Analysis II ~ Übung 5

Nina Held – 144753
Clemens Anschütz – 146390
Markus Pawellek – 144645

Übung: Donnerstag 12–14

Aufgabe 1

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$

Die Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 1-x$ sind stetig und damit Riemann-intbar.
In jedem Intervall sind sowohl Elemente aus $\mathbb{Q}$ als auch aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Sei eine beliebige Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$.

für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ gilt also: $\sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = 1 - x_{i-1}$

$$\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = x_{i-1}$$

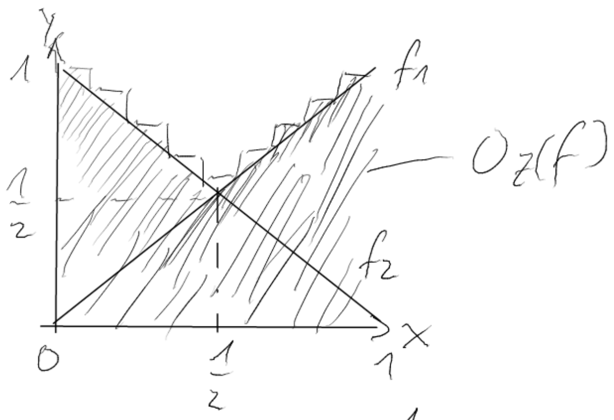
für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ gilt dann: $\sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = x_i$

$$\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = 1 - x_i$$

$$\Rightarrow O_Z(f) \geq \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_1(x)\,dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$



$$\Longrightarrow \quad U_Z(f) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f_2(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad O_Z(f) - U_Z(f) \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Damit kann es nicht für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung gefunden werden.

$\Longrightarrow$ f ist nicht Riemann intbar. $\square$

Aufgabe 2

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit } p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N} \text{ und } p,q \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ jedes Intervall in $[0,1]$ enthält Elemente aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ für Zerlegung $(x_0, \dots, x_n)$ gilt: $\inf\limits_{x_{i-1} < x < x_i} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ für alle Zerlegungen Z gilt: $U_Z(f) = 0$

f ist Riemann-intbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert, sodass

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

$$O_Z(f) - U_Z(f) = O_Z(f) < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann wähle man $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Die Anzahl aller rationalen Funktionswerte $\frac{1}{q}$ mit $q \leq N$ sei K.

Liegen diese Werte am Rand der Intervalle, so können also maximal $2K$ Intervalle existieren mit $\frac{1}{q} > \frac{1}{N}$. Außerdem $\frac{1}{q} < 1$

Sei Zerlegung Z mit $|Z| < \frac{\varepsilon}{4K}$ Dann muss die Fläche unter diesen Funktionswerten kleiner $2K \cdot |Z| = \frac{\varepsilon}{2}$ sein

Alle anderen Werte sind kleiner $\frac{1}{N}$ $\Rightarrow$ Fläche unter diesen Werten ist maximal $1 \cdot \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow O_Z(f) < 2K|Z| + \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f ist Riemann-intbar $\square$

Aufgabe 3

a) $f:[\frac{\pi}{2},\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}$

Sei $\varphi:[\frac{\pi}{2},\pi]\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\cos^2 x$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx}=-2\cos x\sin x$$

$$\Rightarrow \int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\varphi}{1+\varphi}\left(-\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx}\right)dx$$

$$\overset{(\text{Subst.})}{=}-\frac{1}{2}\int\frac{\varphi+1-1}{1+\varphi}\,d\varphi=-\frac{1}{2}\left[\int d\varphi-\int\frac{d\varphi}{1+\varphi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\varphi-\ln|1+\varphi|\right]\overset{(\text{Resubs.})}{=}\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left[\cos^2x-\ln(1+\cos^2x)\right]}}$$

b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos^5x\sqrt{\sin x}$
$\qquad\qquad=(1-\sin^2x)^2\sqrt{1-\sin^2x}\sqrt{\sin x}$

Sei $\varphi:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\sin x$

$$\Rightarrow\frac{d\varphi}{dx}=\cos x=\sqrt{1-\sin^2x}$$

$$\Rightarrow\int(1-\sin^2x)^2\sqrt{1-\sin^2x}\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=\int(1-\varphi^2)^2\sqrt{\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx\overset{(\text{Subst})}{=}\int(1-\varphi^2)^2\sqrt{\varphi}\,d\varphi$$

$$=\int\left(\sqrt{\varphi}-2\varphi^2\sqrt{\varphi}+\varphi^4\sqrt{\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \int \varphi^{\frac{1}{2}} d\varphi - 2\int \varphi^{\frac{5}{2}} d\varphi + \int \varphi^{\frac{9}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}\varphi^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}\varphi^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}\varphi^{\frac{11}{2}}$$

$$\overset{(\text{Resubs})}{=} \sqrt{\sin x}\left(\frac{2}{3}\sin x - \frac{4}{7}\sin^3 x + \frac{2}{11}\sin^5 x\right)$$

c) $f: [e^e, 42] \to \mathbb{R}, f(x) = [x \ln x \ln(\ln x)]^{-1}$

Sei $\varphi: [e^e, 42] \to \mathbb{R}, \ \varphi(x) = \ln(\ln x)$

$$\Longrightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} dx$$

$$\overset{(\text{Subst})}{=} \int \frac{d\varphi}{\varphi} = \ln|\varphi| = \underline{\underline{\ln[\ln(\ln x)]}}$$

Aufgabe 4

f^{-1} existiert, weil f monoton steigend ist

f ist stetig diffbar $\Rightarrow f^{-1}$ ist stetig $\Rightarrow f^{-1}$ ist Riemann-intbar

(auch f ist Riemann-intbar)

$$\Longrightarrow \int f^{-1}(x)dx = \int 1 \cdot f^{-1}(x)dx$$

$$\overset{(\text{part. Int})}{=} x f^{-1}(x) - \int x (f^{-1})'(x) dx$$

$$= x f^{-1}(x) - \int f(f^{-1}(x)) (f^{-1})'(x) dx \quad \text{mit } x = f(f^{-1}(x))$$

Sei $\varphi(x) = f^{-1}(x)$.

$$\Rightarrow \int f^{-1}(x)\,dx = x f^{-1}(x) - \int f(\varphi)\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx$$

(Subst)

$$= x f^{-1}(x) - \int f(\varphi)\,d\varphi$$

$$= x f^{-1}(x) - F(\varphi)$$

(Resubst)

$$= x f^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$$

$\square$