Analysis II – Übung 6

Nina Held – 144753
Clemens Anschütz – 146390
Markus Pawellek – 144645

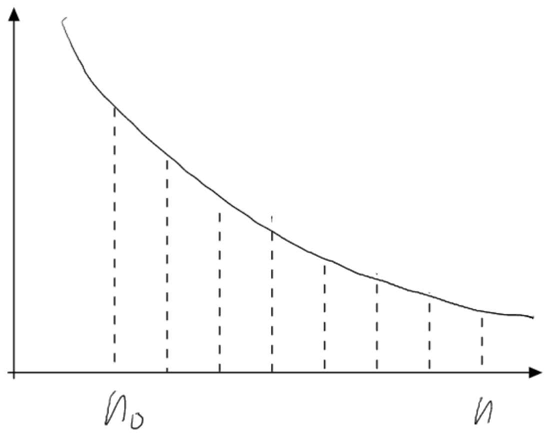
Übung: Donnerstag 12–14

Aufgabe 1

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f : [n_0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend.

$\Longrightarrow$ f ist Riemann-intbar (monotone Funktion)

Sei $n \in \mathbb{Z}$ und die Zerlegung $z_n = (x_0, \dots, x_{n-n_0})$ so gegeben, dass der Abstand zwischen den Gliedern 1 ist.



f ist monoton fallend und immer positiv

$$\Longrightarrow \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = f(x_{j-1})$$

$$\Longrightarrow \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x) = f(x_j)$$

$$\Longrightarrow \quad O_{z_n}(f) = \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k) \qquad U_{z_n} = \sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1)$$

es gilt: $\quad U_{z_n}(f) \le \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \le O_{z_n}(f)$

gilt nun: $\quad \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \quad$ folgt:

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx \le \lim_{n\to\infty} O_{z_n}(f) = \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty$$

es gilt also: $\quad \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \Rightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

Sei nun $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$. Dann folgt:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} f(k+1) = U_{Z_n}(f) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) - f(n_0)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} U_{Z_n}(f) = -f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(x)dx$$

$$= \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

Sein also für $0 \leq C < \infty$ $\quad -f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) = C$

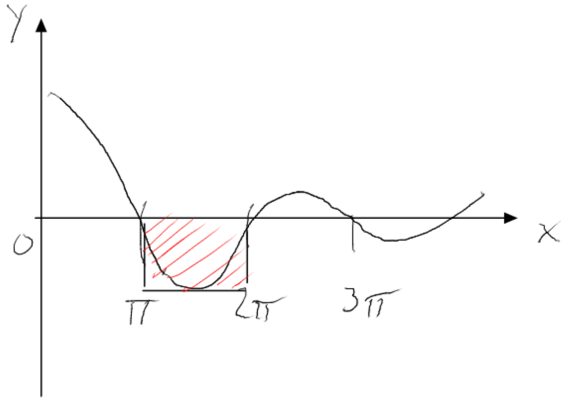
$$\Longrightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) = C + f(n_0) < \infty \quad \text{wegen } f(n_0) < \infty$$

$\Longrightarrow$ es gilt: $\quad \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty$

$\Longrightarrow$ dies zeigt gerade die Äquivalenz $\square$

Aufgabe 2

a) $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$: $\quad \frac{\sin x}{x} = 0$ für alle $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ (weil $\sin x$ an diesen Stellen Null ist)



– dabei wechselt $\sin x$ das Vorzeichen

$\Longrightarrow$ Integrationsgrenzen aufspalten von $k\pi$ bis $(k+1)\pi$ und dies als Folge darstellen

$\Longrightarrow$ Sei (x_k) eine Folge mit $x_k = \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \right|$

Dann ist $\int_{\pi}^{\infty} f(x)\,dx = -x_1 + x_2 - x_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$

Der maximale Wert von $\sin x$ ist 1. $\frac{1}{x}$ ist monoton fallend $\Longrightarrow$ Maximum im Intervall bei $k\pi$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le x_k \le \pi \cdot \frac{1}{k\pi} = \frac{1}{k} \to 0, \; k \to \infty$$

$\Longrightarrow$ (x_k) ist monoton fallende Nullfolge

$\Longrightarrow$ nach Leibnizkriterium gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k < \infty$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx < \infty$$

$\Longrightarrow$ Grenzwert existiert $\square$

c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx$: es gilt:
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) - 2\sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Longrightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} \, dx \right]$$

$\Longrightarrow$ rechtes Integral muss existieren wegen a) und weil $\cos x$ nur ein verschobener $\sin x$ ist

$$\Longrightarrow \quad \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{n \to \infty} \ln \frac{n}{\pi} = \infty$$

$\Longrightarrow$ linkes Integral existiert nicht $\Longrightarrow$ gesamtes Integral existiert nicht $\square$

b) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$: es gilt: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\Longrightarrow \sin^2 x \leq |\sin x|$$

$$\Longrightarrow (x \geq \pi): \quad \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x} = \frac{|\sin x|}{|x|} = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$$

$\Longrightarrow$ (Integrale erhalten Ungl.) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \leq \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$

$\Longrightarrow$ rechtes Integral ist noch größer als linkes
$\Longrightarrow$ kann auch nicht existieren $\square$

Aufgabe 3

a) $f(x) = [x \cdot (\ln x)^{\alpha}]^{-1}$

Sei $\varphi(x) = \ln x \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\Longrightarrow \int f(x)\, dx = \int \frac{1}{\varphi^{\alpha}} \frac{d\varphi}{dx} dx \overset{\text{(Subst)}}{=} \int \frac{d\varphi}{\varphi^{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \varphi^{1-\alpha} \overset{\text{(Resub)}}{=} \frac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\Longrightarrow \int_2^n f(x)\, dx = \left. \frac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_2^n$$

$\lim\limits_{n \to \infty} \ln n = \infty \Longrightarrow \alpha > 1$ muss gelten, damit Integral existiert. $\square$

b) $f(x) = \ln x \cdot (1+x^2)^{-\alpha}$

$\Rightarrow$ polynomielles Wachstum „schlägt" logarithmisches Wachstum

$\Rightarrow$ es gibt $n_0 \in (1, \infty)$, sodass f auf $[n_0, \infty)$

monoton fallend ist; Außerdem ist f auf $[1,\infty)$ immer größer gleich Null

$\Rightarrow$ Anwendung des Satzes aus Aufgabe 1 möglich

$$\Rightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \iff \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}$$

$\Rightarrow$ für $n_0' \in [n_0, \infty)$ (sollte groß gewählt werden), sind

$(1+x^2)^\alpha$ und $x^{2\alpha}$ nur um ein $\varepsilon > 0$ unterschiedlich für alle $x \geq n_0'$ (konvergieren gegeneinander)

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} < \infty \iff \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{2\alpha}} < \infty$$

Sei nun $\alpha = \frac{1}{2} + \delta$. Dann gilt: (mit $\delta > 0$)

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{2\alpha}} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1+2\delta}} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} \cdot \frac{\ln x}{x^\delta}$$

für ein $n_0'' \in [n_0', \infty)$ gilt dann $\frac{\ln x}{x^\delta} \leq 1$ für alle $x \geq n_0''$

$$\Rightarrow \sum_{k=n_0''}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} \cdot \frac{\ln x}{x^\delta} \leq \sum_{k=n_0''}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}}$$

$\Rightarrow$ letzte Summe konvergiert gerade wenn $\delta > 0$ gilt (Dirichlet-Reihe)

$$\Rightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \text{ für } \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^{u_0} f(x)\,dx}_{= C < \infty} + \int_{u_0}^\infty f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ weil $C < \infty$ sein muss, gilt: $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$ für $\alpha > \frac{1}{2}$.

$\square$

Aufgabe 4

a) $$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx \overset{\text{(part. Int)}}{=} -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^\infty = -\frac{\ln x + 1}{x}\Big|_1^\infty$$

es gilt: $\frac{\ln x + 1}{x} \to 0,\ x \to \infty$ (polynomielles Wachstum „schlägt" logarithmisches)

$$\Rightarrow -\frac{\ln x + 1}{x}\Big|_1^\infty = 0 - \left(-\frac{\ln 1 + 1}{1}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$\square$

b) $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$ Sei $\varphi(x) = \ln x$.

$$\Rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varphi}{1+e^{2\varphi}} \cdot e^\varphi \frac{d\varphi}{dx}\,dx \overset{\text{(Subst)}}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi e^\varphi}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi e^\varphi}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi + \int_0^\infty \frac{\varphi e^\varphi}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi$$

Integrand ist punktsymmetrisch: $$\frac{(-\varphi)e^{-\varphi}}{1+e^{-2\varphi}} = -\frac{\varphi}{e^\varphi + e^{-\varphi}}$$

$$= \frac{-\varphi}{e^{-\varphi}(1+e^{2\varphi})} = \frac{-\varphi e^\varphi}{1+e^{2\varphi}}$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi = -\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi + \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}\,d\varphi = 0$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^{2}}\,dx = 0 \qquad \square$$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}\right) dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin\frac{x}{2} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos\frac{x}{2} \, dx$

Sei $\varphi(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \varphi) \frac{d\varphi}{dx} dx$

$+ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos \varphi) \frac{d\varphi}{dx} dx$

$\overset{\text{(Subst)}}{=} \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$

Sei $\varphi_1(x) = \frac{\pi}{2} - x$ (für letztes Integral) $\frac{d\varphi}{dx} = -1$

$\overset{\text{(Subst)}}{=} \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx - 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$

(wegen $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$)

$= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$

$= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$

$\Rightarrow$ (Umstellen der Gleichung) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2} \ln 2}}$

$\square$

Aufgabe 21

Annahme: $f(x) \to C > 0$, $x \to \infty$

$\Rightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 \in [0, \infty)$, sodass

$$|C - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \geq x_0$$

$$\Rightarrow \left| \left(\int_{x_0}^{x} f(y)\, dy \right) - C(x - x_0) \right| \leq \varepsilon (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(y)\, dy - C \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - C \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx}{x - x_0} = C$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \lim_{x \to \infty} C(x - x_0) = \infty \lightning$$

$\Rightarrow$ Widerspruch: f ist nicht uneigentlich Riemann intbar

$\Rightarrow$ Ist f uneigentlich Riemann-intbar, folgt $f(x) \to 0$ $\square$