Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 1

Zur Erinnerung: die Funktionen $e^x, \sin x, \cos x, \sinh x, \cosh x$ erlauben eine Darstellung als Potenzreihe in der folgenden Form

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j\,!} \\
\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, x^{2j+1}}{(2j+1)\,!} \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, x^{2j}}{(2j)\,!} \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)\,!} \\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)\,!}\,.
\end{aligned}$$

Alle Reihen konvergieren absolut auf $\mathbb{R}$. Wir setzen alle diese Funktionen ins Komplexe fort indem wir in den Reihen $x \in \mathbb{R}$ durch $z \in \mathbb{C}$ ersetzen.

1. Berechnen Sie den Konvergenradius der Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j\,!}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, z^{2j+1}}{(2j+1)\,!}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j\, z^{2j}}{(2j)\,!}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)\,!}\,, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)\,!}\,.$$

2. Man leite aus der Darstellung von e^z die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i\, \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

ab. Zeigen Sie ebenfalls die Gültigkeit von

$$e^{iz} = \cos z + i\, \sin z\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

3. Zeigen Sie

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right), \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

4. Beweisen Sie die Funktionalgleichung der e-Funktion $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$. Orientieren Sie sich am reellen Fall.

5. Zeigen Sie, daß die komplexe e-Funktion periodisch ist mit Periode $2\pi i$.

6. Zeigen Sie

$$\cos z = \cosh(iz) \qquad \text{bzw.} \qquad \sin z = \frac{1}{i}\sinh(iz)\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

7. Zeigen Sie für $z = x + iy$

$$\cos z = \cos x \, \cosh y - i \, \sin x \, \sinh y$$

bzw.

$$\sin z = \sin x \, \cosh y + i \, \cos x \, \sinh y\,.$$

8. Berechnen Sie alle Nullstellen von e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ und $\cosh z$.

9. Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der komplexen Ebene:

$$(a)\ |z-2| + |z+2| = 5\,, \qquad (b)\ |z| = \operatorname{Re} z + 1\,, \qquad (c)\ \frac{z}{z+1} = 2\,.$$

10. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen

$$(a)\quad iz^2 + (1-i)z - 3 = 0\,, \qquad (b)\ z^4 + (1+i)z^2 + i = 0\,,$$
$$(c)\quad (1+z)^5 = (1-z)^5\,.$$