) e_{j_k}\|^2 + \|\sum_{k=1}^{N} s(e_{j_k}, x) e_{j_k}\|^2 \\
&\leq \|\sum_{k=1}^{N} s(e_{j_k}, x) e_{j_k}\|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} |s(e_{j_k}, x)|^2.
\end{aligned}$$

Da die Aussage für beliebige endliche Teilsysteme gilt, folgt sie auch für die Ursprungsmenge.

□

Die vorangehende Proposition zeigt die Nützlichkeit eines Orthonormalsystems. Aus jedem abzählbaren System linear unabhängiger Vektoren kann man ein Orthonormalsystem gewinnen. Wir wollen nun einen Formalismus dazu kennen lernen.

36.10 Proposition (Gram/Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)**:** Seien V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und die Vektoren $v_1,\ldots,v_N \in V$ (bzw. $v_j \in V$, $j \in \mathbb{N}$) linear unabhängig. Dann bilden die induktiv definierten Vektoren

$$e_1 := \frac{1}{\|v_1\|}$$

$$e_{k+1} := \frac{1}{\|v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} s(e_k, v_{k+1})e_k\|}\left(v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} s(e_k, v_{k+1})e_k\right)$$

ein Orthonormalsystem mit

$$\mathrm{Lin}\{e_1,\ldots,e_k\} = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_k\}$$

für alle k.

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion nach k geführt, mit der Aussage „$e_1,\ldots,e_k$ sind ein Orthonormalsystem mit $\mathrm{Lin}\{e_1,\ldots,e_k\} = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_k\}$".

Für $k = 1$ ist die Aussage klar.

$\underline{k \Rightarrow (k+1)}$: Es ist $w_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} s(e_k, v_{k+1})e_k$ senkrecht auf e_j, $j = 1,\ldots,k$ (nach voriger Proposition) und verschwindet nicht, aufgrund der linearen Unabhängigkeit der v_j und der Bedingung an die linearen Hüllen. Durch Normieren erhalten wir e_{k+1} und $e_1,\ldots,e_{k+1}$ bilden ein Orthonormalsystem. Es ist

$$\mathrm{Lin}\{e_1,\ldots,e_k,e_{k+1}\} = \mathrm{Lin}\{e_1,\ldots,e_k,w_{k+1}\} = \mathrm{Lin}\{e_1,\ldots,e_k,v_{k+1}\} = \mathrm{Lin}\{v_1,\ldots,v_{k+1}\}.$$

□

Bemerkung: Auch wenn die (v_j) nicht linear unabhängig sind, kann man das Gram/Schmidtsche Verfahren in einer einfachen Modifikation anwenden. Dazu streicht man alle diejenigen N bei denen $w_N = 0$ gilt.

Hilberträume

Wir untersuchen Entwicklungen der Form

$$x = \sum c_k e_k,$$

wobei e_k das Orthonormalsystem ist und $\sum |c_k|^2 < \infty$ erfüllt ist. Im Hilbertraum gilt:

- Jedes x aus dem Raum kann eindeutig so dargestellt werden mit $c_k = s(e_k, x)$.
- Jede solche Summe stellt ein x aus dem Raum dar.

36.11 Definition (Hilbertraum)**:** Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt Hilbertraum, wenn er bezüglich $\|\cdot\|$ vollständig ist, dass heißt jede Cauchy Folge einen Grenzwert hat.

36.12 Theorem (Approximationssatz)**:** Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ist C eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V, so gibt es zu jedem $x\in V$ genau ein $y\in C$ mit

$$\|x-y\| = d(x,Y) := \inf\{\|x-z\| : z\in C\}.$$

Damit existiert also die beste Approximation an x in C.

(Zeichnung.)

Beweis: Bei dem Satz handelt es sich um eine fundamentale Eigenschaft eines Hilbertraumes. Entsprechend spielen die fundamentalen Eigenschaften des Hilbertraumes, nämlich Vollständigkeit und Parallelogrammidentität eine Rolle:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Sei $d := d(x,C)$.

Eindeutigkeit: Seien y_1, y_2 solche Punkte. Anwenden von Parallelogrammidentität mit $x-y_1$ statt x und $x-y_2$ statt y liefert

$$\|2x-y_1-y_2\|^2 + \|y_1-y_2\|^2 = 2\|x-y_1\|^2 + 2\|x-y_1\|^2.$$

Damit folgt

$$4\|x-\frac{1}{2}(y_1+y_2)\|^2 + \|y_1-y_2\|^2 = 4d^2.$$

Aufgrund der Konvexität und der Definition von d lässt sich der linkeste Term durch $4d^2$ nach unten abschätzen. Damit folgt die Eindeutigkeit mit

$$\|y_1-y_2\|^2 = 0.$$

Existenz: Sei (y_n) eine Folge in C mit

$$\|x-y_n\|^2 \to d.$$

Einsetzen in Parallelogrammidentität mit $x-y_n$ statt x und $x-y_m$ statt y liefert (wie beim Beweis der Eindeutigkeit)

$$\|2x-y_n-y_m\|^2 + \|y_n-y_m\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2.$$

Damit folgt

$$y_n - y_m\| \to 0.$$

Daher ist (y_n) eine Cauchy Folge. Aufgrund der Hilbertraumeigenschaft konvergiert dann (y_n). Da A abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert y wieder zu A. Weiterhin gilt nach Definition

$$\|x-y\| = \lim\|x-y_n\| = d.$$

□

Beachte: a) Sowohl die Voraussetzung der Konvexität als auch der Abgeschlossenheit sind nötig.

(Übung: Ist die Menge konvex, aber nicht abgeschlossen, so muss es keine beste Approximation geben; sie könnte ja gerade fehlen. Ist die Menge abgeschlossen und nicht konvex, kann es wiederum mehrere beste Approximationen geben. Es kann dann auch keine beste Approximation geben.)

b) In Räumen, die keine Hilberträume sind, muss die Aussage nicht gelten. (Übung)

36.13 Theorem (Projektionssatz)**:** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Dann lässt sich jedes $x \in V$ eindeutig schreiben als

$$x = y + z \text{ mit } y \in U \text{ und } z \in U^{\perp}.$$

Beweis: Eindeutigkeit: Sei $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y \in U$ und $z, z' \in U^{\perp}$. Dann gilt

$$y - y' = z' - z \in U \cap U^{\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt die Eindeutigkeit.

Existenz: Es ist U abgeschlossen und konvex. Daher existiert nach dem vorigen Satz ein (eindeutiges) $y \in U$ mit

$$\|x - y\| = d(x, U) = \inf\{\|x - z\| : z \in U\}.$$

Sei $z = x - y$. Dann gilt also

$$x = y + z$$

mit $y \in U$.

Es bleibt somit noch zu zeigen, dass $z \perp U$: Sei dazu $u \in U$ beliebig. Dann hat die Funktion

$$F = F_u : \mathbb{R} \to [0, \infty), F(t) = \|(x - y) + tu\|^2$$

ein Minimum bei $t = 0$ nach Konstruktion von $z = x - y$. Es gilt

$$F(t) = \|x - y\|^2 + t\langle x - y, u\rangle + t\langle u, x - y\rangle + t^2\|u\|^2,$$

also

$$F(t) = \|x - y\|^2 + 2t\Re\langle (x - y), u\rangle + t^2\|u\|^2.$$

Da F differenzierbar ist und ein Minimum in $t = 0$ hat folgt

$$0 = F^{'}(0) = \Re\langle (x - y), u\rangle$$

für jedes beliebige $u \in U$. Damit folgt

$$0 = \Re\langle x - y, \lambda u\rangle$$

für alle $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit $\lambda = \overline{\langle x - y, u\rangle}$ folgt

$$0 = |\langle (x - y), u\rangle|^2.$$

Das liefert die gewünschte Orthogonalität. □

Beispiel: Seien $e_1, \ldots, e_N$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum und $U := \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_N\}$. Dann gilt für $x \in V$, $y = x - \sum_{j=1}^{N}\langle e_j, x\rangle e_j$. Insbesondere ist also für jedes $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{K}$

$$\|x - \sum_{j=1}^{N} c_j e_j\|^2 \geq \|x - \sum_{j=1}^{N}\langle e_j, x\rangle e_j\|^2.$$

Beweis: Es ist (s.o.) $y \perp U$ und $x - y \in U$. Damit gilt also

$$x = y + (x - y)$$

mit $y \in U$ und $(x - y) \in U^\perp$ und aus der Eindeutigkeit folgt die gewünschte Aussage.

Variante: Wir rechnen die Approximationseigenschaft nach: Es gilt

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 &= \left\| (x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) + \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j - \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 \\
&= \left\| (x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) + \sum_{j=1}^N (\langle e_j, x\rangle - c_j) e_j \right\|^2 \\
\text{(Pythagoras)} \qquad &= \left\| (x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^N (\langle e_j, x\rangle - c_j) e_j \right\|^2 \\
&\geq \left\| (x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x\rangle e_j) \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Es wird also die Differenz minimal für $c_j = \langle e_j, x\rangle$. □

36.14 Folgerung: a) Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, so gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

b) Ist $A \in H$ beliebig, so gilt $\overline{Lin(A)} = A^{\perp\perp}$.

Beweis: a) $U \subset U^{\perp\perp}$: Ist $x \in U$ so gilt für alle $z \in U^\perp$ nach Definition von $U^\perp$, dass

$$\langle x, u\rangle = 0.$$

Damit gilt $u \in U^{\perp\perp}$

$U^{\perp\perp} \subset U$: Sei $x \in U^{\perp\perp}$. Dann gilt nach dem vorigen Satz $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Damit folgt

$$z = x - y \in U^\perp \cap U^{\perp\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt $x = y \in U$.

b) Mit $A^\perp = \mathrm{Lin}\, A^\perp = \overline{\mathrm{Lin}\, A}^\perp$ folgt b) sofort aus a).

□

36.15 Definition (Orthogonale Projektion)**:** Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, so definiert man die Abbildung

$$P_U : H \to H, x \mapsto y$$

mit $x = y + z$, wobei $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Es heißt P_U die *orthogonale Projektion* auf U.

Dann gilt nach dem bisher gezeigtem für jedes $P = P_U$:

- $I = P_U + P_{U^\perp}$, denn $U^{\perp\perp} = U$.

- $P = P^2$.
- $\langle Pw, v\rangle = \langle w, Pv\rangle$.

Man sagt: Die orthogonale Projektion auf U ist eine selbstadjungierte idempotente Abbildung.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass jede Abbildung, die selbstadjungiert und idempotent ist, eine orthogonale Projektion sein muss.

36.16 Lemma: Sei A eine Teilmenge eines Hilbertraumes. Dann sind äquivalent:

(i) $\overline{\operatorname{Lin} A} = V$,

(ii) $A^\perp = \{0\}$.

Eine Menge mit dieser Eigenschaft heißt *total.*

Beweis: Das folgt leicht aus $\overline{\operatorname{Lin}(A)} = A^{\perp\perp}$. □

Wir wenden uns nun Entwicklungen nach Orthonormalsystemen zu.

36.17 Theorem (Darstellung mit Koeffizienten)**:** Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und (e_j) ein Orthonormalsystem. Seien $c_j \in \mathbb{K}$ mit $\sum |c_j|^2 < \infty$ gegeben. Dann existiert $x = \sum c_j e_j$ (d.h. es gibt ein $x \in V$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches A existiert mit

$$\|x - \sum_{j\in B} c_j e_j\| < \varepsilon$$

für alle endlichen $B \supset A$) und es gilt

$$\|x\|^2 = \sum |c_j|^2.$$

Beweis: Es können nur abzählbar viele c_j nicht verschwinden. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Indexmenge abzählbar ist. Wir zeigen zunächst, dass

$$S_N \colon \sum_{j=1}^{N} c_j e_j$$

eine Cauchy-Folge ist. Es gilt

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{j=N+1}^{M} |c_j|^2 \to 0,\ N, M \to \infty.$$

Daher konvergiert (S_N) gegen ein $x \in V$ (Hilbertraum). Wegen $\sum |c_j|^2 < \infty$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches A mit

$$\sum_{j\notin B} |c_j|^2 < \varepsilon$$

für alle $B \supset A$. Damit gilt dann für solche B

$$\|x - \sum_{j\in B} c_j e_j\|^2 = \lim_{N\to\infty} \|S_N - \sum_{j\in B} c_j e_j\|^2 \le \sum_{j\notin A} |c_j|^2 < \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung: Der Satz liefert insbesondere die Aussage, dass man die Reihe umsortieren kann, denn es kommt nur darauf an die „wesentlichen“ c_j berücksichtigt zu haben.

36.18 Lemma (Charakterisierung Basis)**:** Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und (e_j) ein Orthonormalsystem. Dann sind äquivalent:

(i) (e_j) ist maximal (d.h. jede Orthonormalbasis $(e'_\alpha)_\alpha$, die (e_j) enthält stimmt mit diesem ueberein).

(ii) Es gilt $\overline{\mathrm{Lin}\{e_j\}} = V$, d.h. (e_j) ist total.

Äquivalente Formulierung: $\{e_j\}^\perp = \{0\}$

(iii) Für jedes $x \in V$ gilt $x = \sum\langle e_j, x\rangle e_j$.

(iv) Für jedes $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x\rangle|^2$. (Parsevalsche Gleichung)

Beweis: (i)→(ii): Wäre die Aussage $\{e_j\}^\perp = \{0\}$ falsch, so gäbe es ein $x \perp \{e_j\}$ und das widerspräche der Maximalität von (e_j).

(ii)→(iii): Nach Besselscher Ungleichung gilt $\sum|\langle e_j, x\rangle|^2 < \infty$. Damit existiert nach dem Darstellungssatz $y = \sum\langle e_j, x\rangle e_j$. Es ist nach Konstruktion $x - y \in \{e_j\}^\perp$. Wäre als $x - y \neq 0$, so hätte man einen Widerspruch zu (ii).

(iii)→(iv): Das folgt aus dem Darstellungssatz.

(iv)→(iii): Es gilt nach Pythagoras und (iv):

$$\sum_j |\langle e_j, x\rangle|^2 = \|x\|^2 = \|x - \sum ..\|^2 + \|\sum\|^2.$$

Also folgt $\|x - \sum\|^2 = 0$.

(iii)→(i): Klar. (Ein $x \perp e_j$ könnte nicht nach e_j entwickelt werden.) □

36.19 Definition (Basis)**:** Ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum heißt Basis, wenn es eine der Eigenschaften des vorangehenden Lemma erfüllt.

36.20 Theorem (Hilberträume besitzen Basen)**:** Jeder Hilbertraum besitzt eine Basis.

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Zornschen Lemmas beziehungsweise Gram / Schmidt.

36.21 Definition (Separabler Hilbertraum)**:** Ein Hilbertraum heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare Basis besitzt, beziehungsweise eine abzählbare totale Menge ist.

36.22 Folgerung: Sei V ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum von V. Sei (e_j) eine Basis von U. Dann ist die orthogonale Projektion von V auf U gegeben durch

$$P_U x := \sum_j \langle e_j, x\rangle e_j$$

wobei (e_j) eine beliebige (nach dem vorigen Satz existierende) Basis von U ist.

Beweis: Es gilt $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \perp U$. Zusammen mit der Konstruktion der (e_j) gilt daher

$$P_U x = y = \sum \langle e_j, y\rangle e_j = \sum \langle e_j, y+z\rangle e_j.$$

Das liefert die Aussage. □

Damit lässt sich im Hilbertraum (fast) genauso rechnen wie im euklidischen Raum!

Beispiel (ℓ^2)**:** ℓ^2 ist vollständig.

Beispiel (*Der* Hilbertraum $L^2(\Omega)$)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen (zum Beispiel $\Omega = \mathbb{R}^N$, oder $\Omega = (0, 2\pi)^N$). Eine Menge $N \subset \Omega$ heißt Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ achsenparallele Quader Q_n, $n \in \mathbb{N}$ existieren mit

- $N \subset \bigcup Q_n$,
- $\sum |Q_n| < \varepsilon$.

Jede Menge aus endlich vielen Punkten ist eine Nullmenge, ebenso jede Menge aus abzählbar vielen Punkten. Jede Menge, die in einer $N = 1$ - dimensionalen Unterraum enthalten ist, ist eine Nullmenge.

Wir definieren nun auf

$$\mathcal{C}_c(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ stetig mit kompaktem Träger}\}$$

ein Skalarprodukt durch

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega \overline{f} g \, dx.$$

mit zugehöriger Norm

$$\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

Sei $\mathcal{L}(\Omega)$, die Menge der Funktionen

$$f : \Omega \to \mathbb{C}$$

für die eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}_c(\Omega)$ existiert mit

- $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega$ außerhalb einer Nullmenge.
- (f_n) ist eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|$.

Es zeigt sich: Sind (f_n) und (f'_n) zwei solche Folgen zu f so gilt

$$\|f_n - f'_n\| \to 0.$$

Damit kann die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ kann auf $\mathcal{L}(\Omega)$ fortgesetzt werden und liefert ein Semiskalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \lim\langle f_n, g_n\rangle.$$

Es handelt sich bei $\langle f, g\rangle$ nur noch um eine Semiskalarprodukt, wie man leicht sieht, wenn man Funktionen einsetzt, die in allen Punkten bis auf einen verschwinden. Um ein Skalarprodukt zu erhalten müssen wir einen Quotienten bilden: Auf $\mathcal{L}(\Omega)$ wird durch

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\| = 0$$

eine Äquivalenzrelation gebildet. Wir setzen

$$[f] := \{g : g \sim f\}.$$

Dann wird

$$L^2(\Omega) := \mathcal{L}(\Omega), \sim := \{[f] : f \in \mathcal{L}(\Omega)\}$$

mit

$$[f] + [g] := [f + g], \; \lambda[f] := [\lambda f]$$

zu einem Vektorraum. Durch

$$\langle [f], [g]\rangle := \langle f, g\rangle$$

wird dann ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ definiert.

36.23 Theorem (Hilbertraum L^2)**:** Es ist $L^2(\Omega)$ mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Hilbertraum.

Aus der Konstruktion dann folgt sofort:

36.24 Folgerung: Es ist $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, dass heißt zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ existiert eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}_c(\Omega)$ mit $f_n \to f$.

Ab jetzt werden wir die Elemente von L^2 mit f, g bezeichnen.

Beispiele:

- $(N = 1)$ Sei $\Omega = (0, 2\pi)$ gegeben. Eine Orthonormalbasis von $L^2((0, 2\pi)$ ist gegeben durch

  $$e_k := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

  Jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ kann also eindeutig dargestellt werden in der Form

  $$f = \sum_k \langle e_k, f\rangle e_k.$$

  Das ist gerade die Fourierreihe von f.

- Sei $\Omega = (0, 2\pi)^N =: I$ gegeben. Eine Orthonormalbasis von $L^2(I)$ ist gegeben durch

$$e_k := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{ikx}, \ k \in \mathbb{Z}^N.$$

Jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ kann also eindeutig dargestellt werde in der Form

$$f = \sum_k \langle e_k, f \rangle e_k.$$

Das ist wieder die Fourierreihe von f.

- Sei nun $\Omega = \mathbb{R}^N$. Auch hier gibt es (natürlich) eine Orthonormalbasis, wenn auch keine so einfache. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ lässt sich eindeutig zu einer Abbildung

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzen mit

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f \rangle = \|\mathcal{F}f\|^2 = \int |\mathcal{F}f(k)|^2 \, dk = \int |f(x)|^2 \, dx = \langle f, f \rangle.$$

(*Parsevalsche Gleichung*) Entsprechendes gilt für die inverse Fouriertransformation. Damit gilt dann also nach Polarisation

$$\langle Ff, Fg \rangle = \langle f, g \rangle = \langle F^{-1} f, F^{-1} g \rangle.$$

Die Fouriertransformation ist also unitär!

Kleiner Ausblick

Sei H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $T: H \to H$ heißt linear, wenn gilt

$$T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty.$$

Zu einer solchen Abbildung T definiert man die adjungierte Abbildung T^* mit

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle.$$

(Im Falle des $\mathbb{K}^N$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt handelt es sich gerade um das Bilden der adjungierten Matrix, dass heißt der komplex konjugierten, transponierten Matrix.)

Prominente Klassen von Operatoren sind die folgenden:

- (Projektionen) Ein Operator $P: H \to H$ heißt Projektion, wenn gilt

$$P = P^* \text{ sowie } P = P^2.$$

Es lässt sich zeigen, dass jeder solche Operatoren gerade die Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum ist, nämlich das Bild von P.

- (Selbstadjunigierte Operatoren) Ein Operator $T: H \to H$ heißt selbstandjungiert, wenn gilt $T = T^*$ also
$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$
(vgl. symmetrische Matrizen)

  Beispiel: Der Laplace Operator Δ ist selbstadjungiert. Allerdings muss man etwas vorsichtig sein, da er nicht auf dem ganzen Raum L^2 definiert ist.

  Der Hauptsatz über symmetrische Matrizen lässt sich dann formulieren als:

  Jede symmetrische Matrix A kann geschrieben werden als
$$A = \sum \lambda_j P_j.$$
Dabei sind $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix, P_j die Projektionen auf die Eigenräumen und es gilt
$$I = \sum P_j \text{ sowie } P_j P_k = P_k P_j = 0$$
für alle $j \neq k$ (d.h. Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal). Eine ähnliche, aber kompliziertere Aussage gilt für alle selbstadjunigierten Operatoren.

- (Unitäre Abbildungen)

Selbstadjunigierte Operatoren: Ein Operator $U: H \to U$ heißt unitär, wenn gilt $U^* = U^{-1}$. Das ist genau dann der Fall wenn gilt

- U ist surjektiv,
- $\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle$ für alle $x, y \in H$.

(vgl. unitäre bzw. orthogonale Matrizen)

Beispiel: Ist A selbstadjungiert, so ist $U := e^{-iA}$ unitär (vgl. Matrizen). Es gilt nämlich
$$U^* = e^{iA} \text{ sowie } UU^* = e^{-iA} e^{iA} = e^I = 1 = e^{iA} e^{-iA} = U^* U.$$

Insbesondere gehört zu jedem selbstadjungierten Operator A eine Familie
$$U: \mathbb{R} \to \text{unitäre Operatoren}, \ t \mapsto e^{-itA}.$$

Es gilt:

- $U(0) = I$,
- $U(t+s) = U(t)U(s)$, insbesondere $U(-s) = U(s)^{-1}$.

Aufgrund dieser Eigenschaften spricht man von einer unitären Gruppe. Es löst ψ_t die Differentialgleichung

$$\partial_t \psi = -iA\psi_t.$$

(Im Rahmen von endlichdimensionalen Hilbertrauemen (d.h. für Matrizen) sind diese Eigenschaften aus der Algebra bekannt bzw. wurden im Rahmen der Diskussion von Differentialgleichungen bewiesen. In unendlichdimensionalen Hilberträumen ist das ebenfalls möglich, bedarf aber größeren Aufwandes. Damit befasst sich Operatortheorie.)

37. Die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel soll es um folgende Gleichung gehen

$$\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t \text{ auf } \Omega.$$

Dabei ist:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.
- $\psi = \psi(t, x) = \psi_t(x)$ mit $t \geq 0$ und $x \in \Omega$.
- $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$; $\psi_t(x) \to \psi_0(x)$, $t \to 0$.

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung/Diffusion eines Stoffes, wie zum Beispiel Wärme, in einem homogenen Medium.

Herleitung und formale Lösung

Sei $\psi = \psi(x, t)$ die Wärmeverteilung zur Zeit t, dann ist

$$M_V^t = \int_V \psi(x, t) dx$$

die gesamte Wärmemenge im Volumen V zur Zeit t. Die Änderung von M_V^t kann auf zwei Arten berechnet werden:

- $\frac{\partial}{\partial t} M_V^t = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \psi(x, t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) dx$.
- Andererseits liefert das Auffassen von Wärme als Stoff

$$\begin{aligned}
\text{Änderung von } M_V^t &= \text{Abfluss aus } V \\
(n \text{ äußere Normale}) &= -\int_{\partial V} \text{Fluss} \cdot n dS \\
(\text{Fluss linear in Wärmegefälle}) &= \int_{\partial V} (b(x) \nabla \psi(x, t)) \cdot n dS \\
(\text{Stokes, } b(x)\text{: Matrix mit positiven Eigenwerten}) &= \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t)) dx.
\end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) dx = \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t)) dx$$

Da V beliebig ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\nabla \cdot (b(x)\nabla\psi(x,t)).$$

Ist das Medium homogen so hängt b nicht von x ab ($b(x) \equiv b$). Ist es darüber hinaus noch isotrop (es existiert keine Ausgezeichnete Richtung), so ist b gerade die Identität. Damit wird die Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \nabla \cdot (\nabla\psi(x,t)) = \Delta\psi(x,t).$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned}
M_t &= \int_V \psi(x,t)dx \\
\Rightarrow \quad \frac{M_{t+h} - M_t}{h} &= \frac{1}{h}\int_V (\psi(t+h,x) - \psi(t,x))\, dx \\
\text{(Falls } \psi(\cdot,x) \text{ stetig differenzierbar)} \quad &= \frac{1}{h}\int_V \left(\int_0^h \psi'(t+s,x)ds \right) dx \\
(\psi\text{' stetig, Fubini)} \quad &= \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{\left(\int_V \psi'(t+s,x)dx \right)}_{=:H(s)} ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h H(s)\, ds \\
\text{(Falls H(s) stetig, HDI)} \quad \Rightarrow \quad H(0) &= \int_V \psi'(t,x)\, dx,\ h \to 0 \\
\Rightarrow \quad M_t' &= \int_V \partial_t\psi(t,x)\, dx
\end{aligned}$$

In 'schwacher' Form wird dies:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\psi\phi dx = -\int \langle b(x)\nabla\psi, \nabla\phi\rangle dx$$

für 'alle' ϕ.

Die Gleichung $\partial_t\psi_t = \Delta\psi_t$ mit der Anfangsbedingung ψ_0 ist formal eine gewöhnliche Differentialgleichung (Anfangswertproblem) in einem undendlichdimensionalen Raum. Entsprechend ist eine formale Lösung gegeben durch $\psi_t = e^{t\Delta}\psi_0 = P_t\psi_0$ mit dem Operator $P_t := e^{t\Delta}$. Dieser erfüllt die Halbgruppeneigenschaft $P_{t+s} = P_tP_s$.

Diese Betrachtungen werden wir nun exakt machen.

Die Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^N$

Die Gleichung lautet

$$\partial_t\psi = \Delta\psi \text{ auf } \mathbb{R}^N,\ \psi_0 = f.$$

Es geht also um

- $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, stetig differenzierbar nach t, 2 mal stetig differenzierbar nach x
- $\partial_t \psi = \Delta \psi$ auf $\mathbb{R}^N$ für $t > 0$, $\psi_0(x) := \lim_{t \to 0} \psi_t(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkung: Die Anfangskonfiguration, welche die Situation bei $t = 0$ bezeichnet, muss nicht differenzierbar sein. Daher verlangen wir nur Gültigkeit der Gleichung für $t > 0$, nachdem also die Diffusion eingesetzt hat.

Sei nun $f \in \mathcal{S}$. Wir suchen zunächst ψ mit Werten in $\mathcal{S}$ d.h. mit $\psi_t \in \mathcal{S}$ für jedes $t \in [0, \infty)$. Fourier-transformieren der Gleichung (37.6) führt auf

$$\partial_t \widehat{\psi_t}(k) = -|k|^2 \widehat{\psi_t}(k), \widehat{\psi_0} = \widehat{f}$$

für alle $k \in \mathbb{R}^N$, mit $F\psi_t =: \widehat{\psi_t}$. Bei festem k ist das gerade eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangsbedingung für $a(t) = \widehat{\psi_t}(k)$ nämlich:

$$a'(t) = -|k|^2 a(t), \quad a(0) = \widehat{\psi_0}(k)$$

Die Lösung lautet (für k fest):

$$\widehat{\psi_t}(k) = e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k).$$

Rücktransformation liefert dann

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= F^{-1}\widehat{\psi_t} && (37.1)\\ (t\, fest) &= F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff) && (37.2)\\ (Fouriertransformation!) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(e^{-t|k|^2}) * F^{-1}Ff && (37.3)\\ &= p_t * f && (37.4) \end{aligned}$$

mit

$$p_t := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(e^{-t|k|^2}).$$

Wir berechnen nun p_t.

37.1 Proposition: Sei

$$\phi_t(k) := e^{-t|k|^2}.$$

Dann gilt

$$p_t(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(\phi_t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Beweis: Sei $h(x) = \exp \frac{-|x|^2}{2}$. Wie wir wissen gilt dann

$$Fh = h = F^{-1}h. \ (*)$$

Ist h_a definiert durch $h_a(x) := h(ax)$, für ein $a > 0$, so gilt

$$F^{-1}h_a(k) = a^{-N}Fh\left(\frac{1}{a}k\right). \ (**)$$

(Begründung:

$$\begin{aligned}
F^{-1}h_a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int e^{ikx}h_a(x)dx \\
&= \ldots \int e^{ikx}h(ax)dx \\
(ax = y) \quad &= \ldots \int e^{ik\frac{1}{a}x}h(y)\frac{1}{a^N}dy \\
&= a^{-N}Fh\left(\frac{1}{a}k\right).
\end{aligned}$$

Das beendet die Begründung.) Nimmt man das zusammen, so erhält man für

$$\varphi_t(x) = e^{-t|x|^2} = h((2t)^{1/2}x) = h_{\sqrt{2t}}(x)$$

also

$$\begin{aligned}
F^{-1}\varphi_t(x) &= F^{-1}h_{\sqrt{2t}}(x) \\
(**) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2t}^N}(F^{-1}h)\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \\
(*) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2t}^N}h\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right) \\
&= \frac{1}{(2t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}
\end{aligned}$$

□

37.2 Theorem: Sei

$$p : (0,\infty) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty), p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Dann löst für jedes $f \in \mathcal{S}$ die Funktion

$$\psi_t := p_t * f$$

die Gleichung $\partial_t\psi_t = \Delta\psi_t$ für $t > 0$ und es gilt

$$\psi_t(x) \to f(x), t \to 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis: Die Aussage über das Lösen der Gleichung folgt im wesentlichen durch 'Rückwärtslesen' des obigen Arguments: Nach Definition von p und vorangegangener Proposition gilt

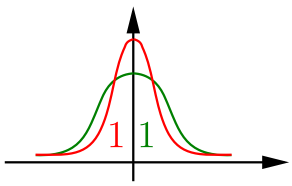
$$\psi_t = F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff). \ (*)$$

Damit folgt also $\psi_t \in \mathcal{S}$ und $\widehat{\psi_t} = e^{-t|k|^2} Ff$. Das liefert (Rückwärtslesen)

$$\begin{array}{rcl} \Delta\psi_t & = & F^{-1}(F\Delta F^{-1})F\psi_t \\ (*), (FT) & = & F^{-1}((-|k|^2)e^{-t|k|^2} Ff) \\ & = & F^{-1}\partial_t(e^{-t|k|^2} Ff) \\ & = & \partial_t F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff) \\ (*) & = & \partial_t \psi_t. \end{array}$$

Es bleibt die Aussage bei $t = 0$ zu zeigen: Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt:

- $\int p_t(x)dx = Fp_t(0) = 1$.



- Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $t_0 > 0$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(0)} p_t(x)dx < \varepsilon \text{ für } t < t_0.$$

Damit können wir nun mit einem kleinen Trick wie folgt rechnen

$$\begin{array}{rcl} \psi_t(x) - f(x) & = & p_t * f(x) - f(x) \\ (Trick!) & = & \int p_t(x-y)f(y)dy - \int p_t(x-y)f(x)dy \\ & = & \int p_t(x-y)(f(y) - f(x))dy. \end{array}$$

Damit folgt für beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{array}{rcl} |\psi_t(x) - f(x)| & = & \int_{U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy + \int_{R^N \setminus U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy \\ & \le & 1 \max\{|f(y) - f(x)| : y \in U_\delta(x)\} + \varepsilon 2\|f\|_\infty. \end{array}$$

für $t < t_0(\delta)$. Wählt man nun zunächst $\delta > 0$ so dass der erste Term durch ε abgeschätzt werden kann und anschließend $t < t_0(\delta)$ so folgt

$$|\psi_t(x) - f(x)| \le \varepsilon + \varepsilon 2\|f\|_\infty = \varepsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$$

für alle $t < t_0$. □

Bemerkung: $p_t * f$ löst die Wärmeleitungsgleichung nicht nur für $f \in \mathcal{S}$, sondern auch für deutlich größere Klassen von f, wie zum Beispiel $f \in C_b(\mathbb{R}^N)$. Der Grund ist, dass $p_t(x)$ selber die Gleichung

$$\partial_t p_t = \Delta p_t$$

erfüllt. In diesem Sinne wird die Lösung als Überlagerung von Lösungen geschrieben (siehe unten). Eine solche Überlagerung ist möglich, da die Gleichung linear ist.

37.3 Folgerung: Sei für $t > 0$ $P_t : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ definiert durch

$$P_t f = p_t * f = F^{-1} e^{-t|k|^2} F f$$

und $P_0 f = f$. Dann löst $t \mapsto P_t f$ die Wärmeleitungsgleichung, und es gilt $P_{t+s} = P_t P_s$. In diesem Sinne gilt

$$P_t = e^{t\Delta}.$$

Beweis: Nach dem vorigen Satz ist $P_t f$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Es bleibt die Halbgruppeneigenschaft zu zeigen: Das folgt durch direkte Rechnung. Es gilt nach Definition

$$P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F.$$

Damit folgt

$$P_{t+s} f = F^{-1}(e^{-(t+s)|k|^2} F f) = (F^{-} e^{-t|k|^2} F)(F^{-1} e^{-s|k|^2} F f = P_t P_s f.$$

□

Bemerkung: Es gilt $-\Delta = F^{-1}|k|^2 F$ und $e^{t\Delta} = P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F$. Analog kann man auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ nun beliebige Funktionen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des Laplaceoperator Δ *definieren* durch

$$g(-\Delta) f := F^{-1} g(|k|^2) F f.$$

Das ist ein wirkungsvolles Instrument der Operator-Theorie.

Der Seperationsansatz

Ein etwas alternativer Zugang zur Wärmeleitungsgleichung und überhaupt zu partiellen Differentialgleichungen bilden Separationsansätze. Dabei versucht man die Gleichung durch den Ansatz $\psi(t, x) = f(t) g(x)$ zu lösen. Im konkreten Fall führt dies auf:

$$f'(t) g(x) = f(t) \Delta g(x).$$

Division liefert (wenn die Terme nicht verschwinden)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t abhängt und die rechte nur von x folgt

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = constant = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Wir lösen nun die beiden Gleichungen

$$f' = C f, \quad \Delta g = C g$$

separat: Gilt $C = -D$ mit $D > 0$ so sind Lösungen gegeben durch

$$f = A e^{Ct}, g = e^{ikx}$$

mit $-|k|^2 = C$. Insgesamt ergibt sich als EINE Lösung

$$\psi_k(t,x) = e^{-t|k|^2} e^{ikx}$$

für jedes $k \in \mathbb{R}^N$. Durch 'Überlagerung' erhält man eine allgemeine Lösung der Form

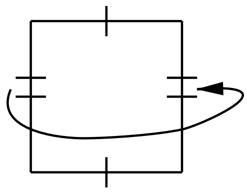
$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|k|^2} e^{ikx} g(k) dk.$$

Das entspricht der obigen Darstellung

$$P_t f(x) = F^{-1}(e^{-t|k|^2} \widehat{f})(x) = \int e^{ikx} e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k) dk.$$

Die Fourier-Koeffizienten von f sind gerade die 'Gewichte' der Lösungen $e^{ikx} e^{-t|k|^2}$.

Die Wärmeleitungsgleichung auf einem Würfel - periodische Randbedingungen



$Wärmetransport$

Es geht wieder um die Gleichung

$$\Delta \psi_t = \partial_t \psi_t$$

auf $\mathbb{R}^N$ mit $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodischen ψ, dass heißt ψ ist eigentlich auf $[0, 2\pi]^N$ gegeben, weiterhin fordern wir noch $\partial^\alpha \psi(\ldots 0 \ldots) = \partial^\alpha \psi(\ldots 2\pi \ldots)$. In diesem Fall können wir wieder die Fouriertransformation einsetzen. Wir skizzieren das Verfahren: Sei ψ eine glatte Lösung von

$$\Delta \psi_t = \partial_t \psi_t, \quad \psi_0 = f$$

die $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodisch ist.

$$\begin{aligned}
(t \text{ fest, FT}) \Rightarrow \ \psi_t(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t) e^{ikx} \\
(\psi \text{ glatt, } c_k \text{ schnell konvergent}) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k'(t) e^{ikx} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t)(-|k|^2) e^{ikx} \\
(\psi_0 =) \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(0) e^{ikx} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{ikx} (= f) \\
(\text{Vergleich}) \Rightarrow \ c_k'(t) = -|k|^2 c_k(t), \quad c_k(0) &= \widehat{f}(k) \\
(\text{gewöhnliche Differentialgleichung} \Rightarrow \ c_k(t) &= e^{-|k|^2 t} \widehat{f}(k)
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{-|k|^2 t} e^{ikx}$$

Falls $\widehat{f}(k) \to 0$ und $|k| \to \infty$ genügend schnell verlaufen, also f glatt genug ist, so können wir die Betrachtungen rückwärts lesen und erhalten eine Lösung.

Bemerkung:

- Auch hier führt ein Seperationsansatz auf

$$\psi_k = e^{-|k|^2 t} e^{ikx}.$$

Der obige Ausdruck ist gerade eine Überlagerung der ψ_k.

- Durch Skalieren und Verschieben, lassen sich mit dieser Methode auch Rechtecke an beliebigen Stellen im $\mathbb{R}^N$ behandeln.

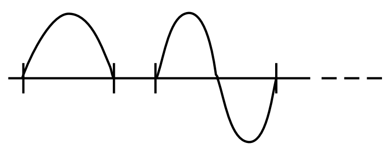
Die Wärmeleitungsgleichung auf einem Würfel - Dirichlet Randbedingungen

Wir untersuchen die Gleichung $\Delta\psi_t = \partial_t \psi_t$ auf $J = [0, 2\pi)^N$ mit $\psi_t \equiv 0$ auf ∂J. In diesem Fall kann man als Ansatz ψ Linearkombination von Produkten der Form

$$sin(k_1 x_1) sin(k_2 x_2) \ldots sin(k_N x_N)$$

darstellen, mit $k_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \quad j = 1, \ldots, N$.

<u>N=1:</u>



38. Die Laplacegleichung

Es geht um die Gleichungen

$$\Delta U = 0 \text{ (Laplacegleichung) und } \Delta U = f \text{ (Poissongleichung)}$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Oft wird man um Eindeutigkeit zu erzielen noch eine Randbedingung

$$U = g \text{ auf } \partial\Omega$$

fordern. Gilt

$$U \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

so nennt man die Bedingung "Dirichlet Randbedingung".

Herleitung

Es handelt sich um die Beschreibung von Gleichgewichtssituationen eines Diffusionsvorganges, wie chemische Konzentrationen, Temperatur oder eine elektrischen Potentials, da $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$ im Gleichgewicht keine Zeitabhängigkeit besitzt und somit $0 = \Delta\psi$ folgt.

Sei nun F der Fluss der entsprechenden Größe und es gelte

$$F = -B\nabla U$$

mit $B = B(x)$ einer positiv definiten Matrix. Damit gilt dann für jedes $V \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\text{(Nettofluss}=0) \quad 0 &= \int_{\partial V} F \cdot \nu \, dG \\
\text{(Stokes)} \quad &= \int_V \nabla \cdot F \, dx \\
\text{(38.1)} \quad &= -\int_V \nabla \cdot (B \cdot \nabla U) \, dx \\
V \text{ beliebig} \Rightarrow \quad \nabla \cdot B\nabla U &= 0 \\
\text{homogen, isotrop} \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla U) &= 0 = \Delta U.
\end{aligned}$$

Harmonische Funktionen

38.1 Definition (harmonische Funktion)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Es heißt ein $U \in C^2(\Omega)$ harmonisch, wenn auf Ω gilt

$$\Delta U = 0.$$

Bemerkung: Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und offenen Teilmengen sind Realteil und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch.

38.2 Theorem (Charakterisierung harmonischer Funktionen)**:** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $U \in C^2(\Omega)$, dann sind äquivalent

(i) U ist harmonisch

(ii) U hat die Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln, das heißt es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)} U(y)\, dy$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

(iii) U hat die Mitteleigenschaft bezüglich Sphären, das heißt es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int\limits_{\partial B_r(x)} U(\xi)\, d\sigma(\xi)$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

Beweis: Wir definieren

$$\fint\limits_{M} dy := \frac{1}{|M|} \int\limits_{M} f\, dy.$$

Wir behaupten es sei

$$\phi(r) := \fint\limits_{\partial B_r(x)} U(y)\, d\sigma(y),$$

dann gilt

$$\phi'(r) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} \Delta U(y)\, d(y),$$

falls $U \in C^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \fint_{\partial B_r(x)} U(y)\, d\sigma(y) \\
\text{(Substitution)} \quad &= \fint_{\partial B_1(0)} U(x + r\xi)\, d\sigma(\xi) \\
\Rightarrow \quad \phi'(r) &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \fint_{\partial B_1(0)} \xi \cdot \nabla U(x + r\xi)\, d\sigma(\xi) \\
\text{Rücksubstitution} \quad &= \fint_{\partial B_r(x)} \left(\frac{y-x}{r}\right) \nabla U(y)\, d\sigma(y) \\
\text{(äußere Normale } \nu = \tfrac{y-x}{r}\text{)} \quad &= \fint_{\partial B_r(x)} \nu \cdot \nabla U(y)\, d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \nu \cdot \nabla U(y)\, d\sigma(y) \\
\text{(Stokes/Gauß)} \quad &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \nabla \cdot (\nabla U)(y)\, dy \\
&= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta U(y)\, dy.
\end{aligned}$$

(i)⇒ (iii):

Mit U harmonisch folgt $\phi' = 0$ und damit $\phi(0)$ =konstant. Da U stetig ist, folgt

$$\phi(r) = \lim_{\varrho \to 0} \phi(\varrho) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} \int_{\partial B_\varrho(x)} U(y)\, d\sigma(y) \approx \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} U(x) |\partial B_\varrho(x)| = U(x).$$

(iii)⇔ (ii):

Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln ist eine Integralversion der Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphären. Für f gilt in Kugelkoordinaten

$$\int_{B_r(x)} f(y)\, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} f(\xi)\, d\sigma(\xi) \right) d\varrho.$$

(iii)⇒(ii):

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} U(y)\, dy &\overset{(38.5)}{=} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} f(\xi)\, d\sigma(\xi) \right) d\varrho \\
\text{(iii)} \quad &= \int_0^r U(x) |\partial B_{\varrho(x)}|\, d\varrho \\
&= U(x) \int_0^r |\partial B_{\varrho(x)}|\, d\varrho \overset{(38.5)}{=} U(x) |B_r(x)|
\end{aligned}$$

Das liefert (ii).

(ii)⇒(iii): Sei

$$\psi(r) = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(\xi)\, d\sigma(\xi) \right) d\varrho.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= \int\limits_{B_r(x)} U(y)\,dy \\
\text{(ii)} \quad &= |B_r(x)| U(x) \\
&= U(x) \int\limits_0^r |\partial B_\varrho(x)|\,d\varrho.
\end{aligned}$$

Nimmt man das zusammen, so folgt

$$\int\limits_{\partial B_r(x)} U(\xi)\,d\sigma(\xi) = \psi' = U(x) \cdot |\partial B_r(x)|,$$

was uns (iii) liefert.

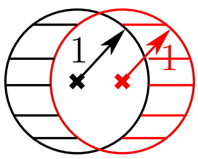
<u>(iii)⇒ (i):</u>

Angenommen es gilt $\Delta U(x) \neq$ für ein $x \in \Omega$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt dann $\Delta U > 0$ auf $B_r(x)$ für ein $r > 0$. Daraus folgt nach Behauptung $\psi' > 0$. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch, da $\psi = \textit{konstant}$ gilt. □

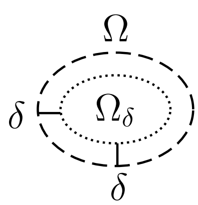
38.3 Theorem: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $U \in C(\Omega)$. Erfüllt U die Mittelwerteigenschaft, so gehört U zu $C^\infty(\Omega)$. Insbesondere ist also jedes $U \in C(\Omega)$ mit Mittelwerteigenschaft harmonisch.

Bemerkung:
- Für stetige U sind Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln und Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphären äquivalent (siehe Beweis voriges Theorem).
- Ist U lokal Riemanintegrierbar, also das Riemanintegral über alle Kugeln existiert, und hat die Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln, so ist U stetig.

Beweis: Stetigkeit:



Zu $\delta > 0$ sei $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$



gegeben. Es reicht zu zeigen, dass $U|_{\Omega_\delta}$ zu $C^\infty(\Omega_\delta)$ gehört. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

- $\varphi \geq 0$
- $\int \varphi \, dy = 1$
- $\operatorname{supp}_{\overline{\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\}}} y \, c B_\delta(0)$
- $\varphi(y) = \varphi(\tilde{y})$ falls $\|y\| = \|\tilde{y}\|$ (φ ist rotationssymmetrisch) Zum Beispiel:

$$\varphi(x) = c_{normierung} \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\delta^2 - |x|^2}) : |x| < \delta \\ 0 : |x| \geq \delta \end{cases}$$

Daraus folgt $U * \varphi \in C^\infty(\Omega_\delta)$, da $\varphi \in C^\infty$. Nun zum „Insbesondere“

$$\begin{aligned}
U * \varphi(x) &= \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) U(x-y) \, dy \\
\text{(Substitution)} \quad &= \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) U(x-y) \, d\sigma(y) \right) dy \\
\text{(φ rotationssymmetrisch)} \quad &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} U(x-y) \, d\sigma(y) \right) dy \\
&= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(y) \, d\sigma(y) \right) dy \\
\text{(Mittelwerteigenschaft)} \quad &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) U(x) |\partial B_\varrho(x)| \, d\varrho \\
&= U(x) \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) |\partial B_\varrho(0)| \, d\varrho \\
\text{(φ rotationssymmetrisch)} \quad &= U(x) \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) \, d\sigma(y) \right) d\varrho \\
\text{(Substitution Kugel)} \quad &= U(x) \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) \, dy = U(x)
\end{aligned}$$

□

38.4 Folgerung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und (U_n) eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Konvergieren die (U_n) gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gegen U, so ist U harmonisch.

Beweis: Mittelwerteigenschaft ist stabil unter gleichmäßiger Konvergenz auf Kompakta. So gilt für $B_r(x) \subset \Omega$

$$U_n = \int_{B_r(x)}^{\oplus} \underbrace{U_n(y)}_{\to U(y) \text{ gleichmäßig auf } B_r(x)} dy \to U(x) = \int_{B_r(x)}^{\oplus} U(y) \, dy.$$

Somit hat U die Mittelwerteigenschaft und ist stetig. Nach dem obigen Theorem ist U damit harmonisch. □

38.5 Theorem (Maximum Prinzip)**:** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt und $U \in C^2(\Omega) \cap \underline{C(\bar{\Omega})}$ harmonisch. Dann gilt:

a) $\max\limits_{x \in \bar{\Omega}} U(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} U(x)$

b) Ist Ω zusammenhängend und gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} U(x) = U(x_0),$$

so ist U konstant.

Beweis: Seien $M := \max\limits_{\Omega} U(x)$ und $x_0 \in \Omega$ mit $U(x_0) = M$ gegeben. Für $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$ gilt nach Mittelwerteigenschaft

$$M \geq \overset{\oplus}{\int}_{B_r(x_0)} U(y\, dy) = U(x_0) = M.$$

Da U stetig und M maximal ist, folgt

$$U \equiv M \text{ auf } B_r(x_0).$$

Damit ist

$$C_M := \{x \in \Omega : \, U(x) = M\}$$

offen. Da U stetig ist, ist C_M natürlich abgeschlossen in Ω. Dies bedeutet C_M ist offen und abgeschlossen in Ω. Damit besteht C_M aus zusammenhängenden Komponenten von Ω und es folgt $\partial c_M \subset \partial\Omega$.

Zu b):

Da Ω zusammenhängend ist, stimmt jede nichttriviale Teilmenge, die offen und abgeschlossen ist, mit Ω überein. Somit folgt

$$C_M = \Omega,$$

wegen der Offenheit und Abgeschlossenheit von C_M. Daraus folgt b).

Zu a):

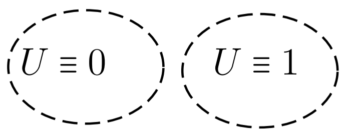
Aus

- $\partial C_M \subset \partial\Omega$
- Auf C_M und ∂C_M hat U den Wert M.

folgt, dass U den Wert M auf $\partial\Omega$ annimmt. □

38.6 Proposition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhängend. Ist $U \geq 0$ harmonisch auf Ω, so gilt entweder $U \equiv 0$ oder $U > 0$.

Beachte: Zerfällt Ω in mehrere Komponenten, so kann natürlich U auf einzelnen Komponenten verschwinden, ohne identisch Null zu sein.



Beweis: Sei $N := \{x \in \Omega : U(x) = 0\}$. Dann gilt

- N ist abgeschlossen, da U stetig ist.
- N ist offen da

$$U(x_0) = 0 \overset{\text{Mittelwerteigenschaft}}{\Rightarrow} U(x_0) = 0 = \fint_{B_r(x_0)} \underbrace{U(y)}_{\geq 0} \, dy \Rightarrow U \equiv 0 \text{ auf } B_r(x_0).$$

Somit folgt, da Ω zusammenhängend ist,

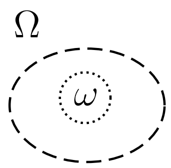
$$N = \Omega \text{ oder } N = \varnothing.$$

Das ist gerade die Behauptung. □

Notation: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ist $\omega \subset \Omega$, mit

- $\bar{\omega}$ kompakt
- $\bar{\omega} \subset \Omega$,

so heißt ω kompakt in Ω enthalten und man schreibt $\omega \subset\subset \Omega$.



Nun kommen wir zu einer Verschärfung der Aussage.

38.7 Theorem (Harnack Ungleichung)**:** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, ω und zusammenhängend mit $\omega \subset\subset \Omega$. Dann existieren $c_\omega \geq 0$, mit

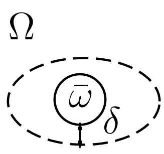
$$\sup_{x \in \omega} U(x) = c_\omega \inf_{x \in \omega} U(x)$$

für alle harmonischen $U \in C(\Omega)$ mit $U \geq 0$.

Beweis: Sei

$$\delta := \frac{1}{4} d(\omega, \partial\Omega) := \inf_{x \in \omega, y \in \partial\Omega} \|x - y\|,$$

dann gilt $\delta > 0$, da $\omega \subset\subset \Omega$.



Behauptung: Für alle $x, y \in \omega$ mit $|x-y| \le$ gilt

$$\frac{1}{2^N} U(x) \le U(y) \le 2^N U(x).$$

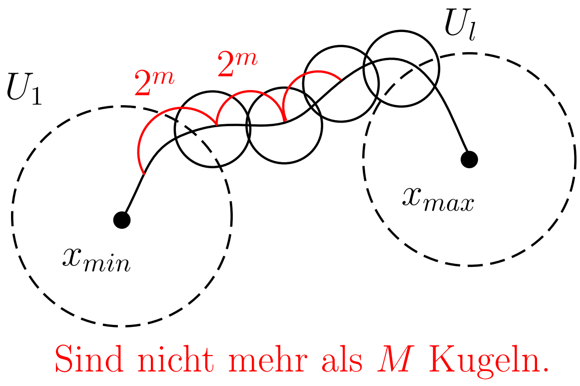
Beweis: Es gilt $B_\delta(y) \subset B_{2\delta(x} \subset \Omega$, womit wir rechnen können.

$$\begin{aligned}
\text{(Mittelwerteigenschaft)} \quad U(x) &= \fint_{B_{2\delta}(x)} U(z)\,dz \\
(B_\delta(y) \subset B_{2\delta}(x),\ U \ge 0) \quad &\ge \frac{1}{|B_{2\delta}(x)|} \int_{B_\delta(y)} U(z)\,dz \\
&= \frac{|B_\delta(y)|}{|B_{2\delta}(x)|} \underbrace{\fint_{B_\delta(y)} U(z)\,dz}_{U(y)} = \frac{1}{2^N} U(y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ U(x) \ge \frac{1}{2^N} U(y)$$

Vertauschen von x und y liefert $U(y) \ge \frac{1}{2^N} U(x)$. Das beweist die Behauptung.

Sei nun $\bar{\omega}$ durch die offenen $\frac{\delta}{2}$-Kugeln $U_1, \dots, U_M$ überdeckt ($\bar{\omega}$ ist Kompakt!). Mit Hilfe eines Kugelkettenargumentes folgt dann die Harnack Ungleichung mit $c_\omega = (2^N)^M$.



□

38.8 Satz (Satz von Liouville)**:** Sei $U \in C^2(\mathbb{R}^N)$ harmonisch und beschränkt, dann ist U konstant.

Bemerkung: Vergleich mit Funktionentheorie!

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und $S := U \times U$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|U(x) - U(0)| &= \left| \fint_{B_R(x)} U(y)\,dy - \fint_{B_R(0)} U(y)\,dy \right| \\
&= \frac{\left| \int_{B_R(x)\setminus B_R(0)} U(y)\,dy + \int_{B_R(0)\setminus B_R(x)} U(y)\,dy \right|}{|B_R(0)|} \\
(B_R(x) \subset B_{R+S}(0),\ B_R(0) \subset B_{R+S}(x)) \quad &\leq \frac{\int_{B_{R+S}(0)\setminus B_R(0)} |U(y)|\,dy \quad \int_{B_{R+S}(0)\setminus B_R(0)} |U(y)|\,dy}{|B_R(0)|} \\
(\|U\|_\infty \leq \text{Ç}) \quad &\leq 2 \cdot \text{Ç} \frac{|B_{R+S}(0)\setminus B_R(0)|}{|B_R(0)|} \overset{!}{\to} 0,\ R \to \infty
\end{aligned}$$

Nun noch zu (!):

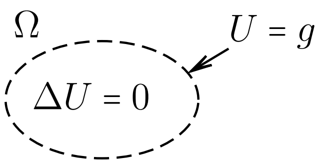
$$\frac{|B_{R+S}\setminus B_R|}{|B_R|} = \frac{(R+S)^N - R^N}{R^N} = \left(1 + \frac{S}{R}\right)^N - 1 \to 0,\ R \to \infty$$

□

Das Dirchlet Problem

Es geht um

- $-\Delta U = f$ auf Ω
- $U|_{\partial\Omega = g}$



Notation:

$C^k(\bar{\Omega}) := \{f : \bar{\Omega} \to \mathbb{K} : \text{k mal stetig differenzierbar in } \Omega,\ \partial^\alpha f \text{ stetig auf } \bar{\Omega} \text{ fortsetzbar für } |\alpha| \leq k\}$

Insbesondere ist $C(\bar{\Omega}) = C^0(\bar{\Omega}) = \{\text{stetiger Funktionen auf } \bar{\Omega}\}$.

38.9 Theorem (Eindeutigkeit und Stabilität)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt und seien $U_1, U_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Lösungen von

$$\Delta U = f \text{ auf } \Omega.$$

Dann gilt (Stabilität)

$$\|U_1 - U_2\|_\infty \leq \|(U_1 - U_2)|_{\partial\Omega}\|_\infty$$

Insbesondere gilt $U_1 = U_2$ falls $U_1|_{\partial\Omega} = U_2|_{\partial\Omega}$ (Eindeutigkeit).

Beweis: Sei $U := U_1 - U_2$. Dann ist U harmonisch, weil $\Delta U = \Delta U_1 - \Delta U_2 = f - f = 0$. Ist $Ç := \|U|_{\partial\Omega}\|_\infty$, dann gilt

- $-Ç \pm U \le 0$ auf Ω
- $Ç \pm U$ ist harmonisch auf Ω.

Damit folgt nach dem Maximum Prinzip

$$-Ç \overset{+}{-} U \le 0 \text{ auf } \bar{\Omega}$$

und daraus

$$|U| \le Ç \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Das heißt $\|U\|_\infty \le \|U|_{\partial\Omega}\|_\infty$.

$$(\|h|_D\|_\infty := \sup\{|h(x)| : x \in D\} \overset{\text{stetig kompakt}}{=} \max\{|h(x)| : x \in D\})$$

□

38.10 Definition (Fundamentallösungen)**:** Auf $\mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ wird die Fundamentallösung L zu Δ definiert durch

- $L : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$
- $L(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x| & : N = 1 \\ \frac{\ln|x|}{2\pi} & : N = 2 \\ \frac{|x|^{2-N}}{(2-N)|\partial B_1|} & : N \ge 3 \end{cases}$

Bemerkung: L ist die schwache Lösung von $\Delta L = \delta_0$, das heißt es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} L(x)\Delta\varphi(x)\, dx = \varphi'(0)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (siehe nachfolgende Proposition).

<u>Allgemeiner:</u>

Sei $F : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{K}$ linear (Distribution), dann sagt man

$$\partial^\alpha U = F$$

im schwachen Sinne/im Sinne von Distributionen, wenn

$$\int \partial^\alpha U(x)\varphi(x)\, dx = F(\varphi) \overset{!}{=} (-1)^\alpha \int U(x)\partial^\alpha\varphi(x)\, dx$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gilt. Mit $F = \delta_0 C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$, $F(\varphi) = \varphi(0)$ und Δ erhält man also

$$\Delta U = \delta_0 \text{ im schwachen Sinne} \Leftrightarrow \int U\Delta\varphi\, dx = \varphi(x)$$

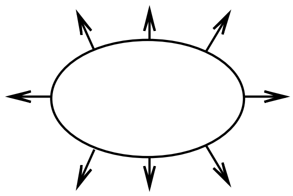
für alle $x \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

38.11 Proposition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Sei weiterhin $K(x,y) = L(x-y)$. Es gilt dann für $U \in C^2(\bar{\Omega})$ und jedes $x \in \Omega$

$$U(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y)\Delta U(y)\, dy - \int\limits_{\partial\Omega} \left(K(x,y)\partial_n U(y) - U(y)\partial_n K(x,y)\right)\, dG(y)$$

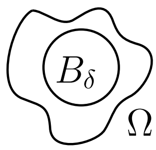
Bemerkung:

- Die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int\limits_{\Omega} K(x,y)\Delta U(y)\, dy$ ist Teil der Aussage. Ein Problem stellt die Diagonale $K(x,x)$ dar.
- Ω hat einen glatten Rand, welcher eine Untermannigfaltigkeit mit äußerer Normale n ist. ∂_n ist die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normalen.



- Es wird immer nach y abgeleitet.

Beweis: Betrachten ohne Einschränkung $x = 0$, ansonsten Verschieben unter Beachtung von $K(x,y) = L(x-y) = L(y-x)$. Sei $\delta > 0$ und $\Omega_\delta := \Omega \backslash B_\delta$.



Die Idee besteht im Grenzübergang $\delta \to 0$. Wir rechnen mit $K(0,y) = L(y)$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega_\delta} L(y)\Delta U(y)\, dy &= \\
\text{(2. Greensche Identität)} \quad &= \int\limits_{\partial\Omega_\delta} L(y)\partial_n U(y) - \partial_n L(y) U(y)\, d\sigma(y) \\
(\Delta L = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^N\backslash\{0\}) \quad &= \int\limits_{\partial\Omega} L(y)\partial_n U(y) - \partial_n L(y)U(y)\, d\sigma(y) + \int\limits_{\partial B_\delta} L(y)\partial_n U(y) - \partial_n L(y) U(y)\, d\sigma(y)
\end{aligned}$$

Nun untersuchen wir den zweiten Term für $\delta \to 0$.

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\partial B_\delta} L(y)\partial_n U(y)\, d\sigma(y) \right| &\leq \max_{\partial B_\delta} |L| \int\limits_{\partial B_\delta} \underbrace{|\partial_n U(y)|}_{\leq \tilde{C}}\, d\sigma(y) \\
\underline{N \geq 2:} \quad L(y) = \frac{|y|^{2-N}}{(2-N)|\partial B_1|} \quad &\leq \tilde{C} \frac{\delta^{2-N}}{|2-N||\partial B_1|} \underbrace{|\partial B_\delta|}_{|\partial B_1|\delta^{n-1}} \\
&= \frac{\tilde{C}}{|2-N|}\delta \to 0,\ \delta \to 0
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_{\partial B_\delta} \partial_n L(y)U(y)\, d\sigma(y) \overset{!}{=} \frac{1}{|\partial B_1|\delta^{N-1}} \int\limits_{\partial B_\delta} U(y)\, dy = \fint\limits_{\partial B_\delta} U(y)\, dy \to U(0),\ \delta \to 0$$

Zu (!): $L(y) = g(|y|)$ mit $g(s) = \frac{S^{2-N}}{|2-N||\partial B_1|}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_n L(y) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} L\left(y - t\frac{1}{|y|}y\right) \\ &= \frac{d}{dt} g\left(\left|y - t\frac{1}{|y|}y\right|\right) \\ \left(\left|y - t\frac{1}{|y|}y\right| = \delta - t\right) \quad &= \frac{d}{dt}|_{t=0} g(\delta - t) \\ &= -g'(\delta) = -\frac{\delta^{N-1}}{|\partial B_1|} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt für $\delta \to 0$

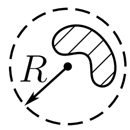
$$\int\limits_{\Omega} L(y)\Delta U(y)\, dy = \int\limits_{\partial\Omega} L(y)\partial_n U(y) - \partial_n L(y)U(y)\, d\sigma(y) + U(0),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wir nutzen die Formel zunächst um etwas zu $\Delta U = f$ auf $\mathbb{R}^N$ zu sagen. Für $U \in {}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ gilt nach der Formel

$$U(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} K(x,y)\Delta U(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} L(x-y)\Delta U(y)\, dy = L * \Delta U(x)$$

Beweis: wähle R mit $\operatorname{supp} U \subset B_R$ und betrachte $\Omega = U_{R+1}, \dots$



Insbesondere gilt also für $x = 0$

$$U(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} L(y)\Delta U(y)\, dy$$

für alle $U \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Daraus folgt, dass L eine schwache Lösung von $\Delta L = \delta_0$ ist. Weiterhin gilt in dieser Situation für den Integraloperator

- $I_L : C_c^\infty(\mathbb{R}^N)) \to C^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $I_L U := L * U$

nach (38.11) $I_L \circ \Delta = Id$. Ist also $U \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine Lösung von $\Delta U = f$, so folgt

$$U = Id(U) = I_L \circ \Delta U = I_L f = L * f.$$

Tatsächlich gilt sehr allgemein, dass $L * f$ die Gleichung $LU = f$ auf $\mathbb{R}^N$ löst.

38.12 Definition (Greensche Funktion)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Weiterhin sei $\Phi \in C^2(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ mit $\Phi(x, \cdot)$ harmonisch auf Ω für jedes $x \in \bar{\Omega}$. Sei $G(x,y) = K(x,y) - \Phi(x,y)$. Gilt

$$G(x,y) = 0$$

für alle $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$, so heißt

$$G = G_\Omega$$

Greensche Funktion für Ω.

38.13 Theorem (Darstellungsformel für die Lösung des Dirichlet Problems)**:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt und $G = G_\Omega$ die Greensche Funktion zu Ω. Falls $U \in C^2(\bar{\Omega})$ das Randwertproblem

$$-\Delta U = f \text{ auf } \Omega, \quad U|_{\partial\Omega} = \varphi$$

löst, so gilt

$$U(x) = -\int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x,y) \varphi(y)\, d\sigma(y)$$

Beweis: Sei $x \in \Omega$ fest.

·) Aus der vorigen Proposition folgt

$$U(x) = \int_\Omega K(x,y)\Delta U(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} K(x,y)\partial_n U(y) - U(y)\partial_n K(x,y)\, d\sigma(y)$$

·) Die zweite Greensche Identität liefert, weil $\Phi(x,\cdot)$ harmonisch ist

$$\int_\Omega \Phi(x,y)\Delta U(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \Phi(x,y)\partial_n U(y) - U(y)\partial_n \Phi(x,y)\, d\sigma(y) = \int_\Omega \underbrace{\Delta y \Phi(x,y)}_{=0} U(y)\, dy = 0.$$

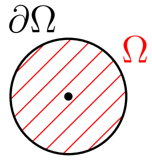
Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_\Omega G(x,y)\Delta U(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} \underbrace{G(x,y)}_{=0,\ Greensche\ Funktion} \partial_n U(y) - U(y)\partial_n G(x,y)\, d\sigma(y) \\ &= \int_\Omega G(x,y) \underbrace{\Delta U(y)}_{=-f}\, dy + \int_{\partial\Omega} \underbrace{U(y)}_{=\varphi} \partial_n G(x,y)\, d\sigma(y) \\ &= -\int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \partial_n G(x,y)\varphi(y)\, d\sigma(y) \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

- Es ist nicht klar, dass dieser Ausdruck die Randbedingung erfüllt.
- Nicht jedes Dirichlet Problem hat eine Lösung, wie folgendes **Beispiel** zeigt: Sei $\Omega = U_1 \backslash \{0\}$, dass heißt $\partial\Omega = \partial U_1 \cup \{0\}$.



Dann hat $\Delta U = 0$ auf Ω, $U = \varphi$ auf $\partial\Omega$ mit $\varphi(0) = 1$, $\varphi|_{\partial U_1} = 0$ keine Lösung.

Beweis: Sei U eine Lösung. Da φ rotationssymmetrisch ist, ist auch U rotationssymmetrisch, wegen der Eindeutigkeit der Lösung. Mit der Eindeutigkeit erben die Lösungen die Symmetrie des Problems. Also hat U die Form

$$U(x) = g(|x|)$$

mit $g \in C([0,1]) \cap C^2([0,1])$. Wegen $\Delta U = 0$ folgt

$$g''(r) + \frac{g'(r)}{r} = 0.$$

Das ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Lösung

$$g \equiv const. \text{ oder } g(r) = c \ln r.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu $g(0) = 1$ und $g(1) = 0$. □

39. Ein kurzer Blick auf die Wellengleichung

Es geht um die Gleichung
$$\partial_t^2 U_t = c^2 \Delta U_t.$$
Dabei gilt $c > 0$ und $U = U(t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^N) = U_t(x)$. Um die Gleichung eindeutig lösen zu können, brauchen wir noch Anfangsbedingungen
$$U_0(\cdot) = f, \quad (\partial_t U)_{t=0} = g.$$
Wie üblich können wir mit der Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^N$ lösen. Die Fouriertransformation in x führt auf
$$\widehat{U_t}''(k) = -c^2 |k|^2 \widehat{U}_t(k),$$
mit $\widehat{U_t}$ =Fouriertransformation in x von U_t. Die Lösung hat für festes k die Form
$$A_k e^{i\omega t} + B_k e^{-i\omega t},$$
mit $\omega = \omega(k) = c(k)$. Die A_k, B_K werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Die Lösung lautet dann, falls die existiert,
$$U(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} A_k e^{i\omega(k)t} e^{ikx} + B_k e^{-i\omega(k)t} e^{ikx}\, dk.$$
Das heißt die Lösung ist also eine Überlagerung von Funktionen
$$e(kx \overset{+}{-} \omega t),$$
mit $e(s) = e^{is}$. Für $N = 1$ gilt
$$kx \overset{+}{-} \omega t = konstant \Rightarrow x = \overset{+}{-} \frac{\omega}{k} t = \overset{+}{-} ct.$$
Tatsächlich ist für fast jedes U auf $\mathbb{R}$ die Funktion $U(kx \overset{+}{-} \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung. Es liegt deshalb folgende Idee zu Grunde
$$\begin{aligned} \omega(x,t) &= U(kx \overset{+}{-} \omega t) \\ \partial_t^2 \omega &= \omega^{2}``U``'' \\ c^2 \Delta \omega &= k^2 c^{2}``U``''. \end{aligned}$$

39.1 Proposition: Ist $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\omega(x,t) = U(kx \pm \omega t),$$

mit $\omega = c(k)$ eine schwache Lösung der Wellengleichung. Das heißt

$$\iint \omega(x,t)\partial_t^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt = \iint \omega(x,t) c^2 \Delta\varphi(x,t)\, dx\, dt$$

für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Beweis: An dieser Stelle geben wir nur eine Beweisskizze. Wir Approximieren U durch $U_n \in C^\infty$

$$\begin{aligned}
\iint U(kx - \omega t)\partial_t^2 \varphi\, dx\, dt &= \lim_{n\to\infty} \iint U_n(kx - \omega t)\partial_t^2 \varphi\, dx\, dt \\
\text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n\to\infty} \iint \partial_t^2 U_n(kx - \omega t)\varphi\, dx\, dt \\
(\partial_t^2 U_n(\ldots) = c^2 \Delta U_n(\ldots)) &= \lim_{n\to\infty} \iint c^2 \Delta U_n(kx - \omega t)\varphi\, dx\, dt \\
\text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n\to\infty} \iint c^2 U_n(kx - \omega t)\Delta\varphi\, dx\, dt \\
(U_n \to U) &= \iint c^2 U(kx - \omega t)\Delta\varphi\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

□

Index