Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 3

1. Die Logarithmus-Funktion im Komplexen (Hauptzweig) ist definiert als

$$\log z := \log |z| + i \arg z$$

mit $-\pi < \arg z \leq \pi$. Sie ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z : \Im m\ z = 0,\ \Re e\ z \leq 0\}$. Weisen Sie nach, daß

$$\log(z \cdot w) = \log z + \log w$$

gilt für alle z, w mit $\Re e\ z, \Re e\ w > 0$.
Kann man diese einschränkende Bedingung auch weglassen ?

2. Üblicherweise definiert man allgemeine Potenzen im Komplexen mittels folgender Formel

$$z^w := e^{w \log z}, \qquad z, w \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0.$$

(i) Berechnen Sie

$$i^i, \quad (1+i)^i, \quad i^{1+i}, \quad (1+i)^{1+i}.$$

(ii) Sei $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir definieren

$$f(z) := z^w, \qquad z \neq 0.$$

Geben Sie ein möglichst großes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ an, in welchem f holomorph ist. Berechnen Sie dort f'.
(iii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeben. Wir setzen

$$g(w) := z^w, \qquad z \neq 0.$$

Geben Sie ein möglichst großes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ an, in welchem g holomorph ist. Berechnen Sie dort g'.

3. Berechnen Sie folgende komplexe Wegintegrale:

$$\int_{z(I)} (1+z^3)^{15}\, dz \qquad \text{mit} \quad z(t) := 2e^{it} + e^{-it}\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,;$$

$$\int_{z(I)} z\, e^z\, dz \qquad \text{mit} \quad z(t) := (t-1)\pi i + t\pi i\,, \quad 0 \le t \le 1\,;$$

$$\int_{z(I)} (iz^2 + 1 - 2iz^{-2})\, dz \qquad \text{wo} \quad z(t)$$

einen regulren Weg von $(i+1)$ nach $2i$ bezeichnet.

4. Man berechne $\int_{z(I)} \Re e\ z\, dz$ entlang folgender Wege:

   - entlang der oberen Hälfte des Einheitskreises von $+1$ nach -1;
   - entlang der geradlinigen Verbindung von z_1 nach z_2 (für beliebige Paare z_1, z_2);
   - entlang des in positiver Richtung umlaufenen Kreises mit Radius $r > 0$ und Zentrum in z_0.

5. Man berechne $\int_{z(I)} |z|\, dz$ entlang folgender Wege von $-i$ nach i:

   - geradlinig;
   - längs der linken Hälfte des Einheitskreises;
   - längs der rechten Hälfte des Einheitskreises.

6. Sei Γ ein Kreis und $z_0 \notin \Gamma$. Man berechne alle Integrale der Form

$$\int_\Gamma (z - z_0)^n\, dz\,, \qquad n = 0, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots\,,$$

wobei wir uns auf eine Umdrehung festlegen.

7. Seien $a \neq 0$, $\omega := e^{i2\pi/n}$ und $z_k := a\omega^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Weiter setzen wir $z_0 := z_n$ und

$$\xi_k := \frac{z_{k-1} + z_k}{2}\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,.$$

Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{\xi_1} + \frac{z_2 - z_1}{\xi_2} + \ldots + \frac{z_n - z_{n-1}}{\xi_n} \right) = \int_{|z|=|a|} \frac{dz}{z}\,.$$