Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 2

1. Berechnen Sie den Konvergenradius der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4 + 2n^3}{5n^4 + 23n^3} z^n \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(4+3i)^n} \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n\,(2n)\,!}(z-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n^2)}}{n^3} \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n} z^n \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\log n}{n}} z^n \,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} z^{n!} \,.$$

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ differenzierbar ? Bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(z)$.

$$(a) \quad f(z) = \frac{z^3}{z^3 + z^2 - 2} \qquad (b) \quad f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\, \sin y)$$

$$(c) \quad f(z) = z^2\,\overline{z} \qquad (d) \quad f(z) = f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3 + e^x\,(\cos y + i\, \sin y)$$

$$(e) \quad f(z) = f(x+iy) = -6(\cos x + i\, \sin x) + 2(1-i)\,y^3 + 15(y^2 + 2y)\,.$$

3. Bestimmen Sie alle Funktionen $v(x,y)$, so daß

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion wird, wobei

$$u(x,y) := x^2 - y^2 + e^{-y}\, \sin x - e^y\, \cos x\,.$$

4. Sei $f(z)$ eine in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ holomorphe Funktion, für welche gilt:

$$(a)\ \Re e\ f(z) \equiv 1\,, \qquad\qquad (b)\ |f(z)| \equiv 1\,.$$

Weisen Sie nach, daß f dann konstant sein muß.