21.5.14

Theorem (Polarzerlegung)

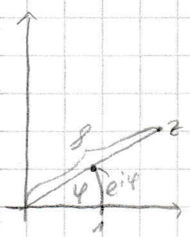
Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ex. eindeutig $\rho > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $z = \rho e^{i\varphi}$

Bew.: Es gilt

$$z = \underbrace{|z|}_{=\rho} \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{|\,|=1} \Rightarrow \frac{z}{|z|} \in S \overset{\text{Thm.}}{\Rightarrow} \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi} \text{ mit eindeutigem } \varphi \in [0, 2\pi]$$

$\square$

Definition



Eine Darstellung von $z \in \mathbb{C}$ mit $z = \rho e^{i\varphi}$ mit $\rho \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ heißt Polarzerlegung.

Es heißt dann ρ der Betrag von z und φ das Argument von z

Bem.:

$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$= \rho e^{i\varphi} \quad \text{mit } \rho = |z_1 \cdot z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2 \,, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

13. Metrische Räume und topologische Grundbegriffe

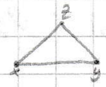
1. Metrische Räume

Definition (Metrik – Abstandsmessung)

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung

$d: X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ d ist nicht ausgeartet
- $d(x,y) = d(y,x)$ (alle $x,y \in X$) Symmetrie
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $(x,y,z \in X)$ Δ-Ugl



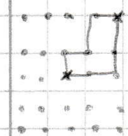
Ein Paar (X,d) bestehend aus einer Menge X und Metrik d heißt metrischer Raum

Bem:
(X,d) metr. Raum, $Y \subset X \Longrightarrow (Y, d|_{Y\times Y})$ metr. Raum

Beispiele

- Auf $\mathbb{R}$ wird durch
  $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$, $(x,y) \longmapsto |x-y|$ eine Metrik definiert

  Bew: Folgt aus bekannten Eigenschaften von $|\,|$



- Auf $\mathbb{Z}^N = \{(n_1,\dots,n_N) : n_j \in \mathbb{Z}\}$ wird durch
  $d: \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N \longrightarrow [0,\infty)$, $d(p,q) = \sum_{j=1}^N |p_j - q_j|$
  eine Metrik definiert "Blockmetrik / Manhattan Metrik"
- Auf $\mathbb{R}^N$ wird durch $d: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$, $d(x,y) = \sum_{j=1}^N |x_j - y_j|$
  eine Metrik definiert
- Auf $\mathbb{R}^N$ wird die ℓ^∞-Metrik definiert durch
  $d_\infty: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$, $d_\infty(x,y) = \max_{j=1,\dots,N} |x_j - y_j|$
- Auf $\mathbb{R}^N$ wird die Euklidische Metrik definiert durch
  $d_2: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$, $d_2(x,y) = \left(\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|\right)^{1/2}$

  Symmetrie: ✓
  nicht ausgeartet: ✓
  Δ-Ugl: später
- (Für $p > 1$ wird allg. $d_p: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$, $d_p(x,y) = \left(\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^p\right)^{1/p}$)

Übung: "$d_\infty(x,y) = \lim_{p\to\infty} d_p(x,y)$"

- Auf einer beliebige Menge X wird durch

$$d_0 : X \times X \longrightarrow [0, \infty), \quad d_0(x,y) = \begin{cases} 1 : x \neq y \\ 0 : x = y \end{cases} = 1 - \delta_{x,y}$$

$$\left(\delta_{x,y} = \begin{cases} 1: x = y \\ 0: x \neq y \end{cases} \right)$$ eine Metrik eingeführt

Bew.:

- $d_0(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $d_0(x,y) = 1 - \delta_{x,y} = 1 - \delta_{y,x} = d_0(y,x)$
- $d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(z,y)$
  - $x = y$: $LS = 0$, $RS \geq 0$
  - $x \neq y$: Es gilt $z \neq x$ od. $z \neq y \Rightarrow RS \geq 1$ ✓

- Auf $\mathcal{A}$ endlich ("Alphabet") wird durch $d_0(a,b) = 1 - \delta_{a,b}$ eine Metrik eingeführt

- Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge und

$w_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{\omega} = \{ x : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} \}$ = Folge mit Werten in $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \{ a, b, \ldots, z, A, B, \ldots, Z, ., ,, ␣, ?, ! \}$

$\mathcal{A} = \{ 0, 1 \}$

Dann wird auf $w_{\mathcal{A}}$ durch

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} d_0(x(j), y(j)) / 2^j = \sum_{j=1}^{\infty} 1 - \delta_{x(j)-y(j)} / 2^j \quad (\leq 1)$$

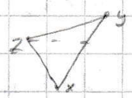
Bew.:

- $d(x,y) = 0 \iff d_0(x(j), y(j)) = 0$ für alle j
  $\iff x(j) = y(j)$ für alle j
  $\iff x = y$
- Symmetrie: Jeder Summand ist symmetrisch
- Δ-Ugl: Jeder Summand erfüllt Δ-Ugl

21.5.14

Proposition (Umgekehrte Δ-Ugl)

Sei (X,d) metr. Raum. Dann gilt für alle $x,y,z \in X$



$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

Bew:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z)$$

$$d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

$\square$

Definition (Norm - Länge eines Vektors)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Eine Abb. $\| \; \| : V \to [0,\infty)$ heißt Norm, wenn gilt

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \alpha \in \mathbb{K},\ x \in V$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Bem:

Auch für Normen gilt eine umgekehrte Δ-Ugl

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$$

Bew:

$$\|x\| = \|x+y-y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$$

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|$$

$\square$

Definition / Proposition

Sei V ein VR mit Norm $\| \; \|$. Dann wird auf V durch

$d_{\|\,\|} : V \times V \to [0,\infty)$, $d_{\|\,\|}(x,y) = \|x-y\|$ eine Norm induziert

Beispiele

- Auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ wird durch $| \; |$ eine Norm definiert
- Auf $V = \mathbb{R}^N$ oder $V = \mathbb{C}^N$ wird durch

  $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{N} |x(j)|$ eine Norm gegeben "ℓ^1-Norm"

  Dann gilt $d_{\|\,\|_1} = d_1$

•) Auf $V=\mathbb{R}^N$ oder $V=\mathbb{C}^N$ wird durch

$\|x\|_\infty := \max_{j\in 1,\dots,N} |x(j)|$ eine Norm gegeben "ℓ^p-Norm", "Max-Norm"

Dann gilt $d_{\|\cdot\|_\infty} = d_\infty$

Proposition (Skalarprodukt induziert Norm)

Sei V ein VR über $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \longrightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt

Dann ist

$$\|\ \| : V \longrightarrow [0,\infty),\ \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

eine Norm auf V

Bem.: $\langle\cdot,\cdot\rangle \rightsquigarrow \|\cdot\| \rightsquigarrow d_{\|\cdot\|}$

Bew.:

•) $\|x\|=0 \Longleftrightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x=0$ (Skalarp. nicht ausg.)

•) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x,x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x,x\rangle}$

•) Δ-Ugl:
$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + |\langle x,y\rangle| + |\langle y,x\rangle| + \|y\|^2 \\ \text{CS}\quad &\leq \|x\|^2 + \|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Beispiel

Auf $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{C}^N$) wird durch $\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^N x_j y_j$ ein Skalarpr.

gegeben. Die zugeh. Norm ist gegeben durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j|^2}$$

Die zugehörige Metrik ist die eukl. Metrik

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^2}$$

Beispiel: Der Vektorraum ℓ^2

Betrachten die Menge $\ell^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2 < \infty\}$

Dann ist ℓ^2 ein Untervektorraum aller komplexwertiger Folgen.

Für bel. $x, y \in \ell^2$ ist die Summe

$\sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)}$ absolut konvergent und die Abbildung

$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)}$ ist ein

Skalarprodukt.

Bew:

1. Beh.: ℓ^2 ist Untervektorraum aller komplexwertiger Folgen

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in \ell^2$

$\Rightarrow$ •) $\alpha x \in \ell^2$ (klar)

•) $x + y \in \ell^2$, da $|x(i) + y(i)|^2 \leq 2|x(i)|^2 + 2|y(i)|^2$

2. Beh.: $x, y \in \ell^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)}$ ist absolut konvergent

klar $(2|x(i)||y(i)| \leq |x(i)|^2 + |y(i)|^2)$

3. Beh.: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Skalarprodukt

klar (folgt aus Rechenregeln)

$\square$

Definition (Kugeln, Bälle)

Sei (X, d) metrischer Raum und $x \in X$.

Dann heißt für $r \geq 0$

$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ abgeschlossene Kugel vom Radius r um x

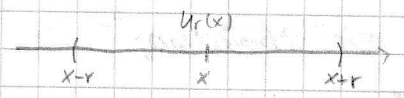
$U_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ offene Kugel vom Radius r um x

Beispiele

- $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq r\} = [x-r, x+r]$

$U_r(x) = (x-r, x+r)$



- $\mathbb{C}$, $d(x,y) = |x-y|$

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid \underbrace{|x-y|}_{} \leq r\}$

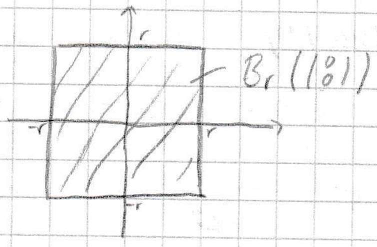
$\sqrt{(\mathrm{Re}\,x - \mathrm{Re}\,y)^2 + (\mathrm{Im}\,x - \mathrm{Im}\,y)^2} \leq r$ Kreis

$U_r(x) = B_r(x) \setminus$ Kreisbogen

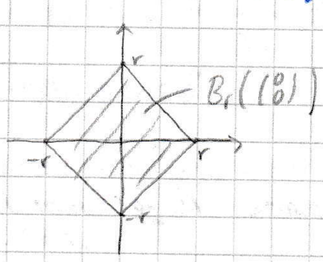
- $\mathbb{R}^2$ mit $d_2\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$\rightarrow B_r(v), U_r(v)$ sehen genauso aus, wie bei $\mathbb{C}$

- $\mathbb{R}^2$ mit $d_\infty\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$



- $\mathbb{R}^2$ mit $d_1\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$



- $\emptyset \neq X$ eine bel. Menge

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 : x = y \\ 1 : x \neq y \end{cases}$$

$B_{1/2}(x) = \{x\}$ $\quad B_2(x) = X$, $U_1(x) = \{x\}$

22.5.14

Definition (Konvergenz in metrischen Räumen)

Sei (X, d) metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$ falls

$d(x_n, x) \to 0, n \to \infty$

In diesem Fall heißt x Grenzwert von (x_n)

Schreibweisen: $x_n \to x, n \to \infty$; $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Bem.:

Grenzwerte von Folgen sind Eindeutig:

Angenommen $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} y$

$\Rightarrow d(x,y) \leq \underbrace{d(x, x_n)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{d(x_n, y)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$

$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Lemma

Sei (X, d) ein metr. Raum und x_n eine Folge in X und $x \in X$.

Dann gilt: $x_n \to x \iff$ für jede nicht leere, offene Kugel K um x ein n_K ex., so dass $x_n \in K$ für alle $n \geq n_K$

Bew.:

Jede offene Kugel K um x hat die Form $K = U_r(x)$ für ein $r > 0$

Daraus folgt die Aussage sofort

$\square$

Folgerung (Stetigkeit von Norm und Metrik)

- Sei (X, d) ein metr. Raum. Gilt $x_n \to x$, $y_n \to y$, so folgt $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$
- Sei V ein Vektorraum mit Norm $\| \ \|$ und zugehöriger Metrik d. Gilt $x_n \to x$, so folgt $\|x_n\| \to \|x\|$.

Bew.:

$$\cdot) \ |d(x_n, y_n) - d(x,y)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x, y)|$$
$$\overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)|$$
$$\overset{\text{umgek. }\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \underbrace{d(y_n, y)}_{\to 0, n\to\infty} + \underbrace{d(x_n, x)}_{\to 0, n\to\infty} \to 0, n \to \infty$$

•) $\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \overset{\text{Umgek. }\Delta\text{-Ugl}}{\leq} \|x_n - x\| \to 0,\ n \to \infty$ (nach Vor.)

$\square$

Beispiel

•) Konvergenz der diskreten Metrik

$\mathcal{A}$ bel. Menge, d_0 diskr. Metrik

$x_n \to x,\ n \to \infty \iff$ es ex. N, so dass $x_n = x$ für alle $n \geq N$

(Denn $d_0(x_n, x) \in \{0, 1\}$)

•) Konvergenz in $W_{\mathcal{A}} = \{x : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\}$ mit Metrik

$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_0(x(i), y(i))}{2^i}$

Dann gilt: $x_n \xrightarrow{d} x,\ n \to \infty \iff x_n(i) \xrightarrow{d_0} x(i)$, für alle $i \in \mathbb{N}$

(d.h. für alle i gilt schließlich $x_n(i) = x(i)$)

Bew:

"$\Rightarrow$" $i \in \mathbb{N}$ bel. Dann gilt:

$d_0(x_n(i), x(i)) \leq 2^i d(x_n, x)$

"$\Leftarrow$" $L \in \mathbb{N}$ bel. Dann gibt es ein n_L mit

$x_n(k) = x(k)$, für alle $n \geq n_L$ und $k = 1, \dots, L$

$\Rightarrow d(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_0(x_n(i), x(i))}{2^i} \overset{n \geq n_L}{=} \sum_{i=L+1}^{\infty} \frac{d_0(x_n(i), x(i))}{2^i}$

$\overset{d_0 \leq 1}{\leq} \sum_{i=L+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^L}$

L bel $\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Konvergenz in $\mathbb{R}^N$ (bzw. $\mathbb{C}^N$)

Sei $x^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_N^{(n)})$ eine Folge im $\mathbb{R}^N$

und $x = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$

Dann gilt:

$x^{(n)} \xrightarrow{d_1} x \iff \xi_j^{(n)} \to \xi_j$ für jedes $j = 1, \dots, N$

(Denn: $d_1(x^{(n)}, x) = \sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|$)

$x^{(n)} \xrightarrow{d_2} x \iff \xi_j^{(n)} \to \xi_j$ für jedes $j = 1, \dots, N$

(Denn: $d_2(x^{(n)}, x) = (\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^2)^{1/2}$)

$x^{(n)} \xrightarrow{d_\infty} x \iff \xi_j^{(n)} \to \xi_j$ für alle $j = 1, \dots, N$

22.5.14

Theorem (Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{C}^N$)

Ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,\infty)$ eine bel. Norm, so gibt es

Konstanten $c, C > 0$ mit

$$\|x\| \le C\|x\|_1 \ , \quad \|x\|_1 \le c\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^N$$

Entspr. gilt in $\mathbb{C}^N$