Aufgabe 4

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ erfülle

·) $\mu(\emptyset) = 0$
·) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei μ ein Maß. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann definiert man: $B_1 := A_1$
$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus A_n$

$\Rightarrow$ $B_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da alle $A_n \in \mathcal{A}$ und damit auch $A_{n+1} \setminus A_n \in \mathcal{A}$ gelten muss)

$\Rightarrow$ $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ (Mengen sind paarweise disjunkt)
(induktiv werden alle vorherigen Mengen ausgeschlossen)

$\Rightarrow$ $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$\Rightarrow$ $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)$

(σ-additivität) $= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$ (hier sei $A_0 = \emptyset$)

$\left((*)\ \mu(A_j \setminus A_{j-1}) + \mu(A_{j-1}) = \mu(A_j) \right)$ $\overset{(*)}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} [\mu(A_j) - \mu(A_{j-1})]$

$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{n} \mu(A_{j-1}) \right)$

(Teleskopsumme) $= \lim_{n \to \infty} (\mu(A_n) - \mu(\emptyset)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

(ii) $\Rightarrow$ (i): es gelte: $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Sei (B_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ von paarweisen disjunkten Mengen. Dann definiert man:

$A_1 := B_1$
$A_{n+1} := B_{n+1} \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$

$\Rightarrow$ $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

(Voraussetzung) $= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(paarweise disjunkt) $= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)$

((*) $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ impliziert endliche additivität) $\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$

Dies zeigt gerade die σ-additivität von μ.

$\Rightarrow$ (wegen $\mu(\emptyset)=0$) μ ist ein Maß.

$\square$