

---

## Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 3

Abgabe Mittwoch 30.04.2014

- (1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie die Werte der Ableitungen in  $t = 0$ .

(Hinweis: Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Ableitung von  $f$  auf  $(0, \infty)$  gerade gegeben durch  $\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f(t) p_n(1/t)$  wobei  $p_n$  ein Polynom ist.)

- (2) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right).$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1 - x).$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x}.$

- (3) Es sei  $f$  eine stetige Funktion auf  $[0, 1]$  mit  $f(0) = f(1) = 0$ , die in  $(0, 1)$  zweimal stetig differenzierbar ist. Es existiere eine Konstante  $C > 0$ , so dass  $|f''(x)| \leq 4C$  für alle  $x \in (0, 1)$  ist. Zeigen Sie, dass dann für alle  $x \in (0, 1)$  gilt

$$|f(x)| \leq C.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung von  $f$  an der Stelle  $x$  in 0 und 1!

- (4) Berechnen Sie das Taylor-Polynom in  $x_0 = 0$  von

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3}$$

bis  $o(x^2)$ .

**Zusatzaufgabe:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  differenzierbar, so dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim f'(x)$  existiert. Untersuchen Sie  $f$  auf Differenzierbarkeit in  $x = 0$ .