Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 6

1. Geben Sie die Partialbruchzerlegungen der folgenden Funktionen an:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad f(z) := \frac{z^2+1}{z^3-2z^2+z}\,,\\
&(b) \quad f(z) := \frac{z+1}{z^4-z^3+z^2-z}\,,\\
&(c) \quad f(z) := \frac{1}{z^3-z^2+z}\,.
\end{aligned}
$$

2. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Laurentreihen:

$$
(a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}\,, \quad (b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n+1}\,, \quad (a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n} z^n\,.
$$

3. Sei

$$
K_{r,s} := \{z \in \mathbb{C} :\ r < |z-z_0| < s\}
$$

der Kreisring mit Zentrum in z_0. Entwickeln Sie folgende Funktionen in Laurentreihen in den angegebenen Gebieten:

$$
(a)\ f(z) := \frac{3}{(z+1)(z-2)} \quad \text{in}\, K_{1,2}(0)\,, \quad (b)\ f(z) := \sin\left(\frac{z-1}{z}\right) \quad \text{in}\, \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.
$$

4. Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten und geben Sie im Falle einer Polstelle die Ordnung an:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad f(z) := \frac{z^4}{(z^4-16)^2} \qquad \text{in}\ z_0 := \pm 2,\ \pm 2i\,,\\
&(b) \quad f(z) := \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1} \qquad \text{in}\ z_0 := -i\,,\\
&(c) \quad f(z) := \frac{1}{1-e^z} \qquad \text{in}\ z_0 := 0\,,\\
&(d) \quad f(z) := \cos\left(\frac{1}{z}\right)\, \sin\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{in}\ z_0 := 0\,.
\end{aligned}
$$