Höhere Analysis I – Übung 01

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Seien X eine unendliche Menge und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Seien weiterhin

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty], \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & : A \text{ ist endlich} \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$\nu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty], \quad \nu(A) = \begin{cases} 0 & : A \text{ ist abzählbar} \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind μ und ν additiv.

Beweis:

Es seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben und paarweise disjunkt.
Dann gilt:

$$(A_1,\dots,A_n \text{ sind endlich}) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \text{ ist endlich} \right)$$

Fall $\bigcup_{j=1}^n A_j$ ist endlich:

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = 0 = \sum_{j=1}^n 0 = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$$

Weiterhin gilt: $\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \text{ ist nicht endlich}\right) \overset{(**)}{\Longleftrightarrow}$ (es gibt $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, sodass A_j nicht endlich ist)

Fall $\bigcup_{j=1}^n A_j$ ist nicht endlich:

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \infty$$

$$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \text{ es gibt } j \in \mathbb{N}, j \leq n, \text{ sodass } \mu(A_j) = \infty$$

$$\overset{(\infty+\infty=\infty)}{\Longrightarrow} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) = \infty = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right)$$

$\Longrightarrow \mu$ ist additiv

Weiterhin gilt: $\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \text{ ist abzählbar}\right) \overset{(***)}{\Longleftrightarrow} (A_1,\dots,A_n \text{ sind abzählbar})$
(da Vereinigung von überabzählbaren Mengen sonst wieder überabzählbar wäre)

Fall $\bigcup_{j=1}^n A_j$ ist abzählbar:

$$\Longrightarrow \nu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = 0 \overset{(***)}{=} \sum_{j=1}^n \nu(A_j)$$

Des Weiteren gilt: ($\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ ist nicht abzählbar)
$\iff$ (es gibt ein $j \in \mathbb{N}$, $j \leq n$, sodass A_j nicht abzählbar ist)

Fall $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ ist nicht abzählbar:

$$\Longrightarrow \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \infty$$

$$\Longrightarrow \text{es gibt } j \in \mathbb{N},\ j \leq n, \text{ sodass } \nu(A_j) = \infty$$

$$\overset{(\infty + \infty = \infty)}{\Longrightarrow} \quad \sum_{j=1}^{n} \nu(A_j) = \infty = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$$

$\Longrightarrow$ ν ist additiv

$\square$

μ ist kein Maß.

Beweis: Sei $X = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei nun eine Folge (A_n) in $\mathcal{A}$ mit $A_n = \{n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$A_j \cap A_k = \emptyset \quad \text{für alle } j,k \in \mathbb{N},\ j \neq k$$
$$A_j \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

$$\mu(A_j) = 0 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \quad (\text{da alle } A_j \text{ endlich sind})$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = 0$$

Weiterhin gilt: $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \{ j \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty \quad (\text{da } \mathbb{N} \text{ nicht endlich ist})$$

$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \infty \neq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = 0$$

$\Longrightarrow$ μ ist im Allgemeinen nicht σ-additiv

$\square$

ν ist ein Maß.

Beweis: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, wobei alle A_n paarweise disjunkt sind.

Fall alle A_n sind abzählbar:

·) eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar (siehe Analysis I)

$\Longrightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist abzählbar $\Longrightarrow$ $\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$ da $\nu(A_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$

Fall es gibt ein A_n, welches nicht abzählbar ist:

$\Longrightarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ kann nicht abzählbar sein $\Rightarrow$ $\nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \infty$

es gibt $j \in \mathbb{N}$, sodass A_j nicht abzählbar ist $\Rightarrow$ $\nu(A_j) = \infty$

$(\infty + \infty = \infty)$

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \infty = \nu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

$\Longrightarrow$ ν ist σ-additiv

$\Longrightarrow$ außerdem ist $\emptyset$ abzählbar $\Rightarrow$ $\nu(\emptyset) = 0$ $\Longrightarrow$ ν ist Maß $\square$

Aufgabe 2

Seien $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei f messbar.

Aufgabe 4

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ erfülle

·) $\mu(\emptyset) = 0$
·) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei μ ein Maß. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann definiert man: $B_1 := A_1$
$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus A_n$

$\Rightarrow$ $B_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da alle $A_n \in \mathcal{A}$ und damit auch $A_{n+1} \setminus A_n \in \mathcal{A}$ gelten muss)

$\Rightarrow$ $B_n \cap B_m = \emptyset$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ (Mengen sind paarweise disjunkt)
(induktiv werden alle vorherigen Mengen ausgeschlossen)

$\Rightarrow$ $\bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$\Rightarrow$ $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)$

(σ-additivität) $= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$ (hier sei $A_0 = \emptyset$)

$\left((*)\ \mu(A_j \setminus A_{j-1}) + \mu(A_{j-1}) = \mu(A_j) \right)$ $\overset{(*)}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} [\mu(A_j) - \mu(A_{j-1})]$

$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{n} \mu(A_{j-1}) \right)$

(Teleskopsumme) $= \lim_{n \to \infty} (\mu(A_n) - \mu(\emptyset)) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$

(ii) $\Rightarrow$ (i): es gelte: $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Sei (B_n) eine Folge in $\mathcal{A}$ von paarweisen disjunkten Mengen. Dann definiert man:

$A_1 := B_1$
$A_{n+1} := B_{n+1} \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$

$\Rightarrow$ $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\text{(Voraussetzung)} \quad = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\text{(paarweise disjunkt)} \quad = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} (*)\ \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B) \\ \text{impliziert endliche Additivität} \end{array}\right) \quad \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$$

Dies zeigt gerade die σ-Additivität von μ.

$\Longrightarrow$ (wegen $\mu(\emptyset) = 0$) μ ist ein Maß. $\square$