LOGIKSYSTEME: ÜBUNGSSERIE 2
LÖSUNGEN

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

6. Januar 2019

Aufgabe 5

(1) Es seien α und β beliebige Formeln. In diesem Falle soll die folgende Äquivalenz gezeigt werden.

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$$

Sie ist genau dann wahr, wenn man für alle Belegungen $\mathcal{B}$ das Folgende zeigen kann.

$$\mathcal{B} \vDash \neg(\alpha \wedge \beta) \iff \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \vee \neg\beta$$

Es sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. Es gilt das Folgende.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \vDash \neg(\alpha \wedge \beta) \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \wedge \beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \nvDash \beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \neg\beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \vee \neg\beta
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$, α und β beliebig waren, ist damit die gewünschte Äquivalenz gezeigt. □

(2) Seien α und β beliebige Formeln. In diesem Falle soll die folgende Äquivalenz gezeigt werden.

$$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Sie ist genau dann wahr, wenn man für alle Belegungen $\mathcal{B}$ das Folgende zeigen kann.

$$\mathcal{B} \vDash \neg(\alpha \vee \beta) \iff \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \wedge \neg\beta$$

Es sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. Es gilt das Folgende.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \vDash \neg(\alpha \vee \beta) \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \vee \beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \text{ und } \mathcal{B} \vDash \neg\beta \\
\iff\ & \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \wedge \neg\beta
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{B}$, α und β beliebig waren, ist damit die gewünschte Äquivalenz gezeigt. □

(3) Es seien α und β beliebige Formeln und $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. In diesem Falle gilt das Folgende.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \vDash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \beta \to \alpha \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } (\mathcal{B} \nvDash \beta \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \alpha)
\end{aligned}$$

Fall $\alpha \in \mathcal{B}$**:**

$$\begin{aligned}
\iff\ & \text{ falsch } \text{ oder } (\mathcal{B} \nvDash \beta \text{ oder } \text{ wahr }) \\
\iff\ & \text{ wahr}
\end{aligned}$$

Fall $\alpha \notin \mathcal{B}$**:**

$$\begin{aligned}
\iff\ & \text{ wahr } \text{ oder } (\mathcal{B} \nvDash \beta \text{ oder } \text{ falsch }) \\
\iff\ & \text{ wahr}
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathcal{B} \vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$. Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, muss demnach auch $\vDash \alpha \to (\beta \to \alpha)$ gelten. □

(4) Es seien α, β und φ beliebige Formeln und $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. Dann gilt das Folgende.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} \vDash (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi)) \\
\iff\ & \mathcal{B} \nvDash \alpha \to (\beta \to \varphi) \text{ oder} \\
& \quad \mathcal{B} \vDash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi) \\
\iff\ & (\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta \to \varphi) \text{ oder} \\
& \quad (\mathcal{B} \nvDash \alpha \to \beta \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \alpha \to \varphi) \\
\iff\ & (\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } (\mathcal{B} \vDash \beta \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \varphi)) \text{ oder} \\
& \quad ((\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta) \text{ oder } (\mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \varphi))
\end{aligned}$$

Fall $\alpha \notin \mathcal{B}$**:**

$$\begin{aligned}
\iff\ & (\text{ falsch } \text{ und } (\mathcal{B} \vDash \beta \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \varphi)) \text{ oder} \\
& ((\text{ falsch } \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta) \text{ oder } (\text{ wahr } \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \varphi)) \\
\iff\ & \text{ falsch } \text{ oder } (\text{ falsch } \text{ oder } \text{ wahr }) \\
& \text{wahr}
\end{aligned}$$

Fall $\varphi \in \mathcal{B}$**:**

$$\begin{aligned}
\iff\ & (\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } (\mathcal{B} \vDash \beta \text{ und } \text{ falsch })) \text{ oder} \\
& ((\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta) \text{ oder } (\mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } \text{ wahr })) \\
\iff\ & (\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \text{ falsch }) \text{ oder}
\end{aligned}$$

$$((\mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta) \text{ oder } \text{ wahr })$$
$$\Longleftrightarrow \text{ falsch oder wahr}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ wahr}$$

Fall $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ und $\varphi \notin \mathcal{B}$:

$$\Longleftrightarrow \text{ (wahr und (wahr und wahr) oder}$$
$$\text{((wahr und falsch) oder (falsch oder falsch))}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ wahr}$$

Fall $\alpha \in \mathcal{B}$ und $\beta, \varphi \notin \mathcal{B}$:

$$\Longleftrightarrow \text{ (wahr und (falsch und wahr)) oder}$$
$$\text{((wahr und wahr) oder (falsch oder falsch))}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ (wahr und falsch) oder}$$
$$\text{(wahr oder falsch)}$$
$$\Longleftrightarrow \text{ wahr}$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, gilt damit auch das Folgende.

$$\vDash (\alpha \to (\beta \to \varphi)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \varphi))$$

Die Aussage ist damit gezeigt. □

(5) Es sei α eine Formel und $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. In diesem Falle gilt das Folgende.

$$\mathcal{B} \vDash \neg\neg\alpha \to \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \mathcal{B} \nvDash \neg\neg\alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \mathcal{B} \vDash \neg\alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \mathcal{B} \nvDash \alpha \text{ oder } \mathcal{B} \vDash \alpha$$
$$\Longleftrightarrow \text{ wahr}$$

Da $\mathcal{B}$ beliebig gewählt wurde, gilt damit auch die Aussage $\vDash \neg\neg\alpha \to \alpha$, die gezeigt werden sollte. □

Aufgabe 6

Vor dem eigentlichen Beweis sollen zunächst ein paar Rechenregeln gezeigt werden. Es seien α,β und φ beliebige Formeln und $\mathcal{B}$ eine beliebige Belegung. In diesem Falle gelten die folgenden Aussagen.

$$\mathcal{B} \vDash \neg\bot \iff \mathcal{B} \nvDash \bot \iff \text{ wahr } \iff \mathcal{B} \vDash \top$$
$$\mathcal{B} \vDash \varphi \iff \mathcal{B} \vDash \varphi \text{ und wahr}$$
$$\iff \mathcal{B} \vDash \varphi \text{ und } \mathcal{B} \vDash \top \iff \mathcal{B} \vDash \varphi \wedge \top$$
$$\mathcal{B} \vDash \neg\neg\varphi \iff \mathcal{B} \nvDash \neg\varphi \iff \mathcal{B} \vDash \varphi$$
$$\mathcal{B} \vDash \alpha \not\rightarrow \beta \iff \mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \nvDash \beta$$
$$\iff \mathcal{B} \vDash \alpha \text{ und } \mathcal{B} \vDash \neg\beta \iff \mathcal{B} \vDash \alpha \wedge \neg\beta$$

Da die Formeln und die Belegung beliebig gewählt wurden, gelten damit auch die folgenden Äquivalenzen.

$$\alpha \not\rightarrow \beta \equiv \alpha \wedge \neg\beta, \quad \varphi \equiv \neg\neg\varphi$$
$$\varphi \equiv \varphi \wedge \top, \quad \neg\bot \equiv \top$$

Diese Äquivalenzen werden nun in dem noch folgenden Induktionsbeweis verwendet.

Induktionsanfang: Für jede Formel φ, bei der es sich um $\top$, $\bot$ oder ein Atom handelt, muss gezeigt werden, dass es eine äquivalente Formel φ' gibt, sodass φ' nur aus Atomen, $\top$ oder $\not\rightarrow$ besteht.

Fall $\varphi = \top$: Man verwendet für die folgende Definition, dass jede Formel zu sich selbst äquivalent ist.

$$\varphi' := \top \equiv \top = \varphi$$

Fall $\varphi = \bot$: Man verwendet für diese Definition die zuvor gezeigten Äquivalenzen.

$$\bot \equiv \neg\top \equiv \top \wedge \neg\top \equiv \top \not\rightarrow \top =: \varphi'$$

Fall $\varphi = A_i$ für $i \in \mathbb{N}$: Auch hier kann wieder verwendet werden, dass jede Formel zu sich selbst äquivalent ist.

$$\varphi' := A_i \equiv A_i = \varphi$$

In allen Fällen ist die definierte Formel φ', aufgrund der Transitivität von $\equiv$, äquivalent zu φ und enthält nur Atome, $\top$ oder $\not\rightarrow$. Der Induktionsanfang ist damit gezeigt.

Induktionsvoraussetzung: Es seien nun α und β Formeln, für die es äquivalente Formeln α' und β' gibt, sodass α' und β' nur aus Atomen, $\top$ oder $\not\rightarrow$ bestehen.

Induktionsschluss: Zu zeigen ist nun, dass es auch für die Formeln $\alpha \to \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ und $\neg\alpha$ äquivalente Formeln gibt, die nur aus Atomen, $\top$ oder $\not\rightarrow$ bestehen.

Fall $\varphi = \neg\alpha$: Man verwendet zunächst das Lemma aus der Vorlesung und benutzt dann die gezeigten Äquivalenzen.

$$\neg\alpha \equiv \neg\alpha' \equiv \top \wedge \neg\alpha' \equiv \top \not\rightarrow \alpha' =: \varphi'$$

Fall $\varphi = \alpha \wedge \beta$: Dieser Fall kann komplett analog zu dem vorherigen Fall behandelt werden.

$$\alpha \wedge \beta \equiv \alpha' \wedge \beta' \equiv \alpha' \wedge \neg\neg\beta' \equiv \alpha' \not\rightarrow \neg\beta'$$
$$\equiv \alpha' \not\rightarrow (\top \not\rightarrow \beta') =: \varphi'$$

Fall $\varphi = \alpha \vee \beta$: Man verwendet zunächst das Lemma aus der Vorlesung und die De Morganschen Gesetze. Danach lassen sich wieder die gezeigten Äquivalenzen anwenden.

$$\alpha \vee \beta \equiv \alpha' \vee \beta' \equiv \neg(\neg\alpha' \wedge \neg\beta') \equiv \neg(\neg\alpha' \not\rightarrow \beta')$$
$$\equiv \neg((\top \not\rightarrow \alpha') \not\rightarrow \beta')$$
$$\equiv \top \not\rightarrow ((\top \not\rightarrow \alpha') \not\rightarrow \beta') =: \varphi'$$

Fall $\varphi = \alpha \to \beta$: Auch hier wurde ein analoges Vorgehen zu dem vorherigen Fall gewählt.

$$\alpha \to \beta \equiv \alpha' \to \beta' \equiv \neg\alpha' \vee \beta' \equiv \neg(\neg\neg\alpha' \wedge \neg\beta')$$
$$\equiv \neg(\alpha' \wedge \neg\beta') \equiv \neg(\alpha' \not\rightarrow \beta')$$
$$\equiv \top \not\rightarrow (\alpha' \not\rightarrow \beta') =: \varphi'$$

In allen Fällen ist die Formel φ', aufgrund der Transitivität von $\equiv$, äquivalent zu φ und enthält nur Atome, $\top$oder $\not\rightarrow$. Der Induktionsschluss ist damit gezeigt. Demzufolge handelt es sich bei der Menge $\{\top, \not\rightarrow\}$ um eine adäquate Menge von Verknüpfungszeichen. □