Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 4

1. Man bestimme mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes die folgenden Integrale $\oint_\Gamma (1+z^2)^{-1} dz$, wo Γ gegeben ist durch

   - $|z-i| = 1$;
   - $|z+i| = 1$;
   - $|z| = 2$.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

$$\oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2}\,dz \qquad \text{bzw.} \qquad \oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2+\pi}\,dz\,.$$

3. Sei $a > 0$. Zeigen Sie, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+ia)^2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

gilt unabhängig von $a \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie dies zur Herleitung der Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos(ax)\,dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-a^2/2}\,.$$

Hinweis: Man benutze den Cauchyschen Integralsatz bzgl. des Rechtecks mit den Eckpunkten $(-R,0), (R,0), (R,ia), (-R,ia)$, wo $R > 0$ beliebig ist.