Theorem

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Ist f diffbar, so ist f $\begin{smallmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{smallmatrix}$ genau dann, wenn

f' monoton $\begin{smallmatrix}\text{fallend}\\ \text{wachsend}\end{smallmatrix}$ ist

b) Ist f zweimal diffbar so ist f $\begin{smallmatrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{smallmatrix}$ genau dann,

wenn gilt $\begin{smallmatrix}f'' \leq 0\\ f'' \geq 0\end{smallmatrix}$

Bew.:

Es folgt b) aus a) und der schon gegebenen Charakteristik von Monotonie mittels Ableitungen.

Wir zeigen nun a):

1) Sei f' monoton wachsend (z.z.: f konvex)

Sei $x < \xi < y$ in I. Sei g_1 die Gerade durch $(x, f(x))$, $(\xi, f(\xi))$ und g_2 die Gerade durch $(y, f(y))$, $(\xi, f(\xi))$.

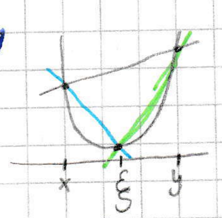
Dann gilt nach MWS Steigung von $g_1 = f'(\eta)$ für ein $\eta \in (x, \xi)$; Steigung von $g_2 = f'(\lambda)$ für ein $\lambda \in (\xi, y)$.

Da f' monoton wachsend ist, folgt $f'(\lambda) \geq f(\eta)$.

Damit liegt dann aber $f(\xi)$ unterhalb der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$.

$\xrightarrow{\xi \text{ bel.}}$ f konvex

16.4.14 2)



$x < y$

(z.z.: $f'(x) \leq f'(y)$)

f konvex $\Rightarrow$ Graph von f verläuft unterhalb der Sekante durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$

Sei c Steigung der Sekanten

Sei $\xi \in (x, y)$ beliebig

Dann hat Gerade durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$

Steigung $\leq c$

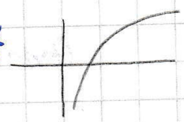
$\Rightarrow f'(x) \leq c$ Ähnlich $c \leq f'(y)$

$\square$

Ana 16.4.14

Beispiele:

- $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav, denn $\ln'(x) = \frac{1}{x}$



  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

- Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist konvex,

  denn $\exp''(x) = \exp(x) > 0$

3. Der Satz von Taylor und die L'Hospitalischen Regeln

Wir beginnen mit dem Satz von Taylor

Definition (k-te Ableitung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann definiert man induktiv die n-te Ableitung von f

durch

$$f^{(0)} := f \quad , \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

falls $f^{(n)}$ existiert.

Falls $f^{(n)}$ existiert heißt f n-mal diffbar

Idee- S.v. Taylor:

f stetig in p: $f(x) = f(p) + r(x) \qquad r(x) \to 0,\ x \to p$

f diffbar in p: $f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + r(x)(x-p) \qquad r(x) \to 0,\ x \to p$

f k-mal diffbar in p: $f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j + r(x)(x-p)^k \qquad r(x) \to 0,\ x \to p$

Definition (n-ten Taylorpolynom)

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar. Dann definiert man

zu $p \in (a,b)$ das n-te Taylorpolynom von f im Punkt p durch

$$P_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$$

Proposition

Sei P ein Polynom vom Grad n (oder kleiner) mit

$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(n)}(c) = 0$

für ein c. Dann gilt: $P = 0$

Bew: $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Dann gilt:} & P^{(n)}(x) = c_n\, n! \\ \text{Nach Vor.:} & 0 = P^{(n)}(c) \end{array}\right\} \Rightarrow c_n = 0$$

Nun Induktion über n

Lemma (Charak. Taylorpolynom)

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar und $p \in (a,b)$. Dann ist $P_{n,p}$ das eindeutige Polynom mit Grad höchstens n mit

$$P_{n,p}^{(k)}(p) = f^{(k)}(p) \quad , k = 0, \dots, n$$

Bew:

Eindeutigkeit:

Seien P, Q zwei solche Polynome.

Dann gilt $P-Q$, dass die Vorr. der vorherigen Prop. erfüllt sind (mit $c = p$)

$\Rightarrow P - Q = 0 \quad \Rightarrow P = Q$

$P_{n,p}$ hat gewünschte Eigenschaften:

Nachrechnen

□

Theorem (Taylorsche Formel mit Lagrange Restglied)

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ mal diffbar und $p \in (a,b)$.

Dann ex. zu jedem $x \in (a,b)$ ein t_x zwischen x und p mit

$$f(x) = P_{n,p}(x) + R_{n+1,p}(t_x)$$

mit dem Lagrangeschen Restglied

$$R_{n+1,p}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

Bew:

Beachte: Es sind p und x gegeben

Wir "entwickeln" um ξ:

$$h(\xi) = (x-\xi)^{n+1}$$

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^k$$

Dann gilt:

- $g(x) = f(x)$
- $g(p) = P_{n,p}(x)$
- $g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ (Produktregel, Teleskopsumme)

16.4.14

Nun Anwenden des allg. MWS:

Es ex. ein t zwischen x und p mit

$(g(x) - g(p))\, h'(t) = (h(x) - h(p))\, g'(t)$

$\Rightarrow (f(x) - P_{n,p}(x))\, (-1)(n+1)\, (x-t)^n = (0 - (x-p)^{n+1})\, \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\, (x-t)^n$

$\Rightarrow f(x) = P_{n,p}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$

$\square$

Bem.:
Ist $g: (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ mal diffbar mit $g^{(n+1)} = 0$,
so ist g ein Polynom vom Grad höchstens n.

Theorem (Taylorsche Formel mit Abschätzung)

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar mit $n \geq 1$ und sei $p \in (a,b)$. Dann gibt es eine Funktion $r: (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $r(x) \to 0$, $x \to p$ und

$f(x) = P_{n,p}(x) + r(x)(x-p)^n$

Bem.:
- Für $n=1$ wohlbekannt (vgl. obige Motivation?)
- Brauchen nur n-malige Diffbarkeit; allerdings keine explizite Abschätzung über $r(x)$

Bew.:
Setze $g(x) := f(x) - P_{n,p}(x)$

(Zz: $|g(x)| \leq r(x)|x-p|^n$ mit r geeignet mit $r(x) \to 0$, $x \to p$)

Es gilt:
$g(p) = g'(p) = \ldots = g^{(n)}(p) = 0$

Es gilt dann:

$|g(x)| = \frac{|g^{(n-1)}(t)|}{(n-1)!}|x-p|^{n-1}$ $(\diamond)$

für ein t zwischen x und p falls $n \geq 2$ nach Taylor (mit $(n-2)$) bzw. für $t = x$ falls $n=1$
Teleskopsumme

Nun gilt aber $g^{(n-1)}$ diffbar

$\Rightarrow g^{(n-1)}(t) = \underbrace{g^{(n-1)}(p)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(p)}_{=0}(t-p) + \varphi(t)$ mit $\frac{\varphi(t)}{t-p} \to 0$, $t \to p$ $(\diamond\diamond)$

Aus (◇) und (◇◇) folgt

$$|g(x)| \leq \frac{|\varphi(t)|}{(n-1)!} |x-p|^{n-1}$$

$$= \underbrace{\frac{\varphi(t)}{|t-1|}}_{\substack{\to 0 \\ t \to p}} \underbrace{\frac{|t-1|}{|x-p|}}_{\leq 1} |x-p|^n$$

□

Bemerkung:

Nun kann man auch Funktionen mit "vielen" verschwindenden Ableitungen auf Extrema untersuchen:

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ $n \geq 2$ mal diffbar mit

$$f'(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0, \quad f^{(n)}(p) \neq 0$$

Dann gilt:

- Ist n ungerade, so hat f in p einen Wendepunkt (d.h. $f(x) - f(p)$ wechselt Vorzeichen)
- Ist n gerade, so hat f in p lokales $\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}$ falls $\begin{matrix} f^{(n)}(p) < 0 \\ f^{(n)}(p) > 0 \end{matrix}$

Bew:

Vorheriger Satz:

$$f(x) = f(p) + \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + r(x)\right)(x-p)^n$$

Für x nahe p ist das Vorzeichen von ( ) gerade Vorzeichen von $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}$

□