Aufgabe 1 *Expandieren die Maßstäbe?*

Wir betrachten ein gebundenes System, wie etwa das Planetensystem der Sonne oder ein BOHRsches Atom, welches in ein expandierendes Universum eingebettet ist und behandeln das KEPLER-Problem mit der Annahme, dass die Masse eines der beiden Körper sehr viel größer sei als die des anderen.

(a) Zeigen Sie, dass der Einfluss der kosmischen Expansion durch einen »kosmischen Beschleunigungsterm« in der NEWTONschen Bewegungsgleichung gemäß

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{\ddot{a}}{a}\vec{r} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

berücksichtigt werden kann. Darin bedeutet M die Zentralmasse, und der radiale Abstand r der beiden Himmelskörper unterliegt dem HUBBLE-Gesetz.

$$\dot{\vec{r}} = Hr = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$$

Gilt auch unter den neuen Bedingungen Drehimpulserhaltung?

(b) Diskutieren Sie diese Bewegungsgleichung anhand ihres effektiven Potentials.

(1) Nehmen Sie realistischerweise an, dass die zeitabhängige Größe $\frac{a''}{a}$ für die Dauer eines Planetenumlaufs um die Sonne als konstant betrachtet werden kann. Drücken Sie diese Grüße durch die heutigen Werte von HUBBLE- und Beschleunigungs-Parameter aus.

(2) Definieren Sie einen kritischen Radius r_{krit} aus der Bedingung, dass kosmische Beschleunigung und Beschleunigung durch Gravitations-Anziehung den gleichen Betrag haben und drücken Sie diesen durch die Zentralmasse und die Massendichte eines EINSTEIN-DESITTER-Kosmos aus.

(3) Stellen Sie das effektive Potential für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{r_0}{r_{\text{krit}}}$ graphisch dar, worin r_0 der Radius der ungestörten KEPLER-Bahn ist.

(c) Berechnen Sie für die nachfolgend genannten Systeme in einem EINSTEIN-DESITTER-Kosmos die beiden Beschleunigungsanteile in der Bewegungsgleichung sowie den kritischen Radius und entscheiden Sie, ob diese Systeme mit dem Universum expandieren.

(1) Das Planetensystem der Sonne — die Astronomische Einheit als Maßstab.

(2) Der Umlauf der Sonne um das galaktische Zentrum: $r_0 = 8.5\,\text{kpc}$, $v = 220\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

(3) Die Bewegung einer Galaxie am Rand des Kerngebietes eines Galaxienhaufens: $r_0 = 250\,\text{kpc}$, $v = 800\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

(4) Die Bewegung eines Elektrons auf der ersten BOHRschen Bahn nach dem BOHRschen Atommodell — der BOHRsche Radius als Maßstab.

LÖSUNG:

(a) Zunächst parametrisieren wir den flachen Raum durch Kugelkoordinaten.

$$\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \;, \qquad \Phi(\chi,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} \chi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \chi \sin\vartheta \sin\varphi \\ \chi \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Wir beschreiben die Expansion unseres Raumes in Abhängigkeit der Zeit durch die glatte Skalierungsfunktion a.

$$a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Die Position $r(t)$ eines festen Ortspunktes (χ,ϑ,φ) zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ ändert sich damit wie folgt.

$$r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \;, \qquad r(t) := a(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi)$$

Durch Differenzieren erhalten wir nun die folgenden Gleichungen.

$$r'(t) = a'(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi) = \frac{a'(t)}{a(t)} r(t)$$

$$r''(t) = a''(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi) = \frac{a''(t)}{a(t)} r(t)$$

Die Beschleunigung eines Massenpunktes ergibt sich nun nach dem zweiten NEWTONschen-Axiom aus der Summe der beiden Beschleunigungen. Demnach wurde gezeigt, dass der Effekt der kosmischen Expansion durch die folgende Gleichung berücksichtigt werden kann.

$$r'' = \frac{a''}{a} r - \frac{GM}{\|r\|^3} r$$

Um die Drehimpulsbilanz zu erhalten, bilden wir das linksseitige Kreuzprodukt mit r und integrieren die erhaltene Gleichung.

$$r \times r'' = L' = \frac{a''}{a} r \times r - \frac{GM}{\|r\|^3} r \times r = 0$$

$$L = r^2 \varphi'^2 = \text{const}$$

Die Differentialgleichung erhält damit den Drehimpuls.

(b) Zunächst nähern wir den Expansionsfaktor durch die derzeitigen Werte des HUBBLE- und des Beschleunigungs-Parameters

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \approx -q_0 H_0^2$$

Diese Näherung setzen wir in die Differentialgleichung ein.

$$r'' = -q_0 H_0^2 r - \frac{GM}{\|r\|^3} r$$

Durch Multiplikation mit r' erhalten wir die Energiebilanz und durch zusätzliche Integration auch das effektive Potential U.

$$\frac{1}{2} \|r'\|^2 = -\frac{q_0 H_0^2}{2} \|r\|^2 + \frac{GM}{\|r\|}$$

$$U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \qquad U(r) := \frac{q_0 H_0^2}{2} r^2 - \frac{GM}{r}$$

Wir definieren den kritischen Radius, indem wir die Ableitung des Potentials Null setzen.

$$0 \stackrel{!}{=} U'(r_{\text{krit}}) = q_0 H_0^2 r_{\text{krit}} + \frac{GM}{r_{\text{krit}}^2}$$

$$r_{\text{krit}} = \sqrt[3]{\frac{GM}{-q_0 H_0^2}}$$

In einem EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit Massendichte μ gilt das Folgende.

$$q_0 H_0^2 = \frac{1}{6} \kappa c^4 \mu(t_0)$$

Demnach erhalten wir für den kritischen Radius das Folgende.

$$r_{\text{krit}} = \sqrt[3]{\frac{6GM}{-\kappa c^4 \mu(t_0)}}$$

Für den Radius der ungestörten KEPLER-Bahn setzen wir die Radialkraft mit der Gravitationskraft gleich.

$$\frac{v^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}$$

$$r_0 = \frac{GM}{v^2}$$

Jetzt stellen wir das effektive Potential U mithilfe der Größen r_0 und r_{krit} dar.

$$U(r) = -\frac{GM}{2 r_{\text{krit}}^3} r^2 - \frac{GM}{r} = v^2 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_{\text{krit}}}\right)^3 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1} \right]$$

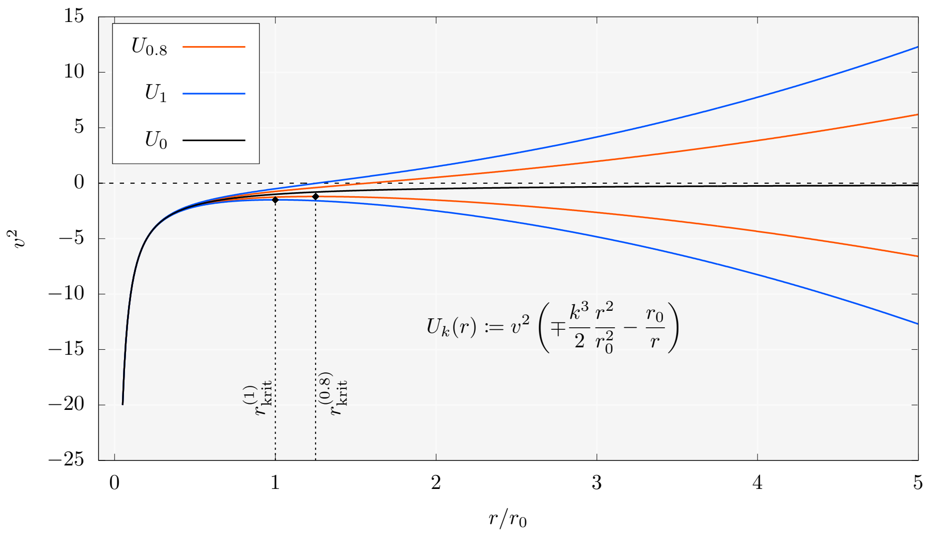

Abbildung 1: Die Abbildung zeigt das effektive Potential U für verschiedene Werte von $k := \frac{r_0}{r_{\text{krit}}}$.