KOSMOLOGIE

(Sommersemester 2018)

Thema 6: Die kosmologische Konstante
FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Weltmodelle im Überblick

Aufgabe 1: *Die* $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$*-Ebene*

a) Leiten Sie aus der Beschleunigungs- und der FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung die in der Abbildung dargestellten Trennkurven zwischen verschiedenen Eigenschaften von FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Modellen her und geben Sie diese als Funktionen $\Omega_\Lambda = \Omega_\Lambda(\Omega_M)$ an.

$\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H^2}\mu_M$

$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$

$\Omega_K = -\frac{\varepsilon c^2}{a^2 H^2}$

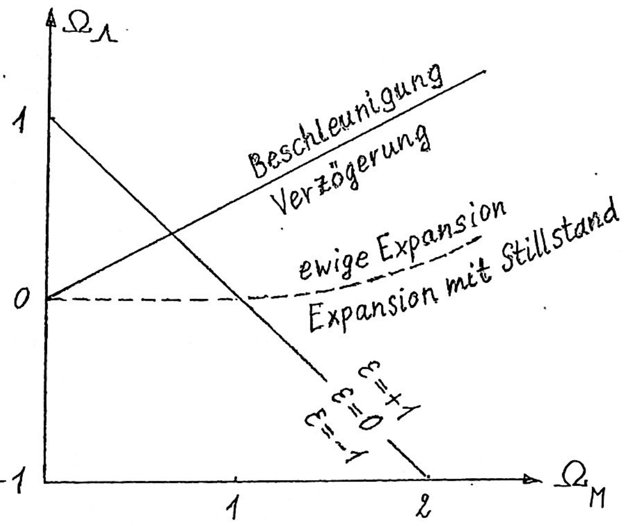
$\Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3}\mu_M + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\varepsilon c^2}{a^2}$

Grenzwert: $a(t) \xrightarrow{t\to\infty} a$

$\Rightarrow H \to 0, \ \dot a \to 0$

$\Rightarrow 0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{a_0^3}{a^3}\mu_{M_0} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\varepsilon c^2}{a^2}$

$\Rightarrow$



$\frac{\mu_M}{\mu_{M_0}} = \frac{a_0^3}{a^3}$

$\Lambda c^2 a^2 = \varepsilon c^2$

$\Rightarrow \Lambda a^2 = \varepsilon$

b) Für die gestrichelte Linie, die Modelle mit ewiger Expansion von solchen trennt, deren Expansion zum Stillstand kommt, erhalten Sie

$$1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda = -\frac{3}{2^{2/3}}\Omega_\Lambda^{1/3}\Omega_M^{2/3}.$$

- Substituieren Sie $x = 1 - \frac{1}{\Omega_M}$ und $y = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{4\Omega_M}\right)^{1/3} = \cos\beta$ und vergleichen Sie mit der Identität $\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$.
- Zeigen Sie, daß für diese Kurve die Funktion

$$\Omega_\Lambda = \frac{4\Omega_M}{27}\left(1 - \frac{1}{\Omega_M}\right)^3$$

eine gute Näherung ist.

bitte wenden

Aufgabe 2: Das „kosmologische Dreieck"

Fassen Sie die FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung in der Form

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1$$

als Achsenabschnittsgleichung einer Ebene auf, wobei Ω_M, Ω_Λ und Ω_K als Achsen gewählt werden sollen.

Tragen Sie die Ihnen bekannten kosmologischen Modelle

- FRIEDMAN, insbesondere EINSTEIN-DE SITTER
- FRIEDMAN-LEMAÎTRE
- EINSTEIN und DE SITTER

in das von diesen Achsen aufgespannte Koordinatensystem ein und berücksichtigen Sie dabei auch die sogenannte kinematische Kosmologie von MILNE ($\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0,\ \varepsilon = -1$) sowie die MINKOWSKI-Raumzeit ($\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0,\ \varepsilon = 0$).

Aufgabe 3: FRIEDMAN-LEMAÎTRE-*Kosmen als dynamisches System*

a) Überführen Sie die EINSTEINschen Feldgleichungen für homogene und isotrope Kosmen mit kosmologischer Konstante (Beschleunigungsgleichung und FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung) in die Form

$$\frac{\varepsilon c^2}{a^2} - \Lambda c^2 = H^2(2q - 1 - \Psi)$$
$$\frac{\varepsilon c^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = H^2(\Omega_M - 1)\,.$$

Darin ist $\Psi \equiv \dfrac{p}{p_{\text{krit}}}$ mit $p_{\text{krit}} = \dfrac{H^2 c^2}{8\pi G}$ ein analog zum Dichteparameter Ω_M konstruierter Druckparameter.

b) Überführen Sie diese Gleichungen in das dynamische System

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_M &= H[\Omega_M(2q-1) - \Psi] \\
\dot{q} &= H\left[2q(1+q) - \frac{1}{2}\Psi - \frac{3}{2}\Omega_M\right] \\
\dot{H} &= -H^2(1+q) \\
\dot{\Psi} &= 2H(1+q)\Psi
\end{aligned}$$

aus vier Differentialgleichungen 1. Ordnung.

c) Welche kosmologischen Modelle entsprechen den Fixpunkten des Flusses

$$\mathbf{F} = (H\dot{\Omega}_M, H\dot{q}, \dot{H}, H\dot{\Psi})\,?$$

Aufgabe 4: Verallgemeinerte FRIEDMAN-LEMAÎTRE-*Modelle*

Betrachten Sie die FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung für Weltmodelle, die gegenüber den FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Modellen im engeren Sinne ($w = 0$) insofern verallgemeinert sind, als der Zustandsparameter w nicht von vornherein festgelegt ist.

a) Geben Sie das effektive Potential der in diesem Sinne verallgemeinerten FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung an und skizzieren Sie den Verlauf seines nicht von der kosmologischen Konstanten abhängigen Teils für die Fälle $w > -1/3$, $w = -1/3$, $-2/3 < w < -1/3$, $w = -2/3$ und $w < -2/3$.

   Hinweis: Nach Aufgabe (**3**/1a) ist

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)} .$$

b) Stellen Sie den Verlauf des vollständigen effektiven Potentials zusammen mit dem von a und $\dot{a}$ aufgespannten Phasenportrait dar und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf des Skalenfaktors $a(t)$ für die Fälle

   - $w > -1/3$, $\Lambda = 0$
   - $w > -1/3$, $\Lambda > 0$
   - $-2/3 < w < -1/3$, $\Lambda = 0$
   - $w < -1$, $\Lambda = 0$ („Phantomenergie").

   Identifizieren Sie in diesen Darstellungen Ihnen bekannte kosmologische Modelle.

c) Nehmen Sie ein räumlich flaches Weltmodell an, welches Materie mit dem Dichteparameter Ω_{M0} und „Phantomenergie" ($w_P < -1$) mit dem Dichteparameter $\Omega_{P0} = 1 - \Omega_{M0}$ enthält.

   - Bei welchem Skalenfaktor a_{eq} sind die Energiedichten beider Komponenten einander gleich?
   - Schreiben Sie die FRIEDMAN-LEMAÎTRE-Gleichung für $a \gg a_{\text{eq}}$ auf und integrieren Sie diese, um zu zeigen, daß der Skalenfaktor a in einer endlichen Zeit t_{BR} gegen Unendlich geht („Big Rip"). Diese Zeit ist durch

$$H_0 \left(t_{\text{BR}} - t_0\right) \approx \frac{2}{3} \frac{1}{|1 + w_P|} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_{M0}}}$$

     gegeben.
   - Wie lange dauert es in unserem Universum bis zum „ Big Rip", wenn $w = -1{,}1$ angenommen wird, was mit den Beobachtungen verträglich ist?