Analysis II – Übung 10

Nina Held – 144753 Übung: Donnerstag 12-14
Clemens Anschütz – 146330
Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ für alle Folgen (x_n) in X mit $x_n \to x \in X$, $n \to \infty$ gilt:

$$f(x_n) \to f(x), \; n \to \infty$$
$$g(x_n) \to g(x_n), \; n \to \infty$$

$\Rightarrow$ (Verträglichkeit des Betrages mit Folgen)

$$|f(x_n)| \to |f(x)|, \; n \to \infty$$

$\Rightarrow$ für alle (x_n) in X mit $x_n \to x$, $n \to \infty$ gilt

$$|f(x_n)| \to |f(x)|, \; n \to \infty$$

$\Rightarrow$ $|f|$ ist stetig

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Fall $f(x) \neq g(x)$: o.E. $f(x) > g(x)$

Sei nun (x_n) in X mit $x_n \to x$, $n \to \infty$.
Dann gilt wieder $f(x_n) \to f(x)$ und $g(x_n) \to g(x)$

$\Rightarrow$ für große $n \in \mathbb{N}$ unterscheiden $f(x_n)$ und $f(x)$ nur um ein (kleines) $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ für ausreichend große $n \in \mathbb{N}$ muss also auch $f(x_n) > g(x_n)$ gelten

$\Rightarrow \max\{f(x_n), g(x_n)\} = f(x_n) \to f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

Fall $f(x) = g(x)$:

$\Rightarrow \max\{f(x), g(x)\} = f(x) = g(x)$

$\Rightarrow g(x_n) \to g(x) = f(x) \leftarrow f(x_n)$

$\Rightarrow \max\{f(x_n), g(x_n)\} \to f(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$\Rightarrow \max\{f, g\}$ ist stetig

analog für $\min\{f, g\}$ $\square$

<u>Aufgabe 2</u>

Sei (M, d) ein metrischer Raum und (x_n) in M mit $x_n \to x \in M$.

Sei nun $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset M$.

Ist nun eine Folge (y_n) in X gegeben, dann ist durch Beschränktheit von X eine konvergente Teilfolge (y_{n_k}) gegeben mit $y_{n_k} \to y \in M$.

Annahme $y \notin X$: $\Rightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_\varepsilon$ gilt:
$|y_{n_k} - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ wegen $y \notin X$ ist y_{n_k} keine konstante Folge

$\Rightarrow$ im ε-Schlauch für ein $\varepsilon > 0$ um y müssen also unendlich viele Folgeglieder liegen, damit (y_{n_k}) gegen y konvergiert

es gilt aber $y \neq x \Rightarrow |y - x| =: C > 0$

für alle $\varepsilon > 0$ liegen im ε-Schlauch um x unendlich viele Folgeglieder in X

$\Rightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $|x_n - x| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ außerhalb dieses Schlauches liegen also nur endlich viele Glieder (für $n \in \{1, \dots, n_\varepsilon - 1\}$ also nur $n_\varepsilon - 1$ Glieder)

Wählt man also $\varepsilon < C$, so liegt der $(C-\varepsilon)$-Schlauch von y außerhalb des ε-Schlauches von x

$\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele Glieder im $(C-\varepsilon)$-Schlauch um y (nur $n_\varepsilon - 1$ Glieder).

$\Rightarrow$ man findet für jedes $\varepsilon > 0$ kein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq k_\varepsilon$ $|y_{n_k} - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ (y_{n_k}) kann nicht gegen y konvergieren $\lightning$

$\Rightarrow$ $y \in X$ $\Rightarrow$ X ist kompakt $\square$

Aufgabe 3

Sei $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Sei nun eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, welche durch die Matrix A beschrieben wird.

$\Rightarrow$ $f(x) = Ax$ mit $x \in \mathbb{R}^N$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

mit $x_i, a_{mn} \in \mathbb{R}$ und $f_i: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Sei nun (x_n) in $\mathbb{R}^N$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}^N$ gegeben.
Dann gilt $f(x_n) \to f(x)$ gerade dann, wenn:

$$f_i(x_n) \to f_i(x) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, N\}$$

$$f_i(x) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{iN} x_N$$

$\Rightarrow$ (Konvergenz ist verträglich mit Multiplikation und Addition)

$$f_i(x_n) = a_{i1} x_{1n} + \ldots + a_{iN} x_{Nn} \longrightarrow a_{i1} x_1 + \ldots + a_{iN} x_N = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x) \Rightarrow f \text{ ist stetig} \qquad \square$$

Aufgabe 4

Sei $d_p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ mit $p \in [1,\infty)$

$$d_p(x,y) := \left[\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad x,y \in \mathbb{R}^N$$

Dann gibt es für ein j_0 mit $1 \le j_0 \le N$ ein Maximum von $|x_{j_0} - y_{j_0}| := \max\limits_{1 \le j \le N} |x_j - y_j| \ge 0$

Fall $|x_{j_0} - y_{j_0}| = 0$:

$|x_j - y_j| \ge 0$ für alle $j = 1,\ldots,N \Rightarrow |x_j - y_j| = 0$ für alle j

$$\Rightarrow d_p(x,y) = 0 = \max_{1 \le j \le N} |x_j - y_j|$$

Fall $|x_{j_0} - y_{j_0}| > 0$:

Ausklammern des Terms:

$$d_p(x,y) = \left[|x_{j_0} - y_{j_0}|^p \sum_{j=1}^N \frac{|x_j - y_j|^p}{|x_{j_0} - y_{j_0}|^p}\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_{j_0} - y_{j_0}| \cdot \left[\sum_{j=1}^N \frac{|x_j - y_j|^p}{|x_{j_0} - y_{j_0}|^p}\right]^{\frac{1}{p}}$$

– da $|x_{j_0} - y_{j_0}|$ das Maximum war muss der Nenner der Summanden immer größer gleich sein als der Zähler $\Rightarrow \dfrac{|x_j - y_j|}{|x_{j_0} - y_{j_0}|} \le 1$

$$\Longrightarrow \quad d_p(x,y) \leq |x_{j_0} - y_{j_0}| \cdot \left[\sum_{j=1}^{N} 1^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x_{j_0} - y_{j_0}| \sqrt[p]{N} \longrightarrow |x_{j_0} - y_{j_0}|, \; p \to \infty$$

$$d_p(x,y) \geq |x_{j_0} - y_{j_0}| \left[1 \right]^{\frac{1}{p}} = |x_{j_0} - y_{j_0}| \sqrt[p]{1} = |x_{j_0} - y_{j_0}|$$

(alle Summanden der Summe rausstreichen außer dem maximalen
$\Longrightarrow$ durch Ausklammern bleibt 1 stehen)

$\Longrightarrow$ nach Sandwich-Theorem gilt:

$$d_p(x,y) \longrightarrow |x_{j_0} - y_{j_0}| = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j - y_j| = d_\infty(x,y), \; p \to \infty$$

$\square$