Nina Held - 144753
Clemens Anschütz - 146390
Markus Pawellek - 144645

Analyis I - Übungsserie 8

Aufgabe 1

a)

Voraussetzung:
Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

Behauptung:
Konvergiert (x_n), so konvergiert auch jede Teilfolge.

Beweis:

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

Für eine beliebige Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt für alle $k, k' \in \mathbb{N}$ mit $k' > k$:

$$n_{k'} > n_k$$

Es gibt damit also ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n_k \geq n_\varepsilon$. Damit muss für alle $k' \geq k$ gelten:

$$n_{k'} \geq n_k \geq n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |x_{n_{k'}} - x| < \varepsilon$$

Dies ist gerade die Definition der Konvergenz einer Teilfolge. Die Teilfolge muss also auch gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. □

b)

Voraussetzung:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Behauptung:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis:

Seien die Folgen, wie in der Voraussetzung gegeben. Sei $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $b \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $c \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann stellt die Teilfolge $(x_{6k})_{k\in\mathbb{N}}$ sowohl eine Teilfolge von $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$), als auch eine Teilfolge von $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n = 3k$ mit $k \in \mathbb{N}$) dar. Aufgrund des vorher bewiesenen Satzes muss die Teilfolge dieser beiden Teilfolgen gegen den selben Grenzwert konvergieren. Es gilt also für $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{2n} \longrightarrow a,\; n \longrightarrow \infty \;\Rightarrow\; x_{6n} \longrightarrow a,\; n \longrightarrow \infty$$
$$x_{3n} \longrightarrow c,\; n \longrightarrow \infty \;\Rightarrow\; x_{6n} \longrightarrow c,\; n \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow\; a = c$$

Um die Konvergenz zu ermöglichen, müssen diese Grenzwert also gleich sein. Weiterhin stellt die Folge $(x_{6k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ auch eine Teilfolge von $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$) und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n = 3k - 2$ mit $k \in \mathbb{N}$) dar. Es folgt hier nach dem gleichen Prinzip für $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{2n+1} \longrightarrow b,\; n \longrightarrow \infty \;\Rightarrow\; x_{6n-3} \longrightarrow b,\; n \longrightarrow \infty$$
$$x_{3n} \longrightarrow c,\; n \longrightarrow \infty \;\Rightarrow\; x_{6n-3} \longrightarrow c,\; n \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow\; b = c \;\Rightarrow\; a = b$$

Damit müssen die Grenzwerte aller drei Teilfolgen die gleichen sein. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ ist nun x_n ein Wert der Teilfolge (x_{2n}) (für gerade n) oder ein Wert der Teilfolge (x_{2n+1}) (für ungerade n). Da nun beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, muss nun auch von (x_n) gegen diesen Wert konvergieren. □

Nina Held - 144753
Clemens Anschütz - 146390
Markus Pawellek - 144645

Aufgabe 2

a)

$$n^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2+1} - \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{n+1} \right) = \frac{n^3}{n^2+1} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3(n+1) - n^2(n^2+1)}{(n^2+1)(n+1)} = \frac{n^4+n^3-n^4-n^2}{n^3+n^2+n+1}$$
$$= \frac{n^3-n^2}{n^3+n^2+n+1} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

Von jedem dieser Summanden existiert der Grenzwert. Es folgt also allgemein:

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \longrightarrow \frac{1-0}{1+0+0+0} = 1$$

Die angegebene Folge konvergiert also gegen den Wert 1.

b)

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{a \cdot a \cdot ... \cdot a \cdot a}$$

Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > a$ gilt. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$:

$$= \frac{n \cdot ... \cdot N}{a \cdot ... \cdot a} \cdot \frac{(N-1) \cdot ... \cdot 1}{a \cdot ... \cdot a} = \frac{n}{a} \cdot ... \cdot \frac{N}{a} \cdot \frac{(N-1) \cdot ... \cdot 1}{a \cdot ... \cdot a}$$

Bei dem rechten Faktor handelt es sich um eine Konstante. Für $m := \frac{(N-1) \cdot ... \cdot 1}{a \cdot ... \cdot a}$ gilt also:

$$= m \cdot \frac{n}{a} \cdot ... \cdot \frac{N}{a}$$

Jeder übrige Faktor ist größer 1, wegen $N > a$. Dabei ist der rechte Faktor nun der kleinste Faktor, da alle anderen Zähler größer sind. Sei $q := N/a > 1$. Dann folgt:

$$= m \cdot \frac{n}{a} \cdot ... \cdot \frac{N}{a} \geq m \cdot \frac{N}{a} \cdot ... \cdot \frac{N}{a} = m \cdot q^{n-N+1} = \frac{m}{q^{N-1}} \cdot q^n$$

Der linke Faktor ist nun wieder eine Konstante, welche positiv sein muss, da es sich bei ihrer Zusammensetzung immer um positive Größen handelt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $q^n \longrightarrow \infty$ gilt. Es folgt also:

$$\frac{m}{q^{N-1}} \cdot q^n \longrightarrow \infty \ \Rightarrow \ \frac{n!}{a^n} \longrightarrow \infty$$

Nina Held - 144753
Clemens Anschütz - 146390
Markus Pawellek - 144645

Aufgabe 3

Voraussetzung:

Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert mit $a_1 \geq 0$ und
$a_{n+1} := \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung:

(a_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:

Sei die Folge wie in der Voraussetzung. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} = \frac{3+3a_n}{3+a_n} - a_n + a_n = \frac{3+3a_n}{3+a_n} - \frac{(3+a_n)a_n}{3+a_n} + a_n = a_n + \frac{3-a_n^2}{3+a_n}$$
$$= a_n + \frac{(\sqrt{3}+a_n)(\sqrt{3}-a_n)}{3+a_n}$$

Fall $a_1^2 < 3$: $n = 1$: $\Rightarrow 0 \ \leq a_1 < \sqrt{3}$

$n \ \Rightarrow \ n+1$:

$$a_n < \sqrt{3} \ \Rightarrow \ \sqrt{3} - a_n > 0$$
$$\sqrt{3} < 3 \ \Rightarrow \ \sqrt{3} + a_n < 3 + a_n \ \Rightarrow \ 0 < \frac{\sqrt{3}+a_n}{3+a_n} < 1$$

Aufgrund dieser beiden Bedingungen folgt:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(\sqrt{3}+a_n)(\sqrt{3}-a_n)}{3+a_n} < a_n + (\sqrt{3} - a_n) = \sqrt{3} \ \Rightarrow \ a_{n+1}^2 < 3$$

Damit gilt allgemein für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1^2 < 3 \ \Rightarrow \ a_n^2 < 3$$

Es folgt außerdem aus der Definition heraus, wegen eben dieser Bedingung:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3-a_n^2}{3+a_n} > 0 \ \Rightarrow \ a_{n+1} > a_n$$

Die Folge ist also für $a_1^2 < 3$ monoton steigend und nach oben beschränkt durch $\sqrt{3}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es sich dann auch um eine Cauchy Folge handeln muss. In der letzten Übung wurde gezeigt, dass dann Folgendes für den Grenzwert $s \in \mathbb{R}$ der Folge gilt:

$$s = \frac{3(1+s)}{3+s} \ \Rightarrow \ 3s + s^2 = 3 + 3s \ \Rightarrow \ s^2 = 3 \ \Rightarrow \ 0 < s = \sqrt{3}$$

Der Grenzwert der Folge ist also $\sqrt{3}$.