$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig diffbar in p mit $f'(p) \neq 0$

$g := f^{-1}: f(a,b) \to (a,b)$

mit $g'(f(p)) = \dfrac{1}{f'(p)}$

Beispiele: (Umkehrfunktion)

$g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(y) = y^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{y}$ mit $k \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$

__Allgemeine Potenz:__

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ definiert man

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln x)$$

Das nennt man die α-te Potenz von x ("x hoch α").

Es folgt sofort:

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\quad x^\alpha y^\alpha = (x \cdot y)^\alpha$

Bemerkung zur Wohldefiniertheit:

Für $k \in \mathbb{Z}$ wurde x^k doppelt definiert. Beide sind aber gleich:

$$\begin{aligned} \exp(k \ln x) &= \exp(\ln x + \dots + \ln x) \\ &= \exp(\ln x) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln x) \\ &= x \cdots x \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $P_\alpha: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $P_\alpha(x) = x^\alpha$. Dann ist P_α diffbar mit $P_\alpha'(x) = \alpha P_{\alpha-1}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Beweis: $[\exp(\alpha \ln x)]' = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \alpha \exp((\alpha-1) \ln x)$

$\square$

Sei nun $\alpha > 0$ gegeben. $\exp_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_\alpha(x) = \alpha^x$
Dann ist $\exp_\alpha$ diffbar mit:

$$(\exp_\alpha(x))' = \ln\alpha \exp_\alpha x$$

Bemerkung: Für $\alpha > 0$ mit $\alpha \neq 1$ ist $\exp_\alpha$ streng monoton. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis α und wird mit $\log_\alpha$ bezeichnet.

Notation: $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Damit gilt $\ln e = 1$

$$\Rightarrow \exp(x) = \exp(x \ln e) =: e^x$$

Bemerkung: Für $x > 0$ mit $x^0 = 1$ definiert.
Für $\alpha = 0$ und $x > 0$ ist $\alpha^x = 0^x = 0$ zu def.

Differenzierbare Funktionen auf Intervallen:

Wir betrachten meist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit:

- f stetig in $[a,b]$
- f diffbar in (a,b)

f' enthält wichtige Information über Extremwerte und Monotonie
Wesentlich ist dabei der Mittelwertsatz.

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben.
Es hat f in $\xi \in I$ ein lokales Maximum bzw Minimum, wenn $\delta > 0$ existiert mit $f(x) \leq f(\xi)$ bzw $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in I$ mit $|x - \xi| < \delta$

Maxima und Minima werden auch als Extrema bezeichnet.
Gilt $f(x) \geq f(\xi)$ bzw $f(x) \leq f(\xi)$ für alle $x \in I$, so hat f ein globales Minimum bzw. Maximum.
Bei strikter Ungleichung auch als striktes Minimum bzw. Max.

Theorem: (Notwendige Bedingung Extremum)

Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar. Hat f in $\xi \in (a,b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis: f hat in ξ ein lokales Maximum (o.E)

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \text{ für } x \text{ nahe } \xi \quad x < \xi$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \text{ für } x \text{ nahe } \xi \quad x > \xi$$

Nun bildet man die rechts- und linksseitigen Grenzwerte der Ableitung an $f(\xi)$

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$$

$\square$

Bemerkung:
- Bedingung nur notwendig nicht hinreichend
  Bsp: $f:(-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$
- Eine stetige Funktion auf $[a,b]$ muss ein Extremum besitzen. (können aber auf Rand liegen)

Theorem: (Rolle)

Sei $0 < a < b < \infty$. Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar. mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis:

Fall 1: $f(a) = f(b) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0$ für $x \in (a,b)$

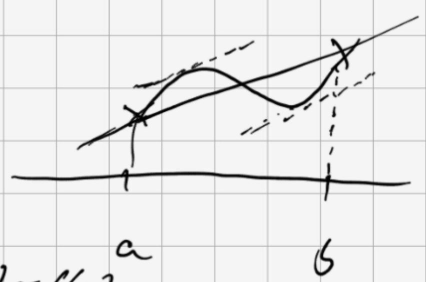
$\Rightarrow$ Annahme der Extrema am Rand lässt konstante Funktion folgen

Fall 2: Extremum befindet sich im Inneren.

$\Rightarrow \quad f'(\xi) = 0$ (notwendige Bed.) $\square$

Theorem: (Mittelwertsatz)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit
$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Beweis:

Sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$

mit $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$\Rightarrow \quad F(a) = F(b)$ (stetig und diffbar)

$\overset{\text{(Rolle)}}{\Longrightarrow}$ es existiert $\xi \in [a,b]$ mit $F'(\xi) = 0$

$$\Rightarrow \quad F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \square$$

Theorem: (Verallgemeinerung Mittelwertsatz)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$$

(Bemerkung: MWS folgt aus $f = f$ und $g = id$)

Beweis: Betrachte

$$F(x) = (f(b)-f(a))\,(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))\,(f(x)-f(a))$$

Dann ist F stetig und diffbar.
Weiterhin gilt $F(a) = F(b)$

$\overset{\text{(Rolle)}}{\Longrightarrow}$ es existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$F'(\xi) = 0 = (f(b)-f(a))\,g'(\xi) - (g(b)-g(a))\,f'(\xi)$$

$$\Longrightarrow (f(b)-f(a))\,g'(\xi) = (g(b)-g(a))\,f'(\xi) \qquad \square$$

Theorem: (Charakterisierung Monotonie mit Ableitung)
Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar. Dann gilt:

a) f ist konstant $\Longleftrightarrow f' = 0$
b) f monoton wachsend / fallend $\Longleftrightarrow f' \geq 0$ / $f' \leq 0$
c) $f' > 0$ / $f' < 0 \Longrightarrow f$ ist strikt wachsend / fallend
(Bemerkung c: nur eine Richtung gilt)

Beweis:
a) $f \equiv c$ mit $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
$= \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$ (und umgekehrt) $\square$

b) o.E. $f(y) \geq f(x)$ für $y > x \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \geq 0$
$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} = f'(\xi)$ mit $\xi \in (x,y)$ nach MWS
$\Longrightarrow$ monoton wachsend $\square$

c) wie b

Folgerung: Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar. mit $f' = g'$. Dann gilt $f - g \equiv$ konst. Gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x)$, so folgt $f \equiv g$.

Beweis: Sei $h := f - g$. Dann gilt h stetig und diffbar.
$h' = f' - g' \equiv 0 \implies h =$ konst. $\square$

Definition: Ist $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und auch f' diffbar, so heißt f zweimal diffbar und man nennt $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f.

Bemerkung: Ist f diffbar und $f': (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f stetig diffbar.

Theorem: (Hinreichende Bedingung Extrema)
Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar. Gilt für ein $\xi \in [a,b]$ $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0 \,/\, f''(\xi) < 0$ so hat f in ξ ein striktes lokales Minimum / Maximum.

Beweis: o.E. $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) < 0$

$$\implies 0 > \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{x - \xi}$$

$\implies$ für x nach ξ: $\quad x > \xi \implies f'(x) < 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x < \xi \implies f'(x) > 0$

$\implies$ für $x \to \xi$ folgt $f'(\xi) = 0$ mit Definition für Maximum $\implies f(\xi)$ ist lokales Maximum $\square$

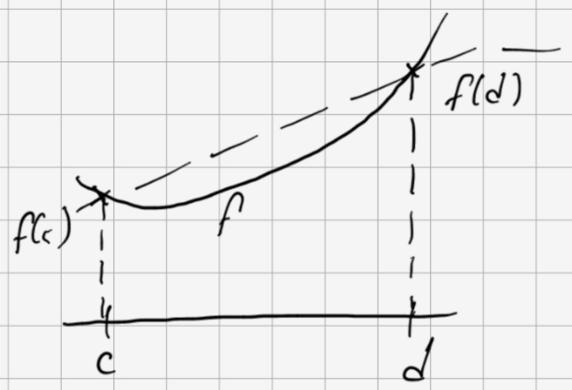
Bemerkung: Bedingung ist nicht notwendig (Bsp. $f(x) = x^4$).

Definition: (Konvex und Konkav)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann heißt f konkav / konvex, wenn für alle $c, d \in I$ mit $c < d$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$f(c + \lambda(d-c)) \geq / \leq f(c) + \lambda[f(d) - f(c)]$$

geometrische Deutung:



mit Durchlauf von 0 nach 1 mit λ läuft man x von c nach d durch $(c + \lambda(d-c))$

$\Rightarrow$ Gerade durch zwei Punkte muss ober- oder unterhalb liegen

Bemerkung: f konvex $\Leftrightarrow$ $-f$ konkav

Proposition: I offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ konvex oder konkav. Dann ist f stetig.

Beweis: o.E. f konvex

Sei $\xi \in I$ beliebig. Wähle $x, y \in I$ mit $x < \xi < y$.
Sei g_1 die Gerade durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$.
Sei g_2 die Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ und $(y, f(y))$.
Aufgrund von Konvexität gilt auf (ξ, y), dass f
- unterhalb von g_2 verläuft
- oberhalb von g_1 verläuft

$\Rightarrow$ Grenzwert für $x \to \xi$ $\square$

theorem:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) Ist f diffbar, so ist f konkav / konvex, genau dann, wenn f' monoton fallend / wachsend ist.

b) Ist f zweimal diffbar, so ist f konkav / konvex genau dann, wenn $f'' \leq 0$ / $f'' \geq 0$

Beweis: Es folgt b aus a.

Sei f' monoton wachsend. ($\overset{?}{\Rightarrow}$ f konvex)

Sei $x < \xi < y$ in I. Sei g_1 die Gerade durch $(x, f(x))$ $(\xi, f(\xi))$ und g_2 Gerade durch $(\xi, f(\xi))$, $(y, f(y))$.

Dann gilt nach MWS Steigung von $g_1 = f'(\eta)$ für ein $\eta \in (x, \xi)$. $\Rightarrow$ $g_2' = f'(\lambda)$ für ein $\lambda \in (\xi, y)$

f' monoton wachsend $\Rightarrow$ $f'(\lambda) \geq f'(\eta)$

$\Rightarrow$ $f(\xi)$ liegt unterhalb der Sekanten $(x, f(x)), (y, f(y))$

$\Rightarrow$ f konvex $\square$

Notation: (Landau-Symbole)

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ gegeben und p ein Berührpunkt von D. Dann:

$$f = o(g) \quad \text{(an Stelle } p\text{)}$$
$$f(x) = o(g(x))$$

$$\lim_{x \to p} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

$f = O(g)$, $x \to p$ $\quad$ es existiert ein $C > 0$ mit
$f(x) = O(g(x))$, $x \to p$ $\quad$ $|f(x)| \leq C\,|g(x)|$ für x nahe p.

Folgerung: Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

a) Ist f n-mal diffbar (mit $n \geq 1$), so gilt

$$f(x) = P_{n,p}(x) + o((x-p)^n)$$

b) Ist f $(n+1)$-mal diffbar (mit $n \geq 1$) so gilt:

$$f(x) = P_{n,p}(x) + O((x-p)^{n+1})$$

Definition: (Taylorreihe)
Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ beliebig oft diffbar, so können wir die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt p bilden als:

$$T_{f,p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$$

Bemerkung:
- konvergent für $x=p$
- in allen anderen Punkten ist Konvergenz unklar
- selbst wenn die Reihe konvergiert, ist nicht klar ob $T_{f,p}=f$ gilt

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$$

Proposition: (Potenzreihe ist Taylorreihe)
Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\varrho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ und $R=\frac{1}{\varrho}$ (falls $\varrho>0$) bzw. $R=\infty$ ($\varrho=0$) und

$$f(-R+p, R+p)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$$

Dann ist f beliebig oft diffbar und es gilt

$$f^{(n)}(p) = a_n\cdot n! \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}_0$$

Insbesondere ist die Taylorreihe von f gerade die f definierende Potenzreihe.

Beweis: f ist diffbar: $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-p)^{n-1} = g$, wobei Konvergenzradius wieder R ist
$\Rightarrow$ Induktion möglich

$$f(p)=a_0 \qquad f'(p)=a_1$$

$\square$

Betrachte f, g diffbar in $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = g(a) = 0$
$g'(a) \neq 0$

Dann gilt x nahe a:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \longrightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Theorem: (L'Hospital für „$\frac{0}{0}$" bei $a \in \mathbb{R}$)

Seien $a < b$ und $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a, b) mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$ gegegeben.
Es gelte $f(a) = g(a) = 0$.
Existiert der Grenzwert $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ggf. mit $\pm\infty$)

so existiert auch $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: $g(x) \neq 0$ für $x \neq a$ für x nahe a
wegen

$$g(x) - g(a) \overset{(\text{MWS})}{=} \underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0}(x-a)$$

Es gilt nach MWS: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

mit $\xi \in (a, x)$. Für $x \to a$ muss auch $\xi \to a$.
Damit folgt Behauptung. $\square$

Theorem: (L'Hospital für „$\frac{0}{0}$" bei $\pm\infty$)

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : (c, \infty) \to \mathbb{R}$ diffbar mit $g'(x) \neq 0$. Es gelte

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} g(x)$$

Existiert $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: Existiert jeweils der Grenzwert, so gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{f(\frac{1}{t})} \overset{(L'H)}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \square$$

Bemerkung: Entsprechendes für $x \to -\infty$

Theorem: (L'Hospital für „$\frac{\infty}{\infty}$" von links bzw. rechts)

Sei $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a = \infty$. Seien f, g stetig und diffbar mit $g'(x) \neq 0$ auf einem offenen Intervall links von a (d.h. $(a-r, a)$) falls $a \in \mathbb{R}$ bzw. (c, ∞) falls $a = \infty$. Es gelte:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty = \lim_{x \to a^-} g(x)$$

Existiert $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (auch $\pm\infty$), so existiert auch

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: Nur der Fall $a = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

$\Longrightarrow$ (Grenzwert) Für alle $S > 0$ existiert $d > 0$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < S \quad \text{für alle } \xi > d$$

Nach MWS für $x > d$

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq S$$

(g monoton)

$$\Longrightarrow \quad f(x) - f(d) \geq S\,(g(x) - g(d))$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq S - S \underbrace{\frac{g(d)}{g(x)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{f(d)}{g(x)}}_{\to 0}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{S}{2} \quad \text{für große } x$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \to \infty, \; x \to \infty$$

$\square$

Bemerkung: L'Hospital macht 2 Voraussetzungen:

- f,g haben gleiche Werte (0 oder ∞)
- Grenzwert der Quotienten der Ableitung existieren

Ist f stetig diffbar in (a,b) und $p \in (a,b)$

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \neq p}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{1} = f'(p)$$

Beispiel: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{\text{(Hosp)}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{2x}$

$\overset{\text{(Hosp)}}{=} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (Grenzwerte existieren von rechts nach links)

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \overset{\text{(Hosp)}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

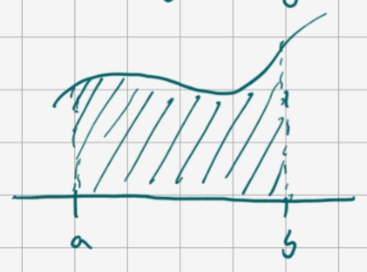
Bemerkung: – auch verwendbar für „$0 \cdot \infty$"

Beispiel: $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$

$\overset{\text{(Hosp)}}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0$

Das Riemann-Integral in einer Dimension

Idee: Ordne der Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ die Fläche unter dem Graphen zu. (unterhalb x-Achse wird sie negativ gezählt)

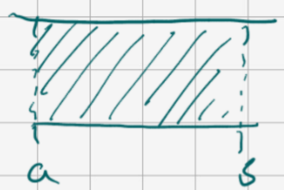


Das nennt man das Riemann-Integral von f über $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

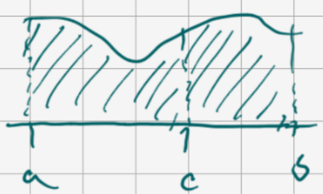
Es soll gelten:

- $f \equiv c \implies \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$



- $c \in [a,b]$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

- $f \leq g \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$



Sind f_n, g_n mit $n \in \mathbb{N}$ zulässige Funktionen mit

$$f_n \leq g \leq g_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\int_a^b (g_n - f_n)(x)\,dx \to 0, \quad n \to \infty$$

so gilt: $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx$

Es stellt sich heraus, dass Integrale eindeutig sind und existieren. Es ist linear mit gleichmäßiger Konvergenz verträglich und alle stetigen Funktionen sind Riemann integrierbar.

Grundlegendes zum Riemann-Integral:

Situation: $-\infty < a < b < \infty$, $f[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

Definition: (Zerlegung)

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Ein Tupel $(x_0, \dots, x_n)$ von reellen Zahlen heißt Zerlegung von $[a,b]$, wenn gilt:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Ist $Z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung, so ist ihre Feinheit $|Z|$ definiert durch

$$|Z| = \max_{i=1,\dots,n} \{x_i - x_{i-1}\}$$

Eine Zerlegung Z' heißt Verfeinerung der Zerlegung Z, wenn:

$(Z' = (y_0, \dots, y_m)\ ;\ Z = (x_0, \dots, x_n))$

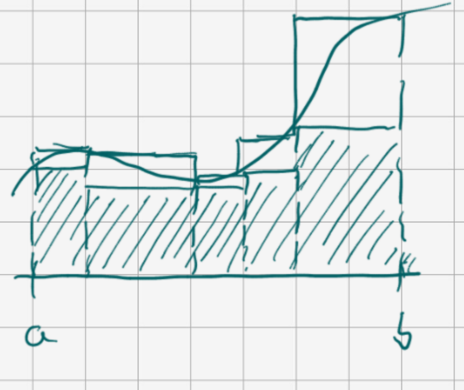
$$\{x_0, \dots, x_n\} \subset \{y_0, \dots, y_m\}$$

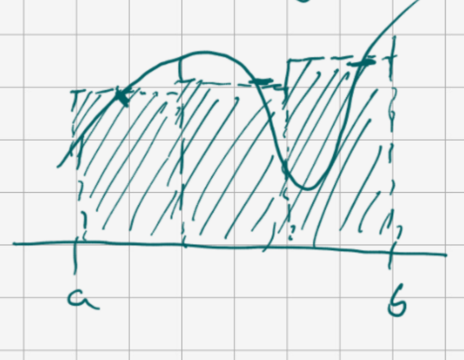
Dann schreibt man auch $Z \subset Z'$

Man definiert die Zerlegung $Z \cup Z'$ mit den Punkten

$$\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$$

Plan: Approximation von Funktion von oben und unten oder von „irgendwo"



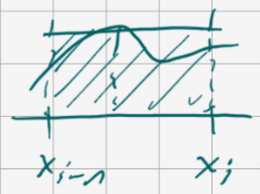


Definition: (Ober- und Untersummen)

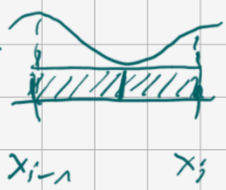
Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann Dann definiert man zu jeder Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ die Obersumme von f bezüglich der Zerlegung Z durch

$$O_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} (f(t))$$

O_Z:



U_Z:



und die Untersumme von f bezüglich Z durch

$$U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} (f(t))$$

Proposition: (Eigenschaften von O_Z und U_Z)

a) $U_Z(f) \leq O_Z(f)$ für alle Zerlegungen Z

b) $Z_1 \subset Z_2 \implies U_{Z_2}(f) \geq U_{Z_1}(f)$, $O_{Z_2}(f) \leq O_{Z_1}(f)$

c) Z_1, Z_2 beliebig $\implies U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$

Beweis: a) $O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup(f(t)) - \inf(f(t)) \geq 0$

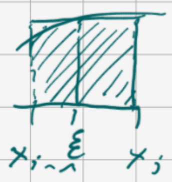
b) Aufspaltung von Intervall $\Rightarrow$ neues inf / sup

c) $U_{Z_1}(f) \overset{(b)}{\leq} U_{Z_1 \cup Z_2}(f) \overset{(a)}{\leq} O_{Z_1 \cup Z_2}(f) \overset{(b)}{\leq} O_{Z_2}(f)$ $\square$

Definition: (Riemann-Summe)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und Z eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegeben. Dann definiert man für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt die Riemannsumme von f bezüglich Z und Stützstellen ξ durch

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$



Lemma: (Charakterisierung Riemann-Integrierbarkeit)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Äquivalent:

(i) $\sup\limits_{Z} U_Z(f) = \inf\limits_{Z} O_Z(f)$

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $O_Z(f) - U_Z(f) \leq \varepsilon$

(iii) Es existiert $I_f \in \mathbb{R}$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $|S_{Z,\xi}(f) - I_f| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen Z (und beliebige Wahl von ξ) mit $|Z| < \delta$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$ für alle Z_1, Z_2 von $[a,b]$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ es existieren Z_1, Z_2 mit $0 \leq O_{Z_1}(f) - U_{Z_2}(f) < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ für $Z = Z_1 \cup Z_2$ gilt dann

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \quad \text{(nach Proposition)}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): ✓

(i) / (ii) $\Rightarrow$ (iii):

Setze $I_f = \inf O_Z(f) = \sup U_Z(f)$.
Sei $C \geq 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$.
Nach (I) und (ii) existiert $\tilde{Z} = (x_0, \dots, x_N)$ mit

$$(*) \quad I_f - \frac{\varepsilon}{2} \leq U_{\tilde{Z}}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) \leq I_f + \frac{\varepsilon}{2}$$

Für eine (sehr feine) Zerlegung Z liegen nun die Terme von $S_{Z,\xi}(f)$ zwischen den Termen von $O_{\tilde{Z}}(f)$ und $U_{\tilde{Z}}(f)$ außer an den Punkten $(x_0, \dots, x_N)$.
Genauer gilt für jede Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ mit Feinheit δ und beliebiger Wahl von ξ.

$$(**) \quad U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \leq S_{Z,\xi}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC$$

aus $(*)$ und $(**)$ folgt

$$I_f - \frac{\varepsilon}{2} - \delta NC \overset{(*)}{\leq} U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \overset{(**)}{\leq} S_{Z,\xi}(f)$$
$$\overset{(**)}{\leq} O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC \overset{(*)}{\leq} I_f + \frac{\varepsilon}{2} + \delta NC$$

Für $\delta > 0$ mit $\delta NC < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt dann die gewünschte Aussage.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $\delta > 0$ zu ε gemäß (iii).
Dann gilt für jede Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$ und beliebiger Wahl von ξ also:

$$I_f - \varepsilon \leq S_{Z,\xi}(f) \leq I_f + \varepsilon \quad \text{(nach (iii))}$$

$$\Rightarrow I_f - \varepsilon \leq U_Z(f) \leq O_Z(f) \leq I_f + \varepsilon$$
$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) \leq 2\varepsilon$$

$\square$

Bemerkung:

Hinter (iii) des Lemma verbirgt sich die Konvergenz eines Netzes (Verallgemeinerung von Folgen).

Notation:

In Situation (iii) des Lemma schreiben wir:

$$I_f = \lim_{|z| \to 0^+} S_{z,\xi}(f)$$

Bemerkung:

Falls eine der 3 Bedingungen des Lemmas gilt, so folgt

$$I_f = \inf_z O_z(f) = \sup_z U_z(f)$$

Definition: (Riemann-intbar)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Es heißt f Riemann-integrierbar, wenn sie eine Bedingung des Lemmas erfüllt.
In diesem Falle definiert man das Riemann-Integral von f über $[a,b]$ durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_f = \sup_z U_z(f) = \inf_z O_z(f)$$

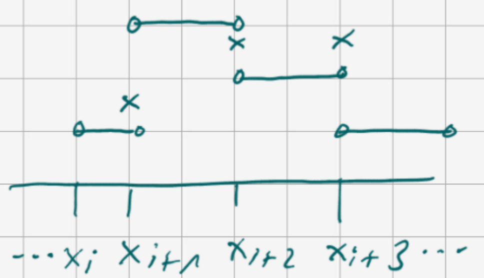
Notation: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Definition: (Treppenfunktion)

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Eine Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$ und $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = c_j \quad \text{für} \quad (x_{j-1}, x_j) \quad \text{und} \quad j = 1, \dots, N$$



Bemerkung: Zu den Werten von x_i wird keine Aussage gemacht.

Proposition: (Treppenfunktionen sind Riemann-intbar)

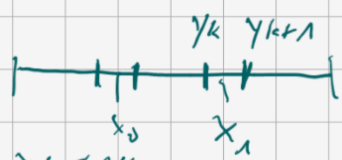
Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. mit $f(x) = c_j$ auf (x_{j-1}, x_j) für eine Zerlegung $(x_0, \dots, x_n)$ von $[a,b]$.
Dann ist f Riemann-intbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\, c_j$$

Beweis:

Sei $C > 0$ und $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle nun eine Zerlegung

$$\tilde{Z} = (y_0, \dots, y_m)$$



sodass zu jedem x_j ein Paar y_k und y_{k+1} gehört mit $y_k < x_j < y_{k+1}$.

Dann gilt: $O_{\tilde{Z}}(f) - U_{\tilde{Z}}(f) \leq |\tilde{Z}| \cdot n \cdot 2C$
Wählt man nun $\tilde{Z}$ mit $|\tilde{Z}| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2Cn + 1}$

folgt $O_{\tilde{Z}}(f) - U_{\tilde{Z}}(f) < \varepsilon$ $\square$

Proposition: (stetige Funktionen sind Riemann-intbar)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist f Riemann-intbar.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Es ist f gleichmäßig stetig (abgeschlossenes Intervall).

$\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$

Wähle Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$.
Dann gilt für dieses Z also:

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} \underbrace{[\sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t) - \inf f(t)]}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ wegen } |Z| < \delta}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \varepsilon \frac{b-a}{b-a} = \varepsilon \qquad \square$$

Proposition: (monotone Funktionen sind Riemann-intbar)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton.
Dann ist f Riemann-intbar.

Beweis: o.E. f monoton wachsend

Sei $\varepsilon > 0$. Sei zu $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung Z_n von $[a,b]$ in n-gleichlange Teilintervalle.

$\Rightarrow \quad x_0 = a \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n} \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$
$x_n = b$

$$\Rightarrow \quad O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \Big[\underbrace{\sup f(t)}_{= f(x_j)} - \underbrace{\inf f(t)}_{f(x_{j-1})} \Big]$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \big(f(x_j) - f(x_{j-1}) \big)$$

$$= \frac{b-a}{n} \big(f(x_n) - f(x_0) \big) = \frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a) \big) < \varepsilon \qquad \square$$

Proposition: (Linearität und Positivität des Integrals)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intbar. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $f + \alpha g$ ist Riemann-intbar mit

$$\int_a^b (f + \alpha g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \alpha \int_a^b g(x)\, dx$$

b) $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

Beweis:

Folgt durch Betrachten von Riemann-Summen und bilden des Grenzwertes. $\square$

Bemerkung:

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intbar, $f \leq g$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Beweis: $g - f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g-f)(x)\, dx \geq 0$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0 \qquad \square$$

Proposition:

Sei $-\infty < a < b < \infty$.

a) Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intbar, dann sind auch die Einschränkungen $f|_{[a,c]}$, $f_{[c,b]}$ Riemann-intbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

b) Sind $g: [a,c] \to \mathbb{R}$ und $h: [c,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intbar, so ist auch:

$$f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [a,c) \\ 0 & x = c \\ h(x) & x \in (c,b] \end{cases}$$

Riemann-intbar mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c g(x)\,dx + \int_c^b h(x)\,dx$$

Beweis: (Stelle c ist beliebig)

a) Einschränkung von Zerlegung
b) Zusammensetzen von Zerlegungen $\square$

Proposition:

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intbar. Dann ist $|f|$ Riemann-intbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Beweis: Einfache Fallunterscheidung. zeigt für jedes Teilintervall J von $[a,b]$:

$$\sup_{x\in \mathcal{J}} |f(x)| - \inf_{x\in \mathcal{J}} |f(x)| \leq \sup_{x\in \mathcal{J}} f(x) - \inf_{x\in \mathcal{J}} f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad O_Z(|f|) - U_Z(|f|) \leq O_Z(f) - U_Z(f)$$

$\Longrightarrow$ $|f|$ ist Riemann-intbar.

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\Longrightarrow \quad \int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \square$$

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

Beweis:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} \qquad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,\frac{z^k}{k!}$$

es gilt offenbar: $\dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \leq 1$ $(*)$

sowie: $\dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} \to 1,\ n\to\infty$ (bei festem k) $(**)$

Mit $N\in\mathbb{N}$ und $\exp(z) = \sum_{k=0}^{N}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{N}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,\frac{z^k}{k!}$$

folgt mit Δ-Ungleichung:

$$\left|\exp(z) - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)\frac{z^k}{k!}\right|$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}}_{R_N(|z|)} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,\frac{|z|^k}{k!}}_{\leq R_N(|z|)}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N}\left|1-\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right|\frac{|z|^k}{k!} + 2R_N(|z|)$$

Für $\varepsilon>0$ wähle zunächst $N\in\mathbb{N}$ mit $R_N(|z|)<\frac{\varepsilon}{3}$

Anschließend wählen wir nach $(**)$ $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, sodass der erste Term kleiner $\frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle $n\geq n_\varepsilon$

$$\Longrightarrow \left|\exp(z)-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| < \varepsilon \qquad \square$$

Mit Exponentialfunktion lassen sich weitere Funktion definieren:

cosinus hyperbolicus: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

sinus hyperbolicus: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

tangens hyperbolicus $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

cotangens hyperbolicus $\coth : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

es gilt: $1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$

$\cosh' x = \sinh x \qquad \sinh' x = \cosh x$

$\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$\coth' x = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$

Auf geeigneten Intervallen existieren Umkehrfunktion: (Areafunktion)

$\text{arcosh} : (1,\infty) \to [0,\infty) \quad x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\text{arcosh}'(y) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

$\text{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\text{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$

$\text{artanh} : (-1,1) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

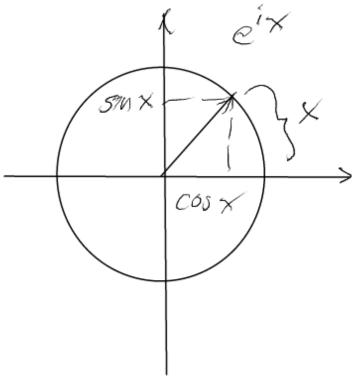
$\text{artanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \qquad y \in (-1,1)$

$$\operatorname{arcoth}: (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{1-y^2} \qquad y \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$$

Wir untersuchen nun die Exponentialfunktion am Einheitskreis

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$



Betrachten wir $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u(x) = e^{ix}$

Es wurde definiert:

$$Re(u(x)) = \cos x$$
$$Im(u(x)) = \sin x$$

$$\Rightarrow \quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \sin x \pm y = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos x \pm y = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

<u>Lemma:</u>

a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

b) Es gilt $\sin(-t) = -\sin t$ bzw. $\cos(-t) = \cos t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (ungerade und gerade)

c) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$

Beweis: a) Reihe für e^{ix} zeigt beides.

b) folgt aus a bzw aus Definition

c) Ausrechnen $\square$

Proposition:

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos t \le 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!}$

Für $t > 0$ gilt: $\sin t \ge t - \frac{t^3}{3!}$

Beweis: (nur $\cos t$)

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} \underbrace{- \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!}}_{\text{für } |t|<7 \text{ gilt } <0} \underbrace{- \ldots}_{<0}$$

$|t| \ge 7$: $1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} = 1 + t^2\left(\frac{t^2}{24} - \frac{1}{2}\right) \ge 1 \ge \cos t$

$\square$

Proposition:

Die Funktion sin erfüllt $\sin(0) = 0$ und ist strikt positiv auf $(0, 2]$.
Die Funktion cos erfüllt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$ und ist auf $(0, 2]$ strikt fallend. Insbesondere hat cos auf $[0, 2)$ genau eine Nullstelle. In dieser Nullstelle hat sin den Wert 1.

Beweis: $\sin(0) = 0$ durch Einsetzen

Für $0 < t \le 2$ gilt $\sin t \ge t - \frac{t^3}{3!} = t\left(1 - \frac{t^2}{3!}\right) > 0$

$\Rightarrow$ cos ist auf $[0, 2]$ wegen $\cos' = -\sin$ strikt fallend

Weiterhin gilt: $\cos(0) = 1$

$\cos(2) \le 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$

$\overset{(ZWS)}{\Longrightarrow}$ Nullstelle existiert in $(0,2)$

$\Longrightarrow$ Eindeutigkeit der Nullstelle aufgrund Monotonie

$\Longrightarrow$ an dieser Nullstelle muss sin den Wert 1 wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 = \sin^2 x$ annehmen $\square$

Definition: (Zahl π)

Sei $\pi > 0$ die eindeutige Zahl mit $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Theorem:

Die Abbildung $e^{i\bullet}: \mathbb{R} \to S$, $x \mapsto e^{ix}$ erfüllt

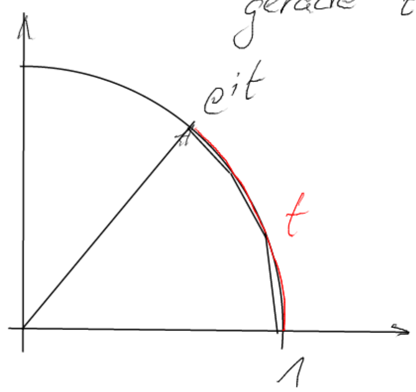
$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}, \quad \text{sowie} \quad e^{i0} = 1, \; e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \; e^{i\pi} = -1, \; e^{i2\pi} = 1$$

Insbesondere ist die Abbildung 2π-periodisch d.h. es gilt:

$$e^{ix} = e^{i(x+2\pi)}$$

Weiterhin ist die Einschränkung der Abbildung auf $[0, 2\pi)$ bijektiv auf S.

Bemerkung: Die Länge des Bogens auf S zwischen 1 und e^{it} ist gerade t.



Genauer gilt für die Länge des Polygons über

$$1, e^{i\frac{t}{n}}, e^{i\frac{2t}{n}}, e^{i\frac{3t}{n}}, \dots, e^{it}$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \exp\left(it\,\frac{k+1}{n}\right) - \exp\left(it\,\frac{k}{n}\right) \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \exp\left(it\frac{k}{n}\right)\left(e^{i\frac{t}{n}} - 1\right) \right| \longrightarrow t, \; n \to \infty \qquad \square$$

Theorem: (Polarzerlegung)

Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren eindeutige $\rho > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$\boxed{z = \rho e^{-i\varphi}}$$

Beweis:

Es gilt $z = \underbrace{|z|}_{= \rho} \cdot \underbrace{\frac{z}{|z|}}_{\text{vom Betrag } = 1} \Rightarrow \frac{z}{|z|} = e^{-i\varphi}$

und eindeutig mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ $\square$

Bemerkung: $z_1 = \rho_1 e^{-i\varphi_1}$ $\quad z_2 = \rho_2 e^{-i\varphi_2}$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_1 \cdot \rho_2 \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Metrische Räume und topologische Grundbegriffe

Metrische Räume

Definition: (Metrik – Abstandsmessung)

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung

$$d: X \times X \longrightarrow [0, \infty]$$

mit folgenden Eigenschaften:

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (keine Ausartung)
- $d(y,x) = d(x,y)$ für alle $x,y \in X$ (Symmetrie)
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$ (Δ-Ungleichung)

Ein Paar (X,d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d auf X heißt metrischer Raum.

Bemerkung: (X,d) metrischer Raum und $Y \subset X$

$$\Longrightarrow (Y, d|_{Y \times Y}) \text{ metrischer Raum}$$

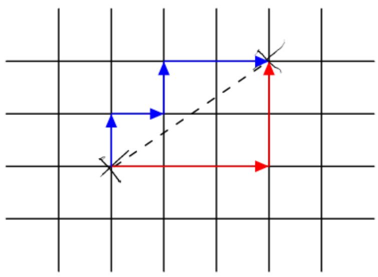
Beispiele:

– $(\mathbb{R}, d)$ mit $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$(x,y) \longmapsto |x-y|$$

– $(\mathbb{Z}, d)$ mit $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0, \infty)$

$$(x,y) \longmapsto \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|$$



(wird auch Blockmetrik bzw. Manhattenmetrik genannt)

- $(\mathbb{R}^N, d_1)$ mit $d_1: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$

$$(x,y) \mapsto \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|$$

- $(\mathbb{R}^N, d_\infty)$ mit $d_\infty: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$

$$(x,y) \mapsto \max_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i|$$

- $(\mathbb{R}^N, d_p)$ mit $d_p: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ Euklidische Metrik

$$(x,y) \mapsto \left[\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

→ auch Euklidische Metrik

- Auf einer beliebigen Menge X wird durch (diskrete Metrik)

$$d_D: X \times X \to [0,\infty)$$

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} = 1 - \delta_{xy}$$

eine Metrik eingeführt.

⇒ Auf $\mathcal{A}$ wird durch $d_D: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0,\infty]$, $d_D(x,y) = 1 - \delta_{x,y}$ eine Metrik eingeführt. (Alphabet)

Sei $\mathcal{A}$ nun eine endliche Menge und

$$W_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{x : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\} \quad \text{(unendliche Folgen)}$$

Dann wird auf $W_{\mathcal{A}}$ durch $d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} d_D(x(j), y(j))$.

Proposition: (Umkehrung Δ-Ungleichung)

Sei (X,d) metrischer Raum. Dann gilt für alle $x,y,z \in X$

$$\boxed{|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)}$$

Beweis:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) = d(x,z) + d(y,z)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z) \\ d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z) \end{array}$$

$\square$

Definition: (Norm – Länge eines Vektors)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K $(K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C})$,
Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$$

heißt Norm wenn gilt:

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ für alle $\alpha \in K,\ x \in V$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x,y \in V$
- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Bemerkung: Auch für Normen gilt umgekehrte Δ-Ungleichung.

$$\Longrightarrow \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$$

Definition / Proposition:

Sei V ein Vektorraum über K und Norm $\|\cdot\|$. Dann wird auf V durch

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to [0,\infty), \quad d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$$

eine Metrik induziert.

Beweis: klar $\square$

Proposition: (Skalarprodukt induziert Norm)

Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Sei $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt. Dann ist

$$\|\cdot\| : V \to [0,\infty), \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

eine Norm auf V.

Beweis: klar $\square$

Beispiel:

- $\mathbb{R}^N$ bzw $\mathbb{C}^N$ mit $\langle x,y \rangle = \sum_{j=1}^N \overline{x_j} y_j$

$$\Rightarrow \|x\| = \left[\sum_{j=1}^N \overline{x_j} x_j \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \|x-y\| = \left[\sum_{j=1}^N |x_j - y_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Beweis für Norm und Metrik für $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$

Proposition:

Sei $\| \ \|$ Norm auf $\mathbb{R}^N$. Dann existieren $c, C > 0$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} \|x\| &\leq C \|x\|_1 \\ \|x\|_1 &\leq c \|x\| \end{aligned}}$$

Bemerkung: Sind $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ Normen auf $\mathbb{R}^N$, so existieren $\lambda, \mu > 0$ mit

$$\|x\| < \lambda |||x||| \qquad |||x||| < \mu \|x\|$$

Beweis: $\|x\| \leq C \cdot \|x\|_1$:

Sei $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow x = \sum_{j=1}^N \xi_j \vec{e_j}$ mit Standardbasis $\{\vec{e_j}\}$

$$\Rightarrow \|x\| = \|\sum_{j=1}^N \xi_j \vec{e_j}\| \overset{(\Delta\text{-Ungl})}{\leq} \sum_{j=1}^N \|\xi_j \vec{e_j}\|$$

$$= \sum_{j=1}^N |\xi_j| \|\vec{e_j}\| \leq C \cdot \sum_{j=1}^N |\xi_j| = C\|x\|_1$$

$\|x\|_1 < c\|x\|$

Angenommen Nein $\Rightarrow$ Dann existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein x_n mit $\|x_n\|_1 > n \|x\|$

o.E.: $\|x_n\|_1 = 1 \Rightarrow 1 > n \|x_n\|$

Definition: (Cauchy-Folge)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt Cauchy-Folge (bezüglich d), wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } n,m \geq n_\varepsilon .$$

Proposition:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.

Beweis: $x_n \xrightarrow{d} x$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq \mathbb{N}$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \square$$

Bemerkung: Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (z.B $\mathbb{Q}$)

Definition: (vollständige Räume)

Ein metrischer Raum (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in ihm einen Grenzwert hat.

Bemerkung: Vollständigkeit hängt von der Metrik ab und nicht von Topologie.

Beispiel vollständige Räume:

- $\mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$
- $\mathbb{C}$ mit $d(x,y) = |x-y|$
- $\mathbb{R}^N$ mit $d_2(x,y)$

Definition: (Umgebung)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $V \subset X$ eine Umgebung von X, wenn ein $r > 0$ existiert mit $U_r(x) \subset V$

Bemerkung: Umgebung muss keine Kugel sein:

ist auch eine Umgebung
$\Longrightarrow$ es muss „Platz" um x sein

Definition: (offene und abgeschlossene Mengen)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge U von X heißt offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.
Eine Teilmenge A heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung:
- Teilmenge von X muss nicht eine der beiden Eigenschaften besitzen
- eine Menge kann beides erfüllen

Konvergenz und Stetigkeit

Definition: (Stetigkeit in x)

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $f: X_1 \to X_2$.
Dann heißt f stetig in $x \in X_1$, falls für jede Folge gilt:

$$\boxed{\underset{\text{in } (X_1, d_1)}{x_n \to x} \implies \underset{\text{in } (X_2, d_2)}{f(x_n) \to f(x)}}$$

Lemma: (Charakterisierung Stetigkeit in x)

Seien (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume und $f: X_1 \to X_2$.
Dann sind für $x \in X_1$ folgende Aussagen äquivalent:

i) f ist stetig in x_1 $(x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x))$

ii) für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta^{d_1}(x)) \subset U_\varepsilon^{d_2}(f(x))$$

iii) für jede Umgebung V von $f(x)$ existiert eine Umgebung U von x, sodass $f(U) \subset V$

iv) für jede Umgebung V von $f(x)$ ist $f^{-1}(V)$ Umgebung von x

Beweis:

(iv) $\Rightarrow$ (iii): V Umgebung von $f(x)$, $U := f^{-1}(V)$
$\overset{(iv)}{\Longrightarrow}$ U ist Umgebung von x und $f(U) = V$

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$
$\overset{(iii)}{\Longrightarrow}$ es existiert Umgebung U von x mit $f(U) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$
$\Longrightarrow$ (da U Umgebung von x ist) $U_\delta(x) \subset U$ mit $\delta > 0$
$\Longrightarrow$ $f(U_\delta^{d_1}(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$ $\overset{(ii)}{\Longrightarrow}$ es existiert $\delta > 0$, sodass
$f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$
$x_n \to x$ $\Longrightarrow$ es existiert $n_\delta \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \in U_\delta(x)$ für $n \geq n_\delta$

(i) $\Rightarrow$ (iv): Sei V eine Umgebung von $f(x)$

Annahme: $f^{-1}(V)$ ist keine Umgebung von x

$\Rightarrow$ für kein $\delta > 0$ gilt $U_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$

$\Rightarrow$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$, so dass $f(x_n) \notin V \Rightarrow x_n \to x$ aber $f(x_n) \not\to f(x)$ ↯

$\square$

<u>Proposition:</u> (Stetigkeit ist verträglich mit Komposition)

Seien (X_j, d_j) für $j \in \{1,2,3\}$ metrische Räume und $f: X_1 \to X_2$ und $g: X_2 \to X_3$ stetig in x bzw. $f(x)$, so folgt:

$$\boxed{g \circ f: X_1 \to X_3 \text{ ist stetig in } x}$$

Beweis:

$$x_n \to x \overset{(f \text{ stetig})}{\Longrightarrow} f(x_n) \to f(x) \overset{(g \text{ stetig})}{\Longrightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(x))$$

$\square$

<u>Proposition:</u> (Stetigkeit ist verträglich mit Addition und Multiplikation)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f,g: X \to \mathbb{C}$ stetig in $x \in X$. Dann gilt:

$$\boxed{f+g: X \to \mathbb{C} \text{ und } f \cdot g: X \to \mathbb{C} \text{ sind stetig}}$$

Beweis: Folgencharakteristik

$\square$

<u>Proposition:</u> (Stetigkeit ist verträglich mit max, min und $|\cdot|$)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f,g: X \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in X$, so sind $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ und $|f|$ auch stetig in x.

Bemerkung: $\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

<u>Definition:</u> (Stetigkeit)

Seien (X_1,d_1), (X_2,d_2) metrische Räume und $f: X_1 \to X_2$. f heißt stetig, wenn f in allen $x \in X_1$ stetig ist.

Theorem:

Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume und $f: X_1 \to X_2$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) für jede offene Menge V ist $f^{-1}(V)$ offen

Kompaktheit

- fundamentales Konzept der Topologie

Definition: (Folgenkompaktheit)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt kompakt, falls für alle (x_n) aus K eine Teilfolge (x_{n_k}) existiert, welche konvergent in K ist:

$$\boxed{x_{n_k} \to x \quad \text{mit} \quad x \in K}$$

Bemerkung: - $K = X$ ist durchaus zulässig

Bsp: - $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist kompakt
(Beweis: Bolzano / Weierstrass)
- A abgeschlossen bezüglich euklidischer Metrik und beschränkt
$\Longrightarrow$ A ist kompakt

Theorem: (Maximum und Minimum)

Sei (K, d) ein kompakter Metrischer Raum. Sei $f: K \to \mathbb{R}$ stetig
Dann nimmt f Minimum und Maximum an.

Beweis: (hier nur Maximum)
Sei (x_n) mit $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \sup_{x \in K} f(x)$
Da K kompakt ist hat (x_n)
eine konvergente Teilfolge

$\Longrightarrow$ es existiert ein $x \in K$ und $(n_k)_k$ mit

$$x_{n_k} \to x, \quad k \to \infty$$

$\overset{(f \text{ stetig})}{\Longrightarrow}$ $$f(x) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \sup_{\tilde{x} \in K} f(\tilde{x})$$ $\square$

<u>Theorem:</u> (Gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta)

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum. Sei (Y,e) ein metrischer Raum. Sei $f: K \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit

$$e(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{falls} \quad d(x,y) \leq \delta$$

Beweis: Angenommen Nein!

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Elemente existieren $x_n, y_n \in K$ mit $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ aber $e(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$
Es ist dann (x_n) eine Folge im kompakten K, besitzt also eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$
$(d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n})$
$\Longrightarrow$ $$y_{n_k} \to x, \quad k \to \infty$$

Dann folgt $e(f(x_n), f(y_n)) \to e(f(x), f(x)) = 0 \geq \varepsilon$ ↯ $\square$

<u>Theorem:</u>

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum. Sei (Y,e) ein metrischer Raum. Sei $f: K \to Y$ stetig. Dann ist:

$$f(K) = \{ f(x) \mid x \in K \} \text{ kompakt in } Y$$

__Theorem:__ (Stetigkeit der Inversen)

Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und (L,e) ein metrischer Raum auf $f: K \to L$ bijektiv und stetig.
Dann ist

$$\boxed{g = f^{-1}: L \to K \quad \text{stetig}}$$

Beweis:

Sei $A \subset K$ abgeschlossen $\overset{(prop)}{\Longrightarrow}$ A kompakt
$\overset{(f \text{ stetig})}{\Longrightarrow}$ $g^{-1}(A) = f(A)$ ist kompakt $\Rightarrow$ $g^{-1}(A)$ abgeschlossen
zeigt die Aussage $\square$

__Definition:__ (total beschränkt)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge B von X heißt total beschränkt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in X$ existiert mit

$$\boxed{B \subset \dot{\bigcup}_{j=1}^{N} B_\varepsilon(x_j)}$$

Bemerkung: - statt mit abgeschlossenen Kugeln $B_\varepsilon(x)$ kann man auch mit offenen Kugeln $U_\varepsilon(x_j)$ arbeiten

- wir wissen, dass in jeder Metrik d eine Metrik e existiert, so dass d und e die selben offenen Mengen erzeugen und bezüglich e beschränkt ist

$$e(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Beispiel $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{C}^N$ mit Euklidischer Metrik:

Es $B \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt genau dann, wenn B total beschränkt.

Lemma: (Charakterisierung von total beschränkt)

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $B \subset M$. Es ist äquivalent:

(i) Es ist B total beschränkt.

(ii) Jede Folge in B hat eine Teilfolge, die eine Cauchy-Folge ist.

Bemerkung: vergleiche mit Bolzano / Weierstrass

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) eine Folge in B. Wir überdecken nun B durch endlich viele Kugeln vom Radius 1.

$\Rightarrow$ dann liegen in diesen Kugeln unendlich viele Folgeglieder
Nenne B_1 den schnitt dieser Kugel mit B

$\overset{(B_1 \subset B)}{\Longrightarrow}$ B_1 ist total beschränkt

$\Rightarrow$ man findet so durch Induktion ein Folge von B_n mit

- $B_n \supset B_{n+1}$
- Jedes B_n enthält unendliche viele Folgeglieder
- $\sup\limits_{x,y \in B_n} d(x,y) = \operatorname{diam} B_n \leq \frac{2}{2^n}$