Analysis I - Übungsserie 4

Übungsgruppe: Jonas Franke

Nina Held: 144753
Clemens Anschütz: 146390
Markus Pawellek: 144645

Aufgabe 1

Voraussetzung:

Für $A, B \subset \mathbb{R}$ seien
$A + B \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a + b\}$
$A \cdot B \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}$.

(a)

Voraussetzung:

$A, B \subset \mathbb{R}$ sind nach unten beschränkt.

Behauptung:

$inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$ gilt.

Beweis:

A und B sollen die in der Voraussetzung beschriebenen Mengen sein. Dann sind es nach unten beschränkte Mengen. Da $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, müssen sie deshalb beide ein Infimum besitzen. Damit gilt für alle $a \in A$ und alle $b \in B$:

$$a \geq inf(A)$$
$$b \geq inf(B)$$

Aufgrund der Ordnungsvollständigkeit gilt dann die Ungleichung auch bei Addition der beiden Terme. Für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt:

$$a + b \geq inf(A) + inf(B)$$

Aufgrund der Definition von $A + B$ gilt dann für alle $x \in A + B$:

$$x \geq inf(A) + inf(B)$$

Nach Definition muss dies eine untere Schranke von $A + B$ sein. Auch hier folgt wegen der Ordnungsvollständigkeit, dass $A + B$ ein Infimum besitzt. Jede andere untere Schranke von A oder B ist kleiner als deren Infimum. Es folgt für eine beliebige untere Schranke $s_a \in \mathbb{R}$ von A und $s_b \in \mathbb{R}$ von B:

$$inf(A) \geq s_a$$
$$inf(B) \geq s_b$$

Damit gilt auch hier für alle $x \in A + B$:

$$x \geq inf(A) + inf(B) \geq s_a + s_b$$

Die Addition der unteren Schranken von A und B ergibt also die unteren Schranken von $A+B$. Damit ist die untere Schranke $inf(A) + inf(B)$ die größte untere Schranke von $A + B$. Nach der Definition gilt also für das Infimum von $A + B$:

$$inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$$

□

(b)

Voraussetzung:

$A, B \subset \mathbb{R}$ sind beschränkt. $A, B \neq \varnothing$

Behauptung:

Es gibt A, B mit $inf(A \cdot B) \neq inf(A) \cdot inf(B)$

Beweis:

Seien A, B die in den Voraussetzungen beschriebenen Mengen mit

$$A := \{1, 2\}$$
$$B := \{-1, 1\}$$

Beide Mengen sind damit beschränkt und eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ (damit existieren auch ihre Infima). Es gilt dann:

$$inf(A) = 1$$
$$inf(B) = -1$$

$A \cdot B$ ergibt sich mit dem Infimum zu:

$$A \cdot B = \{-2, -1, 1, 2\}$$
$$inf(A \cdot B) = -2$$

Es folgt:

$$inf(A) \cdot inf(B) = 1 \cdot (-1) = -1 \neq inf(A \cdot B) = -2$$

Damit existieren mindestens diese Mengen A, B, für welche die Behauptung erfüllt ist. □

Aufgabe 2

Voraussetzung:

Es sei die Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(m+n) = f(m) + f(n) + a$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$. Es gilt $f(2) = 10$ und $f(20) = 118$.

Aufgabe:

Ist f eindeutig? Wenn ja, was ist a und f?

Lösung:

Seien alle Variablen und Abbildungen wie in den Voraussetzungen definiert. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = f((n-1)+1)$$

Aufgrund der Definition folgt nun:

$$= f(n-1) + f(1) + a$$

$$= f((n-2)+1) + f(1) + a = f(n-2) + f(1) + a + f(1) + a = f(n-2) + 2 \cdot f(1) + 2 \cdot a$$

Folgende Vermutung ergibt sich also:

$$f(n) = f(1) + (n-1) \cdot f(1) + (n-1) \cdot a = n \cdot f(1) + (n-1) \cdot a$$

Beweis dieser Schlussfolgerung durch Induktion:

<u>Induktionsanfang für $n = 1$</u>:

$$f(1) = 1 \cdot f(1) + (1-1) \cdot a = f(1) + 0 \cdot a = f(1)$$

Damit ist Behauptung für $n = 1$ erfüllt.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u> $f(n) = n \cdot f(1) + (n-1) \cdot a$

<u>Induktionsbehauptung:</u> $f(n+1) = (n+1) \cdot f(1) + n \cdot a$

<u>Induktionsschluss:</u>
Durch Anwendung der Funktionsbedingung ergibt sich:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) + a$$

Durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$= n \cdot f(1) + (n-1) \cdot a + f(1) + a = (n+1) \cdot f(1) + n \cdot a$$

Damit wäre die Induktionsbehauptung bewiesen.

Damit gilt also für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$:

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + a \;\Rightarrow\; f(n) = n \cdot f(1) + (n-1) \cdot a$$

Ist nun aber $f(n) = n \cdot f(1) + (n-1) \cdot a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$ als Bedingung für die Funktion in den Voraussetzungen gegeben, folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
f(m+n) &= (m+n)\cdot f(1) + (m+n-1)\cdot a \\
&= m\cdot f(1) + n\cdot f(1) + m\cdot a + (n-1)\cdot a \\
&= m\cdot f(1) + n\cdot f(1) + (m-1)\cdot a + (n-1)\cdot a + a \\
&= (m\cdot f(1) + (m-1)\cdot a) + (n\cdot f(1) + (n-1)\cdot a) + a \\
&= f(m) + f(n) + a
\end{aligned}
$$

Damit folgt auch für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$:

$$f(n) = n\cdot f(1) + (n-1)\cdot a \;\Leftrightarrow\; f(m+n) = f(m) + f(n) + a$$

Es ist also eine Äquivalenz zwischen den beiden Funktionsbedingungen vorhanden. Beweist man also die Eindeutigkeit für eine Bedingung, ist sie auch für die andere Bedingung bewiesen. Damit muss f eindeutig sein, wenn $f(1)$ und a eindeutig durch äquivalente Umformungen bestimmt werden können. Aus den weiteren Bedingungen folgt:

$$
\begin{aligned}
f(2) = 10 = 2\cdot f(1) + a \\
\Rightarrow\; a = 10 - 2\cdot f(1)
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt:

$$
\begin{aligned}
f(20) = 118 = 20\cdot f(1) + 19\cdot a \\
= 20\cdot f(1) + 19\cdot (10 - 2\cdot f(1)) \\
= (-18)\cdot f(1) + 190
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\; f(1) = \frac{118-190}{-18} = 4 \\
\Rightarrow\; a = 10 - 2\cdot 4 = 2
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\; f(n) = 4n + 2\cdot(n-1) = 6n - 2$$

Damit konnten durch äquivalente Umformungen $f(1)$ und a eindeutig bestimmt werden. Es muss also auch f durch die Bedingungen eindeutig sein.

Aufgabe 3

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_i \in \mathbb{R}$ mit $x_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ gilt:
$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$

Beweis:

Beweis soll durch Induktion geführt werden. Dabei seien alle Variablen wie in der Behauptung definiert.

Induktionsanfang für $n = 1$:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_1 \geq 1$$

Damit muss also die Gleichung für $n = 1$ erfüllt sein.

Induktionsvoraussetzung: $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n$

Induktionsbehauptung: $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n + 1$

Induktionsschluss:

$$1 = \prod_{i=1}^{n+1} x_i = x_n x_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i$$

Definiert man jetzt für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n - 1$

$$y_i := x_i$$

und für n

$$y_n := x_n x_{n+1}$$

folgt:

$$x_n x_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i = y_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} y_i = \prod_{i=1}^{n} y_i = 1$$

Dieses Produkt muss immer noch 1 sein, da nur eine Größe durch eine andere ersetzt wurde. Für diese Gleichung folgt also aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i \geq n$$

$$\Rightarrow x_n x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq n$$

Durch Addition mit 1 folgt:

$$\Rightarrow x_n x_{n+1} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq n + 1$$

Es kann hier nun ohne Einschränkung angenommen werden, dass $x_{n+1} \geq 1$ und $x_n \leq 1$ ist. Dies folgt aus der Betrachtung, dass die Multiplikation aller x_i gleich 1 ergeben muss. Sind also Zahlen in diesem Produkt, welche größer 1 sind, muss es auch mindestens eine Zahl geben, welche kleiner 1 ist. Denn sonst würde es nicht möglich sein durch Multiplikation von Zahlen, welche alle größer 1 sind, 1 als Ergebnis zu erhalten. Der Spezialfall würde sich ergeben, wenn jeder Faktor in diesem Produkt 1 wäre. Man findet also in diesem Produkt immer mindestens eine Zahl, welche größer gleich 1 ist und eine andere, welche kleiner gleich 1 ist. Da es sich bei den reellen Zahlen um einen angeordneten Körper handelt, können nun alle Faktoren beliebig vertauscht werden, ohne den Wahrheitswert der Gleichung zu ändern. Damit können auch x_n und x_{n+1} einen beliebigen Faktor dieses Produktes darstellen.

Nun gilt für ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon \geq 0$:

$$x_{n+1} \geq 1 \;\Rightarrow\; x_{n+1} = 1 + \epsilon$$

Für ein $\epsilon' \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \epsilon' < 1$:

$$x_n \leq 1 \;\Rightarrow\; x_n = 1 - \epsilon'$$

Damit folgt

$$x_n x_{n+1} + 1 = (1-\epsilon') \cdot (1+\epsilon) + 1 = 1 + \epsilon - \epsilon' - \epsilon\epsilon' + 1 = 2 + \epsilon - \epsilon' - \epsilon\epsilon'$$

Dabei ist zu beachten, da $\epsilon, \epsilon' \geq 0$, dass $\epsilon\epsilon' \geq 0$ gilt. Weiterhin gilt:

$$x_n + x_{n+1} = (1-\epsilon') + (1+\epsilon) = 2 + \epsilon - \epsilon'$$

$$\Rightarrow\; 2 + \epsilon - \epsilon' \geq 2 + \epsilon - \epsilon' - \epsilon\epsilon'$$

$$\Rightarrow\; x_n + x_{n+1} \geq x_n x_{n+1} + 1$$

Aus den bereits umgestellten Ungleichungen folgt:

$$\Rightarrow\; x_n + x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq x_n x_{n+1} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq n + 1$$

Durch Auslassen der mittleren Ungleichung folgt:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n + 1$$

Damit folgt:

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n + 1$$

Es wurde die Induktionsbehauptung gezeigt. Also muss auch die Behauptung gezeigt sein. □

Aufgabe 4

Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Beweis:

Seien die Variablen wie in den Voraussetzungen gegeben. Dann soll $p \in \mathbb{R}$ definiert sein als:

$$p := \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \geq 0$$

p muss größer Null sein, da alle a_i größer Null sind und durch Multiplikation zweier positiver Zahlen wieder eine positive Zahl herauskommt. Seien u_i für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ definiert als:

$$u_i := \frac{p}{a_i}$$

Damit gilt:

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} u_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{p}{a_i} = p^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{a_1 \cdot ... \cdot a_n}{a_1 \cdot ... \cdot a_n} = 1$$

Es muss also das Produkt aller u_i gleich 1 sein. Aus Aufgabe 3 folgt dann durch den bewiesenen Satz, dass Folgendes gilt:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i \geq n$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{p}{a_i} = p \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n$$

Jedes a_i kommt als Inverses vor. Da jedoch alle $a_i > 0$ sind, müssen auch ihre Inversen größer Null sein. Damit gilt diese Ungleichung auch nach der Multiplikation mit der Summe der Inversen:

$$\Rightarrow p \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Durch Einsetzen von p folgt:

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$$

Damit wäre die linke Seite der Ungleichung bewiesen. Für die rechte Seite der Ungleichung sollen v_i für $i \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$ definiert werden mit:

$$v_i := \frac{a_i}{p}$$

Es gilt dann (ähnliche Betrachtungsweise wie oben):

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} v_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p} = \frac{1}{p^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = 1$$

Es ist also auch das Produkt der v_i gleich 1. Aus Aufgabe 3 folgt wieder durch den bewiesenen Satz:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i \geq n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{p} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$$

Es wurde bereits oben gezeigt, dass $p > 0$. Außerdem gilt auch $n > 0$, da es bereits so definiert worden ist. Es folgt also, dass auch $1/n > 0$ sein muss. Die Ungleichung gilt also auch nach der Multiplikation mit p und $1/n$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \geq n \cdot p$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq p$$

Durch Einsetzen von p folgt:

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Damit wurde die rechte Seite der Ungleichung gezeigt und die Behauptung bewiesen. $\square$