Höhere Analysis I

Sommersemester 2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Dienstag 28.04.2015**

(1) Sei X eine unendliche Menge und $\mathcal{A}$ die Potenzmenge von X. Sei $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ definiert durch $\mu(A) = 0$ falls A endlich ist und $\mu(A) = \infty$ sonst. Sei $\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ definiert durch $\nu(A) = 0$ falls A abzählbar ist und $\nu(A) = \infty$ sonst. Zeigen Sie, da μ und ν additiv sind. Untersuchen Sie, ob μ oder ν Mae sind.

(2) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein mebarer Raum und $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Es ist f mebar.

(ii) Es lät sich f gleichmäig durch einfache Funktionen approximieren.

(3) Seien X und Y Mengen, $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Untersuchen Sie, ob

$$\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie ist.

(4) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein mebarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ erfülle

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Es ist μ ein Ma.

(ii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.