

Aufgaben zum 02. November 2017

(Abgabe bis zum Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 1: aussagenlogische Äquivalenz

Wir wollen die Aussagenlogik um ein Verknüpfungszeichen erweitern, das die umgangssprachliche Äquivalenz modelliert. Die Syntax erweitern wir, indem wir definieren, dass für alle Formeln α und β auch $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ eine Formel ist. Überlegen Sie sich, wie die Semantik für dieses Verknüpfungszeichen definiert werden muss. Geben Sie dann an, ob die folgenden Formeln gültig, erfüllbar und nicht gültig, oder unerfüllbar sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

- | | |
|--|--|
| (a) $A_0 \leftrightarrow A_0$ | (b) $A_0 \leftrightarrow (\neg A_0)$ |
| (c) $(A_0 \wedge A_1) \leftrightarrow A_0$ | (d) $(A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0$ |

Aufgabe 2: ein dreistelliges Verknüpfungszeichen

Wir erweitern die Aussagenlogik um ein Verknüpfungszeichen, das drei Formeln miteinander verknüpft. Es soll das programmiersprachliche Konstrukt `if-then-else` modellieren. Die Syntax erweitern wir, indem wir definieren, dass für alle Formeln α , β und γ auch $ite(\alpha, \beta, \gamma)$ eine Formel ist. Die Semantik definieren wir für eine Belegung \mathcal{B} und Formeln α , β und γ wie folgt:

$$\mathcal{B} \models ite(\alpha, \beta, \gamma) \text{ gdw. } \mathcal{B} \models \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models \beta, \text{ oder } \\ \mathcal{B} \not\models \alpha \text{ und } \mathcal{B} \models \gamma$$

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln gültig, erfüllbar und nicht gültig, oder unerfüllbar sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

- | | |
|--|---|
| (a) $ite(A_0, A_0 \vee A_1, A_0 \rightarrow A_2)$ | (b) $ite(\neg A_0, A_0 \rightarrow A_1, A_0 \vee A_2)$ |
| (c) $ite(A_0 \wedge A_1, A_0 \rightarrow \neg A_1, A_0 \wedge A_1)$ | (d) $ite(A_0 \vee A_1, A_0 \rightarrow \neg A_1, A_0 \wedge A_1)$ |
| (e) $(A_1 \vee A_2) \rightarrow ite(A_0 \wedge (\neg A_1), \neg A_2, A_2 \rightarrow A_0)$ | |

Aufgabe 3: gültig, erfüllbar, unerfüllbar

Geben Sie an, ob die folgenden Formeln gültig, erfüllbar und nicht gültig, oder unerfüllbar sind und begründen Sie Ihre Aussagen. Falls im Allgemeinen keine Aussage darüber getroffen werden kann, begründen Sie auch dies.

1. Welche Aussagen können getroffen werden, wenn α und β erfüllbar sind?
 - (a) $\alpha \wedge \beta$
 - (b) $\alpha \vee \beta$
 - (c) $\alpha \rightarrow \beta$
 - (d) $\neg\alpha$
2. Welche Aussagen können getroffen werden, wenn α erfüllbar und β unerfüllbar ist?
 - (a) $\alpha \wedge \beta$
 - (b) $\alpha \vee \beta$
 - (c) $\alpha \rightarrow \beta$
 - (d) $\beta \rightarrow \alpha$
3. Welche Aussagen können getroffen werden, wenn α nicht gültig und β erfüllbar ist?
 - (a) $\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$
 - (b) α
 - (c) $\neg\alpha$
 - (d) $\neg\alpha \rightarrow \beta$
4. Welche Aussage kann für β getroffen werden, wenn α und $\alpha \rightarrow \beta$ gültig sind?

Aufgabe 4: Semantische Folgerung und Implikation

Beweisen Sie: für alle Formeln α und φ gilt: $\alpha \models \varphi$ gdw. $\alpha \rightarrow \varphi$ gültig ist.

Lösen Sie drei der Aufgaben ordentlich. Schreiben Sie Ihre Konstruktionen und Beweise so auf, dass sie gut lesbar und leicht nachvollziehbar sind.

Falls Sie Fragen haben (z.B. weil Sie bei Ihrer Lösung nicht weiterkommen oder Zweifel an Ihrer Lösungsidee haben), dann fragen Sie mich (z.B. in der Sprechstunde oder n.V.)!