KOSMOLOGIE

(Sommersemester 2018)

Thema 3: FRIEDMANsche und FRIEDMAN-artige Weltmodelle

***Aufgabe 1:** Energiebilanz für die ideale Flüssigkeit*

a) Zeigen Sie, daß man die Energiebilanzgleichung

$$\dot{\mu} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) \cdot 3\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\mu a^3\right) = -\frac{3pa^2}{c^2}$$

schreiben kann und leiten Sie daraus die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}a} = -3(1+w)\frac{\mu}{a}$$

her. Darin ist

$$w = \frac{p}{\mu c^2} = \begin{cases} 0 & \text{für Staub} \\ \frac{1}{3} & \text{für Strahlung} \\ -1 & \text{für Vakuum} \end{cases}$$

der Zustandsparameter der Flüssigkeit. Lösen Sie diese Differentialgleichung.

b) Lösen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil (a) die FRIEDMAN-Gleichung für $\varepsilon = 0$ und geben Sie den zeitlichen Verlauf sowohl des Skalenfaktors $a(t)$ als auch der Energiedichte $\mu(t)c^2$ in Abhängigkeit vom Zustandsparameter w an.

c) Setzen Sie die FRIEDMAN-Gleichung für $\varepsilon = 0$ in die Beschleunigungs-Gleichung ein und leiten Sie daraus eine Bedingung ab, die der Zustandsparameter w erfüllen muß, damit die Expansion beschleunigt verläuft. Bestätigen Sie dieses Ergebnis durch direkte Berechnung des Verzögerungs-Parameters.

d) Zeigen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil (a), daß sich der Dichteparameter

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2}\mu_i$$

gemäß

$$\Omega_i = \Omega_{i,0}\left(\frac{H_0}{H}\right)^2\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)}$$

ändert. Der Index i steht dabei für Staub, Strahlung oder das Vakuum.

e) **Zusatzaufgabe**: Zeigen Sie im Ruhsystem der Materie, daß für eine ideale Flüssigkeit die Energie-Impuls-Bilanz $T^{mn}{}_{;n} = 0$ auf die in Aufgabenteil (a) genannte Energiebilanzgleichung führt.

bitte wenden

Aufgabe 2: Dichteparameter und HUBBLE-*Zahl*

a) Zeigen Sie ausgehend von der FRIEDMAN-Gleichung in der Form

$$\frac{\varepsilon c^2}{a^2} = H^2(\Omega - 1)\,,$$

daß für ein Weltmodell mit nur einem Dichteparameter der Zusammenhang

$$\frac{1}{\Omega_{i,e}} - 1 = \frac{1}{(1+z)^{1+3w_i}} \left(\frac{1}{\Omega_{i,0}} - 1\right)$$

gilt.

b) Bestimmen Sie, wie die HUBBLE-Parameter H_e und H_0, die jeweils zu den Zeitpunkten der Emission und des Empfangs gehören, über die Rotverschiebung z zusammenhängen.

c) In einem flachen, einkomponentigen Universum hat eine Galaxie zum Zeitpunkt t_0 der Beobachtung die Rotverschiebung z.

- Zeigen Sie, daß sich die beobachtete Rotverschiebung gemäß

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t_0} = H_0(1+z) - H_0(1+z)^{3(1+w_i)/2}$$

ändert. Für welche Werte w_i nimmt die beobachtete Rotverschiebung im Laufe der Zeit zu?

- In einem EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit dem dimensionslosen HUBBLE-Parameter $h = 0{,}7$ wird eine Galaxie mit der Rotverschiebung $z = 1$ beobachtet. Nach wie langer Zeit kann man feststellen, daß eine relative Änderung der Rotverschiebung von 10^{-6} stattgefunden hat?

d) Diskutieren Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Werte w_i und insbesondere für die drei Typen FRIEDMANscher Staubkosmen.

e) Nehmen Sie für einen FRIEDMANschen Staubkosmos an, daß zur Zeit der Wasserstoff-Kombination, die sich beider Rotverschiebung $z = 1089$ ereignete, $\Omega_e = 1{,}0004$ betragen habe. Wie groß ist dann Ω_0? Wiederholen Sie die Rechnung mit $\Omega_e = 0{,}9996$. Was sagen die Ergebnisse aus, wenn heute Ω_0 sehr nahe bei eins liegt?

Aufgabe 3: Entfernungen im EINSTEIN-DESITTER-*Kosmos*

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Rotverschiebungs-Entfernungs-Relation (MATTIG, 1958)

$$D_L = \frac{c}{H_0 q_0^2}\left[q_0 z + (1-q_0)\left(1 - \sqrt{1+2q_0 z}\right)\right]$$

für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos die radialen Entfernungen und „Flucht"-Geschwindigkeiten zu den Zeitpunkten der Emission und des Empfangs und stellen Sie diese als Funktionen der Rotverschiebung z graphisch dar.

b) Zeigen Sie, daß in einem EINSTEIN-DE SITTER-Kosmos der Winkeldurchmesser einer Galaxie mit wachsender Rotverschiebung z auch zunehmen kann. Für welche Rotverschiebung ist der Winkeldurchmesser minimal, und welche Größe hat er in diesem Fall?

c) Entwickeln Sie die Entfernungen $D(t_0)$, $D(t_e)$, D_L und D_A nach Potenzen der Rotverschiebung z und vergleichen Sie für $z \ll 1$ mit den Ergebnissen der Aufgabe **2/1** für die kosmische Nahzone.