Analysis III – Übung 8

Clemens Anschütz – 146390 Übung: Mi 14–16
Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

a) Seien $a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$. und $v = a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt:

$$(a_1, \dots, a_{N-1} \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1} = 0)$$
$$\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_{N-1} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1} \neq 0)$$

Seien nun $a_1, \dots, a_{N-1}$ linear unabhängig. und $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$

$\Rightarrow$ Rang $(a_1, \dots, a_{N-1}) = N-1$ $\Rightarrow$ es muss $k \in \mathbb{N}$ mit

$1 \leq k \leq N-1$, sodass $\det A^{(k)} \neq 0$ gilt $\Rightarrow v \neq 0$

Sei nun $v \neq 0$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq N-1$, sodass $v_k \neq 0$.

$\Rightarrow \det A^{(k)} \neq 0 \Rightarrow$ Rang $A = N-1$
$\Rightarrow a_1, \dots, a_{N-1}$ sind linear unabhängig $\square$

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ die Parametrisierung einer Fläche mit $d \leq N$.

Aus Aufgabe 2 Blatt 7 ist folgende Äquivalenz bekannt:

$(*) \left[\det A^T A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A = d \right]$ für $N \times d$-Matrix A aus $\mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist regulär} &\Leftrightarrow D\varphi(x) \text{ hat maximalen Rang für alle } x \in U \\
&\Leftrightarrow \text{Rang } D\varphi(x) = d \text{ für alle } x \in U \\
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \det D\varphi(x)^T D\varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\det D\varphi(x)^T D\varphi(x)} = G_\varphi(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U
\end{aligned}$$
$\square$

Aufgabe 2

Seien $a_1, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $A := (a_1, \dots, a_{N-1})$ und $v := a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$.
Dann gilt:

$$v_i = (-1)^{i-1} \det A^{(k)}$$

a) $N=2 \implies A = (a_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$

$$\implies v_1 = \det A^{(1)} = \det(a_{12}) = a_{12}$$

$$\implies v_2 = -\det A^{(2)} = -a_{11}$$

$$\implies \boxed{v = (a_{12}, -a_{11})}$$

b) $N=3 \implies A = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

$$\implies v_1 = \det A^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{23}$$

$$\implies v_2 = -\det A^{(2)} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$$

$$\implies v_3 = \det A^{(3)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\implies \boxed{v = \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = a_1 \wedge a_2}$$

Aufgabe 3

Sei $f: (a,b) \to [0,\infty)$ eine stetig diffbare Funktion und sei

$$\phi: (a,b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \ \phi(r,\varphi) = (f(r)\cos\varphi, f(r)\sin\varphi, r).$$

Dann ist $((a,b) \times (0,2\pi), \phi)$ eine Parameterdarstellung von $\phi((a,b) \times (0,2\pi))$, da f, $\sin$, $\cos$ stetig diffbar.

ϕ ist genau dann regulär, wenn Rang $D\phi(x) = 2$ überall.

$$\iff \det D\phi^T D\phi \neq 0 \quad \text{für alle } x \in (a,b) \times (0,2\pi)$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} f'(r)\cos\varphi & -f(r)\sin\varphi \\ f'(r)\sin\varphi & f(r)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad D\phi^T D\phi = \begin{pmatrix} f'^2(r)+1 & 0 \\ 0 & f^2(r) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det D\phi^T D\phi = f^2(r)\left(f'^2(r)+1\right) =: C$$

$\Longrightarrow \quad f(r) \neq 0$ für alle $r \in (a,b]$, damit ϕ regulär ist

Aufgabe 4

a) $\phi : (0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(\varphi,\vartheta) = R(\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi)$

$$\Longrightarrow \quad D\phi = R\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta \\ -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det D\phi^T D\phi = \begin{vmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\varphi \end{vmatrix} = R^4\sin^2\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{G_\phi = \sqrt{|R^4\sin^2\varphi|} = R^2|\sin\varphi|}$$

b) $\psi : (0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\varphi,\vartheta) = R(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$$\Longrightarrow \quad D\psi = R\begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det D\psi^T D\psi = \begin{vmatrix} \cos^2\vartheta\cdot R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{vmatrix} = R^4\cos^2\vartheta$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{G_\psi = R^2\cos\vartheta}$$