KOSMOLOGIE

(Sommersemester 2018)

Thema 4: NEWTONsche Kosmologie
Kosmologisch relevante astronomische Beobachtungen (I)

***Aufgabe 1:** Expandieren die Maßstäbe?*

Wir betrachten ein gebundenes System, wie etwa das Planetensystem der Sonne oder ein BOHRsches Atom, welches in ein expandierendes Universum eingebettet ist und behandeln das KEPLER-Problem mit der Annahme, daß die Masse eines der beiden Körper sehr viel größer sei als die des anderen.

a) Zeigen Sie, daß der Einfluß der kosmischen Expansion durch einen „kosmischen Beschleunigungsterm" in der NEWTONschen Bewegungsgleichung gemäß

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{a}}{a}\mathbf{r} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

berücksichtigt werden kann. Darin bedeutet M die Zentralmasse, und der radiale Abstand r der beiden Himmelskörper unterliegt dem HUBBLE-Gesetz

$$\dot{r} = Hr \qquad \text{mit dem HUBBLE-Parameter} \qquad H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

Gilt auch unter den neuen Bedingungen Drehimpulserhaltung?

b) Diskutieren Sie diese Bewegungsgleichung anhand „ihres" effektiven Potentials.

- Nehmen Sie realistischerweise an, daß die zeitabhängige Größe $\frac{\ddot{a}}{a}$ für die Dauer eines Planetenumlaufs um die Sonne als konstant betrachtet werden kann. Drücken Sie diese Größe durch die heutigen Werte von HUBBLE- und Beschleunigungs-Parameter aus.
- Definieren Sie einen „kritischen Radius" r_{krit} aus der Bedingung, daß kosmische Beschleunigung und Beschleunigung durch Gravitations-Anziehung den gleichen Betrag haben und drücken Sie diesen durch die Zentralmasse und die Massendichte eines EINSTEIN-DESITTER-Kosmos aus.
- Stellen Sie das effektive Potential für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{r_0}{r_{\text{krit}}}$ graphisch dar, worin r_0 der Radius der ungestörten KEPLER-Bahn ist.

c) Berechnen Sie für die nachfolgend genannten Systeme in einem EINSTEIN-DE SITTER-Kosmos die beiden Beschleunigungsanteile in der Bewegungsgleichung sowie den kritischen Radius und entscheiden Sie, ob diese Systeme mit dem Universum expandieren.

- Das Planetensystem der Sonne – die Astronomische Einheit als Maßstab.
- Der Umlauf der Sonne um das galaktische Zentrum: $r_0 = 8{,}5\,\text{kpc}$, $v = 220\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.
- Die Bewegung einer Galaxie am Rand des Kerngebietes eines Galaxienhaufens: $r_0 = 250\,\text{kpc}$, $v = 800\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$.
- Die Bewegung eines Elektrons auf der ersten BOHRschen Bahn nach dem BOHRschen Atommodell – der BOHRsche Radius als Maßstab.

bitte wenden

Aufgabe 2: Das OLBERS-*„Paradoxon"*

a) **Vorbereitung**: Ein räumlich flaches Universum enthalte ein einziges Substrat mit dem Zustandsparameter w. Leiten Sie eine verallgemeinerte MATTIG-Formel für die Leuchtkraft-Entfernung D_L als Funktion der Rotverschiebung z her.

   Resultat:

$$D_L = \frac{2c}{H_0(1+3w)}(1+z)\left[1 - \frac{1}{(1+z)^{(1+3w)/2}}\right] .$$

b) In diesem Universum seien Standard-Kerzen der Leuchtkraft L gleichmäßig im Raum verteilt. Diese werden weder erzeugt noch vernichtet. Ihre Anzahldichte zur Zeit $t = t_0$ sei n_0.

   Berechnen Sie den beobachtbaren Fluß $F_{*,0}$ einer einzelnen solchen Standardkerze, die die Rotverschiebung z hat.

c) Berechnen Sie unter Verwendung der Resultate der Aufgaben **2**/2(a) und **3**/2(b) den Fluß aller Standard-Kerzen, deren Rotverschiebung im Intervall $[z, z+\mathrm{d}z]$ liegt, sowie den Gesamt-Fluß durch Integration über alle Rotverschiebungen.

d) Bestimmen Sie den Einfluß der Expansion auf die Dunkelheit des Nachthimmels, indem Sie zum Vergleich die bisherigen Schritte dieser Aufgabe für ein statisches EUKLIDisches Universum mit gleicher Leuchtdauer t_* der Galaxien und gleichem Weltalter t_0 wiederholen.

   Nehmen Sie als **Beispiele** sowohl für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos als auch für einen reinen Strahlungskosmos an, daß Galaxien einmal bei der Rotverschiebung $z_* = 6$ zu leuchten begannen und zum anderen, daß sie bereits seit dem Urknall existierten.

e) Moderne Himmelsdurchmusterungen legen die Leuchtkraft-Dichte

$$n_0 L = 2 \cdot 10^8 h_0 L_\odot \,\mathrm{Mpc}^{-3}$$

   nahe. Darin ist $L_\odot = 3{,}9 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ die Sonnen-Leuchtkraft.

   Berechnen Sie die Nachthimmels-Helligkeit für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit dem dimensionslosen HUBBLE-Parameter $h_0 = 0{,}70$ und vergleichen Sie mit der Solarkonstante $F_\odot = 1{,}4 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

   Hinweis: Für den Vergleich mit der Solarkonstante benötigen Sie den Gesamt-Fluß aller Standard-Kerzen pro Raumwinkel-Einheit.