Analysis II – Übung 1

Name: Markus Pawellek – 144645
Clemens Anschütz –

Aufgabe 1

Voraussetzung: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist hölderstetig mit Exponent $\alpha > 1$
Behauptung: f ist konstant

Beweis:

Es gibt ein $C > 0$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < 1$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq C|x-y|^{\alpha-1} \qquad \text{wenn } x \neq y$$

$$\alpha - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x-y|^{\alpha-1} < |x-y| \quad (\text{da } |x-y| < 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq C|x-y|^{\alpha-1} < C \qquad \text{für } x \neq y$$

$\Rightarrow$ Betrag des Differenzenquotients ist nach oben durch C beschränkt

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \quad \text{existiert}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{x \to y} C|x-y|^{\alpha-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ muss konstant sein.} \quad \square$$

Aufgabe 2

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Dann sind f_1, f_2 stetig in $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, da $x, x^2, \sin \frac{1}{x}$ stetige Funktionen sind und deren Multiplikation wieder stetig sein muss.
Weiterhin gilt:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f_1(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\substack{\text{besitzt keinen Grenzwert, bewegt} \\ \text{sich aber nur zwischen } -1 \text{ und } 1}} = 0 = f_1(0)$$

$\Rightarrow$ f_1 ist damit auch in $x = 0$ stetig (da $x \to 0$)
(entsprechendes gilt für f_2)

$\Rightarrow$ f_1, f_2 sind stetig auf $\mathbb{R}$

Ableitungen existieren wieder in $x \neq 0$ für f_1, f_2.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \sin \frac{1}{x}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht $\Rightarrow$ f_1 ist nicht auf $\mathbb{R}$ diffbar

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Grenzwert existiert $\Rightarrow$ f_2 ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar.

$$\Rightarrow \quad f_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f_2'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 2x \sin \frac{1}{x} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}$$

Grenzwert von $\cos \frac{1}{x}$ existiert nicht

$\Rightarrow$ gesamter Grenzwert existiert nicht
$\Rightarrow$ f_2' kann in $x = 0$ nicht stetig sein

$\Rightarrow$ f_2 ist diffbar, aber nicht stetig diffbar

Aufgabe 3

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq x_0 \\ ax + b & x > x_0 \end{cases} \qquad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R}.$$

f soll diffbar sein. $\Rightarrow$ f muss stetig sein

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0) \qquad \text{(Charakterisierung Stetigkeit)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} ax + b = ax_0 + b = f(x_0) = x_0^2$$

$\Rightarrow$ es gilt also: $\quad b = x_0^2 - ax_0$

Damit f diffbar wird muss Ableitung von rechts an x_0 und links an x_0 gleich sein.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{ax + b - x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{ax + x_0^2 - ax_0 - x_0^2}{x - x_0}$$ (Einsetzen der ersten Gleichung)

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} a \frac{x - x_0}{x - x_0} = a$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} x + x_0 \frac{x - x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} x + x_0 = 2x_0$$

$$\Rightarrow a = 2x_0 \quad \Rightarrow \quad b = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a(x_0) &= 2x_0 \\ b(x_0) &= -x_0^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$$ (Produktregel)

$$= 2x e^x + x^2 e^x$$ (Potenzregel, $(e^x)' = e^x$)

$$= (2 + x) x e^x$$

b) $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln x)$

$$\Rightarrow f'(x) = (\ln)'(\ln x) \cdot (\ln x)'$$ (Kettenregel)

$$= \frac{1}{x \ln x}$$ ($(\ln x)' = x^{-1}$)

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\exp(x^2+x+1)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(x^2+x+1)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\exp(x^2+x+1)\right]'$$

(Wurzelableitung, Kettenregel)

$$= \frac{\exp(x^2+x+1)}{2\sqrt{\exp(x^2+x+1)}} \quad (x^2+x+1)'$$

(Kettenregel, $(\exp(x))' = \exp(x)$)

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\exp(x^2+x+1)} \; (2x+1)$$

(Potenzregel)

d) $f: (0, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin x}{\ln x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\sqrt{x}\sin x)' \ln x - \sqrt{x}\sin x \; (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

(Quotientenregel)

$$= \frac{1}{(\ln x)^2}\left[\frac{\ln x \sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x \ln x - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]$$

(Produktregel)

$$= \frac{\sin x}{2\sqrt{x}\ln x} + \frac{\sqrt{x}\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\ln x)^2}$$