Friedrich-Schiller-Universität Jena
Institut für Informatik
Martin Mundhenk
Stephan Fischer

Aufgaben zum 07. Dezember 2017

(Abgabe bis zum Beginn der Vorlesung)

Definition: Für eine Formel α und eine Belegung $\mathcal{A}$ ist $\hat{\mathcal{A}}_\alpha = \mathcal{A} \cup \{\neg A_i \mid A_i \notin \mathcal{A} \text{ und } A_i \text{ kommt in } \alpha \text{ vor}\}$. Man nennt $\hat{\mathcal{A}}_\alpha$ auch *erweiterte Belegung*, da sie aus allen von $\mathcal{A}$ erfüllten Literalen besteht.

Aufgabe 19: Alternativer Vollständigkeitsbeweis, Teil 1

1. Sei $\mathcal{S}$ eine Formelmenge, β und γ seien Formeln. Zeigen Sie:

   (a) Wenn $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \gamma$, dann $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta \to \gamma$.

   (b) Wenn $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg\beta$, dann $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta \to \gamma$.

   (c) Wenn $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \beta$ und $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg\gamma$, dann $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \neg(\beta \to \gamma)$.

2. Sei α eine Formel und $\mathcal{A}$ eine Belegung. Zeigen Sie mittels Induktion über den Formelaufbau:

   (a) Wenn $\mathcal{A} \models \alpha$, dann $\hat{\mathcal{A}}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \alpha$, und (b) wenn $\mathcal{A} \not\models \alpha$, dann $\hat{\mathcal{A}}_\alpha \vdash_{\text{Fre}} \neg\alpha$.

   Im Induktionsschritt kann man den ersten Teil der Aufgabe gut verwenden.

Aufgabe 20: Alternativer Vollständigkeitsbeweis, Teil 2

1. Sei α eine Formel, $\mathcal{S}$ eine Formelmenge und $A_i, \neg A_i \notin \mathcal{S}$.

   Zeigen Sie: wenn $\mathcal{S}, A_i \vdash_{\text{Fre}} \alpha$ und $\mathcal{S}, \neg A_i \vdash_{\text{Fre}} \alpha$, dann $\mathcal{S} \vdash_{\text{Fre}} \alpha$.

2. Sei α eine gültige Formel mit k Atomen $A_0, \ldots, A_{k-1}$.

   Zeigen Sie mittels Induktion über $|\mathcal{A}|$: für jedes $\mathcal{A} \subseteq \{A_0, \neg A_0, A_1, \neg A_1, \ldots, A_{k-1}, \neg A_{k-1}\}$ gilt $\mathcal{A} \vdash_{\text{Fre}} \alpha$.

   Hier können Sie die Aussage aus Aufgabe 19.2 und den ersten Teil der Aufgabe gut verwenden.

3. Folgern Sie "wenn $\models \alpha$, dann $\vdash_{\text{Fre}} \alpha$".

Aufgabe 21: Der Mendelson-Kalkül

Ein Kalkül, der im Buch von Mendelson benutzt wird, hat Modus Ponens und die folgenden Axiome (für Formeln mit Atomen, $\perp$ und $\to$; $\neg\alpha$ ist Abkürzung für $\alpha \to \perp$).

(M1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(M2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(M3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$

Zeigen Sie, dass mit diesem Kalkül genau die gültigen Formeln herleitbar sind.
Dabei können Sie den Vollständigkeitssatz für den Frege-Kalkül aus der Vorlesung benutzen.

Lösen Sie eine der Aufgaben ordentlich. Schreiben Sie Ihre Konstruktionen und Beweise so auf, dass sie gut lesbar und leicht nachvollziehbar sind.
Falls Sie Fragen haben (z.B. weil Sie bei Ihrer Lösung nicht weiterkommen oder Zweifel an Ihrer Lösungsidee haben), dann fragen Sie mich (z.B. in der Sprechstunde oder n.V.)!