

317 – Elektrischer Schwingkreis

1. Aufgaben

- 1.1 Nehmen Sie für erzwungene Schwingungen am Parallelschwingkreis den Amplituden- und Phasengang auf. Bestimmen Sie Resonanzfrequenz und Bandbreite, und berechnen Sie daraus die Güte des Schwingkreises sowie den Reihenverlustwiderstand.
- 1.2 Untersuchen Sie freie Schwingungen am Parallelschwingkreis. Dokumentieren Sie den zeitlichen Verlauf der Schwingungen bei unterschiedlicher Dämpfung. Bestimmen Sie das logarithmische Dekrement und vergleichen Sie den daraus berechneten Reihenverlustwiderstand mit dem aus 1.1 sowie mit dem ohmschen Widerstand der Spule.
- 1.3 Beobachten Sie das Verhalten gekoppelter Schwingkreise bei freier und erzwungener Schwingung.

2. Grundlagen

Stichworte:

Schwingungsdifferentialgleichung, Amplituden- und Phasengang, Dämpfung, Bandbreite, Güte, Scheinwiderstand, Schwingkreiskopplung, Resonanzfrequenzaufspaltung

2.1 Freie Schwingungen

Im Experiment wird ein Parallelschwingkreis bestehend aus einer Spule (Induktivität L) und einem Kondensator (Kapazität C) verwendet (Bild 1).

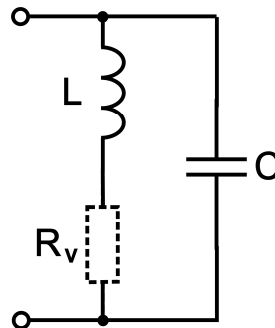


Bild 1: Parallelschwingkreis.

Zwischen Spule und Kondensator findet ein ständiger Austausch magnetischer bzw. elektrischer Feldenergie statt, der eine elektrische Schwingung mit im Idealfall konstanter Amplitude zur Folge hat. In der Praxis ist die Schwingung aufgrund unvermeidlicher Energieverluste gedämpft (ohmscher Widerstand der Spule, dielektrische Verluste des Kondensators, Streuverluste des Kreises). Die Verluste können durch einen ohmschen Widerstand R (Reihenverlustwiderstand R_v) repräsentiert werden.

Die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (Gl.15 im Anhang) hat die Form

$$U_C = U_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

mit der Dämpfungskonstanten (Abklingkonstante) $\delta = \frac{R_v}{2L}$ (2).

Im gedämpften Schwingkreis ergibt sich die Schwingkreisfrequenz:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_v}{2L}\right)^2} \quad (3).$$

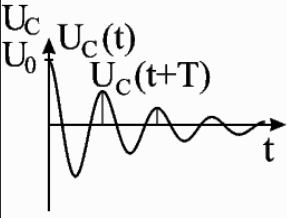
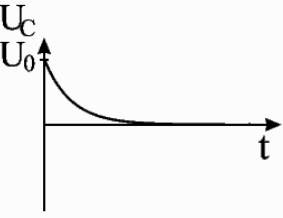
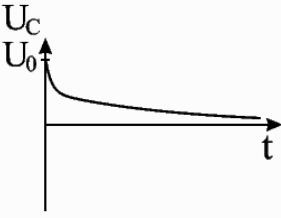
Für den ungedämpften Schwingkreis gilt die Thomsonsche Schwingungsgleichung:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad \omega_0^2 LC = 1 \quad (4).$$

Im Resonanzfall ist also der kapazitive Widerstand des Kondensators gleich dem induktiven Widerstand der Spule:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

Es können folgende Fälle unterschieden werden:

	Schwingfall	aperiodischer Grenzfall	Kriechfall
Dämpfung	$\delta < \omega_0$	$\delta = \omega_0 ; \omega = 0$	$\delta > \omega_0$
Zeitverlauf			

Als Maß für die Dämpfung im Schwingfall kann das Verhältnis zweier, nach der Periode T aufeinander folgender Amplituden betrachtet werden

$$D = \delta T = \frac{\delta}{f_0} = \ln \left(\frac{U_C(t)}{U_C(t+T)} \right) \quad (5).$$

Die Größe D wird als „logarithmisches Dekrement“ bezeichnet. Aus der Dämpfungskonstanten lässt sich über Gl.2 den Reihenverlustwiderstand R_v berechnen. Im Experiment kann die Dämpfung des Schwingkreises zusätzlich durch einen Widerstand erhöht werden.

2.2 Erzeugung freier Schwingungen (Impulsanregung)

Um in einem Schwingkreis freie Schwingungen anzuregen, muss ihm von außen einmalig Energie durch einen kurzzeitigen Spannungsimpuls (z.B. Rechtecksignal mit nachgeschaltetem Kondensator) über einen Entkoppelwiderstand R zugeführt werden (vgl. Bild 2). Dadurch wird der Kondensator C im Schwingkreis aufgeladen, und es kommt in der Folge zur periodischen Umwandlung von elektrischer Feldenergie in magnetische Feldenergie

und umgekehrt.

Dieser Vorgang erfolgt solange, bis die Energie infolge der oben genannten Prozesse wesentlich vermindert ist (gedämpfte Schwingung).

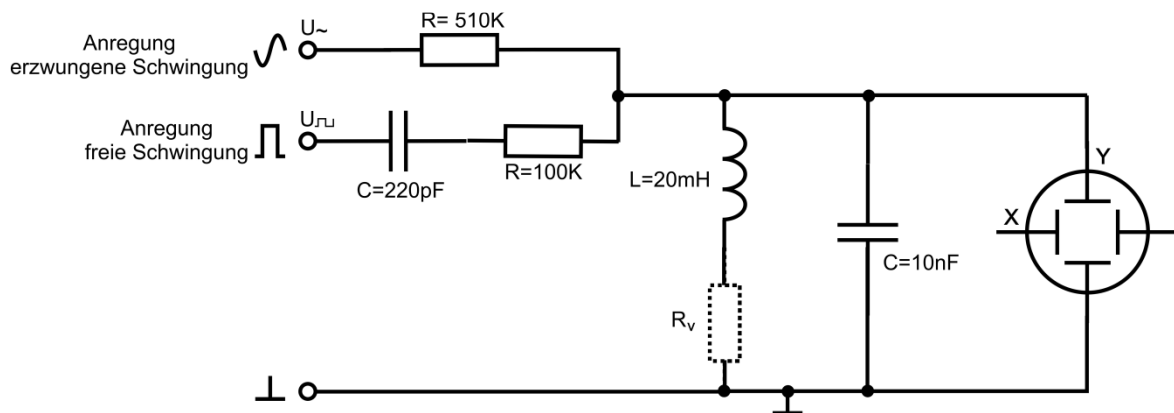


Bild 2: Schaltung zur Messung erzwungener und freier Schwingungen.

2.3 Erzeugung erzwungener Schwingungen (kontinuierliche Anregung)

Einem Schwingkreis können durch periodische Energiezufuhr auch Schwingungen aufgezwungen werden, deren Frequenz nicht unbedingt mit der Eigenfrequenz des Kreises übereinstimmen muß. Das tritt ein, wenn der Parallelschwingkreis über einen Koppelwiderstand R mit einer Sinusspannung U_{\sim} vorgegebener Frequenz f erregt wird (siehe Bild 2).

Im eingeschwungenen Zustand entsteht dann im Schwingkreis eine Wechselspannung mit einer anderen Amplitude als die der Generatorspannung und mit einer bestimmten Phasendifferenz.

Nach Bild 2 liegt an den Y-Platten (CH1 des Oszilloskops) die Kondensatorspannung U_C (Schwingkreisspannung) an. An den zweiten Eingang (CH2) wird zum Vergleich die Generatorspannung U_{\sim} angelegt. Eine ev.Triggerung des Oszilloskops sollte auch über CH2 erfolgen.

Für das Amplitudenverhältnis Schwingkreis- zu Generatorspannung sowie die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen U_C und U_{\sim} erhält man mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung die folgenden Verläufe (Amplituden- bzw. Phasengang, Bild 3). Die zugehörigen Gleichungen finden Sie im Anhang.

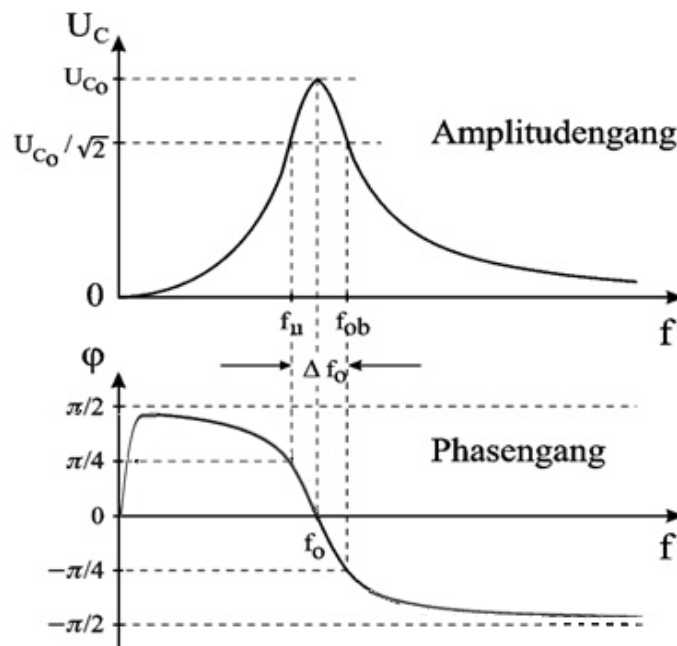


Bild 3: Amplituden- und Phasengang des Parallelschwingkreises.

Die Frequenzen, bei denen die Schwingkreisspannung gegenüber dem Resonanzfall auf den $1/\sqrt{2}$ -fachen Wert abgesunken ist, werden untere Grenzfrequenz f_u und obere Grenzfrequenz f_{ob} genannt. Bei diesen Frequenzen beträgt die Phasendifferenz $|\Delta\varphi| = 45^\circ$. Als Bandbreite B bezeichnet man die Differenz $\Delta f_0 = f_{ob} - f_u$.

Für die Güte Q des Schwingkreises gelten folgende Beziehungen:

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{Z_0}{R_V} = \frac{\omega_0 L}{R_V} = \frac{1}{\omega_0 C R_V} \quad \text{mit } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6).$$

2.5 Fourieranalyse einer gedämpften Schwingung

Zwischen der Zeitfunktion einer freien Schwingung und der Resonanzkurve (Amplitudengang) bei der erzwungenen Schwingung besteht ein mathematischer Zusammenhang, welcher durch eine *Fouriertransformation* (vgl. Versuch 322) gegeben ist (Zeitbereich \leftrightarrow Frequenzbereich).

Der reinen, ungedämpften Sinusschwingung entspricht im Frequenzraum eine einzelne Frequenz f_0 . Ist die Schwingung gedämpft, so ergibt sich nach der Fourieranalyse das sogenannte *Fourierspektrum*, das ein Maximum bei f_0 hat und nach hohen und tiefen Frequenzen hin abfällt (Bild 4). Es ist uns bereits aus dem vorhergehenden Abschnitt als Resonanzkurve bekannt. Die Bandbreite B wird in diesem Zusammenhang als spektrale Halbwertsbreite bezeichnet. Sie ist mit dem logarithmischen Dekrement über

$$D = \frac{\pi B}{f_0} \quad (7)$$

verbunden.

Aus Gl.6 und Gl.7 folgt: Q proportional $1/D$, d.h. je stärker die Dämpfung desto kleiner die Güte und desto breiter die Resonanzkurve. Die zeitliche Dämpfung einer Schwingung ist also gleichbedeutend mit einer spektralen Verbreiterung der Resonanz- oder Eigenfrequenz.

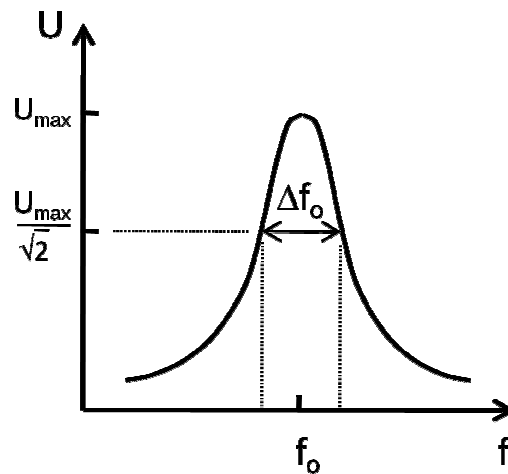


Bild 4: Fourierspektrum.

2.6 Gekoppelte Schwingkreise

Dieser Teil des Experiments lehnt sich an die physikalischen Grundlagen des Versuchs 120 (Gekoppelte Pendel) an. Dort werden zwei Pendel durch eine Feder verbunden und beeinflussen sich gegenseitig in ihrem Schwingungsverhalten. Hier koppelt man zwei (nach Möglichkeit identische) Schwingkreise induktiv, d.h. über die Magnetfelder ihrer Spulen. Auch eine kapazitive oder galvanische Kopplung wäre denkbar. Die durch die Kopplung entstehenden Veränderungen im Verhalten der Schwingkreise sind mit denen der gekoppelten Pendel vergleichbar.

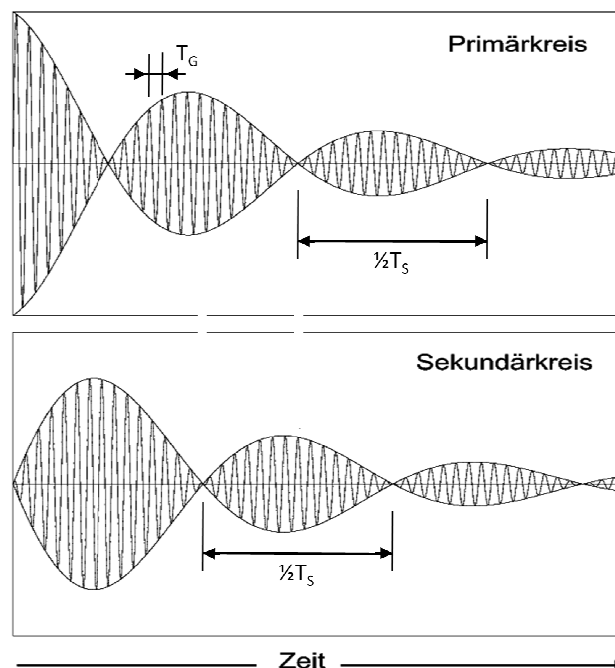


Bild 5: Freie Schwingungen gekoppelter Schwingkreise.

Bei freier Schwingung beobachtet man eine Schwebung (Schwebungsfrequenz f_s), welche der abklingenden Sinuskurve (Grundfrequenz f_G) überlagert ist (Bild 5). Diese ist Ausdruck des wechselseitigen Energieaustausches zwischen beiden Kreisen.

Bei der Anregung erzwungener Schwingungen zeigen sich jetzt zwei Maxima der Amplitude und zwar bei je einer Frequenz unterhalb (f_1) sowie oberhalb (f_2) der ursprünglichen Resonanzfrequenz (Bild 6). Die Stärke dieser sogenannten Resonanzfrequenzaufspaltung Δf hängt vom Kopplungsgrad k der beiden Spulen ab

$$f_{1/2} = \frac{f_0}{\sqrt{1 \pm k}} \quad \text{und} \quad \Delta f = f_2 - f_1 \quad (8)$$

($k = M/L$ bei induktiver Kopplung, M ist die Gegeninduktivität der Spulenordnung).

Ist die Kopplung nur schwach, so gilt $\Delta f \approx k \cdot f_0$. Die Aufspaltung erfolgt symmetrisch zu f_0 .

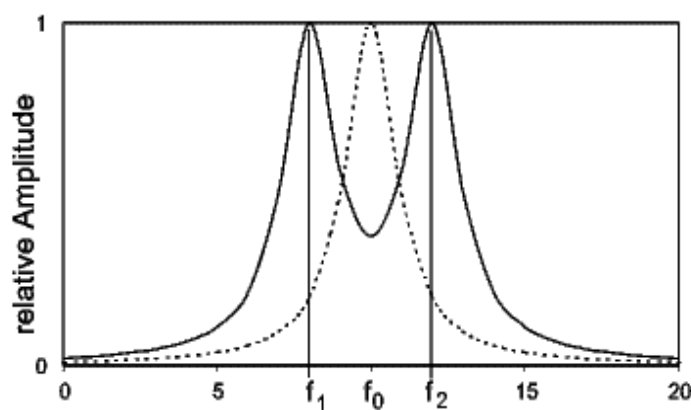


Bild 6: Resonanzfrequenzaufspaltung.

Mittels Fouriertransformation kann auch hier aus dem Zeitverlauf (Bild 5) das Fourierspektrum (Bild 6) berechnet werden. Umgekehrt lässt sich das Entstehen einer Schwebung aus der Überlagerung der beiden Schwingkreisfrequenzen (*Fundamentalschwingungen*) f_1 und f_2 des gekoppelten Systems erklären. Für die Schwebungsfrequenz f_s sowie die Grundfrequenz f_G unter der Einhüllenden gilt:

$$f_s = \frac{(f_2 - f_1)}{2} \quad \text{und} \quad f_G = \frac{(f_1 + f_2)}{2} \quad (9)$$

b.z.w.

$$f_1 = f_G - f_s \quad \text{und} \quad f_2 = f_G + f_s \quad (10).$$

Die Resonanzfrequenzaufspaltung gekoppelter gleichartiger Schwingungssysteme ist eine fundamentale physikalische Erscheinung, die auch für mechanische und optische Oszillatoren gilt. Sie führt u.a. dazu, dass bei dicht gepackten atomaren Bausteinen (Gitteratome im Festkörper) sich die scharfen Energieniveaus (Eigenfrequenz) durch Vielfachaufspaltung zu Energiebändern verbreitern.

3. Versuchsdurchführung

Im Versuch verwenden Sie ein Kombiskop (ein Oszilloskop, das wahlweise mit analogen oder digitalen Messverfahren betrieben werden kann). Hinweise zur Bedienung liegen am Versuchsplatz aus. Der analoge Messbetrieb ist im Versuch 330 ausführlicher beschrieben.

Weiterhin finden Sie ein Steckbrett mit jeweils zwei Kondensatoren (10nF) und zwei einzelne Spulen á 20mH am Versuchsplatz vor. Die Spulen und die Kondensatoren sind mit (A), (B), (C) und (D) gekennzeichnet und dienen als Hinweis, welche Bauelemente für einen gemeinsamen Schwingkreis zu nutzen sind.

Zusätzlich befinden sich zwei bereits gekoppelte Doppelspulen am Versuchsplatz (jeweils 7mH), die unterschiedliche Kopplungsgrade (0.18 und 0.37) aufweisen.

3.1 Erzwungene Schwingungen

Bauen Sie die Schaltung nach Bild 2 auf und schließen Sie einen Sinusgenerator an. Schwingkreis- und Generatorspannung werden an die beiden Y-Eingänge (**CH I; CH II**) des Zweistrahloszilloskops gelegt und auf **DUAL**-Betrieb geschaltet (Taste **VERT/XY**). Zum triggern des Oszilloskops (**SOURCE**) wird die Generatorspannung (also **CH II**) verwendet, da deren Amplitude immer konstant bleibt.

Nehmen Sie für ca. 10 verschiedene Frequenzen die Amplitude der Schwingkreisspannung und die zugehörige Phasendifferenz zwischen U_C und U_L auf (Grafik anfertigen). Es ist darauf zu achten, dass die Messwerte im Bereich der Resonanz hinreichend dicht liegen (mindestens aller 0.2 kHz). Außerhalb des Maximums sind größere Schritte möglich. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Bild 3.

Aufgrund der Darstellung mittels Zweistrahloszilloskop sind Amplitude und Phasendifferenz im Prinzip direkt ablesbar. Optional können Sie die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ auch über die Lissajous-Figur bestimmen. (X–Y-Betrieb, vgl. Bild 7). Es gilt $\Delta\varphi = \arcsin(b/B)$. Hiermit ist eine höhere Genauigkeit bei kleinen Phasenunterschieden zu erreichen.

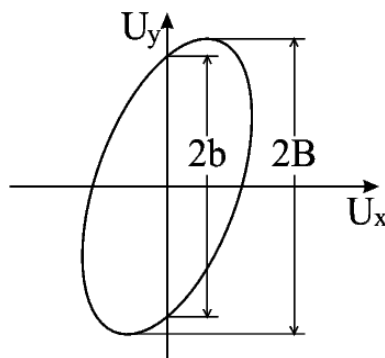


Bild 7: Bestimmung der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ mit Hilfe von Lissajous-Figuren.

Bestimmen Sie aus den Messwerten die Bandbreite, Güte und den Reihenverlustwiderstand des Schwingkreises entsprechend Gleichung (6).

3.2. Freie Schwingungen

Ein Rechtecksignal ($f = 100 \dots 200 \text{ Hz}$) wird über einen Kondensator (siehe Bild 2) eingekoppelt. Schauen Sie sich das Rechtecksignal und die Lade- bzw. Entladespitzen kurz auf dem Scope an. Mit den Spitzen wird der Schwingkreis zum freien Schwingen angeregt. Der Kanal CH II wird zunächst nicht mehr benötigt.

Zum Triggern legen wir das Rechtecksignal auf den Eingang **EXT** und stellen über die Taste **SOURCE** auf externe Triggerung.

Auf Kanal 1 sollte jetzt ein stabiles Bild der gedämpften Schwingung zu sehen sein. Die Amplitudenabnahme kann nun direkt am Scope mit Hilfe der Cursor ausgemessen werden.

Ermitteln Sie das logarithmische Dekrement (siehe Gl.5) und berechnen den Verlustwiderstand R_V (Gl.2). Messen Sie dazu mehrere Schwingungsperioden aus, und bilden Sie dann daraus den Mittelwert. Speichern Sie das Bild (bmp Datei) auf USB-Stick (Digital-Betrieb nötig) für Ihr Protokoll.

Um den aperiodische Grenzfall zu realisieren schalten Sie jetzt einen zusätzlichen Verlustwiderstand in den Schwingkreis, um eine größere Dämpfung zu erreichen. Nehmen Sie dazu den variablen Dekadenwiderstand „ $x \cdot 1000 \Omega + x \cdot 100 \Omega$ “. Bei welchem Widerstandswert für R_V ist experimentell der aperiodische Grenzfall zu vermuten? Übernehmen Sie dieses Bild für Ihr Protokoll.

Vergleichen Sie diesen experimentell bestimmten R_V mit dem theoretischen Wert (Gl.2) für den aperiodischen Grenzfall. Messen Sie den ohmschen Widerstand der Spule mit einem Digitalmultimeter und überlegen Sie, ob dieser in die Rechnung einbezogen werden sollte.

Fertigen Sie eine tabellarische Übersicht aller experimentell und theoretisch ermittelten Ergebnisse an.

3.3. Gekoppelte Schwingkreise

Ein zweiter und möglichst identischer Schwingkreis wird induktiv mit dem ersten gekoppelt. Beobachten Sie $U(t)$ bei Anregung freier Schwingungen (analog 3.2, ohne Dämpfungswiderstand, mit externer Triggerung) im Primär- und im Sekundärkreis (DUAL-Betrieb). Versuchen Sie Messkurven ähnlich Bild 5 zu erzeugen und übernehmen ein Bild für das Protokoll (speichern auf USB Stick).

Vermessen Sie die Periodendauer der Grundschiwingung T_G und Schwebung T_S , um anschließend über f_G und f_S die beiden Resonanzfrequenzen f_1 und f_2 bestimmen zu können.

Bestimmen Sie anschließend die beiden Resonanzfrequenzen f_1 und f_2 mit dem Versuchsaufbau für die erzwungene Schwingung (3.1). Optional vermessen Sie die Phasenlage zwischen U_C und U_L bei den Resonanzfrequenzen.

Anhang

Anhang 1: Schwingungsdifferentialgleichung

Zur Herleitung der Schwingungsdifferentialgleichung wird Bild 8 betrachtet.

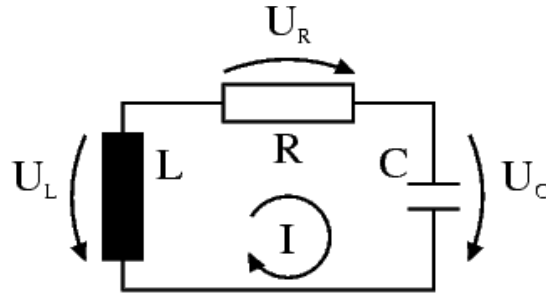


Bild 8: L-C-Parallelschwingkreis mit Reihenverlustwiderstand R_v

Nach der 1. Kirchhoffschen Regel sind im Bild 1 die Ströme durch alle 3 Bauelemente gleich

$$I_L = I_R = I_C = I = \frac{dQ}{dt} \quad (Q \dots \text{elektische Ladung}) \quad (11).$$

Die 2. Kirchhoffsche Regel ergibt die Beziehung

$$U_L = U_R + U_C \quad (12).$$

An der Spule gilt

$$U_L = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2Q}{dt^2} \quad (13).$$

Entsprechend am Widerstand

$$U_R = RI = R \frac{dQ}{dt} \quad (14)$$

und am Kondensator

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (15).$$

Setzt man die Beziehung (12) bis (14) in Gl.11 ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0 \quad (16).$$

Die Lösung erfolgt über einen Exponentialansatz (bitte selber nachvollziehen) und führt zu Gleichung 1, welche die Schwingungen im betrachteten Parallelschwingkreis beschreibt.

Anhang 2: Erzwungene Schwingungen, komplexe Wechselstromrechnung

Für das Spannungsverhältnis zwischen Schwingkreis- und Eingangsspannung gilt nach der Spannungsteilerregel

$$\frac{U_C}{U_{\sim}} = \frac{Z}{Z + R_K} \quad (Z \dots \text{Scheinwiderstand des Kreises}) \quad (17).$$

Mit $Z_L = i\omega L$ (Scheinwiderstand der Spule) und $Z_C = 1/(i\omega C)$ (Scheinwiderstand des Kondensators) ergibt sich für den Amplitudengang (Bild 3a)

$$\left| \frac{U_C}{U_{\sim}} \right| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{\left[R + R_K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]^2 + \omega^2 (L + C \cdot R \cdot R_K)^2}} \quad (18)$$

und für den Phasengang (Bild 3b)

$$\tan \Delta\varphi = \frac{\omega \cdot R_K \left(L - L \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - C \cdot R^2 \right)}{R^2 + R R_K + \omega^2 \cdot L^2} \quad (19)$$

mit $\omega = 2 \pi f$ und $R = R_D + R_V$.