# Höhere Analysis I

**Sommersemester 2015** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 8** **Abgabe Dienstag 23.06.2015**

(1) Gegeben seien Hilberträume $H$, $K$ und $L$.

(a) Zeigen Sie für alle beschränken linearen Operatoren $A, B$ von $H$ nach $K$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Aussagen:

$$(A^*)^* = A \text{ und } (A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda} B^*.$$

(b) Zeigen Sie für alle beschränkten linearen Operatoren $A$ von $K$ nach $L$ und $B$ von $H$ nach $K$

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

(2) Gegeben seien Hilberträume $H$, $K$ und $L$. Zeigen Sie:

(a) Für alle beschränkten linearen Operatoren $A, B$ von $H$ nach $K$ gilt $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(b) Für alle beschränkten linearen Operatoren $A$ von $H$ nach $K$ und $B$ von $K$ nach $L$ gilt $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

(3) Sei $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschraenkt und

$$M_\varphi : \ell^2 \longrightarrow \ell^2, \;\; f \mapsto \varphi f,$$

der Operator der Multiplikation mit $\varphi$. Bestimmen Sie das Spektrum von $M_\varphi$.

(4) Sei $H$ ein Hilbertraum und $T$ ein linearer beschränkter Operator von $H$ nach $H$. Zeigen Sie: Gilt $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ invertierbar mit Inverser gegeben durch $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.

**Zusatzaufgabe.**
In einem Hilbertraum $H$ enthält jede beschränkte Folge $(x_n)$ eine Teilfolge $(x_{n_k})$, sodass für jedes $y \in H$ die Folge $k \mapsto \langle x_{n_k}, y \rangle$ konvergiert.

Hinweis: Es reicht (Warum?) sich auf den separablen Fall zu beschränken.