303 – Statistik

1. Aufgaben

Dieser Versuch verfolgt zwei Zielrichtungen. Zum einen soll ganz allgemein der *Einfluss der Größe einer Stichprobe* auf das Ergebnis statistischer Messungen untersucht werden. Dies geschieht am Beispiel einer „*Poisson-Verteilung*", die in der Natur sehr häufig vorkommt und sich über die Messung der natürlichen Radioaktivität auch experimentell einfach realisieren lässt.
Als Zweites wird gezeigt, wie eine *Normalverteilung* entsteht und wie man sie insbesondere bei der Auswertung *physikalischer Messaufgaben* anwendet.

1.1 Messwertaufnahme

Die statistisch verteilten Messdaten entnehmen wir einem Strahlungsmessgerät, welches die ständig vorhandene natürliche Radioaktivität misst. Es wird dazu eine Strichliste (lt. Vorgabe) mit insgesamt 500 Werten (25 x 20) angefertigt.
Um noch größere Stichproben zu erhalten, nutzen wir ein Würfel-Simulationsprogramm.

1.2 Auswertung

1.2.1 Stellen Sie für unterschiedlich große Stichproben die Verteilungen der Werte grafisch dar und berechnen Sie jeweils mit Hilfe einer Excel-Vorlage Mittelwert, Standardabweichung und Vertrauensbereich des Mittelwertes für 68% statistische Sicherheit!

1.2.2 Untersuchen Sie, ob die Mittelwerte eine Normalverteilung bilden, wie groß die Standardabweichung dieser Verteilung ist und ob tatsächlich 68% aller Mittelwerte im Vertrauensbereich liegen!
Ermitteln Sie mit Hilfe des Simulationsprogramms die Verteilung der Mittelwerte für eine Gleichverteilung!

1.3 Im Rahmen der Ergebnisdiskussion sind die in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 der Versuchsdurchführung gestellten Fragen zu beantworten.

2. Grundlagen

Stichworte:
Basiswissen: arithmetisches Mittel, Standardabweichung, Normalverteilung, Zentraler Grenzwertsatz der Statistik, Vertrauensbereich, Histogramm
Weiterführend: Varianz, Gleich-, Binomial-, Poisson-, Gausverteilung, Stichprobe, Grundgesamtheit, *t*-Parameter, statistische Sicherheit

2.1 Einleitung

Zuerst ein paar allgemeine Gedanken zur Statistik und den wichtigsten Begriffen. Wir stellen uns eine statistisch verteilte Messgröße vor, z.B. die Augenzahlen beim ***Würfeln***. Die Messzeit sei unbegrenzt, d.h. die Anzahl n der von uns registrierten Ereignisse (Würfe mit bestimmter Augenzahl zwischen 1 und 6) ist unendlich. Im Falle eines ideal gebauten Würfels kommen dann alle sechs Ziffern (Messwerte x_k = 1, 2,...6) gleich oft vor (***Gleichverteilung***). Die Anzahl der Ereignisse n_k pro Messwert ist n/6, die relative Häufigkeit $h_k = n_k/n$ ist 1/6 oder 16,66...%. Der Mittelwert $\bar{x}$ (arithmetisches Mittel) berechnet sich nach Gl.(1) und beträgt 3,5.

$$\text{Mittelwert:} \qquad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad (1).$$

Ein anderer Fall statistisch verteilter Messwerte ist die ständig vorhandene ***natürliche Radioaktivität***. Diese kann experimentell als die Zählrate (Impulse pro Zeiteinheit) der von einem geeigneten Detektor registrierten γ-Quanten bestimmt werden. Hier ergibt sich für $n = \infty$ eine ***Poisson-Verteilung*** (Bild 6, Anhang). Das Maximum in der Verteilung entspricht dem am häufigsten registrierten Zählwert.
Die Poisson-Verteilung ist ein Spezialfall der ***Binomialverteilung*** (Bild 5, Anhang), die man z.B. beim Experimentieren am *Galtonschen Nagelbrett* erhält.

Statistisch verteilte Messwerte entstehen auch beim mehrfachen Messen *physikalischer Größen* infolge zufälliger Messabweichungen. In diesem Fall existiert ein durch den physikalischen Zusammenhang vorgegebener *wahrer Wert*, dem man durch Mittelwertbildung über viele Einzelmesswerte möglichst nahe kommen will.

Allen Fällen ist gemeinsam, dass die einzelnen Messwerte bezüglich ihres Mittelwertes in bestimmter Art und Weise streuen. Als ein geeignetes Maß dafür benutzt man üblicherweise die sogenannte ***Varianz*** s^2 (mittlere quadratische Abweichung, Gl.2) bzw. deren Wurzel, welche ***Standardabweichung*** s genannt wird.

$$\text{Varianz:} \qquad s^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 \qquad (2).$$

Der Nenner $(n-1)$ ergibt sich aus statistischen Überlegungen, auf die wir hier nicht näher eingehen.

Beispiele:

Beim Würfeln treten als Abweichungen vom Mittel ($\bar{x}$ = 3,5) die Werte ± 0,5, ±1,5 und ±2,5 auf, für $n \to \infty$ mit jeweils gleicher Häufigkeit. Daraus ergibt sich ein konstanter Wert für die Varianz: $s^2 = 1/6 \cdot (2 \cdot 0{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5^2 + 2 \cdot 2{,}5^2) \approx 2{,}92$ und für die Standardabweichung: $s \approx 1{,}71$.
Im Fall der Poisson- und Binomialverteilung sind die Varianzen an den jeweiligen Mittelwert gekoppelt (vgl. Anhang 1).

Bei physikalischen Messreihen werden die Varianzen bzw. Standardabweichungen durch die Qualität der Messung bestimmt (Summe aller Messfehler).

Es ist im praktischen Leben unmöglich, unendlich viele Messungen durchzuführen, d.h. aus der sogenannten ***Grundgesamtheit*** aller Messwerte ($n = \infty$) kann nur eine begrenzte ***Stichprobe*** entnommen werden, was u.a. bedeutet, dass man den theoretisch zu erwartenden bzw. „wahren" Wert experimentell nicht wirklich in Erfahrung bringen kann. Es ist aber immer möglich, einen *Mittelwert* $\bar{x}$ nach Gl.(1) zu errechnen, welcher als der bestmögliche Schätzwert für den wahren Wert betrachtet wird.
Gleiches gilt für die *Varianz* s^2, deren genauer Wert sich aus der Grundgesamtheit ergibt, und die bei begrenztem Stichprobenumfang über Gl.(2) in mehr oder weniger guter Näherung ermittelt werden kann.

2.2 Poisson-Verteilung

Die in unserem Experiment bestimmten Zahlen der natürlichen Radioaktivität bilden eine Poisson-Verteilung. Diese hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Gaußschen Glockenkurve und kann für große Mittelwerte auch durch diese angenähert werden. Für kleine Mittelwerte ist sie aber deutlich unsymmetrisch. Desweiteren besitzt sie im Gegensatz zur Gaußverteilung keine negativen Werte. Die Poisson-Verteilung läßt sich durch die Gleichung

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \text{mit} \qquad \bar{x} = s^2 = \lambda \qquad (3).$$

beschreiben. Der Mittelwert wird in diesem Fall mit λ bezeichnet.
Die Possion-Verteilung entsteht immer dann, wenn eine sehr geringe Ereigniswahrscheinlichkeit bei gleichzeitig sehr großer Zahl von Ereignismöglichkeiten vorliegt, was in der Natur häufig der Fall ist. Mathematisch lässt sie sich aus der Binomialverteilung ableiten (vgl. Anhang 1.).

2.3 Gaußsche Normalverteilung

Die Binomial- und Poisson-Verteilungen sind *diskrete* Verteilungen. Das gleiche gilt auch für Würfeln oder Münzwurf. Das bekannteste Beispiel für eine *kontinuierliche* Verteilung ist die *Normal- oder Gaußverteilung* (vgl. Literatur und Bild 1).

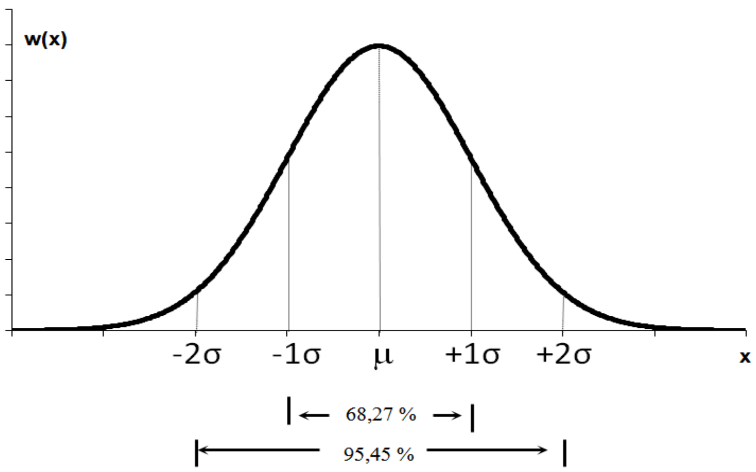

Bild 1: Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilung $w(x)$ der „Gaußschen Glockenkurve".

Die zugehörige Gleichung der Dichtefunktion lautet:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (4).$$

Die Normalverteilung wird oft dazu verwendet, andere Verteilungen anzunähern, da sie als mathematische Funktion analytisch besser zu handhaben ist als diskrete Zusammenhänge. Ihre herausragende Bedeutung erhält sie aber durch die Gültigkeit des Zentralen Grenzwertsatzes (vgl. 2.4). Damit kann sie bei vielen Messungen in Naturwissenschaft und Technik als die Fehlerverteilung schlechthin betrachtet werden.
Wichtig ist zu wissen, dass bei einer idealen Gauß-Verteilung ca. 68% aller Werte im Intervall $\mu \pm \sigma$ um den Mittelwert μ liegen (1σ-Bereich), ca. 95% im Intervall $\mu \pm 2\sigma$ (2σ-Bereich), ca. 99.7% im Bereich $\mu \pm 3\sigma$ usw.

2.4 Zentraler Grenzwertsatz

Der **Zentrale Grenzwertsatz** besagt, dass die Summen von jeweils *n* Zufallszahlen derselben Grundgesamtheit für große *n* eine Normalverteilung bilden, unabhängig davon, wie die einzelnen Zufallszahlen selber verteilt sind. Das liegt vereinfacht gesagt daran, dass sich beim Aufsummieren die „Ausreißer“ (nach oben und unten) gegenseitig kompensieren und somit eine Häufung hin zu „mittleren“ Werten bevorzugt wird. Je größer die Anzahl der Summanden, desto stärker wirkt dieser Effekt.
Teilt man die Summe durch die Anzahl ihrer Summanden *n*, so erhält man das arithmetische Mittel. Damit kann der Satz auch folgendermaßen formuliert werden: Die Mittelwerte $\bar{x}$ von Stichproben, bestehend aus jeweils *n* Zufallszahlen x_k einer beliebiger Ausgangsverteilung sind immer normal verteilt. Dabei ist der Mittelwert $m_{\bar{x}}$ dieser Verteilung derselbe wie der von x_k, nämlich $\bar{x}$, während die Varianz $s_{\bar{x}}^2$ um den Faktor *n* kleiner ist als die Varianz der Ausgangsverteilung s^2. Damit gilt für die Standardabweichung der Mittelwerte

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (5).$$

Wie immer in der Statistik hängt auch hier die Güte einer Aussage von der Zahl der Messwerte ab, d.h. je größer *n*, desto besser ist die Annäherung an die Normalverteilung. Ist *n* zu klein, so gilt der Zentrale Grenzwertsatz nicht mehr uneingeschränkt.

2.5 Statistik bei physikalischen Messaufgaben

Bei der Messung physikalischer Größen existiert im Gegensatz zu den oben genannten Beispielen (Würfeln, radioaktiver Zerfall) nicht ein „wahrscheinlichster“ sondern tatsächlich ein „wahrer“ Wert. Dass dieser mit einer einmaligen Messung nicht genau getroffen wird, liegt an der begrenzten Messgenauigkeit, verursacht durch die zufälligen Fehler (→ vgl. Artikel zur „Fehlerrechnung“). Durch mehrmaliges Wiederholen der Messung unter identischen Bedingungen kann der Einfluss zufälliger Fehler reduziert („Ausreißer“ mitteln sich gegenseitig heraus) und damit die Genauigkeit verbessert werden.

Man erhält eine *stichprobenartige* Folge von unabhängigen Messwerten, d.h. eine Verteilung von n Einzelwerten x_k mit dem arithmetischen Mittel $\bar{x}$ und der Standardabweichung s. Den Physiker interessiert dabei oftmals nicht so sehr die Art der Verteilung und auch nicht vordergründig die Streuung der Einzelwerte sondern die Größe des Mittelwertes $\bar{x}$ und dessen Genauigkeit $\Delta\bar{x}$.

Die Berechnung von $\bar{x}$ ist klar, aber wie groß ist $\Delta\bar{x}$?
Oft wird als Genauigkeit des Mittelwertes die Standardabweichung genommen. Diese auf den ersten Blick vielleicht nahe liegende Vermutung $\Delta\bar{x} = \pm s$ erweist sich schnell als falsch. Wiederholt man nämlich die Messreihe mehrmals hintereinander und berechnet jeweils den Mittelwert, so ist die Streuung $s_{\bar{x}}$ der Mittelwerte viel kleiner (bei genauer Betrachtung um $\sqrt{n}$ kleiner) als die Streuung s der einzelnen Messwerte x_k, was sich mit den Erwartungen aus Abschnitt 2.4 deckt. Es gilt Gl.(5).

Statistik (also mehrmaliges Wiederholen der Messung) bei physikalischen Experimenten dient also einerseits dazu, grobe Fehler zu erkennen (insbesondere wenn man die Messung zum ersten Mal durchführt) und andererseits, die Genauigkeit des Ergebnisses gezielt zu verbessern. Wegen Gl.(5) geschieht dies „leider“ nicht linear, d.h. um z.B. eine 10-fach höhere Genauigkeit zu erhalten, muss man das 100-fache an Messwerten aufnehmen.

Zu beachten ist: Die Genauigkeitsangabe $\pm s_{\bar{x}}$, also $\pm(s/\sqrt{n})$ entspricht dem „1σ-Intervall“ der zugrundeliegenden Normalverteilung, d.h. sie gilt nur in 68% aller Fälle. Für eine 95%-ige „statistische Sicherheit“ müßte der „Fehler“ auf etwa $\pm 2\cdot(s/\sqrt{n})$ erhöht werden, für 99.7% auf $\pm 3\cdot(s/\sqrt{n})$ usw. Im Anhang 2 finden Sie dazu noch ergänzende Gedanken.

2.6 Auswertung statistischer Messreihen

Das Ziel aller statistischen Untersuchungen besteht darin, von einer endlichen Stichprobe auf die Verhältnisse in der Grundgesamtheit zu schließen. Der erste Schritt hierzu ist, das Datenmaterial zu sichten, tabellarisch oder grafisch darzustellen und mit wenigen geeigneten Zahlen zusammenzufassen.
Wenn die Messreihe nur diskrete Werte (z.B. natürliche Zahlen) annehmen kann und nur wenige verschiedene Werte vorkommen, benutzt man zur Darstellung das Stabdiagramm. Dabei werden über den einzelnen Werten "Stäbe" aufgetragen, deren Längen den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten der beobachteten Werte entsprechen (vgl. Bild 5 und 6 im Anhang).
Wenn die Messgröße stetige Werte annehmen kann oder sehr viele verschiedene Werte vorkommen, wählt man für die Darstellung ein Histogramm (Bild 2). Dafür unterteilt man den Wertebereich der Messgröße in äquidistante Intervalle (Klasseneinteilung) und bestimmt für jedes Intervall die Anzahl der darin liegenden Messwerte. Das Histogramm besteht also aus Rechtecken, deren Grundseiten gleich sind und deren Höhen den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten entsprechen. Die Beschriftung erfolgt an den Klassenmittelpunkten. Als Richtwert für die Anzahl k der Intervalle gilt $k = \sqrt{n}$ (n ... Anzahl der Messwerte).

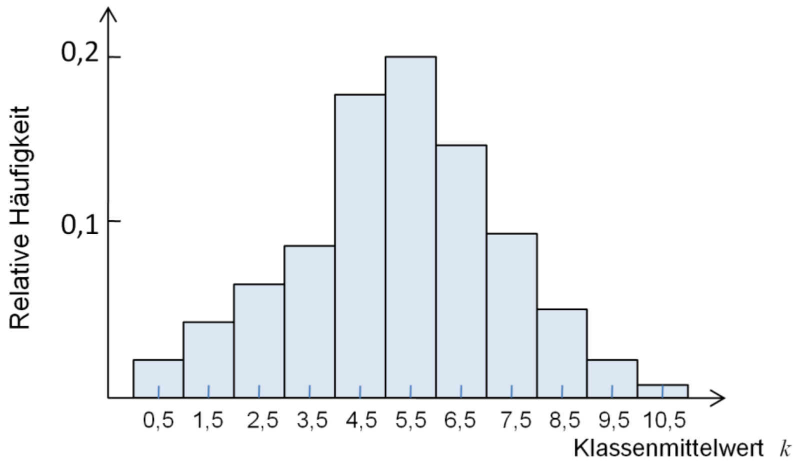

Bild 2: Beispiel für ein Histogramm.

3. Versuchsdurchführung

3.1 Würfelsimulationsprogramm

Es wird empfohlen, die Simulationsrechnung zu Beginn des Versuches durchzuführen, da man so einen guten Einstieg in die Problematik erhält.

Programmbeschreibung: Es wird ein idealer Würfel simuliert, bei dem die möglichen Ziffern 1 bis 6 im statistischen Mittel alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten. Im Einzel-Modus („*Einzelner Durchlauf*“) sind Messreihen beginnend beim Einzelwurf bis zu einer maximalen Zahl (Anzahl der Würfe n) von etwa 125 000 möglich. Es wird die Häufigkeitsverteilung der Ziffern 1 bis 6 als Balken- bzw. Stabdiagramm dargestellt, sowie der Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung der Verteilung berechnet. Dasselbe kann anstatt mit nur einem Würfel auch für die Augensumme bei gleichzeitigem Werfen mit 2, 3, 5 oder 10 Würfeln durchgeführt werden.
Im „*Automatischen Modus*“ wird das Nacheinander-Ausführen mehrerer gleichartiger Messreihen simuliert (m Durchläufe zu je n Würfen, $m \leqq 1000$). Das Programm berechnet für jeden Durchlauf den Mittelwert. Die Verteilung aller Mittelwerte wird als Histogramm dargestellt. Der Mittelwert und die Varianz bzw. Standardabweichung dieser Verteilung werden berechnet. Zur Erstellung des Histogramms müssen die Mittelwerte in Klassen eingeordnet werden. Deren Anzahl sowie der Klassenmittelpunkt der untersten und der obersten Klasse müssen vorgegeben werden. Der Rest erfolgt automatisch.

Testen Sie im *Einzelmodus* das Werfen mit 1, 2, 3, 5 und 10 Würfeln. Welche Verteilungen ergeben sich dabei?

Stellen Sie im *Automatischen Modus* für einen Würfel die Zahl der Würfe auf 100, die Anzahl der Durchläufe auf 1000 und betrachten Sie die nun entstehende Verteilung (vorher Klasseneinteilung optimieren). In welchem Zusammenhang steht die dabei berechnete Standardabweichung (die der Mittelwerte) mit der der urspünglichen Verteilung.
Wiederholen Sie dasselbe beim gleichzeitigen Werfen mit 2 Würfeln!

3.2 Messung der natürlichen Radioaktivität

Eine weitere (diesmal natürlich entstandene) zufällig verteilte Messgröße ist der Nulleffekt bei der Messung der Radioaktivität in der Luft. Die Bestimmung der Zählrate X erfolgt mit einem kommerziellen Strahlungsmessgerät.
Dabei werden durch die statistisch einfallenden γ-Quanten der natürlichen Radioaktivität in einem Szintillationskristall Lichtblitze erzeugt. Diese fallen auf die Fotokatode eines Sekundärelektronenvervielfachers (SEV) und lösen dort Elektronen aus, welche durch das Dynodensystem des SEV verstärkt werden. Die Registrierung der Ausgangsimpulse des SEV erfolgt nach weiterer Verstärkung durch einen Digitalzähler. Jeder gezählte Spannungsimpuls entspricht einem γ-Quant. Die einzelnen Ereignisse sind statistisch unabhängig voneinander. Das zugrundeliegende Verteilungsgesetz ist die Poisson-Verteilung.

Hinweise zu den Einstellungen am Strahlungsmessgerät liegen am Versuchsplatz aus. Die mittlere Zählrate (Impulszahl pro Messung) sollte bei 3 ... 6 liegen, das Maximum ≤ 15 sein (bis 15 reicht die vorgegebene Tabelle!).

Erfassen Sie die Messwerte als Strichliste in einer Tabelle der folgenden Art (Bild 3). Jede Zeile der Tabelle ist für 20 Einzelmessungen vorgesehen. Insgesamt müssen also 25 mal 20 = 500 Zahlenwerte aufgenommen werden (Zeitdauer ca. 30 min). Die Berechnung der Mittelwerte, Standardabweichungen und 1σ- (bzw. 68%) Vertrauensbereiche erfolgt am Computer mit Hilfe einer bereits existierenden Excel-Vorlage. Die Tabelle wird am Versuchstag vom Assistenten ausgegeben.

N	Impulse																		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\bar{x}$	s	$s/\sqrt{n}$
20																			
40																			
80																			
140																			

Bild 3: Muster der Auswertungstabelle.

Es ist sinnvoll, das Ausfüllen der Strichliste nicht rein „mechanisch" vorzunehmen, sondern z.B. ab und zu eine Pause einzulegen, die bis dahin gesammelten Daten zu betrachten, Mittelwert und Streuung auch schon mal ohne Rechnerhilfe abzuschätzen, bewusst auf „Ausreißer" zu achten etc., um auf diese Weise ein Gefühl für den Ablauf statistischer Vorgänge zu entwickeln.

3.3 Hinweise zur Auswertung

3.3.1 (zu 1.2.1)

Die rechnerische Auswertung macht das Excel-Programm. Die fünf Stabdiagramme (Messreihen mit 20, 40, …, 220 Werten) können am PC oder mit Hand gezeichnet werden.

Zwei Fragenkomplexe sind zu klären:

1. Liefern die Messungen des radioaktiven Zerfalls als Ergebnis tatsächlich eine Poisson-Verteilung? Woran ist diese zu erkennen, d.h. existiert eine Asymmetrie in der Verteilungskurve und gibt es zwischen $\bar{x}$ bzw. λ und s einen Zusammenhang der Art $s = \sqrt{\lambda}$? Kann man die Poisson-Verteilung durch eine Normalverteilung annähern? Wenn nicht, unter welchen Voraussetzungen wäre es möglich?

2. Wie wirkt sich die Größe einer Stichprobe auf die Ergebnisse statistischer Untersuchungen aus? Wie gut wird die Form der Verteilung in den Stabdiagrammen sichtbar? Ändern sich $\bar{x}$ und s mit steigendem Stichprobenumfang? Ändert sich der Vertrauensbereich des Mittelwerts? Welche Schlussfolgerungen ergeben sich für die messtechnische Praxis?

3.3.2 (zu 1.2.2)

Im zweiten Versuchsteil (Auswertung der 20er-Blöcke) nutzen wir nicht mehr die ursprünglichen (poissonverteilten) Daten zur Auswertung, sondern betrachten die 25 Mittelwerte als eine neue Stichprobe.

1. Wenn die Theorie stimmt, sollte für 68% von ihnen (d.h. etwa 17 Werte von 25) der Vertrauensbereich ($s/\sqrt{20}$) den angenommenen „wahren“ Wert einschließen. Stellen Sie also die Mittelwerte mit ihren Vertrauensbereichen für 68% statistischer Sicherheit in einem Diagramm, so wie in Bild 4 gezeigt, grafisch dar!

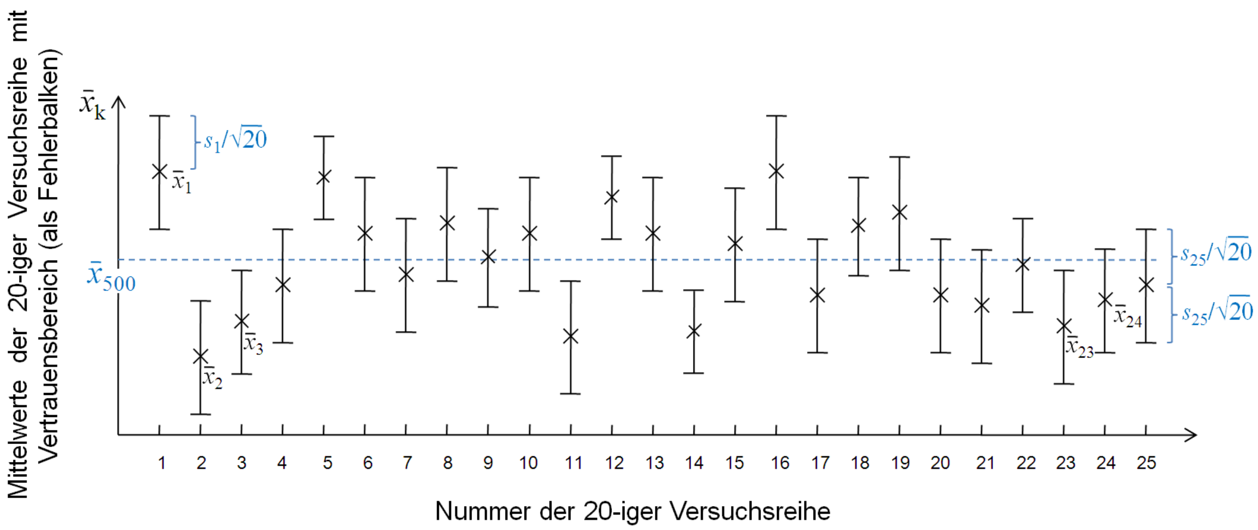

Bild 4: Darstellung der Vertrauensbereiche.

a) Wie viele der 25 Vertrauensbereiche überdecken den „wahren" Wert (als Schätzwert wird der Mittelwert aus allen 500 Einzelmessung verwendet)?
b) Stimmt dieses Ergebnis mit den Erwartungen überein?
c) Gibt es Vertrauensbereiche für 95%, die den wahren Wert nicht überdecken? Wenn ja, wie viele? Was sagt die Theorie?

2. Nach dem Zentralen Grenzwertsatz müssten die Mittelwerte normalverteilt sein, wobei die Breite dieser Normalverteilung etwa um den Faktor $\sqrt{20}$ kleiner ist als die Breite der ursprünglichen Poisson-Verteilung. Auch diese theoretische Voraussage soll untersucht werden.
   Ordnen Sie also die 25 Mittelwerte in 5 (ggf. auch 6 oder 7) gleichgroße Klassen und zeichnen Sie das dazugehörige Histogramm!

a) Ist eine Verteilung zu erkennen? Welche?
b) Bestimmen Sie Mittelwert $\mathrm{m}_{\bar{x}}$ und Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ dieser Verteilung!
c) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Mittelwerte $s_{\bar{x}}$ mit denen der Einzelmessungen *s*; d.h. prüfen Sie nach, ob $s_{\bar{x}} \approx s/\sqrt{20}$ gilt!

Aufgrund der geringen Zahl von nur 25 Mittelwerten kann es sein, dass die erwartete Normalverteilung nur schwer zu erahnen ist. Genau aus diesem Grund soll dasselbe Experiment zusätzlich mit einem Würfel-Simulationsprogramm durchgeführt werden (vgl. 3.1).

Literatur:

Siehe Link: http://www.uni-jena.de/Problematik__Messabweichungen.html
1. Fehlerrechnung – leicht gemacht
2. Vorlesungen zur Fehlerechnung I,II und III

Anhang

Anhang 1: Binomial- und Possion-Verteilung

Da im Experiment mit einer *Possion-Verteilung* gearbeitet wird und sich diese mathematisch aus der sogenannten *Binomialverteilung* ableiten lässt, werden nachfolgend beide Häufigkeitsverteilungen noch einmal kurz vorgestellt. Zum ergänzenden Verständnis kann ein Simulationsprogramm („Galton-Brett") genutzt werden.
Bild 5 zeigt das „Galtonsche Nagelbrett": Man lässt eine möglichst große Zahl von Kugeln nacheinander auf die dargestellte Anordnung von „Nägeln" fallen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% (p = 0.5) werden die Kugeln beim Passieren eines Nagels nach links oder rechts abgelenkt. Dieses Spiel setzt sich bis zur letzten Nagelreihe fort und führt zu einem charakteristischen Auffüllen der Auffangbehälter unter dem Nagelbrett. Bei *n* Nagelreihen stellt man (*n* + 1) Behälter (Urnen) auf.

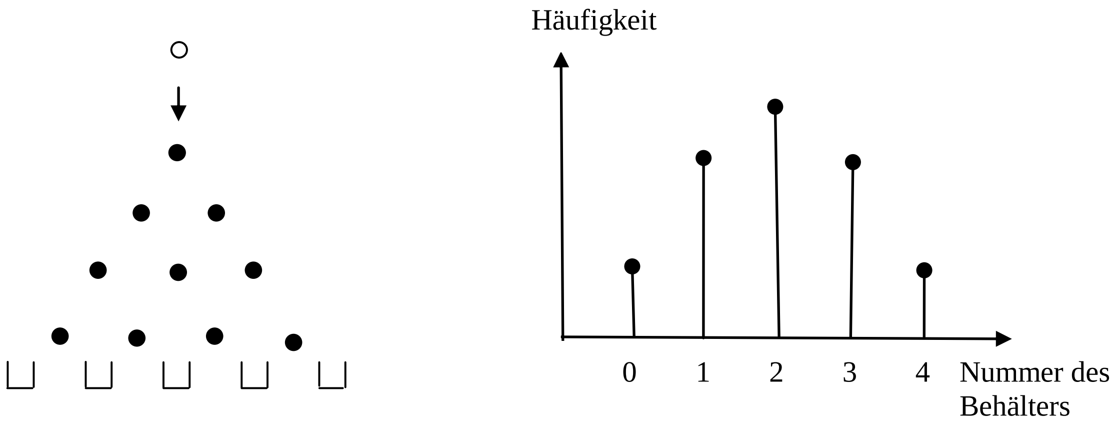

Bild 5: (links) Galtonbrett und (rechts) zugehörige Binomialverteilung für $p = 0.5$ und $n = 4$.

Der Füllstand im k-ten Behälter ($k = 0 \ldots n$) berechnet sich (im statistischen Mittel!) zu

$$B(k) = \binom{n}{k} \cdot p^n \qquad (6).$$

Für $p = 0.5$ (gleiche Ablenkwahrscheinlichkeit nach links und rechts) ist die Binomialverteilung symmetrisch.

Ihr Mittelwert beträgt: $\bar{x} = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}5 = 2$. Die Varianz ist: $s^2 = \tfrac{1}{2}\bar{x} = 1$.

Das Galton-Brett ist in erster Linie zur Veranschaulichung gedacht. Praktische Bedeutung hat die Binomial-Verteilung dort, wo beispielsweise anhand einer entnommenen Stichprobe auf die Ausschussquote einer Charge geschlossen werden soll, allgemein bei der statistischen Behandlung von Problemen mit zwei Entscheidungsmöglichkeiten (Ja/Nein). Da in diesen Fällen die Wahrscheinlichkeit nicht immer 50:50 beträgt, gibt es natürlich auch eine allgemeine Formulierung des Verteilungsgesetzes.

Die verallgemeinerte Binomialverteilung $B(k,n,p)$ für beliebige Wahrscheinlichkeiten p zwischen 0 und 1 ergibt sich zu

$$B(k,n,p) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= n \cdot p \\ s^2 &= \bar{x}(1-p) \end{aligned} \qquad (7).$$

Sie ist für $p \neq 0{,}5$ asymmetrisch, und die Varianz wächst (mit kleiner werdendem p) relativ zum Mittelwert von $s^2 = \tfrac{1}{2}\bar{x}$ (bei $p = 50\%$, siehe oben) bis zu $s^2 = \bar{x}$ (im Grenzfall $p \to 0$). Ein verschwindend kleines p macht allerdings nur dann Sinn, wenn gleichzeitig n sehr groß wird ($n \to \infty$) damit der Mittelwert $\bar{x}$, der sich als Produkt aus $n \cdot p$ ergibt, einen vernünftigen Wert annehmen kann (ansonsten würde z.B. am Galtonbrett bei sehr kleinem p nur noch der erste Behälter gefüllt, alle anderen blieben leer, von einer statistischen Verteilung kann dann keine Rede mehr sein).

Dieser Grenzfall der Binomialverteilung ($p \to 0$, $n \to \infty$), welcher in der Natur sehr häufig vorkommt, wird **Poisson-Verteilung** $P(k)$ genannt und lässt sich mittels

$$P(k) = \lim_{\substack{p\to 0 \\ n\to\infty}} B(k,n,p) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{mit} \quad \bar{x} = s^2 = \lambda \qquad (8).$$

beschreiben. Die Poisson-Verteilung gibt also das Verhalten von Zähl-Ergebnissen für seltene (unkorrelierte) Ereignisse an, d.h. sehr geringe Ereigniswahrscheinlichkeit bei sehr großer Zahl von Ereignismöglichkeiten. Die Herleitung der Formel (Grenzübergang) kann Statistik-Lehrbüchern entnommen werden.

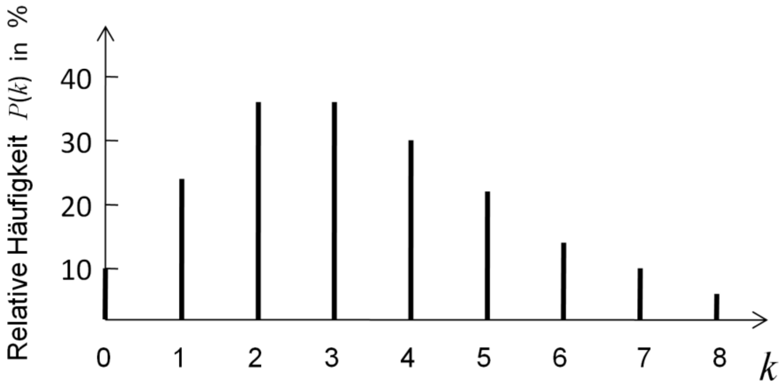

Bild 6: Poisson-Verteilung mit $\lambda = 3$.

Die Poisson-Verteilung ist prinzipiell asymmetrisch, die Größe $1/\sqrt{\lambda}$ bzw. 1/s wird „Schiefe“ genannt. Für große Mittelwerte ($\lambda \gg 0$) nimmt die Symmetrie immer mehr zu, und sie kann deswegen dann auch immer besser durch eine Normalverteilung angenähert werden. Dass eine Normalverteilung ursprünglich aus einer Poisson-Verteilung hervorgegangen ist, sieht man am Zusammenhang $s^2 = \bar{x}$ bzw. $s = \sqrt{\bar{x}}$. D.h. wenn man eine Normalverteilung findet, deren Breite *s* etwa gleich der Wurzel ihres Mittelwertes ist, so kann man vermuten, dass ihr eigentlich ein poissonverteilter Zusammenhang zugrunde liegt.

Anhang 2: Genauigkeit des Mittelwertes, Vertrauensbereich und statistische Sicherheit

Die Genauigkeit eines statistischen Resultats kann immer nur als *Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) um den Mittelwert mit einer bestimmten statistischen Sicherheit* angegeben werden. Wie ist das zu verstehen?

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz kann der Mittelwert einer Messreihe, die im Rahmen einer physikalischen Messaufgabe gewonnen wurde, als Teil einer Normalverteilung angesehen werden. Diese Normalverteilung wäre entstanden, hätte man die Messreihe bestehend aus *n* Werten mehrmals wiederholt (was in der Praxis aber nicht gemacht wird).

Betrachtet man unter diesem Aspekt Bild 1 (Gaußsche Glockenkurve), d.h. stellt man sich vor, dass dort die Verteilung vieler Mittelwerte aus mehrmals hintereinander durchgeführten, gleichartigen Mess<u>reihen</u> dargestellt wäre, so wird klar, dass die in 2.5 angegebene Genauigkeit des Mittelwertes $s_{\bar{x}}$ der Größe σ dieser Gaußverteilung entspricht. Ein Intervall der

Breite $\pm s_{\bar{x}}$ um den wahren Wert (entsprechend $\mu \pm \sigma$) würde demnach ca. 68% aller möglichen Mittelwerte enthalten, die beim mehrmaligen Wiederholen der Messreihe aufgetreten wären.

Im Umkehrschluss lässt sich sagen, dass für den aus nur einer Messreihe bestimmten Mittelwert die Fehlerangabe $\bar{x} \pm s_{\bar{x}}$, also $\bar{x} \pm (s/\sqrt{n})$, eine 68%-ige Wahrscheinlichkeit dafür bietet, dass der wahre Wert im Intervall $\bar{x} - (s/\sqrt{n})$ bis $\bar{x} + (s/\sqrt{n})$ liegt *(Vertrauensbereich für 68% statistischer Sicherheit)*, d.h. die Genauigkeitsangabe $\Delta\bar{x} = s/\sqrt{n}$ ist in ca. 68% aller Fälle zutreffend (also nur in rund 2/3 alle Fälle, für das restliche Drittel wäre sie zu klein). Bei Vergrößerung des Fehlerintervalls auf das Doppelte: $\Delta\bar{x} = 2 \cdot s/\sqrt{n}$ (entsprechend $\mu \pm 2\sigma$) beträgt die Sicherheit der Genauigkeitsangabe bereits ca. 95%.

Da in der Statistik keine 100%-igen Aussagen möglich sind, geht es immer darum, unter Berücksichtigung der gewünschten bzw. geforderten statistischen Sicherheit den zugehörigen Vertrauensbereich $\Delta\bar{x} = \pm(t \cdot s/\sqrt{n})$ des Ergebnisses $\bar{x}$ anzugeben. Die Zahl t (der sogenannte „t-Parameter“) kommt von der „Student- oder t-Verteilung“ und kann ganzzahlig (1, 2, 3, …) oder beliebig „krumm“ sein. Er hängt außer von der Statistischen Sicherheit bzw. der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = (1 - p)$ auch vom Stichprobenumfang ab und kann Tabellen entnommen werden.

Tabelle 1: Parameter t in Anhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit p und der Stichprobengrösse n

n	***p***		
	68%	**95%**	**99%**
20	1,02	2,09	2,85
40	1,01	2,02	2,70
80	1,00	1,99	2,64
140	1,00	1,98	2,63
220	1,00	1,97	2,60

Anhang 3: Normierung und Freiheitsgerade

Während die Possion-Verteilung nur einen Freiheitsgrad (einen freien Parameter) besitzt, nämlich den Mittelwert, verfügt dagegen die Normalverteilung über zwei Freiheitsgrade, den Mittelwert und die Standardabweichung. Die Summe bzw. das Integral über jeweils die gesamte Funktion ergibt 1 (Normierung):

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad \text{mit} \qquad \sum_{k \neq 0}^{\infty} P(k) = 1$$

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{mit} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)\, dx = 1.$$