

KOSMOLOGIE

(Sommersemester 2018)

Thema 5: Kosmologisch relevante astronomische Beobachtungen (II) Staub und Strahlung

Aufgabe 1: Das WIENSche Verschiebungsgesetz

- a) Berechnen Sie aus der Verteilung

$$\rho_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

der Energiedichte der Schwarzkörper-Strahlung auf die Frequenzen die Form $\rho_\lambda(\lambda, T)$ des PLANCKSchen Strahlungsgesetzes, die die Verteilung auf die Wellenlängen beschreibt. Es bedeutet h das PLANCKSche Wirkungsquantum und k_B die BOLTZMANN-Konstante.

Hinweis: Die über alle Frequenzen integrierte Energiedichte muß gleich der über alle Wellenlängen integrierten Energiedichte sein.

- b) Berechnen Sie die Wellenlänge λ_{\max} , für die $\rho_\lambda(\lambda, T)$ sowie die Frequenz ν_{\max} , für die $\rho_\nu(\nu, T)$ maximal wird (WIENSches Verschiebungsgesetz). Stimmt die zu λ_{\max} gehörige Frequenz $\nu(\lambda_{\max})$ mit ν_{\max} überein?

Hinweis: Für die Herleitung des WIENSchen Verschiebungsgesetzes benötigen Sie die Lösungen der Gleichungen

$$5 - x = 5e^{-x} \quad \text{und} \quad 3 - x = 3e^{-x}.$$

Gewinnen Sie diese Lösungen graphisch oder durch andere Näherungsverfahren.

Aufgabe 2: Eigenschaften der kosmischen Hintergrundstrahlung

- a) Die beiden Abbildungen zeigen das Spektrum der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung. Auf der Abszisse der oberen Abbildung bedeutet die Bezeichnung „FREQUENCY“ die Anzahl der auf einen Zentimeter entfallenden Wellenlängen.

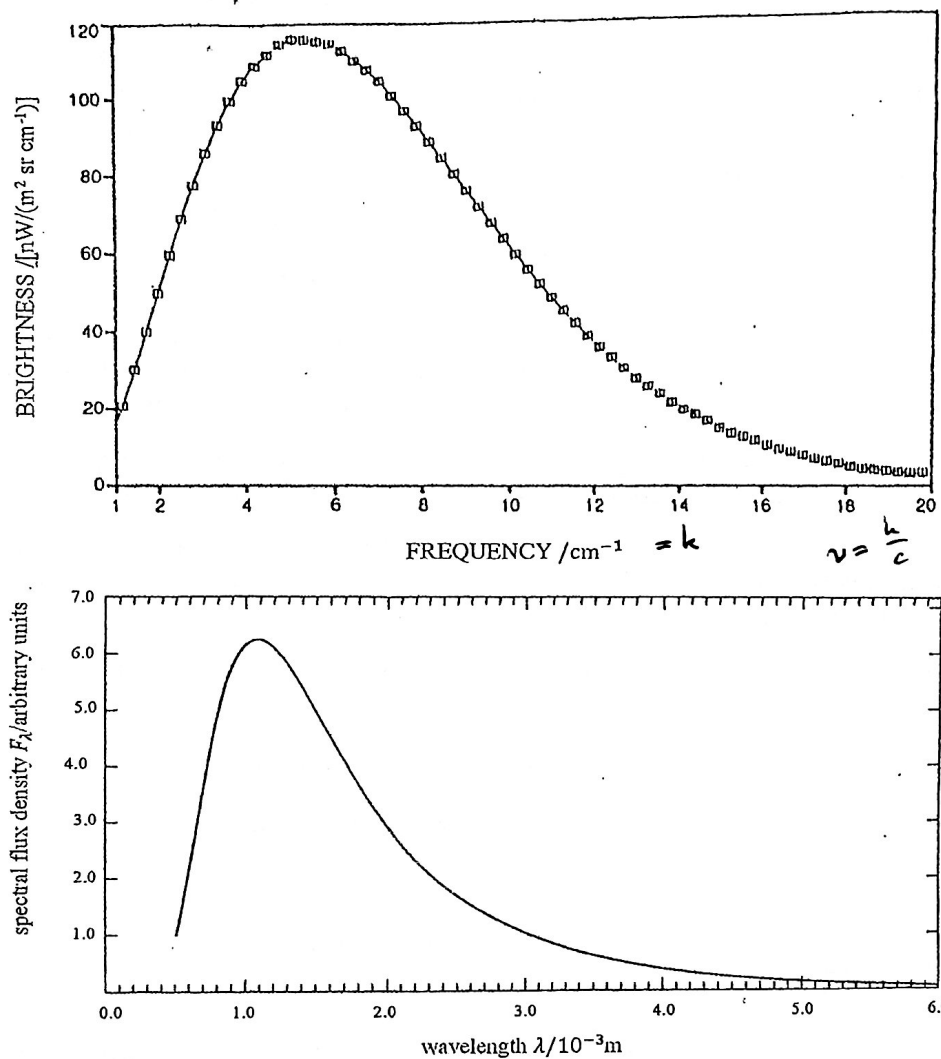
Ermitteln Sie aus beiden Abbildungen mit Hilfe des WIENSchen Verschiebungsgesetzes (siehe Aufgabe 1) die charakteristische Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung. Wo liegt die maximale Emission im elektromagnetischen Spektrum?

- b) Berechnen Sie die gesamte Energiedichte des Mikrowellen-Hintergrundes, deren Massenäquivalent und den zugehörigen Dichteparameter Ω_R .

Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

bitte wenden



- c) Erschließen Sie aus den angegebenen Einheiten auf der Ordinate der oberen Abbildung („sr“ steht für Steradian) den Zusammenhang zwischen der Energiedichte aus Aufgabenteil (b) und der Größe „BRIGHTNESS“ in der genannten Abbildung.

Aufgabe 3: Staub und Strahlung

- a) Die heutigen Werte für die Dichten von Materie (Staub) und Strahlung seien μ_{M0} und μ_{R0} . Zeigen Sie, daß die beiden Dichten bei der Rotverschiebung

$$z_{eq} = \frac{\mu_{M0}}{\mu_{R0}} - 1$$

einander gleich waren. Drücken Sie das Ergebnis durch den Dichteparameter Ω_{M0} und die heutige Temperatur T_0 der kosmischen Hintergrundstrahlung aus.

- b) Bestätigen Sie, daß in unserem, durch die Parameter $\Omega_{M0} = 0,3$, $h_0 = 0,7$ und $T_0 = 2,7\text{ K}$ gekennzeichneten Universum $z_{eq} \approx 6000$ ist. Wie groß war die Temperatur der Hintergrundstrahlung zu dieser Zeit?
- c) Zeigen Sie, daß in der frühen, strahlungsdominierten Entwicklungsphase des Universums die Strahlungstemperatur T der Gleichung

$$\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2 = \frac{8\pi^3}{45} \frac{Gk_B^4}{\hbar^3 c^5} T^4$$

genügt. Darin bedeuten k_B und \hbar die BOLTZMANN-Konstante bzw. das durch 2π dividierte PLANCKsche Wirkungsquantum. Lösen Sie die Gleichung für die Zeitentwicklung $T(t)$ der Temperatur. Berechnen Sie die Zeit t_{eq} , zu der Strahlung und Materie die gleiche Dichte hatten.

Hinweis: STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz

- d) Die kosmische Mikrowellen-Hintergrundstrahlung (Cosmic Microwave Background Radiation) wurde bei der Rotverschiebung $z_{\text{CMBR}} \approx 1100$ emittiert. Zu welcher Zeit t_{CMBR} geschah dies?