Funktionentheorie

Wintersemester 2017/18

Übungsserie 5

1. Gibt es eine um $z_0 = 0$ holomorphe Funktion f, so daß für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a) \quad f(\frac{1}{n}) := (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad (b) \quad f(\frac{1}{n}) := (n^2-1)^{-1},$$
$$(c) \quad |f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2, \qquad (d) \quad f(\frac{1}{n}) \leq e^{-n} \; ?$$

2. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um die angegebenen Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$(a)\; f(z) := e^z \quad \text{um} \quad z_0 = i\pi\,, \qquad (b)\; f(z) := \frac{1}{(z-i)^3} \quad \text{um} \quad z_0 = -i\,.$$

3. Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $|f|$ auf $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \; |z| \leq 1\}$:

$$(a) \quad f(z) := e^z\,, \qquad (b) \quad f(z) := \frac{z+3}{z-3}\,,$$
$$(c) \quad f(z) := z^2 + z + 1\,, \qquad (d) \quad f(z) := 3 - |z|^2\,.$$

4. Geben Sie den Wertevorrat von $|f|$ an und untersuchen Sie diese Funktion auf Beschränktheit:

$$(a)\; \frac{z^2+4}{z^2} \quad \text{in} \quad 0 < |z| < 1\,, \qquad (b)\; \frac{z^3+2z^2+z+2}{z+2} \quad \text{in} \quad |z| < 3,\; z \neq -2\,.$$

5. Seien $R > 0$ und $f, g : \overline{K_R(0)} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, welche in $K_R(0)$ holomorph sind und deren Beträge auf dem Rand übereinstimmen, d.h.

$$|f(z)| = |g(z)|\,, \qquad |z| = R\,.$$

Man zeige: haben f und g keine Nullstellen in $\overline{K_R(0)}$, dann gibt es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $f = \lambda g$.