

115 - Kreiselgesetze

1. Aufgaben

- 1.1 Bestimmen Sie die Nutationsfrequenz des kräftefreien Kreisels in Abhängigkeit von der Kreisel­frequenz.
- 1.2 Bestimmen Sie die Präzessionsperiode des schweren Kreisels in Abhängigkeit von der Kreisel­frequenz für verschiedene äußere Drehmomente.
- 1.3 Bestimmen Sie aus den experimentellen Daten die Hauptträgheitsmomente des Kreisels und vergleichen Sie diese mit berechneten Werten.

2. Grundlagen

Stichworte:

Trägheitsmoment, Trägheitsellipsoid, Drehimpuls, Drehmoment, freie Achsen, symmetrischer-, kräftefreier-, schwerer Kiesel, Nutation, Präzession, Transformation von Drehbewegungen, Eulersche Gleichungen

2.1 Trägheitsmomente eines starren Körpers

Zwei Massepunkte sind in Bezug auf die Drehung um eine Achse gleichwertig, wenn ihnen gleichwertige Drehkräfte dieselbe Winkelbeschleunigung erteilen. Dies gilt genau dann, wenn das Produkt $I = m \cdot r^2$ (r ... Abstand der Masse m von der Drehachse) für beide denselben Wert annimmt. Die Größe I nennt man das Trägheitsmoment.

Sind mehrere Massen starr miteinander verbunden, so erfahren sie bei der Drehbewegung alle dieselbe Winkelbeschleunigung. Entscheidend für die Eigenschaften des Gesamtsystems „Starrer Körper“ ist das Gesamt-Trägheitsmoment, welches sich durch Addition der einzelnen Trägheitsmomente ergibt:

$$I = \sum m_n \cdot r_n^2 \quad \text{bzw.} \quad I = \int r^2 dm \quad (1)$$

(I ist ein Tensor; sein Betrag ist bezüglich jeder Drehachse ein anderer)

Lässt man einen starren Körper um verschiedene durch den Schwerpunkt verlaufende Achsen rotieren, so findet man drei ausgezeichnete Achsen, die jeweils senkrecht aufeinander stehen und bezüglich derer das Trägheitsmoment maximale bzw. minimale Werte erreicht. Dies sind die sogenannten Hauptträgheitsmomente. Erkennbar sind sie in der Darstellung als „Trägheitsellipsoid“:

Wenn man $1/\sqrt{I}$ für alle Achsen, die vom Schwerpunkt ausgehen, aufträgt, dann entsteht ein Ellipsoid mit der kleinen Hauptachse in Richtung I_{\max} und der großen Hauptachse in Richtung I_{\min} .

2.1.1 Freie Achsen

Versetzt man einen freibeweglichen Körper durch ein Kräftepaar in Drehung, so beginnt er sich um eine Achse zu drehen, die durch den Schwerpunkt verläuft (welche Achse es ist, wird durch das Kräftepaar vorgegeben). Wenn diese Achse nicht mit der Richtung eines der Hauptträgheitsmomente zusammenfällt, so heben sich die wirkenden Fliehkräfte nicht auf, und die Achse verändert ihre Lage im Raum ständig. Eine stabile Drehbewegung ist nur um diejenigen „freien“ Achsen möglich, die in Richtung der Hauptträgheitsmomente zeigen. Am stabilsten ist die Drehung um die Achse, bzgl. derer das maximale Trägheitsmoment wirkt.

2.2 Kreisel

Ein Kreisel ist ein freibeweglicher und höchstens in einem Punkt mit völliger Drehfreiheit gehaltener starrer, sich drehender Körper.

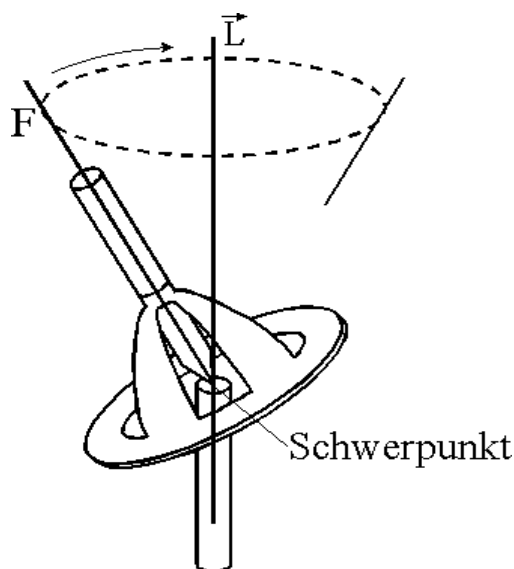
Im folgenden beschäftigen wir uns nur mit dem „symmetrischen“ Kreisel, welcher eine Symmetrieachse, die sogenannte „Figurenachse“, besitzt. Diese fällt immer mit einer Hauptträgheitsachse zusammen.

Liegen darüber hinaus noch Kreiselschwerpunkt und Auflagepunkt (Drehpunkt) an derselben Stelle, so spricht man vom „kräftefreien“ Kreisel. Lässt man diesen um seine Figurenachse rotieren, so behält er die Lage im Raum stets bei - unabhängig von möglichen Bewegungen der Aufhängevorrichtung. Aus dieser Eigenschaft ergeben sich zahlreiche technische Anwendungen besonders für die Navigation in Flugzeugen und auf Schiffen.

Wirkt auf den Kreisel ein äußeres Drehmoment (z.B. die Schwerkraft, wenn der Schwerpunkt ober- bzw. unterhalb des Drehpunktes liegt), so spricht man vom „schweren“ Kreisel.

2.2.1 Kräftefreier Kreisel und Nutation

Bild 1 zeigt einen kräftefrei gelagerten Kreisel. Seine Drehachse (Richtung des Drehimpulses \vec{L}) steht senkrecht. Die Figurenachse F stand bei Beginn der Drehung ebenfalls senkrecht, d.h. der Kreisel veränderte seine Lage im Raum nicht. Nun wurde durch einen einmaligen kurzen Stoß die Figurenachse gegenüber ihrer ursprünglichen Richtung verkippt. Wegen der Drehimpulserhaltung bleibt die Drehimpulsachse \vec{L} weiterhin senkrecht im Raum



stehen (sie würde nur durch ein ständig wirkendes äußeres Drehmoment ihre Lage verändern), fällt jedoch nun nicht mehr mit F zusammen; d.h. die Drehung erfolgt jetzt nicht mehr um eine freie Achse und ist damit nicht mehr stabil (vgl. 2.2). Als Folge davon bewegt sich die Figurenachse F mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Kreiskegelbahn um die Drehimpulsachse \vec{L} . Diese Bewegung heißt „Nutation“.

Die Winkelgeschwindigkeit der Nutation ω_N ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ω_K und hat denselben Drehsinn. Es gilt:

$$I_S \cdot \omega_N = I_A \cdot \omega_K \quad (2)$$

Bild 1: Kräftefreier Kreisel

Dabei treten die Trägheitsmomente um die Figurenachse (I_A) und um eine durch den Schwerpunkt gehende und zur Figurenachse senkrechte Achse (I_S) auf.

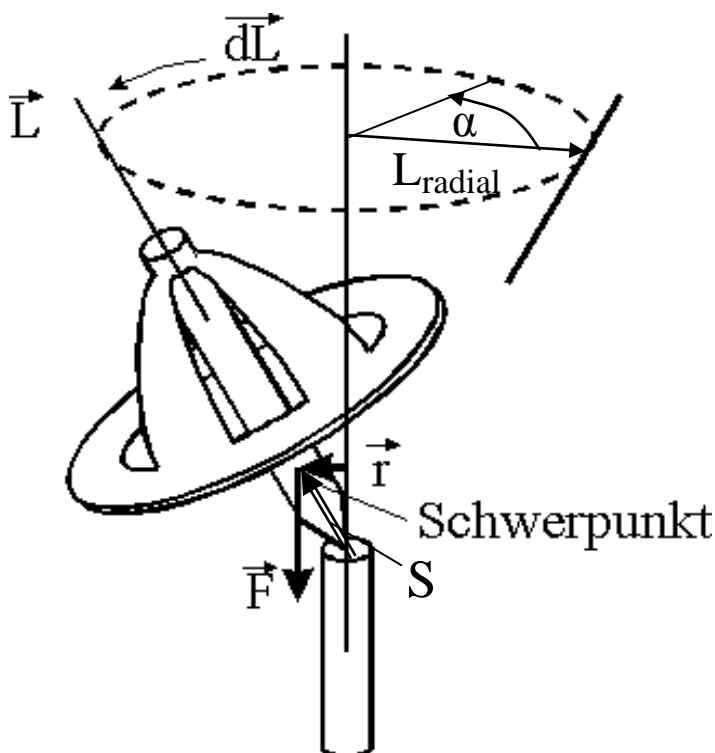
Die Herleitung von Gl. (2) ist im Anhang zu finden.

2.3.2 Schwerer Kreisel und Präzession

Bild 2 zeigt einen Kreisel, dessen Schwerpunkt sich oberhalb des Drehpunktes und im Abstand S von der Drehachse befindet. Infolge der Schwerkraft $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ wirkt ein ständiges äußeres Drehmoment $\vec{M} = \vec{S} \times \vec{F}$ (senkrecht zur Bildebene und damit senkrecht auf \vec{L}), welches eine Drehimpulsänderung $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ bewirkt. Der Drehimpulsvektor umläuft damit gleichförmig die Mantelfläche eines Kreiskegels (solange das Drehmoment wirkt). Diese Bewegung heißt „Präzession“.

Ihre Winkelgeschwindigkeit (ω_p) ist umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω_K des Kreisels, wächst aber mit der Größe des wirkenden Drehmomentes. Die Richtung der Präzession hängt davon ab, ob sich der Schwerpunkt oberhalb oder unterhalb der Auflage befindet.

Wenn die Figurenachse einen Winkel ϑ mit der Vertikalen einschließt, so beträgt die Horizontalkomponente von L $L_{\text{radial}} = L \cdot \sin \vartheta$. Der von \vec{L} überstrichene Winkel α wird:



$$d\alpha = \frac{dL}{L_{\text{radial}}} = \frac{M \cdot dt}{L \cdot \sin \vartheta}$$

Als Präzessionsfrequenz $\omega_p = d\alpha/dt$ erhält man also:

$$\omega_p = \frac{M}{L \cdot \sin \vartheta} = \frac{F \cdot s \cdot \sin \vartheta}{L \cdot \sin \vartheta} = \frac{m \cdot g \cdot s}{L}$$

oder in Vektorform:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}} \quad .$$

Bild 2: Schwerer Kreisel

Bemerkung: Im allgemeinen treten bei der Bewegung eines Kreisels Präzession und Nutation gleichzeitig auf und führen durch ihre Überlagerung zu komplizierten Schleifenbahnen, deren experimentelle Deutung schwierig ist. Im Versuch muss deshalb darauf geachtet werden, dass:

- a) zur Beobachtung der Nutation der Kreisel möglichst exakt im Schwerpunkt gelagert wird, und
- b) zur Beobachtung der Präzession der Kreisel beim Loslassen keinen zusätzlichen Stoß erhält, damit er nutationsfrei präzedieren kann.

2. Versuchsdurchführung

3.1 Messverfahren

Der im Versuch verwendete Aufbau ähnelt den Darstellungen in Bild 1 und 2. Der Kreisel läuft mit seiner Spitze nahezu reibungsfrei in einer Pfanne, die auf einem Stativ befestigt ist. Die Lage des Kreiselkörpers bezüglich der Spitze (und damit der Schwerpunkt) ist verstellbar.

Die Messung der Kreiselfrequenz f_K erfolgt mit einer Gabellichtschranke über einen angeschlossenen Frequenzmesser. Dabei ist zu beachten, dass jede Speiche, mit der der äußere Ring des Kreisels an der Achse befestigt ist, einen Impuls auslöst, so dass die angezeigte Frequenz noch durch die Anzahl der Speichen zu dividieren ist. Die Messung der Nutationsfrequenz f_N kann vorteilhaft mit einer zweiten Lichtschranke erfolgen. Hier ist allerdings eine sorgfältige Justierung nötig, um zu garantieren, dass ein Umlauf genau einen Impuls auslöst. Die Zeit für eine Präzessionsperiode T_P ist im Vergleich zur Nutation wesentlich länger, so dass hier die Messung mit der Stoppuhr die einfachere Variante ist.

3.2 Einstellen des Schwerpunktes

Zur Messung der Nutationsfrequenz muss der Schwerpunkt des Kreisels mit dem Unterstützungspunkt zusammenfallen. Man verschiebt dazu den Kreiselkörper bzgl. der Achse so lange, bis die mittlere der auf der Achse angebrachten Ringmarken gerade noch oberhalb der Halterung (Rändelschraube) zu sehen ist. Nach Aufsetzen des Kreisels auf die Pfanne muss sich dieser im indifferenten Gleichgewicht befinden, d.h. der schräg aufgesetzte, nicht rotierende Kreisel darf nicht (oder nur sehr langsam) nach innen oder außen kippen, bzw. bei Drehung darf keine Präzession auftreten. Meist erreicht man diesen Zustand nicht auf Anhieb, und es sind noch einige kleine Korrekturen notwendig.

Zur Bestimmung der Präzessionsperiode wird ausgehend von der Schwerpunktlage der Kreiselkörper um eine kleine Strecke s (einige Millimeter) nach oben oder unten verschoben. Die günstigsten Werte für s müssen in einem Probeversuch ermittelt werden. Da der Wert von s direkt in die Auswertung eingeht, muss versucht werden, diese Größe so genau wie möglich zu messen.

3.3 Durchführung und Auswertung

Die Nutationsfrequenz f_N wird für 10...15 unterschiedliche Kreiselfrequenzen f_K gemessen. In einer Grafik trägt man f_N über f_K auf. Bei richtiger Messung ergibt sich eine Gerade, deren Anstieg durch Ausgleichsrechnung bestimmt wird. Es gilt:

$$f_N/f_K = I_A/I_S \quad (3)$$

(I_A ... Trägheitsmoment des Kreisels bzgl. der Drehachse, I_S ... Trägheitsmoment bzgl. einer beliebigen Achse, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht auf der Drehachse steht)

Die Präzessionsperiode T_P soll für mindestens fünf unterschiedliche Abstände s und dabei jeweils für mehrere (ca. 5) Kreiselfrequenzen gemessen werden. Da f_K aufgrund der doch noch vorhandenen Reibung während einer vollen Präzessionsperiode sichtbar abnimmt, ist ein geeigneter Mittelwert zu bilden. Man trägt T_P über f_K auf. Aus dem Geradenanstieg und dem Abstand s kann das Trägheitsmoment des Kreisels bzgl. seiner Figurenachse direkt berechnet werden. Es gilt:

$$I_A = m \cdot g \cdot s \cdot \frac{T_P}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\pi f_K} \quad (4)$$

Zum Vergleich ist das Verhältnis T_P/f_K über dem inversen Schwerpunktsabstand s aufzutragen. Aus dem Anstieg ist ebenfalls das Trägheitsmoment I_A zu bestimmen.

Für m ist die Gesamtmasse des Kreisels einzusetzen. Diese beträgt hier $(3,25 \pm 0,05)$ kg.

Nachdem I_A ermittelt wurde, kann mit den Werten der ersten Teilaufgabe nun auch leicht I_S berechnet werden.

Für beide Ergebnisse ist selbstverständlich eine Fehlerabschätzung durchzuführen (hier besonders wichtig, da „Vergleichswerte“ wegen der komplizierten Geometrie nur annähernd bestimmt werden können).

3.4 Unabhängige Abschätzung der Hauptträgheitsmomente

Da allgemein kaum Vorstellungen über die Größe von Trägheitsmomenten existieren und damit selbst grobe Meßfehler anhand der Ergebnisse nicht erkannt werden, sollen an dieser Stelle die zu erwartenden Werte für I_A und I_S größenordnungsmäßig abgeschätzt werden:

Wir nehmen an, daß sich mindestens die Hälfte der Gesamtmasse des Kreisels im äußeren Ring ($r_K = 26$ cm) befindet; der Rest liegt nahe der Achse und trägt damit nur unwesentlich zum Trägheitsmoment bei. Ein Kreisring mit homogener Massenverteilung (Radius $r = r_K$, Masse $m = 1/2 m_K$) verhält sich bei der Drehung um die Mittelachse wie ein Massenpunkt mit gleicher Masse und gleichem Abstand. Für den Massenpunkt gilt $I = m \cdot r^2$ d. h. für unseren Kreisel $I_A \geq 0,5 \cdot m_K \cdot r_K^2$.

Für I_S ist die Abschätzung komplizierter. Dieser Wert kann jedoch aus der Schwingungsdauer T von Pendelschwingungen bestimmt werden.

$$I_S = m \cdot g \cdot s \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \quad (5)$$

Fragen:

1. Was unterscheidet die allgemeine Kreiselbewegung von einer Drehung um freie Achsen oder um gelagerte Achsen? Was ist ein Kreisel? Ist ein Spielzeugkreisel ein Kreisel im physikalischen Sinne?
2. Was sind Trägheitsmomente, was sind Hauptträgheitsmomente? Wie lässt sich das Trägheitsmoment für einen Zylinder berechnen?
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen:
 - Drehimpuls \vec{L} und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
 - Drehmoment \vec{M} und Kraft \vec{F}
 - Drehimpuls \vec{L} und Drehmoment \vec{M} ?
4. Welcher der folgenden Sätze ist sinnvoll:
 - Fallen momentane Drehachsen und Drehimpuls zusammen, so zeigt auch die Figurenachse in diese Richtung.
 - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls zusammen, so dreht sich der Kreisel nicht mehr.
 - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls nicht zusammen, so rotieren Figurenachse und momentane Drehachse um die raumfeste Drehimpulsachse.
 - Fallen momentane Drehachse und Drehimpuls nicht zusammen, so rotiert die Drehimpulsachse um die Figurenachse.
5. Wie versetzt man einen Kreisel in eine Nutationsbewegung und wie in eine Präzessionsbewegung?
6. Was ist ein symmetrischer, was ein kräftefreier, was ein schwerer Kreisel?

Anhang: Bestimmung der Nutationsfrequenz

Wir betrachten einen *schlicht* laufenden Kreisel (hier zeigen Figurenachse, Drehimpuls und Kreiselfrequenzvektor in die gleiche Richtung, in unserer Betrachtung in die z-Richtung). Es gilt $\vec{L}_z = I_z \cdot \vec{\omega}_K$. Ein Stoß gegen die Figurenachse in die negative y-Richtung führt zu einem zusätzlichen Drehimpuls $\vec{L}_x = I_x \cdot \vec{\omega}_x$ (beachte: Drehimpuls steht senkrecht auf der Stoßrichtung – Schraubenregel!).

Die beiden Winkelgeschwindigkeiten und die beiden Drehimpuls addieren sich vektoriell:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{\omega}_K + \vec{\omega}_x \\ \vec{L} &= I_z \cdot \vec{\omega}_K + I_x \cdot \vec{\omega}_x\end{aligned}$$

Da $I_z \neq I_x$ sind jetzt die Vektoren von Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit nicht mehr parallel zueinander. Die Figurenachse rotiert mit der Nutationsfrequenz ω_N um die raumfeste Drehimpulsachse \vec{L} . Zur Berechnung betrachten wir die nachfolgende Skizze in Bild 3.

Es gilt

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\omega}{\omega_z} \cdot \frac{1}{dt}.$$

Die Nutation mit der Nutationsfrequenz ω_N erfolgt in der Ebene senkrecht zu \vec{L} . Dabei wird die Figurenachs des Kreisels pro Zeiteinheit um den Winkel $d\phi$ ausgelenkt:

$$\omega_N = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\omega_{z,\perp}} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Hierbei ist $\vec{\omega}_{z,\perp}$ die zur Drehimpulsachse \vec{L} senkrechte Komponente der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Es gelten $\omega_{z,\perp} = \cos \beta \cdot \omega_z$ und $L_x = \cos \beta \cdot L$. Beide Gleichungen kombiniert ergeben:

$$\omega_N = \frac{\omega_x \cdot \omega_z}{\omega_{z,\perp}} = \frac{\omega_x}{\cos \beta} = \frac{\omega_x \cdot L}{L_x}$$

Wegen $\vec{L}_x = I_x \cdot \vec{\omega}_x$ erhält man schließlich für $L \approx L_z$ (das bedeutet $\beta \approx 90^\circ$ bzw. schwacher Stoß)

$$\omega_N \approx \omega_K \cdot \frac{I_K}{I_x}.$$

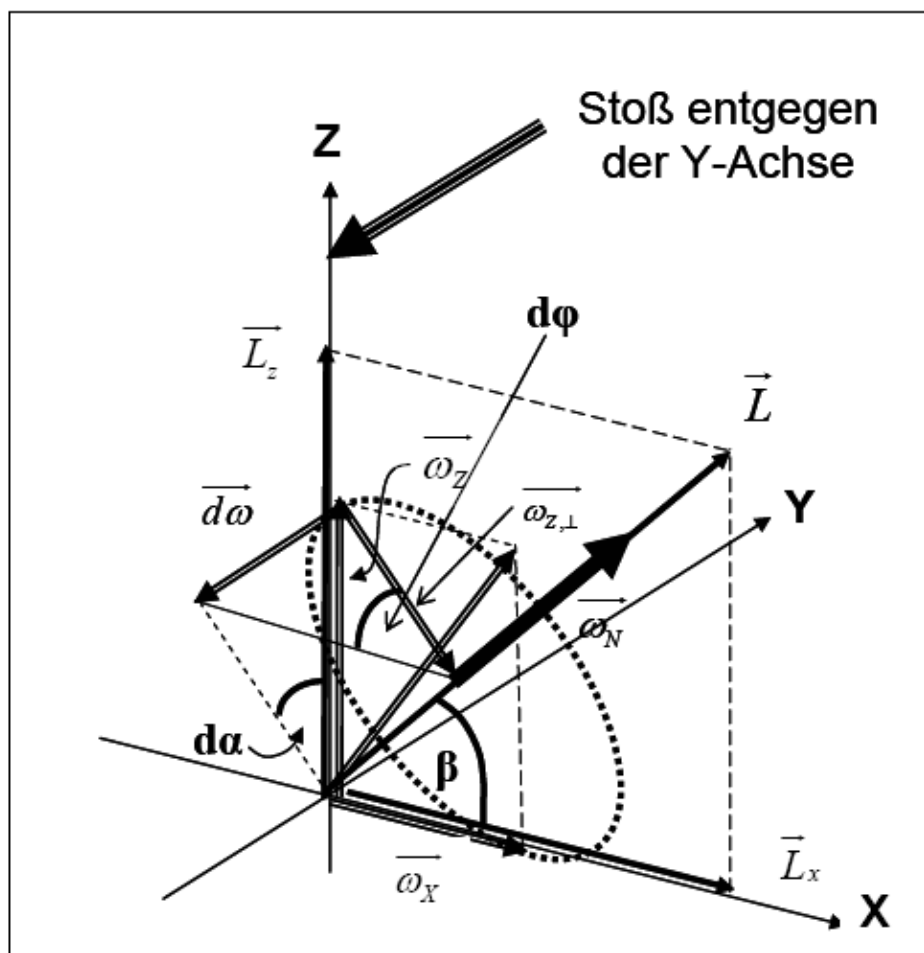


Bild 3: Drehimpulse und Winkelgeschwindigkeiten bei der Nutation

Literatur

Greiner, W.: Theoretische Physik, Mechanik Teil 2 Verlag H. Deutsch, Thun, Frankfurt, 1989

Siehe Link: http://www.uni-jena.de/Literatur_p_131600.html