Friedrich-Schiller-Universität Jena
Institut für Informatik
Martin Mundhenk
Stephan Fischer

Aufgaben zum 18. Januar 2018

(Abgabe bis zum Beginn der Vorlesung)

Aufgabe 30: Frege-Beweise

Zeigen Sie ($\Diamond\alpha$ ist Abkürzung für $\neg\Box\neg\alpha$):

1. $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}} \Box\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\Box\alpha$
2. $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}} \Box\alpha \rightarrow (\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\beta)$
3. $\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha, \neg\Box\beta \vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}} \bot$
4. $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}} \Diamond\top \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)$
5. $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}} \Diamond(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Diamond\beta)$

Aufgabe 31: Die Modallogik T im Frege-Kalkül

Sei $\vdash_{\overline{\mathrm{T}}}$ definiert wie $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}}$, wobei zusätzlich das Axiom (T) $\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha$ ($\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$) benutzt werden darf.
Ein Kripke-Modell $\mathcal{M} = (W, R, \xi)$ heißt *reflexiv*, falls $(w, w) \in R$ für alle $w \in W$ gilt.
$\models_r \alpha$ gilt, falls α von allen reflexiven Kripke-Modellen erfüllt wird.

1. Zeigen Sie $\vdash_{\overline{\mathrm{T}}} \Box A \rightarrow A$.
2. Zeigen Sie: aus $\vdash_{\overline{\mathrm{T}}} \alpha$ folgt $\models_r \alpha$.

   (Das geht mit einer Erweiterung des Beweises des Korrektheitslemmas für $\vdash_{\overline{\Box\mathrm{Fre}}}$.)

Aufgabe 32: Ähnlichkeit zwischen Modellen

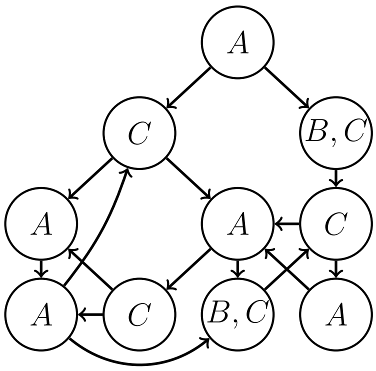
Eine *Bisimulation* zwischen zwei Kripke-Modellen $\mathcal{A} = (A, R_A, \xi_A)$ und $\mathcal{B} = (B, R_B, \xi_B)$ ist eine Relation $R \subseteq A \times B$, so dass für alle $(a, b) \in R$ folgendes gilt.

1. $\xi_A(a) = \xi_B(b)$
2. Für jedes $a' \in A$ mit $(a, a') \in R_A$ gibt es ein $b' \in B$ mit $(b, b') \in R_B$, so dass $(a', b') \in R$.
3. Für jedes $b' \in B$ mit $(b, b') \in R_B$ gibt es ein $a' \in A$ mit $(a, a') \in R_A$, so dass $(a', b') \in R$.

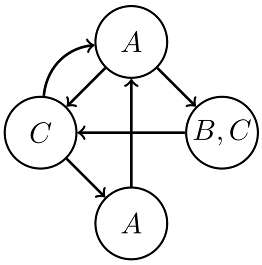
Zwei Kripke-Modelle heißen *bisimilar*, wenn es eine Bisimulation zwischen ihnen gibt.

1. Geben Sie eine Bisimulation zwischen $\mathcal{M}_{10}$ und $\mathcal{M}_4$ an.

$\mathcal{M}_{10}$:



$\mathcal{M}_4$:



2. Das Kripke-Modell $\mathcal{M}_7 = (\mathbb{N}, <, \xi)$ sei definiert mit

$$\xi(n) = \begin{cases} \{A\}, & \text{falls } n = 7 \\ \{B\}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Geben Sie eine bisimilares Modell zu $\mathcal{M}_7$ an, das höchstens 10 Welten hat.

3. Zeigen Sie:

   Wenn es zwischen den Kripke-Modellen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine Bisimulation R gibt, dann gilt für alle modallogischen Formeln α und alle Welten $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ mit $(a, b) \in R$: $\mathcal{A}, a \models_K \alpha$ genau dann, wenn $\mathcal{B}, b \models_K \alpha$.

Lösen Sie zwei der Aufgaben ordentlich. Schreiben Sie Ihre Konstruktionen und Beweise so auf, dass sie gut lesbar und leicht nachvollziehbar sind.
Falls Sie Fragen haben (z.B. weil Sie bei Ihrer Lösung nicht weiterkommen oder Zweifel an Ihrer Lösungsidee haben), dann fragen Sie mich (z.B. in der Sprechstunde oder n.V.)!