Analysis II – Übung 7

Nina Held – 144753
Clemens Anschütz – 146390
Markus Pawellek – 144645

Übung: Donnerstag 12–14

Aufgabe 1

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right]$$ (nach binomischen Formeln)

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$\square$

e^x und e^{-x} sind beide beliebig oft diffbare Funktionen. $\sinh x$ und $\cosh x$ sind eine Linearkombination dieser beiden Funktionen.

$\Longrightarrow \sinh x$ und $\cosh x$ sind diffbar

$$\Longrightarrow \sinh' x = \frac{1}{2}\left(e^x - (-e^{-x})\right) = \cosh x$$

$$\Longrightarrow \cosh' x = \frac{1}{2}\left(e^x + (-e^{-x})\right) = \sinh x$$

$\Longrightarrow \sinh^{(2n)}(x) = \sinh x$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \sinh^{(2n-1)}(x) = \cosh x$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \cosh^{(2n)}(x) = \cosh x$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \cosh^{(2n-1)}(x) = \sinh x$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \sinh x$ und $\cosh x$ sind beliebig oft diffbar $\square$

Für e^x bzw. e^{-x} existiert Reihenentwicklung.

$$\Rightarrow \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$$

(Diese konvergieren für $-\infty < x < \infty$)

$$\Rightarrow \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} - (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right)$$

$\Rightarrow$ für gerade k ist $(-1)^k = 1 \Rightarrow$ Summand wird 0
ansonsten addieren sich Summanden

$$\Rightarrow \sinh x = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

$\Rightarrow$ Diese Reihe muss also auch konvergieren und entspricht gerade der Taylorreihe für $x_0 = 0$:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$ mit $\sinh^{(2k)}(0) = \sinh(0) = 0$
und $\sinh^{(2k+1)}(0) = \cosh(0) = 1$

für $\cosh x$ gilt ähnliches:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!} + (-1)^k \frac{x^k}{k!} \right)$$ $\Rightarrow$ Summanden werden zu Null für ungerade k
ansonsten addieren sie sich

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\Rightarrow$ auch diese Reihe muss konvergieren

$\Longrightarrow$ Reihe entspricht gerade Taylorreihe für $x_0 = 0$:

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$ wegen $\cosh^{(2k)}(0) = \cosh(0) = 1$ und $\cosh^{(2k+1)}(0) = \sinh(0) = 0$

Reihenentwicklung:
$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}}$$

$\square$

Aufgabe 2

Es gilt: $\sinh' x = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ sinh ist strikt monoton steigend und beliebig oft diffbar

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion existiert für ganz $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \boxed{\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow 2y = e^x - e^{-x}$

$\Rightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1$ (Multiplikation mit e^x)

$\Longrightarrow e^{2x} - 2ye^x = 1$ (Sei $\alpha = e^x \Rightarrow$ quadr. Gleichung)

$\Longrightarrow \alpha^2 - 2y\alpha + y^2 = 1 + y^2 = (\alpha - y)^2$

$\Longrightarrow \alpha = y \pm \sqrt{1+y^2} = e^x$

nur positive Lösung möglich wegen $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{x = \sinh^{-1} y = \operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)}$

$\Rightarrow$ Argument im ln ist immer größer Null
$\Rightarrow$ arsinh ist diffbar, weil sowohl ln als auch $y + \sqrt{1+y^2}$ für $y \in \mathbb{R}$ diffbar sind

$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} x)}$$ (Regel für Ableitung einer Umkehrfunktion)

$$= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}}$$ (wegen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$ Funktion ist wieder stetig und diffbar

$\Rightarrow$ arsinh ist beliebig oft diffbar (da sinh auch diffbar)

es gilt: $\cosh' x = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0$ für $x > 0$

$\Rightarrow$ cosh ist strikt monoton steigend f $x > 0$ und beliebig oft diffbar
$\Rightarrow$ cosh ist auf $(0, \infty)$ umkehrbar

$$\Rightarrow \boxed{\cosh^{-1} = \operatorname{arcosh} : (1, \infty) \to (0, \infty)}$$

Sei $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\Rightarrow 2y e^x = e^{2x} + 1$ (Subst.: $\alpha = e^x$)

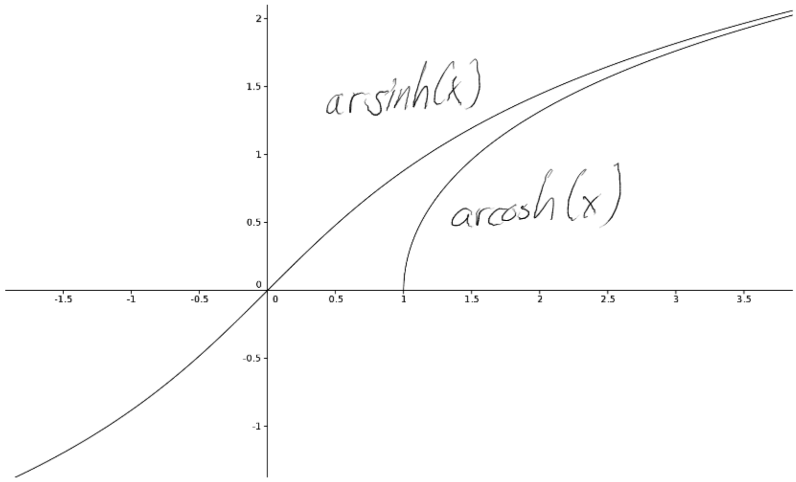
$\Rightarrow -1 = \alpha^2 - 2y\alpha \Rightarrow y^2 - 1 = (\alpha - y)^2$

$\Rightarrow \alpha = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ (es muss $\alpha > 1$ sein, sonst $\ln \alpha < 0$)

$$\Rightarrow \boxed{x = \cosh^{-1}(y) = \operatorname{arcosh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$$

$\Rightarrow$ da cosh diffbar ist, muss auch arcosh diffbar sein (beliebig oft)

$$\boxed{\operatorname{arcosh}' x = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$



Skizze der Umkehrfunktionen

Aufgabe 3

a) $\sin(-x) = \operatorname{Im}(e^{-ix}) = \operatorname{Im}\left[(e^{ix})^{-1}\right]$

$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\cos x + i \sin x}\right]$ wegen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\cos x + i \sin x} \cdot \frac{\cos x - i \sin x}{\cos x - i \sin x}\right]$$

$$= \operatorname{Im}\left[\frac{\cos x - i \cdot \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x}\right] = \operatorname{Im}\left[\cos x - i \sin x\right]$$

$$= -\sin x \quad \Longrightarrow \quad -\sin(-x) = \sin x$$

für $\cos(-x)$ gilt ähnliches:

$$\cos(-x) = \operatorname{Re}(e^{-ix}) = \operatorname{Re}\left[\cos x - i \sin x\right] = \cos x \qquad \square$$

b) $\sin(x \pm y) = \operatorname{Im}\left[e^{i(x \pm y)}\right] = \operatorname{Im}\left[e^{ix} e^{\pm iy}\right]$

$$= \operatorname{Im}\left[(\cos x + i \sin x)(\cos(\pm y) + i \sin(\pm y))\right]$$

$$\overset{(3a)}{=} \operatorname{Im}\left[(\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \cdot \sin y)\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[\cos x \cos y \pm i \cdot \cos x \sin y + i \sin x \cos y \pm i^2 \sin x \sin y\right]$$

$$= \mathrm{Im}\left[(\cos x \cos y \mp \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y \pm \sin y \cos x)\right]$$

$$= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \square$$

c) auch für $\cos(x \pm y)$ gilt ähnliches:

$$\cos(x \pm y) = \mathrm{Re}\left[e^{i(x \pm y)}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[(\cos x \cos y \mp \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y \pm \sin y \cos x)\right]$$

$$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \square$$

<u>Aufgabe 4</u>

Sei $d: [0,\pi) \times [0,\pi) \to [0,\infty)$, $d(x,y) := |\sin(x-y)|$

1. $x = y \iff d(x,y) = 0$:

$\Rightarrow$: Sei $x = y$. $\Rightarrow d(x,y) = |\sin(0)| = 0$

$\Leftarrow$: $\sin(x-y) = 0 \Rightarrow$ auf angegebenen Intervall nur für $x - y = 0$ möglich $\Rightarrow x = y$

2. $d(x,y) = d(y,x)$:

$$d(x,y) = |\sin(x-y)| = |-\sin(x-y)| \overset{(3a)}{=} |\sin(y-x)|$$
$$= d(y,x)$$

3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$:

$$d(x,y) = |\sin(x-y)| = |\sin(x - z + z - y)|$$

$$= |\sin[(x-z)+(z-y)]|$$

$$\overset{(3b)}{=} |\sin(x-z)\cos(z-y) + \sin(z-y)\cos(x-z)|$$

$$\overset{(\Delta\text{-Ungl})}{\leq} |\sin(x-z)\cos(z-y)| + |\sin(z-y)\cos(x-z)|$$

$$= |\sin(x-z)|\cdot|\cos(z-y)| + |\sin(z-y)|\cdot|\cos(x-z)|$$

$\Rightarrow$ jeder Faktor bzw. Summand ist größer gleich Null

$\Longrightarrow$ $|\sin(x-z)|\cdot|\cos(z-y)| \leq |\sin(x-z)|$ wegen $|\cos(z-y)| \leq 1$

und $|\sin(z-y)|\cdot|\cos(x-z)| \leq |\sin(z-y)|$ wegen $|\cos(x-z)| \leq 1$

$$\Longrightarrow |\sin(x-z)|\cdot|\cos(z-y)| + |\sin(z-y)|\cdot|\cos(x-z)|$$

$$\leq |\sin(x-z)| + |\sin(z-y)| = d(x,z) + d(z,y)$$

$$\Longrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$\Longrightarrow$ d beschreibt also Metrik auf $[0,\pi)$ $\square$