KOSMOLOGIE

(Sommersemester 2018)

Thema 1: Die ROBERTSON-WALKER-Geometrie

Aufgabe 1: Die Geodätengleichung

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich reibungsfrei und nur unter der Einwirkung der Zwangskraft auf einer zweidimensionalen Kugel.

- Leiten Sie aus der LAGRANGE-Funktion $L = \frac{m}{2} g_{mn} \dot{q}^m \dot{q}^n$ in den Koordinaten $q^1 = \vartheta$ und $q^2 = \varphi$ die Bewegungsgleichungen her und lesen Sie durch Vergleich mit der Geodätengleichung
$$\ddot{q}^k + \Gamma^k_{\ell m} \dot{q}^\ell \dot{q}^m = 0$$
die CHRISTOFFEL-Symbole ab. Der Punkt bedeutet die Ableitung nach einem Parameter λ, der zum Beispiel die Bogenlänge oder die Zeit sein kann.
- Weisen Sie nach, daß jeder Längenkreis, unter den Breitenkreisen aber nur der Äquator der Kugel eine Lösung der Geodätengleichung ist.

b) Berechnen Sie die Nullgeodäten in der dreidimensionalen, flachen Raumzeit
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2\,,$$
worin r und φ Polarkoordinaten sind. Breitet sich Licht geradlinig aus?

Aufgabe 2: Geodäten in der ROBERTSON-WALKER-*Geometrie*

a) Weisen Sie mit Hilfe der Geodätengleichung für die ROBERTSON-WALKER-Metrik
$$\mathrm{d}s^2 = a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\right] - c^2\,\mathrm{d}t^2$$
die Richtigkeit der beiden folgenden Behauptungen nach:

- Jede Galaxie, für die $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ gilt (mitbewegte Koordinaten), befindet sich in geodätischer Bewegung.
- Wenn sich ein kräftefreies Teilchen in einem ROBERTSON-WALKER-Kosmos anfangs in radialer Richtung bewegt, behält es diese Bewegungsrichtung dauernd bei.

b) In einem unbegrenzt expandierenden ROBERTSON-WALKER-Kosmos wird ein Teilchen zur Zeit $t = t_0$ vom Koordinatenursprung aus mit der Geschwindigkeit v_0 in Bewegung gesetzt. Zeigen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabenteil (a), daß das Teilchen für $t \to \infty$ in dem Galaxien-Substrat zur Ruhe kommt. Berechnen Sie für $\varepsilon = 0$ die radiale Koordinate, bei der dies geschieht.

bitte wenden

Aufgabe 3: Der Winkeldurchmesser

Für astronomische Beobachtungen ist der Zusammenhang zwischen der Größe $\Delta\ell$, die etwa den Durchmesser einer Galaxie bezeichnet, und dem Winkel $\Delta\delta$, unter dem diese Größe am Himmel zu sehen ist, von Interesse.

a) Die Lage zweier Punkte auf der Oberfläche einer Kugel sei durch ihre Poldistanz- und Azimutwinkel beschrieben: $P_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ und $P_2(\vartheta_2, \varphi_2)$.

- Berechnen Sie aus dem Skalarprodukt der beiden Radiusvektoren den Winkelabstand δ der Punkte.
- Nun seien beide Punkte infinitesimal benachbart: $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta$ und $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$. Gewinnen Sie aus dem bisherigen Resultat den infinitesimalen Winkelabstand $\Delta\delta$.

b) Betrachten Sie ein Objekt der Größe $\Delta\ell \ll a$, das sich in einem ROBERTSON-WALKER-Kosmos mit zeitabhängigem Skalenfaktor $a(t)$ im Abstand χ vom Beobachter befindet und von dort zur Zeit t_e Licht zu diesem aussendet.

- Unter welchem Winkel sieht der bei $\chi = 0$ befindliche Beobachter dieses Objekt?
- Untersuchen Sie getrennt die drei Fälle $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = \pm 1$ und erklären Sie, was im Fall positiver Krümmung bei $\chi = \pi$ geschieht.
- Welche Schlußfolgerung für die Größe des beobachtbaren Teils des Universums ziehen Sie aus der Tatsache, daß auch die am weitesten entfernten Galaxien weder stark vergrößert noch bis zu punktförmigen Gebilden verkleinert sind?