LOGIKSYSTEME
ÜBUNGSSERIE 8: LÖSUNGEN

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

7. März 2018

Im Folgenden seien α, β und γ drei beliebige modallogische Formeln. Wir definieren zunächst die Axiome des Frege-Kalküls in der Modallogik.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F1}(\alpha,\beta) &:= \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma) &:= (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \\
&\qquad \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\mathrm{F3}(\alpha) &:= \neg\neg\alpha \to \alpha \\
\mathrm{K}(\alpha,\beta) &:= \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)
\end{aligned}
$$

Die Schlussregeln des modallogischen Frege-Kalküls sind »Modus Ponens« und »Generalisierung« und wie folgt definiert.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MP}(\alpha,\alpha\to\beta) &:= \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta} \\
\mathrm{GEN}(\alpha) &:= \frac{\alpha}{\Box\alpha}
\end{aligned}
$$

Aus der Vorlesung sind zudem einige weitere Frege-Theoreme bekannt, die sich vollkommen analog zu den bereits definierten Axiomen verhalten und sich aufgrund ihrer Herleitung auch auf modallogische Formeln anwenden lassen. Für die aufgelisteten Frege-Beweise verwenden wir die im Folgenden definierten Theoreme.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ID}(\alpha) &:= \alpha \to \alpha \\
\mathrm{XX}(\alpha,\beta) &:= (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta) \\
\mathrm{NN}(\alpha) &:= \alpha \to \neg\neg\alpha \\
\mathrm{EFQL}(\alpha) &:= \bot \to \alpha \\
\mathrm{D}(\alpha,\beta) &:= \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \\
\mathrm{IM}(\alpha,\beta) &:= (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha) \\
\mathrm{IM2}(\alpha,\beta) &:= (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha) \\
\mathrm{E}(\alpha,\beta) &:= \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)) \\
\mathrm{MNN}(\alpha) &:= \neg\neg\Box\alpha \to \Box\neg\neg\alpha
\end{aligned}
$$

Zudem erweist es sich als ausgesprochen praktisch weitere Schlussregeln zu beweisen, die die eigentlichen Beweise verkürzen und zudem auch übersichtlicher und verständlicher gestalten.

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TT}(\alpha,\beta) := \frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$$

Beweis:

(1)	α	Hypothese
(2)	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$\mathrm{F1}(\alpha,\beta)$
(3)	$\beta \to \alpha$	$\mathrm{MP}((1),(2))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TRANS}(\alpha\to\beta,\beta\to\gamma) := \frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Beweis:

(1)	$\alpha \to \beta$	Hypothese
(2)	$\beta \to \gamma$	Hypothese
(3)	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$\mathrm{TT}((2),\alpha)$
(4)	$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	$\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma)$
(5)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$\mathrm{MP}((3),(4))$
(6)	$\alpha \to \gamma$	$\mathrm{MP}((1),(5))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Aufgabe 30

Im Folgenden seien α und β zwei beliebige modallogische Formeln. Die gezeigten Beweise stellen keine Anforderungen an α oder β.

(1): Die modallogische Frege-Beweisbarkeit können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	$\mathrm{F3}(\alpha)$
(2)	$\Box(\neg\neg\alpha \to \alpha) \to (\Box\neg\neg\alpha \to \Box\alpha)$	$\mathrm{K}(\neg\neg\alpha,\alpha)$
(3)	$\Box(\neg\neg\alpha \to \alpha)$	$\mathrm{GEN}((1))$
(4)	$\Box\neg\neg\alpha \to \Box\alpha$	$\mathrm{MP}((3),(2))$
(5)	$\Box\alpha \to \neg\neg\Box\alpha$	$\mathrm{NN}(\Box\alpha)$
(6)	$\Box\neg\neg\alpha \to \neg\neg\Box\alpha$	$\mathrm{TRANS}((4),(5))$

Es gilt damit $\vdash_{\Box\mathrm{Fre}} \Box\neg\neg\alpha \to \neg\neg\Box\alpha$. □

(2): Die modallogische Frege-Beweisbarkeit können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$	$\mathrm{D}(\alpha, \beta)$
(2)	$\Box(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$ $\to (\Box\alpha \to \Box((\alpha \to \beta) \to \beta))$	$\mathrm{K}((1))$
(3)	$\Box(\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta))$	$\mathrm{GEN}((1))$
(4)	$\Box\alpha \to \Box((\alpha \to \beta) \to \beta)$	$\mathrm{MP}((3), (2))$
(5)	$\Box((\alpha \to \beta) \to \beta)$ $\to (\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\beta)$	$\mathrm{K}(\alpha \to \beta, \beta)$
(6)	$\Box\alpha \to (\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\beta)$	$\mathrm{TRANS}((4), (5))$

Es gilt damit $\mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box\alpha \to (\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\beta)$. □

(3): Der Einfachheit halber soll die folgende Hypothesenmenge definiert werden.

$$\Gamma := \{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha, \neg\Box\beta\}$$

Die modallogische Frege-Beweisbarkeit können wir dann durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box(\alpha \to \beta)$	$\in \Gamma$
(2)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box\alpha$	$\in \Gamma$
(3)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box\beta \to \bot$	$\in \Gamma$
(4)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box(\alpha \to \beta)$ $\to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	$\mathrm{K}(\alpha, \beta)$
(5)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathrm{MP}((1), (4))$
(6)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Box\beta$	$\mathrm{MP}((2), (5))$
(7)	$\Gamma \mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \bot$	$\mathrm{MP}((6), (3))$

Die gewünschte Aussage ist damit gezeigt. □

(4): Die modallogische Frege-Beweisbarkeit können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen. Hierbei verwenden die in Abschnitt 5 bewiesene Formel.

(1)	$\alpha \to \alpha$	$\mathrm{ID}(\alpha)$
(2)	$\top \to (\alpha \to \alpha)$	$\mathrm{TT}((1), \top)$
(3)	$(\top \to (\alpha \to \alpha))$ $\to (\neg(\alpha \to \alpha) \to \neg\top)$	$\mathrm{IM}(\top, (1))$
(4)	$\neg(\alpha \to \alpha) \to \neg\top$	$\mathrm{MP}((2), (3))$
(5)	$\Box(\neg(\alpha \to \alpha) \to \neg\top)$	$\mathrm{GEN}((4))$
(6)	$\Box(\neg(\alpha \to \alpha) \to \neg\top)$ $\to (\Box\neg(\alpha \to \alpha)) \to \Box\neg\top)$	$\mathrm{K}((4))$
(7)	$\Box\neg(\alpha \to \alpha)) \to \Box\neg\top$	$\mathrm{MP}((5), (6))$
(8)	$(\Box\neg(\alpha \to \alpha)) \to \Box\neg\top)$ $\to (\neg\Box\neg\top \to \neg\Box\neg(\alpha \to \alpha))$	$\mathrm{IM}((7))$
(9)	$\neg\Box\neg\top \to \neg\Box\neg(\alpha \to \alpha)$	$\mathrm{MP}((7), (8))$
(10)	$\Diamond\top \to \Diamond(\alpha \to \alpha)$	$(9), \Diamond = \neg\Box\neg$
(11)	$\Diamond(\alpha \to \alpha)$ $\to (\Box\alpha \to \Diamond\alpha)$	Teilaufgabe 5
(12)	$\Diamond\top \to (\Box\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathrm{TRANS}((10), (11))$

Es gilt damit $\mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Diamond\top \to (\Box\alpha \to \Diamond\alpha)$. □

(5): Die modallogische Frege-Beweisbarkeit können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$	$\mathrm{E}(\alpha, \beta)$
(2)	$\Box(\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)))$	$\mathrm{GEN}((1))$
(3)	$\Box(\alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)))$ $\to (\Box\alpha \to \Box(\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)))$	$\mathrm{K}((1))$
(4)	$\Box\alpha \to \Box(\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$	$\mathrm{MP}((2), (3))$
(5)	$\Box(\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta))$ $\to (\Box\neg\beta \to \Box\neg(\alpha \to \beta))$	$\mathrm{K}(\neg\beta, \neg(\alpha \to \beta))$
(6)	$\Box\alpha \to (\Box\neg\beta \to \Box\neg(\alpha \to \beta))$	$\mathrm{TRANS}((4), (5))$
(7)	$(\Box\neg\beta \to \Box\neg(\alpha \to \beta))$ $\to (\neg\Box\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\Box\neg\beta)$	$\mathrm{IM}(\Box\neg\beta,$ $\Box\neg(\alpha \to \beta))$
(8)	$\Box\alpha \to (\Diamond(\alpha \to \beta) \to \Diamond\beta)$	$\mathrm{TRANS}((6), (7)),$ $\Diamond = \neg\Box\neg$
(9)	$(\Box\alpha \to (\Diamond(\alpha \to \beta) \to \Diamond\beta))$ $\to ((\Box\alpha \to \Diamond(\alpha \to \beta))$ $\to (\Box\alpha \to \Diamond\beta))$	$\mathrm{F2}((8))$
(10)	$(\Box\alpha \to \Diamond(\alpha \to \beta))$ $\to (\Box\alpha \to \Diamond\beta)$	$\mathrm{MP}((8), (9))$
(11)	$\Diamond(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Diamond(\alpha \to \beta))$	$\mathrm{F1}(\Diamond(\alpha \to \beta), \Box\alpha)$
(12)	$\Diamond(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Diamond\beta)$	$\mathrm{TRANS}((11), (10))$

Es gilt damit $\mid\!\frac{}{\Box\mathrm{Fre}}\ \Diamond(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Diamond\beta)$. □

Aufgabe 31

Für das Frege-Kalkül der Modallogik T fügen wir ein weiteres Axiom zu dem bekannten modallogischen Frege-Kalkül hinzu.

$$T(\alpha) := \alpha \to \neg\Box\neg\alpha$$

(1): Für die gewünschte Aussage sei der folgende direkte Beweis gegeben.

(1)	$\neg A \to \neg\Box\neg\neg A$	$\mathrm{T}(\neg A)$
(2)	$(\neg A \to \neg\Box\neg\neg A)$ $\to (\Box\neg\neg A \to A)$	$\mathrm{IM2}(A, \Box\neg\neg A)$
(3)	$\Box\neg\neg A \to A$	$\mathrm{MP}((1), (2))$
(4)	$\neg\neg\Box A \to \Box\neg\neg A$	$\mathrm{MNN}(A)$
(5)	$\neg\neg\Box A \to A$	$\mathrm{TRANS}((4), (3))$
(6)	$\Box A \to \neg\neg\Box A$	$\mathrm{NN}(\Box A)$
(7)	$\Box A \to A$	$\mathrm{TRANS}((6), (5))$

Es gilt damit $\mid\!\frac{}{\mathrm{T}}\ \Box A \to A$. □

(2): Wir wollen nun die Korrektheit des T-Frege-Kalküls durch eine vollständige Induktion zeigen. Hierzu verwenden wir das bereits bewiesene Korrektheitslemma des modallogischen Frege-Kalküls. Der hauptsächliche Unterschied besteht in der Existenz eines zusätzlichen Axioms. Dessen Gültigkeit wird im Induktionsanfang bewiesen.

Induktionsanfang: Es sei α eine modallogische Formel, für die $\vdash_{\mathrm{T}} \alpha$ gilt und ein T-Frege-Beweis mit der Länge Eins existiert. In diesem Fall kann es sich bei α nur um ein Axiom des T-Frege-Kalküls handeln.

Die Gültigkeit der ersten vier Axiome wurde bereits im Korrektheitslemma des modallogischen Frege-Kalküls gezeigt. Aus dieser Gültigkeit folgt auch unmittelbar die Erfüllung für alle reflexiven Kripke-Modelle und damit deren T-Gültigkeit. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{T}(\varphi)$ für alle modallogischen Formeln φ T-gültig ist.

Es seien eine beliebiges reflexives Kripke-Modell $M = (W, R, \xi)$ und eine beliebige Welt $w \in W$ gegeben. In diesem Falle gilt die folgende Äquivalenz.

$$\begin{aligned} & M, w \models_K \varphi \to \neg\Box\neg\varphi \\ \iff \quad & M, w \not\models_K \varphi \quad \text{oder} \quad M, w \not\models_K \Box\neg\varphi \\ \iff \quad & M, w \not\models_K \varphi \quad \text{oder} \\ & \exists t \in W\colon (w,t) \in R \quad \text{und} \quad M, t \models_K \varphi \end{aligned}$$

Fall $M, w \not\models_K \varphi$:

$$\iff \quad \text{wahr}$$

Fall $M, w \models_K \varphi$: Aufgrund der Reflexivität von M gilt zudem $(w, w) \in R$.

$$\begin{aligned} \iff \quad & \exists t \in W\colon (w,t) \in R \quad \text{und} \quad M, t \models_K \varphi \\ \overset{\text{(Reflexivität)}}{\iff} \quad & \text{wahr} \end{aligned}$$

Das Axiom $T(\varphi)$ ist damit für alle modallogischen Formeln φ gültig.

Induktionsvoraussetzung: Es seien nun $n \in \mathbb{N}$ und α eine modallogische Formel mit $\vdash_{\mathrm{T}} \alpha$ und einem T-Frege-Beweis mit der Länge kleiner gleich n. In diesem Falle ist α T-gültig.

Induktionsschritt: Es sei α eine modallogische Formel mit $\vdash_{\mathrm{T}} \alpha$ und einem T-Frege-Beweis $(\alpha_k)_{\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n+1\}}$ der Länge $n+1$. Handelt es sich bei $\alpha = \alpha_{n+1}$ um ein Axiom des T-Frege-Kalküls, so ist α nach der Betrachtung im Induktionsanfang auch T-gültig. Andernfalls kann α_{n+1} nur aus den Schlussregeln $\mathrm{MP}(\alpha_i, \alpha_j)$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq n$ und $\alpha_j = \alpha_i \to \alpha_{n+1}$ oder $\mathrm{GEN}(\alpha_k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$ und $\alpha_{n+1} = \Box\alpha_k$ entstehen. Für beide Fälle wurde bereits im Korrektheitslemma des Frege-Kalküls für modallogische Formeln die Gültigkeit der Formel α_{n+1} gezeigt. Demzufolge muss $\alpha = \alpha_{n+1}$ ebenfalls eine T-gültige Formel sein.

Die ausgeführte vollständige Induktion zeigt die Korrektheit des T-Frege-Kalküls in Bezug auf die Modallogik T. Es gilt für alle modallogischen Formeln φ das Folgende.

$$\vdash_{\mathrm{T}} \varphi \quad \implies \quad \models_r \varphi$$

Die Aussage wurde damit gezeigt. $\Box$