Friedrich-Schiller-Universität Jena
Institut für Informatik
Martin Mundhenk
Stephan Fischer

Aufgaben zum 09. November 2017

(Abgabe bis zum Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 5: Äquivalenzbeweise

Beweisen Sie die deMorganschen Äquivalenzen und die Axiome des Frege-Kalküls für beliebige Formeln α, β und φ:

1. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
2. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
3. $\models \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
4. $\models (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi))$
5. $\models \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

Aufgabe 6: Adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen I

Wir erweitern die Aussagenlogik um ein Verknüpfungszeichen, das der Negation der Implikation entspricht. Die Syntax erweitern wir, indem wir definieren, dass für alle Formeln α und β auch $(\alpha \not\rightarrow \beta)$ eine Formel ist. Die Semantik definieren wir für eine Belegung $\mathcal{B}$ und Formeln α und β wie folgt:

$$\mathcal{B} \models \alpha \not\rightarrow \beta \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \alpha \text{ und } \mathcal{B} \not\models \beta$$

Beweisen Sie: $\{\not\rightarrow, \top\}$ ist adäquat.

Aufgabe 7: Adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen II

Beweisen Sie: $\{ite, \neg\}$ ist adäquat.

Aufgabe 8: Nicht adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen I

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. Für jede Formel α aus Atomen, $\wedge$ und $\vee$ gilt $\emptyset \not\models \alpha$.
2. $\{\wedge, \vee\}$ ist nicht adäquat. (Dafür kann man die erste Aussage gut verwenden.)

Aufgabe 9: Nicht adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen II

Beweisen Sie: $\{ite\}$ ist nicht adäquat.

Aufgabe 10: Formelgröße

Die Funktion Tf bildet jede Formel auf die Menge ihrer Teilformeln ab. Sie ist wie folgt induktiv definiert.

$$\mathrm{Tf}(\varphi) := \begin{cases} \{\varphi\}, & \text{falls } \varphi \text{ eine atomare Formel, } \bot \text{ oder } \top \text{ ist} \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Tf}(\alpha) \cup \mathrm{Tf}(\beta), & \text{falls } \varphi = (\alpha \wedge \beta),\ \varphi = (\alpha \vee \beta) \text{ oder } \varphi = (\alpha \rightarrow \beta) \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Tf}(\alpha), & \text{falls } \varphi = \neg\alpha \end{cases}$$

1. Finden Sie eine entsprechende induktive Definition für eine Funktion L, die die Länge aussagenlogischer Formeln angibt. Atomare Formeln und Konstanten können dabei die Länge 1 haben.

2. Beweisen Sie: für alle aussagenlogischen Formeln φ gilt $|\mathrm{Tf}(\varphi)| \leq 2 \cdot L(\varphi)$.

3. Gilt auch $L(\varphi) \leq |\mathrm{Tf}(\varphi)|$? Wie lässt sich eine untere Schranke von $|\mathrm{Tf}(\varphi)|$ durch $L(\varphi)$ abschätzen?

Lösen Sie zwei der Aufgaben ordentlich. Schreiben Sie Ihre Konstruktionen und Beweise so auf, dass sie gut lesbar und leicht nachvollziehbar sind. Bei einem Induktionsbeweis ist es häufig hilfreich, sich (und dem Korrekteur) klar zu machen, was in den einzelnen Schritten zu beweisen ist.
Falls Sie Fragen haben, dann fragen Sie mich (z.B. in der Sprechstunde oder n.V.)!