

Aufgabe 1

Definition: Sei B eine Belegung. Seien α und β Formeln.

Dann ist auch $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ eine Formel und es gilt

$$B \models (\alpha \leftrightarrow \beta) \iff B \models (\alpha \rightarrow \beta) \text{ und } B \models (\beta \rightarrow \alpha)$$

(a) Sei B eine beliebige Belegung.

$$B \models A_0 \leftrightarrow A_0 \iff (B \models A_0 \rightarrow A_0) \text{ und } (B \models A_0 \rightarrow A_0)$$

$$\iff (B \models A_0 \rightarrow A_0) \iff (B \not\models A_0) \text{ oder } (B \models A_0)$$

$$\text{Fall } A_0 \in B: \iff \text{falsch oder wahr} \iff \text{wahr}$$

$$\text{Fall } A_0 \notin B: \iff \text{wahr oder falsch} \iff \text{wahr}$$

Da B beliebig war, gilt damit $\models A_0 \leftrightarrow A_0$.

Also ist $A_0 \leftrightarrow A_0$ gültig (damit auch erfüllbar).

(b) Sei B eine beliebige Belegung.

$$B \models A_0 \leftrightarrow \neg A_0 \iff (B \models A_0 \rightarrow \neg A_0) \text{ und } (B \models \neg A_0 \rightarrow A_0)$$

$$\iff (B \not\models A_0 \text{ oder } B \models (\neg A_0)) \text{ und } (B \not\models (\neg A_0) \text{ oder } B \models A_0)$$

$$\iff B \not\models A_0 \text{ und } B \models A_0$$

$$\text{Fall } A_0 \in B: \iff \text{falsch und wahr} \iff \text{falsch}$$

$$\text{Fall } A_0 \notin B: \iff \text{wahr und falsch} \iff \text{falsch}$$

Da B beliebig war, ist damit $A_0 \leftrightarrow (\neg A_0)$ unerfüllbar (damit auch nicht gültig).

(c) Sei $B := \{A_0, A_1\}$.

$$B \models (A_0 \wedge A_1) \leftrightarrow A_0 \iff (B \models (A_0 \wedge A_1) \rightarrow A_0) \text{ und } (B \models A_0 \rightarrow (A_0 \wedge A_1))$$

$$\iff (B \not\models (A_0 \wedge A_1) \text{ oder } B \models A_0) \text{ und } (B \not\models A_0 \text{ oder } B \models (A_0 \wedge A_1))$$

$$(*) \iff ((B \not\models A_0 \text{ oder } B \not\models A_1) \text{ oder } B \models A_0) \text{ und } (B \not\models A_0 \text{ oder } (B \models A_0 \text{ und } B \models A_1))$$

$$\iff ((\text{falsch oder falsch}) \text{ oder wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder (wahr und wahr)})$$

$$\iff \text{wahr}$$

Sei nun $\tilde{B} := \{A_0\}$. Dann lässt sich bis (*) eine analoge Überlegung wählen:
 $\tilde{B} \models (A_0 \wedge A_1) \leftrightarrow A_0 \iff ((\text{falsch oder wahr}) \text{ oder wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder (wahr und falsch)})$
 $\iff \text{falsch}$

Damit gibt es Belegungen, für die $(A_0 \wedge A_1) \leftrightarrow A_0$ erfüllt oder auch nicht erfüllt ist. Demzufolge ist $(A_0 \wedge A_1) \leftrightarrow A_0$ nicht gültig, aber erfüllbar.

(d) Sei B eine beliebige Belegung.

$$\begin{aligned} B \models (A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0 &\iff (B \models (A_0 \vee A_1) \rightarrow A_0) \text{ und } (B \models A_0 \rightarrow (A_0 \vee A_1)) \\ &\iff (B \models (A_0 \vee A_1) \text{ oder } B \models A_0) \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_0 \vee A_1) \\ &\iff ((B \models A_0 \text{ und } B \models A_1) \text{ oder } B \models A_0) \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall } B = \{A_1\}: B \models (A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0 \\ &\iff (\text{wahr und falsch} \text{ oder falsch}) \text{ und } (\text{wahr oder (falsch oder wahr)}) \\ &\iff \text{falsch} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fall } B = \{A_0, A_1\}: B \models (A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0 \\ &\iff ((\text{falsch und falsch} \text{ oder wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder (wahr oder wahr)})) \\ &\iff \text{wahr} \end{aligned}$$

Damit gibt es Belegungen, für die $(A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0$ erfüllt und auch nicht erfüllt ist. Demzufolge ist $(A_0 \vee A_1) \leftrightarrow A_0$ nicht gültig, aber erfüllbar.

Aufgabe 2

(a) Sei B eine Belegung.

$$\begin{aligned} B \models \text{ite}(A_0, A_0 \vee A_1, A_0 \rightarrow A_2) \\ &\iff (B \models A_0 \text{ und } B \models A_0 \vee A_1) \text{ oder } (B \models A_0 \text{ und } B \models A_0 \rightarrow A_2) \\ &\iff (B \models A_0 \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_1)) \text{ oder } (B \models A_0 \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_2)) \\ \text{Fall } A_0 \in B: &\iff (\text{wahr und (wahr oder } B \models A_1)) \text{ oder } (\text{falsch und (falsch oder } B \models A_2)) \\ &\iff \text{wahr} \\ \text{Fall } A_0 \notin B: &\iff (\text{falsch und (falsch oder } B \models A_1)) \text{ oder } (\text{wahr und (wahr oder } B \models A_2)) \\ &\iff \text{wahr} \end{aligned}$$

Damit ist die Formel für alle Belegungen erfüllbar und damit gültig.

(b) Sei B eine Belegung:

$$\begin{aligned} B \models \text{ite}(\neg A_0, A_0 \rightarrow A_1, A_0 \vee A_2) \\ &\iff (B \models \neg A_0 \text{ und } B \models A_0 \rightarrow A_1) \text{ oder } (B \models \neg A_0 \text{ und } B \models A_0 \vee A_2) \\ &\iff (B \models A_0 \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_1)) \text{ oder } (B \models A_0 \text{ und } (B \models A_0 \text{ oder } B \models A_2)) \end{aligned}$$

Fall $A_0 \in B$: \Leftrightarrow (falsch und (falsch oder $B \models A_1$)) oder (wahr und (wahr oder $B \models A_2$))
 \Leftrightarrow wahr

Fall $A_0 \notin B$: \Leftrightarrow (wahr und (wahr oder $B \models A_1$)) oder (falsch und (falsch oder $B \models A_2$))
 \Leftrightarrow wahr

Damit ist die Formel erfüllbar und auch gültig, da B beliebig war.

(c) Sei B eine beliebige Belegung:

$$B \models \text{ite}(A_0 \wedge A_1, A_0 \rightarrow \neg A_1, A_0 \wedge A_1)$$

$$\Leftrightarrow (B \models A_0 \wedge A_1 \text{ und } B \models A_0 \rightarrow \neg A_1) \text{ oder } (B \not\models A_0 \wedge A_1 \text{ und } B \models A_0 \wedge A_1)$$

$$\Leftrightarrow ((B \models A_0 \text{ und } B \models A_1) \text{ und } (B \not\models A_0 \text{ oder } B \models \neg A_1))$$

$$\text{oder } ((B \not\models A_0 \text{ oder } B \not\models A_1) \text{ und } (B \models A_0 \text{ und } B \models A_1))$$

Fall $A_0, A_1 \in B$:

$$\Leftrightarrow ((\text{wahr und wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder falsch}))$$

$$\text{oder } ((\text{falsch oder falsch}) \text{ und } (\text{wahr und wahr}))$$

$$\Leftrightarrow \text{falsch}$$

Fall $A_0 \notin B$ oder $A_1 \notin B$:

$$\Leftrightarrow (\text{falsch und } (B \not\models A_0 \text{ oder } B \not\models A_1)) \text{ oder } (\text{wahr und falsch})$$

$$\Leftrightarrow \text{falsch}$$

Damit ist die Formel für keine Belegung erfüllbar, sie ist also unerfüllbar und damit auch nicht gültig.

(d) Sei B eine beliebige Belegung.

$$B \models \text{ite}(A_0 \vee A_1, A_0 \rightarrow \neg A_1, A_0 \wedge A_1)$$

$$\Leftrightarrow (B \models A_0 \vee A_1 \text{ und } B \models A_0 \rightarrow \neg A_1) \text{ oder } (B \not\models A_0 \vee A_1 \text{ und } B \models A_0 \wedge A_1)$$

$$\Leftrightarrow ((B \models A_0 \text{ oder } B \models A_1) \text{ und } (B \not\models A_0 \text{ oder } B \models \neg A_1))$$

$$\text{oder } ((B \not\models A_0 \text{ und } B \not\models A_1) \text{ und } (B \models A_0 \text{ und } B \models A_1))$$

$$\text{Fall } B = \{A_1\}: \Leftrightarrow ((\text{falsch oder wahr}) \text{ und } (\text{wahr oder falsch}))$$

$$\text{oder } ((\text{wahr und falsch}) \text{ und } (\text{falsch und wahr}))$$

$$\Leftrightarrow \text{wahr}$$

$$\text{Fall } B = \{A_0, A_1\}: \Leftrightarrow ((\text{wahr oder wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder falsch}))$$

$$\text{oder } ((\text{falsch und falsch}) \text{ und } (\text{wahr und wahr}))$$

$$\Leftrightarrow \text{falsch}$$

Damit ist die Formel erfüllbar, aber nicht gültig.

(e) Sei B eine Belegung.

$$B \models (A_1 \vee A_2) \rightarrow \text{ite}(A_0 \wedge (\neg A_1), \neg A_2, A_2 \rightarrow A_0)$$

$$\Leftrightarrow B \models A_1 \vee A_2 \text{ oder } B \models \text{ite}(A_0 \wedge (\neg A_1), \neg A_2, A_2 \rightarrow A_0)$$

$$\Leftrightarrow (B \models A_1 \text{ und } B \models A_2) \text{ oder } ((B \models A_0 \wedge \neg A_1 \text{ und } B \models A_2) \text{ oder } (B \models A_0 \wedge \neg A_1 \text{ und } (B \models A_2 \text{ oder } B \models A_0)))$$

$$\Leftrightarrow (B \models A_1 \text{ und } B \models A_2) \text{ oder}$$

$$(((B \models A_0 \text{ und } B \models \neg A_1) \text{ und } B \models A_2) \text{ oder } ((B \models A_0 \text{ oder } B \models \neg A_1) \text{ und } (B \models A_2 \text{ oder } B \models A_0)))$$

Fall $B := \{\} = \emptyset$:

$$\Leftrightarrow (\text{wahr und wahr}) \text{ oder}$$

$$(((\text{falsch und wahr}) \text{ und wahr}) \text{ oder } ((\text{wahr oder falsch}) \text{ und } (\text{wahr oder falsch})))$$

$$\Leftrightarrow \text{wahr}$$

Fall $B = \{A_1, A_2\}$:

$$\Leftrightarrow (\text{falsch und falsch}) \text{ oder}$$

$$(((\text{falsch und falsch}) \text{ und falsch}) \text{ oder } ((\text{wahr oder wahr}) \text{ und } (\text{falsch oder falsch})))$$

$$\Leftrightarrow \text{falsch}$$

Damit ist die Formel erfüllbar, aber nicht gültig.

Aufgabe 4

Seien α und φ beliebige Formeln.

$$\alpha \models \varphi \Leftrightarrow [B \models \alpha \Rightarrow B \models \varphi] \text{ für alle Belegungen } B$$

$$\Leftrightarrow [B \models \alpha \text{ oder } B \models \varphi] \text{ für alle Belegungen } B$$

$$\Leftrightarrow B \models \alpha \rightarrow \varphi \text{ für alle Belegungen}$$

$$\Leftrightarrow \models \alpha \rightarrow \varphi \quad (\Leftrightarrow \alpha \rightarrow \varphi \text{ ist gültig})$$

□