351 - Übertragungsfunktionen

1. Aufgaben

1.1 Bauen Sie mit den vorhandenen Bauelementen einen RC-Hochpass oder einen RC-Tiefpass auf.
   a) Bestimmen Sie die Amplituden- und Phasenübertragungsfunktion des Hoch- bzw. Tiefpasses.
   b) Messen Sie die Grenzfrequenz der aufgebauten Schaltung.

1.2 Bauen Sie einen Übertrager mit Eisenkern (Transformator) auf. Achten Sie dabei auf die einwandfreie Fixierung des Kerns zur Minimierung auftretender Luftspalte.
   a) Messen Sie die Amplitudenübertragungsfunktion des Transformators in einem weiten Bereich (ab ca. 5 Hz bis oberhalb des Resonanzeffekts).
   b) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz des Transformators durch Amplituden- und Phasenmessung.

2. Grundlagen

Stichworte:
Wechselstromkreis, Übertragungsfunktion, Amplituden- und Phasenmessung, Grenzfrequenz, dB-Maß, Oszilloskop, elektrischer Widerstand, Kapazität, Induktivität, Transformator

2.1 Wechselstromkreis

Eine Wechselspannung wird durch ihre Amplitude U_0, ihre Frequenz f sowie eine mögliche Anfangsphasenverschiebung φ charakterisiert:

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi f t + \varphi)\,. \tag{1}$$

Vielfach findet eine äquivalente Darstellung dieser Größe in der komplexen Ebene statt:

$$U(t) = U_0 e^{i(2\pi f t + \varphi)}\,. \tag{2}$$

Die elektrischen Blindwiderstände für Ohmschen Widerstand R, der Kapazität C eines Kondensators und der Induktivität L einer Spule sind im Komplexen durch folgende Zusammenhänge gegeben:

$$X_R = R\,, \tag{3}$$
$$X_L = i\omega L\,, \tag{4}$$
$$X_C = \frac{1}{i\omega C}\,. \tag{5}$$

Man erkennt, dass der induktive und der kapazitive Blindwiderstand frequenzabhängig und imaginär ist, der Ohmsche Widerstand hingegen rein reell. In der komplexen Zahlenebene ergibt sich somit für diese 3 Widerstände das in Abb. 1 dargestellte Verhalten.

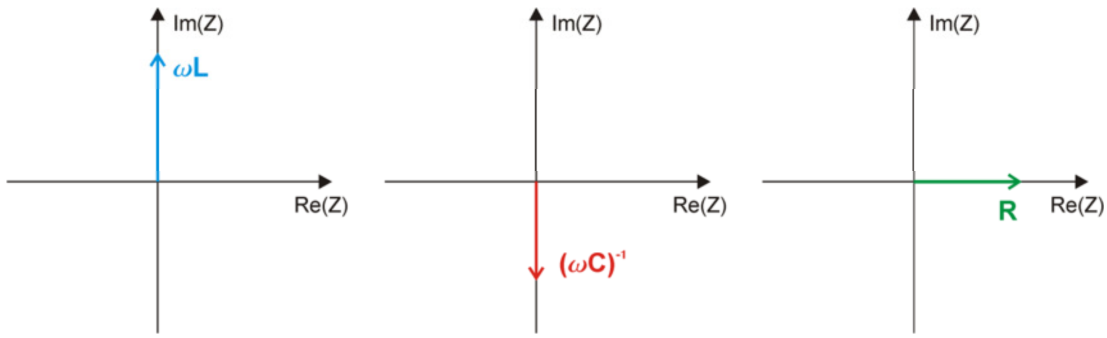

Abb. 1: Darstellung von Widerständen in der komplexen Ebene. R – Ohmscher Widerstand, X_C – kapazitiver Blindwiderstand, X_L – induktiver Blindwiderstand.

Alle für den Gleichstromkreis geltenden Gesetze können weiterhin angewandt werden, wenn man komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände zulässt. Der Zusammenhang zwischen Real-/Imaginärteil sowie Betrag/Phase ist durch folgende Beziehungen gegeben:

$$Z = \mathrm{Re}(Z) + i\,\mathrm{Im}(Z) = R + i\,X\,, \tag{6}$$

$$|Z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(Z)^2) + (\mathrm{Im}(Z)^2)}\,, \tag{7}$$

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,(Z)}{\mathrm{Re}(Z)}\,. \tag{8}$$

Damit ergibt sich eine zu Gl. (6) äquivalente Darstellung:

$$Z = |Z|e^{i\varphi}\,. \tag{9}$$

Die Parameter Amplitude, Phase und Frequenz einer Wechselspannung können mit Hilfe eines Oszilloskops gemessen werden. Für die Phasenmessung stehen prinzipiell zwei unterschiedliche Verfahren zur Verfügung. Zum einen lassen sich Phasenlagen zwischen Eingangs- und Ausgangssignal durch Lissajous-Figuren bestimmen (siehe Abb. 2). Durch Ablesen der Achsenabschnitte kann die Phasenverschiebung wie folgt ermittelt werden:

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{a}{A}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{B}\right)$$

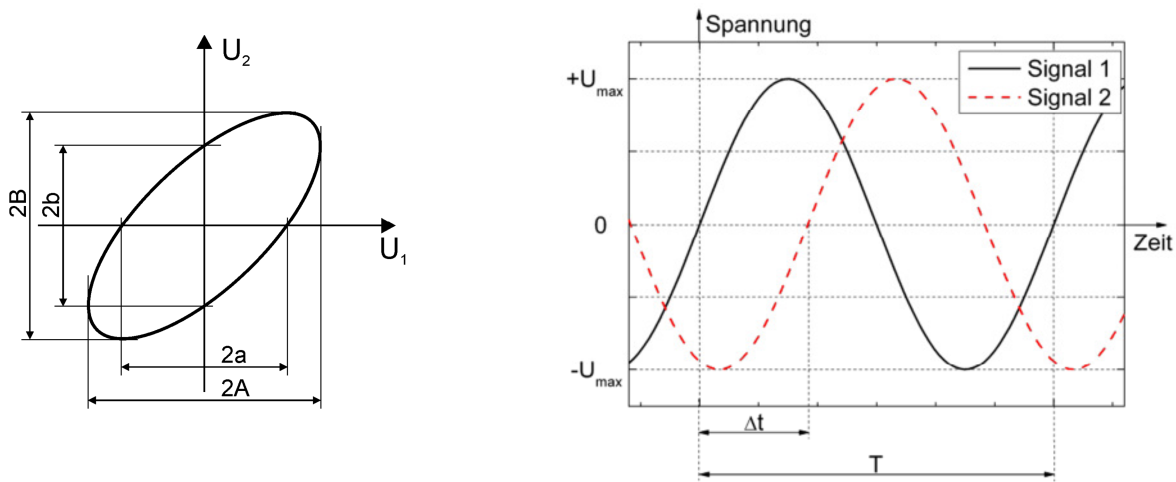

Abb. 2: Phasenmessung mit dem Oszilloskop mit Hilfe von Lissajous-Figuren sowie im Zeitbereich.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der direkten Messung der zeitlichen Verschiebung zweier Signale. Durch die Kenntnis der Periodendauer T (entspricht einer Phasenverschiebung von 2π) kann diese Zeitverschiebung Δt in die Phasenverschiebung Δφ umgerechnet werden:

$$\Delta\varphi = \frac{360°}{T}\Delta t\,. \tag{10}$$

2.2 Übertragungsfunktionen

Baugruppen zur Signalverarbeitung besitzen einen Eingang und einen Ausgang. Sie können vielfach als sogenannter Vierpol vereinfacht werden. Das (komplexe) Verhältnis zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung wird Übertragungsfunktion genannt:

$$g(\omega) = {}^{U_A}\!/_{U_E}\,. \tag{11}$$

Durch Kenntnis von g(ω) kann jeder beliebigen Eingangsspannung eine Ausgangsspannung zugeordnet werden. g(ω) enthält somit die komplette Information über die Funktion des Vierpols. Im Allgemeinen ist die Übertragungsfunktion eine komplexe Größe. Man kann sie deshalb auch wie folgt angeben:

$$g(\omega) = |g(\omega)|e^{i\arg(g(\omega))}\,. \tag{12}$$

Den Betrag der Übertragungsfunktion |g(ω)| nennt man Amplitudenübertragungsfunktion, den Phasenanteil φ(ω)=arg(g(ω)) Phasenübertragungsfunktion. Experimentell bestimmt man die komplexe Übertragungsfunktion durch getrennte Messung von Amplituden- und Phasenübertragungsfunktion. Hierzu legt man eine Wechselspannung bekannter Amplitude und Frequenz an den Eingang der Schaltung an und misst die Amplitude und Phasenlage der Ausgangsspannung. Durch Variation der Frequenz erhält man die komplexe Übertragungsfunktion g(ω).

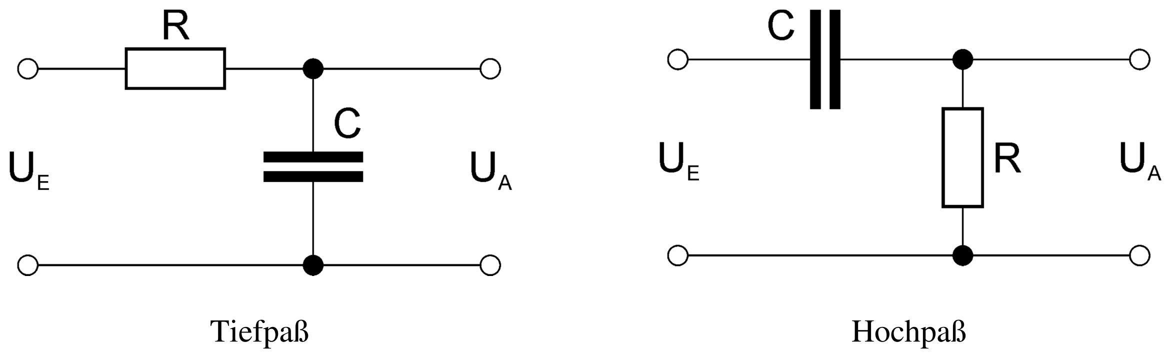

Abb. 3: RC-Hoch- und Tiefpass. In beiden Fällen liegt eine Reihenschaltung eines elektrischen Widerstands mit einem Kondensator vor. Es bildet sich ein Spannungsteiler für Wechselspannung. Da der Kondensator einen frequenzabhängigen Blindwiderstand besitzt, ist das Teilerverhältnis frequenzabhängig.

Abb. 3 zeigt den Aufbau eines RC-Glieds als Tief- und Hochpass. Die entsprechende Übertragungsfunktion des Tiefpasses berechnet man mit Hilfe der Spannungsteilerregel:

$$g(\omega) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1+i\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{-i\arctan(\omega RC)}\,. \tag{13}$$

In Abb. 4 sind der Amplituden- und Phasengang graphisch dargestellt.

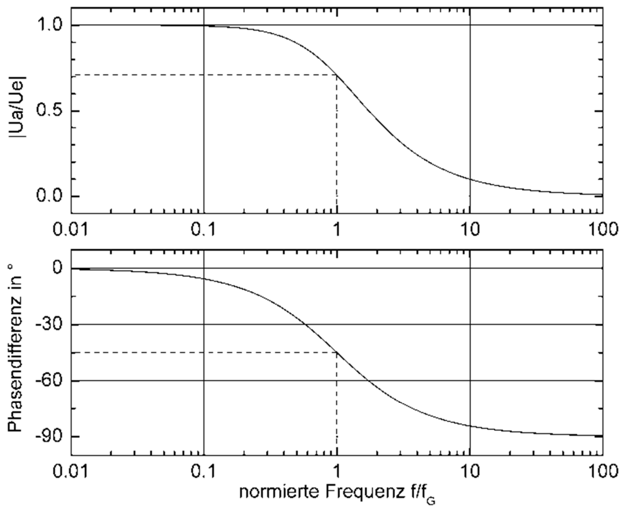

Abb. 4: Amplituden- und Phasenübertragungsfunktion eines Tiefpass.

Um den Abfall der Übertragungsfunktionen zu charakterisieren, führt man die sogenannte Grenzfrequenz ein. Die Grenzfrequenz stellt die Frequenz dar, bei der die Amplitudenübertragungsfunktion auf den 1/√2 ten Teil ihres Maximalwertes abgefallen ist. Für den Tiefpass ergibt sich somit aus Gl. (13) unmittelbar eine Grenz(kreis)frequenz von:

$$\omega_g = \frac{1}{RC}.$$

Analog ergibt sich für einen Hochpass die folgende Übertragungsfunktion:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega RC)^2}}} e^{i \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)} \tag{14}$$

Vollziehen Sie bitte die entsprechende Rechnung für den Hochpass nach. Fügen Sie die Herleitung in Ihr Protokoll ein!

2.3 Übertrager

Zwei magnetisch gekoppelte Spulen bezeichnet man als Übertrager (siehe Abb. 5). Sie werden vielfach eingesetzt, z.B. zur Leistungsanpassung, zum Entkoppeln gegenüber einem Massepotential oder zur Strom- bzw. Spannungstransformation.

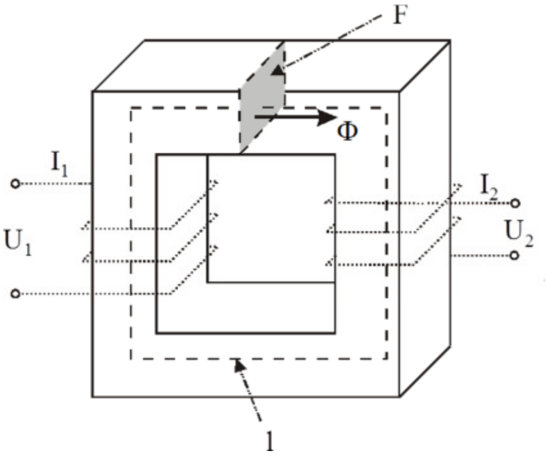

Abb. 5: Schematische Darstellung eines Übertragers. U_1 ist die Eingangsspannung, U_2 die Ausgangsspannung, l die magnetische Weglänge, F die Querschnittsfläche und Φ=B·F der magnetsiche Fluss. I_1 und I_2 stellen Eingangs- und Ausgangsstrom dar.

Setzt man einen idealen Übertrager voraus (Wirkungsgrad $\eta = 1$, Vernachlässigung von Streufeldern und inneren Verlusten, sekundärseitiger Lastwiderstand $R_L \to \infty$), so gilt:

$$U_1 = n_1 \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \qquad bzw. \qquad U_2 = n_2 \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) \quad . \tag{14}$$

Beachtet man, dass der magnetische Fluss in beiden Spulen gleich groß ist, so erhält man unmittelbar einen Zusammenhang zwischen den Windungszahlen N_1 und N_2 und dem Übertragungsfaktor k:

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \, . \tag{15}$$

Bei der Benutzung eines magnetischen Materials als Kern für den Übertrager ist das hysteretische Verhalten des Materials zu beachten (siehe Abb. 6 bzw. Versuch V310 „Ferrograph").

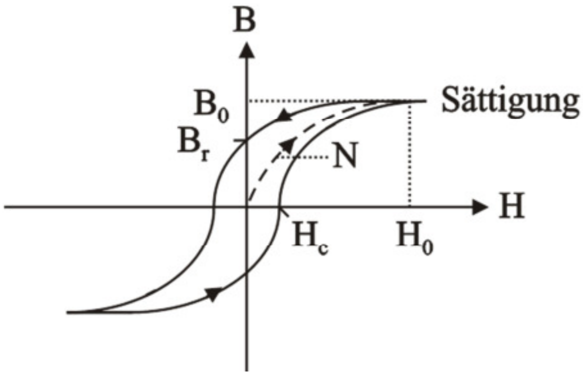

Abb. 6: Hysteresekurve eines magnetischen Kernmaterials eines Übertragers. N bezeichnet hierbei die Neukurve, B_0 die Sättigungsinduktion, B_R die Remanenzinduktion, H_0 die Sättigungsfeldstärke und H_C die Koerzitivfeldstärke.

Der Primärstrom I_1 erzeugt eine magnetische Flussdichte B gemäß

$$B = \mu_{\text{eff}}\, \mu_0\, H = \mu_{\text{eff}}\, \mu_0\, \frac{n_1\, I_1}{l} . \tag{16}$$

In μ_{eff} ist sowohl die relative Permeabilität des Kernmaterials μ_r als auch der Einfluss eines eventuell vorhandenen Luftspaltes zusammengefasst. Dabei ist μ_{eff} keine Konstante, sondern eine stark nichtlineare Funktion der magnetischen Feldstärke H (siehe Abb. 6). Beim Erreichen des Sättigungswertes B_0 verliert das Kernmaterial seine bündelnde Wirkung, so dass die Kopplung zwischen Eingangs- und Ausgangskreis stark abnimmt. Die Sättigung des magnetischen Kernmaterials ist deshalb unbedingt zu vermeiden.

Legt man an der Primärseite eine Wechselspannung der Amplitude U_1 an, so fließt ein frequenzabhängiger Strom I_1:

$$I_1 = \frac{U_1}{\omega L_1} \, . \tag{17}$$

Für kleine Frequenzen wird dieser Strom sehr groß und führt nach Gl. (16) schnell zur Sättigungsinduktion B_0 (siehe Abb. 6). Dies erklärt den nahezu linearen Anstieg der Amplitudenübertragungsfunktion bei niedrigen Frequenzen (siehe Abb. 7) im Gebiet I.

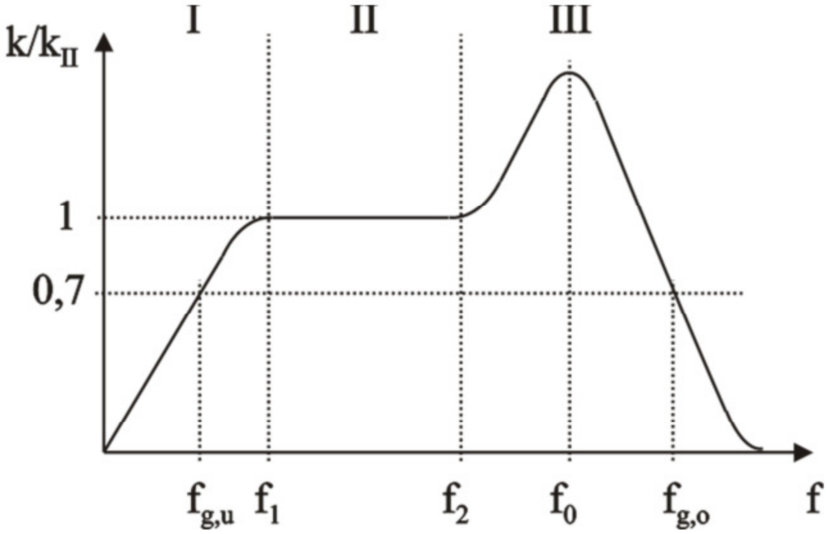

Abb. 7: Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung eines Übertragers. Die Werte wurden auf das Plateau (II) normiert.

Das Gebiet II entspricht dem Arbeitsbereich eines Übertragers. Hier sind Eingangs- und Ausgangsspannung über das Windungsverhältnis nach Gl. (15) gekoppelt. Das Gebiet III ist durch ein Resonanzverhalten gekennzeichnet. Grund dafür sind parasitäre Kapazitäten C zwischen den Windungen der Spulen. Zusammen mit der Induktivität L der Spulen ergibt sich eine Resonanzstelle bei

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,. \tag{18}$$

Aus der Breite der Resonanzkurve in Gebiet III Δf (definiert als der Abstand der Frequenzen, bei denen die Amplitudenübertragungsfunktion auf $1/\sqrt{2}$ des Maximalwerts abgefallen ist) und der Resonanzfrequenz f_0 ergibt sich die Güte Q als Maß für die Schärfe einer Resonanz:

$$Q = {}^{f_0}\!/_{\Delta f}. \tag{19}$$

Eine weitere Erhöhung der Frequenz hat eine Verringerung der Amplitudenübertragungsfunktion zur Folge. Die Ursache hierfür liegt in der Verkleinerung des kapazitiven Widerstandes $|X| = 1/\omega C$ der Windungen bzw. Wicklungslagen gegeneinander. Ein weiterer Mechanismus, der die Amplitudenübertragungsfunktion in diesem Bereich senkt, sind die zunehmenden Wirbelstrom- sowie Ummagnetisierungsverluste im Kernmaterial.

3. Versuchsdurchführung

Wählen Sie für die Spannungsmessung anhand der Ergebnisse des letzten Versuchstags passende Messgeräte aus.

3.1 Bauen Sie einen RC-Tiefpass oder RC-Hochpass mit den vorhandenen Bauelementen auf.

a) Nehmen Sie die komplexe Übertragungsfunktion (Amplituden- und Phasengang) durch Anlegen einer Wechselspannung mit variabler Frequenz an den Eingang der Baugruppe auf. Messen Sie die Eingangs- und Ausgangsspannung sowie die Phasenlage zwischen Eingangs- und Ausgangssignal in einem weiten Frequenzbereich. Wählen Sie ihre Frequenzschritte entsprechend aus, um optimale Messdaten für eine eine halblogarithmische Darstellung zu erhalten.

b) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz durch direkte Messung mit dem AC-Millivoltmeter. Stellen Sie dabei bei hinreichend niedriger bzw. hoher Frequenz (auf dem Plateau des Filters) die Eingangsspannung so ein, dass auf dem Messgerät 0dB angezeigt werden. Verändern Sie nun die Signalfrequenz bis die Anzeige -3dB erreicht. Die eingestellte Frequenz entspricht jetzt der Grenzfrequenz. Überprüfen Sie die Phasenlage zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Führen Sie eine Fehlerrechnung für die Grenzfrequenz durch und vergleichen Sie mit dem theoretischen Wert (Bauelemente vermessen!). Zeigen Sie (schriftlich in der Vorbereitung) mit Hilfe der Definition des dB-Maßes, dass 3dB einem Abfall auf $1/\sqrt{2}$ entsprechen.

3.2 Bauen Sie einen Transformator mit den vorhandenen Spulen sowie einem Eisenkern auf (siehe Abb. 8). Achten Sie dabei darauf, dass der Kern mit der bereitliegenden Klemme fixiert wird, um mögliche Streuverluste zu minimieren. Benutzen Sie das Oszilloskop, um die Ausgangsspannung auf ihre Kurvenform zu überprüfen. Achten Sie darauf, dass stets sinusförmige Signale anliegen (Warum ist dies notwendig?). Bei auftretenden Verzerrungen reduzieren Sie die Eingangsspannung. Messen Sie die Eingangs- und Ausgangsspannung mit einem AC-Millivoltmeter.

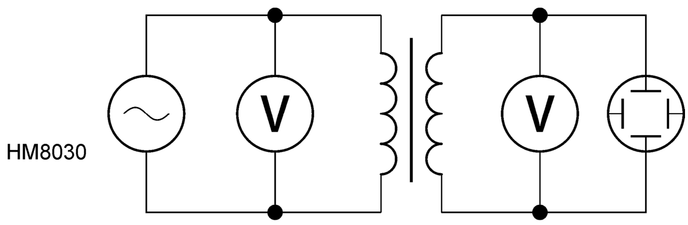

Abb. 8: Schaltung zur Aufnahme der Amplitudenübertragungsfunktion eines Transformators.

a) Bestimmen Sie die Amplitudenübertragungsfunktion des Transformators über einen weiten Frequenzbereich. Beginnen Sie bei ca. 5 Hz und messen Sie bis oberhalb der Resonanzfrequenz des Systems. Achten Sie darauf, dass Sie speziell in Bereichen großer Änderung hinreichend viele Messwerte aufnehmen. Geben Sie die Grenzfrequenzen des Transformators an. Vergleichen Sie das gemessene Amplitudenübertragungsverhältnis im Plateaubereich mit dem Windungsverhältnis des Transformators.

b) Messen Sie im Resonanzfall das Amplitudenverhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung sowie deren Phasenverschiebung. Bestimmen Sie an der Resonanz (Bereich III) die Bandbreite und berechnen Sie daraus die Güte der Resonanz. Welches Übertragungsverhältnis wird im Resonanzfall erreicht? Wovon ist dieses abhängig?

Literatur:

H. Hinsch, *Elektronik: Ein Werkzeug für Naturwissenschaftler*, Springer Berlin 1996.
C. Gerthsen, D. Meschede, *Gerthsen Physik*, Springer Berlin 2010.
W. Demtröder, *Experimentalphysik 2 – Elektrizität und Optik*, Springer Berlin 2004.
E. Philippow, *Grundlagen der Elektrotechnik*, Verlag Technik Berlin 2000.

Für das Verständnis der Hysteresekurve in Abb. 6 ist der Versuch „Ferrograph" des Grundpraktikums hilfreich.