Analysis I - Übungsserie 4

Übungsgruppe: Jonas Franke

Nina Held: 144753
Clemens Anschütz: 146390
Markus Pawellek: 144645

Aufgabe 1

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt für alle $a, b \in K$ folgendes:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$$
$$= a^2 + ab\cdot(1+1) + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Außerdem gilt nach einer analogen Herleitung:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Damit gilt allgemein für alle $a, b \in K$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Des Weiteren folgt aus der bereits bewiesenen Proposition $x^2 \geq 0$ für alle $x \in K$:

$$(a+b)^2 \geq 0$$
$$(a-b)^2 \geq 0$$

a)

Voraussetzung:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper.

Behauptung:

$|ab| \leq \frac{1}{2\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{2}b^2$ für alle a,b,$\lambda \in K$ mit $\lambda > 0$

Beweis:

Seien a, b, λ wie in der Behauptung definiert. Dann gilt allgemein:

$$(a-\lambda b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2a\lambda b + \lambda^2 b^2 \geq 0$$

Durch Addition von $2a\lambda b$ ergibt sich:

$$a^2 + \lambda^2 b^2 \geq 2a\lambda b$$

Durch Multiplikation mit 2^{-1} kann sich die Ungleichung nicht ändern, da $(2 > 0) \Rightarrow (2^{-1} > 0)$. Auch durch die Multiplikation mit λ^{-1} kann keine Änderung auftreten, da $(\lambda > 0) \Rightarrow (\lambda^{-1} > 0)$.

$$2^{-1}\cdot\lambda^{-1}\cdot a^2 + 2^{-1}\cdot\lambda^{-1}\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot b^2 \geq 2^{-1}\cdot 2\cdot\lambda^{-1}\cdot\lambda\cdot a\cdot b$$

$$\frac{1}{2\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{2}b^2 \geq ab$$

Weiterhin gilt:

$$(a + \lambda b)^2 \geq 0$$
$$a^2 + 2a\lambda b + \lambda^2 b^2 \geq 0$$

Durch Addition von $-2a\lambda b$ ergibt sich:

$$a^2 + \lambda^2 b^2 \geq -2a\lambda b$$

Durch Multiplikation mit 2^{-1} kann sich die Ungleichung nicht ändern, da $(2 > 0) \Rightarrow (2^{-1} > 0)$. Auch durch die Multiplikation mit λ^{-1} kann keine Änderung auftreten, da $(\lambda > 0) \Rightarrow (\lambda^{-1} > 0)$.

$$2^{-1} \cdot \lambda^{-1} \cdot a^2 + 2^{-1} \cdot \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot b^2 \geq (-1) \cdot 2^{-1} \cdot 2 \cdot \lambda^{-1} \cdot \lambda \cdot a \cdot b$$

$$\frac{1}{2\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{2}b^2 \geq -ab$$

Bei allen Umformungen handelte es sich um äquivalente Umformungen.

Der Betrag von ab kann entweder den Wert $-ab$ oder den Wert ab annehmen. Für beide Fälle ist diese Ungleichung gezeigt worden. Damit gilt also allgemein:

$$|ab| \leq \frac{1}{2\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{2}b^2$$

$\square$

b)

Voraussetzung:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper.

Behauptung:

$(a + b)^2 \geq 4ab$ für alle $a, b \in K$

Beweis:

Seien $a, b \in K$. Dann gilt:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

Addiert man zu beiden Seiten $(a + b)^2$ folgt:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (a + b)^2$$
$$(a + b)^2 + a^2 - 2ab + b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

Durch Addition von $2ab$ ergibt sich:

$$(a + b)^2 + a^2 + b^2 \geq a^2 + 4ab + b^2$$

Nun addiert man $-a^2$ und $-b^2$:

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt, da es sich bei allen Umformungen um äquivalente Umformungen handelte. $\square$

Aufgabe 2

Voraussetzung:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper.

Behauptung:

$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}$ für alle $r, s \in K$ mit $0 \leq r < s$

Beweis:

Seien r, s wie in der Behauptung definiert. Dann gilt:

$$r < s$$

Durch die Addition von sr ergibt sich:

$$r + sr < s + sr$$
$$r \cdot (1 + s) < s \cdot (1 + r)$$

Da $r, s \geq 0$ muss $(r + 1), (s + 1) > 0$ gelten. Damit müssen auch die Inversen $(r + 1)^{-1}$ und $(s + 1)^{-1}$ größer Null sein. Also ändert sich diese Ungleichung nicht durch Multiplikation mit $(r + 1)^{-1} \cdot (s + 1)^{-1}$:

$$r \cdot (1 + s) \cdot (r + 1)^{-1} \cdot (s + 1)^{-1} < s \cdot (1 + r) \cdot (r + 1)^{-1} \cdot (s + 1)^{-1}$$
$$\frac{r}{r+1} < \frac{s}{s+1}$$

Auch hier handelt es sich immer um äquivalente Umformungen. Also wurde die Behauptung unter den Voraussetzungen gezeigt. □

Aufgabe 3

Voraussetzung:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper mit der Teilmenge M.

Behauptung:

$-M$ ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ M ist nach oben beschränkt

Beweis:

<u>M ist nach oben beschränkt $\Rightarrow$ $-M$ ist nach unten beschränkt :</u>

Es gilt:

$$-M = \{-m \mid m \in M\}$$

Für eine obere Schranke $s \in K$ von M gilt für alle $m \in M$

$$m \leq s$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit -1, dann muss sich ihr Relationszeichen umkehren, damit sie weiterhin gilt.

$$(-1) \cdot m \geq (-1) \cdot s$$
$$-m \geq -s$$

Alle Elemente $-m$ für $m \in M$ befinden sich in $-M$. Damit gilt also für alle $m' \in -M$

$$m' \geq -s$$

Für eine untere Schranke $s' \in K$ von $-M$ gilt für alle $m' \in -M$

$$m' \geq s'$$

Da $-s \in K$, ist also $-s$ für $-M$ eine untere Schranke, wenn man $s' = -s$ setzt. Besitzt also M eine obere Schranke $s \in K$, so muss $-M$ eine untere Schranke $-s$ besitzen.

<u>$-M$ ist nach unten beschränkt $\Rightarrow$ M ist nach oben beschränkt : (Beweis analog)</u>

Für eine untere Schranke $s' \in K$ von $-M$ gilt für alle $m' \in -M$

$$m' \geq s'$$

Auch hier multipliziert man wieder mit -1 und erhält:

$$-m' \leq -s'$$

Schreibt man diese Gleichung für die Elemente aus M auf, folgt für alle $m \in M$:

$$-(-m) \leq -s'$$
$$m \leq -s'$$

Für eine obere Schranke $s \in K$ von M gilt wieder für alle $m \in M$

$$m \leq s$$

Setzt man nun $s = -s'$, so erkennt man, dass $-s' \in K$ eine obere Schranke für M bildet. Besitzt also $-M$ eine untere Schranke $s' \in K$, so muss M eine obere Schranke $-s'$ besitzen.

Damit wurden beide Richtungen der Äquivalenzaussage gezeigt. $\square$

Voraussetzung:

Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper mit der Teilmenge M.

Behauptung:

$sup(M)$ existiert $\Leftrightarrow$ $inf(-M)$ existiert

Es soll dann gelten: $-sup(M) = inf(-M)$

Beweis:

$sup(M)$ existiert $\Rightarrow$ $inf(-M)$ existiert :

Jedes Supremum einer Menge ist auch eine obere Schranke dieser Menge. Existiert also $sup(M) \in K$, so gibt es nach obigem Beweis eine untere Schranke $-sup(M)$ für die Menge $-M$. Weiterhin gilt für alle oberen Schranken $s \in K$ von M:

$$sup(M) \leq s$$

Für jede obere Schranke $s \in K$ von M muss $-M$ genau eine untere Schranke $-s$ besitzen, da für jede untere Schranke in $-M$ auch eine obere Schranke in M existieren muss. Multipliziert man also die Ungleichung mit -1, so folgt:

$$-sup(M) \geq -s$$

Da $-s$ auch eine untere Schranke von $-M$ ist, gilt für alle unteren Schranken $s' \in K$ von $-M$

$$-sup(M) \geq s'$$

Für ein Infimum von $-M$ gilt dann:

$$inf(-M) \geq s'$$

Damit muss nach der Definition eines Infimums $-sup(M)$ ein Infimum von $-M$ sein. Da sowohl Infimum als auch Supremum eindeutig sind, muss also

$$-sup(M) = inf(-M)$$

gelten. Da $sup(M)$ existiert, muss demnach auch, da es sich bei K um einen Körper handelt, $-sup(M)$ existieren. Also existiert auch $inf(-M)$, da diese Werte gleich sind.

$inf(-M)$ existiert $\Rightarrow$ $sup(M)$ existiert : (Beweis analog)

Jedes Infimum einer Menge ist auch eine untere Schranke dieser Menge. Existiert also $inf(-M) \in K$, so gibt es nach obigem Beweis eine obere Schranke $-inf(-M)$ für die Menge M. Weiterhin gilt für alle unteren Schranken $s' \in K$ von $-M$:

$$inf(-M) \geq s'$$

Für jede untere Schranke $s' \in K$ von $-M$ muss M genau eine obere Schranke $-s'$ besitzen. Multipliziert man also die Ungleichung mit -1, so folgt:

$$-inf(-M) \leq -s'$$

Da $-s'$ auch eine obere Schranke von M ist, gilt für alle oberen Schranken $s \in K$ von M

$$-inf(-M) \leq s$$

Für ein Supremum von M gilt dann:

$$sup(M) \leq s$$

Damit muss nach der Definition eines Supremums $-inf(-M)$ ein Supremum von M sein. Da sowohl Infimum als auch Supremum eindeutig sind, muss also

$$sup(M) = -inf(-M)$$
$$-sup(M) = inf(-M)$$

gelten. Da $inf(-M)$ existiert, muss demnach auch, da es sich bei K um einen Körper handelt, $-inf(-M)$ existieren. Also existiert auch $sup(M)$, da diese Werte gleich sind.

Damit wurde die äquivalente Aussage gezeigt. Aus beiden Richtungen folgt dann

$$-sup(M) = inf(-M)$$

$\square$

Aufgabe 4

Voraussetzung:

Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen.

Behauptung:

$\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$ besitzt kein Supremum

Beweis:

Für $\mathbb{Q}$ gilt:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

Sei die Menge T definiert als:

$$T := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$$

Dann gilt für alle $q \in T$:

$$q^2 \leq 2$$

Aus den Beweisen der Vorlesung ist bekannt, dass dann für alle $q \in T$

$$q \leq \sqrt{2}$$

gilt, sofern $q \geq 0$ erfüllt ist. Ist $q < 0$, so reicht es, diese Ungleichung mit -1 zu multiplizieren. Wenn also nun $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ist, so muss nach der Definition einer oberen Schranke $\sqrt{2}$ eine obere Schranke sein. Für jede weitere obere Schranke $s \in \mathbb{Q}$ muss gelten:

$$s \geq \sqrt{2}$$

Da sonst $s \in T$ wäre. Es würde dann für alle $q \in T$ gelten:

$$(q \leq s < \sqrt{2}) \Rightarrow (q^2 \leq s^2 < 2)$$

Damit kann man s^2 auch als $2 - \epsilon$ für $\epsilon \in \mathbb{Q}$ und $\epsilon > 0$ beschreiben, da es sich bei $\mathbb{Q}$ um einen Körper handelt und dieser abgeschlossen zur Addition ist. Damit gilt also automatisch für $a, b \in \mathbb{N}$ und für alle $q \in T$:

$$\left(\epsilon = \frac{a}{b}\right) \Rightarrow (q \leq 2 - \frac{a}{b} < 2)$$

Nun gibt es aber ein $\epsilon' \in \mathbb{Q}$, für welches Folgendes gelten kann:

$$\epsilon' = \frac{a}{2b} > 0$$

Da $a, b \in \mathbb{N}$ muss auch $2b \in \mathbb{N}$ sein.

$$\Rightarrow \left(2 - \epsilon' = 2 - \frac{a}{2b} < 2\right)$$

Damit müsste die Quadratwurzel Element von T sein. Wenn nun $2 - \epsilon$ eine obere Schranke bildet, dann gilt:

$$(2 - \epsilon \geq 2 - \epsilon') \Rightarrow (\epsilon \leq \epsilon') \Rightarrow (\epsilon - \epsilon' \leq 0)$$

$$\epsilon - \epsilon' = \frac{a}{b} - \frac{a}{2b} = \frac{2a}{2b} - \frac{a}{2b} = \frac{a}{2b} \cdot (2 - 1) = \frac{a}{2b}$$

$$(a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow (a, b > 0) \Rightarrow \left(\frac{a}{2b} > 0\right) \Rightarrow (\epsilon - \epsilon' > 0)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass s eine obere Schranke ist. Damit kann also keine obere Schranke kleiner als $\sqrt{2}$ sein. $\sqrt{2}$ müsste also das Supremum von T sein. Wenn also $\sqrt{2}$ als Supremum existiert, muss Folgendes für ein $p, q \in \mathbb{N}$, wenn p und q teilerfremd, gelten:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Damit muss p^2 ein Vielfaches von 2 sein. Da es sich um eine natürliche Zahl handelt, muss damit auch p ein Vielfaches von 2 darstellen. Man kann also ein $k \in \mathbb{N}$ finden, für welches $p = 2k$ ist.

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Damit müsste also auch q^2 und damit auch q ein Vielfaches von 2 sein. Dies ist allerdings ein Widerspruch dazu, dass p, q teilerfremd sind. Es gibt also keine Darstellung für $\sqrt{2}$ in den rationalen Zahlen. Damit existiert das Supremum von T mit $\sqrt{2}$ nicht.

Eine andere Möglichkeit wäre, dass man sich eine andere obere Schranke sucht. Das Quadarat dieser oberen Schranke könnte man wieder durch $\epsilon + 2$ beschreiben. Handelt es sich um ein Supremum, müssen also alle anderen oberen Schranken größer als $\epsilon + 2$ sein. Nun können wir analog zur obigen Betrachtung ein $\epsilon' + 2$ finden, welches kleiner dieser oberen Schranke ist und dennoch nicht in T ist. Damit gäbe ES auf die gleiche Weise einen Widerspruch, dass es außer $\sqrt{2}$ noch ein weiteres Supremum (ob nun kleiner oder größer) geben kann. Damit ist allgemein gezeigt, da $\sqrt{2}$ kein Element von $\mathbb{Q}$ ist , dass das Supremum von T nicht existiert. $\square$

Zusatzaufgabe

Voraussetzung:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $z_m := \sum_{k=1}^{m} a_k$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq n$.

Behauptung:

Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = z_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} z_n (b_k - b_{k+1})$

Beweis:

Seien die Variablen und Koeffizienten wie in der Voraussetzung definiert. Dann gilt:

$$z_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} z_n (b_k - b_{k+1}) = b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} \left((b_k - b_{k+1}) \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

Durch Ausmultiplizieren im hinteren Summenzeichen erhält man:

$$= b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i - b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

$$= b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

Aus dem mittleren Summenzeichen soll nun das erste Element herausgezogen werden. Das gleiche soll für das letzte Element des rechten Summenzeichens getan werden.

$$= b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{1} a_i + \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right) - b_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i - \sum_{k=1}^{n-2} \left(b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

$$= \left(b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k - b_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right) - \sum_{k=1}^{n-2} \left(b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

$$= a_n b_n + a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right) - \sum_{k=1}^{n-2} \left(b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right)$$

Verschiebt man den Index des rechten Summenzeichens um 1, folgt:

$$= a_n b_n + a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \right) - \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)$$

$$= a_n b_n + a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(b_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right) \right)$$

$$= a_n b_n + a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Durch äquivalente Umformungen wurde damit die Gleichheit gezeigt. $\square$