Proposition:

Sei R ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf R.
Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folge in $E(X,R)$ zu $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$.
Dann gilt:

$$\boxed{\| f_n - f \|_1 \to 0, \quad n \to \infty}$$

Theorem: (Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1$)

Sei R ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf R. Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X,R,\mu)$ (d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ für $n,m \geq N_\varepsilon$). Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(X,R,\mu)$ mit

$$\boxed{\| f_n - f \|_1 \to 0, \quad n \to \infty}$$

Es ist f eindeutig bestimmt bis auf Nullmenge. Es hat (f_n) eine Teilfolge die μ-fast-gleichmäßig gegen f konvergiert

Proposition: (Unabhängigkeit des Integrals von Parameterdarstellung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ mit einer regulären, injektiven Parameterdarstellung (V, ψ) gegeben. Dann gilt für jede weitere injektive Parameterdarstellung (U, φ) von M

$$\boxed{\int_V f(\psi(x))\, G_\psi(x)\, d\lambda(x) = \int_U f(\varphi(y))\, G_\varphi(y)\, d\lambda(y)}$$

(für alle $f: M \to \mathbb{C}$ stetig mit kompaktem Träger)

Beweis: Sei $T := \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$. Dann ist T bijektiv und stetig diffbar (siehe unten) und es gilt $\psi \circ T = \varphi$.

$$\overset{(K.R.)}{\Longrightarrow} \quad D\varphi = D\psi \circ DT \quad \Rightarrow \quad (D\varphi)^T D\varphi = (D\psi \circ DT)^T D\psi \circ DT$$
$$= DT^T D\psi^T D\psi DT$$

$$\Longrightarrow \quad G_\varphi^2 = |\det DT|^2 \, G_\psi^2 \Rightarrow G_\varphi = \det DT \; G_\psi$$

$\Longrightarrow$ Aussage folgt aus Transformationsformel.

(Diffbarkeit von T: $V \subset \mathbb{R}^k$, ψ regulär
$\Longrightarrow D\psi$ hat Rang k
$\Longrightarrow$ o.E. letzten k-Zeilen sind lin. unabhängig
(durch Vertauschen wird dies ermöglicht)

Betrachte $G: V \times \mathbb{R}^{N-k} \to \mathbb{R}^N$, $G(x,y) = \psi(x,y) + \binom{y}{0}$
Dann ist G stetig diffbar (klar) und lokal invertierbar.

$\Longrightarrow G(x,0) = \psi(x) =: z \Rightarrow \psi^{-1}(z) = x = 1.$ Komp. von $G^{-1}(z)$
$\Longrightarrow T(u) = \psi^{-1}(\varphi(u)) = 1.$ Komp. von $G^{-1}(\varphi(u))$)

$\square$

Definition: (Oberflächenintegral)

Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben, sodass M das Bild einer regulären injektiven Parameterdarstellung ist und ist $f: M \to \mathbb{C}$ stetig mit kompaktem Träger, so definiert man

$$\boxed{\int_M f(p)\, d\sigma_M(p) := \int_M f\, d\sigma = \int_U f(\varphi(x))\, G_\varphi(x)\, d\lambda(x)}$$

wobei (U, φ) eine beliebige injektive Parameterdarstellung von M ist.
(Bemerkung: Wohldefiniert nach voriger Proposition)

Definition: Sei M wie in voriger Definition. Dann ist Volumen von M definiert als

$$\boxed{\int_M 1\, d\sigma = \int_U G_\varphi(x)\, d\lambda(x)}$$

Bemerkung: eine Dimension: auch Länge
zwei Dimensionen: auch Fläche

Definition: Seien $a_1, \dots, a_{N-1}$ Vektoren im $\mathbb{R}^N$. Sei $A^{(k)}$ die Matrix, die aus $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ durch Streichen der k-ten Zeile entsteht. Dann heißt

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1} =: (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$$

mit $\alpha_j = (-1)^{j-1} \det(A^{(j)})$ das äußere Produkt von $a_1, \dots, a_{N-1}$.

Lemma:

Seien $a_1, \dots, a_{N-1}$ Vektoren im $\mathbb{R}^N$, $v := a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt $v \neq 0$ genau dann, wenn die Vektoren linear unabhängig sind.
Weiterhin gilt:

a) $\langle b, v \rangle = \det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ für alle $b \in \mathbb{R}^N$

b) (I) $v \perp a_j$ für alle $j = 1, \dots, N-1$ (Richtung von v)

(II) $\|v\|^2 = \det((a_1, \dots, a_{N-1})^T (a_1, \dots, a_{N-1}))$ (Länge v)

(III) $\det(v, a_1, \dots, a_{N-1}) \geq 0$ (Vorzeichen)

c) Sowohl durch a) als auch durch b) ist v eindeutig.

Beweis: a) Folgt aus Entwicklung nach erster Spalte von $(b, a_1, \dots, a_{N-1})$

b) (I) $\langle a_j, v \rangle \overset{(a)}{=} \det(a_j, a_1, \dots, a_j, \dots, a_{N-1}) = 0$

(III) $\det(v, a_1, \dots) = \langle v, v \rangle \geq 0$

(II) o.E. $v = 0$

$$(v, a_1, \dots)^T \cdot (v, a_1, \dots) = \left(\begin{array}{c|c} \langle v, v \rangle & 0 \\ \hline 0 & A^T A \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \det((v, a_1, \dots)^T (v, a_1, \dots)) = \langle v, v \rangle \cdot \det A^T A$$
$$= |\det(v, a_1, \dots)|^2 = |\langle v, v \rangle|^2$$

$$\Rightarrow \|v\|^2 = \det A^T A$$

c) Bestimmt durch a): klar
Bestimmt durch b): Fall linear abh. $\Rightarrow v = 0$
Fall lin. unabh. $\Rightarrow$ klar

$\square$

Definition: (Tangentialraum bezüglich Parameterdarstellung)

Ist (φ, U) eine Parameterdarstellung von $M = \varphi(U)$, so bezeichnen wir das Bild von $D\varphi(x)$ als den Tangentialraum von M in x bezüglich φ. Das Komplement dazu wird der Normalraum von M in x bezüglich φ genannt

Folgerung: (Normale an eine Hyperfläche)

Sei $\varphi: U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine (reguläre) Parameterdarstellung von $\varphi(U)$. Sei $\nu := \partial_1 \varphi \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} \varphi$. Dann gilt:

- $\nu \perp \partial_j \varphi$ (das heißt ν normal zur Fläche)
- $\|\nu\| = G_\varphi$ (Cramersche Determinante)

Beweis: folgt aus vorigem Lemma $\square$

Beispiele: (Graphen)

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F: U \to \mathbb{R}^N$, $F(u) = (u, f(u))$ die zugehörige Parameterdarstellung. Dann gilt für $\nu = \partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F$ die Formel

$$\boxed{\begin{aligned} \nu &= (-1)^N (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_{N-1} f, -1) \\ G_F &= \sqrt{1 + (\nabla f)^2} = \|\nu\| \end{aligned}}$$

Beweis:
$$\begin{aligned} \nu_j &= (-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)} && \text{Entwickeln nach } j\text{-ter Spalte} \\ &= (-1)^{j+1} (-1)^{j+N-1} \partial_j f \\ &= (-1)^N \partial_j f && \text{für } j = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_N &= (-1)^{N+1} \det(DF)^{(N)} \\ &= (-1)^N \cdot (-1) \end{aligned}$$
$\square$

Beispiel: (Nullstellenmengen)

Sei $g: V \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\partial_N g(x) \neq 0$ für alle $x \in V$. Sei M = Nullstellenmenge von g. Dann kann man (zumindest lokal) M angeben als Graph einer Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ (d.h. $M = G(f) = \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$). Insbesonder gilt dann also $g(u, f(u)) = 0$ für alle $u \in U$. Für zugehörige Parameterdarstellung (F, U) von M mit $F: U \to M$, $F(u) = (u, f(u))$ gilt dann:

$$\boxed{\nu(F(u)) = \nu = \partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F = \frac{(-1)^{N+1}}{\partial_N g(F(u))} \cdot \nabla g(F(u))}$$

Insbesondere gilt dann für Cramersche Determinante

$$\boxed{G_F = \frac{\|\nabla g\|}{|\partial_N g|}}$$

Beweis: Es gilt $0 = g(u, f(u)) \overset{(KR)}{\Longrightarrow} 0 = \nabla_u g + \partial_N g \, \nabla_u f$

$\Rightarrow \nabla f = \nabla_u f = -\frac{1}{\partial_N g} \nabla_u g \overset{(\text{vor Bsp})}{\Longrightarrow} \nu = (-1)^N (\nabla f, -1)$

$= (-1)^N \cdot \left(\frac{-\nabla_u g}{\partial_N g}, -1 \right) = \frac{(-1)^{N+1}}{\partial_N g} \left(\nabla_u g, \partial_N g \right)$

$= \frac{(-1)^{N+1}}{\partial_N g} \nabla g$ $\square$

Wir betrachten nun die Mengen, die lediglich lokal durch Parametrisierung gegeben sind.

Lemma: Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $p \in M$, $k \in \mathbb{N}$. Es sind äquivalent:

(i) Es existiert eine offene Umgebung W von p in $\mathbb{R}^N$ und ein reguläres $g: W \to \mathbb{R}^{N-k}$ mit $M \cap W = N(g)$

(ii) Es existiert eine offene Umgebung W von p und eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^k$ und $f: U \to \mathbb{R}^{N-k}$ und eine Permutation $P: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit $M \cap W = P\, G(f)$

(iii) Es existiert eine offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und ein stetig diffbares, reguläres, bijektives $\varphi: U \to W \cap M$ dessen Inverse wieder stetig ist.

Beweis: Analysis II $\square$

Definition: (Untermannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^N$ heißt Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ der Dimension k, wenn sie in jedem $p \in U$ die Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt.

Bemerkung:
- Fall $k = N \Rightarrow$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^N$
- Fall $k = N-1 \Rightarrow$ Untermannigfaltigkeiten werden auch als Hyperflächen bezeichnet
- Unter mflt. sind lokal Schnitte von Hyperflächen, wegen

$$N(g) = \bigcap_{j=1}^{N-k} N(g_j)$$

Beispiele:
- (affine) Unterräume $M = v + \mathrm{Lin}\{b_1, \dots, b_k\}$ mit $v \in \mathbb{R}^N$ und $b_1, \dots, b_k$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^N$

$$\varphi: \mathbb{R}^k \to M, \quad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} x_j b_j + v$$

- Einheitskreislinie $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$; $g(x,y) = x^2 + y^2$

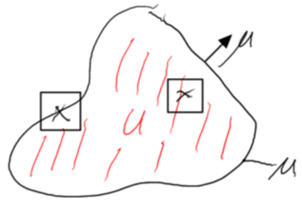
- Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x|^2 = 1\}$
- Torus
- $Gl = \{n \times n$-Matrizen mit Determinante $\neq 0\}$

Notation: Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f: U \cup \partial U \to \mathbb{R}^k$. f heißt stetig diffbar in einer Umgebung von $U \cup \partial U$, wenn es eine offene Menge W und $U \cup \partial U \subset W$ und eine stetig diffbare Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf W gibt.

Theorem: (Satz von Stokes)

Sei U eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ mit glattem Rand M $(= \partial U)$. Sei $f: U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar (auf einer Umgebung von $U \cup \partial U$). Dann gilt für $j = 1, \dots, N$:

$$\boxed{\int_U \partial_j f(x)\, dx = \int_M f \cdot \mu_j \, d\sigma}$$



wobei μ_j die j-te Komponente der äußeren Normalen μ an U ist.

Beweis: Es ist $\bar{U} = U \cup \partial U$ abgeschlossen und beschränkt. $\Rightarrow$ $\bar{U}$ ist kompakt. Für jedes $x \in \bar{U}$ wählen wir nun einen achsenparallelen Quader (offen) Q_x mit $x \in Q_x$ und:

·) $Q_x \cap M = \emptyset$ falls $x \notin M$

·) $Q_x \cap M$ ist als Graph darstellbar sonst

Dann bilden die Q_x eine offene Überdeckung von $\bar{U}$.

$\overset{(\bar{U} \text{ komp})}{\Longrightarrow}$ es gibt $x_1, \dots, x_n \in \bar{U}$ mit $\bar{U} \subset \bigcup_{j=1}^{n} Q_{x_j}$.

Setze $Q_j := Q_{x_j}$. Wähle zu den Q_j untergeordnete Partition $\varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\Longrightarrow \int_U \partial_j f \, dx = \int_U \partial_j (1 \cdot f)\, dx = \int_U \partial_j \Big[\sum_{k=1}^{n} (\varphi_k f) \Big] dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_U \partial_j (\varphi_k f)\, dx \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{M \cap Q_k} \varphi_k f \cdot \mu_j \, d\sigma$$

$$\overset{(\text{supp } \varphi_k \subset Q_k)}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_M \varphi_k \cdot f \, \mu_j \, d\sigma = \int_M \Big(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k \Big) f \cdot \mu_j \, d\sigma$$

$$= \int_M f \cdot \mu_j \, d\sigma$$

□

Die klassischen Integralsätze

Grundlegende Größen der Vektoranalysis:

·) $\operatorname{grad} f = \nabla f : U \to \mathbb{R}^N$ einer diffbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}$

·) Ist $F : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ein stetig diffbares Vektorfeld, so bezeichnet man die Funktion:

$$\boxed{\operatorname{div} F = \nabla \cdot F : U \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^N \partial_j F_j(x)}$$

als Divergenz von F.

·) Für ein zweimal stetig diffbares $f : U \to \mathbb{R}$ definiert man den Laplace von f durch:

$$\boxed{\Delta f : U \to \mathbb{R}, \quad \Delta f(x) = \sum_{j=1}^N \partial_j^2 f(x)}$$

Offenbar gilt: $\boxed{\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)}$

·) Für $N=2$ und $N=3$ führen wir noch die Rotation von $F : U \to \mathbb{R}^N$ diffbar ein:

$$\boxed{\begin{array}{ll} N=2: & \operatorname{rot} F = \nabla \times F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \nabla \times F(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x) \\ N=3: & \operatorname{rot} F = \nabla \times F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \nabla \times F(x) = \sum_{i,j,k=1}^3 e_i \, \varepsilon_{ijk} \, \partial_j F_k \end{array}}$$

Für $N=3$ gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \times (\nabla f) = 0 & \text{für alle } f : U \to \mathbb{R} \text{ 2x stetig diffbar} \\ \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 & \text{für alle } F : U \to \mathbb{R}^3 \text{ 2x stetig diffbar} \end{array}}$$

Definition: (Fluss)

Ist M eine Hyperfläche und μ eine normierte stetige Normale $\mu : M \to \mathbb{R}^N$, so nennt man mit:

$$\boxed{\int_\mu \langle F, \mu \rangle \, do(x) \qquad \text{den Fluss von } F \text{ durch } M \text{ (in Richtung } \mu)}$$

falls F ein stetig diffbares Vektorfeld auf einer Umgebung von M ist.

Die Sätze von Gauß und Green

Theorem: (Satz von Gauß)

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit glattem Rand und äußerer Normale μ. Sei $F: U \cup \partial U \to \mathbb{R}^N$ stetig diffbar (auf Umgebung von $U \cup \partial U$) Dann gilt:

$$\boxed{\int_U \nabla \cdot F(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \mu(x) \rangle \, d\sigma(x)}$$

Beweis: – folgt durch Summieren aus dem Satz von Stokes

$$\int_U \nabla \cdot F(x)\, dx = \int_U \sum_{j=1}^N \partial_j F_j(x)\, dx = \sum_{j=1}^N \int_U \partial_j F_j(x)\, dx$$

$$\overset{(\text{Stokes})}{=} \sum_{j=1}^N \int_\mu F_j \mu_j \, d\sigma = \int_{\partial U} \langle F, \mu \rangle \, d\sigma \qquad \square$$

Bemerkung: (Rechenhilfe)

Ist ∂U durch eine Funktion $\Psi: V \to \partial U$ parametrisiert, so gilt nach einer oben diskutierten Folgerung zur Normalen mit $\nu := \partial_1 \Psi \wedge \dots \wedge \partial_N \Psi$ dann

$$\mu = \frac{1}{|\nu|} \nu \qquad \text{und} \qquad G_\varphi = |\nu|$$

$$\Longrightarrow \int_{\partial U} \langle F, \mu \rangle \, d\sigma = \int_V \langle F(\Psi(y)), \nu(\Psi(y)) \rangle \, dy$$

Theorem: (Greensche Formel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen mit glattem Rand und äußerer Normale μ. Seien $f, g: U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. (auf Umgebungen von $U \cup \partial U$).

$$\boxed{\int_U \left(f(x) \Delta g(x) - \Delta f(x) g(x) \right) dx = \int_{\partial U} \left(f(x) \langle \nabla g(x), \mu \rangle - g(x) \langle \nabla f(x), \mu \rangle \right) d\sigma}$$

Bemerkung: Es ist $\langle \nabla f(x), \mu \rangle$ gerade die Richtungsableitung von f in Richtung $\mu(x)$. Diese wird auch oft als Normalenableitung bezeichnet und $\partial_\mu f$ genannt.

$$\Longrightarrow \boxed{\int_U \left(f(x) \Delta g(x) - \Delta f(x) g(x) \right) dx = \int_{\partial U} \left(f(x)\, \partial_\mu g(x) - \partial_\mu f(x)\, g(x) \right) d\sigma}$$

Beweis: $\nabla \cdot (f \cdot \nabla g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g$

$$\nabla \cdot (g \cdot \nabla f) = \langle \nabla g, \nabla f \rangle + g \Delta f$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \cdot (f \cdot \nabla g) - \nabla \cdot (g \cdot \nabla f) = f \Delta g - g \Delta f$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\int_U [\nabla \cdot (f \cdot \nabla g) - \nabla \cdot (g \cdot \nabla f)]\, dx}_{\underset{(\text{Gauß})}{=} \int_{\partial U} [f \langle \nabla g, \mu \rangle - g \langle \nabla f, \mu \rangle]\, d\sigma} = \int_U [f \Delta g - g \Delta f]\, dx$$

□

Folgerung: Sei U wie im vorigen Satz. Sei $\varphi : U \cup \partial U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann gilt:

$$\boxed{\int_U \Delta \varphi \, dx = \int_{\partial U} \langle \nabla \varphi, \mu \rangle \, d\sigma}$$

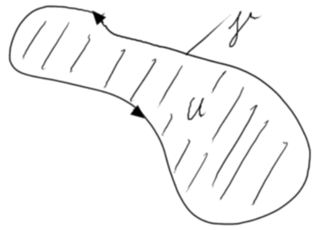
Beweis: Anwendung Greensche Formel mit $f = 1$, $g = \varphi$ □

Der Satz von Stokes in der Ebene

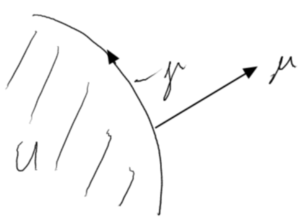
Theorem:

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M, der eine reguläre injektive Parameterdarstellung durch eine geschlossene stetig diffbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ besitzt, sodass U links von γ liegt. Ist $F : U \cup \partial U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig diffbares Vektorfeld, so gilt:

$$\boxed{\int_U \nabla \times F \, dx = \int_\gamma F \, d\gamma}$$



Beweis: Vorüberlegung (Beziehung zwischen γ und μ)



Betrachte $(-\mu_2, \mu_1)$. $\Longrightarrow$ steht senkrecht auf μ

$\underset{\text{von } \gamma)}{\overset{(U \text{ links}}{\Longrightarrow}}$ Es zeigt $(-\mu_2, \mu_1)$ in Richtung von γ'

$\Longrightarrow \quad (-\mu_2, \mu_1) = \frac{1}{|\gamma'|} \gamma'$ (μ ist normiert)

$$\int_U \nabla \times F \, dx = \int_U (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\, dx \overset{(\text{Gauß})}{=} \int_{\partial U} (F_2 \mu_1 - F_1 \mu_2)\, d\sigma$$

$$= \int_{\partial U} \langle (F_1, F_2), (-\mu_2, \mu_1) \rangle \, d\sigma = \int_a^b \langle (F_1, F_2) \circ \gamma(t), (-\mu_2, \mu_1) \circ \gamma(t) \rangle |\gamma'(t)| \, dt$$

$$= \int_a^b \langle F \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \, dt \overset{(\text{Def})}{=} \int_\gamma F \, d\gamma$$

□

Folgerung: Seien U und γ wie im Satz. Dann gilt für die Fläche $F(U)$ von U

$$\boxed{F(U) = \frac{1}{2}\int_\gamma k \, d\gamma \qquad \text{mit} \quad k(x,y) = (-y, x)}$$

Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M, parametrisiert durch eine geschlossene stetig diffbare Kurve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, sodass U links von γ liegt.
Sei $\varphi: U \cup M \to \mathbb{R}^3$ eine stetig diffbare reguläre Parametrisierung $\varphi(x) = (x, h(x))$.
Das Bild von φ werde mit H bezeichnet. Dann gilt mit $\rho = \varphi \circ \gamma$ und $\mu = \frac{\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi}{|\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi|}$ für jede stetig diffbare $F: H \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\int_H \langle \nabla \times F, \mu \rangle \, d\sigma = \int_\rho F \, d\rho}$$

Beweis: Folgt aus dem Satz im $\mathbb{R}^2$ nach langer Rechnung. $\square$

Fourieranalysis

Fouriertransformation im $\mathbb{R}^N$

Überblick: zu $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ geeignet definieren wir $Ff: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit

$$\hat{f} := Ff(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y)\, dy \qquad \text{als Fouriertransformation von } f$$

Die Inverse ist dann gegeben durch

$$F^{-1}g(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} g(y)\, dy \qquad (F^{-1}Ff = f)$$

Technisch ist Fouriertransformation von großer Bedeutung bei der Analyse partieller DGLs, da sie Differentiation und Multiplikation vertauscht.

Erinnerung: Ein Multiindex der Dimension N ist ein $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$.

Längen von α: $\quad |\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j$

für $x \in \mathbb{R}^N$: $\quad x^\alpha := \Sigma_{j=1}^N x_j^{\alpha_j}$

für $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$: $\quad M_\alpha f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $M_\alpha f(x) = x^\alpha f(x)$
(Operator der Multiplikation mit x^α)

für genügend oft diffbare $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$D^0 f := f$$

$$D^{\alpha+e_j} f := D_j D^\alpha f \quad \text{mit} \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dann: $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N} f$

Der Schwartzsche Raum

Der Schwartzsche Raum ist die Menge aller $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

-) f ist beliebig oft diffbar (Ref und Imf sind beliebig oft diffbar)
-) für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ existiert ein $C_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta}(f) \geq 0$ mit

$$|x^\alpha| |x^\beta| |D^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N$$

$$\left(\Longleftrightarrow \text{ für alle } p \geq 1,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N: \ \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^p |D^\alpha f(x)| < \infty \right)$$

Er wird mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet. Offenbar gilt:

-) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ist ein Vektorraum
-) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ invariant unter D^α für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$
  (d.h. $f \in \mathcal{S} \Rightarrow D^\alpha f \in \mathcal{S}$)
-) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ invariant unter M_α für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$
-) $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Noch etwas zur Maßtheorie:

Proposition: X Menge, R Mengenring auf X, μ Prämaß

Sei $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ mit $g \geq 0$ gegeben. Ist $f: X \to \mathbb{C}$ messbar mit $0 \leq |f| \leq g$, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und $\|g\|_1 \geq \|f\|_1$

Beweis: Sei (g_n) eine Folge von Elementarfunktionen mit $g_n \xrightarrow{\mu\text{.f.ü}} g$ und (g_n) ist Cauchy-Folge bezüglich $\|g\|_1$.

$\left(\Rightarrow g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g \right)$ Sei $X' = \bigcup\limits_{\substack{1_A \text{ tritt} \\ \text{in einem} \\ g_n \text{ auf}}} A.$

$\Longrightarrow$ X ist abzählbare Vereinigung von Mengen aus R und es verschwindet g und damit auch f auf $X \setminus X'$

o.E. $X \in R$

$\Longrightarrow$ es gibt Folge (f_n) mit $f_n \xrightarrow{\mu\text{-f.ü}} f$

o.E. $f > 0$, $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Sei $h_n := \min\{f_n, g_n\}$ $\Longrightarrow$ $h_n \to \min\{f, g\} = f$ $(|f| < g)$
$0 \leq h_n \leq g_n$

$\overset{\text{(Fatou)}}{\Longrightarrow}$ $f \in \mathcal{L}^1$ mit $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ $\square$

Beispiel: $X = \mathbb{R}$ und $R =$ Figuren auf $\mathbb{R}$ und λ Lebesgueprämaß

Dann ist jedes stetige $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ messbar.

Proposition:

Für jedes $f \in \mathcal{S}$ existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ eine Funktion $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) \, dy \qquad \text{welche beschränkt und stetig ist}}$$

Beweis: Es gilt für $x \in \mathbb{R}^N$ (fest)

$$|e^{ixy} f(y)| = \underbrace{|e^{ixy}|}_{=1} \cdot (1+|y|)^{N+1} \frac{|f(y)|}{(1+|y|)^{N+1}} \leq \frac{C}{(1+|y|)^{N+1}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$$

$\Longrightarrow$ $e^{ixy} f(y)$ ist messbar (da stetig) und beschränkt durch $\mathcal{L}^1$-Funktion
$\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ $\Longrightarrow$ g existiert

Weiterhin $|g(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{ixy} f(y)| \, dy \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{C}{(1+|y|)^{N+1}} \, dy < \infty$

$\Longrightarrow$ g ist beschränkt

Zur Stetigkeit:

$$|g(x') - g(x)| \leq (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ix'y} - e^{-ixy}| \, f(y) \, (1+|y|)^{N+1} \cdot \frac{1}{(1+|y|)^{N+1}} \, dy$$

$$\leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|e^{-ix'y} - e^{-ixy}|}{(1+|y|)^{N+1}} dy = 2\tilde{C} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} \frac{1}{(1+|y|)^{N+1}} dy}_{\to 0,\ R \to \infty}$$

$$+ \tilde{C} \underbrace{\int_{B_R(0)} \frac{|\exp(-ix'y) - \exp(ixy)|}{(1+|y|)^{N+1}} dy}_{\to 0\text{, gleichmäßig auf } B_R(0) \text{ für } R \text{ fest und } x' \to x}$$

$$\Longrightarrow \quad \to 0,\ x' \to x$$

$\square$

Definition: (Fouriertransformation)

Für $f \in \mathcal{S}$ ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ von f gegeben durch:

$$\mathcal{F}f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}, \quad \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y)\, dy$$

Notation: $\hat{f} := \mathcal{F}f$ für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Lemma: (Grundlegende Eigenschaften von $\mathcal{F}f$)

Es gilt $\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und $D^\alpha \mathcal{F}f = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}(M_\alpha f)$
und $M_\alpha \mathcal{F}f = \mathcal{F}(D^\alpha f)$ für alle $f \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

Beweis: Sei M_j Operator der Multiplikation mit x_j und e_j der j.-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^N$. Mit f gehört auch $M_j f$ zu $\mathcal{S}$ (siehe oben).

$$\mathcal{F}f(x+he_j) - \mathcal{F}f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-ixy) \underbrace{(\exp(-ihy_j) - 1)}_{= \int_0^h -iy_j e^{-iy_j t} dt} f(y)\, dy$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^h \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x+te_j)y} y_j f(y)\, dy}_{= \mathcal{F}(M_j f)(x+te_j)} dt = -i \int_0^h \mathcal{F}(M_j f)(x+te_j)\, dt$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{F}f(x+he_j) - \mathcal{F}f(x)}{h} = \frac{-i}{h} \int_0^h \mathcal{F}(M_j f)(x+te_j)\, dt$$

$$\xrightarrow{\text{(HDI)}} -i\, \mathcal{F}(M_j f)(x) \quad \Longrightarrow \quad D_j \mathcal{F}f(x) = -\mathcal{F}(M_j f)(x)$$

$$\overset{\text{(Induktion)}}{\Longrightarrow} D^\alpha \mathcal{F}f = (-1)^{|\alpha|} \mathcal{F}(M_\alpha f)$$

$$M_\beta D^\alpha Ff \overset{\text{(Formel)}}{=} x^\beta (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} y^\alpha f(y)\,dy$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int (D_y^\beta e^{-ixy}) y^\alpha f(y)\,dy$$

$$\overset{\text{(part. Int)}}{=} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} \underbrace{D^\beta(y^\alpha f(y))}_{\in \mathcal{S}}\,dy$$

$$= (-1)^{|\alpha|} F(D^\beta M_\alpha f)(x)$$

$\Rightarrow$ $\beta = 0$ 1. Formel

$\alpha = 0$ 2. Formel

zu $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$: Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben $\Rightarrow D^\beta M_\alpha f \in \mathcal{S}$

$\overset{\text{(Prop)}}{\Rightarrow}$ $F(D^\beta M_\alpha f)$ beschränkt und stetig

$\Rightarrow$ $M_\beta D^\alpha Ff$ beschränkt für alle Multiindize α, β

$\Rightarrow$ $Ff \in \mathcal{S}$ $\square$

<u>Proposition:</u>

Sei $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) = \prod_{j=1}^N \exp(-\frac{1}{2}x_j^2)$. Dann gehört φ zu $\mathcal{S}$ und es gilt $F\varphi = \varphi$.

Beweis: Offenbar ist φ beliebig oft diffbar und es gilt $D^\alpha\varphi = P_\alpha \varphi$ mit P_α als Polynom.

$\Rightarrow$ $M_\beta D^\alpha \varphi = M_\beta P_\alpha \varphi$ beschränkt $\Rightarrow \varphi \in \mathcal{S}$

Nun $F\varphi = \varphi$ (es reicht $N=1$ wegen Produktstruktur)

$\Rightarrow$ Betrachte also $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}x^2)$

$\Rightarrow$ φ löst offenbar Anfangswertproblem: $\varphi'(x) + x\,\varphi(x) = 0$, $\varphi(0) = 1$

Betrachte nun $\psi := F\varphi$. Dann gilt nach vorigem Lemma:

$$\psi' + x\psi = iD\psi + M_x\psi = iF(\underbrace{M_x\varphi + iD\varphi}_{=0}) = iF(0) = 0$$

Weiterhin $\psi(0) = F\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\cdot 0\cdot y} \varphi(y)\,dy$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = 1 \Rightarrow \psi \text{ löst auch AWP}$$

$\overset{\text{(Eindeutigkeitssatz)}}{\Longrightarrow} \quad \varphi = \psi$ $\square$

Zum Eindeutigkeitssatz: Sei ϱ irgendeine Lösung von: $\varrho' + x\varrho = 0$, $\varrho(0) = 1$

$$\overset{\text{(in Umg. von 0)}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\varrho'}{\varrho} = -x, \quad \varrho(0) = 1$$

$$\overset{\text{(Integr.)}}{\Longrightarrow} \quad \ln \varrho = -\frac{1}{2}x^2 + C, \quad \varrho(0) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \varrho = \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)\exp(C), \quad \varrho(0) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \varrho(x) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

$\square$

Theorem: ($F: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist bijektiv mit bekannter Inverser)

Die Fouriertransformation $F: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist bijektiv mit $F^{-1}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$F^{-1}f(x) = Ff(-x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{+ixy} f(y)\, dy$$

Insbesondere gilt dann $F^2 f(x) = f(-x)$, $F^4 f(x) = f(x)$

Beweis: Zunächst 3 Hilfsformeln:

Formel A: $$\int e^{ixy} g(y)\, Ff(y)\, dy = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{ixy} g(y) \int e^{-iyz} f(z)\, dz\, dy$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(z) \int e^{-i(z-x)y} g(y)\, dy\, dz$$

$$= \int Fg(z)\, f(z+x)\, dz$$

Formel B: Mit $g_\varepsilon(x) = g(\varepsilon x)$ für $\varepsilon > 0$ gilt:

$$(Fg_\varepsilon)(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-ixy} g_\varepsilon(y)\, dy$$

$$= \varepsilon^{-N} (Fg)\left(\tfrac{1}{\varepsilon} x\right)$$

Formel C: $$\int e^{ixy} g(\varepsilon y)\, Ff(y)\, dy \overset{(A)}{=} \int F(g_\varepsilon)(z)\, f(z+x)\, dz$$

$$\overset{(B)}{=} \varepsilon^{-N} \int (Fg)\left(\tfrac{z}{\varepsilon}\right) f(z+x)\, dz$$

$$= \int Fg(y)\, f(\varepsilon y + x)\, dy$$

Anwenden mit $f=f$ und $g=\varphi$ $(\mathcal{F}\varphi=\varphi)$ liefert:

$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int e^{ixy}\,\mathcal{F}f(y)\,dy = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int e^{ixy}\,\varphi(0)\,(\mathcal{F}f)(y)\,dy$$

$$\overset{(**)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int e^{ixy}\,\varphi(\varepsilon y)\,\mathcal{F}f(y)\,dy$$

$$\overset{(c)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int (\mathcal{F}\varphi)(z)\,f(\varepsilon z+x)\,dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int \varphi(z)\,f(\varepsilon z+x)\,dz$$

$$\overset{(*)}{=} f(x)\,(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int \varphi(z)\,dz = f(x)$$

zu $(*)$ und $(**)$: Teile $\int_{\mathbb{R}^N}$ in $\int_{B_R}$ und $\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}$. Nutze dann gleichm. Konvergenz auf $\int_{B_R}$

$$\Rightarrow f(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x) \Rightarrow f(-x) = \mathcal{F}^2 f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^4 f(x) = f(x) \Rightarrow \mathcal{F}^4 = I \Rightarrow \mathcal{F} \text{ invertierbar und } \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$$

$\square$

Anwendungen: $\boxed{\text{Es gilt } -\Delta = \mathcal{F}^{-1} M_{|x|^2}\mathcal{F} \text{ auf } \mathcal{S}. \Rightarrow -\Delta f = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^2\,\mathcal{F}f)}$

Beweis: Formeln aus vorigem Lemma liefern:

$$\mathcal{F}(-\Delta f) = |\cdot|^2\mathcal{F}f \overset{(\text{inv.})}{\Longrightarrow} -\Delta f = \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^2\mathcal{F}f)$$

Behauptung: für jedes $g\in\mathcal{S}$ hat die Gleichung $(-\Delta+1)f=g$ genau eine Lösung f in $\mathcal{S}$. Diese ist gegeben durch:

$$\boxed{f = \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{1+|\cdot|^2}\mathcal{F}g}$$

Beweis: Es ist $(-\Delta+1)f=g$ äquivalent zu

$(M_{|\cdot|^2}+1)\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ und damit zu $\mathcal{F}f = \frac{1}{1+|\cdot|^2}\mathcal{F}g$

Mit g gehört auch $\mathcal{F}g$ zu $\mathcal{S}$.

$$\Rightarrow f = \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{1+|\cdot|^2}\mathcal{F}g$$

$\square$

Bemerkung: Entsprechendes gilt, wenn 1 mit $\alpha > 0$ ersetzt wird.

Beispiel: Hat $-\Delta f = g$ eine Lösung f aus $\mathcal{S}$, dann ist diese gegeben durch

$$f = F^{-1}\left(\frac{1}{|\cdot|^2} Fg \right)$$

Bemerkung: Es kann auch mehrere Lösungen geben, welche nicht in $\mathcal{S}$ liegen.

Proposition:

Für $f \in \mathcal{S}$ und $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt, existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ das Integral

$$\boxed{g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, g(x-y)\, dy = (f * g)(x)}$$

Beweis: Existenz: es ist $y \mapsto f(y) g(x-y)$ messbar als Produkt messbarer Funktionen.

Es gilt: $|f(y) g(x-y)| \leq \|g\|_\infty \dfrac{C}{1+|y|^{N+1}}$

$\Longrightarrow y \mapsto f(y) g(x-y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$

Gleichheit der Integrale: Substitutionsregel (Verschieben und Spiegeln) $\square$

Bemerkung: ausreichende Bedingung: g polynomiell wachsend

Notation: $\boxed{g * f \text{ heißt Faltung von } g \text{ und } f}$

Proposition: (Glätten durch Falten)

Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ messbar beschränkt. Dann gilt:

a) Es ist $f * g$ beliebig oft diffbar mit $D^\alpha (f*g) = (D^\alpha f) * g$

b) Fällt g schneller als jedes Polynom, so fällt auch $f*g$ schneller als jedes Polynom.

c) Haben f und g einen kompakten Träger, so hat auch $f*g$ einen kompakten Träger.

Beweis: a) induktiv nach Länge von α

$$f*g(x+he_j) - f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \underbrace{\left[f(x+he_j - y) - f(x-y) \right]}_{\overset{(HDI)}{=} \int_0^h \partial_j f(x+se_j - y)\, ds} dy$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x+se_j-y)\, g(y)\, dy\, ds$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h}\Big(f*g(x+he_j) - f*g(x)\Big) = \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x+se_j-y)\, g(y)\, dy\, ds$$

$$\text{(HDI)} \xrightarrow{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x-y)\, g(y)\, dy = \partial_j f * g\ (x)$$

noch zu zeigen: $\int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x+se_j-y)\, g(y)\, dy$ stetig (sonst gilt HDI nicht)

– folgt nach üblichem Schluss mit Integralaufteilung in Kugel $B_R(0)$ und $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$

b) Offenbar gilt: $(1+|x+y|^2) \leq 2(1+|x|^2)(1+|y|^2)$

$$\Longrightarrow (1+|x|^2)^\mu\, |f*g(x)| = \Big|\int (1+|x|^2)^\mu f(x-y)\, g(y)\, dy\Big|$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|x-y+y|)^\mu\, |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy$$

$$\leq 2^\mu \int (1+|x-y|^2)^\mu\, |f(x-y)|\, \underbrace{(1+|y|^2)^\mu\, |g(y)|}_{\leq \frac{c}{1+|y|^{N+1}}}\, dy$$

Diese ist wegen $f \in \mathcal{S}$ beschränkt.

c) f getragen in K kompakt + g getragen in L kompakt

$\Longrightarrow$ $f*g$ getragen in $K+L$ kompakt $\square$

Folgerung: $f, g \in \mathcal{S} \Longrightarrow f*g \in \mathcal{S}$

Bemerkung: Es ist auch C_c^∞ abgeschlossen unter Faltung.

Anwendung: Ist $f \in \mathcal{S}$ gegeben und $u \in \mathcal{S}$ eine Lösung von $(-\Delta+\alpha)u = f$, so erfüllt $w = u * \rho$ für jedes beschränkte messbare ρ die Gleichung

$$(-\Delta+\alpha)\, w = f * \rho$$

Beweis: $(-\Delta+\alpha)\, w = (-\Delta+\alpha)(u*\rho) \overset{\text{(Prop)}}{=} f*\rho$ $\square$

Lemma:

Sei $f, g \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

a) es gehört $f * g$ zu $\mathcal{S}$ und es gilt: $F(g*f) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} Fg \cdot Ff$

sowie: $F^{-1}(g*f) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} F^{-1}g \cdot Ff$

b) es gehört $f \cdot g$ zu $\mathcal{S}$ und es gilt:

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} F(gf) = Fg * Ff$$

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} F^{-1}(gf) = F^{-1}g * F^{-1}f$$

Beweis: es reicht a) zu zeigen (b folgt da F bijektiv)

$$F(g*f)(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} g*f(y)\, e^{-ixy}\, dy$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}^N} g(y-z) f(z)\, dz\, dy$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{e^{-ix(y-z)} g(y-z)}_{y-z \text{ ersetzen } = (2\pi)^{\frac{N}{2}} Fg(x)}\, e^{-ixz} f(z)\, dy\, dz$$

$$= (2\pi)^{\frac{N}{2}} Ff(x) \cdot Fg(x)$$

□

Bemerkung: Fouriertransformation wandelt Multiplikation mit $e^{-ix\cdot}$ in Translation und umgekehrt um.

(Passawelsche Gleichung) $\tilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$ (es gilt: $F(\tilde{f}) = \overline{F(f)}$)

Für $f \in \mathcal{S}$ gilt:
$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |Ff(x)|^2\, dx}$$

Beweis: Sei $g := f * \tilde{f}$. Dann gilt:

$$g(0) = f*\tilde{f}(0) = \int f(0-y)\tilde{f}(y)\, dy = \int f(-y)\overline{f(-y)}\, dy$$

$$= \int |f(y)|^2 dy$$

$$g(0) = F^{-1}(Fg)(0) = \int F(g)(y)\, dy = \int F(f)(y)\, F(\tilde{f})(y)\, dy$$

$$= \int F(f)\overline{F(f)}(y)\,dy = \int |F(f(x))|^2\,dx$$ $\square$

Bemerkung: Sei $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) := \{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ f \text{ messbar},\ \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 d\lambda < \infty \}$ (L^2 ist Vektorraum). Für $f, g \in L^2$ definiert man:

$$\langle f, g \rangle := \int f(y)\overline{g(y)}\,dy$$

$$\| f \| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Dann lässt sich Fouriertransformation eindeutig zu einer bijektiven Abbildung $F_2 : L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) \to L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ mit $\| F_2 f \| = \| f \|$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ fortsetten.

Etwas Distributionentheorie

Grundidee: – $\mathcal{S}$ ist zu klein
$\Longrightarrow$ betrachte stattdessen den algebraischen Dualraum

$$\mathcal{S}^* := \{ \varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ linear} \}$$

Beispiele:

- die δ-Funktion: Sei $p \in \mathbb{R}^N$. Dann ist

$$\delta_p : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ f \to f(p)$$

linear, also ein Element von $\mathcal{S}^*$.

- ist $g \in \mathcal{S}$ beliebig, so definiert

$$j_g : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ j_g(f) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) f(x)\,dx$$

ein Element von $\mathcal{S}^*$

- für jedes messbare, polynomiell beschränkte $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ gehört

$$j_g : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ j_g(f) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) f(x)\,dx$$

zu $\mathcal{S}^*$.

Tatsächlich ist die Abbildung j auf den stetigen beschränkten Funktionen als Teilmenge von $\mathcal{S}^*$ aufzufassen.

Notation: Für $u \in \mathcal{S}^*$ und $f \in \mathcal{S}$ setzen wir $(u|f) := u(f) \in \mathbb{C}$

Wir definieren auf $\mathcal{S}^*$:

∂^α: $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $u \in \mathcal{S}^*$ $\qquad (\partial^\alpha u | f) := (-1)^{|\alpha|} (u | \partial^\alpha f)$

M_α: $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $u \in \mathcal{S}^*$ $\qquad (M_\alpha u | f) := (u | M_\alpha f)$

F: $u \in \mathcal{S}^*$ $\qquad (Fu | f) := (u | Ff)$

$\qquad (F^{-1} u | f) := (u | F^{-1} f)$

Damit sind für $\mathcal{S}$ die Operationen doppelt definiert. Die jeweiligen Definition sind aber miteinander verträglich und es gilt genauer

$f, g \in \mathcal{S}$

·) $\partial^\alpha (j_g) = j_{\partial^\alpha g}$

·) $M_\alpha (j_g) = j_{M_\alpha g}$

·) $F(j_g) = j_{Fg}$

Beweis: Hier nur erster Punkt (Rest ist ähnlich).

$$\partial_\alpha (j_g)(f) \overset{(Def)}{=} (-1)^{|\alpha|} (j_g | \partial^\alpha f) \overset{(Def)}{=} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} g \, \partial^\alpha f \, dx \overset{(part. Int)}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha g \, f \, dx \overset{(Def)}{=} (j_{\partial^\alpha g} | f) \qquad \square$$

Beispiele: ·) $F(\delta_x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-ix\cdot}$ $\qquad$ Insbesondere: $F(\delta_0) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \cdot 1$

·) $F(e^{-ix\cdot}) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta_{-x}$ $\qquad$ Insbesondere: $F(1) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta_0$

Beweis: $(F(\delta_x) | f) \overset{(Def)}{=} (\delta_x | Ff) \overset{(Def)}{=} Ff(x)$

$$\overset{(Def)}{=} (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) \, dy = (j_h | f)$$

mit $h(y) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-ixy}$ $\qquad \square$

Die obigen Betrachtungen zur Fouriertransformation liefern nun auch für $u \in \mathcal{S}^*$

$$D^\alpha F u = (-1)^{|\alpha|} F M_\alpha u \qquad M_\alpha F u = F D^\alpha u$$

Damit folgt:

Gehört w zu $\mathcal{S}^*$ (z.B. $\delta_0 = w$), so hat die Gleichung $(-\Delta + \alpha) u = w$ (für $\alpha > 0$) eine Lösung u in $\mathcal{S}^*$ und diese ist gegeben durch

$$u = F^{-1}\left(\frac{1}{1+|\cdot|^2} F w \right)$$

<u>Definition:</u> $u \in \mathcal{S}^*$, $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_x u \in \mathcal{S}^*, \ (T_x u | f) := (u | f(\cdot + x)) \\ \tilde{u} \in \mathcal{S}^*, \ (\tilde{u} | f) := (u | \tilde{f}) \end{array}}$$

Damit lässt sich Faltung auf $\mathcal{S}^*$ übertragen.

<u>Definition:</u> $u \in \mathcal{S}^*$, $f \in \mathcal{S}$

$u * f$ auf $\mathbb{R}^N$, $u * f(x) := (u | f(x - \cdot))$

Problem: Es ist unklar, ob:
- $u * f$ stetig ist
- $u * f$ zu $\mathcal{S}^*$ gehört
- $(\partial^\alpha u) * f = u * (\partial^\alpha f) = \partial^\alpha (u * f)$

Es stellt sich heraus (nach harter Arbeit), dass $\mathcal{S}^*$ einen Unterraum $\mathcal{S}'$ hat, für den „alles gut geht":

- $\mathcal{S}'$ ist invariant unter ∂^α, M_α, F, ...
- $\mathcal{S}'$ enthält alle δ_p, $p \in \mathbb{R}^N$, $j g$, g stetig und beschränkt (insbesondere: $g \in \mathcal{S}$)
- $u * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ für $u \in \mathcal{S}'$, $f \in \mathcal{S}$ und es gilt:

$$\partial^\alpha (u * f) = \partial^\alpha u * f = u * \partial^\alpha f$$

Elemente von $\mathcal{S}'$ heißen <u>temperierte Distributionen</u>

$\Longrightarrow$ grundlegende Methode zum Lösen von Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^N$

Beispiel: $(-\Delta + \alpha) u = w$ für $w \in \mathcal{S}'$

– Löse $(-\Delta+\alpha)u_0 = \delta_0$. Diese Lösung heißt Fundamentallösung und ist gegeben durch

$$u_0 = F^{-1}\left(\frac{1}{1+|\cdot|^2} F\delta_0\right)$$

$$= F^{-1}\left[(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \frac{1}{1+|\cdot|^2}\right]$$

$\Rightarrow$ für $w \in \mathcal{S}'$ ist dann die Lösung von $(-\Delta+\alpha)u = w$ gegeben durch

$$u = u_0 * w$$

Denn: $(-\Delta+\alpha)u = (-\Delta+\alpha)(u_0 * w) = ((-\Delta+\alpha)u_0) * w$
$= \delta_0 * w = w$

Fouriertransformation auf $\mathbb{T}^N$

– Wir untersuchen für periodische Funktionen f auf $\mathbb{R}^N$ Entwicklungen der Form

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}$$

– zunächst Betrachtung von $N=1 \Rightarrow \mathbb{R}^N = \mathbb{R}$

Definition: (2π – periodische Funktion)

Eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ heißt 2π-periodisch, wenn gilt:

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: – Beispiele sind $\cos, \sin, e^{i\cdot}$
– Durch Skalierung sind auch andere als 2π-periodische Funktionen zulässig

Man definiert:

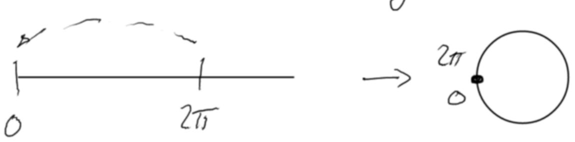
$$\boxed{\mathbb{T} := \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} := \{x + 2\pi\mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}}$$

mit der Addition: $(x + 2\pi\mathbb{Z}) + (y + 2\pi\mathbb{Z}) = x + y + 2\pi\mathbb{Z}$

mit der Projektion: $p: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, $p(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}$

Dann ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch genau dann, wenn es ein $g: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ gibt, mit $f = g \circ p$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{T} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$



Beispiel: (trigonometrische Polynome)

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) \qquad (a_k, b_k \in \mathbb{C})$$

$$\overset{\text{(Euler)}}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikx}$$

mit und $c_0 = \frac{1}{2} a_0$

$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$
$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ für $k > 0$

Behauptung: Koeffizienten von p sind bestimmt durch:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} p(x)\, dx$$

bzw.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \cos(kx)\, dx \qquad k = 0, \ldots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \sin(kx)\, dx \qquad k = 1, \ldots, n$$

Beweis: Erste Darstellung:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{ilx} e^{-ikx}}_{= \exp[ix(l-k)]} dx = \begin{cases} 1 & l = k \\ 0 & l \neq k \end{cases}$$

Damit folgt Aussage sofort.

Zweite Darstellung: Entweder ähnliche Rechnung oder

$$a_k = c_k - c_{-k} \qquad b_k = ic_k - ic_{-k}$$

mit erster Formel anwenden. $\square$

Bemerkung: Analoge Aussagen gelten für gleichmäßig konvergente Reihen

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Definition:

Mit $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- f ist 2π-periodisch
- f ist messbar
- $\int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2\pi)}(x) \, |f(x)|^2 \, d\lambda(x) < \infty$

Bemerkung: Jede 2π-periodische Funktion ist durch ihre Werte auf $[0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt und umgekehrt gibt es zu jeder Funktion auf $[0, 2\pi)$ genau eine 2π-periodische Fortsetzung $(\longrightarrow \mathcal{L}^2([0, 2\pi]))$

Auf $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ wird durch

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2\pi)}(x) \, \overline{f(x)} \, g(x) \, d\lambda(x)}$$

ein Semiskalarprodukt definiert.

$$\left(\begin{array}{l} \langle f, g+h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \\ \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle} \\ \langle f, f \rangle \geq 0 \end{array} \right)$$

Die zugehörige Seminorm wird mit $\|\cdot\|$ bezeichnet und $\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$

Gilt für $(f_n) \subset \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ und $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

so sagt man, dass (f_n) gegen f im Quadratmittel konvergiert.

Proposition:

Sei $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(x) = e^{ikx}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Dann gehören die e_k zu $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ und bilden ein Orthonormalsystem, d.h. es gilt: $\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$

Beweis: e_k sind stetig und damit messbar, 2π-periodisch

$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} |e_k|^2 \, 1_{[0,2\pi)}(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2\pi)}(x) \, d\lambda(x) = 2\pi < \infty$$

$$\Longrightarrow e_k \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$$

$$\langle e_k, e_l \rangle = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,2\pi)}(x) \, \overline{e_k(x)} \, e_l(x) \, d\lambda(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} \, dx$$

$$= \delta_{kl}$$

$\square$

Zu $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiert man nun die k-te Fourierkoeffizienten:

$$\boxed{c_k = c_k(f) := \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) \, 1_{[0,2\pi)}(x) \, d\lambda(x)}$$

Sowie: $S_n = S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k$

Fourierreihe: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ (Bedeutung unklar!)

<u>Lemma:</u> (Besselsche Ungleichung)

Sei $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ und $c_k = c_k(f)$ und $s_n = S_n(f)$ wie oben. Dann gilt:

$$0 \leq \| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{|k| \leq n} | c_k |^2$$

Insbesondere folgt: $\sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$

(und damit $|c_k| \to 0$, $|k| \to \infty$)

Beweis: „Insbesondere" folgt direkt aus der ersten Aussage.
Zur ersten Aussage:

$$\| f - S_n \|^2 \overset{(Def)}{=} \| f - \sum_{|k| \leq n} \langle e_k, f \rangle e_k \|^2$$

$$\overset{(Def)}{=} \langle f - \sum_{|k| \leq n} \langle e_k, f \rangle e_k , f - \sum_{|k| \leq n} \langle e_k, f \rangle e_k \rangle$$

$$\overset{(bilinear)}{=} \langle f, f \rangle - \sum_{|k| \leq n} \overline{\langle e_k, f \rangle} \langle e_k, f \rangle - \sum_{|k| \leq n} \langle e_k, f \rangle \langle f, e_k \rangle$$

$$+ \sum_{|k| \leq n} \sum_{|l| \leq n} \overline{\langle e_k, f \rangle} \langle e_l, f \rangle$$

$$\overset{(c_k = \langle e_k, f \rangle)}{=} \|f\|^2 - \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 \underbrace{- \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 + \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2}_{= 0}$$

$\square$

<u>Theorem:</u> (Parsevalsche Gleichung und Konvergenz im Quadratmittel)

Sei $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ und c_k, S_n wie oben. Dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 = \|f\|^2}$$ Parsevalsche Gleichung

sowie $\| f - S_n \| \to 0$, $n \to \infty$

Beweis: (Aussagen sind äquivalent nach vorigem Lemma)
Beweis hier nicht

$\square$

Bemerkung: Sei $L^2([0,2\pi]) = \mathcal{L}^2([0,2\pi])/\sim$
mit $f \sim g \iff f = g$ λ-f.ü.
Dann definiert

$$< [f], [g] > := < f, g > = \frac{1}{2\pi} \int 1_{[0,2\pi)}(x) \overline{f(x)} g(x) \, d\lambda(x)$$

ein Skalarprodukt auf $L^2([0,2\pi])$ mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$.
($[f] = \{g \mid g \sim f\}$)

Dann ist
$$L^2([0,2\pi]) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}) = \{c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c(n)|^2 < \infty\}$$
$$[f] \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

bijektiv und isometrisch (d.h. $\|[f]\| = \|(c_n(f))_n\|$, wobei $\|(c_n)\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$)

Bemerkung: Eine analoge Theorie kann auf dem Orthonormalsystem basiert werden:

$$\sin(k\,\cdot), \quad k = 1, 2, \ldots$$
$$\cos(k\,\cdot), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Lemma: (Fourierkoeffizienten der Ableitung)

Sei $f \in \mathcal{L}^2([0,2\pi])$ $(n-1)$-mal stetig diffbar und $f^{(n-1)}$ stetig und stückweise stetig diffbar mit Fourierkoeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$
Dann sind für $l = 1, \ldots, n$ die Fourierkoeffizienten von $f^{(l)}$ gegeben durch $(ik)^l c_k$
Insbesondere gilt dann:
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^n c_k|^2 < \infty$$

Beweis: o.E. Funktion f ist n-mal stetig diffbar (sonst auf Intervallen arbeiten)

$$\Longrightarrow \quad c_k^{(l)} = \frac{1}{2\pi} \int 1_{[0,2\pi)}(x) e^{-ikx} f^{(l)}(x) \, d\lambda(x)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \, d\lambda(x)$$
$$\overset{\text{(part. Int)}}{=} 0 + \frac{1}{2\pi} (ik)^l \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \, d\lambda(x) = (ik)^l c_k \qquad \square$$

Theorem: (Gleichmäßige Konvergenz von $(S_n)_n$)

Sei $f \in \mathcal{L}^2([0,2\pi])$ stetig und stückweise stetig diffbar. Dann konvergiert $(S_n(f))_n$ gleichmäßig (insbesondere punktweise) gegen f.

Beweis: Nach vorigem Lemma gilt: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k c_k|^2 < \infty \quad (n=1)$

Weiterhin: $|c_k| = |c_k k| \cdot \frac{1}{|k|} \leq \frac{1}{2} |c_k k|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{|k|^2} \quad (k \neq 0)$

$$\Longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \leq \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} |c_k k|^2}_{< \infty} + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2|k|^2}}_{< \infty} + \underbrace{|c_0|}_{< \infty} < \infty$$

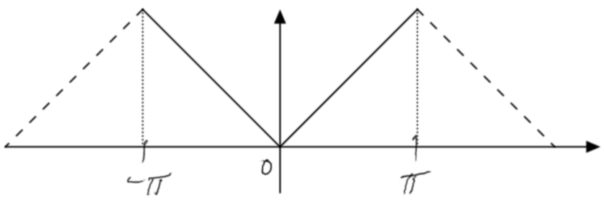
$\overset{|e^{ikx}|=1}{\Longrightarrow}$ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ konvergiert gleichmäßig gegen ein stetiges g

$\Longrightarrow$ $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ konvergiert im Quadratmittel gegen g

$$\Longrightarrow \|f - g\| \leq \underbrace{\|f - s_n\|}_{\to 0} + \underbrace{\|s_n - g\|}_{\to 0} \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow \infty$$

$\overset{(f, g \text{ stetig})}{\Longrightarrow}$ $f = g$ (Integral ist 0) $\Longrightarrow s_n \xrightarrow{\text{gleich.}} f$ $\square$

Beispiel: Sei f periodisch mit $f(x) = |x|$ für $|x| \leq \pi$.



Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig und ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

Insbesondere: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

Beweis: Gleichmäßige Konvergenz folgt aus vorigem Satz

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$\overset{(f \text{ gerade})}{\Longrightarrow}$ $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x| \, dx = \pi \quad (k=0)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x| \cos(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx$$

$$= \begin{cases} -4/k^2\pi & : k \text{ ungerade} \\ 0 & : k \text{ gerade} \end{cases}$$ $\square$

Nun zur Verallgemeinerung auf $\mathbb{R}^N$ mit $N \in \mathbb{N}$ beliebig:

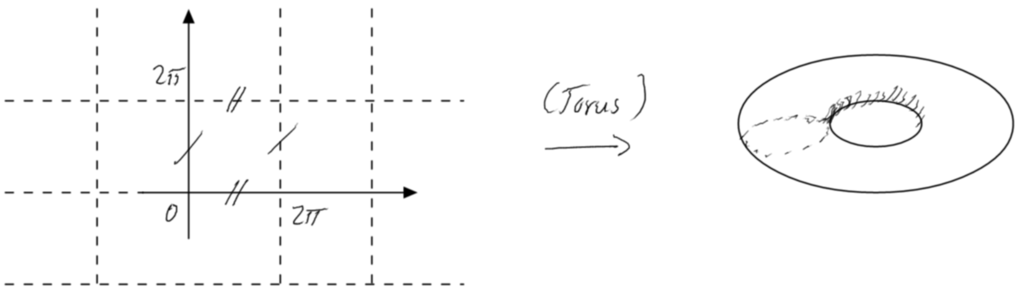
Eine Funktion f auf $\mathbb{R}^N$ heißt periodisch, wenn gilt:

$$f(x) = f(x + 2\pi l) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N,\ l \in \mathbb{Z}^N$$

Man definiert: $\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N = \{x + 2\pi\mathbb{Z}^N \mid x \in \mathbb{R}^N\}$

mit kanonischer Projektion: $p: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{T}^N,\ x \longmapsto [x] = x + 2\pi\mathbb{Z}^N$

Es ist f periodisch genau dann, wenn es ein g auf $\mathbb{T}^N$ gibt mit $f = g \circ p$.
Offenbar ist $I = I_N = [0, 2\pi)^N$ ein Representantensystem auf $\mathbb{T}^N$.



$$\mathcal{L}^2(I, \lambda) := \{ f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, periodisch}, \int_{\mathbb{R}^N} 1_I(x)\, |f(x)|^2\, dx < \infty \}$$

Semiskalarprodukt: $\langle f, g \rangle := \frac{1}{|I|} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)}\, g(x)\, 1_I(x)\, d\lambda(x)$

Orthonormalsystem: $e_k: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ e_k(x) = e^{ikx} \in \mathcal{L}^2(I)$

Fourierkoeffizienten: $c_k = c_k(f) = \langle e_k, f \rangle$

$$S_n = S_n(f) = \sum_{|k| \le n} c_k e_k$$

Es gelten wieder Besselsche Ungleichung, Parsevalsche Gleichung, Konvergenz im Quadratmittel.

<u>Bemerkungen zur allgemeinen Fouriertransformation</u>

auf $\mathbb{R}^N$: $\mathcal{F}f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y)\, dy$

auf $\mathbb{T}^N$: $\mathcal{F}f(n) = c_n = \int 1_{[0,\pi)}(y)\, e^{-iny} f(y)\, dy \qquad n \in \mathbb{Z}$

Allgemein: G abelsche Gruppe, topologische Gruppe, lokalkompakt (es gibt kompakte Umgebungen des Einheitselementes)

Bsp: $(\mathbb{R}^N, +, \text{eukl. Metrik})$, $(\mathbb{T}^N, +, \text{„Eukl. Metrik"})$

Zu einem solchen G assoziieren wir: (S^1 ... Einheitskreislinie)

$$\hat{G} := \left\{ \varphi : G \to S^1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ Gruppenhomomorphismus, stetig} \\ (\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y),\ \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}) \end{array} \right\}$$

Bsp: $G = \mathbb{R}^N$, $\hat{G} := \{ e^{-ix\bullet} : \mathbb{R}^N \to S^1 \mid x \in \mathbb{R}^N \}$

$G = \mathbb{T}^N$, $\hat{G} := \{ e^{-ix\bullet} : \mathbb{T}^N \to S^1 \mid x \in \mathbb{Z}^N \}$

$\Longrightarrow$

Fouriertransformation auf G: $f : G \to \mathbb{C}$ geeignet
$Ff : \hat{G} \to \mathbb{C}$, $Ff(\varphi) = \int_G f(x)\, \varphi(x)\, dh(x)$

dh ... Haarmaß

Bemerkung: Die allgemeine Fouriertransformation ist ein Spezialfall der Gelfand-Theorie kommutativer Banachalgebren

Die Wärmeleitungsgleichung

Es geht um: $\quad \partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Hier: $\psi : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Wärmeverteilung)
$\psi_t = \psi(t,\bullet)$

Herleitung der Wärmeleitungsgleichung:

- ψ_t beschreibt Dichte eines Stoffes (Wärme) zur Zeit t

$\Longrightarrow$ Wärmemenge im Volumen V zur Zeit t:

$$m_t = \int_V \psi_t(x)\, dx$$

$\Longrightarrow$ Änderung der Wärmemenge zur Zeit t:

$$\partial_t m_t = \int_V \partial_t \psi_t(x)\, dx$$

- Andererseits findet Änderung nur durch Abfluss statt $\left(-\int_{\partial V} \text{Fluss}\ \mu\, d\sigma\right)$
- Fluss entsteht durch Wärmedifferenz $(\nabla\psi)$

Ansatz: $\quad \text{Fluß}_t = -b(x) \cdot \nabla \psi_t(x)$

$$\Longrightarrow \int_V \partial_t \psi_t\, dx = \int_{\partial V} b(x)\, \nabla \psi_t(x)\, \mu\, d\sigma$$

$\overset{(\text{Stokes})}{\Longrightarrow} \quad \int_V \partial_t \varphi_t \, dx = \int_V \nabla \cdot (b(x) \nabla \varphi_t(x)) \, dx$

$\overset{(V \text{ bel.})}{\Longrightarrow} \quad \partial_t \varphi_t = \nabla \cdot (b(x) \cdot \nabla \varphi_t(x))$

$\Longrightarrow$ (homogen und isotrop) o.E. $b = 1$ (Identität)

$\Longrightarrow \quad \partial_t \varphi_t = \Delta \varphi_t$

<u>Lösung:</u> (auf $\mathbb{R}^N$)

Es geht um:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \varphi_t &= \Delta \varphi_t \\ \varphi_0 &= f \end{aligned}\right\} \text{Anfangswertproblem}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $f \in \mathcal{S}$ und suchen Lösungen mit $\varphi_t \in \mathcal{S}$ für alle $t \geq 0$

Für eine solche Lösung folgt nach FT:

$$\partial_t \hat{\varphi}_t(k) = -|k|^2 \hat{\varphi}_t(k)$$
$$\hat{\varphi}_0 = \hat{f}$$

$\Longrightarrow$ bei festem k gewöhnliche DGL in t

$\Longrightarrow \quad \hat{\varphi}_t(k) = \hat{f}(k) \cdot e^{-|k|^2 t}$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \varphi_t &= F^{-1}(e^{-|\cdot|^2 t} Ff) \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} F^{-1}(e^{-|\cdot|^2 t}) * F^{-1} Ff \\ &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} F^{-1}(e^{-t^2 |\cdot|}) * f \\ &=: \rho_t * f \end{aligned}$$

es gilt dann: $\rho_t = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

Bemerkung: Verfahren kann für viel allgemeinere f durchgeführt werden. Der Grund ist, dass $P_t(x)$ selbst die Wärmeleitungsgl. erfüllt:

$$\partial_t P_t = \Delta P_t$$

Dann gilt zumindest formal für alle f mit $\Psi_t := P_t * f$

$$= \int P_t(x-y) f(y)\, dy$$

$$\Longrightarrow \partial_t \Psi_t \overset{!}{=} \int \partial_t P_t(x-y)\, f(y)\, dy = \int \Delta_x P_t(x-y) f(y)\, dy$$

$$\overset{!!}{=} \Delta \Psi_t$$ (! und !! müssen gerechtfertigt sein)

Folgerung: $\boxed{\text{Sei für } t \geq 0 \text{ die Abbildung } P_t : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \text{ definiert durch } P_t f := P_t * f \ (t > 0),\ P_0 f = f}$

$\boxed{\text{Dann löst } t \mapsto P_t f \text{ die Wärmeleitungsgleichung und es gilt } P_{t+s} = P_t \circ P_s \quad t, s \geq 0 \quad \text{(Halbgruppeneigenschaft)}}$

Beweis: Es gilt $P_t = \mathcal{F}^{-1} e^{-t|\cdot|^2} \mathcal{F}$

$$\Longrightarrow P_{t+s} = \mathcal{F}^{-1} e^{-(t+s)|\cdot|^2} \mathcal{F}$$

$$= \underbrace{\mathcal{F}^{-1} e^{-t|\cdot|^2} \mathcal{F}}_{P_t} \circ \underbrace{\mathcal{F}^{-1} e^{-s|\cdot|^2} \mathcal{F}}_{P_s}$$

$\square$

Alternativer Ansatz kann über Separation gegeben werden:

$$\Psi(t,x) = f(t)\, g(x) \quad \text{(Ansatz)}$$

$$\Longrightarrow \partial_t \Psi_t = f'(t)\, g(x) = \Delta \Psi_t = f(t)\, \Delta g(x)$$

$$\overset{f(t) \neq 0}{\underset{g(x) \neq 0}{\Longrightarrow}} \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{f'(t)}{f(t)} = \text{konst} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)} = C$$

$(c<0)$ $\Longrightarrow$ $f(t) = A\,e^{ct}$
$g(x) = e^{ikx}$ mit $-|k|^2 = c$

$\Longrightarrow$ $\Psi(t,x) = e^{-|k|^2 t}\, e^{ikx}$ (Das ist tatsächlich eine Lösung)

(Überlagerung) $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|k|^2} e^{ikx}\, g(k)\, dk}$ allgemeine Lösung mit Gewichtungsfunktion g

Dies entspricht der obigen Darstellung:

$$P_t f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ikx} e^{-|k|^2 t}\, Ff(k)\, dk$$

mit $g(k) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}\, Ff(k)$

Wärmeleitung auf Würfel mit periodischen Randbedingungen