Aufgabe 1

(a) Sei $T \in \mathbb{R}^+$ als Temperatur gegeben.

$$\rho_\nu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \rho_\nu(\nu) := \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1}$$

$$\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \lambda(\nu) := \frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \lambda'(\nu) = \frac{-c}{\nu^2}$$

Seien nun $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\nu_1 \leq \nu_2$. $\Rightarrow \lambda(\nu_1) \geq \lambda(\nu_2)$

Es muss gelten:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho_\nu(\nu)\, d\nu \overset{!}{=} \int_{\lambda(\nu_2)}^{\lambda(\nu_1)} \rho_\lambda(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{mit } \rho_\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$\text{(Substitutionsregel)} = \int_{\nu_2}^{\nu_1} \rho_\lambda(\lambda(\nu)) \cdot \lambda'(\nu)\, d\nu$$

$$= \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho_\lambda(\lambda(\nu)) \frac{c}{\nu^2}\, d\nu$$

Weil ν_1, ν_2 beliebig gilt: $\rho_\nu(\nu) = \rho_\lambda(\lambda(\nu)) \frac{c}{\nu^2}$ für alle $\nu \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow \rho_\lambda(\lambda(\nu)) = \frac{\nu^2}{c} \rho_\nu(\nu), \quad \nu \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \rho_\lambda(\lambda) = \frac{[\lambda^{-1}(\lambda)]^2}{c} \rho_\nu(\lambda^{-1}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow \rho_\lambda(\lambda) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \left[\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1\right]^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

(b) $$\rho_\nu'(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \left[3\nu^2 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1} - \nu^3 \left[\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1\right]^{-2} \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)\right]$$

$$\rho_\nu'(\nu^*) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \nu^{*3} \left[\exp\left(\frac{h\nu^*}{k_B T}\right) - 1\right]^{-2} \frac{h}{k_B T} \exp\left(\frac{h\nu^*}{k_B T}\right) = 3\nu^{*2} \left[\exp\left(\frac{h\nu^*}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{h\nu^*}{k_B T} \exp\left(\frac{h\nu^*}{k_B T}\right) = 3 \left[\exp\left(\frac{h\nu^*}{k_B T}\right) - 1\right]$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{h\nu^*}{k_B T} = 3 e^{-\frac{h\nu^*}{k_B T}} \Rightarrow 3 - x = 3e^{-x}, \quad x := \frac{h\nu^*}{k_B T}$$

$$\Rightarrow x \approx 2{,}82 \Rightarrow \underline{\underline{\nu^* = 2{,}82 \frac{k_B T}{h}}}$$

$$\rho_\lambda'(\lambda) = 8\pi hc \left[-5 \frac{1}{\lambda^6} \left[\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1 \right]^{-1} + \frac{1}{\lambda^5} \left[\exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) - 1 \right]^{-2} \exp\left(\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) \cdot \frac{hc}{k_B T} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right]$$

$\rho_\lambda'(\lambda^*) \overset{!}{=} 0$ (analoge Umformung wie bei ρ_ν')

$$\Rightarrow \quad 0 = -5 + 5 \exp\left(-\frac{hc}{k_B T \lambda^*}\right) + \frac{hc}{k_B T \lambda^*}$$

$$\Rightarrow \quad 5 - x = 5 e^{-x} \quad , \quad x := \frac{hc}{k_B T \lambda^*} \quad \Rightarrow x \approx 4{,}97$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\lambda^* \approx 0{,}201 \frac{hc}{k_B T}}}$$

$\Rightarrow \quad \lambda(\nu^*) \neq \lambda^*$ Die Werte stimmen nicht überein!

Aufgabe 2

(a)