# Analysis III - Notizen [1]

Daniel Lenz

Jena - Wintersemester 2014 / 2015

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Besonderer Dank an Erik Hebestreit, Fabian Heisler und Jürgen Reiter für die Arbeit an einer früheren Fassung und das Anfertigen der Zeichnungen.

# Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

# Etwas zu Kurvenintegralen

In diesem Kapitel geht es um Kurven und Kurvenintegrale. Kurven spielen eine Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik und Physik. Sie treten zum Beispiel bei der Beschreibung von Massepunkten in der klassichen Mechanik auf. Die Kurve beschreibt die Bewegung eines solchen Punktes und ihre Ableitung beschreibt die Geschwindigkeit. Mit dieser Anwendung im Sinn werden wir meist Differenzierbarkeit der Kurve vorausgesetzen. Wesentliche Themen des Kapitels sind die folgenden:

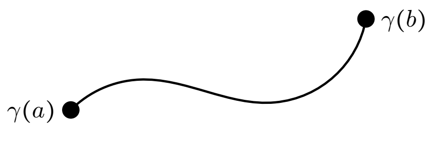
- Kurven und ihre Laenge.
- Kurvenintegrale ueber Vektorfelder und ihre Wegunabhaengigkeit.
- Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen.

## 1. Kurven und ihre Laenge

Definition (Kurve). *Eine Kurve in $\mathbb{R}^N$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$, wobei $I$ ein Interval in $\mathbb{R}$ ist.*

*Bemerkung.* Man kann auch Kurven in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ betrachten. Wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wird dieser Fall hier nicht separat diskutiert. Die unten gezeigten Aussagen gelten entsprechend.

Abbildung 1. Eine Kurve im Raum.




*Bemerkung - Interpretation.* Kurven beschreiben die Bewegungen von Massepunkten im Raum. Die Ableitung der Kurve (falls existent) beschreibt dann die Geschwindigkeit des Massepunktes. ($---$ > Klassische Mechanik).

*Weitere Notation und Definitionen zu Kurven:*
- Ist $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve, so heisst $\gamma(a)$ der Anfangspunkt von $\gamma$ und $\gamma(b)$ der Endpunkt.

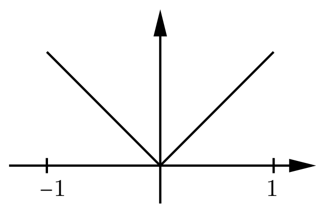
- Stimmen Anfangs- und Endpunkt der Kurve ueberein, so heisst die Kurve geschlossen.

- Zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (oder $\mathbb{C}$) definieren wir die inverse Kurve $\widetilde{\gamma} : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$. Ist $\gamma$ (stueckweise) stetig diffbar, so auch $\widetilde{\gamma}$,

- Eine Kurve $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ heisst stueckweise stetig differenzierbar, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und Intervalle $I_j$, $j = 1, \ldots, n$, gibt mit $I = \bigcup_{J=1}^n I_j$, sodass die Einschraenkungen von $\gamma$ auf die $I_j$ stetig differenzierbar sind. (Hierbei ist natuerlich vor allem der Fall von Interessen, in denen die $I_j$, $j = 1, \ldots, n$, bis auf Randpunkte paarweise disjunkt sind.)

*Bemerkung - Vorsicht!* Auch wenn $\gamma$ stetig diffbar ist, kann doch $\gamma([a, b])$ einen Knick haben.

- *Beispiel - Neilsche Parabel*): $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (Zeichnung).
- *Betragspotenz* $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, |t|^3)$




Physikalische Interpretation: Massepunkt wird immer langsamer und dreht sich dann bei Geschwindigkeit Null auf der Stelle.

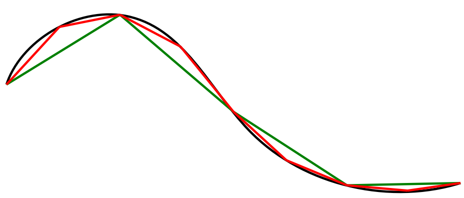
Es ist oft sinnvoll Kurven als 'gleich' aufzufassen, wenn das Bild uebereinstimmt und sie sich nur die Geschwindigekeit beim Durchlaufen verschieden ist. Das fuehrt auf folgende Definition.

DEFINITION (Aequivalenz von Kurven). *Zwei Kurven* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *und* $\varrho : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *heissen aequivalent, wenn es ein ein strikt wachsendes stetiges bijektives* $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *gibt mit* $\gamma = \varrho \circ \varphi$.

*Bemerkung.* Manchmal werden die von uns als Kurve bezeichneten Objekte als 'Weg' bzw. 'parametrisierte Kurve' bezeichnet und dann Klassen im obigen Sinne aequivalenter Wege unter dem Begriff 'Kurve' zusammengefaßt.

Wir kommen nun zum Begriff der Kurvenlaenge (= Wegstrecke, die von einem Massepunkt zurueckgelegt wird).

Dabei ist die *Idee* folgende:
-Approximiere Kurve durch Polygonzug. (Zeichnung.)
-Berechne Laenge des Polygonzugs.
-Bilde Grenzwert.



Hier sind die Details: Ist $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve und $Z = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ (d.h. $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$), so definiert man

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|.$$

Definition (Rektifizierbarkeit). *Die Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ($\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$) heisst rektifizierbar, wenn gilt*

$$\sup_Z L_Z(\gamma) < \infty.$$

*In diesem Fall definiert man die Laenge $L(\gamma)$ der Kurve als das angegebene Supremum.*

*Bemerkung.* Ist die Kurve $\gamma$ nicht rektifizierbar, so kann man die uneigentliche Laenge von $\gamma$ definieren durch $L(\gamma) = \infty = \sup_Z L_Z(\gamma)$.

Das Supremum in der Definition kann man sich als eine Art Grenzwert vorstellen (und das passt zu der anfangs geschilderten Idee zur Kuvenlaenge). Um das genauer fassen zu koennen, erinnern wir zunaechst kurz an den Begriff des Grenzwertes ueber Zerlegungen: Sei $I$ ein beschraenktes abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $F$ eine komplexwertige Funktion auf den Zerlegungen von $I$. Dann heisst $A$ der Grenzwert von $F$ ueber die Zerlegungen, geschrieben als

$$A = \lim_{|Z| \to 0} F(Z),$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert mit

$$|F(Z) - A| \leq \varepsilon$$

fuer alle Zerlegungen Z von $I$ mit Feinheit $|Z| \leq \delta$. Hierbei ist die Feinheit $|Z|$ einer Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ definiert als

$$|Z| = \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \ldots, n\}.$$

Theorem (Kurvenlaenge als Grenzwert). *Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist $\gamma$ rektifizierbar.*
(ii) *Es existiert $\lim_{|Z| \to 0} L_Z(\gamma)$.*

*In diesem Fall gilt $L(\gamma) = \lim_{|Z| \to 0} L_Z(\gamma)$.*

*Bemerkung.* Ein ganz aehnlicher Satz ist uns schon im Zusammenhang mit Riemann-integrierbaren Funktionen begegnet.

*Beweis.* (ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $L := \lim_{|Z| \to 0} L_Z(\gamma)$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$L_Z(\gamma) \leq L + 1$$

fuer alle Zerlegungen $Z$ von $[a,b]$ mit $|Z| < \delta$. Ist nun eine beliebige Zerlegung $Z'$ gegeben, so koennen wir aus dieser durch Hinzufuegen von Punkten eine Zerlegung $Z''$ erhalten mit $|Z''| < \delta$. Durch Hinzufuegen von Punkten kann die Laenge des entsprechenden Polygonzuges sich aber hoechstens vergroessern. Damit gilt also

$$L_{Z'}(\gamma) \leq L_{Z''}(\gamma) \leq L + 1.$$

Da $Z'$ beliebig war, folgt also die Rektifizierbarkeit von $\gamma$.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Wir zeigen: $L(\gamma) = \lim_{|Z|\to 0} L_Z(\gamma)$. (Das beweist dann auch gleichzeitig den letzten Teil der Aussage des Theorems.) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ mit

$$L(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Da $\gamma$ auf dem kompakten $[a,b]$ gleichmaeßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

fuer alle $s, t \in [a,b]$ mit $|s-t| < \delta$. Waehlt man nun eine Zerlegung $Z'$ mit $|Z'| < \delta, |Z|$, so gilt dann also

$$L(\gamma) \geq L_{Z'}(\gamma) \geq L_Z(\gamma) - (n+1)\delta \geq L(\gamma) - \varepsilon.$$

Das zeigt (ii). $\square$

*Bemerkung.* Erlaubt man auch Kurven mit unendlicher Laenge und passt man das Konzept des Grenzwertes ueber Zerlegungen in der naheliegenden Weise an, um auch den Wert $\infty$ zuzulassen, so gilt die im Theorem behauptete Aussage $L(\gamma) = \lim_{|Z|\to 0} L_Z(\gamma)$ fuer alle Kurven.

In dieser Vorlesung werden wir das vorangehende Theorem nicht direkt benutzen, sondern stattdessen mit (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven arbeiten. Das folgende Theorem zeigt, dass diese Kurven rektifizierbar sind und liefert auch eine Formel zur Berechnung der Laenge. Fuer die Anwendung ist es meist keine Einschraenkung, nur (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven betrachten.

Theorem (Berechnen der Kurvenlaenge fuer glatte Kurven). *Ist $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stueckweise stetig diffbar, so ist $\gamma$ rektifizierbar, und es gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \left( \sum_{j=1}^N \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt.$$

*Bemerkung.* In der Interpretation der Bewegung eines Massepunktes ist $\gamma'$ die Geschwindigkeit des Massepunktes. Der Satz sagt also, dass der Weg das Integral ueber den Betrag der Geschwindikeit ist (wie es ja auch sein sollte).

*Beweis.* Ohne Einschraenkung sei $\gamma$ stetig differenzierbar (andernfalls kann man 'stueckweise' argumentieren). Wir zeigen,

$$\lim_{|Z|\to 0} L_Z(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Damit folgt dann nach dem vorangehenden Theorem Rektifizierbarkeit der Kurve und die gewuenschte Formel fuer die Laenge.

Das folgt im wesentlichen aus dem Mittelwertsatz und der gleichmaessigen Stetigkeit von $|\gamma'|$. Hier sind die Details: Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|}{t_{j+1} - t_j}(t_{j+1} - t_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left|(\gamma_1'(\widetilde{t}_j^1), \ldots, \gamma_N'(\widetilde{t}_j^N)\right|(t_{j+1} - t_j)\end{aligned}$$

mit geeigneten $t_j \leq \widetilde{t}_j^s \leq t_{j+1}$ fuer $s = 1, \ldots, N$. Aufgrund der gleichmaessigen Stetigkeit von $\gamma'$ wird damit dann

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| - \int_a^b |\gamma'(t)| dt \right| \\
= &\left| \sum_{j=0}^{n-1} \left| (\gamma_1'(\widetilde{t}_j^1), \ldots, \gamma_N'(\widetilde{t}_j^N) \right| (t_{j+1} - t_j) - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)| dt \right| \\
=\leq &\sum_{j=0}^{n-1} \left| |(\gamma_1'(\widetilde{t}_j^1), \ldots, \gamma_N'(\widetilde{t}_j^N)| (t_{j+1} - t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)| dt \right|
\end{aligned}$$

klein, wenn die Zerlegung nur eine genuegend kleine Feinheit besitzt. Das liefert die gewuenschte Aussage. □

Ende der 1. Vorlesung

## 2. Kurvenintegrale

Wir kommen nun zum Kurvenintegral. Das Kurvenintegral beschreibt (zum Beispiel) die Arbeit/ Energie die die Bewegung eines Massepunktes in einem Vektorfeld kostet / liefert. Wie ueblich nennen wir dabei eine auf $U \subset \mathbb{R}^N$ definierte Funktion $F$ mit Werten in $\mathbb{R}^N$ ein Vektorfeld (oder auch 'Kraftfeld').

*Idee.* Ist die Kraft konstant und verlaeuft die Bewegung entlang einer Gerade, so gilt

$$Arbeit = Kraft\,(inWegrichtung) \times Weg = \langle Kraft, Weg \rangle.$$

Sei nun ein setiges Kraftfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben und ein Partikel, der sich entlang dem stetigen $\gamma$ bewegt. Dann sind approximativ (da $F$ stetig und $\gamma$ stetig) $F$ und $\gamma$ lokal konstant und die Arbeit gegeben (Zeichnung)

$$\begin{aligned}
Arbeit &\approx \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \rangle (t_{j+1} - t_j).
\end{aligned}$$

Macht man die Zerlegungen immer feiner so erhalt man ein Integral. Tatsaechlich gilt folgende Aussage.

Proposition (Kurvenintegral als Grenzwert). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Dann existiert fuer jedes stueckweise stetig differenzierbare $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ der Grenzwert $\lim_{|Z| \to 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$ und es gilt*

$$\lim_{|Z| \to 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

*Beweis.* Wir zeigen

$$\lim_{|Z| \to 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Dazu betrachten wir fuer eine Zerlegung $Z = (t_0, \ldots, t_n)$ die Differenz

$$\sum_{j=1}^{n} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle - \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma^{'}(t)\rangle dt.$$

In der Norm kann diese Differenz mittels Dreiecksungleichung leicht abgeschaetzt werden durch

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\langle F(\gamma(t_j)), \frac{1}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\rangle - \langle F(\gamma(t)), \gamma^{'}(t)\rangle| dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz und der gleichmaessigen Stetigkeit der Funktionene $F \circ \gamma$ und $\gamma^{'}$ auf $[a, b]$ folgt dann, dass der gewuenschte Term beliebig klein wird, wenn nur $|Z|$ genuegend klein ist (evtl. Details). □

Die vorangehende Proposition legt folgende Definition nahe.

Definition (Kurvenintegral fuer glatte Kurven). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definiert man fuer jedes stueckweise stetig differenzierbare $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ das Kurvenintegral*

$$\int_\gamma F d\gamma := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_a^b \sum_{j=1}^{N} F_j(\gamma(t))\gamma_j^{'}(t) dt.$$

*Bemerkung*(Kurvenintegral fuer rektifizierbare Kurven). Man kann tatsaechlich das Kurvenintegral fuer alle rektifizierbaren Kurven durch den entsprechenden Grenzwert definieren. Dann gelten fuer das so definierte Kurvenintegral ebenfalls die weiter unten gezeigten Aussagen. Wir diskutieren dies hier nicht weiter.

*Bemerkung*(Beziehung Kurvenintegral und Kurvenlaenge). Ist $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ eine stueckweise stetige Kurve und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig mit

$$F(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\gamma^{'}(t)$$

(d.h. $F$ ist in den Punkten der Kurve gerade das normalisierte Tangentialfeld), so gilt offenbar

$$\int_\gamma F d\gamma = L(\gamma).$$

Im allgemeinen wird es allerdings zu einer gegebenen Kurve kein solches $F$ geben (da zu verschiedenen Werten von $t$ der Wert der zugehoerigen $\gamma(t)$ uebereinstimmen kann, ohne dass $\gamma^{'}(t)$ uebereinstimmt).

*Bemerkung.*(Verschiedene Notationen) In der (physikalischen) Literatur finden sich zahlreiche weitere Schreibweisen fuer das Kurvenintegral.

Kurvenintegrale aendern sich nicht, wenn man dieselbe Kurve mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaeuft:

Proposition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ und $\varrho : [c, d] \longrightarrow U$ aequivalente, stetig differenzierbare Kurven, so gilt $\int F d\gamma = \int F d\varrho$.*

*Beweis.* Sei $\gamma = \varrho \circ \varphi$. Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei $t_k' := \varphi(t_k)$. Dann ist $Z' : c = t_0' < t_1' < \ldots < t_n' = d$ eine Zerlegung von $[c, d]$. Da $\varphi$ stetig also auch gleichmaessig stetig ist, wird die Feinheit von $Z'$ beliebig klein, wenn die Feinheit von $Z$ beliebig klein wird. Damit ist dann (fuer genuegend feine $Z$) sowohl

$$S_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^{n} \langle F(\gamma(t_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\rangle$$

eine gute Naeherung von $\int F d\gamma$ als auch

$$S_{Z'}(\varrho) := \sum_{k=1}^{n} \langle F(\varrho(t'_k)), \varrho(t'_k) - \varrho(t'_{k-1})\rangle$$

eine gute Naehrung von $\int F d\varrho$. Es gilt aber nach Konstruktion

$$S_Z(\gamma) = S_{Z'}(\varrho).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Ersetzt man in einem Kurvenintegral die Kurve durch ihr Inverses so aendert sich lediglich das Vorzeichen:

Proposition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ stueckweise stetig differenzierbar. Dann ist auch die inverse Kurve $\widetilde{\gamma}$ stueckweise stetig differenzierbar und es gilt*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma})$$

*sowie*

$$\int_\gamma F d\gamma = -\int_{\widetilde{\gamma}} F d\widetilde{\gamma}$$

*fuer jedes stetige $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$.*

*Beweis.* Offenbar gilt

$$\widetilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(-t).$$

Damit folgen die gewuenschten Aussagen leicht. □

## 3. Gradientenfelder

Im folgenden Teil des Kapitels geht es darum, ob (bei gegebenem Vektorfeld) das Kurvenintegral nur von Anfangs und Endpunkt der Kurve (und nicht dem Verlauf der Kurve) abhaengt. Wenn das der Fall ist, spricht man von 'Wegunabhengigkeit des Kurvenintegrals'. Dabei handelt es sich also um eine Eigenschaft des Vektorfeldes. Wenn es um Vektorfelder geht, die zur Beschreibung von Arbeit/ Energie verwendet werden ('Kraftfelder'), sollte diese Eigenschaft gelten, da man sonst Energie gewinnen kann.

Fuer die weitere Untersuchungen benoetigen wir noch ein weiteres Konzept.

Definition (Gradientenfeld). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetige Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ heisst Gradientenfeld, wenn es ein stetig differenzierbares $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla\varphi = F$. Ein solche $\varphi$ heisst dann Potential von $F$.*

Ist $\varphi$ ein Potential zu $F$, so ist offenbar auch $\varphi + const$ ein Potential zu $F$. Im wesentlichen ist das die einzige Freiheit, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhaengend und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind $\varphi_1$ und $\varphi_2$ Potentiale zu $F$, so gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = constant$.*

*Beweis.* Das wissen wir schon aus dem vorigen Semester. Zur Sicherheit ;-) geben wir noch einen Beweis. Sei $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$. Dann gilt $\nabla\psi = F - F = 0$. Seien $x$ und $y$ beliebige Punkte in $U$. Zu zeigen: $\psi(x) = \psi(y)$.

Da $U$ offen und zusammenhaengend ist, existiert eine stueckweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ von $x$ nach $y$. Dann gilt

$$\psi(y) - \psi(x) = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b (\psi \circ \gamma)'(t)dt = 0$$

(da $(\psi \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla\psi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$). Damit folgt die Behauptung. □

Damit koennen wir die folgende Charakterisierung beweisen.

THEOREM. *(Abstrakte Charakterisierung Gradientenfeld bzw. Wegunabhaengigkeit des Kurvenintegral) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Sei $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Dann sind aequivalent:*

(i) *Fuer jedes (stueckweise) stetig diffbare $\gamma$ haengt $\int_\gamma F d\gamma$ nur von Anfangs und Endpunkt von $\gamma$ ab.*
(ii) *Ist $\gamma$ eine geschlossene (stueckweise) stetig diffbare Kurve, so gilt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.*
(iii) *Es ist $F$ ein Gradientenfeld (d.h. es existiert ein stetig diffbares $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit $F = \nabla\varphi$).*

*In diesem Fall gilt $\int_\gamma F d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$.*

*Beweis.* (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $\gamma$ eine geschlossene Kurve. Offenbar hat $\widetilde{\gamma}$ denselben Anfangs/Endpunkt wie $\gamma$. Damit folgt aus (i)

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_{\widetilde{\gamma}} F d\widetilde{\gamma}.$$

Wie wir oben gesehen hatten gilt ausserdem

$$\int_\gamma F d\gamma = -\int_{\widetilde{\gamma}} F d\widetilde{\gamma}.$$

Damit folgt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sind $\gamma$, $\varrho$ zwei (stueckweise) stetig diffbare Kurven mit gleichem Anfangs und Endpunkt so kann man $\gamma$ mit $\widetilde{\varrho}$ zu einer geschlossenen Kurve $\sigma$ zusammensetzen (Zeichnung). Dann gilt natuerlich

$$\int_\sigma F d\sigma = \int_\gamma F d\gamma + \int_{\widetilde{\varrho}} F d\widetilde{\varrho}.$$

Damit folgt dann nach (ii)

$$0 = \int_\sigma F d\sigma = \int_\gamma F d\gamma + \int_{\widetilde{\varrho}} F d\widetilde{\varrho} = \int_\gamma F d\gamma - \int_\varrho F d\varrho.$$

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Ohne Einschraenkung sei $U$ wegzusammenhaengend (sonst koennen wir auf jeder Komponente einzeln argumentieren). Sei $p \in U$ fest. Fuer jedes $x \in U$ sei $\gamma_x$ eine stetig diffbare Kurve von $p$ nach $x$. Definiere $\varphi(x) := \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$. Aufgrund der Voraussetzung (i) gilt

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_{\gamma_h} F d\gamma_h$$

mit $\gamma_h : [0,h] \longrightarrow U$, $\gamma_h(t) = x + te_j$. (Zeichnung.) Es gilt (wie wir schon beweisen haben) $\gamma_h'(t) = e_j$. Damit folgt also

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_0^h \langle F(\gamma_h(t)), e_j\rangle dt = \int_0^h F_j(x + te_j))dt.$$

Da $t \mapsto F_j(x + te_j)$ stetig ist, folgt aus dem HDI

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j))dt = F_j(x).$$

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \int_\gamma F d\gamma &= \int_a^b \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ (s.o.) &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\ (HDI) &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage wurde im Beweis von (iii) $\Longrightarrow$ (i) mitbewiesen. □

Ende der 2. Vorlesung

Aus dem vorangehenden Theorem folgt eine Vorschrift zum Berechnen des Potentials eines Vektorfeldes (wenn ein solches Potential existiert).

Folgerung (Berechnung des Potentials). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhaengend und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ein Gradientenfeld. Sei $p \in U$ beliebig und zu jedem $x \in U$ eine stetig diffbare Kurve $\gamma_x$ von $p$ nach $x$ gewaehlt. Dann definiert $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$$

*ein Potential von $F$.*

*Beweis.* Variante 1: Das wurde im Beweis von (iii)$\Longrightarrow$ (i) des vorigen Theorems mitbewiesen.
Variante 2: Sei $\psi$ ein Potential von $F$ (d.h. $\nabla\psi = F$). Dann gilt nach der letzten Aussage des vorigen Theorem also

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x = \psi(x) - \psi(p).$$

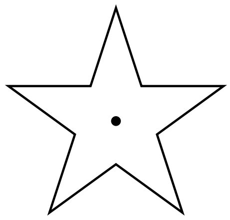
Damit folgt $\nabla\varphi = \nabla\psi = F$. □

Das Hauptziel ist nun, ein einfach nachpruefbares Kriterium zu geben, wann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist (aequivalent: Kurvenintegrale ueber geschlossene Kurven verschwinden). Das erfordert noch einige Vorbereitung.

Definition (Sternförmige Menge). *Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ heisst sternfoermig, wenn es einen Punkt $p \in U$ gibt, so dass fuer jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von $p$ nach $x$ ganz in $U$ liegt. Dann heisst $p$ Zentrum von $U$.*

*Beispiele.*

- Jede Kugel ist sternfoermig.
- Ist $U$ konvex, so ist $U$ sterrnfoermig (mit $p \in U$ beliebig).
- Stern in $\mathbb{R}^2$ (s.o.)



- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternfoermig. (Bew. Die Verbindung von $p$ zu $-p$ enthaelt 0. Widerspruch).
- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-t,0) : t \geq 0\}$ ist sternfoermig (zu $p = (1,0)$ beispielsweise). Zeichnung.

*Bemerkung.* Die beiden letzten Beispiele zeigen: Eine Menge kann durch 'Weglassen von Punken' sternfoermig werden. Man kann z.b. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ersetzen durch $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$. So kann man oft Potentiale auf Teilmengen von $U$ erhalten.

THEOREM (Lemma von Poincaré). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und sternfoermig. Sei $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist $F$ genau dann ein Gradientenfeld wenn gilt $\partial F_j / \partial x_i = \partial F_i / \partial x_j$ fuer alle $i, j$.*

*Beweis.* $\Longrightarrow$: Sei $F = \nabla \varphi$ stetig diffbar. Dann ist also $\varphi$ zweimal stetig diffbar und es gilt nach dem Satz von Schwarz und der Vorrausetzung:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

$\Longleftarrow$: Ohne Einschraenkung sei 0 das Zentrum von $U$. Zu $x \in U$ waehlen wir die stetig differenzierbaren Kurve $\gamma(t) = tx$ und definieren

$$\phi(x) := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^N F_j(\gamma(t)) x_j dt.$$

(Wenn $F$ ein Potential besitzt, so muss es durch dieses $\phi$ gegeben sein.) Nun muessen wir die Ableitung von $\phi$ nach den $x_k$ bestimmen. Die Summe liefert eine Funktion, deren Ableitung nach $x_k$ stetig in $x_k$ und $t$ ist. Daher koennen wir Integration und Differentiation (nach $x_k$) vertauschen und erhalten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k}(F_j(tx)x_j)dt.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{j=1}^N F_j(tx)x_j &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) t x_j \\
(Voraussetzung) &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) t x_j \\
(Produktregel) &= \frac{d}{dt}(tF_k(tx)).
\end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_k(tx))dt = tF_k(tx)|_0^1 = F_k(x).$$

Das beendet den Beweis. □

*Bemerkung.*

- Ist $U$ nicht sternfoermig, so folgt aus $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle $i,j$ im allgemeinen nicht, dass $F$ ein Gradientenfeld ist (Uebung).
- Auch auf nichtsternfoermigen Mengen kann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld sein. Z.B. ist das Gravitationsfeld $F(x) = x/|x|^3$ definiert auf $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ eine Gradientenfeld (Uebung).

Zur weiteren Untersuchung führen wir eine abgeschwaechte Version des Konzeptes des Gradientenfeldes ein.

Definition (Lokales Gradientenfeld). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ heisst lokales Gradientenfeld, wenn zu jedem $x \in U$ ein $R > 0$ existiert, so dass die Einschraenkung $F|_{B_R(x)}$ von $F$ auf $B_R(x)$ ein Gradientenfeld ist.*

Da jede Kugel sternfoermig ist, folgt aus dem Lemma von Poincaré sofort folgende Folgerung.

Folgerung. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann sind aequivalent:*

(i) *$F$ ist ein lokales Gradientenfeld.*
(ii) *Es gilt $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle $i,j$.*

Wir untersuchen nun Invarianz des Kurvenintegrals fuer lokale Gradientenfelder. Die Grundidee ist dabei, dass Kurven, die stetig ineinander ueberführt werden koennen, gleiche Kurvenintegrale haben und dass in Mengen 'ohne Loecher' Kurven gut ineinenander ueberfuehrt werden koennen. Das wird schliesslich auf den Satz führen, dass in Mengen 'ohne Loecher' jedes lokale Gradientenfeld auch ein globales Gradientenfeld ist. In Mengen mit Loechern gilt diese Aussage nicht. *Zeichnung* Um das praezise auszufuehren brauchen wir den Begriff der Homotopie.

Definition (Homotopie). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a,b] \longrightarrow U$ mit gemeinsamem Anfangspunkt $A$ und gemeinsamen Endpunkt $B$ heissen homotop in $U$, wenn es eine stetige Abbildung*

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$$

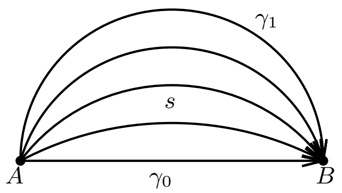
*gibt mit*

$$H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t)$$

*fuer alle $t \in [a,b]$ sowie*

$$H(a,s) = A,\ H(b,s) = B$$

*fuer alle $s \in [0,1]$.*




*Beispiel.* Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$ Kurven mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt, so dass fuer jedes $t \in [a,b]$ die Verbindungstrecke von $\gamma_0(t)$ nach $\gamma_1(t)$ ganz in $U$ liegt, so sind $\gamma_0$ und $\gamma_1$ homotop mit

$$H(t,s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t).$$

Das gilt zum Beispiel immer, wenn $U$ konvex ist.

Theorem (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - I). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a,b] \longrightarrow U$ Kurven mit gemeinsamem Anfangspunkt $A$ und gemeinsamen Endpunkt $B$. Sind $\gamma_0$ und $\gamma_1$ homotop in $U$, so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld $F$ auf $U$*

$$\int_{\gamma_0} F d\gamma_0 = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1.$$

*Beweis.* Sei $H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$ eine Homotopie zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ in $U$. Sei $\mathcal{B} := \{B_\iota\}$ eine Ueberrdeckung von $U$ durch offenen Kugeln, so dass $F$ auf jedem Element von $\mathcal{B}$ ein Potential besitzt.

*Behauptung.* Es gibt Zerlegungen $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ und $Z' : 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_q = 1$, so dass jedes $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ ganz in einer Kugel aus $\mathcal{B}$ enthalten ist.
Bew. Angenommen nein. Dann unterteilen wir fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ sowohl $[a,b]$ also auch $[0,1]$ in $m$ gleichlange Intervalle und damit $[a,b] \times [0,1]$ in $m^2$ Rechtecke. Nach Annahmen koennen wir dann ein Rechteck $R_m$ finden, so dass $H(R_m)$ nicht in einer der Kugeln aus $\mathcal{B}$ enthalten ist. Die Mittelpunkte $x_m$ der $R_m$ liegen alle in der kompakten Menge $[a,b] \times [0,1]$. Sie haben also eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschraenkung

$$x_m \to p.$$

Sei nun $B_0$ eine Kugel aus $\mathcal{B}$ mit $H(p) \in B_0$. Aufgrund der Stetigkeit von $H$ liegt dann $H(R_m)$ in $B_0$ fuer alle genuegend grossen $m$. *Zeichnung.*

Seien $Z$, $Z'$ gemaess der Behauptung gewaehlt. Seien
$P_{ij} := H(t_i, s_j)$
$\Gamma_{ij} :=$ Strecke von $P_{ij}$ nach $P_{i+1,j}$.
$\sigma_{ij} :=$ Strecke von $P_{ij}$ nach $P_{i,j+1}$.
*Zeichnung.* $y$-Achse entsprichet $j$- Achse, $x$-Achse entspricht $i$-Achse.

Ende der Vorlesung.

Es liegen nach Voraussetzung $P_{ij}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}$ alle in einer Kugel aus $\mathcal{B}$. Mit $I(\alpha) := \int F d\alpha$ und $I_j := \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij})$ gilt dann (Zeichnung! Nullwege addieren!)

$$I_j = I_{j+1}$$

fuer alle $j = 0,\dots,q-1$. Also folgt $I_0 = I_q$. Nach Konstruktion gilt aber

$$\int F d\gamma_0 = I_0 = I_q = \int F d\gamma_1.$$

□

*Bemerkung.* $H$ wird lediglich als stetig voraussgesetzt. Daher sind im allgemeinen fuer $s$ die Abbildungen $t \mapsto H(s,t)$ keine stetig differenzierbaren Kurven. Aus diesem Grund muessen wir mit den Verbindungstrecken arbeiten.

Wir stellen nun noch eine Variante dieses Satzes fuer geschlossenen Kurven vor.

DEFINITION (Freie Homotopie). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a,b] \longrightarrow U$ heissen frei homotop in $U$, wenn es eine stetige Abbildung*

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow U$$

*gibt mit*

$$H(t,0) = \gamma_0(t),\ H(t,1) = \gamma_1(t)$$

*fuer alle $t \in [a,b]$ sowie*

$$H(a,s) = H(b,s)$$

*fuer alle $s \in [0,1]$. Zeichnung. 'Rechteck' Abbildung $H$ 'kreisringige Kurven'.*

Ganz aehnlich wie oben, kann man dann folgenden Satz beweisen:

THEOREM (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - II). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a,b] \longrightarrow U$ geschlossene Kurven. Sind $\gamma_0$ und $\gamma_1$ frei homotop in $U$ so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld $F$ auf $U$*

$$\int F d\gamma_0 = \int F d\gamma_1.$$

*Beweis.* Der Beweis kann analog zum Beweis des vorigen Theorems gefuehrt werden. Wir geben nur eine Zeichnung. □

DEFINITION. *Eine Menge $U$ in $\mathbb{R}^N$ heisst einfach zusammenhaengend, wenn jede geschlossene Kurve frei homotop in $U$ zu einer Kurve ist, die nur einen Punkt enthaelt.*

*Bemerkung.* (a) Grob gesprochen bedeutet 'einfache zusammenhaengend', dass die Menge keine Loecher besitzt.
(b) Jede sternfoermige Meenge ist einfach zusammenhaengend. (Jede geschlossene Kurve kann zum Zentrum zusammengezogen werden.) Es gibt aber einfach zusammenaengende Mengen, die nicht sternfoermig sind (Beispiel: Zeichnung nichtkonvexe Deformation einer Kreisscheibe.)
(c) Es ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhaengend. (Es ist gar nicht so einfach, das zu beweisen. Wir werden es als Nebenprodukt aus dem folgenden Satz erhalten.)

Damit kommen wir nun zum ultimativen Satz ueber Gradientenfelder.

Theorem (Charakterisierung Gradientenfelder). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und einfach zusammenhaengend. Dann ist ein stetig differenzierbare $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \ldots, N$.*

*Beweis.* Gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \ldots, N$, so ist nach dem Poincaréschen Lemma $F$ ein lokales Gradientenfeld. Sei nun $\gamma$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $\gamma$ nach Voraussetzung in $U$ frei homotop zu einer Kurve $\varrho$, die nur aus einem Punkt besteht. Aufgrund des vorigen Satzes gilt dann

$$\int F d\gamma = \int F d\varrho.$$

Da $\varrho$ nur einen Punkt trifft, verschwindet die rechte Seite. Damit verschwinden also alle Kurvenintegrale ueber geschlossene Wege. Nach der abstrakten Charakterisierung ist also $F$ ein Gradientenfeld.

Die umgekehrte Implikation folgt sofort (und hat nichts mit Einfachem Zusammenhang zu tun). $\square$

*Bemerkung.* (Uebung) Man kann auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Vektorfeld $F$ und einen geschlossenen Weg angeben, so das $F$ ein lokales Gradientenfeld ist aber das Kurvenintegral ueber diesen geschlossenen Weg nicht verschwindet. Damit ist dann nach dem vorangehenden Theorem $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhaengend.

Folgerung. *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhaengend. Sei $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld. Dann ist $F$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Rotation von $F$*

$$rot F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3, (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

*identisch verschwindet.*

*Bemerkung.* Die vorangehenden Betrachtungen liefern bemerkenswerte Zusammenhaenge zwischen topologischen Eigenschaften einer Teilmenge $U$ von $\mathbb{R}^N$ und Loesbarkeit von Differentialgleichungen auf dieser Menge:

- Die Dimension des Raumes der Loesungen von $\nabla \varphi = 0$ (auf $U$) ist gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $U$. Insbesondere ist der Raum der Loesungen eindimensional, wenn $U$ zusammenhaengend ist.
- Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhangend, so ist die Gleichung $\nabla \varphi = F$ fuer alle $F$ mit $rot F = 0$ loesbar.

Zum Abschluss des Abschnittes geben wir noch einen Hinweise wie man ein Potential auffinden kann.

*Hinweis zum Auffinden des Potential.*

Variante 1: Integrieren entlang 'schoener' Wege.

Variante 2: Anwenden des HDI auf einzelne Komponenten und anschliessendes Vergleichen (mit Probe!)

*Beispiel.* (a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Dann gilt $\partial F_1 / \partial x_2 = 0 = \partial F_2 / \partial x_1$. Daher besitzt $F$ nach dem Theorem ein Potential $\Phi$. Wir haben

$$\partial_1 \Phi = x_1 \longrightarrow \Phi(x) = x_1^2/2 + C(x_2).$$

$$\partial_2\Phi = x_2 \longrightarrow \Phi(x) = x_2^2/2 + D(x_1).$$

Das fuehrt auf $\Phi = 1/2(x_1^2 + x_2^2) + C$. Probe zeigt, dass es sich tatsaechlich um ein Potential handelt.
(b) $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x) = c$ (mit einem $c \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt

$$0 = \partial F_j/\partial x_i$$

fuer alle $i, j$. Tatsaechlich ist in diesem Fall $\varphi(x) = \langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^N c_j x_j$ ein Potential, wie eine Probe zeigt.

KAPITEL 2

# Etwas Integrationstheorie

Das Riemann-Integral weisst eine Reihe von Problemen auf. In diesem Abschnitt lernen wir eine allgemeine Theorie der Integration kennen, die diese Probleme (groeßtenteils) umgeht. Grundobjekte sind (Prae)Masse und Integrale von Elementarfunktionen. Diese werden dann durch einen Vervollstaendigungsprozess zu Massen und Integralen von (messbaren) Funktionen fortgesetzt.

Genauer ist die Idee ist folgende: Sei eine Menge $X$ gegeben.

- Ordne (geeigneten) Teilmengen $A$ von $X$ ein Volumen / Mass $\mu(A)$ zu.
- Definere Integral auf Elementarfunktionen $f = \sum c_i 1_{A_i}$ durch $\int f d\mu := \sum c_i \mu(A_i)$.
- Setze fort. (Hier ist Arbeit zu leisten!)

### Probleme des Riemann-Integrals

Das Riemann-Integral weist eine Reihe von Problemen auf. Dazu gehoeren folgende:

- Viele 'schoene' Funktionen sind nicht Riemann-integrierbar.
  Beispiel: $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f(x) = 0$ fuer $x$ irrational und $f(x) = 1$ fuer $x$ rational. Dann ist $f$ ueberall 0 bis auf eine abzaehlbare Menge.
- Das Riemann-Intgral ist nicht gut vertraeglich mit Grenzwerten. Es ist - im wesentlichen - nur vertraeglich mit gleichmaessiger Konvergenz.
  Beispiel: Sei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abazaehlung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $f_n(x) = 1$ fuer $x \in \{q_1, \ldots, q_n\}$, $f_n(x) = 0$ sonst. Dann ist $(f_n)$ gleichmaessig beschraenkt, jedes $f_n$ ist Riemann-intbar mit $\int f_n dx = 0$, es konvergiert $(f_n)$ gegen $f$ (aus dem vorigen Punkt) punktweise und $f$ ist nicht Riemann-intbar.
- Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen ist nicht abgeschlossen unter Substitutionen.
  Beispiel: Sei $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sei $f = 1_{(-\pi/2,\pi/2)}$. Dann ist $f$ Riemann-intbar auf $\mathbb{R}$, aber die aus der Substitution entstehende Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = f \circ \arctan \cdot \frac{1}{1+x^2}$ ist nur uneigentlich Riemann-intbar.

*Bemerkung.* Diese Nachteile werden in einer Dimension durch den grossen Vorteil des Riemann-Integral, die Gueltigkeit des HDI, ausgeglichen. In hoeheren Dimensionen trifft das nicht mehr zu.

## 1. Prämaße

DEFINITION. *Sei $X$ eine Menge. Eine Familie $\mathcal{R}$ von Teilmengen von $X$ heisst Mengenring auf $X$, wenn gilt:*

(R1) *Die leere Menge $\varnothing$ gehoert zu $\mathcal{R}$.*
(R2) *Mit $A, B$ in $\mathcal{R}$ gehoert auch $A \cup B$ zu $\mathcal{R}$.*
(R3) *Mit $A, B$ in $\mathcal{R}$ gehoert auch $A \setminus B$ zu $\mathcal{R}$.*

*Dann schreibt man auch $(X, \mathcal{R})$ fuer den Mengenring ueber $X$.*

FOLGERUNG. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und seien $A, B$ in $\mathcal{R}$. Dann gehoert auch $A \cap B$ zu $\mathcal{R}$.*

*Beweis.* Es gilt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. □

**Beispiele.**

- Sei $X$ eine beliebige Menge. Dann bildet die Menge der endlichen Teilmengen von $X$ einen Mengenring.
- Sei $X = \mathbb{R}$. Dann bilden die Figuren d.h. die Vereinigungen von endlich vielen beschraenkten Intervallen einen Mengenring.
- Sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Figuren d.h. die Vereinigungen von endlich vielen achsenparallelen Quadern einen Mengenring. (Es ist $Q$ ein achsenparalleler Quader, wenn gilt $Q = I_1 \times \ldots \times I_N$ mit Intervallen $I_j$.)

Ende der Vorlesung

DEFINITION. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring auf $X$. Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ heisst Praemass auf $(X, \mathcal{R})$, wenn gilt*

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ \ (\sigma\text{-}Additivitaet)$$

*fuer alle Folgen $(A_n)$ in $\mathcal{R}$ mit*

- *$A_n \cap A_m = \varnothing$ fuer alle $n \neq m$ ('$A_n$ paarweise disjunkt')*
- *$\bigcup A_n \in \mathcal{R}$ (Nicht selbstverstaendlich)*

FOLGERUNG. *Sei $\mu$ Praemass auf $(X, \mathcal{R})$. Dann gilt*

- *$\mu(\varnothing) = 0$*
- *$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ fuer alle $A, B$ aus $\mathcal{R}$ mit $A \cap B = \varnothing$.*

*Beweis.* Es gilt $\varnothing = \cup_n \varnothing$. Damit folgt aus der $\sigma$-Additivitaet

$$\mu(\varnothing) = \sum_n \mu(\varnothing).$$

Damit folgt $\mu(\varnothing) = 0$. Nun folgt die zweite Aussage leicht, indem man die Mengen $A_j$ definiert durch

$$A_1 := A, A_2 := B, A_n := \varnothing, \ \ n \geq 2$$

und aus der $\sigma$-Additivitaet schliesst

$$\mu(A \cup B) = \mu(\cup A_j) = \sum \mu(A_j) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + 0 = \mu(A) + \mu(B).$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. *Sei $\mu$ Praemass auf $(X, \mathcal{R})$. Dann gilt:*

- *Fuer $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

- *Gehoeren $A_n$, $n \in \mathbb{N}$, und $A$ zu $\mathcal{R}$ und gilt $A \subset \cup A_n$ so folgt $\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$.*

*Beweis.* Erster Punkt: Setze $A_1 := A$ und $A_2 := B \setminus A$. Dann gilt nach der vorangehenden Folgerung.

$$\mu(B) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \geq \mu(A_1) = \mu(A).$$

Zweiter Punkt: Definiere

$$A_1^{'} := A_1 \cap A, \;\; A_n^{'} := (A_n \cap A) \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k^{'}.$$

Dann gehoeren die $A_n^{'}$ zu $\mathcal{R}$ und sind paarweise disjunkt mit

$$A_n^{'} \subset A_n \;\text{ und }\; A = \cup(A_n \cap A) = \cup A_n^{'}.$$

Damit folgt also

$$\mu(A) = \sum \mu(A_n^{'}) \leq \sum \mu(A_n).$$

Das beendet den Beweis. □

**Beispiele.**

- Sei $X$ eine beliebige Menge und $\mathcal{R}$ ein beliebiger Mengenring und $p \in X$ beliebig. Dann definiert $\delta_p : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty)$ mit $\delta_p(A) := 1$ falls $p \in A$ und $\delta_p(A) = 0$ sonst, ein Praemass. Es heisst die *delta-Funktion* in $p$ (auch wenn es gar keine Funktion, sondern ein Praemass ist).
- Sei $X$ eine beliebige Menge und $\mathcal{R}$ der Mengenring der endlichen Teilmengen von $X$. Dann ist

  $$\mu : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \mu(A) := \text{Anzahl der Elemente von } A$$

  ein Praemass. Es heisst das Zaehlpraemass.
- Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen beschraenkten Intervallen). Fuer ein beliebiges Intervall $I$ mit $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ definiert man die Intervalllaenge $|I|$ durch

  $$|I| = b - a.$$

  Es laesst sich nun jedes $A$ aus dem Mengenring als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^n A_j$ von beschraenkten Intervallen schreiben und durch

  $$\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty), \;\; \lambda(A) := \sum_{j=1}^n |A_j|$$

  wird ein Praemass auf $\mathcal{R}$ definiert. Dieses heisst das Lebesguepraemass auf $\mathbb{R}$.

  (Bew: Mit Induktion sieht man leicht, dass man jede Figur als diskunkte Vereinigung von Intervallen schreiben kann. Die Wohldefiniertheit von $\lambda$ (i.e. Unabhaengigkeit von der gewaehlten Zerlegung in disjunkte Intervalle) folgt einfach.

  Wir zeigen nun die $\sigma$-Additivitaet. Diese wird in drei Schritten bewiesen:

  *Schritt 1:* Es ist $\lambda$ monoton und endlich additiv.
  Bew. Das folgt leicht.

*Schritt 2:* Zu jeder Figur $A$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Figur $K$ und eine offene Figur $U$ mit

$$K \subset A \subset U \text{ und } \lambda(U) - \varepsilon \le \lambda(A) \le \lambda(K) + \varepsilon.$$

Bew. Das ist klar fuer Intervalle. Da jede Figur eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, folgt es dann fuer Figuren.

*Schritt 3:* Ist $A \in \mathcal{R}$ die disjunkte Vereinigung von $A_n \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A).$$

Bew. $\le$: Fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\cup_{n=1}^{k} A_n \subset A$. Damit folgt mit Additivitaet und Monotonie von $\lambda$ dann

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda(A_n) = \lambda(\cup_{n=1}^{k} A_n) \le \lambda(A).$$

(Die letzte Abschaetzung folgt einfach.)

$\ge$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Waehle nach Schritt 2 eine kompakte Figur $C$ mit

$$C \subset A \text{ und } \lambda(A) \le \lambda(C) + \varepsilon \ (*).$$

Waehle nach Schritt 2 zu jedem $A_n$ eine offene Figur $U_n$ mit

$$A_n \subset U_n \text{ und } \lambda(U_n) \le \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \ (**).$$

Dann bilden die $U_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine offene Ueberdeckung von $C$ (und sogar von $A$). Aufgrund der Kompaktheit von $C$ gibt es dann eine endliche Teilueberdeckung d.h. ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{k} U_n. \ (***)$$

Damit folgt dann:

$$\begin{array}{rcl}
\lambda(A) & \overset{(*)}{\le} & \lambda(C) + \varepsilon \\
((***), \textit{Monotonie}) & \le & \lambda \bigcup_{n=1}^{k} U_n + \varepsilon \\
(\text{Endliche Additivitaet}) & \le & \sum_{n=1}^{k} \lambda(U_n) + \varepsilon \\
& \overset{(**)}{\le} & \sum_{n=1}^{k} (\lambda(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^n}) + \varepsilon \\
& \le & \sum_{n=1}^{k} \lambda(A_k) + 2\varepsilon.
\end{array}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gewuenschte Ungleichung.

- Sei $X = \mathbb{R}^N$. Eine Teilmenge $I$ von $\mathbb{R}^N$ heisst Intervall (oder achsenparalleler Quader), wenn es beschraenkte eindimensionale Intervalle $I_1, \ldots, I_N$ gibt mit $I = I_1 \times \ldots \times I_N$. Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen achsenparallelen Quadern). Fuer ein Interval $I = I_1 \times \ldots \times I_N$ sei
$$|I| := \prod_{j=1}^{N} |I_j|.$$
Es laesst sich nun jede Figur $A$ in disjunkte Quader zerlegen $A = \cup_{j=1}^n I_j$ und durch
$$\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty), \lambda(A) = \sum_{j=1}^{n} |I_j|$$
wird ein Praemass auf $\mathcal{R}$ definiert. Dieses heisst das Lebesguepraemass auf $\mathbb{R}^N$.
(Bew. Das folgt wie im eindimensionalen Fall.)
- Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen beschraenkten Intervallen). Sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nichtfallende, rechtssetige Funktion. Setze
$$\phi(x+) := \lim_{y \to x+} \phi(y) = \phi(x),\ \phi(x-) := \lim_{y \to x-} \phi(y).$$
Definiere nun fuer ein Intervall $I$
$$\mu(]a, b[) = \phi(b-) - \phi(a)$$
$$\mu(]a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$
$$\mu([a, b[) = \phi(b-) - \phi(a-)$$
$$\mu([a, b]) = \phi(b) - \phi(a-).$$
(d.h. es wird [ uebersetzt in − und ] in +).
Es laesst sich nun jedes $A$ aus dem Mengenring als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^n A_j$ von beschraenkten Intervallen schreiben und durch
$$\mu = \mu_\phi : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty),\ \ \mu(A) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$
wird ein Praemass auf $\mathcal{R}$ definiert. Es heisst das Stieltjes-Praemass zu $\phi$.
Bemerkung: Setzt man $\phi = id$, so erhaelt man gerade das Lebesguepraemass.
(Bew. Die noetigen Bestandteile wurden mehr oder weniger schon beweisen. Wir skizzieren nur den Beweis der $\sigma$-Additivitaet. Dazu zeigt man zunaechst wieder folgendes:
*Schritt 1:* Zu jeder Figur $A$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Figur $K$ und eine offene Figur $U$ mit
$$K \subset A \subset U \ \text{ und } \ \mu(U) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$
Bew. Das ist einfach fuer Intervalle. Da jede Figur eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, folgt es dann fuer Figuren.

Anschließend zeigt man dann in *Schritt 2* die $\sigma$-Additivitaet von $\mu$ wie bei im Falle des eindimensonalen Lebesge Praemass.

Wir kommen nun noch zu einem wichtigen Konzept, das beschreibt, was wir vernachlaessigen duerfen.

DEFINITION (Nullmenge). *Sei $\mu$ ein Praemaß auf dem Mengenring $(X,\mathcal{R})$. Eine Teilmenge $N \subset X$ heisst $\mu$-Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_n)$ in $\mathcal{R}$ existiert mit*

$$N \subset \bigcup_n A_n \ \textit{und} \ \sum \mu(A_n) < \varepsilon.$$

*Bemerkung.* Nullmengen werden im allgemeinen nicht zu $\mathcal{R}$ gehoeren.

Ende der Vorlesung

**Beispiel.** Sei $\lambda$ das Lebesguepraemass auf dem Mengenring der Figuren in $\mathbb{R}$. Dann ist $N := \mathbb{Q}$ eine Nullmenge. (Bew. Sei $q_1, q_2, \ldots, ..$ eine Abzaehlung von $\mathbb{Q}$. Waehle $A_n := [q_n, q_n]$...)

**Notation.** Sei $\mu$ ein Praemaß auf dem Mengenring $(X,\mathcal{R})$. Dann sagt man, dass eine Eigenschaft auf $X$ $\mu$-fast ueberall gilt, wenn es eine $\mu$-Nullmenge gibt, so dass die Eigenschaft fuer alle $x \in X \setminus N$ gilt.
**Beispiele.**

- $f > g$ $\mu$-f.u. (d.h. es existiert $\mu$-Nullmengen $N$ mit $f(x) > g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).
- $f = g$ $\mu$ f.u.( d.h. es existiert $\mu$-Nullmengen $N$ mit $f(x) = g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).
- $f_n \to g$ $\mu$ f.u. (d.h. es existiert $\mu$-Nullmengen $N$ mit $f_n(x) \to g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).

THEOREM. *Sei $\mu$ ein Praemaß auf dem Mengenring $(X,\mathcal{R})$. Die Vereinigung von abzaehlbar vielen Nullmengen $N_k$, $k \in \mathbb{N}$, ist eine $\mu$ Nullmenge.*

*Beweis.* Fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung an $N_k$ eine Folge $A_n^{(k)}$ in $\mathcal{R}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_n A_n^{(k)} \ \text{und} \ \sum_n \mu(A_n^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Damit folgt

$$N \subset \bigcup_k N_k \subset \bigcup_{n,k} A_n^{(k)}$$

mit

$$\sum_{n,k} \mu(A_n^{(k)}) = \sum_k \sum_n \mu(A_n^{(k)}) < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

*Bemerkung.* Grundlegend fuer den gegebenen Zugang zur Integrationstheorie sind folgende Bestandteile:

- Ein Grenzwertsatz fuer Integrale in Form der $\sigma$-Additivitaet. (Uebung)
- Die Vernachlaessigung von Nullmengen.

## 2. Integrale von Elementarfunktionen

In diesem Abschnitt lernen wir Integrale von Elementarfunktionen kennen. Hier ist die *Idee*. Mit $1_B$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion der Menge $B$ (d.h. $1_B(x) = 1$ fuer $x \in B$ und $1_B(x) = 0$ sonst). Dann sollte natuerlich $\int_X 1_B d\mu = \mu(B)$ gelten. Lineare Fortsetzung führt dann darauf das Integral fuer Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen zu definieren durch

$$\int_X \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j}\, d\mu := \sum_{j=1}^n b_j \mu(B_j).$$

Wir muessen aber etwas arbeiten, um die Wohldefiniertheit zu zeigen. Anschliessend untersuchen wir dann einfache Eigenschaften des Integrals auf den Elementarfunktionen.

DEFINITION. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst Elementarfunktion (Treppenfunktion), wenn ein $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ und $B_1, \ldots, B_N$ aus $\mathcal{R}$ existieren mit*

$$f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}.$$

*Der Vektorraum der Elementarfunktionen wird mit $E(X, \mathcal{R})$ bezeichnet.*

*Bemerkung.* Es ist $E(X, \mathcal{R})$ gerade die Lineare Huelle der $1_B$, $B \in \mathcal{R}$, im Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf $X$.

**Beispiel.** $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = Figuren$. Dann handelt es sich bei den Elementarfunktionen gerade um die aus Analysis I bekannten Treppenfunktionen.

Fuer die weiteren Betrachtungen wird es nuetzlich sein eine (fast) kanonischen Darstellung einer Elementarfunktion zur Verfuegung zu haben.

PROPOSITION. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann existiert zu jeder Elementarfunktion $f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}$ (mit $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ und $B_1, \ldots, B_N$ aus $\mathcal{R}$) Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und paarweise diskunkte $A_i$ in $\mathcal{R}$, $j = 1, \ldots, K$ mit*

- $f = \sum \alpha_i 1_{A_i}$
- $\sum_j b_j \mu(B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)$.

*Beweis.* Das folgt leicht durch Induktion nach $N$. □

FOLGERUNG (Wohldefiniertheit des Integrals). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Gilt $f = \sum_{j=1}^N b_j 1_{B_j} = \sum_k^K b_k' 1_{B_k'}$ (mit $b_j, b_k \in \mathbb{C}$ und $B_j, B_k'$ aus dem Mengenring), so folgt*

$$\sum_{j=1}^N b_j \mu(B_j) = \sum_k^K b_k' 1_{B_k'}.$$

*Beweis.* Es reicht $f := \sum b_j 1_{B_j} = 0 \Longrightarrow \sum b_j \mu(B_j) = 0$ zu zeigen.
Nach vorangehender Proposition existieren $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und paarweise disjunkte $A_i$ in $\mathcal{R}$ mit

$$0 = f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i} \text{ und } \sum_j b_j \mu(B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i).$$

Aufgrund der paarweisen Disjunktheit der $A_i$ muss dann gelten $\alpha_i = 0$ fuer alle $i$ und die Behauptung folgt. □

Definition (Integral fuer Elementarfunktionen). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Ist $f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}$ mit $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ und $B_1, \ldots, B_N$ aus $\mathcal{R}$ so definiert man*

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^N b_j \mu(B_j).$$

*(Das ist wohldefiniert nach voriger Proposition.)*

Proposition (Einfache Eigenschaften des Integrals). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist die Abbildung*

$$\int : E(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{C},\ f \mapsto \int_X f d\mu$$

*linear und positiv d.h. es gilt*

$$\int (\alpha f + g)\, d\mu = \alpha \int f d\mu + \int g d\mu \ \ (Linearitaet)$$

*fuer alle $f, g \in E(X, \mathcal{R})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sowie*

$$\int f d\mu \geq 0 \ \ (Positivitaet)$$

*fuer $f \geq 0$.*

*Beweis.* Linearitaet ist klar. Positivitaet folgt durch Betrachten von $f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ mit paarweise disjunkten $A_i$ aus dem Mengenring. □

Bei gegebenem Praemass macht das Integral den Vektorraum der Elementarfunktionen zu einem (Halb)normierten Vektorraum. Das ist von fundamentaler Bedeutung fuer unseren Zugang. Wir werden naemlich effektiv den Raum der intgrierbaren Funktionen als die 'Vervollstaendigung' des Raumes der Elementarfunktionen mit dieser Halbnorm definieren. Die entsprechende Halbnorm wird in der naechsten Proposition eingefuehrt.

**Erinnerung - Halbnorm (Laengenmessung).** Sei $V$ ein Vektorraum ueber $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty)$ hiesst Halbnorm, wenn sie mit den Vektorraumoperationen in folgender Weise vertraegllich ist:

- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungleichung)
- $|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

fuer alle $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt offenbar $\|0\| = 0$. Hat $\|\cdot\|$ die zusaetzliche Eigenschaft $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$, so heisst $\|\cdot\|$ eine Norm. Konzepte von Konvergenz bzw. Cauchy-Folgen lassen sich bzgl. Halbnormen wie fuer Normen definieren. Das werden wir im folgenden nutzen.

Proposition. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Mit $f$ ist auch $|f|$ eine Element von $E(X, \mathcal{R})$ und die Abbildung*

$$\|\cdot\|_1 : E(X, \mathcal{R}) \longrightarrow [0, \infty), \|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

*ist eine Halbnorm auf $E(X, \mathcal{R}$ mit*

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \|f\|_1.$$

*Beweis.* Sei $f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ mit paarweise disjunkten $A_i$ aus dem Mengenring. Dann gehoert

$$|f| = \sum |\alpha_i| 1_{A_i}$$

ebenfalls zu den Elementarfunktionen und es gilt

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\sum \alpha_i \mu(A_i)\right| \le \sum |\alpha_i| \mu(A_i) = \int_X |f|\, d\mu.$$

Es bleiben die Halbnormeigenschaften zu zeigen:

$\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$. Mit $|f+g| \le |f| + |g|$ folgt das sofort aus der Monotonie und Linearitaet des Integrals.

$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$. Das folgt aus der Linearitaet des Integrals. □

*Bemerkung.* Es ist $\|\cdot\|_1$ im allgemeine keine Norm. Betrachte dazu etwa $X = \mathbb{R}$ mit dem Mengenring der Figuren und dem Lebesguepraemass $\lambda$. Dann erfuellt jede Funktion $f$, die genau in einem Punkt nicht verschwindet natuerlich $\|f\|_1 = 0$.

Definition. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Eine Folge $(f_n)$ von Funktionen $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert $\mu$-fast-gleichmaessig ($\mu$-f.glm) gegen $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(A_k^\varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{R}$ existiert mit*

- $\sum_k \mu(A_k^\varepsilon) < \varepsilon$
- *$f_n \longrightarrow f$ gleichmaessig auf $X \setminus \bigcup_k A_k^\varepsilon$.*

Ende der Vorlesung.

Proposition. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gegen $f$ $\mu$-fast-gleichmaessig, so konvergiert $(f_n)$ gegen $f$ $\mu$-fast ueberall.*

*Beweis.* Sei

$$N := \{x : f_n(x) \text{ konvergiert nicht gegen } f(x)\}.$$

Sind zu $\varepsilon > 0$ dann $A_k^\varepsilon$ entsprechend der Definition von $\mu$-fast gleichmaessiger Konvergenz gewaehlt, sogilt $N \subset \cup_k A_k^\varepsilon$ und $\sum \mu(A_k^\varepsilon) < \varepsilon$. Damit ist $N$ eine Nullmenge. □

*Bemerkung.* Sei $X = [0,1]$ und $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $X$ und $\lambda$ das Lebesguepraemass auf $X$. Sei $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1_{\{1\}}(x)$. Dann gilt

- Es konvergiert $f_n$ punktweise gegen $f$.
- Es konvergiert $f_n$ nicht gleichnmaessig gegen $f$.
- Es konvergiert $f_n$ $\lambda$-fast-gleichmaessig gegen $f$.

## 3. Cauchy Folgen von Elementarfunktionen

In diesem Abschnitt studieren wir Cauchy-Folgen in $E(X, \mathcal{R})$.

**Erinnerung.** Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Eine Folge $(f_n)$ in $E(X, \mathcal{R})$ heisst $\|\cdot\|_1$-Cauchy Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|f_n - f_m\|_1 \le \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N_\varepsilon$.

THEOREM. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy Folge in $E(X,\mathcal{R})$. Dann gilt:*

- *Es gibt eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)$ sodass $f_{n_k}$ $\mu$-fast-gleichmaessig gegen $f$ konvergiert.*
- *Sind $(g_k)$ und $(h_k)$ zwei $\mu$-fast-ueberall konvergente Teilfolgen von $(f_n)$, so gilt $g_k - h_k \to 0$ $\mu$-fast ueberall.*

*Bemerkung.* Der zweite Teil der Aussage besagt, dass die im ersten Teil gefundene Funktion (bis auf Werte auf einer Nullmenge) eindeutig ist.

*Beweis.* Wir zeigen zunaechst den ersten Punkt: Sei $(f_{n_k})$ so gewaehlt, dass

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 \leq \frac{1}{3^{k+1}}$$

gilt fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Sei

$$g_k := |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|.$$

Dann gilt also

- $g_k \geq 0$
- $\|g_k\|_1 = \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 \leq \frac{1}{3^{k+1}}$.

**Idee.** Da die Norm von $g_k$ sehr klein ist, muessen auch die Funktionswerte fuer die meisten $x \in X$ ziemlich klein sein. Daher konvergiert $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1}(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ fuer die meisten $x \in X$. Details dazu finden sich im folgenden.

Sei

$$M_k := \{x \in X : g_k(x) > \frac{1}{2^{k+1}}\}$$

und

$$N_k := \bigcup_{l \geq k} M_l.$$

Wir zeigen die folgenden beiden Aussagen:

(1) Auf $X \setminus N_k$ konvergiert $(f_{n_m})_m$ gleichmaessig.
(2) Es gilt $\sum_{l \geq k} \mu(M_l) \to 0$, $k \to \infty$.

(Zusammengenommen zeigen diese beiden Aussagen dann den ersten Punkt.)
Zu (1): Auf $X \setminus N_k$ gilt

$$|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| = g_l(x) \leq \frac{1}{2^{l+1}}$$

fuer $l \geq k$. Wegen

$$f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{m-1}(f_{n_{l+1}} - f_{n_l})$$

ist dann $(f_{n_m})$ auf $X \setminus N_k$ gleichmaessig konvergent.

Zu (2): Es gilt $1_{M_l} \leq 2^{l+1} g_l$. Damit folgt aus der Monotonie des Integrals also

$$\mu(M_l) = \int_X 1_{M_l} d\mu \leq \int_X 2^{l+1} g_l d\mu \leq 2^{l+1}\|g_l\| = \left(\frac{2}{3}\right)^{l+1}.$$

Damit folgt

$$\sum_{l\geq k}\mu(M_l) \leq \sum_{l\geq k}\left(\frac{2}{3}\right)^{l+1} \to 0, k \to \infty.$$

Wir kommen nun zum zweiten Punkt des Theorem: Es gebe Funktionen $g$ und $h$ auf $X$ sowie Nullmengen $N_g$ und $N_h$ mit $g_k \to g$ auf $X \setminus N_g$ und $h_n \to h$ auf $X \setminus N_h$. Zu zeigen $g = h$ $\mu$-fast ueberall. Da $(g_k)$ und $(h_k)$ Teilfolgen der Cauchy-Folge $(f_n)$ sind, ist auch $(p_n)$ mit

$$g_1, h_1, g_2, h_2, \ldots$$

eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge. Nun koennen wir wie im Beweis des ersten Punktes also eine Teilfolge $(p_{n_k})$ waehlen mit

- $p_{n_k}$ konvergiert $\mu$-fast ueberall d.h. auf $X \setminus N_p$ mit $N_p$ Nullmenge, gegen ein $f$.
- $p_{n_{2k}}$ stammt aus $(g_k)$.
- $p_{n_{2k+1}}$ stammt aus $(h_k)$.

Dann ist $N := N_g \cup N_g \cup N_p$ eine Nullmenge und es gilt fuer $x \in X \setminus N$

$$g(x) = \lim g_n(x) = \lim p_{n_{2k}}(x) = f(x) = \lim p_{n_{2k+1}}(x) = \lim h_n(x) = h(x).$$

$\square$

*Bemerkung.* Der Uebergang zu einer Teilfolge ist im allgemeinen noetig, wie man sich leicht an Beispielen klarmacht. **Zeichnung.**

Unser naechstes Ziel ist es fuer $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen zu zeigen:

$$\|f_n\| \to 0 \Longleftrightarrow f_n \to 0 \ \mu \text{ fast ueberall.}$$

Dazu schraenken wir uns im folgenden Lemma zunaechst auf den Fall monoton fallender Funktionen ein.

Lemma. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Ist $(f_n)$ eine Folge in $E(X,\mathcal{R})$ mit $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to 0$ $\mu$-fast ueberall, so gilt $\|f_n\|_1 \to 0$.*

*Beweis.* Aufgrund der Monotonie des Integrals und der Voraussetzung an die $(f_n)$ ist die Folge

$$\left(\int_X f_n d\mu\right)_n$$

monoton fallend und nichtnegativ. Damit handelt es sich um eine Cauchy-Folge. Wegen

$$\|f_n - f_m\| = \int f_n - f_m \, d\mu = \int f_n d\mu - \int f_m d\mu$$

(fuer $n \geq m$) ist dann also $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy Folge. Damit existiert nach dem vorigen Satz also eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})$ von $(f_n)$ mit

$$f_{n_k} \to f \ \ \mu\text{-fast gleichmaessig..}$$

Da $f_n$ $\mu$ fast ueberall gegen 0 konvergieren gilt dann $f = 0$ und damit

$$f_{n_k} \to 0 \ \ \mu\text{-fast gleichmaessig..}$$

Wegen $f_1 \geq f_{n_k} \geq 0$ folgt damit (! s.u) dann

$$\|f_{n_k}\|_1 \to 0, n \to \infty$$

und, da $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$- Cauchy-Folge ist, ergibt sich dann $\|f_n\|_1 \to 0$, $n \to \infty$.
Zu !: Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f_{n_k}\| &= \int_X |f_{n_k}| d\mu \\
&= \int_X f_{n_k} 1_{\{x: f_{n_k}(x) > \delta\}} d\mu + \int_X f_{n_k} 1_{\}x: 0 \leq f_{n_k}(x) \leq \delta\}} d\mu \\
&\leq \|f_1\|_\infty \mu(\{x : f_{n_k}(x) > \delta\}) + \delta\mu(\{x : f_1(x) \neq 0\}).
\end{aligned}$$

Hier wird der zweite Term klein, nach Wahl eines kleinen $\delta > 0$ (das ja beliebig war) und der erste Term wird (bei festem $\delta > 0$) fuer $k \to \infty$ beliebig klein aufgrund der $\mu$ fast gleichmaesiigen Konvergenz gegen 0 der $f_{n_k}$. □

THEOREM. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$, die $\mu$ fast ueberall konvergiert. Dieser punktweise Grenzwert heisse $f$. Dann gilt*

$$f = 0 \Longleftrightarrow \|f_n\|_1 \to 0.$$

*Beweis.* $\Longleftarrow$: Betrachte die Folge $(p_n)$ gegeben durch

$$f_1, 0, f_2, 0, f_3, 0, \ldots \ldots$$

Dann ist $(p_n)$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge (da $\|f_n\|_1 \to 0$). Es sind $(f_n)$ und $(0)$ fast ueberall konvergente Teilfolgen gegen 0 bzw. $f$. Damit folgt aus dem vorigen Satz also $0 = f$ fast ueberall.

$\Longrightarrow$: Wir werden den Beweis mithilfe des vorigen Lemmas fuehren. Daher wird es darum gehen eine monoton fallende Folge zu konstruieren. Wir zeigen: Konvergiert $\|f_n\|_1$ nicht gegen 0, so ist $f_n(x) \to 0$ $\mu$-fast ueberall falsch.

Ohne Einschraenkung $f_n \geq 0$ (sonst betrachte man $|f_n|$ statt $f_n$).

Ohne Einschraenkung existiert $C > 0$ mit $\|f_n\| \to C$ (sonst Teilfolge waehlen).

Ohne Einschraenkung

$$(*) \ \|f_n\| \geq \frac{2}{3}C \text{ und } \|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq \frac{C}{3}\frac{1}{2^n}$$

(sonst Teilfolge waehlen).

Wir betrachten nun die Folge $(\widetilde{f_j})$ mit

$$\widetilde{f_j}(x) := \min\{f_1(x), \ldots, f_j(x)\}.$$

Dann gilt

$$(**) \ 0 \leq \widetilde{f}_{j+1} \leq \widetilde{f_j}$$

fuer alle $j \in \mathbb{N}$. Ausserdem gilt

$$(***) \ \widetilde{f_j} \geq f_1 - \sum_{k=1}^{j-1} |f_{k+1} - f_k|.$$

(Allgemeiner gilt fuer beliebige reelle $a_k$

$$\max\{a_1, \ldots, a_j\} \leq \min\{a_1, \ldots, a_j\} + \sum_{k=1}^{j-1} |a_{k+1} - a_k|$$

wie man sich leicht ueberlegt.**Zeichnung** der $a_j$ auf der Achse. ) Durch Integration folgt aus der vorangehenden Abschaetzung sofort

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f_j}\|_1 &= \int_X |\widetilde{f_j}|\, d\mu \\ (**) &= \int_X \widetilde{f_j} d\mu \\ (\text{Integration } (***)) &\geq \|f_1\|_1 - \sum_{j=1}^{j-1} |f_{k+1} - f_k\|_1 \\ (*) &\geq \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}C \\ &= \frac{1}{3}C. \end{aligned}$$

Mit dieser Abschaetzung und $(**)$ folgt, dass die Folge $(\widetilde{f_j})$ also monoton faellt und $\|\widetilde{f_j}\|_1$ nicht gegen 0 konvergiert. Damit folgt aus dem vorigen Lemma, dass $\widetilde{f_j}(x)$ nicht fast ueberall gegen 0 konvergiert. Wegen $f_j \geq \widetilde{f_j}$ kann dann auch $(f_j)$ nicht fast ueberall gegen 0 konvergieren. Das beendet den Beweis. □

Das vorangehende Theorem hat folgende Konsequenz, die die Wohldefiniertheit des Integrals liefern wird.

FOLGERUNG. *(Wohldefiniertheit des Integrals) Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben und sind $(h_n)$ und $(g_n)$ $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen in $E(X, \mathcal{R})$ mit $h_n \to f$ und $g_n \to f$ $\mu$-fast ueberall, so existieren die Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \text{ und } \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu$$

*und stimmen ueberein.*

*Beweis.* Wir zeigen zunaechst die Existenz der Grenzwerte: Es ist $(g_n)$ eine Cauchy-Folge in bzgl. $\|\cdot\|_1$. Damit ist also

$$\left( \int_X g_n d\mu \right)$$

eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ (da $|\int g_n d\mu - \int g_m\, d\mu| \leq \|g_n - g_m\|_1$). Damit existiert dann aufgrund der Vollstaendigkeit von $\mathbb{C}$ der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu.$$

Analoge Betrachtungen ergeben die Existenz des entsprechenden Grenzwertes fuer $(h_n)$.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit: Sei $q_n := g_h - h_n$. Dann gilt:

- $q_n \to 0$ $\mu$-fast ueberall (da $g_n$ und $h_n$ $\mu$-fast ueberall gegen $f$ konvergieren).
- $(q_n)$ ist eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge (da $|q_n - q_m| \leq \ldots \leq |g_n - g_m| + |h_n - h_m|\ldots$)

Nach dem vorangehenden Theorem gilt dann aber

$$\int |q_n| d\mu \to 0, n \to \infty.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\int_X g_n d\mu - \int_X h_n d\mu| &= |\int_X (g_n - h_n) d\mu| \\ &\le \int_X |g_n - h_n| d\mu \\ &= \int_X |q_n|\, d\mu \\ &\to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

Damit stimmen die beiden Grenzwerte ueberein. □

## 4. Integrierbare Funktionen und Integrale

In diesem Abschnitt fuehren wir die integrierbaren Funktionen ein und studieren einige Eigenschaften. Die integrierbaren Funkionen werden dabei diejenigen sein, die sich 'gut' als Grenzwert von Elementarfunktionen darstellen lassen koennen.

DEFINITION (Integrierbare Funktionen und $\mathcal{L}^1(X,\mu)$). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst integrierbar (bzgl. $(\mathcal{R},\mu)$), wenn es eine Folge $(f_n)$ in $E(X,\mathcal{R})$ gibt, so dass gilt:*

- *$(f_n)$ ist eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge.*
- *$f_n \to f$ $\mu$-fast ueberall.*

*Dann definiert man*

$$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Die Menge der integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ oder $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ bezeichnet.*

**Beachte.** Es folgen Existenz des Grenzwertes und Wohldefiniertheit des Integrals aus der letzten Folgerung des vorangehenden Abschnittes.

**Notation.** Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion $(h_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen in $E(X,\mathcal{R})$ mit $h_n \to f$ $\mu$-fast ueberall, so nennen wir $(h_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-*Cauchy-Folge zu $f$ in* $E(X,\mathcal{R})$.

**Notation.** Im folgenden werden wir manchmal ein Tripel $(X,\mathcal{R},\mu)$ bestehend aus einer Menge $X$, einem Mengenring $\mathcal{R}$ auf $X$ und einem Mass $\mu$ auf $\mathcal{R}$ als Praemass-Raum bezeichnen.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ unter einer ganzen Reihe von Operationen abgeschlossen ist.

PROPOSITION. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ ein Vektorraum (d.h. mit $f,g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gehoert auch $f + \alpha g$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$). Mit $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ gehoeren auch $|f|$, $\Re f$ und $\Im f$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$. Weiterhin gehoeren zu reellwertigen $f,g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ auch $\min\{f,g\}$ und $\max\{f,g\}$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$.*

*Beweis.* Die Beweise aller dieser Aussagen folgen einfach nach dem gleichen Schema. Wir führen dies nur fuer die Vektorraumeigenschaft vor. Seinen also M$f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Zu zeigen: Es gehoert auch $f + \alpha g$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$).
Waehle dazu $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen $(f_n)$ und $(g_n)$ zu $f$ bzw. $g$ in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $f_n + \alpha g_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $f + \alpha g$. Also gehoert $f + \alpha g$ auch zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. □

Grundlegende Eigenschaften des Integrals 'vererben' sich von $E(X, \mathcal{R})$ auch auf $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$, wie folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION (Integral ist linear und positiv). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist die Abbildung*

$$\int : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f \, d\mu,$$

*linear und positiv.*

*Beweis. Linearitaet.* Das folgt leicht aus der Linearitaet des Integrals auf $E(X, \mathcal{R})$: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Seien $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen $(f_n)$ und $(g_n)$ zu $f$ bzw. $g$ in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $f_n + \alpha g_n$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $f + \alpha g$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_X (f + \alpha g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n + \alpha g_n) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \alpha \int_X g_n d\mu \\
&= \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu.
\end{aligned}$$

*Positivitaet:* Das folgt leicht aus der Positivitaet des Integrals auf $E(X, \mathcal{R})$: Seien $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ gegeben mit $f \geq 0$ und $(f_n)$ eine zugehoerige $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $(|f_n|)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $|f| = f \geq 0$. Damit gilt also

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| d\mu \geq 0.$$

Das beendet den Beweis. □

PROPOSITION ($\|\cdot\|_1$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^1$). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist die Abbildung*

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X |f| \, d\mu,$$

*eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit*

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \|f\|_1.$$

*Es gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ $\mu$-fast ueberall gilt.*

*Beweis.* Die Halbnormeigenschaften folgen leicht aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|_1$ auf $E(X, \mathcal{R})$ durch Grenzuebergang.

*Zur Ungleichung.* Sei $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ zu $f$. Dann ist $(|f_n|)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ zu $|f|$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_X f d\mu\right| &= \left|\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\int_X f_n d\mu\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n| d\mu \\ &= \int_X |f| d\mu \\ &= \|f\|_1. \end{aligned}$$

*Zur letzten Aussage:* Es gelte $\|f\|_1 = 0$. Sei eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge $(f_n)$ in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit $f_n \to f$ $\mu$-fast ueberall gewaehlt. Dann gilt

$$\|f_n\|_1 = \int_X |f_n| d\mu \to \int_X |f| d\mu = \|f\|_1 = 0.$$

Damit ist also $(f_n)$ eine fast ueberall konvergente Folge mit $\|f_n\|_1 \to 0$. Damit folgt aus einem Theorem des vorigen Abschnittes also $f_n \to 0$ $\mu$-fast ueberall. Weiterhin gilt aber $f_n \to f$ $\mu$-fast ueberall. Damit folgt $f = 0$ $\mu$-fast ueberall.

Ist umgekehrt $f = 0$ $\mu$-fast ueberall, so ist $f_n = 0$ eine $\mu$-fast ueberall gegen $f$ konvergente Cauchy Folge und es folgt

$$\|f\|_1 = \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n| d\mu = 0.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir koennen jetzt zeigen, dass eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X,\mathcal{R})$ zu $f$ tatsaechlich gegen $f$ konvergiert.

Ende der Vorlesung.

PROPOSITION. *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X,\mathcal{R})$ zu $f$. Dann gilt*

$$\|f_n - f\|_1 \to 0, n \to \infty.$$

*Beweis.* Waehle $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest). Setze $g_m := f_n - f_m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $g_m$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge zu $f_n - f$. Daher ist $|g_m|$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge zu $|f_n - f|$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| d\mu &= \lim_{m\to\infty}\int_X |f_n - f_m| d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty}\|f_n - f_m\|_1 \\ &\to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM ('Vollstaendigkeit' von $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$). *Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in*

$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ *(d.h. zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gebe es* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *mit* $\|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$ *fuer alle* $n,m \geq N_\varepsilon$*). Dann gibt es ein (bis auf Werte auf einer Nullmenge) eindeutig bestimmtes* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$\|f_n - f\|_1 \to 0, n \to \infty.$$

*Insbesondere gilt dann also*

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

*Die Folge* $(f_n)$ *hat eine Teilfolge, die* $\mu$*-fast gleichmaessig gegen* $f$ *konvergiert und jede* $\mu$*-fast ueberall konvergente Teilfolge von* $(f_n)$ *konvergiert* $\mu$*-fast ueberall gegen* $f$*.*

*Beweis.* Zu jedem $f_n$ gibt es nach der vorherigen Proposition ein $g_n \in E(X,\mathcal{R})$ mit

$$(*)\ \ \|g_n - f_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Da $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge ist, ist dann auch $(g_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge. Damit gibt es also nach einem Resultat des vorherigen Abschnittes eine Teilfolge von $(g_n)$ und ein $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass die Teilfolge $\mu$-fast ueberall gegen $f$ konvergiert. Ohne Einschraenkung sei die Folge $(g_n)$ selber $\mu$-fast ueberall gegen $f$ konvergent. Damit ist dann also insgesamt $(g_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X,\mathcal{R})$ zu $f$. Damit folgt $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und (nach voriger Proposition)

$$(**)\ \ \|g_n - f\|_1 \to 0, n \to \infty.$$

Mit $(*)$ und $(**)$ folgt sofort

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - f\|_1 \to 0, n \to \infty.$$

Damit folgt, dass $(f_n)$ gegen $f$ konvergiert. Ist $f'$ eine zweite Funktion gegen die $(f_n)$ konvergiert, so gilt wegen

$$\|f - f'\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - f'\|_1 \to 0, n \to \infty.$$

also $\|f - f'\|_1 = 0$. Damit folgt (vgl. Proposition zur Halbnormeigenschaft von $\|\cdot\|_1$) $f = f'$ $\mu$-fast ueberall. Die uebrigen Aussagen werden als Uebung ueberlassen. (Sie koennen entweder so bewiesen werden, wie die entsprechenden Aussagen fuer Cauchy-Folgen aus $E(X,\mathcal{R})$, oder indem man die obigen $(g_n)$ auch punktweise (bis auf kleine Aussnahmemengen) nahe an $f_n$ waehlt). □

*Bemerkung*(Halbnorm auf $\mathcal{L}^1$ versus Norm auf $L^1$). Auf dem Raum $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ ist $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm. Entsprechend greift dort unser Konzept eines vollstaendigen Raumes nicht. Das laesst sich durch Herausfaktorisieren der fast ueberall verschwindenden Funktionen beheben: Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{N} := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_1 = 0\}$ ein Unterraum von $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$. Auf dem Quotienten

$$L^1(X,\mathcal{R},\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)/\mathcal{N}$$

ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : L^1(X,\mathcal{R},\mu) \longrightarrow [0,\infty), [f] \mapsto \|f\|_1$$

wohldefiniert und macht $L^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ in einem vollstaendigen normierten Vektorraum. Die Elemente von $L^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ sind nicht mehr Funktionen sondern Klassen von Funktionen, die fast ueberall uebereinstimmen. Da die Funktionene einer Klasse fast ueberall uebereinstimmen, spielt es fuer Integrationstheorie keine Rolle mit welchem Representanten wir rechnen.

**Beispiel. $\ell^1(\mathbb{N})$.** Sei $X = \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}$ der Mengenring der endlichen Teilmengen von $X$ und $\mu$ das Zählprämaß. Wie man sich leicht klarmacht, gilt dann

$$E(X, \mathcal{R}) = \{a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} : a(k) = 0 \text{ fuer alle bis auf endliche viele } k \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\int a d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a(k),$$

(wobei die Summe nur endlich viele nichtverschwindende Terme hat). Fuer eine Folge $(a_n)$ in $E(X, \mathcal{R})$ und $a : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt dann $a_n \to a$ $\mu$-fast ueberall genau dann, wenn fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_n(k) \to a(k)$, $n \to \infty$. Ist nun $(a_n)$ in $E(X, \mathcal{R})$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge und $a : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $a_n(k) \to a(k)$, $n \to \infty$, gegeben, so gilt fuer jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} |a(k)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |a_n(k)| \leq \lim_{n\to\infty} \|a_n\|_1 \leq \sup\{\|a_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)| < \infty.$$

Insgesamt sehen wir so

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) \subset \{a : X \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |a(k)| < \infty\}.$$

Umgekehrt sieht man leicht, dass fuer jedes $a : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)| < \infty$ offenbar $a_n := 1_{[1,n]} a$ eine Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ ist, die punktweise gegen $a$ konvergiert. Damit folgt dann

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{a : X \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1} \infty |a(k)| < \infty\}.$$

Man schreibt

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^1(X, \mu)$$

und nennt diesen Raum den 'klein $\ell$-Eins' Raum über $\mathbb{N}$.

*Bemerkung.* Die Struktur von $\mathbb{N}$ spielt in den vorangehenden Betrachtungen keine Rolle. Man kann völlige analog einen Raum $\ell^1(X)$ fuer jede beliebige Menge $X$ definieren.

Ende der Vorlesung.

**Beispiel - Lebesgueintegral auf $\mathbb{R}^N$.** Sei $X = \mathbb{R}^N$ und $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren (auf $X$) und $\lambda$ das Lebesgue Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann heissen die Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ *Lebesgue-integrierbar* und fuer eine solche Funktion $f$ heisst

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda$$

das *Lebesgueintegral* von $f$.

Sei weiterhin die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ mit kompaktem Traeger gegeben durch

$$C_c(\mathbb{R}^N) := \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig : es gibt kompaktes } K \text{ mit } f = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus K\}.$$

*Behauptung.* Es gilt $C_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Weiterhin gilt im Falle $N = 1$ fuer $f \in C_c(R)$ mit $f = 0$ ausserhalb von $[a,b]$

$$\int f d\lambda = \int_a^b f dx,$$

(wobei auf der rechten Seite das Riemann-Integral von $f$ gebildet wird).

Beweis: Wir zeigen zunaechst $C_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Um Schreibarbeit zu sparen, betrachten wir nur den Fall $N = 1$. Sei $C > 0$ gewaehlt, so dass $f = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-C, C]$. Da $f$ stetig ist, ist es auf dem kompakten $[-C, C]$ gleichmaessig stetig. Daher koennen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ also paarweise disjunkte Intervalle $I_j^{(\varepsilon)}$, $j = 1, \ldots, n_\varepsilon$, finden, so dass gilt

- $\bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} I_j^{(\varepsilon)} = [-C, C]$.
- $\sup_{x,y \in I_j^{(\varepsilon)}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ fuer alle $j = 1, \ldots, n_\varepsilon$.

Waehle nun $x_j^\varepsilon \in I_j^{(\varepsilon)}$ fuer $j = 1, \ldots, n_\varepsilon$ und definiere

$$f_\varepsilon := \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} f(x_j^\varepsilon) 1_{I_j^{(\varepsilon)}}.$$

Dann ist $f_\varepsilon$ eine Elementarfunktion mit

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit folgt dann

$$\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_\infty \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

und damit

$$\int_X |f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}| d\lambda \le 2C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Damit sieht man leicht, dass $(g_n)$ mit $g_n := f_{1/n}$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge ist mit $g_n \to f$ punktweise (und sogar gleichmaessig). Das zeigt $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda)$.

Wir kommen nun noch zur Aussage ueber das Uebereinstimmen von Rieman-Integral und Lebesgueintegral: Fuer Treppenfunktionen stimmen offenbar Riemann-Integral und Lebesgueintegral ueberein. Damit sind die zu $f \in C_c(\mathbb{R})$ eben konstruierten $g_n$ alle Riemann-integrierbar und konvergieren (wie eben gesehen) gleichmaessig gegen $f$. Damit ist nach Saetzen aus der Vorlesung auch $f$ Riemannintegrierbar und es gilt

$$\int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n dx = \lim_{n\to\infty} g_n \lambda = \int_R f d\lambda.$$

## 5. Die berühmten Integralsätze

In diesem Abschnitt lernen wir die wichtigsten Saetze zur Konvergenz von Integralen kennen. Die Voraussetzunge sind jeweils punktweise Konvergenz der Funktionen zusammen mit einer (schwachen) Gleichmaessigkeit der Kontrolle. Die Folgerung ist Konvergenz der Integrale. Ebenso lernen wir das Lemma von Fatou kennen.

Wir machen uns zunaechst anhand eines **Beispiels** klar, dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht fuer Konvergenz der Integrale. Betrachte dazu $X = \mathbb{R}$ mit dem Mengenring der Figuren und dem Lebesgue-Praemass $\lambda$. Sei $f_n := n1_{(0,1/n)}$. Dann gilt $f_n(x) \to 0$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$. Aber es gilt $\int f_n d\lambda = 1$. Alternativ koennte man auch $g_n := 1_{[n,n+1]}$ betrachten. Dann gilt wieder $g_n \to 0$ punktweise ueberall, aber $\int g_n d\lambda = 1$. Voellig analoge Beispiele lassen sich auch auf $\ell^1(\mathbb{N})$ konstruieren.

Theorem (Satz von Beppo Levi; Monotoner Konvergenz Satz). *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- *$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ fuer alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$.*
- *Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\int_X f_n d\mu \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit*

$$f_n(x) \to f(x) \ \ \mu - f.ue. \ \ und \int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

*Die entsprechende Aussage gilt, falls alle $\leq$ durch $\geq$ ersetzt werden.*

*Bemerkung.* In der Situation des Theorem gilt $f_n \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ wie man aus

$$\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n| d\mu = \int f d\mu - \int f_n d\mu$$

leicht folgert.

*Beweis.* Aufgrund der Voraussetzunng gilt

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq C$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist also

$$(\int_X f_n d\mu)$$

eine beschraenkte monotone Folge, also eine Cauchy-Folge. Wegen

$$\int_X |f_n - f_m| d\mu = \int_X (f_n - f_m) d\mu = \int_X f_n d\mu - \int_X f_m d\mu$$

fuer $n \geq m$ ist also $(f_n)$ eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge. Damit gibt es aufgrund der 'Vollstaendigkeitssatzes' zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ also ein $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit $\|f_n - f\|_1 \to 0$ also insbesondere

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Weiterhin hat die Folge $(f_n)$ nach dem schon erwaehnten Vollstaendigkeitssatz eine Teilfolge $(f_{n_k})$, die $\mu$-fast ueberall gegen $f$ konvergiert. Aufgrund der Monotonie konvergiert dann aber $(f_n)$ $\mu$-fast ueberall gegen $f$. □

Folgerung (Variante). *Sei $(X,\mathcal{R},\mu)$ wie im Satz. Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- *$f_n \nearrow f$ $\mu$-fast überall.*
- *Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\int f_n d\mu \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Dann gehoert $f$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und es gilt*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Beweis.* Das ist klar: Der vorige Satz liefert, dass die $(f_n)$ in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und $\mu$-f.ue. gegen ein $f'$ konvergieren. Die Voraussetzung zeigt $f = f'$ und die Behauptung folgt. □

*Bemerkung.* Die Aussage des Satzes (und seiner Variante) folgt auch, wenn fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ nur fuer $\mu$-fast alle $x \in X$ gilt $f_{n+1}(x) \le f(x)$ (da man nach Abaenderung der Funktionen auf einer geeignet gewaehlten Nullmenge wieder in der Situation des Satzes ist).

Theorem. *(Satz von Lebesgue - Dominierter Konvergenzsatz) Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben und $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- *Es konvergiert $f_n \to f$ $\mu$ fast ueberall.*
- *Es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit $|f_n| \le g$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

*Dann gehoert $f$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und es gilt*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Bemerkung.* In der Situation des Theorem gilt $f_n \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. (Bew. Wende das Theorem an auf $h_n := |f - f_n|$ mit $|h_n| \le 2g$.)

*Beweis.* Ohne Einschraenkung seien die $f_n$ alle reellwertig (andernfalls koennen wir Real- und Imaginaerteil betrachten).

Sei

$$g_{n,k} := \max\{f_n, \ldots, f_{n+k}\}$$

und

$$g_n := \lim_{k\to\infty} g_{n,k} = \sup\{f_n, f_{n+1}, \ldots\} \le g.$$

(Dabei existiert das Supremum wegen $|f_n| \le g$.) Dann gilt:

- $g_{n,k}(x) \nearrow g_n(x)$, $k \to \infty$, fuer alle $x \in X$.
- $g_{n,k} \le g_{n,k+1}$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$.
- $\int_X g_{n,k} d\mu \le \int_X g d\mu =: C$ (wegen $g_{n,k} \le g$).

Damit folgt nach dem Satz von Beppo Levi also $g_n \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$. Nun gilt aber

- $g_n(x) \searrow f(x)$ $\mu$-fast ueberall.
- $g_{n+1} \le g_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\int_X g_n d\mu \ge \int (-g) d\mu$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ (da $g_n \ge -g$).

Damit folgt aus dem Satz von Beppo Levi also $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ sowie

$$(*) \quad \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu.$$

Voellig analog (vgl. auch den Beweis des folgenden Theorems) folgt mit

$$h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$$

die Aussage

$$(**) \quad \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu.$$

Wegen $h_n \le f_n \le g_n$ und der Monotonie des Integrals gilt

$$\int_X h_n d\mu \le \int_X f_n d\mu \le \int_X g_n d\mu.$$

Damit folgt aus $(*)$ und $(**)$ also

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Das beendet den Beweis. □

Ende der Vorlesung.

THEOREM (Lemma von Fatou). *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Sei $f : X \longrightarrow [0,\infty)$ gegeben und $(f_n)$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ mit $f_n(x) \to f(x)$ $\mu$-fast ueberall. Weiterhin gelte mit einem $C \ge 0$ noch*

- $0 \le f_n$ *fuer alle* $n \in \mathbb{N}$
- $\int_X f_n d\mu \le C$ *fuer alle* $n \in \mathbb{N}$.

*Dann gehoert $f$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$ und es gilt*

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

*Beweis.* Sei

$$h_{n,k} := \min\{f_n, \ldots, f_{n+k}\}, \;\; h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}.$$

Dann gilt

$$h_{n,k} \searrow h_n, \;\int_X h_{n,k} d\mu \ge \int_X 0 d\mu = 0.$$

Damit folgt nach dem Satz von Beppo Levi also

$$h_n \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu).$$

Nun gilt $h_n \le f_{n+k}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$, also

$$\int_X h_n d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_{n+k} d\mu = \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu$$

sowie

$$h_n \nearrow f \;\; \mu \text{ fast ueberall.}$$

Damit folgt aus dem Satz von Beppo Levi also

$$f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{R},\mu)$$

sowie

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Das beendet den Beweis. □

*Bemerkung.* Im allgemeinen gilt in der Situation des Theorem nur $<$, wie man an folgendem Beispiel sieht: $X = \mathbb{R}$, $\mu =$ *Lebesguepraemass*, $f_n = 1_{[n,n+1]}$. Dann gilt $f_n \to f = 0$ aber

$$\int_X f_n d\mu = 1 \ne 0 = \int_X 0 \, d\mu.$$

## 6. $\sigma$-Algebren, Messbarkeit und Masse

In diesem Abschnitt setzen wir ein Praemass auf einem Mengenring zu einem Mass auf einer $\sigma$-Algebra fort. Anschliessend diskutieren wir das Konzept der Messbarkeit. In der Literatur wird oft Integrationstheorie entwickelt, indem von Massen und $\sigma$-Algebren ausgegangen wird (statt von Praemassen auf Mengenringen). Dann muss aber die Konstruktion von Massen aus äußeren Masse noch untersucht werden, um das Lebesguemass einzufuehren. Der von uns gewaehlte Zugang liefert Integrationtheorie und Konstruktion von Massen in einem.

Definition. *Sei $X$ eine Menge. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von $X$ heisst $\sigma$-Algebra auf $X$, wenn gilt:*

- $\varnothing, X \in \mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

*Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra auf $X$, so heisst $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und die Elemente von $\mathcal{A}$ heissen messbare Mengen.*

**Bemerkung.** Jede $\sigma$-Algebra ist ein Mengenring (wie man sich leicht klarmacht).

Proposition. *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann ist*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) := \{A \subset X : 1_{B\cap A} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \text{ fuer alle } B \in \mathcal{R}\}$$

*eine $\sigma$-Algebra mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$.*

*Beweis. Vertraeglichkeit mit Komplementbildung.* Es gelte $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Dann folgt fuer jedes $B \in \mathcal{R}$ also

$$1_{B\cap A^c} = 1_B - 1_{A\cap B} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$$

und damit $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$.

$\varnothing, X \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Das ist klar fuer $X$ und folgt durch Komplementbildung fuer $\varnothing$.

$A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu), n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$. Setze $A_N := \cup_{n=1}^N A_n$ und $A_\infty := \cup_n A_n$. Dann gilt fuer jedes $B \in \mathcal{R}$ natuerlich

$$1_{B\cap A_N} = \min\{1_B, \sum_{n=1}^N 1_{A_n\cap B}\} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu).$$

Weiterhin gilt natuerlich

$$1_{B\cap A_N} \nearrow 1_{B\cap A_\infty} \leq 1_B.$$

Damit folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz (oder dem Satz von der majorisierten Konvergenz) dann

$$1_{B\cap A_\infty} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Definition (Maß). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Dann heisst eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

*ein Mass, wenn folgende beiden Eigenschaften gelten:*

- *Fer jede Folge $(A_n)$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ gilt $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.*
- *$\mu(\varnothing) = 0$.*

*Ist $\mu$ ein Mass auf $(X, \mathcal{A})$, so heisst $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum.*

*Bemerkung.* Der Wert $\infty$ ist zugelassen.

Proposition. *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Dann definiert die Abbildung*

$$\widetilde{\mu} : \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu) \longrightarrow [0, \infty]$$

*mit $\widetilde{\mu}(A) = \int_A 1_X d\mu$ falls $1_A \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\widetilde{\mu}(A) = \infty$ sonst, ein Mass auf $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Es gilt $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A)$ fuer $A \in \mathcal{R}$. Es gilt $\widetilde{\mu}(N) = 0$ genau dann, wenn $N$ eine $\mu$-Nullmenge ist.*

*Beweis.* Sei $(A_n)$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Sei

$$A_N := \cup_{n=1}^N A_n, \; A_\infty = \cup_{n=1}^\infty A_n.$$

Dann gilt $1_{A_N} \nearrow 1_{A_\infty}$. Wir unterscheiden nun zwei Faelle:
*Es gilt* $1_{A_\infty} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Damit folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz oder dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \widetilde{\mu}(A_n) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \widetilde{\mu}(A_n) \\ \text{(paarw. disjunkt)} \quad &= \lim_{N\to\infty} \int_X 1_{A_N} d\mu \\ &= \int_X 1_{A_\infty} \, d\mu \\ &= \widetilde{\mu}(A_\infty). \end{aligned}$$

*Es gilt* $1_{A_\infty} \notin \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Dann gilt also $\widetilde{\mu}(A_\infty) = \infty$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz muss dann aber auch gelten $\sum_{n=1}^\infty \widetilde{\mu}(A_n) = \infty$. Denn andernfalls wuerde die Rechnung aus dem ersten Fall einen Widerspruch liefern.

Zur letzten Aussage: (Uebung). Es ist $N$ eine $\widetilde{\mu}$ Nullmenge genau dann, wenn $\widetilde{\mu}(N) = 0$ d.h. wenn $1_N$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ gehoert mit $\int 1_N d\mu = 0$. Das bedeutet aber gerade (s.o.), dass $1_N$ bis auf eine Nullmenge verschwindet. Damit ist $N$ eine Nullmenge. □

**Beispiel.** Sei $X = \mathbb{N}$ und $\mu$ das Zaehlpraemass auf dem Mengenring $\mathcal{R}$ der englichen Mengen. Dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ die $\sigma$-Algebra aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ und $\widetilde{\mu}$ ist das sogenannte Zaehlmass.

**Beispiel.** Sei $X = \mathbb{R}^N$ und $\lambda = \mu$ das Lebesgue Praemass auf dem Mengering der Figuren an. Dann heisst $\mathcal{A}$ die Lebesgue-$\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^N$ und $\widetilde{\lambda}$ heisst das *Lebesguemass.*

*Bemerkung.* Es ist das Lebesguemass translationsinvariant und normiert und das einzige Maß auf $\mathbb{R}^N$ mit diesen Eigenschaften (evtl. Details).

Ende der Vorlesung.

**Notation.** Wir schreiben meist $\mu$ statt $\widetilde{\mu}$.

DEFINITION. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst messbar, wenn die Urbilder von offenen Mengen der Form $(c, \infty)$ zu $\mathcal{A}$ gehoeren. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst meßbar, wenn $\Re f$ und $\Im f$ meßbar sind.*

*Bemerkung.* Man kann zeigen, dass eine Funktion genau dann messbar ist, wenn sie ueberall ein Grenzwert von Elementarfunktionen d.h. Funktionen der Form $\sum_{j=1}^N c_j 1_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ ist. Damit sieht man leicht, dass Linearkombinationen, Produkte, punktweise Grenzwerte von messbaren Funktionen wieder messbar sind.

PROPOSITION. *Sei $X$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring ueber $X$ und $\mu$ ein Praemass auf $\mathcal{R}$. Fuer $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ sind aequivalent:*

(i) *Fuer jedes $A \in \mathcal{R}$ ist $f 1_A$ $\mu$-fast ueberall Grenzwert von Funktionen aus $E(X, \mathcal{R})$.*
(ii) *Es ist $f$ messbar bzgl. $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.*

*Ist $X = \cup X_n$ mit $X_n \in \mathcal{R}$, so ist dies aequivalent zu*

(iii) *Es ist $f$ $\mu$-fast ueberall Grenzwert von Funktionen aus $E(X, \mathcal{R})$.*

*Beweis.* Die Aequivalenz von (i) und (iii) (unter der angegebenen Zusatzvoraussetzung) ist klar.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Das folgt leicht aus den folgenden beiden Aussagen, deren Beweis als Uebung gelassen wird:
- Der punktweise Grenzwert von messbaren Funktionen ist messbar.
- Abaendern einer Funktion auf einer Nullmenge aendert die Messbarkeit (bzgl. $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ nicht (da jede Teilmengen einer Nullmenge wieder eine Nullmenge ist).

(ii)$\Longrightarrow$ (i) Der Beweis folgt aus den olgenden beiden Aussagen, deren Beweis als Uebung gelassen wird:
- Jede messbare Funktion ist punktweiser Grenzwert von Funktionen der Form $\sum_{i=1}^N c_i 1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ mit $\mu(A_i) < \infty$.
- Jede Funktion $1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ mit $\mu(A_i) < \infty$ ist $\mu$-fast gleichmaessiger Grenzwert von Elementarfunktionen (da sie integrierbar ist). □

## 7. Der Satz von Fubini-Tonelli

In diesem Abschnitt lernen wir einen Satz kennen, der beim Ausrechnen von Integralen sehr nuetzlich ist.

Seien $X$ und $Y$ Mengen und $\mathcal{R}_X$ ein Mengenring auf $X$ und $\mathcal{R}_Y$ ein Mengenring auf $Y$. Dann erzeugen die Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{R}_X$ und $B \in \mathcal{R}_Y$ einen Mengenring auf $X \times Y$, den wir als den Produktmengenring

$\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$ bezeichnen. Sind weiterhin $\mu_X$ und $\mu_Y$ Praemasse auf $\mathcal{R}_X$ bzw. $\mathcal{R}_Y$, so wird durch

$$\mu(\cup_{j=1}^n (A_j \times B_j)) \sum_{j=1}^n \mu_X(A_j)\mu_Y(B_j)$$

fuer $A_j \in \mathcal{R}_X$ und $B_j \in \mathcal{R}_Y$, $j = 1, \ldots, n$ mit $(A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \varnothing$ fuer $j \neq k$ ein Praemass $\mu$ auf $X \times Y$ definiert. Das von diesem Praemass erzeugte Mass heisst das Produktmass.

THEOREM. *Seien $X, Y$, $\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y$ und $\mu_X$ und $\mu_Y$ wie oben. Sei $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es gehoert $f$ zu $\mathcal{L}^1(X \times Y, \mu)$.*
(ii) *Es ist $f$ $\mu$-messbar und $|f(x,\cdot)|$ gehoert fuer $\mu_X$ fast alle $x \in X$ zu $\mathcal{L}^1(Y, \mu_Y)$ und die Funktion $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $F(x) = \int_Y |f(x,y)|\, d\mu(y)$, falls $|f(x,\cdot)| \in \mathcal{L}^1(Y, \mu_Y)$, und $F(x) = 0$ sonst, gehoert zu $\mathcal{L}^1(X, \mu_X)$.*

*In diesem Fall gilt*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x).$$

*Bemerkung.*

- Natuerlich gilt entsprechendes, wenn die Rollen von $X$ und $Y$ vertauscht werden.
- Ist $f \geq 0$ messbar, so liefert der Satz, dass auf jeden Fall gilt
$$\int f(x,y) d\mu(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y) d\mu_Y(x) d\mu_X(x),$$
wobei allerdings beide Seiten $\infty$ sein koennen.

Der *Beweis* kann mit den zur Verfügung stehenden Methoden geführt werden, wuerde aber recht viel Zeit kosten (ohne aber über die Aussage hinausgehenden wesentlichen Erkentnisgewinn zu liefern). Daher geben wir ihn hier nicht. Wir bemerken stattdessen, dass (i)$\Longrightarrow$ (ii) als Satz von Fubini bekannt ist und (ii)$\Longrightarrow$ (i) als Satz von Tonelli.

KAPITEL 3

# Determinanten und Volumina

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Determinanten und Volumina. Die Ergebnisse sind wesentlich fuer das Verstaendnis der Faktoren, die bei Oberflaechenintegralen auftreten.

*Erinnerung - Determinante auf* $V = \mathbb{R}^N$. Es gibt genau eine lineare, alternierende normierte $N$-Form $\sigma$ auf $V$. Hierbei bedeutet:

- *Alternierend*: $\sigma(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) = -\sigma(\ldots, w, \ldots, v, \ldots)$
- *Normiert*: $\sigma(e_1, \ldots, e_n) = 1$
- *Multilinear*: $\sigma(\ldots, \lambda u + v, \ldots) = \lambda\sigma(\ldots, u, \ldots) + \sigma(\ldots, w, \ldots)$

Diese ist gegeben durch die Determinanten det. Es gilt

$$\det(v_1, \ldots, v_N) = \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\operatorname{sgn}\pi} (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_N)_{\pi(N)}.$$

Theorem. *Sei* $A = (v_1, \ldots v_N)$ *eine* $N \times N$*-Matrix und* $I := [0,1]^N$. *Sei*

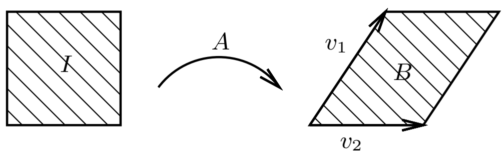
$$B := B(v_1, \ldots, v_N) := \{t_1 v_1 + \ldots + t_N v_N : 0 \le t_i \le 1, i = 1, \ldots, N\}.$$

*Dann gilt* $B = AI = \{Ax : x \in I\}$ *und*

$$|B| = |\det A| = (\det A^T A)^{1/2}.$$

*Hierbei bezeichnet* $|B|$ *das Lebesguemass (Volumen) von* $B$.

*Notation.* Die Menge $B = AI$ aus dem Satz heisst der von $v_1, \ldots, v_N$ aufgespannte *Spat, Block*, oder *Parallelepipep.*




*Bemerkung.*

- Der Satz besagt, dass das Volumen eines Spats durch den Betrag der Determinante gegeben ist. Der Betrag ist noetig, da Volumina positiv sein muessen und invariant unter Vertauschung von Spalten sind.
- Das Volumen eines Spates kann man als Riemannsches oder Lebesguesches Volumen auffassen (da diese beiden uebereinstimmen fuer Mengen, denen eine Riemannsches Volumen zugeordnet werden kann).

*Beweis.* Wir benutzen die Charakterisierung der Determinante und zeigen, dass die Funktion

$$\delta : \mathbb{R}^{N\times N} \longrightarrow \mathbb{R}, \delta(v_1, \dots, v_N) := \begin{cases} |B| & : \ \det(v_1, \dots, v_N) > 0 \\ -|B| & : \ \textit{sonst.} \end{cases}$$

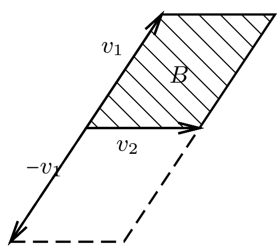
$N$-linear, alternierend und normiert ist.
Dazu verwenden wir im wesentlichen folgende Eigenschaften des Volumens:

- Translationinvarianz ($|B| = |x + B|$).
- Nullmengeneigenschaft von Hyperebenen. (Jede Kompakte Teilmenge eines $N-1$-dimensionalen Teilraumes hat verschwindendes Volumen.)
- Gilt $B \subset B'$ so folgt $|B| \le |B'|$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuehrt:

*Schritt* 0. (Alternierend) Es gilt $\delta(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\delta(v_1, \dots, v_N)$ und $\delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$.
Bew. 1. Formel: $B(-v_1, \dots, v_N) = -v_1 + B(v_1, \dots, v_N)$ (Zeichnung.) Mit Translationsinvarianz folgt:

$$|B(-v_1, \dots, v_N)| = |B(v_1, \dots, v_N)|.$$




Ausserdem

$$\det(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\det(v_1, \dots, v_N).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die Aussage.
2. Formel: Offenbar gilt $B(\dots v_i \dots v_j \dots) = B(\dots v_j \dots v_i \dots)$. Damit folgt

$$|B(\dots v_i \dots v_j \dots)| = |B(\dots v_j \dots v_i \dots)|.$$

Ausserdem

$$\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\det(\dots v_j \dots v_i \dots).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die zweite Formel.

Ende der Vorlesung

*Schritt* 1. Fuer $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, N\}$ ist

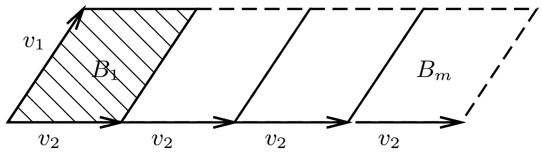
$$\delta(v_1, \dots, mv_i, \dots, v_N) = m\delta(v_1, \dots, v_N).$$

Bew. Das folgt aus der Translationsinvarianz.
Sei

$$B_1 := (v_1, \dots, v_N)I,\ B_m := (v_1, \dots, mv_i, \dots v_N)I.$$

Dann gilt

$$B_m = \cup_{k=0}^{m-1}[B(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N) + kv_i] = \cup_{k=0}^{m-1}(kv_i + B_1).$$




Daher gilt $|B_m| = m|B_1|$.

*Schritt* 2. Fuer $q \in \mathbb{Q}_+$ ist $\delta(v_1 \dots qv_i \dots v_N) = q\delta(v_1 \dots v_N)$.
Bew. Sei $q = \frac{m}{l}$ mit $m, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Schritt 1 $l\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, , v_N) = \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N)$. Also

$$(*)\ \delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots v_N) = \frac{1}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

Damit folgt

$$\delta(v_1, \dots, \frac{m}{l}v_i, \dots v_N) \overset{Schritt 1}{=} m\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots v_N) \overset{(*)}{=} \frac{m}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

*Schritt* 3. (Erster Teil der Linearitaet) Fuer $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\delta(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots v_N) = \lambda\delta(v_1, \dots, v_N)$.
Bew. Ohne Einschraenkung $\lambda > 0$ (sonst: $\lambda \mapsto -\lambda$ und Schritt 0). Sei $B_s := B(v_1, \dots, sv_i, \dots v_N)$. Seien $q, q' \in \mathbb{Q}_+$ gegeben mit $q \leq \lambda \leq q'$. Dann gilt $B_q \subset B_\lambda \subset B_{q'}$ und damit

$$q|B_1| \overset{Schritt 2}{=} |B_q| \leq |B_\lambda| \leq |B_{q'}| \overset{Schritt 2}{=} q'|B_1|.$$

Da $q, q'$ mit $q \leq \lambda \leq q'$ beliebig war folgt

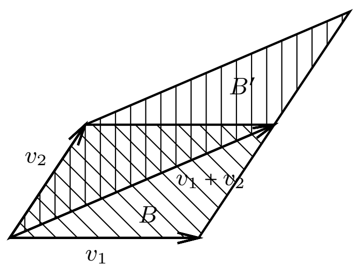
$$|B_\lambda| = \lambda|B_1|.$$

*Schritt* 4. Falls $v_1, \dots, v_N$ linear abhaengig sind, so gilt $\delta(v_1, \dots, v_N) = 0$.
Bew. Es ist dann $B$ eine kompakte Teilmenge eines $N-1$-dimensionalen Teilraumes.

*Schritt* 5. Es gilt $\delta(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_N) = \delta(v_1, \dots, v_N)$.
Bew. Seien $B'$ und $B$ die beiden Spate. Dann gilt

$$B' \setminus B = B \setminus B' + v_2$$

(bis auf Raender).




Damit folgt die Behauptung aus Translationsinvarianz.

*Schritt* 6.(Zweiter Teil der Linearitaet) $\delta(v+w, v_2, \ldots, v_N) = \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + \delta(w, v_2, \ldots, v_N)$.
Bew. Wir zeigen zunaechst

$$(\sharp)\ \delta(x + cv_i, v_2, \ldots, v_N) = \delta(x, v_2, \ldots, v_N).$$

fuer $i = 2, 3, \ldots, N$. Dazu $i = 2$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta(x + cv_2, v_2, \ldots, v_N) &\overset{Schritt 3}{=} \frac{1}{c}\delta(x + cv_2, cv_2, \ldots, \ldots, v_N) \\
&\overset{Schritt 5}{=} \frac{1}{c}\delta(x, cv_2, \ldots, v_N) \\
&\overset{Schritt 3}{=} \delta(x, v_2, \ldots, v_N).
\end{aligned}$$

$i \geq 3$. Nach Schritt 0 gilt $\delta(x+cv_i, v_2, \ldots, v_N) \overset{Schritt 0}{=} -\delta(x+cv_i, v_i, \ldots v_2, \ldots, v_N)$.
Nun kann man weiter wie im Fall von $i = 2$ argumentieren und erhaelt

$$\delta(x + cv_i, v_2, \ldots, v_N) = -\delta(x, v_i, \ldots, v_2, \ldots, v_N) \overset{Schritt 0}{=} \delta(x, v_2, \ldots, v_N).$$

Nun nehmen wir ohne Einschraenkung an, dass $\{v, v_2, \ldots, v_N\}$ linear unabhaengig also eine Basis sind (Wenn weder $\{v, v_2, \ldots, v_N\}$ noch $\{w, v_2, \ldots, v_N\}$ linear unabhaengig sind, ist auch $\{v + w, v_2, \ldots, v_N\}$ linear abhaengig und alle Terme sind 0 nach Schritt 4.) Damit gilt dann also

$$w = cv + \sum_{j=2}^{N} \lambda_j v_j$$

und damit

$$\begin{aligned}
\delta(v + w, v_2, \ldots, v_N) &= \delta(v + cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \ldots, v_N) \\
&\overset{\sharp}{=} \delta((1 + c)v + \sum_{j=2}^{n-2} \lambda_j v_j + \lambda_{N-1} v_{N-1}, v_2, \ldots, v_N) \\
&\overset{\sharp}{=} \ldots \\
&= \delta((1 + c)v, v_2, \ldots, v_N) \\
Schritt 3, v + cv = (1 + c)v &= \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + c\delta(v, v_2, \ldots, v_N) \\
Schritt 3, &= \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + \delta(cv, v_2, \ldots, v_N) \\
(\sharp im zweiten Term) &= \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + \delta(cv + \lambda_2 v_2, v_2, \ldots, v_N) \\
&\overset{\sharp}{=} \ldots \\
&= \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + \delta(cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \ldots, v_N) \\
&= \delta(v, v_2, \ldots, v_N) + \delta(w, v_2, \ldots, v_N).
\end{aligned}$$

*Schritt* 7. Es gilt $\delta(e_1, \ldots, e_N) = 1$.
Bew. Das ist klar, da dann $A = Identitaet$ also $AI = I$.

Damit haben wir gezeigt, dass $\delta$ alternierend (Schritt 0), linear (Schritt 3 und Schritt 6, plus alternierend) und normiert (Schritt 7) ist. Als folgt $\delta = \det$

aus der abstrakten Charakteriesierung der Determinanten. Damit folgt die Aussage des Theorems. □

Die folgende Aussage liegt dem Beweis der Transformationsformel (den wir spaeter nicht geben ;-) zugrunde.

FOLGERUNG. *(Verzerrung von Volumina unter linearen Abbildungen) Sei $J$ ein Translat eines Spates. Dann gilt $|AJ| = |\det A||J|$.Insbesondere gilt diese Formel, falls $Q$ ein Intervall (d.h. achsenparalleler Spat) ist.*

*Beweis.* Es gilt $J = x + BI$ mit geeigneter linearer Abbildung $B$ und Vektor $x$. Damit folgt $AJ = A(x + BI) = Ax + ABI$ also

$$|AJ| = |Ax + ABI| = |ABI| = |\det(AB)| = |\det A||\det B| = |\det A||x + BI|.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir untersuchen nun, wie man Volumina in Unterraeumen messen kann. Das liegt den Betrachtung von Oberflaechenintegralen, die wir spaeter geben werden, zugrunde. Dazu betrachten wir folgende Situation. Seien $a_1, \ldots, a_k$ linear unabhaengige Vektoren im $\mathbb{R}^N$ (also insbesondere $N \geq k$). Sei $b_1, \ldots, b_k$ eine ONB von $V := Lin\{a_i : i = 1 \ldots k\}$. Mittels dieser Orthonormalbasis kann $V$ mit $\mathbb{R}^k$ identifiziert werden durch

$$\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V, x \mapsto \sum_{j=1}^{k} x_j b_j.$$

Sei

$$S := \{\sum_{i=1}^{k} t_i a_i : 0 \leq t_i \leq 1\} \subset V$$

und sei $|S|$ das Volumen des Spates $S$ in $V$ bzgl. der durch $\Phi$ gegebenen ONB.

THEOREM. *Sei oben geschilderte Situation gegeben. Sei die $N \times k$ Matrix $A$ definiert durch $A = (a_1 \ldots a_k)$ und die $k \times k$ Matrix $C$ durch $C := (\langle b_i, a_j \rangle_{i,j=1,\ldots,k}$. Dann gilt*

$$A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$$

*und*

$$\det A^t A = \det(\langle a_i, a_j \rangle) = \det C^t C = (\det C)^2.$$

*Weiterhin gilt $S = CI$ mit $I = [0,1]^k$ und*

$$|S| := \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)}.$$

*Insbesondere ist also $|S|$ unabhaengig von der Wahl der ONB.*

*Beweis.* Es ist $A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle)$ nach Definition der Matrixmultiplikation. Enwickeln von $a_i = \sum_l \langle a_i, b_l \rangle b_l$ liefert dann einfach $(\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$.
Nun zur Berechnung von $|S|$: Es gilt

$$\sum t_i a_i = \sum_i t_i \sum_l \langle a_i, b_l \rangle b_l = \sum_l \left( \sum_i \langle a_i, b_l \rangle t_i \right) b_l = \sum_l C(t_1, \ldots, t_k)^t(l) b_l.$$

Damit wird also $S$ in den neuen Koordinaten (bzgl. $\Phi$) gerade durch $CI$ beschrieben mit $I = [0,1]^k$. Die Aussage ueber $|S|$ folgt nun aus aus dem Satz ueber Volumina und dem bisher Bewiesenen. Wegen $|S|^2 = \det A^t A$ ist

$|S|$ unabhaengig von der ONB $b_1, \ldots, b_k$, da $A$ unabhaengig von dieser ONB ist. $\square$

KAPITEL 4

# Transformationsformel und Koordinatensysteme im $\mathbb{R}^N$

In diesem Abschnitt geht es um das Lebesguemass im $\mathbb{R}^N$ und das hoeherdimensionale Analogon zur Substitutionsregel.

THEOREM (Transformationsformel). *Seien $U$ und $V$ offene Mengen im $\mathbb{R}^N$, deren Ränder Lebesguenullmengen sind. Sei $\phi : U \longrightarrow V$ stetig diffbar und es gebe abgeschlossene Nullmengen $N_1 \subset U$ und $N_2 \subset V$, so dass $\phi : U \setminus N_1 \longrightarrow V \setminus N_2$ bijektiv mit stetig differnzierbarer Inverser ist. Dann ist fuer jede integrierbaress $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ auch $f \circ \phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und es gilt*

$$\int_U f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| d\lambda(x) = \int_V f(y)\, d\lambda(y).$$

*Bemerkung.* Im eindimensionalen Fall (und fuer stetiges $f$) handelt es sich im wesentlichen um die schon bekannte Substitutionsregel. Dem Vertauschen der Reihenfolge der Grenzen entspricht das Bilden des Betrages der Ableitung.

*Idee der Beweisidee:* Ist $U = V = \mathbb{R}^N$ und $f$ die charakteristische Funktion eines Quaders und $\phi$ eine lineare Abbildung, so ergibt sich die Aussage direkt aus einer Folgerung im vorigen Abschnitt. Im allgemeinen Fall braucht man grob gesprochen zwei Approximationenen:

- Man kann $f$ gut approximieren durch endliche Linearkombinationen von characteristischen Funktionen von Quadern. (Definition von $\mathcal{L}^1$).
- Man kann $\phi$ gut durch seine lineare Approximation $D\phi$ approximieren. (Definition von Differnzierbarkeit).

Wir geben keine weiteren Details.

Die vielleicht wichtigste Anwendung der Transformationsformel liegt in der Benutzung von neuen (dem Problem besser angepassten) Koordinatensystemen. Wir studieren nun noch einige gängige Koordinatensysteme.

**Polarkoordinaten in der Ebene** Sei

$$\Phi :\ [0,\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Phi :\ (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) :\ x \geq 0\}$$

bijektiv und stetig differenzierbar mit

$$D\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Fuer die Funktionaldeterminante gilt

$$\det D\Phi(x,y) = \cos\varphi r\cos\varphi + r\sin\varphi\sin\varphi = r.$$

Damit ergibt sich also (mit dem Satz von Fubini/Tonelli)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda(x,y) = \int_{[0,\infty)} r\left(\int_{[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi)d\lambda(\phi)\right)d\lambda(r).$$

Ist $f$ radialsymmetrisch d.h. $f(x,y) = \widetilde{f}(|(x,y)|)$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda(x,y) = 2\pi\int_{[0,\infty)} r\widetilde{f}(r)d\lambda(r).$$

Entsprechend folgt mit der abgeschlossenen Kugel $B_R$ mit Radius $R$ um den Ursprung also

$$\int_{B_R} f(x,y)d\lambda(x,y) = 2\pi\int_{[0,R]} r\widetilde{f}(r)d\lambda(r).$$

Damit erhaelt man insbesondere fuer die Flaeche $F(R)$ der Kugel mit Radius $R$ (d.h. $\widetilde{f} = 1_{[0,R]}$) also

$$F(R) = \int_{B_R} 1d\lambda(x,y) = 2\pi\int_{[0,R]} r\cdot 1d\lambda(r) = \pi R^2.$$

**Polar-/Kugelkoordinaten in $\mathbb{R}^3$** Sei

$$\Phi:\ [0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Phi:\ (0,\infty)\times(0,2\pi)\times(o,\pi)\to\mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z):\ z\in\mathbb{R},\ x\geq 0\}$$

bijektiv und stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$D\Phi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

und der Funktionaldeterminante

$$\det D\Phi(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta$$

Damit ergibt sich also (mit dem Satz von Fubini/Tonelli)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)d\lambda(x,y,z)$$

$$= \int_{[0,\infty)} r^2\left(\int_{[0,2\pi]}(\int_{[0,\pi)} \sin\theta f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)d\lambda(\theta))d\lambda(\phi)\right)d\lambda(r).$$

Ist $f$ radialsymmetrisch d.h. $f(x,y,z) = \widetilde{f}(|(x,y,z)|)$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)d\lambda(x,y,z) = 4\pi\int_{[0,\infty)} r\widetilde{f}(r)d\lambda(r).$$

Entsprechend folgt mit der abgeschlossenen Kugel $B_R$ im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R$ um den Ursprung also

$$\int_{B_R} f(x,y,z)d\lambda(x,y,z) = 4\pi \int_{[0,R]} r^2 \widetilde{f}(r)d\lambda(r).$$

Damit erhaelt man insbesondere fuer das Volumen $V(R)$ der Kugel mit Radius $R$ (d.h. $\widetilde{f} = 1_{[0,R]}$) also

$$V(R) = \int_{B_R} 1d\lambda(x,y,z) = 4\pi \int_{[0,R]} r^2 \cdot 1d\lambda(r) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Beispiel $\int e^{-t^2}dt$.** Berechnen von $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, d\lambda(t)$.
Setze

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda \text{ und } J := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|(x,y)|^2}\ \ d\lambda(x,y).$$

Dann gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli aber $I^2 = J$. Mittels Polarkoordinaten in der Ebene, des Satzes von Fubini/Tonelli und der Tatsache, dass fuer stetige Funktione das Lebesgue Integral und das Riemann Integral übereinstimmen, koennen wir weiterhin $J$ ausrechnen zu

$$\begin{aligned}
J &= \int_{(0,\infty)\times[0,2\pi]} re^{-r^2} d\lambda(\phi, r) \\
(Fubini/Tonelli) &= 2\pi \int_{(0,\infty)} re^{-r^2} d\lambda(r) \\
(\text{Monotone Konv.}) &= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_{(0,R)} re^{-r^2} d\lambda(r) \\
&= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_r^R re^{-r^2} dr \\
(Riemanint. = Lebesgueint.) &= 2\pi \lim_{R\to\infty} (-\frac{1}{2}e^{-r^2}|_0^R) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Damit folgt $I = \sqrt{\pi}$.

KAPITEL 5

# Untermannigfaltigkeiten und Oberflächenintegrale

In diesem Abschnitt fuehren wir Integrale ueber parametrisierte Gebilde im Raum ein. Das erlaubt es insbesondere ueber Untermannigfaltigkeiten zu integrieren. Untermannigfaltigkeiten sind die glatten Gebilde im Raum. Sie sind lokal Nullstellenmengen von glatten Funktionen oder aequivalent lokale Graphen.

Wir beginnen mit etwas Notation.

*Notation.*

- Die Nullstellenmenge einer Funktion $g$ bezeichnen wir mit $N(g)$, d.h. zu $g : W \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir
$$N(g) := \{z \in W : g(z) = 0\} = \cap_{j=1}^{k} N(g_j).$$
- Den Graphen einer Funktion $f$ bezeichen wir mit $G(f)$ d.h. zu $f : U \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ defijnieren wir
$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$
- Eine stetig diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$ heisst regular in $x$, wenn $Df(x)$ maximalen Rang hat. (Also $Rang Df(x) = M$ falls $M \leq N$ und $Rang Df(x) = N$ falls $N \leq M$.) Ist die Funktion in jedem $x \in U$ regular, so heisst sie regulaer.

*Beispiel.* Ist $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, so ist $g$ genau dann regular in $x \in W$, wenn $\nabla g(x) \neq 0$ gilt.

*Beispiel.* $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^M$ stetig diffbar. Dann ist $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F(x) = (x, f(x))$ regular. (Denn $DF(x) = (1, Df(x))^t$.)

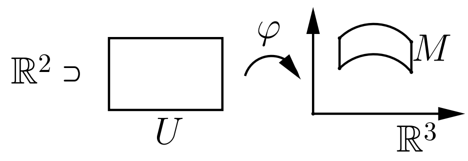
Definition (Parameterdarstellung / Parametrisierung). *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ geben. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen $k \leq N$, und $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Gilt $M = \varphi(U)$, so heisst $(U, \varphi)$ eine Parameterdarstellung von $M$. Dann heisst $k$ die Dimension der Parameterdarstellung. Die Funktion*
$$G_\varphi : U \longrightarrow [0, \infty),\ G_\varphi(x) := \sqrt{\det(D\varphi(x)^T D\varphi(x))} = \sqrt{\det(\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle)}$$
*heisst Gramsche Determinante der Parameterdarstellung.*
*Die Parameterdarstellung heisst reguleaer, wenn $D\varphi$ ueberall Rang $k$ hat. In diesem Fall bezeichnet man $M$ als $k$-dimensional.*

*Bemerkung.*

- Statt von Parameterdarstellung spricht man auch manchmal von Parametrisierung. Die Gramsche Determinante ist auch als Flaechenelement bekannt.

- (Uebung) Die Parameterdarstellung ist genau dann regulaer, wenn $G_\varphi$ nirgends verschwindet. (Entwickele $D\varphi(x)$ nach ONB...).

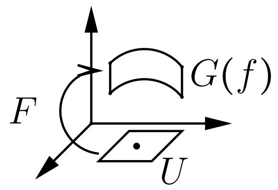
*Beispiel.* Allgemeine Parameterdarstellung:




*Beispiel.*(Graphen sind regulaere Parameterdarstellungen) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist

$$BildF = G(f)$$

und $(U, F)$ ist eine regulaere Parameterdarstellung. Fuer die Gramschedeterminante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$.




Bew. Aus dem oben Diskutierten folgt, dass $(U, F)$ eine regulaere Parameterdarstellung ist. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen. Das kann man (mit etwas Muehe) direkt nachrechnen. Wir lernen zum ende dieses Abschnittes einen strukturellen Zugang kennen

*Beispiel.* (Kurven als Parameterdarstellungen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist $\gamma$ eine Parameterdarstellung. Sie ist regulaer, wenn $\gamma'$ nirgends verschwindet. Es ist $G_\gamma(t) = |\gamma'(t)|$.
Bew. Die Aussagen zur Parameterdarstellung sind klar. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen: Es gilt $D\gamma = \gamma'(t)$. Damit folgt

$$D\gamma^t D\gamma = \gamma'^t\gamma' = \langle\gamma', \gamma'\rangle = |\gamma'|^2.$$

*Beispiel.* (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \longrightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdartellung von $S_R \setminus \{(1,0)\}$. Dann gilt $D\varphi(t) = R(-\sin t, \cos t)$ und fuer die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Bew. Es handelt sich um eine Kurve.

*Beispiel.* (Sphaere) Sei $S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ mit $N = \{(x, y, z) \in S_R : x \geq 0, y = 0\}$ (vgl. Globus: Laengengrade und Breitengrade). Es gilt (Uebung)

$$D\psi(\varphi, \vartheta) = ...$$

Damit folgt

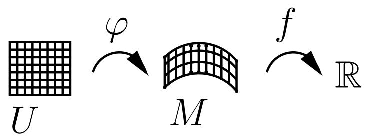
$$D\psi^T D\psi = R^2 diag(1, \sin^2 \vartheta)$$

und

$$G_\varphi^2 = R^4 \sin^2 \vartheta.$$

Auf Gebilden, die durch (regulaere) Parameterdarstellungen gegeben sind, koennen wir Funktionen integrieren (vgl. Kurvenintergral). Darum geht es als naechstes:

*Idee.* $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $(U, \varphi)$ eine Parameterdarstellung von $M$. Dann koennen wir $U$ in sehr kleine disjunkte Wuerfel $Q_j$ zerlegen. In jedem Wuerfel koennen wir nun einen Punkt $p_j$ waehlen. *Zeichnung.* $p_j$, $Q_j$,$\varphi(Q_j)$, $D\varphi(Q_j)$.




Dann sollte das gesuchte Integral im wesentlichen durch seine Riemannsumme

$$\sum_j \mathrm{vol}(\varphi(Q_j)) f(p_j)$$

gegeben sein (und der Fehler umso kleiner, je kleiner die $Q_j$ sind). Da $\varphi$ stetig diffbar ist, ist fuer kleine Wuerfel $Q_j$ aber $\varphi(Q_j) \sim \phi(p_j) + D\varphi(p_j)Q_j$. Entsprechend folgt

$$\begin{aligned}
\int f d\sigma &\simeq \sum_j \mathrm{vol}(\varphi(Q_j)) f(\varphi(p_j)) \\
&\simeq \sum_j \mathrm{vol}(D\varphi(p_j)Q_j) f(\varphi(p_j)) \\
&= \sum_j \sqrt{\det(D\varphi^T(p_j) D\varphi(p_j))} |Q_j| f(\varphi(p_j)) \\
&\simeq \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi(p))} dp. \\
&= \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) dp.
\end{aligned}$$

(Hier: Erste Gleichung: Riemann summe; zweite Gleichung : linear Approximation; dritte Gleichung: Betrachtungen zu Volumina und Determinanten im vorigen Kapitel; vierte Gleichung: Riemann Summme.)

Wir wollen also definieren

$$\int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)(p)} dp = \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) dp.$$

Das so definiert Integral haengt nicht von der Parameterdarstellung ab (und damit handelt es sich wirklich um eine sinnvolle Definition).

Proposition. *(Unabhaengigkeit des Integrals von der Parameterdarstellung) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ mit einer regulaeren injektiven Parameterdarstellung $(V, \psi)$ gegeben. Dann gilt fuer jede weitere injektive Parameterdarstellung $(U, \varphi)$ von $M$, dass*

$$\int_V f(\psi(x))G_\psi(x)dx = \int_U f(\varphi(y))G_\varphi(y)dy.$$

$$\begin{tikzcd} & M & \\ U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1} \circ \varphi"'] & & V \arrow[ul, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

*Bemerkung.* Um die Unabhaengigkeit des Integrals von allen injektiven Parameterdarstellungen zu erhalten, reicht Existenz einer einzigen injektiven *regulearen* Parameterdarstellung.

*Beweis.* Sei $T := \psi^{-1} \circ \varphi : U \longrightarrow V$. Dann ist $T$ bijektiv (klar, da $\varphi, \psi$ bijektiv sind) und stetig diffbar (! hier nutzt man Regularitaet von $\psi$ s.u.), und es gilt $\varphi = \psi \circ T$. Entsprechend folgt

$$D\varphi = D\psi \circ DT$$

und damit

$$D\varphi^t D\varphi = DT^t (D\psi^t \circ D\psi) DT$$

also nach Bilden der Determinante

$$G_\varphi^2 = |\det DT|^2 G_\psi^2.$$

Zieht man die Wurzel erhaelt man

$$G_\varphi = |\det DT| G_\psi$$

und die gewuenschte Aussage folgt aus der Substitutionsregel.
(! Noch zu zeigen: $T$ stetig diffbar: Sei $V \subset \mathbb{R}^k$. Da $\psi$ regulaer, also $Rang D\psi = k$ gilt, koennen wir ohne Einschraenkung voraussetzen, dass die letzten $k$ Zeilen von $D\psi$ linear unabhaengig sind. Dann ist

$$G : V \times \mathbb{R}^{N-k} \longrightarrow \mathbb{R}^N, \;\; G(x, y) := \psi(x) + (y, 0)$$

stetig diffbar und lokal invertierbar. (Denn: $DG(x, y) = ...$, Zeichnung: Parametrisiere durch $\psi$ und 'Verschiebung'). Es gilt $G(x, 0) = \psi(x) \in M$, also folgt fuer

$$z = \psi(x) = G(x, 0) \in M$$
$$\psi^{-1}(z) = x = \text{1-Komponente von } G^{-1}(z)$$

fuer $z \in M$. Damit ist

$$T(u) = \psi^{-1} \circ \varphi(u) = \text{1-Komponente von } G^{-1}(\varphi(u))$$

als Verknuepfung stetig diffbarerer Funktionen, ebenfalls stetig diffbar.) □

Ende der Vorlesung

Definition. *(Oberflaechenintegral einer Parameterdarstellung) Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben, so dass $M$ das Bild einer regulaeren injektiven Parameterdarstellung ist, und ist $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definiert man*

$$\int_M f(p) d\sigma(p) := \int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(x)) G_\varphi(x) dx$$

*wobei $(U, \varphi)$ eine beliebige injektive Parameterdarstellung von $M$ ist.*

Definition. *(Volumen) Sei $M$ wie in vorangehender Definition. Dann ist das Volumen von $M$ definiert als*

$$\int_M 1 d\sigma(x).$$

*Bemerkung.*
- Das Volumen einer eindimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Laenge.
- Das Volumen einer zweidimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Flaeche.
- Das Volumen einer dreidimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Volumen.

Wir betrachten nun das Oberflaechenintegral fuer die von oben schon bekannten Beispiele. Dabei verwenden wir die von oben bekannte Notation und auch die dort berechneten Gramschen Determinanten.

*Beispiel.* (Kurve) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist (s.o.) $G_\gamma(t)^2 = |\gamma'(t)|^2$. Entsprechend gilt fuer die Laenge der Kurve

$$Vol(\gamma) = \int_I 1 dS = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

wie wir es ja schon hatten.

*Beispiel.* (Graph einer Funktion). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist $(U, F)$ eine regulaere Parameterdarstellung. Fuer die Gramschedeterminante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$. Damit folgt fuer das Oberflaechenintegral also

$$\int_M g(p) d\sigma(p) = \int_U g(F(u)) G_F(u) du.$$

*Beispiel.* (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \longrightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus \{(1, 0)\}$. Fuer die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Damit gilt fuer das Oeberflaechenintegral einer Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_0^{2\pi} R\, f(R \cos t, R \sin t) dt.$$

Insbesondere folgt fuer das Volumen der Kreislinie (Laenge der Kreislinie) also

$$Laenge = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

*Beispiel.* (Sphaere) Sei $S_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0,2\pi) \times (0,\pi) \longrightarrow S_R, \psi(\varphi,\vartheta) = R(\cos\varphi \sin\vartheta, \sin\varphi \sin\vartheta, \cos\vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ (s.o.). Es gilt

$$G_\varphi^2 = R^4 \sin^2\vartheta.$$

Damit gilt fuer das Oberflaechenintegral einer Funktion $f : S_R \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_{(0,2\pi)\times(0,\pi)} f(\psi(\varphi,\vartheta) R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Insbesondere folgt fuer das Volumen der Sphaere (Oberflaeche der Kugel)

$$Oberflaeche = \int_{(0,2\pi)\times(0,\pi)} 1 R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 4\pi R^2.$$

Definition. *Ist $(\varphi, U)$ eine Parameterdarstellung von $M = \varphi(U)$, so bezeichnen wir das Bild von $D\varphi(x)$ als den Tangentialraum von $M$ in $x$ bzgl. $\varphi$. Das orthogonale Komplement von des Tangentialraumes bezeichnen wir als den Normalenraum. Zeichnung.*

Besonders wichtig sind Oberflaechenintegrale ueber Gebilde der Dimension $N-1$ im $\mathbb{R}^N$. (Solche Gebilde werden wir spaeter unter dem Namen Hyperflaechen kennenlernen). Dazu gehoeren insbesondere die Gebilde, die durch Graphen gegeben werden. In diesem Fall koennen wir die Gramschen Determinanten und die Normalenraeume leicht ausrechnen. Dazu ist die folgende Definition sehr nuetzlich.

Definition. *Seien $a_1, \ldots, a_{N-1}$ Vektoren in $\mathbb{R}^N$. Sei $A^{(k)}$ die $(N-1) \times (N-1)$- Matrix, die aus $A = (a_1, \ldots, a_{N-1})$ durch Streichen der $k$-ten Zeile entsteht ($k = 1, \ldots, N$). Dann heisst*

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$$

*mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A^{(k)}$ das aeussere Produkt von $a_1, \ldots, a_{N-1}$.*

*Bemerkung.* Fuer jede natuerliche Zahl $k$ gilt $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

Lemma. *Seien $a_1, \ldots, a_{N-1}$ Vektoren in $\mathbb{R}^N$, $A = (a_1, \ldots, a_{N-1})$ und $\nu := a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt $\nu \neq 0$ genau dann, wenn $a_1, \ldots, a_{N-1}$ linear unabhaengig sind. Weiterhin gilt:*

(a) $\langle b, \nu \rangle = \det(b, a_1, \ldots, a_{N-1})$ *fuer alle* $b \in \mathbb{R}^N$.
(b) *(1)* $\nu \perp a_j$, $j = 1, \ldots, N-1$. *(Richtung modulo Vorzeichen)*
*(2)* $\|\nu\|^2 = \det(a_1, \ldots, a_{N-1})^T (a_1, \ldots, a_{N-1})$. *(Laenge)*
*(3)* $\det(\nu, a_1, \ldots, a_{N-1}) \geq 0$. *(Vorzeichen)*

*Sowohl durch (a) als auch durch (b) ist $\nu$ eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunaechst die Charakterisierung von $\nu \neq 0$: Sind die Vektoren $a_1, \ldots, a_{N-1}$ linear unabhaengig, so hat $A = (a_1, \ldots, a_{N-1})$ genau $N-1$ linear unabhaengige Spalten und damit auch $(N-1)$ linear unabhaengige Zeilten. Damit gibt es also ein $k$, so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist. Dann verschwindet dann die $k$-te Komponente von $\nu$ nicht. Ist umgekehrt $\nu \neq 0$, so gibt es ein $k$ so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist und damit hat $A$ (mindestens) den Rang $(N-1)$ und damit sind die Spalten linear unabhaengig.

Wir zeigen nun die letzte Aussage: Die letzte Aussage ist klar.

(a) Das folgt durch Entwickeln von $\det(b, a_1, \ldots, a_{N-1})$ nach der ersten Spalte.
(b) Es folgen (1) aus (a) (wegen $\langle a_j, \nu\rangle = \det(a_j, a_1, \ldots, a_{N-1}) = 0$). Es folgt (3) aus (a) (wegen $\det(\nu, a_1, \ldots, a_N) = \langle \nu, \nu\rangle$).
Zu 2. Ist $\nu = 0$ so sind (vgl. Beginn des Beweises) die Vektoren $a_1, \ldots, a_{N-1}$ linear abhaengig und darum gilt (vgl. Uebung) $detA^tA = 0$, und es folgt (2). Es reicht also den Fall $\nu \neq 0$ zu betrachten: Es gilt (unter Nutzen von (1)):

$$(\nu, a_1, \ldots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \ldots, a_{N-1}) = Blockmatrix(\nu^T\nu, A^TA).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\det(\nu, a_1, \ldots, a_{N-1})|^2 &= \det(\nu, a_1, \ldots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \ldots, a_{N-1}) \\ &= \det Blockmatrix(\nu^T\nu, A^TA) \\ &= \|\nu\|^2 \det A^TA. \end{aligned}$$

Mit (a) ergibt sich

$$\left(\|\nu\|^2\right)^2 \overset{(a)}{=} |\det(\nu, a_1, \ldots, a_{N-1})|^2 = \|\nu\|^2 \det A^TA.$$

Das liefert nach Division durch $\|\nu\| \neq 0$ dann

$$\|\nu\| = \sqrt{\det A^TA}.$$

□

Wir koennen das nun auf Parameterdarstellunge von Hyperflaechen anwenden.

FOLGERUNG. *(Normale einer Hyperflaeche) Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ eine (regulaere) Parametrisierung von $\varphi(U)$. Sei $\nu := \partial_1\varphi \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1}\varphi$. Dann gilt:*

- *$\nu \perp \partial_j\varphi$ d.h. $\nu$ ist normal zu der Flaeche. (vgl. (b), 1. des vorigen Lemma).*
- *$\|\nu\| = G_\varphi$ d.h. Laenge von $\nu$ ist Flaechenelement. (vgl. (b), 2. des vorigen Lemma.)*

*Bemerkung.* In Worten besagt die Folgerung: Der Vektor $\nu$ ist senkrecht auf der Flaeche und seine Laenge ist gerade das Flaechenelement.

Ende der Vorlesung

Damit koennen wir die Gramschen Determinanten und zusaetzlich noch die Normalenvektoren fuer die beiden wichtigsten Darstellungen von Hyperflaechen (naemlich als Graphen bzw. als Nullstellenmengen) explizit bestimmen. (Die Berechnung der Normalenvektoren ist fuer spaeter nuetzlich. In diesem Abschnitt interessieren uns hauptsaechlich die Gramschen Determinanten.)

*Beispiel - Graphen.* Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $F(u) = (u, f(u))$ die zugehoerige Parameterdarstellung. Dann gilt fuer $\nu := \partial_1 F(u) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1} F$ die Formel

$$\nu = (-1)^N (\partial_1 f(u), \ldots, \partial_{N-1} f(u), -1).$$

Insbesondere ist also

$$G_F(u) = \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorangehenden Folgerung.

Es reicht also die erste Aussage zu beweisen. Es gilt $DF(x) = (1, \nabla f(x))^t$. Nun gilt nach Definition

$$\nu_j := j - te\ Komponenten\ von\ \partial_1 F(u) \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)}.$$

Es ist $(DF)^{(j)} = ....$ Damit folgt (fuer $j = 1, \ldots, N-1$) durch Entwickeln nach der $j$-ten Spalte

$$\nu_j = \det(-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)} = (-1)^{j+1}(-1)^{j+N-1} \partial_j f = (-1)^N \partial_j f$$

und

$$\nu_N = (-1)^{N+1} \det 1 = (-1)^N (-1).$$

Das liefert die Behauptung.

*Beispiel - Nullstellenmenge.* Sei $g : V \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\partial_N g(x) \neq 0$ fuer alle $x \in V$ gegeben. Sei

$$M := \text{Nullstellenmenge von } g$$

als Graph einer Funktion $f$ gegeben. (Zumindest lokal ist das immer der Fall.) Es gibt also $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $M = Graph(f)$ also $g(u, f(u)) \equiv 0$. Fuer die zugehoerige Parameterdarstellung $(F, U)$ mit $F(u) = (u, f(u))$ gilt dann

$$\nu := \partial_1 F \wedge \cdots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{N+1} (\partial_N g(F(u)))^{-1} \nabla g(F(u)).$$

Insbesondere ist also

$$G_F = \frac{1}{|\partial_N g|} \|\nabla g\|.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorigen Folgerung. Es reicht also die erste Aussage zu beweisen.
Wir schreiben $u$ fuer $(x_1, \ldots, x_{N-1})$. Die implizit definierte stetig diffbare Funktion $f$ erfuellt

$$g(u, f(u)) \equiv 0.$$

Damit gilt also nach Kettenregel

$$0 = \nabla_u g + \partial_N g \nabla_u f.$$

Daraus folgt

$$\nabla f = -(\partial_N g)^{-1} \nabla_u g.$$

Damit gilt fuer das zugehoerige $F(u) = (u, f(u))$ also nach dem vorigen Beispiel

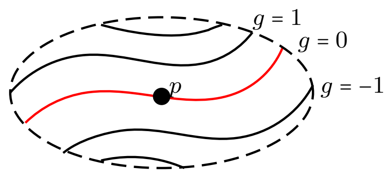
$$\nu = (-1)^N ((-\partial_N g)^{-1} \nabla_u g, -1) = (-1)^{N+1} (\partial_N g)^{-1} \nabla g.$$

Es folgt die Behauptung.

Bisher haben wir Mengen betrachtet, die global (d.h. als Ganze) durch eine Parametrisierung gegeben sind. Wir betrachten nun Mengen, die lediglich lokal durch Parametrisierungen gegeben sind.

Lemma. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $p \in M$ und $k \le N$. Aequivalent:*

(i) *Es existiert eine offene Umgebung $W$ von $p$ in $\mathbb{R}^N$ und regulaeres $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ mit $M \cap W = N(g)$. ($M$ ist lokal eine Nullstellenmenge.)*




(ii) *Es existiert eine offenen Umgebung $W$ von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, und eine Permutation $P : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit*

$$M \cap W = PG(f).$$

*($M$ ist lokal Graph.)*

(iii) *Es existiert eine offene Umgebung $W$ von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und ein bijektives stetig differenzierbares regulaeres $\varphi : U \longrightarrow W \cap M$, dessen Inverse wieder stetig ist.*

*Beweis.* Die Richtung $(i) \Longrightarrow (ii)$ folgt aus dem Satz ueber implizite Funktionen. Die andere Implikation (ii)$\Longrightarrow$ (i) folgt (fuer ohne Einschraenkung $P = Id$) einfach durch Betrachten von $g(x,y) = y - f(x)$. (Hier $x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{N-k}$.)

Die Implikation (ii)$\Longrightarrow$ (iii) ist klar (da man fuer $\varphi$ gerade die Abbildung $P \circ F$ waehlen kann, wobei $F(u) = (u, f(u))$ ist.

Der Beweis der Implikation (iii)$\Longrightarrow$ (ii) wird nur skizziert. □

Definition. *(Untermannigfaltigkeit) Eine Teilmenge $M$ von $\mathbb{R}^N$ heisst Untermannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^N$) der Dimension $k$, wenn sie in jedem Punkt $p \in M$ eine der Bedingungen des Lemma erfuellt.*

*Bemerkung.*

- Der Fall $k = N$ kann auch zugelassen werden. Dann erhaelt man offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$. Insbesondere ist $R^N$ selber eine (Unter)mannigfaltigkeit. Das erklaert die Bezeichnung.
- Eine UMK ist also lokal durch regulaere, injektive Parameterdarstellungen mit stetiger Inverser gegeben.
- UMK der Dimension $N - 1$ heissen Hyperflaechen. Sie sind also (lokal) Nullstellengebilde von reellwertigen Funktionen.
- Untermannigfaltigkeiten sind lokal Schnitte von Hyperflaechen (da $N(g) = \cap_i^{N-k} N(g_i)$).

*Beispiel.* (Affiner) Unterraum.

*Beispiel.* Einheitskreislinie.

*Beispiel.* Die Sphaere $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x|^2 - 1 = 0\}$ ist eine Hyperflaeche.

*Beispiel.* Torus

*Beispiel.* (Uebung) $SL(n)$, $Gl(n)$.

Ende der Vorlesung

Wir geben nun den schon aufgetretenen Verallgemeinerungen von Parametrisierung durch Graphen einen Namen.

DEFINITION. *Ist $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ und $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, regulaer und injektiv mit stetiger Inversen, so heisst $\varphi$ eine Einbettung.*

*Bemerkung.* Aus Regularitaet und Injektivitaet folgt nicht die Stetigkeit der Inversen, wie man an Beispielen sieht.

Damit erhaelt man aus dem obigen Lemma sofort die Folgerung.

FOLGERUNG. *Es ist $M \in \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge $W$ existiert sowie eine Einbettung $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit $p \in W$ und $\varphi(U) = M \cap W$.*

*Bemerkung.* Die Inversen der in der Folgerung auftretenden Abbildungen $\varphi$ heissen 'Karten' (da sie die Situation einer Landkarte als Parametrisierung eines Stueckes der Erdoberflaeche verallgemeinern).

Wir fuehren nun die Tangentialflaechen und Normalen an UMK ein. *Zeichnung.*

DEFINITION. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine UMK und $p \in M$. Dann heisst*

$$T_pM := \{\gamma'(0) : \gamma : (-\delta_\gamma, \delta_\gamma) \longrightarrow \mathbb{R}^N \textit{stetig diffbar, } \gamma(0) = p, \gamma((-\delta_\gamma, \delta_\gamma)) \subset M\}$$

*der Tangentialraum von $M$ in $p$. Der Normalraum $N_pM$ ist definiert als*

$$N_pM := T_pM^\perp.$$

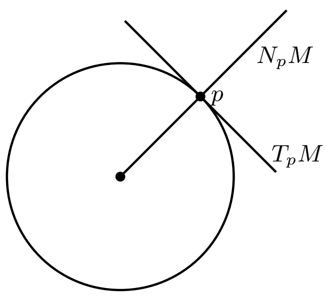



ABBILDUNG 1. Tangential- und Normalraum einer zweidimensionalen Sphre in $p$

THEOREM. *(Beschreibung Tangentialraum und Normalraum) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ UMK gegeben. Sei $p \in M$ und $W \subset \mathbb{R}^N$ offen mit*

$$p \in M \cap W = N(g) = G(f) = Bild(F),$$

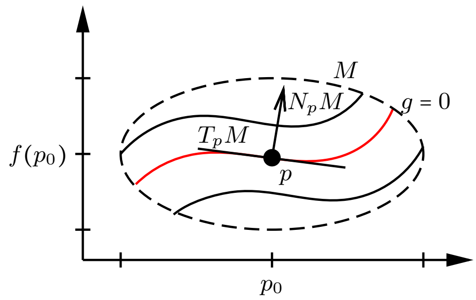
*wobei* $U \subset \mathbb{R}^k$*, offen,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ *stetig diffbar,* $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$*,* $F(x) = (x, f(x))$*,* $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$*, stetig diffbar und regulaer (d.h.* $RangDg = N - k$*). Dann gilt*

$$T_pM = KerDg(p) = BildDF(p_0)$$

*fuer* $p = F(p_0)$*. Inbesondere gilt*

$$T_pM = \bigcap_{j=1}^{N-k} \{\nabla g_i(p)\}^{\perp}, \;\; N_pM = Lin\{\nabla g_i(p) : i = 1, \dots, N-k\}$$

*sowie* $dimT_pM = k$*,* $dimN_pM = N - k$*.*




*Beweis.* $T_pM \subset KerDg$: Sei $v \in T_pM$ beliebig und $\gamma$ zugehoerige Kurve d.h $\gamma : (-1, 1) \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann gilt $g \circ \gamma \equiv 0$ also

$$0 = (g \circ \gamma)'(0) = Dg(\gamma(0))\gamma'(0) = Dg(p)v.$$

$BildDF \subset T_pM$: Sei $L = DF(p_0) = (1, Df(p_0))^t$. Sei $w \in \mathbb{R}^k$ beliebig, $\gamma : (-1, 1) \longrightarrow M$, $\gamma(t) = F(p_0 + tw)$. Dann gilt

$$DF(p_0)w = \gamma'(0) \in T_pM.$$

Damit folgt die Aussage.

Insgesamt zeigt dies

$$BildDF(p_0) \subset T_pM \subset KerDg(p).$$

Mit

$$\dim KerD(g) = k$$

($g$ regulaer also $RangDg = N - k$) und

$$\dim BildDF(p_0) = k$$

(klar, betrachte Ableitung) folgt die Gleichheit der Raume und die Aussage ueber die Dimensionen.

Zum 'Insbesondere': Mit $T_pM = KerDg(p)$ folgt sofort

$$T_pM = \bigcap_j \{\nabla g_j(p)\}^{\perp}.$$

Damit folgt aus Standardsaetzen der linearen Algebra die Aussage ueber $N_pM$. □

*Bemerkung.*

- Linearisierte Version von $M = Ker(g) = BildF$ liefert $T_pM = KerDg = BildDF$.

- Der Satz zeigt, dass $T_pM$ in der Tat ein Vektorraum ist.
- In Richtung $\nabla g_i$ staerkstes Wachstum von $g_i$. In Richtung $T_pM$ kein Wachstum der $g_i$ (da Nullstellenmenge). *Zeichnung.*

*Beispiel - $U \subset \mathbb{R}^N$ offen.* In diesem Fall ist $M = U$ eine Untermannigfaltigkeit und der Tangentialraum ist in jedem Punkt $p \in M$ durch $\mathbb{R}^N$ gegeben. (Betrachte die Kurven $\gamma(t) = p + tv$ fuer beliebiges $v \in \mathbb{R}^N$...)

*Bespiel - Sphaere in $\mathbb{R}^2$.* Sei $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S$

$$T_pS = \{p\}^\perp \text{ und } N_pM = Lin\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve $\gamma$ durch $p$ in $M$ erfuellt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

*Bespiel - Sphaere in $\mathbb{R}^N$.* Sei $S^N := \{x \in \mathbb{R}^N : \langle x, x \rangle = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S^N$

$$T_pS^N = \{p\}^\perp \text{ und } N_pM = Lin\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve $\gamma$ durch $p$ in $M$ erfuellt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

*Beispiel - Gl (n).* (Uebung). Es ist $GL(n) :=$ Invertierbare $n \times n$ Matrizen $= n \times n$ Matrizen mit nichtverschwindender Determinante eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$. Fuer den Tangentialraum in $I$ gilt $T_IGl(n) = n \times n$ Matrizen.

*Beispiel - Sl (n).* (Uebung). Es ist $Sl(n) := n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$. Fuer den Tangentialraum in $I$ gilt $T_ISl(n) = n \times n$ Matrizen mit verschwindender Spur.

Um Integrale ueber Untermannigfaltigkeiten sauber einzufuehren, brauchen wir noch ein weiteres Hilfsmittel: die Partition der Eins. Dazu erinnern wir zunaechst an zwei Konzepte.

*Erinnerung - Kompaktheit:* Es gibt verschiedene aequivalente Definitionen von Kompaktheit. Hier diskutieren wir die drei gaengigsten Varianten.

THEOREM. *Sei $(K, d)$ ein metrischer Raum. Dann sind aequivalent:*

(i) *Jede Folge in $K$ hat eine in $K$ konvergente Teilfolge. 'K ist folgenkompakt'.*
(ii) *Jede offenen Ueberdeckung von $K$ hat eine endliche Teilueberdeckung (d.h. Zu allen $U_\alpha$, $\alpha \in A$, offen mit $K \subset \cup U_\alpha$ existiert $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ mit $K \subset \cup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$.) 'K ist ueberdeckungskompakt'.*
(iii) *Es ist $K$ vollstaendig und total beschraenkt. 'Nicht zu klein und nicht zu gross.'*

Wir geben an dieser Stelle keinen Beweis und diskutieren das Ergebnis stattdessen kurz.
*Bemerkungen.*

- Fuer einen metrischen Raum ist Totalbeschraenktheit gerade aquivalent zur Eigenschaft, dass jede Folge eine Teilfolge enthaelt, die eine Cauchy Folge ist. Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstrass.

- Ist der metrische Raum $(M,d)$ eine Teilmenge des Euklidischen Raumes $\mathbb{R}^N$ (und $d$ die Einschraenkung der Euklidischen Metrik) so gilt:

$$(M,d) \text{ total beschraenkt} \Longleftrightarrow M \subset \mathbb{R}^N \text{ beschraenkt.}$$

$$(M,d) \text{ vollstaendig} \Longleftrightarrow M \subset \mathbb{R}^N \text{ abgeschlossen.}$$

Damit ergibt sich aus dem vorigen Theorem insgesamt folgende Charakterisierung der Kompaktheit fuer Teilmengen des Euklidischen Raumes:

$$(M,d) \text{ kompakt} \Longleftrightarrow M \subset \mathbb{R}^N \text{ beschraenkt und abgeschlossen.}$$

Ende der Vorlesung.

*Erinnerung - $C_c^\infty$.* Der Traeger der Funktion $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Damit ist dann $\operatorname{supp}(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ und es verschwindet $f$ auf dem Komplement von $\operatorname{supp}(f)$. Tatsaechlich (Uebung) ist $\operatorname{supp}(f)^c$ die größte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ auf der $f$ verschwindet. Man definiert

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) := \{f : R^N \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beliebig oft diffbar und hat kompakten Traeger}\}.$$

Nach diesen Erinnerungen koennen wir nun die Partition der Eins einfuehren.

THEOREM. *(Untergeordnete Partition der Eins) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und $O_1, \ldots, O_n$ eine offene Ueberdeckung von $K$. Dann gibt es Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit*

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1 \text{ fuer } x \in K$$

*und* $\operatorname{supp} \varphi_j \subset O_j$ *für jedes $j = 1, \ldots, N$. Diese Funktionen werden eine der Ueberdeckung $O_j$ untergeordnete Partition der Eins genannt.*

*Beweis.* Der Beweis nutzt führt zwei voneinander unabhaengige Ideen zusammen.

Ohne Einschraenkung sein $K$ eine endliche Vereinigung von abgeschlosssenen achsenparallelen Quadern. (Sonst: Vergroessern von $K$....)
Ohne Einschraenkung sei jedes $O_j$ eine endliche Vereinigung von offenen achsenparallelen Quadern (Sonst: ...)
Damit sind also die charakteristischen Funktionen der $O_j$ und von $K$ Riemann-integrierbar und Lebesgue-integrierbar.

Fuer $\delta > 0$ und $j = 1, \ldots, n$ sei

$$O_j^\delta := \{x \in O_j : \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus O_j} |x - y| > \delta\}$$

die Menge der Punkte von $O_j$, die vom Rand von $O_j$ einen Abstand groesser als $\delta$ haben. Dann kann man $O_j$ auch beschreiben, als die Menge der Punkte um die eine Kugel mit Radius groesser als $\delta$ in $O_j$ existiert. Dann ist $O_j^\delta$ offenbar offen.

*Behauptung.* Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$K \subset O^\varepsilon := \bigcup_{j=1}^n O_j^{3\varepsilon}$$

gilt.
Bew. Ist $x \in K$ beliebig, so gehoert $x$ zu einem $O_j$. Da $O_j$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset O_j$. Damit gilt also $x \in O_j^\varepsilon$. Damit folgt, dass $\{O^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ eine offene Ueberdeckung von $K$ ist. Aufgrund der Kompaktheit von $K$ gibt es dann eine endliche Teilueberdeckung $\{O^{\varepsilon_1}, \dots, O^{\varepsilon_k}\}$. Mit

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$$

folgt dann die Behauptung.

Definiere nun fuer jedes $R > 0$ die Funktion $\psi_R(x) = c_R \exp(\frac{-1}{R^2 - |x|^2})$ fuer $|x| < R$ bzw. 0 sonst mit $c_R$, so dass gilt $\int \psi_R dx = 1$. Dann ist (vgl. Analysis I) die Funktion $\psi_R$ beliebig oft differenzierbar und hat Traeger $B_R(0)$.

Sei nun $1_j$ die charakteristische Funktion von $O_j^{2\varepsilon}$ und $1_0$ die charakteristische Funktion von $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j=1}^n O_j^{2\varepsilon}$. Man definiert

$$\widetilde{\psi}_j(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x - y) 1_j(y) dy$$

fuer $j = 0, 1, \dots, n$.
Dann sind (offenbar) alle $\widetilde{\psi}_j$ nichtnegativ. Weiterhin sind sie beliebig oft differenzierbar, und es gilt fuer die entsprechenden Ableitungen (Uebung, bzw. Kapitel 7):

$$\partial_\alpha(\widetilde{\psi} * 1_j)(x) = \int (\partial_\alpha \psi_\varepsilon(x - y)) 1_j(y) dy.$$

Fuer $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\widetilde{\psi}_j(x) = 1 \text{ in } O_j^{3\varepsilon} \text{ und } \widetilde{\psi}_j(x) = 0 \text{ ausserhalb } O_j^\varepsilon$$

also

$$\operatorname{supp}(\widetilde{\psi}_j) \subset \overline{O_j^\varepsilon} \subset O_j.$$

Fuer $n = 0$ gilt

$$\widetilde{\psi}_j = 0 \text{ in } O_j^{3\varepsilon}.$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{j=0}^n \widetilde{\psi}(x) \geq 1$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ aufgrund von

$$1 = \int \psi_\varepsilon(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_j O_j^{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x - y) dy + \int_{\bigcup_j O_j^{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x - y) dy.$$

Fuer

$$\varphi_j(x) := \frac{\widetilde{\psi}_j(x)}{\sum_{j=0}^n \widetilde{\psi}(x)}$$

folgt dann die Behauptung. □

Damit koennen wir nun zur *Integration von Funktionen auf Unterrmannigfaltikeiten* kommen: Wir führen Oberflaechenintegrale ueber stetige Funktionene mit kompaktem Traeger auf Untermannigfaltigkeiten ein. Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit. Waehle zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge $V_p$ in $\mathbb{R}^N$, so dass $V_p \cap M$ gerade das Bild einer regulaeren Parameterdarstellung $(U_p, \varrho_p)$ ist. Den kompakten Traeger von $f$ koennen wir mit endliche vielen dieser $V's$ ueberdecken. Diese seien mit $V_1, \ldots, V_n$ bezeichnet. Seien $(U_j, \varrho_j)$, $j = 1, \ldots, n$ die zugehoerigen Parameterdarstellungen. Sei $\varphi_j$, $j = 1, \ldots, n$ eine der Ueberdeckung $(V_j)$ untergeordente Partition der Eins. Dann definieren wir

$$\int_M f d\sigma := \sum_{j=1}^n \int_{V_j \cap M} (f\varphi_j) d\sigma = \sum_{j=1}^n \int_{U_j} (f\varphi_j)(\varrho_j(u)) \sqrt{G}_{\varrho_j}(u) du.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition weder von der gewaehlten Ueberdeckung noch von der gewaehlten Partition der Eins abhaengt:
Seien $\varphi_j$, $j = 1, \ldots, n$ zu $V_i$, $i = 1, \ldots, n$ und $\psi_i$, $i = 1, \ldots, m$ zu $W_i$, $i = 1, \ldots, m$ untergeordnete Partitionen der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_j \int_{V_j \cap M} f\varphi_j d\sigma &= \sum_j \int_{V_j \cap M} f\varphi_j (\sum_i \psi_i) d\sigma \\
&= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap M} f\varphi_j \psi_i d\sigma \\
(\operatorname{supp} \psi_i \subset W_i) \quad &= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap W_i \cap M} f\varphi_j \psi_i d\sigma \\
(\operatorname{supp} \varphi_j \subset V_j) \quad &= \sum_{i,j} \int_{W_i \cap M} f\varphi_j \psi_i d\sigma \\
&= \sum_i \int_{W_i \cap M} f\psi_i \sum_j \varphi_j d\sigma \\
(Part.d.Eins) \quad &= \sum_i \int_{W_i \cap M} f\psi_i d\sigma.
\end{aligned}$$

*Beispiel - Kreislinie.* Sei $S_R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Wir waehlen eine Ueberdeckung bestehend aus einer Umgebung $V_1$ von $(1,0)$ mit

$$V_1 \cap S_R = \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

fuer ein $\varepsilon > 0$ und $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ und den dazu passenden Parametrisierungen

$$\varrho_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_R, \varrho_1(s) = R(\cos(s), \sin(s))$$

und

$$\varrho_2 : (0, 2\pi) \longrightarrow S_R,\ \varrho_2(t) = R(\cos(t), \sin(t)).$$

Sei $\varphi_1$, $\varphi_2$ eine untergeordnete Partition der Eins. Dann gilt fuer stetiges $f : S_R \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\begin{aligned}
\int f d\sigma &= \int f\varphi_1 d\sigma + \int f\varphi_2 d\sigma \\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f \circ \varrho_1(s) \varphi_1 R ds + \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) \varphi_2(t) R dt.
\end{aligned}$$

(Hier nutzen wir die uns schon bekannte Tatsache, dass die entsprechende Gramsche Determinante gerade konstant gleich $R$ ist.) Wir untersuchen nun den Grenzwert $\varepsilon \to 0$. Offensichtlich haengt die linke Seite nicht von $\varepsilon$ ab. Fuer die beiden Terme auf der rechten Seite gilt: Da $f$ beschraenkt ist, konvergiert der erste Term gegen 0 fuer $\varepsilon \to 0$. Wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ und $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subset \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ gilt $\varphi_2 = 1$ auf $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Damit sieht man leicht, dass der zweite Term gegen

$$\int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t)\varphi_2(t) R dt$$

konvergiert. Insgesamt folgt also

$$\int f d\sigma = \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) R dt.$$

Damit kommt man also in diesem Beispiel effektiv mit einer Parametrisierung aus.

Ähnlich kann man sehen, dass auch für die Sphaere in drei Dimensionen oder den Torus effektiv eine Parametrisierung ausreicht.

Definition. *Sei $M$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\nu(x) \in N_x M \setminus \{0\}$ fuer alle $x \in M$ heisst Normale.*

*Bemerkung.* Oft ist man an normierten Normalen interessiert. Ist $\nu$ eine Normals so ist $\mu := \frac{\nu}{\|\nu\|}$ eine normierte Normale.

KAPITEL 6

# Der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt lernen wir einen der grossen Saetze der Analysis kennen: Den Satz von Stokes. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des HDI auf hoehere Dimensionen verstanden werden. Tatsaechlich ist der HDI auch ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis, der unten gegeben wird. Es gibt verschiedene allgemeine Versionen des Satzes von Stokes. Wir praesentieren eine mittelallgemeine Version. Zur Einstimmung formulieren wir den HDI noch einmal um:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

konnen wir mit $I = (a,b)$, also $\partial I = \{a,b\}$ und $f' = \partial f$ und der 'Normalen' $n : \{a,b\} \longrightarrow \{-1,1\}$, $n(a) = -1$, $n(b) = 1$ auch schreiben als

$$\int_I \partial f dt = \int_{\partial I} fn.$$

Das Integral der Ableitung wird zu einem Integral ueber den Rand der Funktion.
Wir brauchen also Mengen mit gutem Rand.

Es geht um offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ deren Rand 'schoen' ist und ein 'klares Auesseres' erlaubt.

Definition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann hat $U$ einen glatten Rand, wenn der Rand Rand $\partial U$ von $U$ eine Untermannigfaltigkeit ist, und es ein 'Aussen' gibt, d.h. eine stetige Funktion*

$$\mu : \partial U \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

*mit*

- $\mu(x) \in N_x U$
- $\|\mu(x)\| \equiv 1$
- $x + s\mu(x) \notin U$ *fuer alle kleinen* $s > 0$ *und* $x + s\mu(x) \in U$ *fuer alle grossen* $s < 0$,

*fuer alle $x \in \partial U$. Die Funktion $\mu$ ist dann eindeutig bestimmt und heisst die aussere Normale von $U$.*

*Bemerkung.* Da der Rand eine Untermannigfaltigkeit ist, kann er als Nullstellenmenge einer reellen Funktion dargestellt werden. Daher hat der Normalenraum $N_x M$ die Dimension 1. Die Funktion $\mu$ ist also durch die ersten beiden Bedingungen bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt. Das Vorzeichen wird durch die letze Bedingung festgelegt.

*Beispiel.* (Offene Menge ohne aussere Normale.)

*Beispiel.* (Offene Menge mit ausserer Normale)

*Beispiel.* Generisches Beispiel. *Zeichnung.*

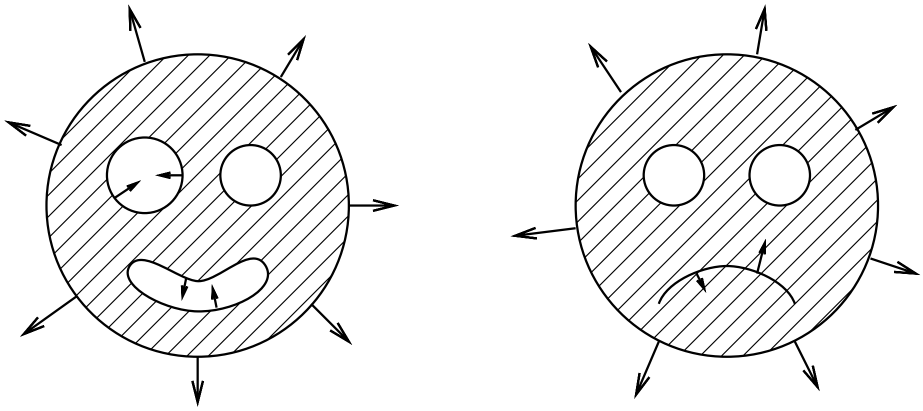


Abbildung 1. Teilmengen mit und ohne „klares“ Äußeres

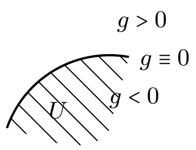
Liegt der Rand als Nullstellenmenge vor, so ist die Berechnung der aeusseren Normalen nicht schwer.

Proposition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in \partial U$. Es gelte in einer Umgebung $W$ von $p$, dass*

$$W \cap U = \{x : g(x) < 0\},\ W \cap \partial U = \{x : g(x) = 0\}$$

*fuer ein stetig differenzierbares und regulaeres $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist lokal die äußere Normale gegeben durch*

$$\mu(x) := \frac{1}{\|\nabla g(x)\|} \nabla g(x).$$




*Beweis.* Nach Konstruktion ist $\partial U \cap W = N(g)$. Damit gilt also (s.o.) $\nabla g(x) \in N_x \partial U$ fuer alle $x \in \partial U$. Insbesondere ist also $\mu(x) \in N_x \partial U$. Nach Konstruktion ist $\mu$ normiert. Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor

$$g(x + s\mu(x)) = g(x) + s\langle \nabla g(x), \mu(x)\rangle + kleiner\ Fehler \sim s\|\nabla g(x)\|.$$

Damit folgt die dritte Eigenschaft der ausseren Normalen. □

Wir beginnen nun mit einer Vorversion des Satzes von Stokes.

LEMMA. *(Kleiner Stokes) Sei* $Q = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N) \subset \mathbb{R}^N$ *offen und nichtleer. Sei* $Q' := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_{n-1}, b_{n-1})$ *und* $h : Q' \longrightarrow (a_N, b_N)$ *stetig diffbar und*

$$\Omega := \{x', x_N) \in Q' \times (a_N, b_N) = Q : x_N > h(x')\},$$

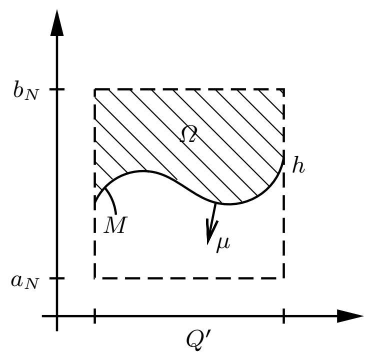
$M :=$ *Graph von* $h$ *und* $\mu$ *die aussere Normale an* $M$ *d.h.*

$$\mu(x) := \frac{1}{\|(\nabla h(x'), -1)\|}(\nabla h(x'), -1).$$

*Sei* $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig diffbar mit kompaktem Traeger in* $Q$. *Dann gilt fuer jedes* $j = 1, \ldots, N$

$$\int_\Omega \partial_j f(x) dx = \int_M f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).$$

Geometrische Situation:




- $g = h - x_N = 0$ auf $M$, $< 0$ auf $\Omega$ , $> 0$ auf $\Omega^c$. Entsprechend der vorigen Proposition ist $\nabla g = (\nabla h, -1)$ die aussere Normale.
- Die Funktion $f$: $f$ mit Traeger in $Q$.

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Faelle fuer den Wert von $j$.

*Es ist* $j = N$. Wir rechnen unter Nutzen des Satzes von Fubini im ersten Schritt:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_N f(x) dx &= \int_{Q'} \int_{h(x')}^{b_N} \partial_N f(x', x_N) dx_N dx' \\
(HDI) &= \int_{Q'} (f(x', b_N) - f(x', h(x'))) dx' \\
(f \ kpt \ Traeger) &= -\int_{Q'} f(x', h(x')) dx' \\
&= \int_{Q'} f(x', h(x')) \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\
(Def \ \mu) &= \int_{Q'} f(x', h(x')) \mu_N(x) \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\
(Def. \ Oberflaechenintegral) &= \int_M f(x) \mu_N(x) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage in diesem Fall.

*Es ist $j < N$.* Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_j f(x)dx &= \int_{Q'}\int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y,t)dtdy\\
(!) \quad &= \int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y,t)dt\right)dy + \int_{Q'}(\partial_j h)(y) f(y,h(y))dy\\
\text{(Erster Term verschwindet !!)} \quad &= \int_{Q'}(\partial_j h)(y) f(y,h(y))dy\\
&= \int_{Q'} f(y,h(y)) \frac{\partial_j h(y)}{\sqrt{1+|\nabla h(y)|^2}}\sqrt{1+|\nabla h(y)|^2}dy\\
(Def\ \ \mu\ ) \quad &= \int_{Q'} f(y,h(y))\mu_j(y)\sqrt{1+|\nabla h(y)|^2}dy\\
(Def\ \ Oberflaechenintegral) \quad &= \int_M f(x)\mu_j(x)d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen.

Zu (!): Fuer Funktionen $F$ auf Teilmengen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{N-1}$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_{y_j}(y \mapsto F(h(y),y)) = (\partial_1 F)(h(y),y)\partial_j h(y) + (\partial_j F)(h(y),y).$$

Betrachtet man nun die Funktion $(s,y)\mapsto F(s,y) := \int_s^{b_N} f(y,t)dt$ also

$$F(h(y),y) = \int_{h(y)}^{b_N} f(y,t)dt,$$

so gilt

$$(\partial_1 F)(h(y),y) = -f(y,h(y))$$

und

$$(\partial_j F)(h(y),y) = \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y,t)dt.$$

Damit folgt (!). (Hier bezeichnen wir die Ableitung von $F$ nach der $j$-ten Koordinate mit $\partial_j$ und die 'totale' Ableitung nach $y_j$ mit $\partial_{y_j}$.)

Zu (!!): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y,t)dt\right)dy &= \int_{Q''}\int_{a_j}^{b_j} \partial_j\left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y'',y_j,t)dt\right)dy_j dy''\\
(HDI) \quad &= \int_{Q''}\left(\int_{h(y'',b_j)}^{b_N} f(y'',b_j,t)dt - \int_{h(y'',a_j)}^{b_N} f(y'',a_j,t)dt\right)dy''\\
(f\ \ kpt\ \ Traeger) \quad &= 0.
\end{aligned}$$

(Der letzte Schritt folgt, da $f$ kompakten Traeger hat, also $f(\cdot,a_j,\cdot) = f(\cdot,b_j,\cdot) = 0$ gilt.) □

*Notation.* Eine Funktion $f : U\cup\partial U \longrightarrow \mathbb{R}^k$ heisst stetig diffbar, wenn es eine offene Umgebung $W$ von $U\cup\partial U$ und eine stetig diffbare Fortsetzung von $f$ auf $W$ gibt.

THEOREM. *(Allgemeiner Satz von Stokes) Sei $U$ eine beschraenkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit glattem Rand $M$ und ausserer Normale $\mu$. Ist $f : U\cup\partial U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbare Funktion. Dann gilt fuer $j = 1,\ldots,N$*

$$\int_U \partial_j f(x)dx = \int_{\partial U} f(x)\mu_j(x)d\sigma(x).$$

*Sonderfall* $N = 1$. HDI (siehe Diskussion am Anfang des Kapitels).

*Beweis.* Es ist $\overline{U}$ abgeschlossen und beschraenkt, also kompakt. Fuer jedes $x \in \overline{U}$ waehlen wir nun einen offenen achsenparallelen Quader $Q_x$ mit (Zeichnung)

- $Q_x \cap M$ ist als Graph darstellbar, falls $x \in M$.
- $Q_x \cap M = \varnothing$, falls $x \notin M$.

Dann ist $Q_x$, $x \in \overline{U}$, eine offene Ueberdeckung des kompakten $\overline{U}$. Daher gibt es $x_1, \dots, x_n \in \overline{U}$ mit

$$\overline{U} \subset \bigcup_{k=1}^{n} Q_{x_k}.$$

Setze $Q_k := Q_{x_k}$ und waehle eine dazu untergeordnete Partition der Eins $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, d.h. $\operatorname{supp} \varphi_k \subset Q_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f dx &= \int_U \partial_j \left( \sum_{k=1}^{n} \varphi_k f \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_U \partial j(\varphi_k f) dx \\ (\operatorname{supp} \varphi_k \subset Q_k) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Summanden und zeigen

$$(*) \qquad \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx = \int_M \mu_j(x)(\varphi_k f) d\sigma(x)$$

fuer alle $k$.

*$Q_k \cap M = \varnothing$, d.h. $Q_k \subset U$.* Da $Q_k \subset U$, also $Q_k \cap U = Q_k$ und da $\varphi_k f$ in $Q_k$ getragen ist, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx &= \int_{Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx \\ (HDI) &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso folgt, da $\varphi_k = 0$ auf $M$, dass

$$\int_M (\varphi_k f) d\sigma(x) = 0.$$

Das zeigt $(*)$ in diesem Fall. (Bemerke, dass alle 'inneren Integrale' verschwinden).

*$Q_k \cap M \neq \varnothing$ d.h. $Q_k \cap M$ als Graph darstellbar.* Dann folgt aus dem 'kleinen Stokes' und $\operatorname{supp} \varphi_k \subset Q_k$ also

$$\int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx = \int_{M \cap Q_k} \mu_j(x)(\varphi_k f) d\sigma(x) = \int_M \mu_j(x) f \varphi_k(x) d\sigma(x).$$

Das zeigt $(*)$ auch in diesem Fall.

Aus $(*)$ und der obigen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_U \partial_j f dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{U\cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f)dx \\
(*) &= \sum_{k=1}^{n} \int_M \mu_j(x)(\varphi_k f)d\sigma(x) \\
(Part\ Eins) &= \int_M \mu_j(x) f d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Das beweist den Satz. □

*Bemerkung.* Auch wenn die Menge $U$ keinen glatten Rand hat, kann man unter Umstaenden den Satz von Stokes noch anwenden unter Zuhilfenahme von geeigneten Approximationen. *Zeichnung.* Glaetten eines Quadrates durch Abrunden der Ecken. Die Eckpunkte sind eine 'Nullmenge'.