120 – Gekoppelte Pendel

1. Aufgaben

1.1 Messen Sie die Schwingungsdauer zweier gekoppelter Pendel bei gleichsinniger und gegensinniger Schwingung.

1.2 Messen Sie die Schwingungs- und Schwebungsdauer bei Schwebungsschwingungen.

1.3 Wiederholen Sie Ihre Messungen jeweils bei veränderter Kopplung und berechnen Sie die Kopplungsgrade.

1.4 Vergleichen Sie die Ergebnisse von 1.1 und 1.2 mit den theoretischen Erwartungen.

2. Grundlagen

Stichpunkte:
Mathematisches und physikalisches Pendel, gekoppeltes Pendel, Schwingungsgleichung, Schwebung, Resonanzfrequenzaufspaltung

2.1 Mathematisches und physikalisches Pendel

Die physikalischen Zusammenhänge und mathematischen Herleitungen, welche zum Verstehen mechanischer Pendelschwingungen notwendig sind, werden in der Literatur ausführlich behandelt. Nutzen Sie diese Quellen bei der Vorbereitung auf das Experiment! Nachfolgend werden nur die wichtigsten Aspekte kurz vorgestellt.

Ein **mathematisches Pendel** ist eine gedachte Punktmasse m an einem masselosen Faden der Länge *l*, die (z.B. im Schwerefeld der Erde) Pendelschwingungen ausführen kann. Diese Schwingungen entstehen aus dem Wechselspiel von Trägheitskraft und Rückstellkraft. Es gilt (bei Vernachlässigung der Reibung) folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \qquad (1).$$

Für kleine Auslenkwinkel folgt daraus:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = g / l \quad \text{und} \quad T = 2\pi / \omega = 2\pi \cdot \sqrt{l/g} \qquad (2).$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω:

$$\varphi = \varphi_o \cdot \cos(\omega t) \tag{3}$$

Bei einem **physikalischen Pendel** wirkt als Trägheitskraft die Summe aller Massenelemente dm im Abstand r von der Pendelachse. In der Rückstellkraft $F_{\text{Rück}} = -\,\mathrm{d}m \cdot g \cdot \sin(\alpha + \varphi)$ steckt mit α die Winkeldifferenz der Richtungen Achse–Masseelement bzw. Achse–Schwerpunkt mit drin. Bei der Lösung der Schwingungsgleichung erscheint das Trägheitsmoment I_A des Pendels (bzgl. der Achse) mit $I_A = \int r^2\,\mathrm{d}m$, welches die „Trägheitskraft" bestimmt und mit $m \cdot g \cdot s_A = D_A$ das Direktionsmoment (als „rücktreibende Kraft"), bei dem m die Gesamtmasse und s_A der Abstand des Schwerpunktes von der Achse sind. Die Lösung der Gleichung verläuft analog zum mathematischen Pendel. Für die Periodendauer T erhält man jetzt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{I_A / D_A} \tag{4}$$

Bemerkung: Die Analogie lässt sich folgendermaßen verstehen: In der Gleichung für T (math. Pendel, Gl. 2) steht unter der Wurzel eigentlich $m \cdot l/(m \cdot g)$. Die Masse kürzt sich aber heraus. Das ist durchaus bemerkenswert, hängt doch damit die Schwingungsdauer eines Pendels nicht (!) von seiner Masse ab.
Beim physikalischen Pendel wird aus $m \cdot l$ (Masse im Abstand l) das Trägheitsmoment I_A, und statt der Gewichtskraft $m \cdot g$ wirkt das Direktionsmoment D_A, in welchem jetzt der Schwerpunktabstand steckt. Würde der Schwerpunkt mit der Achse zusammenfallen, gäbe es keinen Antrieb für Pendelschwingungen.

2.2 Gekoppeltes Pendel

Unter einem **gekoppelten Pendel** versteht man zwei gleiche physikalische Pendel, die miteinander z.B. durch eine weiche Schraubenfeder verbunden sind. Beim Schwingen des einen Pendels wird auf das andere infolge der sich ändernden Dehnung der Kopplungsfeder eine Kraft ausgeübt, so dass dieses ebenfalls zu Schwingungen anregt wird.

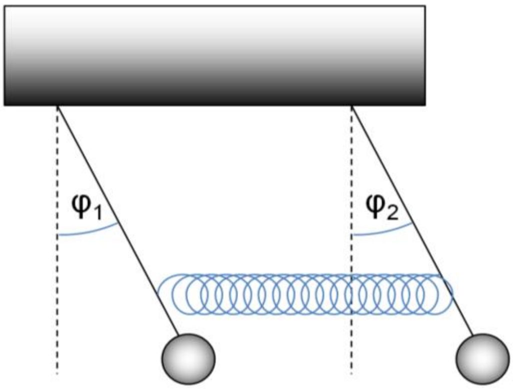

Abb. 1 : Gekoppeltes Pendel.

Wenn beide Pendel gleich sind, haben sie dieselbe Schwingungsdauer T_o und damit auch die gleiche (sogenannte) „Eigenfrequenz" ω_o:

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o} = \sqrt{\frac{D}{I}} \tag{5}$$

(D … Direktionsmoment des Pendels, I … Trägheitsmoment des Pendels).

Im Falle der Kopplung muss man zwischen gleichsinnigen und gegensinnigen Kopplungsschwingungen unterscheiden. Im ersten Fall, also wenn man beide Pendel gleich weit und in gleicher Richtung auslenkt, wird die Feder nicht gedehnt. Es wirkt also auch keine Kopplungsfederkraft. Es gilt für beide Pendel dieselbe Bewegungsgleichung

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_1 t) \qquad (6).$$

Die Schwingungsfrequenz des gekoppelten Systems ist identisch mit der des einzelnen Pendels ($\omega_1 = \omega_o$).

Wenn man hingegen beide Pendel um die gleiche Amplitude, aber in entgegengesetzter Richtung auslenkt, gelten die Bewegungsgleichungen

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_2 t) \qquad (7).$$

Wegen der periodisch wirkenden Kopplungsfederkraft wird jetzt die Frequenz auf

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{D+2\Theta}{I}} = \omega_1 \sqrt{1+\frac{2\Theta}{D}} \qquad (8)$$

erhöht, wobei Θ das Direktionsmoment der Kopplungsfeder ist.
Das gekoppelte Pendel besitzt also zwei (!) Eigenfrequenzen (ω_1 und ω_2).

Die Größe K ist der Kopplungsgrad

$$K = \frac{\Theta}{D+\Theta} \qquad (9).$$

Die beiden Schwingungszustände mit den Frequenzen ω_1 und ω_2 werden auch als **Fundamentalschwingungen** des gekoppelten Pendels bezeichnet.

Die „Resonanzfrequenzaufspaltung“ bei gekoppelten schwingungsfähigen Systemen ist eine grundlegende Erscheinung in der Physik. Man findet sie z.B. auch in elektrischen Schwingkreisen wieder (vgl. Versuch 317). Dort ist aber anders als hier ω_1 nicht gleich ω_o sondern kleiner.

2.3 Schwebeschwingungen

Ein interessanter Fall ist zu beachten, wenn am Anfang das eine Pendel ausgelenkt wird, während das andere in Ruhe verbleibt. Lässt man jetzt das erste Pendel los, so wird die Schwingungsenergie von diesem auf das zweite übertragen. Das heißt, das zweite Pendel gerät ins Schwingen, während das erste (kurzzeitig) zur Ruhe kommt. Dann setzt sich der Prozess in entgegengesetzter Richtung fort, usw.

Man beobachtet Folgendes (vgl. Abb. 2):

1) Beide Pendel schwingen mit der gleichen Grundfrequenz ω_G.
2) Die Amplituden beider Pendelschwingungen ändern sich periodisch mit der Schwebungsfrequenz ω_S.
3) Zwischen beiden Schwingungen gibt es eine Phasenverschiebung von 90°.

Die wechselseitige Schwingungsanregung setzt sich solange fort, bis die Anfangsenergie durch Reibungsprozesse vollständig in Wärme umgesetzt ist (gedämpfte Schwingung).

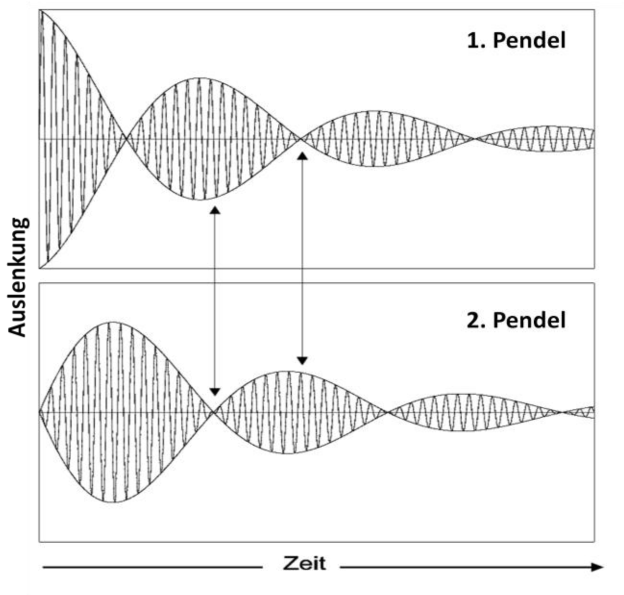

Abb.2 : Schwebeschwingungen

Bei schwacher Kopplung ($\theta \ll D$) können die Schwingungen folgendermaßen beschrieben werden (vgl. Literatur):

$$\varphi_1(t) = A_1(t) \cdot \sin(\omega_G \cdot t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = -A_2(t) \cdot \cos(\omega_G \cdot t) \tag{10}$$

$$\text{mit} \quad A_1(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_S \cdot t) \quad \text{und} \quad A_2(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_S \cdot t) \qquad (11).$$

Zwischen den Fundamentalschwingungen ω_1 und ω_2 und der Schwebungs- bzw. Grundfrequenz ω_S bzw. ω_G besteht folgender Zusammenhang:

$$\omega_S = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 - \omega_1) \quad \text{sowie} \quad \omega_G = \frac{1}{2} \cdot (\omega_2 + \omega_1) \tag{12}$$

Der Kopplungsgrad K kann durch Kombination von Gl.(8) und (9) bestimmt werden. Man erhält:

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \qquad (13).$$

3. Versuchsdurchführung

Machen Sie sich mit den Schwingungsmöglichkeiten der Pendel am Versuchsaufbau vertraut. Als Erstes sollte nachgeprüft werden, ob beide Pendel dieselbe Schwingungsdauer besitzen. Beachten Sie bei allen Messungen, dass zur Erzielung brauchbarer Ergebnisse die Auslenkung nicht zu groß gewählt werden darf (ca. 5 Skt.).

Bei Aufgabe 1.1 sollte jede Messung über mindestens 10 Schwingungsperioden erfolgen und mehrfach wiederholt werden (mindestens 5 Wiederholungen).

Bei Aufgabe 1.2 können wegen der abklingenden Amplitude nur wenige Schwebungsperioden ausgemessen werden. Hier ist zur Erhöhung der Genauigkeit das mehrmalige Wiederholen der gesamten Messreihe unbedingt notwendig. Die Messungenauigkeit ΔT sollte für alle T-Werte (T_1, T_2, T_S, T_G) unmittelbar im Anschluss an jede Messreihe abgeschätzt und notiert werden.
Beachten Sie: T_S ist der doppelte (!) Abstand von zwei Nulldurchgängen der Amplitude.

Zur Veränderung der Kopplung wird die Befestigung der Feder verschoben. Die günstigsten Kopplungsgrade sind in einem Probeversuch zu ermitteln. Überlegen Sie sich, welchen Einfluss die Masse der Kopplungsfeder auf die Ergebnisse haben kann.

Zur Auswertung werden die aufgenommenen Schwingungsdauern in Frequenzen umgerechnet. Vergleichen Sie die Frequenzen ω_1 und ω_2 jeweils mit ω_o.

Überprüfen Sie, ob die gemessenen Frequenzen für Schwebung und Grundschwingung (ω_S und ω_G) im Rahmen ihrer Fehlergrenzen mit den aus den Fundamentalschwingungen (ω_1 und ω_2) berechneten Werten (Gl. 12) übereinstimmen!
Welchen Einfluss hat der Kopplungsgrad auf die Frequenzaufspaltung?

Es ist sinnvoll, die Ergebnisse in Form einer Grafik darzustellen und dann zu diskutieren.
Stellen Sie zusätzlich für mindestens einen Kopplungsgrad die Frequenzen ω_o, ω_1, ω_2 und ω_G auf einem Frequenzstrahl dar, und zeichnen Sie dann ω_S ein!