Analysis II — Übung 4

Nina Held — 144753
Clemens Anschütz — 146390
Markus Pawellek — 144645

Übung: Donnerstag 12–14

Aufgabe 1

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und von einheitlichem Vorzeichen.

Dann ist f auf einem abgeschlossenen Intervall stetig.

$\Rightarrow$ f nimmt auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an

- Sei Minimum gegeben durch $f(x_{min})$ mit $x_{min} \in [a,b]$.
- Sei Maximum gegeben durch $f(x_{max})$ mit $x_{max} \in [a,b]$.

$$\Rightarrow \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

g ist von einheitlichem Vorzeichen auf $[a,b]$

$\Rightarrow$ entweder nur negativ oder nur positiv

o.E.: g ist positiv auf $[a,b]$ (ansonsten $-g$ verwenden)

$\Rightarrow$ Multiplikation der Ungleichung mit $g(x)$ ändert diese nicht

$$\Rightarrow \quad f(x_{min})\, g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq f(x_{max})\, g(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x_{min})\, g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x_{max})\, g(x)\, dx$$

(Integrale sind verträglich mit Ungleichungen)

$$\Rightarrow \quad f(x_{min}) \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq f(x_{max}) \int_a^b g(x)\, dx$$

$(f(x_{min}) = \text{konst}, \; f(x_{max}) = \text{konst})$

Weiterhin gilt: $\int_a^b g(x)\,dx = \text{konst} \in \mathbb{R}$

Sei $C := \int_a^b g(x)\,dx$. Dann ist $C \cdot f$ immer noch stetig mit gleichem Maximum und Minimum.

$\overset{(ZWS)}{\Longrightarrow}$ es gibt $\xi \in [a,b]$, sodass für ein $e \in \mathbb{R}$ mit

$$C f(x_{min}) \leq e \leq C f(x_{max}) \text{ gilt:}$$

$$C f(\xi) = e$$

hier sei $e := \int_a^b f(x) g(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \quad f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) g(x)\,dx$$

Dies war gerade zu zeigen. $\square$

Aufgabe 2

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig diffbar. Sei $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt: $$\int_a^b f(x) g(x)\,dx \overset{\text{(part. Int.)}}{=} f(x) G(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) G(x)\,dx$$

weil f diffbar und g Riemann-intbar ist.

f ist monoton $\Longrightarrow$ f' muss von einheitlichem Vorzeichen sein und stetig

$\Longrightarrow$ f' ist Riemann-intbar

$\overset{\text{(vorheriger Satz)}}{\Longrightarrow}$ es gibt $\xi \in [a,b]$, sodass gilt:

$$\int_a^b f'(x) G(x)\,dx = G(\xi) \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$= G(\xi)\left[f(x)\Big|_a^b\right] = G(\xi)\,(f(b)-f(a))$$

Weiterhin gilt: $f(x)\,G(x)\Big|_a^b = f(b)\,G(b) - f(a)\,G(a)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(b)\,G(b) - f(a)\,G(a) - G(\xi)\,(f(b)-f(a))$$

$$= G(\xi)\,f(a) + G(a)\,f(a) + f(b)\left(G(b) - G(\xi)\right)$$

für das oben gewählte ξ

G sei gegeben durch: $G(x) = \int_a^x g(y)\,dy$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(a)\int_a^a g(x)\,dx$$

$$+ f(b)\left(\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^\xi g(x)\,dx\right)$$

$\int_a^a g(x)\,dx = 0$

es gilt $\int_a^\xi g(x)\,dx + \int_\xi^b g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^\xi g(x)\,dx = \int_\xi^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

Dies war gerade zu zeigen. $\square$

Aufgabe 3

a) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin 2x$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int x^2 \sin 2x \, dx$$

$$\overset{\text{(part. Int.)}}{=} -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \int x \cos 2x \, dx$$

$$\overset{\text{(part. Int)}}{=} -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x - \int \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$= \frac{x}{2} \sin 2x + \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \cos 2x$$

b) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int x^3 e^{-x^2} dx$$

Sei nun $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $\varphi(x) = x^2$.

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 2x \qquad \text{(Anwendung Substitutionsregel)}$$

$$\Rightarrow \int x^3 e^{-x^2} dx = \int \varphi(x) \cdot e^{-\varphi(x)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} \, dx$$

$$\overset{\text{(Subst)}}{=} \frac{1}{2} \int \varphi e^{-\varphi} d\varphi \overset{\text{(part. Int)}}{=} -\frac{\varphi}{2} e^{-\varphi} + \frac{1}{2} \int e^{-\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}(\varphi + 1) e^{-\varphi} \overset{\text{(Resubs)}}{=} -\frac{1}{2}(x^2 + 1) e^{-x^2}$$

Aufgabe 4

a) Sei Z_n für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $[0,1]$ mit

$$Z_n = (x_0, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad x_k = \frac{k}{n} \quad \begin{matrix} 0 \leq k \leq n \\ k \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann ist f eine stetige Funktion.

$\Rightarrow$ f ist Riemann-intbar

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} O_{Z_n}(f) = \lim_{n \to \infty} O_{Z_n}(f)}_{\text{wegen } |Z_{n+1}| < |Z_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

f ist monoton steigend $\Rightarrow \sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = x_i^2 = \dfrac{i^2}{n^2}$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = \frac{1}{6n^2} (2n^2 + 3n + 1)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \underline{\underline{\frac{1}{3}}}, \; n \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

b) Es sei die gleiche Familie von Zerlegungen Z_n für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Dann ist f stetig und monoton steigend.

$\Rightarrow$ f ist Riemann-intbar

$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt: $e^{\frac{1}{n}} < 1$ für $n \geq n_0$

$0 < e^{\frac{1}{n}}$ $\Rightarrow$ Anwendung geometrische Summe $q := e^{\frac{1}{n}}$

$$O_{Z_n}(f) = \frac{1}{n}\left[\frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{q^{n+1}-q}{q-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \frac{e e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} (e-1)$$

$$n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k k!}\right) - 1\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-1} k!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + \dots \to 1, \quad n \to \infty$$

$$e^{\frac{1}{n}} \to e^0 = 1, \quad n \to \infty$$

$\Rightarrow$ alle Grenzwerte in obiger Gleichung existieren

$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) = \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} (e-1) \to \frac{1}{1}(e-1), \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$$