Kosmologie
Übungsserie 4

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

Version: 11. Juni 2018

Aufgabe 1 *Expandieren die Maßstäbe?*

Wir betrachten ein gebundenes System, wie etwa das Planetensystem der Sonne oder ein BOHRsches Atom, welches in ein expandierendes Universum eingebettet ist und behandeln das KEPLER-Problem mit der Annahme, dass die Masse eines der beiden Körper sehr viel größer sei als die des anderen.

(a) Zeigen Sie, dass der Einfluss der kosmischen Expansion durch einen »kosmischen Beschleunigungsterm« in der NEWTONschen Bewegungsgleichung gemäß

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{\ddot{a}}{a}\vec{r} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

berücksichtigt werden kann. Darin bedeutet M die Zentralmasse, und der radiale Abstand r der beiden Himmelskörper unterliegt dem HUBBLE-Gesetz.

$$\dot{\vec{r}} = Hr = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$$

Gilt auch unter den neuen Bedingungen Drehimpulserhaltung?

(b) Diskutieren Sie diese Bewegungsgleichung anhand ihres effektiven Potentials.

(1) Nehmen Sie realistischerweise an, dass die zeitabhängige Größe $\frac{a''}{a}$ für die Dauer eines Planetenumlaufs um die Sonne als konstant betrachtet werden kann. Drücken Sie diese Grüße durch die heutigen Werte von HUBBLE- und Beschleunigungs-Parameter aus.

(2) Definieren Sie einen kritischen Radius r_{krit} aus der Bedingung, dass kosmische Beschleunigung und Beschleunigung durch Gravitations-Anziehung den gleichen Betrag haben und drücken Sie diesen durch die Zentralmasse und die Massendichte eines EINSTEIN-DESITTER-Kosmos aus.

(3) Stellen Sie das effektive Potential für verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{r_0}{r_{\text{krit}}}$ graphisch dar, worin r_0 der Radius der ungestörten KEPLER-Bahn ist.

bitte wenden

(c) Berechnen Sie für die nachfolgend genannten Systeme in einem EINSTEIN-DESITTER-Kosmos die beiden Beschleunigungsanteile in der Bewegungsgleichung sowie den kritischen Radius und entscheiden Sie, ob diese Systeme mit dem Universum expandieren.

(1) Das Planetensystem der Sonne — die Astronomische Einheit als Maßstab.

(2) Der Umlauf der Sonne um das galaktische Zentrum: $r_0 = 8.5\,\mathrm{kpc}$, $v = 220\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

(3) Die Bewegung einer Galaxie am Rand des Kerngebietes eines Galaxienhaufens: $r_0 = 250\,\mathrm{kpc}$, $v = 800\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$

(4) Die Bewegung eines Elektrons auf der ersten BOHRschen Bahn nach dem BOHRschen Atommodell — der BOHRsche Radius als Maßstab.

LÖSUNG:

(a) Zunächst parametrisieren wir den flachen Raum durch Kugelkoordinaten.

$$\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad \Phi(\chi,\vartheta,\varphi) := \begin{pmatrix} \chi \sin\vartheta \cos\varphi \\ \chi \sin\vartheta \sin\varphi \\ \chi \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Wir beschreiben die Expansion unseres Raumes in Abhängigkeit der Zeit durch die glatte Skalierungsfunktion a.

$$a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

Die Position $r(t)$ eines festen Ortspunktes (χ,ϑ,φ) zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ ändert sich damit wie folgt.

$$r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ , \qquad r(t) := a(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi)$$

Durch Differenzieren erhalten wir nun die folgenden Gleichungen.

$$r'(t) = a'(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi) = \frac{a'(t)}{a(t)} r(t)$$

$$r''(t) = a''(t)\Phi(\chi,\vartheta,\varphi) = \frac{a''(t)}{a(t)} r(t)$$

Die Beschleunigung eines Massenpunktes ergibt sich nun nach dem zweiten NEWTONschen-Axiom aus der Summe der beiden Beschleunigungen. Demnach wurde gezeigt, dass der Effekt der kosmischen Expansion durch die folgende Gleichung berücksichtigt werden kann.

$$r'' = \frac{a''}{a} r - \frac{GM}{\|r\|^3} r$$

Um die Drehimpulsbilanz zu erhalten, bilden wir das linksseitige Kreuzprodukt mit r und integrieren die erhaltene Gleichung.

$$r \times r'' = L' = \frac{a''}{a} r \times r - \frac{GM}{\|r\|^3} r \times r = 0$$

$$L = r^2 \varphi'^2 = \text{const}$$

Die Differentialgleichung erhält damit den Drehimpuls.

(b) Zunächst nähern wir den Expansionsfaktor durch die derzeitigen Werte des HUBBLE- und des Beschleunigungs-Parameters

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \approx -q_0 H_0^2$$

Diese Näherung setzen wir in die Differentialgleichung ein.

$$r'' = -q_0 H_0^2 r - \frac{GM}{\|r\|^3} r$$

Durch Multiplikation mit r' erhalten wir die Energiebilanz und durch zusätzliche Integration auch das effektive Potential U.

$$\frac{1}{2} \left\|r'\right\|^2 = -\frac{q_0 H_0^2}{2} \left\|r\right\|^2 + \frac{GM}{\|r\|}$$

$$U \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \,, \qquad U(r) \coloneqq \frac{q_0 H_0^2}{2} r^2 - \frac{GM}{r}$$

Wir definieren den kritischen Radius, indem wir die Ableitung des Potentials Null setzen.

$$0 \overset{!}{=} U'(r_{\text{krit}}) = q_0 H_0^2 r_{\text{krit}} + \frac{GM}{r_{\text{krit}}^2}$$

$$r_{\text{krit}} = \sqrt[3]{\frac{GM}{-q_0 H_0^2}}$$

In einem EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit Massendichte μ gilt das Folgende.

$$q_0 H_0^2 = \frac{1}{6} \kappa c^4 \mu(t_0)$$

Demnach erhalten wir für den kritischen Radius das Folgende.

$$r_{\text{krit}} = \sqrt[3]{\frac{6GM}{-\kappa c^4 \mu(t_0)}}$$

Für den Radius der ungestörten KEPLER-Bahn setzen wir die Radialkraft mit der Gravitationskraft gleich.

$$\frac{v^2}{r_0} = \frac{GM}{r_0^2}$$

$$r_0 = \frac{GM}{v^2}$$

Jetzt stellen wir das effektive Potential U mithilfe der Größen r_0 und r_{krit} dar.

$$U(r) = -\frac{GM}{2r_{\text{krit}}^3} r^2 - \frac{GM}{r} = v^2 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r_{\text{krit}}} \right)^3 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1} \right]$$

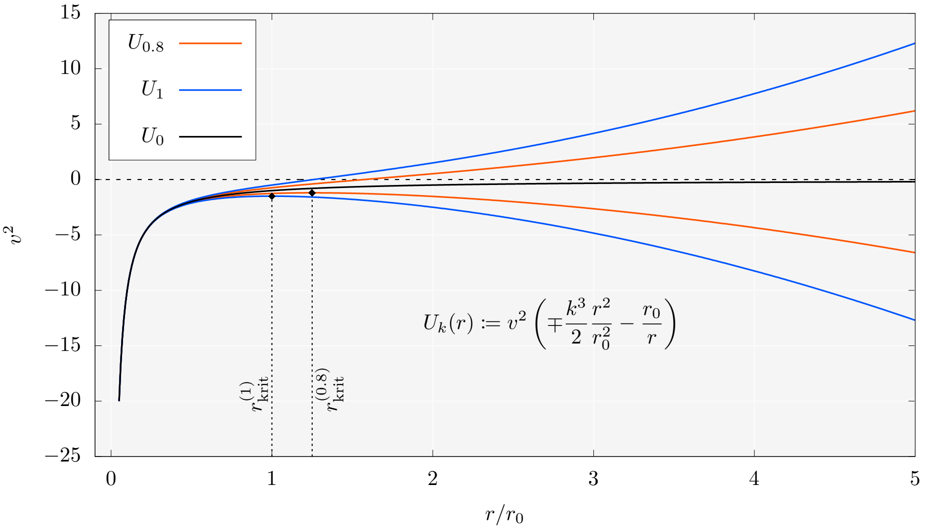

Abbildung 1: Die Abbildung zeigt das effektive Potential U für verschiedene Werte von $k := \frac{r_0}{r_{\text{krit}}}$.

Aufgabe 2 *Das* Olbers-*Paradoxon*

(a) **Vorbereitung:** Ein räumlich flaches Universum enthalte ein einziges Substrat mit dem Zustandsparameter w. Leiten Sie die folgende verallgemeinerte Mattig-Formel für die Leuchtkraft-Entfernung D_{L} als Funktion der Rotverschiebung z her.

$$D_{\text{L}}(z) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}(1+z) \left[1 - \frac{1}{(1+z)^{\frac{1+3w}{2}}} \right]$$

(b) In diesem Universum seien Standard-Kerzen der Leuchtkraft L gleichmäßig im Raum verteilt. Diese werden weder erzeugt noch vernichtet. Ihre Anzahldichte zur Zeit t_0 sei n_0.

Berechnen Sie den beobachtbaren Fluss $F_{*,0}$ einer einzelnen solchen Standardkerze, die die Rotverschiebung z hat.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung der bisherigen Resultate den Fluss aller Standardkerzen, deren Rotverschiebung im Intervall $[z, z + \mathrm{d}z]$ liegt, sowie den Gesamt-Fluss durch Integration über alle Rotverschiebungen.

(d) Bestimmen Sie den Einfluss der Expansion auf die Dunkelheit des Nachthimmels, indem Sie zum Vergleich die bisherigen Schritte dieser Aufgabe für ein statisches EUKLIDisches Universum mit gleicher Leuchtdauer t_* der Galaxien und gleichem Weltalter t_0 wiederholen.

Nehmen Sie als **Beispiel** sowohl für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos als auch für einen reinen Strahlungskosmos an, dass Galaxien einmal bei der Rotverschiebung $z_* = 6$ zu leuchten begannen und zum anderen, dass sie bereits seit dem Urknall existieren.

(e) Moderne Himmelsdurchmusterungen legen die folgende Leuchtkraft-Dichte nahe.

$$n_0 L = 2 \cdot 10^8 h_0 L_\odot \,\mathrm{Mpc}^{-3}$$

Berechnen Sie die Nachthimmels-Helligkeit für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit dem dimensionslosen HUBBLE-Parameter $h_0 = 0.70$ und vergleichen Sie mit der Solarkonstante $F_\odot = 1.4 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

Hinweis: Für den Vergleich mit der Solarkonstanten benötigen Sie den Gesamt-Fluss aller Standard-Kerzen pro Raumwinkel-Einheit.

LÖSUNG:

(a) Es ist bekannt, dass unter der Annahme einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit die folgende Formel für die Leuchtkraft-Entfernung D_L gilt.

$$D_\mathrm{L} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ , \qquad D_\mathrm{L}(z) \coloneqq \chi(z) a(t_0)(1+z)$$

$$\chi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad \chi(t) \coloneqq \int_{t_0}^{t} \frac{c}{a(s)} \,\mathrm{d}s$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \kappa c^4 \mu \\
0 &= \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \kappa p c^2 \\
0 &= \dot{\mu} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{a}}{a} \\
w &= \frac{p}{\mu c^2}
\end{aligned}$$

Zunächst teilen wir die Kontinuitätsgleichung durch μ.

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Durch Integration über die Zeit und durch die Verwendung der Substitutionsregel erhalten wir die folgende Gleichung.

$$\ln\frac{\mu(t)}{\mu(t_0)} + 3(1+w)\ln\frac{a(t)}{a(t_0)} = 0$$

$$\mu(t) = \mu(t_0)\left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^{-3(1+w)}$$

Die erhaltene Lösung setzen wir nun in die Friedman-Gleichung ein.

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \kappa c^4\mu(t_0)\left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^{-3(1+w)}$$

$$a^{\frac{1+3w}{2}}\dot{a} = \sqrt{\frac{1}{3}\kappa c^4\mu(t_0)a^{3(1+w)}(t_0)}$$

Durch Integration über die Zeit und erneute Anwendung der Substitutionsregel erhält man nach Umstellen die folgende Lösung.

$$a(t) = a(t_0)\left[1 + A(1+w)(t-t_0)\right]^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$A \coloneqq \sqrt{\frac{3}{4}\kappa c^4\mu(t_0)}$$

$$\begin{aligned}
-r(t) &= \int_{t_0}^{t}\frac{c}{a(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{c}{a(t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[1 + A(1+w)(s-t_0)\right]^{-\frac{2}{3(1+w)}}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{c}{a(t_0)}\left.\frac{\left[1 + A(1+w)(s-t_0)\right]^{1-\frac{2}{3(1+w)}}}{A(1+w)\left(1-\frac{2}{3(1+w)}\right)}\right|_{s=t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)}\frac{3}{A(1+w)}\left.\left[\frac{a(s)}{a(t_0)}\right]^{\frac{1+3w}{2}}\right|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)}\frac{3}{A(1+w)}\left.\left[\frac{1}{1+z(s)}\right]^{\frac{1+3w}{2}}\right|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)}\frac{3}{A(1+w)}\left[\left(\frac{1}{1+z(t)}\right)^{\frac{1+3w}{2}} - 1\right]
\end{aligned}$$

$$\dot{a}(t) = a(t_0)\frac{2A}{3}\left[1 + A(1+w)(t-t_0)\right]^{\frac{2}{3(1+w)}-1}$$

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \frac{2A}{3}$$

Dies setzen wir ineinander ein.

$$D_{\mathrm{L}}(z) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}(1+z)\left[1 - \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{1+3w}{2}}\right]$$