Aufgabe 3

Eigene Lösung:

(a) $\phi : [0,\pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \qquad \phi(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad D\phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi & -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi & \sin\vartheta \cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D\phi^T D\phi)(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta \end{pmatrix} = (g_{mn})(\vartheta,\varphi)$$

Nach Taylor:

$$\phi(\vartheta,\varphi) = \phi(\vartheta_0, \varphi_0) + D\phi(\vartheta_0,\varphi_0)(\Delta\vartheta, \Delta\varphi) + \varepsilon(\Delta\vartheta, \Delta\varphi)$$

$$\Rightarrow \phi(\vartheta + \Delta\vartheta, \varphi + \Delta\varphi) = \phi(\vartheta,\varphi) + D\phi(\vartheta,\varphi)(\Delta\vartheta,\Delta\varphi) + \varepsilon(\Delta\vartheta,\Delta\varphi)$$

Wir wissen nach Sätzen der Algebra: $\boxed{\cos\delta = \langle \phi(\vartheta_1, \varphi_1), \phi(\vartheta_2, \varphi_2) \rangle}$

Die Taylorreihe des cos ergibt:

$$\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2} + \mathcal{O}(\delta^4)$$

Nach dem Satz von Taylor gilt weiterhin: $(q = (q^1, q^2) = (\vartheta, \varphi))$

$$\phi(\vartheta + \Delta\vartheta, \varphi + \Delta\varphi) = \phi(q) + D\phi(q) \cdot \Delta q + \sum_{m,n=1}^{2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\delta_{mn}\right) \partial_m \partial_n \phi(q) \Delta q^m \Delta q^n + \mathcal{O}(\Delta_q^3)$$

$$\Rightarrow \langle \phi(\vartheta, \varphi), \phi(\vartheta + \Delta\vartheta, \varphi + \Delta\varphi) \rangle$$

$$= \underbrace{\langle \phi(q), \phi(q) \rangle}_{= \|\phi(q)\|^2 = 1} + \underbrace{\langle \phi(q), D\phi(q) \Delta q \rangle}_{= 0 \text{ (wegen } *)} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{m,n=1}^{2} \left(1 - \tfrac{1}{2}\delta_{mn}\right) \phi^k(q) \partial_m \partial_n \phi^k(q) \Delta q^m \Delta q^n + \mathcal{O}(\Delta_q^3)$$

$$\|\phi(q)\|^2 = 1 \Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^{3} \partial_m (\phi^k \phi^k) = \sum_{k=1}^{3} 2 \phi^k \partial_m \phi^k = 2 \langle \phi, \partial_m \phi \rangle \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \langle \phi(q), D\phi(q) \Delta q \rangle = 0$$

$$\partial_1 D\phi(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \cos\varphi & -\cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta \cos\varphi \\ -\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 D\phi(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi & -\sin\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \cos\varphi & -\sin\vartheta \sin\varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{3} \phi^k \partial_m \partial_n \phi^k(q) \right]_{m,n} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$ (hier Matrix direkt berechnen!)

$$\Rightarrow \langle \phi(\vartheta, \varphi), \phi(\vartheta + \Delta\vartheta, \varphi + \Delta\varphi) \rangle = 1 - \frac{1}{2}\left(\Delta\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, \Delta\varphi^2\right)$$

$$\Rightarrow \cos\delta = 1 - \frac{1}{2}\delta^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\Delta\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, \Delta\varphi^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^2 = \Delta\vartheta^2 + \Delta\varphi^2 \sin^2\vartheta}$$