LOGIKSYSTEME
ÜBUNGSSERIE 5: LÖSUNGEN

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

7. März 2018

Im Folgenden seien α, β und γ drei beliebige Formeln. Wir definieren zunächst die Axiome des Frege-Kalküls.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F1}(\alpha,\beta) &\coloneqq \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma) &\coloneqq (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \\
&\qquad \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\mathrm{F3}(\alpha) &\coloneqq \neg\neg\alpha \to \alpha
\end{aligned}$$

Die einzige definierte Schlussregel im Frege-Kalkül ist »Modus Ponens« und wie folgt definiert.

$$\mathrm{MP}(\alpha, \alpha \to \beta) \coloneqq \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Aus der Vorlesung sind zudem einige weitere Frege-Theoreme bekannt, die sich vollkommen analog zu den bereits definierten Axiomen verhalten. Für die aufgelisteten Frege-Beweise verwenden wir die im Folgenden definierten Theoreme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ID}(\alpha) &\coloneqq \alpha \to \alpha \\
\mathrm{XX}(\alpha,\beta) &\coloneqq (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta) \\
\mathrm{NN}(\alpha) &\coloneqq \alpha \to \neg\neg\alpha \\
\mathrm{EFQL}(\alpha) &\coloneqq \bot \to \alpha
\end{aligned}$$

Zudem erweist es sich als ausgesprochen praktisch weitere Schlussregeln zu beweisen, die die eigentlichen Beweise verkürzen und zudem auch übersichtlicher und verständlicher gestalten.

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TT}(\alpha,\beta) \coloneqq \frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$$

Beweis:

(1)	α	Hypothese
(2)	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$\mathrm{F1}(\alpha,\beta)$
(3)	$\beta \to \alpha$	$\mathrm{MP}((1),(2))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TRANS}(\alpha \to \beta, \beta \to \gamma) \coloneqq \frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Beweis:

(1)	$\alpha \to \beta$	Hypothese
(2)	$\beta \to \gamma$	Hypothese
(3)	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$\mathrm{TT}((2),\alpha)$
(4)	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ $\to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	$\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma)$
(5)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$\mathrm{MP}((3),(4))$
(6)	$\alpha \to \gamma$	$\mathrm{MP}((1),(5))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Aufgabe 19

(a): Es seien $\mathcal{S}$ eine Formelmenge und β und γ beliebige Formeln. Es soll die folgende Aussage betrachtet werden.

$$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \gamma \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to \gamma$$

Die Frege-Beweisbarkeit kann durch den folgenden direkten Beweis gezeigt werden.

(1)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \gamma$	Hypothese
(2)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to \gamma$	$\mathrm{TT}((1),\beta)$

(b): Es seien $\mathcal{S}$ eine Formelmenge und β und γ beliebige Formeln. Es soll die folgende Aussage betrachtet werden.

$$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \neg\beta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to \gamma$$

Die Frege-Beweisbarkeit kann durch den folgenden direkten Beweis gezeigt werden.

(1)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \neg\beta$	Hypothese
(2)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to \bot$	$(1), \neg\beta = \beta \to \bot$
(3)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \bot \to \gamma$	$\mathrm{EFQL}(\gamma)$
(4)	$\mathcal{S} \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to \gamma$	$\mathrm{TRANS}((2),(3))$

(c): Es seien $\mathcal{S}$ eine Formelmenge und β und γ beliebige Formeln. Es soll die folgende Aussage betrachtet werden.

$$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta \quad \text{und} \quad \mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg\gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg(\beta \to \gamma)$$

Die Frege-Beweisbarkeit kann durch den folgenden direkten Beweis gezeigt werden.

(1)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta$	Hypothese
(2)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg\gamma$	Hypothese
(3)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \gamma \to\perp$	$(2), \neg\gamma = \gamma \to\perp$
(4)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta \to (\gamma \to\perp)$	$\mathrm{TT}((3), \beta)$
(5)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} (\beta \to (\gamma \to\perp)) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to\perp))$	$\mathrm{F2}(\beta, \gamma, \perp)$
(6)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} (\beta \to \gamma) \to (\beta \to\perp)$	$\mathrm{MP}((4), (5))$
(7)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta \to ((\beta \to\perp) \to\perp)$	$\mathrm{NN}(\beta)$
(8)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} (\beta \to\perp) \to\perp$	$\mathrm{MP}((1), (7))$
(9)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} (\beta \to \gamma) \to\perp$	$\mathrm{TRANS}((6), (8))$
(10)	$\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg(\beta \to \gamma)$	(9)

(d): Seien nun α eine beliebige Formel und $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Dann definieren wir $\mathcal{A}_\alpha$ durch die folgende Menge.

$$\mathcal{A}_\alpha \coloneqq \mathcal{A} \cup \{\neg A_i \mid A_i \notin \mathcal{A} \text{ und } A_i \text{ kommt in } \alpha \text{ vor}\}$$

Durch die vollständige Induktion sollen die beiden folgenden Aussagen für beliebige Formeln α und beliebige Belegungen $\mathcal{A}$ gezeigt werden.

$$\mathcal{A} \models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \alpha$$
$$\mathcal{A} \not\models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha$$

Bei $\{\perp, \to\}$ handelt es sich um eine adäquate Menge. Es reicht also diese Menge von Verknüpfungszeichen in der eigentlichen Induktion zu behandeln.

Induktionsanfang: Im Folgenden beschreibe α eine atomare Formel oder $\perp$.

Fall $\alpha = \perp$: Dann wissen wir, dass $\mathcal{A} \not\models \alpha$ gilt. Es folgt damit unmittelbar aus dem Prinzip »ex falsum quod libet« die folgende Aussage, da es sich bei $\mathcal{A} \models \alpha$ um eine falsche Aussage handelt.

$$\mathcal{A} \models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \alpha$$

Aus dem folgenden direkten Frege-Beweis lässt sich nun die Aussage $\mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\perp$ schlussfolgern.

(1)	$\perp \to \perp$	$\mathrm{ID}(\perp)$
(2)	$\neg\perp$	(1)

Demzufolge muss dann aber auch das Folgende gelten.

$$\mathcal{A} \not\models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha$$

Fall $\alpha = A_i$ für $i \in \mathbb{N}$: Die folgenden Implikationsketten zeigen die gewünschten Aussagen für atomare Formeln.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathcal{A}_\alpha \\ &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \not\models \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \notin \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad \neg\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \\ &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha \end{aligned}$$

Damit gelten die zu beweisenden Aussagen für alle atomare Formeln und $\perp$.

Induktionsvoraussetzung: Es seien α und β beliebige Formeln, für die die folgenden Aussagen gelten.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \alpha \\ \mathcal{A} \not\models \alpha \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha \\ \mathcal{A} \models \beta \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\beta \vdash_{\text{Fre}} \beta \\ \mathcal{A} \not\models \beta \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\beta \vdash_{\text{Fre}} \neg\beta \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Es seien φ und ϑ beliebige Formeln. Dann muss nach Definition das Folgende gelten, da in der Formel $\varphi \to \vartheta$ mindestens genauso viele atomare Formeln vorkommen müssen, wie in φ oder ϑ.

$$\mathcal{A}_\varphi \subset \mathcal{A}_{\varphi\to\vartheta}, \qquad \mathcal{A}_\vartheta \subset \mathcal{A}_{\varphi\to\vartheta}$$

Werden zur Hypothesenmenge mehr Formeln hinzugefügt, so lassen sich auch mehr Formeln auf der Basis der Hypothesenmenge beweisen.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varphi \vdash_{\text{Fre}} \varphi \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{\varphi\to\vartheta} \vdash_{\text{Fre}} \varphi \\ \mathcal{A}_\vartheta \vdash_{\text{Fre}} \vartheta \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{\varphi\to\vartheta} \vdash_{\text{Fre}} \vartheta \end{aligned}$$

Diese Aussagen verwenden wir nun für den eigentlichen Induktionsschluss. Aufgrund der adäquaten Menge von Verknüpfungszeichen reicht es hier die Aussage $\alpha \to \beta$ zu überprüfen. Wir verwenden dabei, die in den Aufgabenteilen (a), (b) und (c) gezeigten Aussagen.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \models \alpha \to \beta \\ &\quad\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \not\models \alpha \quad \text{oder} \quad \mathcal{A} \models \beta \\ &\quad\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha \quad \text{oder} \quad \mathcal{A}_\beta \vdash_{\text{Fre}} \beta \\ &\quad\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha \quad \text{oder} \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \vdash_{\text{Fre}} \beta \\ &\quad\overset{\text{(a),(b)}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \vdash_{\text{Fre}} \alpha \to \beta \quad \text{oder} \\ &\qquad\qquad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \vdash_{\text{Fre}} \alpha \to \beta \\ &\quad\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \vdash_{\text{Fre}} \alpha \to \beta \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} \not\models \alpha \to \beta$$

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \mathcal{A} \models \alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \not\models \beta \\
&\implies \quad \mathcal{A}_\alpha \mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Fre}}\; \alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_\beta \mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Fre}}\; \neg\beta \\
&\implies \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Fre}}\; \alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Fre}}\; \neg\beta \\
&\overset{(c)}{\implies} \quad \mathcal{A}_{\alpha\to\beta} \mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Fre}}\; \neg(\alpha\to\beta)
\end{aligned}$$

Damit sind die gewünschten Aussagen für beliebige Formeln α durch vollständige Induktion gezeigt worden. $\square$

Aufgabe 21

Im Folgenden seien α, β und γ drei beliebige Formeln. Wir definieren zunächst die Axiome des Mendelson-Kalküls.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M1}(\alpha,\beta) &:= \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
&= \mathrm{F1}(\alpha,\beta) \\
\mathrm{M2}(\alpha,\beta,\gamma) &:= (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \\
&\qquad \to ((\alpha\to\beta) \to (\alpha\to\gamma)) \\
&= \mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma) \\
\mathrm{M3}(\alpha,\beta) &:= (\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta\to\alpha)\to\beta)
\end{aligned}$$

Die einzige definierte Schlussregel im Mendelson-Kalkül ist wieder »Modus Ponens«. Auch die Bergriffe der Herleitung und der Beweisbarkeit im Mendelson-Kalkül können analog zum Frege-Kalkül definiert werden. Wir schreiben $\mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Men}}\; \varphi$ für eine beliebige Mendelson-beweisbare Formel φ.

Da die ersten beiden Axiome des Mendelson-Kalküls gleich den ersten beiden Axiomen des Frege-Kalküls sind und beide Kalküle dieselbe Schlussregel verwenden, gelten das Theorem $\mathrm{ID}(\alpha)$ und die Schlussregeln $\mathrm{TT}(\alpha,\beta)$ und $\mathrm{TRANS}(\alpha\to\beta,\beta\to\gamma)$ auch im Mendelson-Kalkül für beliebige Formeln α,β und γ, da ihn ihren Herleitungen nur die ersten beiden Axiome zusammen mit »Modus Ponens« verwendet werden.

Um nun die Korrektheit des Mendelson-Kalküls für beliebige Formeln φ zu beweisen, führen wir einen Induktionsbeweis über die Länge der Herleitung einer Formel im Mendelson-Kalkül.

Induktionsanfang: Es sei nun φ eine Formel, die innerhalb des Mendelson-Kalküls durch einen einzigen Schritt hergeleitet werden kann. Demzufolge muss es sich bei φ um ein Axiom des Mendelson-Kalküls handeln. Im folgenden sein α, β und γ beliebige Formeln.

Fall $\varphi = \mathrm{M1}(\alpha,\beta) = \mathrm{F1}(\alpha,\beta)$ Durch den Vollständigkeitssatz des Frege-Kalküls wurde bereits gezeigt, dass das erste Axiom des Frege-Kalküls für beliebige α und β gültig ist.

Fall $\varphi = \mathrm{M2}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma)$ Durch den Vollständigkeitssatz des Frege-Kalküls wurde bereits gezeigt, dass das zweite Axiom des Frege-Kalküls für beliebige α, β und γ gültig ist.

Fall $\varphi = \mathrm{M3}(\alpha,\beta)$ Für das dritte Axiom des Mendelson-Kalküls lässt sich die folgende Äquivalenzkette aufstellen.

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\neg\beta\to\neg\alpha) \to ((\neg\beta\to\alpha)\to\beta) \\
&\equiv \neg(\neg\beta\to\neg\alpha) \vee ((\neg\beta\to\alpha)\to\beta) \\
&\equiv (\neg\beta\wedge\neg\neg\alpha) \vee (\neg(\neg\beta\to\alpha)\vee\beta) \\
&\equiv (\neg\beta\wedge\alpha) \vee ((\neg\beta\wedge\neg\alpha)\vee\beta) \\
&\equiv ((\neg\beta\wedge\alpha) \vee (\neg\beta\wedge\neg\alpha))\vee\beta \\
&\equiv (\neg\beta\wedge(\alpha\vee\neg\alpha))\vee\beta \\
&\equiv (\neg\beta\wedge\top)\vee\beta \equiv \neg\beta\vee\beta \equiv \top
\end{aligned}$$

Da φ äquivalent zu $\top$ ist, muss es sich bei φ um eine gültige Formel handeln und demzufolge $\models \varphi$ gelten.

Da α, β und γ beliebig gewählt wurden, sind damit die Axiome des Mendelson-Kalküls gültig. Als Folge ist damit auch jede Herleitung im Mendelson-Kalkül mit einem einzigen Schritt gültig.

Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Formel φ, welche eine Herleitung im Mendelson-Kalkül mit einer Länge kleiner gleich n besitzt, ist gültig.

Induktionsschluss: Sei nun φ eine Formel, für welche eine Herleitung $(\alpha_k)_{\{k\in\mathbb{N} \mid k\leq n+1\}}$ im Mendelson-Kalkül mit der Länge $n+1$ existiert.

Fall α_{n+1} ist ein Axiom: Handelt es sich bei α_{n+1} um ein Axiom, so ist aus dem Induktionsanfang ersichtlich, dass es sich bei $\varphi = \alpha_{n+1}$ auch um eine gültige Formel handeln muss.

Fall α_{n+1} ist kein Axiom: Handelt es sich bei α_{n+1} nicht um ein Axiom, so kann $\varphi = \alpha_{n+1}$ nur aus der Schlussregel $\mathrm{MP}(\alpha_i,\alpha_j)$ mit $i,j\in\mathbb{N}$ und $i,j\leq n$ entstehen, wobei $\alpha_j = \alpha_i \to \varphi$ gilt. Nach der Induktionsvoraussetzung handelt es sich bei α_i und α_j um gültige Formeln, da für sie Herleitungen im Mendelson-Kalkül der Länge i beziehungsweise j existieren. Des Weiteren gilt nach einem bereits bewiesenen Satz das Folgende.

$$\models \alpha_i \quad \text{und} \quad \models \alpha_i \to \varphi \quad \implies \quad \models \varphi$$

Es wurde damit gezeigt, dass es sich bei φ wieder um eine gültige Formel handelt.

Die Induktion zeigt, dass jede Formel φ, für welche eine Herleitung im Mendelson-Kalkül existiert, auch gültig ist. Das Mendelson-Kalkül ist damit korrekt.

$$\mathrel{|}\!\underline{\;\;}_{\text{Men}}\; \varphi \quad \implies \quad \models \varphi$$

Für die Vollständigkeit des Mendelson-Kalküls verwenden wir den Vollständigkeitssatz des Frege-Kalküls. Dafür beweisen wir zunächst, dass jede Frege-beweisbare Formel φ auch Mendelson-beweisbar ist, indem wir eine Induktion über die Länge der Herleitung von φ im Frege-Kalkül durchführen.

$$\vdash_{\text{Fre}} \varphi \implies \vdash_{\text{Men}} \varphi$$

Induktionsanfang: Handelt es sich bei φ um eine Formel, für die eine Herleitung im Frege-Kalkül mit einem einzigen Schritt existiert, so muss es sich bei φ um ein Axiom des Frege-Kalküls handeln. Offensichtlich sind die ersten beiden Axiome des Frege-Kalküls Mendelson-beweisbar durch die ersten beiden Axiome des Mendelson-Kalküls, da diese gleich sind. Im Folgenden sei α eine beliebige Formel. Der noch zu betrachtende Fall lautet $\varphi = \mathrm{F3}(\alpha)$. Die Mendelson-Beweisbarkeit von φ lässt sich in diesem Falle durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\bot \to \bot$	$\mathrm{ID}(\bot)$
(2)	$(\alpha \to \bot) \to (\bot \to \bot)$	$\mathrm{TT}((1), \alpha \to \bot)$
(3)	$(\neg\alpha \to \neg\bot)$ $\to ((\neg\alpha \to \bot) \to \alpha)$	$\mathrm{M3}(\bot, \alpha)$
(4)	$\neg\alpha \to \neg\bot$	(2) $\neg\alpha = \alpha \to \bot$, $\neg\bot = \bot \to \bot$
(5)	$((\neg\alpha \to \bot) \to \alpha)$	$\mathrm{MP}((4), (3))$
(6)	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	$(5), \neg\neg\alpha = \neg\alpha \to \bot$

Damit ist jede Frege-beweisbare Formel φ mit einer Herleitung im Frege-Kalkül der Länge Eins auch Mendelson-beweisbar.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Frege-beweisbare Formel φ mit einer Herleitung im Frege-Kalkül der Länge kleiner gleich n ist auch Mendelson-beweisbar.

Induktionsschluss: Es sei nun φ eine Frege-beweisbare Formel mit Herleitung $(\alpha_k)_{\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n+1\}}$ im Frege-Kalkül der Länge $n + 1$.

Fall α_{n+1} ist ein Axiom: Handelt es sich bei α_{n+1} um ein Axiom, so ist aus dem Induktionsanfang ersichtlich, dass es sich bei $\varphi = \alpha_{n+1}$ auch um eine Mendelson-beweisbare Formel handeln muss.

Fall α_{n+1} ist kein Axiom: Handelt es sich bei α_{n+1} nicht um ein Axiom, so kann $\varphi = \alpha_{n+1}$ nur aus der Schlussregel $\mathrm{MP}(\alpha_i, \alpha_j)$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq n$ entstehen, wobei $\alpha_j = \alpha_i \to \varphi$ gilt. Nach der Induktionsvoraussetzung handelt es sich bei α_i und α_j aber auch um Mendelson-beweisbare Formeln, da für sie Herleitungen im Frege-Kalkül der Länge i beziehungsweise j existieren. Nach $\mathrm{MP}(\alpha_i, \alpha_j)$ im Mendelson-Kalkül ist auch φ Mendelson-beweisbar. Es wurde damit gezeigt, dass es sich bei φ wieder um eine Mendelson-beweisbare Formel handelt.

Die Induktion zeigt, dass jede Frege-beweisbare Formel φ auch Mendelson-beweisbar ist.

$$\vdash_{\text{Fre}} \varphi \implies \vdash_{\text{Men}} \varphi$$

Der Vollständigkeitssatz des Frege-Kalküls besagt das Folgende für beliebige Formeln φ.

$$\vdash_{\text{Fre}} \varphi \iff \models \varphi$$

Demzufolge ist jede gültige Formel φ auch Mendelson-beweisbar. Damit ist das Mendelson-Kalkül vollständig.

$$\models \varphi \implies \vdash_{\text{Men}} \varphi$$

Durch die Anwendung der zuvor gezeigten Korrektheit des Mendelson-Kalküls ist die folgende Aussage für beliebige Formeln φ ersichtlich.

$$\models \varphi \iff \vdash_{\text{Men}} \varphi$$

Der Vollständigkeitssatz gilt demnach auch für das Mendelson-Kalkül. $\square$