Analysis III – Übungsserie 07

Clemens Anschütz – 146390 Übung: Mi 14–16
Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Die Aussage ist falsch: ((ii) $\not\Rightarrow$ (i))

Sei $X = \mathbb{R}$, R die Menge der Figuren auf $\mathbb{R}$ und $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Prämaß.
Sei nun $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1_{\{1\}}$. Dann ist f messbar, weil $f \in E(X, R)$.

Sei nun die Folge (g_n) mit $g_n \equiv 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$0 \leq g_n(x) = 0 \leq g_{n+1}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

für $x \neq 1$: $\quad f(x) = g_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow$ insbesondere $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ λ-fast-überall (da $\{1\}$ Nullmenge)

$$\int_X g_n \, d\lambda = 0 < 1 =: C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow$ positive Konstante existiert

$\Longrightarrow$ nach (i) wäre Funktion f nichtnegativ, aber f ist nur λ-fast-überall nichtnegativ ($f(1) = -1$ ↯)

Aufgabe 2 ($\langle x,y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$ für alle $x,y \in \mathbb{C}^N$)

Sei $A \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^d$ mit $d \in N$ und $A = (a_1, \dots, a_d)$ mit $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}^N$.
Dann gilt:

$$A^* A = \bar{A}^T A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \vdots \\ \bar{a}_d \end{pmatrix} (a_1, \dots, a_d) = \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle \bar{a}_d, a_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_1 \rangle & \cdots & \langle \bar{a}_d, a_d \rangle \end{pmatrix}$$

$$=: (m_1, \dots, m_d) \quad \text{wobei } m_1, \dots, m_d \in \mathbb{C}^d$$

$$\text{mit} \quad m_i = \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_i \rangle \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt: $(\det A^* A \neq 0 \iff \operatorname{Rang} A = d)$
$\iff (\det A^* A = 0 \iff \operatorname{Rang} A < d)$ (Rang A kann nicht größer d sein)

Sei nun $\operatorname{Rang} A < d$. $\Rightarrow a_1, \dots, a_d$ sind linear abhängig

$\Rightarrow$ o.E. $a_1 = \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i$ für $\lambda_i \in \mathbb{C}$ für $1 \leq i \leq d$
(a_1 lässt sich als Linearkombination ausdrücken)

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^{d} \lambda_i m_i = \sum_{i=2}^{d} \lambda_i \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_1 \rangle \end{pmatrix} = m_1$$ $\Rightarrow$ m_1 lässt sich als Linearkombination der $m_2, \dots, m_d$ darstellen

$$\Rightarrow \det(m_1, \dots, m_d) = \det A^* A = 0$$

Sei nun $\det A^* A = 0$. $\Rightarrow m_1, \dots, m_d$ sind linear abhängig

$\Rightarrow$ o.E. $m_1 = \sum_{i=2}^{d} \lambda_i m_i$ für $\lambda_i \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow m_1 = \sum_{i=2}^{d} \lambda_i \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \bar{a}_1, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{a}_d, a_1 \rangle \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \sum_{i=2}^{d} \lambda_i a_i = a_1 \Rightarrow a_1, \dots, a_d$ sind linear abhängig

$\Rightarrow \operatorname{Rang} A < d$

Diese gezeigte Äquivalenz erfüllt damit die Aufgabe. $\square$

Aufgabe 3

Sei $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sin\frac{u}{2}\cos u \\ \sin\frac{u}{2}\sin u \\ \cos\frac{u}{2} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} = -\sin u + v\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u - \sin\frac{u}{2}\sin u\right]$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} = \sin\frac{u}{2}\cos u$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} = \cos u + v\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u + \sin\frac{u}{2}\cos u\right]$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = \sin\frac{u}{2}\sin u$$

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial u} = -\frac{1}{2}v\sin\frac{u}{2} \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} = \cos\frac{u}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{D\varphi = \begin{pmatrix} -\sin u + v\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u - \sin\frac{u}{2}\sin u\right] & \sin\frac{u}{2}\cos u \\ \cos u + v\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u + \sin\frac{u}{2}\cos u\right] & \sin\frac{u}{2}\sin u \\ -\frac{1}{2}v\sin\frac{u}{2} & \cos\frac{u}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow (D\varphi)^T D\varphi = \begin{pmatrix} (\partial_u\varphi_1)^2 + (\partial_u\varphi_2)^2 + (\partial_u\varphi_3)^2 & \partial_u\varphi_1\partial_v\varphi_1 + \partial_u\varphi_2\partial_v\varphi_2 + \partial_u\varphi_3\partial_v\varphi_3 \\ \partial_u\varphi_1\partial_v\varphi_1 + \partial_u\varphi_2\partial_v\varphi_2 + \partial_u\varphi_3\partial_v\varphi_3 & (\partial_v\varphi_1)^2 + (\partial_v\varphi_2)^2 + (\partial_v\varphi_3)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(\partial_v\varphi_1)^2 + (\partial_v\varphi_2)^2 + (\partial_v\varphi_3)^2 &= \sin^2\frac{u}{2}\cos^2 u + \sin^2\frac{u}{2}\sin^2 u + \cos^2\frac{u}{2} \\ &= \sin^2\frac{u}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) + \cos^2\frac{u}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_u\varphi_x)^2 = {} & \sin^2 u + v^2\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{u}{2}\cos^2 u + \sin^2\frac{u}{2}\sin^2 u - \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u\sin\frac{u}{2}\sin u\right] \\ & - 2v\sin u\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u - \sin\frac{u}{2}\sin u\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_u\varphi_y)^2 = {} & \cos^2 u + v^2\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{u}{2}\sin^2 u + \sin^2\frac{u}{2}\cos^2 u + \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u\sin\frac{u}{2}\cos u\right] \\ & + 2v\cos u\left[\frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u + \sin\frac{u}{2}\cos u\right]\end{aligned}$$

$$(\partial_u\varphi_z)^2 = \frac{1}{4}v^2\sin^2\frac{u}{2}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (\partial_u\varphi_1)^2 + (\partial_u\varphi_2)^2 + (\partial_u\varphi_3)^2 = {} & (\sin^2 u + \cos^2 u) + v^2\left[\frac{1}{4}\cos^2\frac{u}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u)\right. \\ & \left. + \sin^2\frac{u}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u)\right] \\ & + 2v\sin\frac{u}{2}(\sin^2 u + \cos^2 u) + \frac{1}{4}v^2\sin^2\frac{u}{2}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{v^2}{4} + v^2\sin^2\frac{u}{2} + 2v\sin\frac{u}{2} = \left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}$$

$$\partial_u \varphi_1 \partial_v \varphi_1 = -\sin u \sin\tfrac{u}{2}\cos u + v\sin\tfrac{u}{2}\cos u\left[\tfrac{1}{2}\cos u\cos\tfrac{u}{2} - \sin\tfrac{u}{2}\sin u\right]$$
$$\partial_u \varphi_2 \partial_v \varphi_2 = \sin u \sin\tfrac{u}{2}\cos u + v\sin\tfrac{u}{2}\sin u\left[\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{u}{2}\sin u + \sin\tfrac{u}{2}\cos u\right]$$
$$\partial_u \varphi_3 \partial_v \varphi_3 = -\tfrac{v}{2}\sin\tfrac{u}{2}\cos\tfrac{u}{2}$$

$$\Longrightarrow \partial_u\varphi_1\partial_v\varphi_1 + \partial_u\varphi_2\partial_v\varphi_2 + \partial_u\varphi_3\partial_v\varphi_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{(D\varphi)^T D\varphi = \begin{pmatrix} (1+v\sin\frac{u}{2})^2 + \frac{v^2}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det D\varphi^T D\varphi = (1+v\sin\tfrac{u}{2})^2 + \tfrac{v^2}{4}}$$

Aufgabe 4

Sei $0 < r < R$ und $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(u,v) = R\begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}\cos u\cos v\\ \cos u\sin v\\ \sin u\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \partial_u\varphi_1 &= -r\sin u\cos v & \partial_v\varphi_1 &= -R\sin v - r\cos u\sin v\\ \partial_u\varphi_2 &= -r\sin u\sin v & \partial_v\varphi_2 &= R\cos v + r\cos u\cos v\\ \partial_u\varphi_3 &= r\cos u & \partial_v\varphi_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{D\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v & -R\sin v - r\cos u\sin v\\ -r\sin u\sin v & R\cos v + r\cos u\cos v\\ r\cos u & 0\end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow (\partial_u\varphi_1)^2 + (\partial_u\varphi_2)^2 + (\partial_u\varphi_3)^2 = r^2\sin^2 u\cos^2 v + r^2\sin^2 u\sin^2 v + r^2\cos^2 u = r^2$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (\partial_v\varphi_1)^2 + (\partial_v\varphi_2)^2 + (\partial_v\varphi_3)^2 &= R^2\sin^2 v + r^2\cos^2 u\sin^2 v + 2Rr\sin^2 v\cos u\\ &\quad + R^2\cos^2 v + r^2\cos^2 u\cos^2 v + 2Rr\cos u\cos^2 v\\ &= R^2 + r^2\cos^2 u + 2Rr\cos u\\ &= (R + r\cos u)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \partial_u\varphi_1\partial_v\varphi_1 + \partial_u\varphi_2\partial_v\varphi_2 + \partial_u\varphi_3\partial_v\varphi_3 &= rR\sin u\sin v\cos v + r^2\sin u\cos u\sin v\cos v\\ &\quad - rR\sin u\sin v\cos v - r^2\sin u\cos u\sin v\cos v\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & (R+r\cos u)^2\end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det D\varphi^T D\varphi = r^2(R+r\cos u)^2}$$