Logiksysteme
Übungsserie 4: Lösungen

Markus Pawellek markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 17

Im Folgenden seien α, β und γ drei beliebige Formeln. Wir definieren zunächst die Axiome des Frege-Kalküls.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F1}(\alpha,\beta) &\coloneqq \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma) &\coloneqq (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \\
&\quad \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \\
\mathrm{F3}(\alpha) &\coloneqq \neg\neg\alpha \to \alpha
\end{aligned}$$

Die einzige definierte Schlussregel im Frege-Kalkül ist »Modus Ponens« und wie folgt definiert.

$$\mathrm{MP}(\alpha, \alpha \to \beta) \coloneqq \frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}$$

Aus der Vorlesung sind zudem einige weitere Frege-Theoreme bekannt, die sich vollkommen analog zu den bereits definierten Axiomen verhalten. Für die aufgelisteten Frege-Beweise verwenden wir die im Folgenden definierten Theoreme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ID}(\alpha) &\coloneqq \alpha \to \alpha \\
\mathrm{XX}(\alpha,\beta) &\coloneqq (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta) \\
\mathrm{NN}(\alpha) &\coloneqq \alpha \to \neg\neg\alpha \\
\mathrm{EFQL}(\alpha) &\coloneqq \bot \to \alpha
\end{aligned}$$

Zudem erweist es sich als ausgesprochen praktisch weitere Schlussregeln zu beweisen, die die eigentlichen Beweise verkürzen und zudem auch übersichtlicher und verständlicher gestalten.

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TT}(\alpha,\beta) \coloneqq \frac{\alpha}{\beta \to \alpha}$$

Beweis:

(1)	α	Hypothese
(2)	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$\mathrm{F1}(\alpha,\beta)$
(3)	$\beta \to \alpha$	$\mathrm{MP}((1),(2))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Lemma: Im Frege-Kalkül gilt die folgende Schlussregel.

$$\mathrm{TRANS}(\alpha \to \beta, \beta \to \gamma) \coloneqq \frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$$

Beweis:

(1)	$\alpha \to \beta$	Hypothese
(2)	$\beta \to \gamma$	Hypothese
(3)	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$\mathrm{TT}((2),\alpha)$
(4)	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ $\to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	$\mathrm{F2}(\alpha,\beta,\gamma)$
(5)	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$\mathrm{MP}((3),(4))$
(6)	$\alpha \to \gamma$	$\mathrm{MP}((1),(5))$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

(1): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$B \to (A \to B)$	$\mathrm{F1}(B,A)$
(2)	$(B \to (A \to B))$ $\to (A \to (B \to (A \to B)))$	$\mathrm{F1}((1),A)$
(3)	$A \to (B \to (A \to B))$	$\mathrm{MP}((1),(2))$

Es gilt damit $\vdash_{\mathrm{Fre}} A \to (B \to (A \to B))$. □

(2): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$A \to (B \to A)$	$\mathrm{F1}(A,B)$
(2)	$(B \to A) \to (B \to (B \to A))$	$\mathrm{F1}(B \to A, B)$
(3)	$A \to (B \to (B \to A))$	$\mathrm{TRANS}((1),(2))$

Es gilt damit $\vdash_{\mathrm{Fre}} A \to (B \to (B \to A))$. □

(3): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$A \to A$	$\mathrm{ID}(A)$
(2)	$(A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A)$	$\mathrm{XX}(A,A)$
(3)	$(\neg A \to A) \to A$	$\mathrm{MP}((1),(2))$

Es gilt damit $\vdash_{\mathrm{Fre}} (\neg A \to A) \to A$. □

(4): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$\mathrm{NN}(\alpha)$
(2)	$\alpha \to ((\alpha \to \perp) \to \perp)$	$(1), \neg\alpha = \alpha \to \perp$
(3)	$(\alpha \to ((\alpha \to \perp) \to \perp)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \perp)) \to (\alpha \to \perp))$	$\mathrm{F2}(\alpha, \alpha \to \perp, \perp)$
(4)	$(\alpha \to (\alpha \to \perp)) \to (\alpha \to \perp)$	$\mathrm{MP}((2),(3))$
(5)	$= (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$	$(4), \neg\alpha = \alpha \to \perp$

Es gilt damit $\vdash_{\mathrm{Fre}} (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$. □

(5): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\perp \to \beta$	$\mathrm{EFQL}(\beta)$
(2)	$(\alpha \to \perp) \to (\perp \to \beta)$	$\mathrm{TT}((1), \alpha \to \perp)$
(3)	$((\alpha \to \perp) \to (\perp \to \beta)) \to (((\alpha \to \perp) \to \perp) \to ((\alpha \to \perp) \to \beta))$	$\mathrm{F2}(\alpha \to \perp, \perp, \beta)$
(4)	$((\alpha \to \perp) \to \perp) \to ((\alpha \to \perp) \to \beta)$	$\mathrm{MP}((2),(3))$
(5)	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$\mathrm{NN}(\alpha)$
(6)	$\alpha \to ((\alpha \to \perp) \to \perp)$	$(5), \neg\alpha = \alpha \to \perp$
(7)	$\alpha \to ((\alpha \to \perp) \to \beta)$	$\mathrm{TRANS}((6),(4))$
(8)	$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$	$(7), \neg\alpha = \alpha \to \perp$

Es gilt damit $\vdash_{\mathrm{Fre}} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$. □

(6): Es sei $\Gamma := \{A \to (B \to C), A \to B\}$ eine Menge von Hypothesen. In diesem Falle kann der folgende Beweis notiert werden.

(1)	$A \to (B \to C)$	$\in \Gamma$
(2)	$A \to B$	$\in \Gamma$
(3)	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	$\mathrm{F2}(A, B, C)$
(4)	$(A \to B) \to (A \to C)$	$\mathrm{MP}((1),(3))$
(5)	$A \to C$	$\mathrm{MP}((2),(4))$

Es gilt damit $\Gamma \vdash_{\mathrm{Fre}} A \to C$. □

(7): Für die gegebene Formel eignet sich die Anwendung des Deduktionstheorems (DT). Im Folgenden soll also allgemeiner die Beweisbarkeit der Formel betrachtet werden. Der Übersicht halber definieren wir zunächst eine Menge von Hypothesen $\Gamma := \{\alpha \to (\beta \to \gamma)\}$.

(1)	$\vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to (\alpha \to \beta)$	$\mathrm{F1}(\beta, \alpha)$
(2)	$\vdash_{\mathrm{Fre}} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	$\mathrm{F2}(\alpha, \beta, \gamma)$
(3)	$\Gamma \vdash_{\mathrm{Fre}} (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$\mathrm{DT}((2))$
(4)	$\Gamma \vdash_{\mathrm{Fre}} \beta \to (\alpha \to \gamma)$	$\mathrm{TRANS}((1),(3))$
(5)	$\vdash_{\mathrm{Fre}} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$	$\mathrm{DT}((4))$

Formel (5) ist damit Frege-beweisbar. □

(8): Die Frege-Beweisbarkeit der gegebenen Formel können wir durch den folgenden direkten Beweis zeigen.

(1)	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	$\mathrm{NN}(\alpha)$
(2)	$\beta \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)$	$\mathrm{TT}((1), \beta)$
(3)	$(\beta \to (\alpha \to \neg\neg\alpha)) \to ((\beta \to \alpha) \to (\beta \to \neg\neg\alpha))$	$\mathrm{F2}(\beta, \alpha, \neg\neg\alpha)$
(4)	$(\beta \to \alpha) \to (\beta \to \neg\neg\alpha)$	$\mathrm{MP}((2),(3))$
(5)	$(\beta \to (\neg\alpha \to \perp)) \to ((\beta \to \neg\alpha) \to (\beta \to \perp))$	$\mathrm{F2}(\beta, \neg\alpha, \perp)$
(6)	$(\beta \to \neg\neg\alpha) \to ((\beta \to \neg\alpha) \to \neg\beta)$	$\neg\alpha = \alpha \to \perp$, $\neg\beta = \beta \to \perp$
(7)	$(\beta \to \alpha) \to ((\beta \to \neg\alpha) \to \neg\beta)$	$\mathrm{TRANS}((4),(6))$

Formel (7) ist damit Frege-beweisbar. □

Aufgabe 18

Es seien Γ eine Menge von Formeln, α und β beliebige Formeln, $\Gamma \Vert\!\models \alpha$ und $\Gamma \Vert\!\models \alpha \to \beta$. Dann gilt nach Definition für alle Belegungen $\mathcal{B}$ das Folgende.

$$\mathcal{B} \models \Gamma \implies \mathcal{B} \models \alpha$$

$$\mathcal{B} \models \Gamma \implies \mathcal{B} \models \alpha \to \beta$$

Es sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung mit $\mathcal{B} \models \Gamma$. Dann gilt automatisch $\mathcal{B} \models \alpha$ und $\mathcal{B} \models \alpha \to \beta$. Um nun zu zeigen, dass auch $\mathcal{B} \models \beta$ wahr ist, kann die folgende Äquivalenzkette verwendet werden.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\alpha \to \beta) &\equiv \alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \\ &\equiv (\alpha \wedge \neg\alpha) \vee (\alpha \wedge \beta) \\ &\equiv \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

Dieses Resultat verwenden wir nun wie folgt.

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \models \alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \models \alpha \to \beta \\ \iff\ &\mathcal{B} \models \alpha \wedge (\alpha \to \beta) \\ \iff\ &\mathcal{B} \models \alpha \wedge \beta \\ \iff\ &\mathcal{B} \models \alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \models \beta \end{aligned}$$

Da die erste Aussage dieser Äquivalenzkette als wahr gegeben ist, muss demnach auch die letzte Aussage wahr sein. Es muss also $\mathcal{B} \models \beta$ gelten. Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, schließen wir für alle Belegungen $\mathcal{B}$ das Folgende.

$$\mathcal{B} \models \Gamma \implies \mathcal{B} \models \beta$$

Nach Definition ist damit $\Gamma \Vert\!\models \beta$ erfüllt. Dieser Beweis wurde unter den Bedingungen $\Gamma \Vert\!\models \alpha$ und $\Gamma \Vert\!\models \alpha \to \beta$ ausgeführt. Im Allgemeinen gilt demzufolge die gewünschte Aussage.

$$\Gamma \Vert\!\models \alpha \quad \text{und} \quad \Gamma \Vert\!\models \alpha \to \beta \implies \Gamma \Vert\!\models \beta$$

Die Aussage wurde damit bewiesen. $\square$