

## Testklausur Funktionentheorie

Februar 2018, Vorlesung : Prof. W. Sickel

- Alle angegebenen Lösungswege müssen durchschaubar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.
- Es sind keine Taschenrechner oder Laptops erlaubt.

	Aufgaben	Punkte
1	Skizzieren Sie die folgende Menge $M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z+3} \right) > 2 \right\}.$	4
2	Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sin n}}{4^{2n}} z^n$	3
3	Für welche $z$ ist die Funktion $f(z) := f(x+iy) = (x+y)^2 - 5i(x-y)$ differenzierbar ? Wo ist $f$ holomorph ?	7

	Aufgaben	Punkte
4	<p>Man berechne das Kurvenintegral</p> $\int_{\Gamma} \sin z \cos z \, dz,$ <p>wo <math>\Gamma</math> der obere Halbkreis ist mit Zentrum in <math>z_0 = 0</math> und Radius <math>\pi</math>, mathematisch positiv orientiert.</p>	4
5	<p>Man berechne das Kurvenintegral</p> $\oint_{ z-i =1} \frac{\sin z}{z^2 - z + 1} \, dz$ <p>mittels der Integralformel von Cauchy.</p>	6
6	<p>Man berechne das Kurvenintegral</p> $\int_{\Gamma} \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \, dz$ <p>wobei <math>\Gamma</math> die Verbindungsstrecke der Punkte <math>z_0 = -2 + 2i</math> und <math>z_1 = 1 + 4i</math> ist.</p>	5
7	<p>Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion <math> f </math>, wo</p> $f(z) := \frac{z}{z^2 + 8},$ <p>im Viertelkreis <math>\{z \in \mathbb{C} :  z  \leq 1, \arg z \in [0, \pi/2]\}</math>.</p>	9
8	<p>Man bestimme das Konvergenzgebiet der Laurentreihe</p> $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \left(1 + 1/n\right)^{n^2} 2^{ n } z^n.$	7
9	<p>Man bestimme den Typ aller Singularitäten der folgenden Funktionen:</p> $f(z) := \frac{z}{(z^4 - 81)^3}, \quad g(z) := \frac{1}{\sin z}.$	14