Aufgabe 1 *Das* OLBERS-*Paradoxon*

(a) **Vorbereitung:** Ein räumlich flaches Universum enthalte ein einziges Substrat mit dem Zustandsparameter w. Leiten Sie die folgende verallgemeinerte MATTIG-Formel für die Leuchtkraft-Entfernung D_L als Funktion der Rotverschiebung z her.

$$D_\mathrm{L}(z) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}(1+z)\left[1 - \frac{1}{(1+z)^{\frac{1+3w}{2}}}\right]$$

(b) In diesem Universum seien Standard-Kerzen der Leuchtkraft L gleichmäßig im Raum verteilt. Diese werden weder erzeugt noch vernichtet. Ihre Anzahldichte zur Zeit t_0 sei n_0.

Berechnen Sie den beobachtbaren Fluss $F_{*,0}$ einer einzelnen solchen Standardkerze, die die Rotverschiebung z hat.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung der bisherigen Resultate den Fluss aller Standardkerzen, deren Rotverschiebung im Intervall $[z, z+\mathrm{d}z]$ liegt, sowie den Gesamt-Fluss durch Integration über alle Rotverschiebungen.

(d) Bestimmen Sie den Einfluss der Expansion auf die Dunkelheit des Nachthimmels, indem Sie zum Vergleich die bisherigen Schritte dieser Aufgabe für ein statisches EUKLIDisches Universum mit gleicher Leuchtdauer t_* der Galaxien und gleichem Weltalter t_0 wiederholen.

Nehmen Sie als **Beispiel** sowohl für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos als auch für einen reinen Strahlungskosmos an, dass Galaxien einmal bei der Rotverschiebung $z_* = 6$ zu leuchten begannen und zum anderen, dass sie bereits seit dem Urknall existieren.

(e) Moderne Himmelsdurchmusterungen legen die folgende Leuchtkraft-Dichte nahe.

$$n_0 L = 2 \cdot 10^8 h_0 L_\odot \,\mathrm{Mpc}^{-3}$$

Berechnen Sie die Nachthimmels-Helligkeit für einen EINSTEIN-DESITTER-Kosmos mit dem dimensionslosen HUBBLE-Parameter $h_0 = 0.70$ und vergleichen Sie mit der Solarkonstante $F_\odot = 1.4 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$.

Hinweis: Für den Vergleich mit der Solarkonstanten benötigen Sie den Gesamt-Fluss aller Standard-Kerzen pro Raumwinkel-Einheit.

LÖSUNG:

(a) Es ist bekannt, dass unter der Annahme einer flachen Robertson-Walker-Raumzeit die folgende Formel für die Leuchtkraft-Entfernung D_L gilt.

$$D_\mathrm{L} \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ , \qquad D_\mathrm{L}(z) := \chi(z)a(t_0)(1+z)$$

$$\chi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \qquad \chi(t) := \int_{t_0}^{t} \frac{c}{a(s)}\,\mathrm{d}s$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \kappa c^4 \mu \\
0 &= \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \kappa p c^2 \\
0 &= \dot{\mu} + \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) \frac{3\dot{a}}{a} \\
w &= \frac{p}{\mu c^2}
\end{aligned}
$$

Zunächst teilen wir die Kontinuitätsgleichung durch μ.

$$
\frac{\dot{\mu}}{\mu} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} = 0
$$

Durch Integration über die Zeit und durch die Verwendung der Substitutionsregel erhalten wir die folgende Gleichung.

$$
\ln \frac{\mu(t)}{\mu(t_0)} + 3(1+w) \ln \frac{a(t)}{a(t_0)} = 0
$$

$$
\mu(t) = \mu(t_0) \left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^{-3(1+w)}
$$

Die erhaltene Lösung setzen wir nun in die Friedman-Gleichung ein.

$$
\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \kappa c^4 \mu(t_0) \left[\frac{a(t)}{a(t_0)}\right]^{-3(1+w)}
$$

$$
a^{\frac{1+3w}{2}} \dot{a} = \sqrt{\frac{1}{3} \kappa c^4 \mu(t_0) a^{3(1+w)}(t_0)}
$$

Durch Integration über die Zeit und erneute Anwendung der Substitutionsregel erhält man nach Umstellen die folgende Lösung.

$$
a(t) = a(t_0) \left[1 + A(1+w)(t-t_0)\right]^{\frac{2}{3(1+w)}}
$$

$$
A \coloneqq \sqrt{\frac{3}{4} \kappa c^4 \mu(t_0)}
$$

$$
\begin{aligned}
-r(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{c}{a(s)} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{c}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[1 + A(1+w)(s-t_0)\right]^{-\frac{2}{3(1+w)}} \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{c}{a(t_0)} \left. \frac{\left[1 + A(1+w)(s-t_0)\right]^{1-\frac{2}{3(1+w)}}}{A(1+w)\left(1 - \frac{2}{3(1+w)}\right)} \right|_{s=t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)} \frac{3}{A(1+w)} \left. \left[\frac{a(s)}{a(t_0)}\right]^{\frac{1+3w}{2}} \right|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)} \frac{3}{A(1+w)} \left. \left[\frac{1}{1+z(s)}\right]^{\frac{1+3w}{2}} \right|_{t_0}^{t} \\
&= \frac{c}{a(t_0)} \frac{3}{A(1+w)} \left[\left(\frac{1}{1+z(t)}\right)^{\frac{1+3w}{2}} - 1\right]
\end{aligned}
$$

$$\dot{a}(t) = a(t_0)\frac{2A}{3}\left[1 + A(1+w)(t - t_0)\right]^{\frac{2}{3(1+w)}-1}$$

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \frac{2A}{3}$$

Dies setzen wir ineinander ein.

$$D_{\mathrm{L}}(z) = \frac{2c}{H_0(1+3w)}(1+z)\left[1 - \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{1+3w}{2}}\right]$$