
Funktionentheorie: Gliederung

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

February 2, 2018

1 Holomorphe Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen

- Definition, Eigenschaften und Funktionen
- Polarkoordinaten und andere Darstellungen
- Definition und Eigenschaften der Betragsfunktion

1.2 Grenzwerte

- Definition Grenzwert einer Folge von komplexen Zahlen
- Charakterisierung der Konvergenz
- Beispiel: Standardgrenzwert

1.3 Reihen

- Definition konvergenter Reihen
- Definition absolut konvergenter Reihen
- Beispiel: Potenzreihe

1.4 Komplexe Funktionen

- Definition und Charakterisierung
- Beispiel

1.5 Stetigkeit komplexer Funktionen

- Definition und Charakterisierung
- Erhalt der Stetigkeit unter Bildung von Produkt, Quotient oder Komposition
- Bedingung für Stetigkeit des Betrages
- Beispiele
- Fortsetzung der Exponentialfunktion
- Eigenschaften der Fortsetzung

1.6 Potenzreihen

- Definition
- Definition Häufungspunkt einer Folge
- Definition \limsup und \liminf
- Beispiel: Häufungspunkte der angeordneten rationalen Zahlen
- Satz über Konvergenzradius einer Potenzreihe mit Grenzfällen
- Beispiele für die Berechnung des Konvergenzradius

1.6.1 Eigenschaften

- Gleichmäßige Konvergenz
- Stetigkeit

1.7 Differenzierbarkeit

- Definition
- Bemerkung Bedeutung und Betragsfunktion
- Satz über Erhaltung der Rechenregeln aus dem reellen Zahlenbereich
- Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit
- Definition holomorphe Funktion
- Beispiele holomorpher Funktionen
- Satz über die Holomorphie und Ableitung einer Potenzreihe
- Folgerung: Exponentialfunktion ist holomorph und ihre eigene Ableitung
- Folgerung: Potenzreihen sind beliebig oft differenzierbar
- Satz über die n . Ableitung einer Potenzreihe
- Bemerkungen zur Umkehrung von Sätzen

1.8 Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

- Problemstellung
- Charakterisierung eindimensionale reelle Differenzierbarkeit in einem Punkt
- Definition zweidimensionale Differenzierbarkeit
- Satz über die Existenz der partiellen Ableitungen
- Satz über die Existenz der Ableitung bei stetigen partiellen Ableitungen
- Satz: partielle Ableitungen differenzierbarer Funktionen gehorchen den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen
- Satz: Komponenten holomorpher Funktionen sind harmonisch

2 Der Cauchy'sche Integralsatz

2.1 Komplexe Kurvenintegrale

- Wiederholung Kurvenintegrale für das Riemann-Integral, Rektifizierbarkeit und Kurvenintegrale 2. Art
- Idee der komplexen Kurvenintegrale
- Definition
- Einfache Eigenschaften
- Lemma: Separation, Orientierungsabhängigkeit und Beschränktheit
- Beispiel: Hyperbel um $z_0 \in \mathbb{C}$

2.2 Stammfunktionen

- Definition
- Beispiele
- Lemma: HDI für komplexe Stammfunktionen und Kurvenintegrale
- Exkurs über Kurvenintegrale 2. Art
- Wegabhängigkeit des Kurvenintegrals 2. Art
- Definition Gradientenfeld
- Lemma: Notwendige Bedingung für Gradientenfeld
- Definition sternförmiger Teilmengen des \mathbb{R}^2
- Beispiele sternförmiger Mengen
- Satz: Charakterisierung der Existenz eines Gradientenfelds
- Satz über Kurvenintegrale bei existierendem Gradientenfeld
- Beispiele
- Lemma über die Berechnung der Stammfunktion

2.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

- Lemma: Integrallemma von Goursat
- Satz: Integralsatz von Cauchy
- Bemerkung: Ersetzung der Sternförmigkeit durch einfach zusammenhängend
- Beispiel: Fresnel'sche Integrale

2.4 Die Cauchy'sche Integrationsformel

- Lemma: Gleichheit von geschlossenen Kurvenintegralen
- Satz: Identität des Kurvenintegrals
- Bemerkung

3 Eigenschaften holomorpher Funktionen

3.1 Potenzreihen

- Satz: Holomorphie impliziert Potenzreihenentwicklung
- Folgerung: Holomorphie impliziert unendliche Differenzierbarkeit

3.2 Der Satz von Liouville

- Definition ganzer Funktionen
- Bemerkungen zu Folgerungen
- Beispiele
- Satz: Beschränkung impliziert Polynom
- Folgerung: Fundamentalsatz der Algebra

3.3 Der Identitätssatz

- Idee und Problem
- Definition zusammenhängender Teilmengen
- Satz: Charakterisierung der Gleichheit zwei holomorpher Funktionen
- Folgerung: Eindeutigkeit und Existenz holomorpher Funktionen
- Bemerkung über eindeutig bestimmte Fortsetzungen

3.4 Das Maximumsprinzip

- Satz: Maximum impliziert Konstanz
- Folgerung: Betrag realisiert Maximum auf dem Rand
- Folgerung: Betrag realisiert Minimum auf dem Rand

4 Singularitäten- und Resumentheorie

4.1 Laurentreihen

- Satz: Berechnung der Potenzreihe holomorpher Funktionen
- Bemerkung: Laurentreihe, regulärer Teil und Hauptteil
- Satz: Koeffizienten der Potenzreihe sind eindeutig

4.2 Singularitäten

- Definition hebbare Singularitäten, Polstellen und wesentliche Singularitäten
- Beispiele
- Satz: Charakterisierung von Singularitäten
- Bemerkung