24.4.14

Riemann-intbar mit
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx$$

Bew.:
Es folgt a) aus Einschränken von Zerlegungen und b) durch Zusammensetzen von Zerlegungen $\square$

Proposition

$-\infty < a < b < \infty$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intbar

$\Rightarrow$ $|f|$ Riemann intbar mit
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Bew.:

Einfache Fallunterscheidung zeigt für jedes Teilintervall J von $[a,b]$

$$\sup_{x\in J}|f(x)| - \inf_{x\in J}|f(x)| \le \sup_{x\in J} f(x) - \inf_{x\in J} f(x)$$

$\Rightarrow O_Z(|f|) - U_Z(|f|) \le O_Z(f) - U_Z(f)$

$\Rightarrow$ Riemann intbar

Weiterhin
$$-|f| \le f \le |f|$$
$$\Rightarrow -\int_a^b |f|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f|\,dx$$
$\square$

30.4.14

Beispiel:

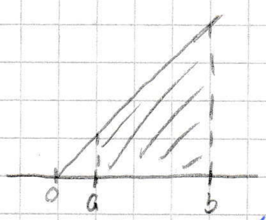
1) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{const.}$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot \text{const.}$

Bew.: f ist Treppenfunktion

2) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$



Bew.: Mit Riemannsummen etwas mühsam ($\to$ Übung)

Bem.: Geom.: Differenz zw. zwei Dreiecken

2. Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Wir werden sehen, dass Integration (in gewisser Weise) die Umkehrung der Differentation ist.

Definition (Stammfunktion)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben.

Eine Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu f, wenn F auf $[a,b]$ diffbar ist mit $F' = f$

Bem.:

- Für den Punkt a wird aber die rechtsseitige Diffbarkeit von F und $\lim_{h \to 0+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a)$ geforderd, entspr. in b
- Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b) mit $F' = f$ auf (a,b), so ist F in a rechtsseitig diffbar mit $F'(a) = f(a)$ und in b linksseitig diffbar mit $F'(b) = f(b)$

  Bew: $\frac{F(a+h) - F(a)}{h} \overset{MWS}{=} F'(\xi_h) = f(\xi_h) \xrightarrow[f \text{ stetig}]{} f(a), h \to 0$

- Eine stetige Fkt. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig diffbar (d.h. auf ganz $[a,b]$ diffbar mit stetigem F') genau dann, wenn es ein stetiges $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $F' = f$ auf (a,b)

Analysis 30.4.14

Theorem (HDI)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

- Die Funktion $G: [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f
- Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

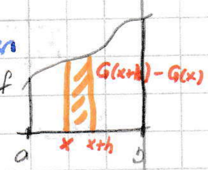
Bem:

- Die 2. Aussage heißt, dass Integration die Umkehrung der Differentation ist
- Sind F_1 und F_2 Stammfkt. von f, so gilt $F_1 = F_2 + \text{const.}$ (→ Bew. HDI, Folg. MWS)

Bew:

Zum ersten Punkt:

Sei $x \in [a,b]$ bel. Betrachten den Differenzenquotienten $\frac{G(x+h) - G(x)}{h}$ für geeignete h o.E. $h > 0$



$$\frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)$$
$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{h}(G(x+h) - G(x)) - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt$$
$$\leq \frac{1}{h} \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)| \cdot \underbrace{\int_x^{x+h} dt}_{=h}$$
$$= \sup_{x \leq t \leq x+h} |f(t) - f(x)|$$
$$\to 0,\ h \to 0 \quad (f \text{ stetig})$$

Zum 2. Punkt:

Sei F eine Stammfunktion von f

Dann ist F stetig (da diffbar) und $F' = G' = f$ auf (a,b)

$\Rightarrow F = G + C$ mit einer Konst. C

$\Rightarrow F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ □

Bem: Integrale über nicht stetige Fkt. sind im allg. nicht diffbar

Beispiel:

$$f:[-1,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}0: x\le 0\\ 1: x>0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases}0: x\le 0\\ x: x>0\end{cases}$$

Notation:

Man schreibt auch $\int f(x)dx$ für eine Stammfunktion von f oder $F=\int f(x)\,dx + C$ falls F Stammfunktion von f ist. Dann nennt man $\int f(x)dx$ das unbestimmte Intgral von f

Notation:

Ist F Stammfunktion von f, so schreibt man auch $F\big|_a^b$ für $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

Bem:

Einige Integrale

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}x^{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

Beachte: $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{b}{a}$ für $0<a<b$ od. $a<b<0$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + c \quad (a>0)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c \quad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c \quad \left(\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c \quad (\text{s.u.})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \quad (\text{s.u.})$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c \qquad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

30.4.14

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{-1+x^2}}\,dx = \operatorname{arccosh} x + c$$

Theorem (Substitutionsregel)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\varphi: [c,d] \to [a,b]$ (mit $-\infty < c < d < \infty$)

stetig diffbar.

Dann gilt:

$$\int_c^d f\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx$$ Umkehrung Kettenregel

Bem.:

- Es wird nicht vorrausgesetzt, dass φ injektiv oder surjektiv ist
- Es ist $\varphi(d) < \varphi(c)$ möglich

Bew.:

Sei F eine Stammfunktion zu f (ex. nach HDI)

Dann ist $F\circ\varphi$ stetig diffbar nach Kettenregel mit

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$\overset{F'=f}{=} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$\overset{HDI}{\Longrightarrow} \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F\circ\varphi(d) - F\circ\varphi(c)$$

$$= F(\varphi(d)) - F(\varphi(c))$$

$$\overset{(HDI)}{=} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt$$ $\square$

Bem.:

Das lässt sich von "links nach rechts" und von "rechts nach links" anwenden.

Bsp.: Logarithmische Integration

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \underset{\substack{\varphi(t)=f(t)\\ f(y)=\frac{1}{y}}}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{f(b)}{f(a)}$$

Von rechts nach links:

Ersetzen zunächst x durch $\varphi(t)$ Bilde Ableitung

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ "$dx = \varphi'(t)\,dt$" nur mit " " schreiben

7.5.14

Nun zur "Umkehrung" der Produktregel

Theorem (Partielle Integration)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, g stetig diffbar und F Stammfunktion zu f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = F(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx$$

Bew:

Nach der Produktregel: $(Fg)' = fg + Fg'$

$\rightsquigarrow fg = (Fg)' - Fg'$ Jetzt Integrieren

$$\int_a^b (fg)(x)\, dx = \int_a^b (Fg)'(x)\, dx - \int_a^b (Fg')(x)\, dx$$
$$= (Fg)(x)\Big|_a^b - \int_a^b (Fg')(x)\, dx$$

$\square$

Beispiele:

- Es gilt

$$\int_a^b x \sin x\, dx = x(-\cos x)\Big|_a^b - \int_a^b 1(-\cos x) dx$$
$$= -x\cos x\Big|_a^b + \int_a^b \cos x\, dx$$
$$= -b\cos b + a\cos a + \sin b - \sin a$$

- $$\int_a^b x^2 e^x dx = x^2 e^x\Big|_a^b - \int_a^b 2x e^x\, dx$$
$$= x^2 e^x\Big|_a^b - 2x e^x\Big|_a^b + 2\int_a^b e^x dx$$
$$= x^2 e^x\Big|_a^b - 2x e^x\Big|_a^b + 2e^x\Big|_a^b$$

Manchmal liefert die partielle Integrationsformel für das Integral

$$\int_a^b \sin^n x\, dx = \int_a^b \underbrace{(\sin x)}_{f}\underbrace{(\sin^{n-1} x)}_{g} dx = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{(-\cos x)}_{F}\underbrace{\left[(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\right]}_{g'} dx \quad (*)$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$F \cdot g' = -(n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x = -(n-1)(\sin^{n-2} x - \sin^n x)$$

$$(*) = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx$$

$$\rightsquigarrow n\int_a^b \sin^n x\, dx = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_a^b + (n-1)\int_a^b \sin^{n-2} x\, dx$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Big|_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \sin^{n-2} x\, dx$$

- Es kann auch nützlich sein, die konstante Fkt. 1 einzufügen

$$\int_a^b \ln x\, dx = \int_a^b \underbrace{1}_{f}\underbrace{\ln x}_{g}\, dx = x\ln x\Big|_a^b - \int_a^b x\frac{1}{x}\, dx = x\ln x\Big|_a^b - x\Big|_a^b$$

Erinnerung:
Sind $h, h_n, n \geq 1$ Funktionen auf $[a,b]$, so heißt (h_n) gleichmäßig konv. gegen h, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 0$ existiert mit

$$|h_n(x) - h(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a,b], n \geq N$$

Als Anwendung des HDI lernen wir jetzt ein Resultat über die Vertauschung von Grenzwerten kennen.

Theorem

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, stetig diffbar, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

- $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$ für alle $x \in [a,b]$
- $f_n' \to g$ gleichmäßig

Dann ist f stetig diffbar und $f' = g$.

Bew.:
Da (f_n') stetig und gleichmäßig konvergent gegen g folgt Stetigkeit von g. Weiterhin folgt nach HDI (für f_n)

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^b f_n'(t)\,dt$$

Bilden Grenzwert und nutzen (!) gleichmäßige Konvergenz und erhalten

$$f(x) = f(a) + \int_a^b g(t)\,dt$$

Nach dem HDI (beachte g stetig) ist dann f diffbar mit $f' = g$

Nutzen (!):

$$\left|\int_a^x f_n'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt \leq \underbrace{\sup_{t \in [a,b]} |f_n'(t) - g(t)|}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} (b-a) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\square$

Bem.:
- Punktweise Konvergenz in f_n' reicht nicht für Diffbarkeit von f:
  z.B. $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$. Dann gilt $f \to |\,|$ punktweise und $f_n'(x) = x / \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} \to \operatorname{sign}(x)$ punktweise aber nicht glm.
  Aber $|\,|$ ist nicht diffbar
- Der Beweis zeigt, dass wenn $f_n' \to g$ gleichmäßig und f_n in einem Punkt konvergent, so konvergiert f_n schon überall punktweise

Nun zu einer Abgeschlossenheitseigenschaft des Vektorraums der Riemann-Integrierbaren Funktionen

Theorem

Sei $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ gegeben. Wenn Riemann-intbare Fkt $f_n, g_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ existieren mit

- $g_n \leq h \leq f_n$, $n \geq 0$
- $\int_a^b (f_n - g_n)(x)\,dx \to 0$, $n\to\infty$

dann ist h Riemann-intbar und

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\,dx$$

Bew:

Sei $\varepsilon>0$

Das Ziel ist zunächst $O_Z(h) - U_Z(h) \leq \varepsilon$ für geeignete Zerlegung Z zu zeigen. Wähle N, so dass

$$\int_a^b f_N\,dx - \int_a^b g_N\,dx = \int_a^b (f_N - g_N)\,dx \leq \varepsilon/3 \quad (*)$$

Da f_N, g_N Riemann-intbar gibt es eine Zerlegung Z, so dass

$$\int_a^b g_N\,dx - \varepsilon/3 \leq U_Z(g_N)$$

und $\int_a^b f_N\,dx + \varepsilon/3 \geq O_Z(f_N)$

Wegen $g_N \leq h \leq f_N$

$$\int_a^b g_N\,dx - \varepsilon/3 \leq U_Z(g_N) \leq U_Z(h) \leq O_Z(h) \leq O_Z(f_N) \leq \int_a^b f_N\,dx + \varepsilon/3 \quad (**)$$

Wegen $(*)$ folgt dann

$$O_Z(h) - U_Z(h) \leq \varepsilon$$

Wegen $\varepsilon>0$ bel. folgt also Riemann-intbarkeit von h

Weiterhin folgt aus $(**)$ auch

$$\left|\int_a^b h\,dx - \int_a^b f_N\,dx\right|, \left|\int_a^b h\,dx - \int_a^b g_N\,dx\right| \leq 2\varepsilon \quad (***)$$

für alle N für die $(*)$ gilt. Da $(*)$ für alle genügend großen N gilt, so gilt auch $(***)$ für alle genügend großen N.

Da $\varepsilon>0$ bel. folgt die Aussage

$\square$

7.5.14

Folgerung

Seien $h_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Intbar und gl. konvergent gegen ein $h : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist h Riemann-Intbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx$$

Beweis:

Sei $\delta_n = \sup\{|h(x) - h_n(x)|, x \in [a,b]\}$

Gleichmäßige Konvergenz von h_n gegen h bedeutet gerade

$\delta_n \to 0, n \to \infty$

Weiterhin sind $f_n = h_n + \delta_n$, $g_n = h_n - \delta_n$ Riemann-intbar

und es gilt

- $g_n \leq h \leq f_n$
- $\int_a^b |f_n - g_n|\,dx \leq (b-a) 2\delta_n \to 0, n \to \infty$

Damit folgt aus obigen Theorem die Riemann-intbarkeit von h und

$$\int_a^b h\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underbrace{f_n}_{h_n+\delta_n}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n\,dx$$

Offenbar gilt $\left|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b h\,dx\right| = \int_a^b f_n - h\,dx = \delta_n (b-a) \to 0, n \to \infty$

Damit folgt die gewünschte Konvergenzaussage

□

Erinnerung: Cauchy-Schwarz Ungleichung

Sei V ein reeller Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(v,w) \mapsto \langle v,w\rangle$

- bilinear (d.h. $\langle v+\alpha w, u\rangle = \langle v,u\rangle + \alpha\langle w,u\rangle$
  $\langle v, u+\alpha w\rangle = \langle v,u\rangle + \alpha\langle v,w\rangle$)
- symmetrisch ($\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$)
- positiv ($\langle u,u\rangle > 0$)

Dann gilt die Cauchy-Schwarz Ugl

$$|\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}, \quad u,v \in V$$