Analysis I - Übungsserie 2

Übungsgruppe: Jonas Franke

Nina Held: 144753
Clemens Anschütz: 146390
Markus Pawellek: 144645

Aufgabe 1

(a)

Für die Menge N soll gelten:

$$N = \{e\}$$
$$s : N \longrightarrow N \text{ mit } n(e) = e$$

Die Abbildung s ist aufgrund der Definition für nur ein Element injektiv. Für eine Teilmenge M dieser Menge N gilt also automatisch:

$$(e \in M) \Rightarrow (s(e) \in M) \Rightarrow (M = N)$$

$\square$

(b)

Eine weitere endliche Menge N kann beschrieben werden durch:

$$N = \{1, 2\}$$
$$s : N \longrightarrow N \text{ mit } 1 := e$$
$$s(1) = 2 \text{ und } s(2) = 1$$

Die Abbildung s ist injektiv, da $s(1) \neq s(2)$. Für eine Teilmenge M von N gilt:

$$((n \in M) \Rightarrow (s(n) \in M)) \wedge (1 \in M) \Rightarrow (s(1) \in M) \Rightarrow (s(2) \in M) \Rightarrow (M = N)$$

$\square$

Aufgabe 2

Voraussetzung:
(N, e, ν) genüge den Peano Axiomen. Für $n \in N$ soll $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$.

(a)

Behauptung: Ordnungsrelation:
transitiv: $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$
antisymmetrisch: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$

Beweis:

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (A_x \subseteq A_y)$$
$$(y \leq z) \Leftrightarrow (A_y \subseteq A_z)$$

Stellt eine Menge Y eine Teilmenge zu einer anderen Menge Z dar, dann muss eine weitere Teilmenge von Y zwangsläufig auch eine Teilmenge von Z sein, da alle Elemente in Y bereits zu Z gehören.

$$(A_x \subseteq A_y) \wedge (A_y \subseteq A_z) \Rightarrow (A_x \subseteq A_z) \Leftrightarrow (x \leq z)$$

Damit ist die definierte Relation transitiv. Weiterhin gilt:

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Leftrightarrow (A_x \subseteq A_y) \wedge (A_y \subseteq A_x)$$

Sind zwei Mengen Teilmengen voneinander, dann muss jedes Element der einen Menge auch in der anderen vorkommen und umgekehrt. Damit müssen diese beiden Mengen also gleich sein.

$$(A_x \subseteq A_y) \wedge (A_y \subseteq A_x) \Rightarrow (A_x = A_y)$$

Die Menge A_n für ein $n \in N$ ist eindeutig. Aufgrund der Bijektivität der Nachfolgerfunktion ν gilt für $n_1, n_2 \in N$ mit $n_1 \neq n_2$ zwangsläufig $A_{n_1} \neq A_{n_2}$. Daraus folgt:

$$(A_x = A_y) \Rightarrow (x = y)$$

Damit ist die Relation antisymmetrisch und reflexiv. Es handelt sich um eine Ordnungsrelation.
$\square$

(b)

Behauptung: $A_x = \{n \in N \mid n \leq x\}$

Beweis:

Aufgrund der eben genannten Definition gilt auch:

$$\{n \in N \mid n \leq x\} = \{n \in N \mid A_n \subseteq A_x\}$$
$$L := \{n \in N \mid \text{für } A_n \text{ gilt die Behauptung}\}$$

Dann befindet sich das Element e in L:

$$(A_e = \{e\}) \Rightarrow (A_e \subseteq A_e) \Rightarrow (e \in L)$$

Gilt nun für ein $n \in N$ auch $n \in L$, müssen also alle Elemente in A_n kleiner oder gleich n sein. Es gilt:

$$(A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}) \Rightarrow (A_n \subseteq A_{\nu(n)}) \Rightarrow (n \leq \nu(n))$$

Damit gilt für alle $k \in A_n$:

$$(k \leq n) \wedge (n \leq \nu(n)) \Rightarrow (k \leq \nu(n))$$

Außerdem gilt $\nu(n) \leq \nu(n)$. Damit ist für alle Elemente in $A_{\nu(n)}$ gezeigt, dass sie kleiner oder gleich $\nu(n)$ sind. Damit gilt:

$$(n \in L) \Rightarrow (\nu(n) \in L)$$
$$\Rightarrow (L = N)$$

Aufgrund der Induktion über ganz N muss also die Behauptung für alle Elemente aus N gelten.
$\square$

(c)

Behauptung: totale Ordnung:
Für alle $x, y \in N$ muss gelten: $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Beweis:

Diese Schreibweise ist äquivalent zu:

$$(A_x \subseteq A_y) \vee (A_y \subseteq A_x)$$

Zuvor wurde gezeigt, dass für die Menge A_n mit $n \in N$ für jedes Element $k \in A_n$ auch $k \leq n$ gilt. Die zweite Möglichkeit wäre, dass es ein $k \in N$ gibt, welches kein Element von A_n ist. Dann gilt:

$$k \in N \setminus A_n = M_n$$

Wobei für M_n gilt:

$$\nu(n) \in M_n$$
$$(i \in M_n) \Rightarrow (\nu(i) \in M_n)$$

Damit folgt für M_k und M_n:

$$\nu(k) \in M_k$$
$$(k \in M_n) \Rightarrow (\nu(k) \in M_n)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Mengen M_k und M_n gilt:

$$\Rightarrow (M_k \subseteq M_n) \Rightarrow (N \setminus A_k \subseteq N \setminus A_n) \Rightarrow (A_n \subseteq A_k)$$
$$\Rightarrow \neg(k \in A_n) \Rightarrow (A_n \subseteq A_k) \Rightarrow (n \leq k)$$

Das bedeutet, dass für beliebige $k, n \in N$ entweder $k \leq n$ oder $n \leq k$ gelten muss. Damit gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen. $\square$

Aufgabe 3

(a)

Behauptung: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Beweis:

Induktionsanfang:
$n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot (1+1) = 2$$
$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 2$$

Behauptung ist also für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung:

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

Induktionsbehauptung:
$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$

Summe durch Induktionsvoraussetzung ersetzen:

$$= (n+1)(n+2) + \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(n+2) \cdot \left(\frac{n}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

□

(b)

Behauptung: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

Beweis:

Induktionsanfang:
$n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 6$$

$$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) = 6$$

Behauptung ist also für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung:
$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

Induktionsbehauptung:
$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = (n+1)(n+2)(n+3) + \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

Summe durch Induktionsvoraussetzung ersetzen:

$$= (n+1)(n+2)(n+3) + \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3) \cdot \left(\frac{n}{4}+1\right)$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$\square$

(c)

Behauptung/Vermutung: $\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(n+j)$

Beweis:

Induktionsanfang:
$n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i) = \prod_{i=0}^{m-1}(1+i)$$

$$\frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(n+j) = \frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(1+j) = \prod_{j=0}^{m-1}(1+j)$$

Es handelt sich um die gleichen Summen mit unterschiedlich benannten Laufvariablen. Behauptung ist also für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung:
$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(n+j)$

Induktionsbehauptung:
$\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i) = \frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(n+1+j)$

Induktionsschluss:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i) = \prod_{i=0}^{m-1}(n+1+i) + \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=0}^{m-1}(k+i)$$

Summe durch Induktionsvoraussetzung ersetzen:

$$= \prod_{i=0}^{m-1}(n+1+i) + \frac{1}{m+1} \prod_{j=0}^{m}(n+j)$$

Anpassung der Laufvariablen:

$$= \prod_{i=1}^{m}(n+i) + \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m}(n+i)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m}(n+i)\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{m+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m+1} \left(\prod_{i=1}^{m}(n+i)\right) \cdot (n+m+1)$$

$$= \frac{1}{m+1} \prod_{i=1}^{m+1} (n+i)$$

Anpassung der Laufvariablen:

$$= \frac{1}{m+1} \prod_{i=0}^{m} (n+1+i)$$

□

Aufgabe 4

Behauptung: $11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133m$ für $m \in \mathbb{N}$

Beweis:

Induktionsanfang:
$n = 1$

$$11^{1+1} + 12^{2\cdot 1-1} = 11^2 + 12 = 133 = 133 \cdot 1 = 133m$$

Für $n = 1$ ist diese Gleichung mit $m = 1$ erfüllt.

Induktionsvoraussetzung:
$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133m_1$

Induktionsbehauptung:
$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133m_2$

Induktionsschluss:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n-1}$$
$$= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = 11 \cdot 11^{n+1} + (133 + 11) \cdot 12^{2n-1}$$
$$= 11 \cdot (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 \cdot 12^{2n-1}$$

Der linke Summand ist aufgrund der Induktionsvoraussetzung ein ganzzahliges Vielfaches von 133 und damit auch durch diese teilbar. Der rechte Summand wird mit 133 multipliziert und muss deshalb ein ganzzahliges Vielfaches der selben sein. Da beide Summanden durch 133 teilbar sind, muss auch die gesamte Zahl durch 133 teilbar sein. □

Aufgabe Z1

$M\alpha\xi\ \gamma\iota\beta\tau\ \Phi\iota\pi\sigma\ \alpha\upsilon\sigma\ \Phi\lambda\alpha\chi\sigma\ \epsilon\iota\nu\epsilon\nu\ \ K\lambda\alpha\pi\pi\sigma.$

Aufgabe Z2

Voraussetzung:

(N, e, ν) genügt den Peano Axiomen. Für $n \in N$ soll $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$. Die Abbildung $f : A_n \longrightarrow A_n$.

Behauptung:

(f ist injektiv) $\Leftrightarrow$ (f ist surjektiv)

Beweis:

(f ist injektiv) $\Rightarrow$ (f ist surjektiv):
Für $x_1, x_2 \in A_n$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt dann:

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Da die Menge A_n eine endliche Menge mit n Elementen ist, muss also für jedes dieser unterschiedlichen Elemente ein eigenes Abbildungselement auf der gleichen Menge gefunden werden, ohne den gleichen Wert zweimal zu erreichen. Damit muss es also n verschiedene Werte für die Abbildung f auf A_n geben. Da A_n genau n Elemente besitzt, wird also auch der gesamte Wertebereich getroffen. Daraus folgt, dass diese Funktion auch surjektiv sein muss.

(f ist surjektiv) $\Rightarrow$ (f ist injektiv):
Durch die Surjektivität von f muss also jedes Element des Wertebereichs erreicht werden. Dies sind im Falle von A_n als Wertebereich genau n Elemente. Da ein Argument nur auf einen einzigen Wert abgebildet werden kann, müssen mindestens n verschiedene Elemente auch n verschiedene Funktionswerte haben. Da aber A_n auch der Definitionsbereich ist, kann es nicht mehr als n Argumente geben. Daraus folgt, dass jedes Element auf genau ein anderes Element abgebildet wird. Damit muss f injektiv sein.

$$\Rightarrow ((f \text{ ist injektiv}) \Leftrightarrow (f \text{ ist surjektiv}))$$

$\square$