

---

# Logiksysteme: Gliederung

Markus Pawellek  
markuspawellek@gmail.com

5. März 2018

---

## 1 Aussagenlogik

### 1.1 Umgangssprachliche Aussagenlogik

- einführendes Beispiel
- Definition umgangssprachliche Aussage
- Verknüpfung umgangssprachlicher Aussagen durch Wahrheitstabellen
- umgangssprachliche Negation
- umgangssprachliche Konjunktion
- umgangssprachliche Disjunktion
- umgangssprachliche Implikation
- umgangssprachliche Äquivalenz
- Beispiel mit Wahrheitstabelle

### 1.2 Formale Aussagenlogik

- Einführung
- Definition aussagenlogische Formeln
- Definition Belegung
- Definition Erfüllungsrelation
- Definition gültige Formel, erfüllbare Formel, unerfüllbare Formel, Tautologie, Kontradiktion
- Definition semantische Folgerung
- Lemma: Semantische Folgerung verallgemeinert Erfüllungsrelation
- Lemma: Zusammenhang zwischen Erfüllungsrelation und Implikation
- Definition: semantische Äquivalenz von Formeln
- Lemma:  $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$
- Lemma:  $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \beta$
- Lemma:  $\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$
- Lemma: äquivalente Ersetzung von Teilformeln
- Definition: adäquate Menge von Verknüpfungszeichen
- Lemma:  $\{\perp, \rightarrow\}$  ist adäquat
- Lemma: Adäquate Mengen von Verknüpfungszeichen
- Bemerkung Beweis-Kalkül

### 1.3 Tableau-Kalkül

- einführendes Beispiel mit Expansionsregeln
- Definition: Tableau für Formeln aus Atomen  $\perp, \top, \neg, \wedge$
- Systematischer Aufbau eines Tableau
- Fast systematischer Aufbau eines Tableau
- Definition: Eigenschaften von Pfaden und Tableau
- Beispiele
- Expansionsregeln für  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$
- Bemerkung: adäquate Mengen reichen für die Beweisbarkeit
- Definition: Tableau für Formeln aus Atomen  $\perp, \rightarrow$
- Lemma: endliche Tableau reichen für Formeln
- Definition: Tableau-beweisbar
- deterministische und nichtdeterministische algorithmische Umsetzung des Tableau-Aufbaus mit Gültigkeitstest
- Analyse des Tableau-Algorithmus

### 1.4 Frege-Kalkül

- Definition: Herleitung von Formeln im Frege-Kalkül
- Beispiel
- Definition: Frege-beweisbar
- Lemma:  $\beta \rightarrow \beta$  ist Frege-beweisbar
- Lemma: Schlussregel Transitivität
- Lemma:  $\perp$  Frege-beweist  $\alpha$
- Satz: Deduktionstheorem
- Lemma: Umkehrung drittes Axiom
- Lemma: ex falso quod libet
- Lemma: Doppelnegation
- Lemma: ex falso quod libet (allgemeiner)
- Lemma: Herleitungen ersetzen Hypothesen
- Lemma: Verallgemeinerung der Transitivität
- Lemma: Wichtige Theoreme des Frege-Kalküls
- Ähnliche Kalküle

### 1.5 Vollständigkeitsätze der Kalküle

- Bemerkung: Einteilung der Formeln in beweisbare und nicht-beweisbare Formeln. Testen der Gültigkeit beweisbarer Formeln. Korrektheit und Vollständigkeit
- Bemerkung: Korrektheit des Frege-Kalküls
- Lemma: Axiome des Frege-Kalküls sind gültig
- Lemma: Korrektheit des Frege-Kalküls
- Bemerkung: Vollständigkeit Tableau-Kalkül
- Lemma: Pfad bestimmt Belegung, für die alle Formeln erfüllt sind
- Lemma: Vollständigkeit des Tableau-Kalküls
- Bemerkung: Umwandlung von Tableau-Beweisen in Frege-Beweise
- Lemma: aus  $\neg(\beta \rightarrow \gamma)$  expandierte Formeln sind überflüssig
- Lemma: aus  $\beta \rightarrow \gamma$  expandierte Formeln sind überflüssig
- Lemma: Frege-Herleitung von  $\perp$  aus widersprüchlichen Tableau
- Satz: Aus Tableau-Beweisen können Frege-Beweise gemacht werden.
- Lemma: Vollständigkeitslemma des Frege-Kalküls
- Satz: Vollständigkeitsatz des Frege-Kalküls
- Lemma: Korrektheit des Tableau-Kalküls
- Satz: Vollständigkeitsatz des Tableau-Kalküls
- Bemerkung: Beweisabhängigkeiten

## 2 Modale Aussagenlogik

- Einführendes Beispiel
- Bemerkung: Bedeutung modale Aussagenlogik

### 2.1 Grundbegriffe der modalen Aussagenlogik

- Einführendes Beispiel
- Definition: modallogische Formeln
- Definition: Kripke-Modell
- Definition: modallogische Erfüllungsrelation
- Beispiele
- Formelauswertung mit Dynamic Programming
- Definition: gültige Formeln, erfüllbare Formeln
- Beispiele
- Bemerkung: Intuition erfüllbare Formeln
- Konstruktion erfüllender Kripke-Modelle
- Definition: äquivalente Formeln
- Lemma: Wichtige Äquivalenzen
- Lemma: adäquate Verknüpfungszeichen für Modallogik
- Definition: Verallgemeinerung der modallogischen Erfüllungsrelation

### 2.2 Modallogisches Tableau-Kalkül

- Bemerkung
- Definition: Tableau für modallogische Formeln aus Atomen  $\perp, \rightarrow, \Box$
- Beispiel
- Definition: Eigenschaften von Pfaden und Tableau
- Lemma: endliche Tableau reichen
- Definition: Tableau-beweisbar
- Beispiel
- Bemerkung: Beweis des Vollständigkeitslemmas
- Lemma: Pfad bestimmt Modell
- Lemma: Vollständigkeit des modalen Tableau-Kalküls

### 2.3 Modallogisches Frege-Kalkül

- Definition:  $\Box$ Frege-Kalkül
- Lemma: Doppelnegation überspringt modale Operatoren
- Bemerkung: ursprüngliches Deduktionstheorem nicht möglich
- Satz: modallogisches Deduktionstheorem
- Lemma: Verallgemeinerung von K
- Lemma: Korrektheitslemma für modallogisches Frege-Kalkül
- Bemerkung: Vollständigkeit modallogisches Frege-Kalkül
- Lemma: aus  $\neg\Box\beta$  expandierte Formeln sind überflüssig
- Lemma: Frege-Herleitung von  $\perp$  aus widersprüchlichen Tableaux
- Satz: Aus Tableau-Beweisen können Frege-Beweise gemacht werden.
- Satz: Vollständigkeitsätze für die modale Aussagenlogik
- Bemerkung: Beweisabhängigkeiten

## 3 Algorithmische Umsetzung des Tableau-Kalküls

- Bemerkung: nichtdeterministischer Algorithmus, rekursive Maximum-Suche, Idee
- Gültigkeitstest gemäß Tableau-Kalkül
- Analyse des Gültigkeitstests
- nichtdeterministischer Algorithmus
- Gültigkeitstest für modallogische Formeln
- Struktur der rekursiven Aufrufe
- Analyse
- Satz: Erfüllbarkeitsproblem der modalen Aussagenlogik ist in PSPACE
- Komplexität von Logikproblemen

#### 4 Andere Modallogiken

- Beispiel: muddy children
- Modellierung von Wissen
- Grapheigenschaften
- Grapheigenschaften für Kripke-Modelle
- Modallogiken mit bestimmten Grapheigenschaften
- Wissenslogiken
- Andere Logiken mit Kripke-Semantik
- Bemerkung: nicht-intuitionistische Beweise
- intuitionistische Logik
- Definition: Formeln der intuitionistischen Aussagenlogik
- Definition: Semantik der intuitionistischen Aussagenlogik
- Lemma: Persistenz gilt für alle Formeln
- Definition: Gültigkeit
- Lemma: Gesetz des ausgeschlossenen Dritten ist intuitionistisch nicht gültig.
- Lemma: Eine de Morgan-Regel ist intuitionistisch nicht gültig.
- Satz: Satz von Glivenko
- Definition: Gödels Übersetzung intuitionistischer Formeln
- Satz: Satz von McKinsey und Tarski

#### 5 Temporale Aussagenlogik

- Einführendes Beispiel und Bemerkung

##### 5.1 Grundbegriffe der Zeitlogik LTL und ihrer Kalküle

- Definition: LTL-Formeln
- Definition: Pfad-Erfüllungsrelation für LTL-Formeln
- Bemerkung: intuitive Vorstellung
- Definition: äquivalente LTL-Formeln
- Lemma: Wichtige Äquivalenzen in LTL
- Lemma: adäquate Mengen  $\{\neg, \wedge, X, U\}$  und  $\{\perp, \rightarrow, X, U\}$
- Definition: Erfüllbarkeit und Gültigkeit
- Definition: Erfüllungsrelation für LTL-Formeln
- Beispiel

##### 5.2 Tableau-Kalkül für LTL-Formeln

- Definition: Tableau für LTL-Formeln aus Atomen  $\neg, \wedge, X, U$
- Notation
- Bemerkung
- Definition: erfolgloser Pfad eines LTL-Tableau
- Definition: erfolgreicher Pfad eines LTL-Tableau
- Definition: Tableau-beweisbare LTL-Formeln
- Definition: systematisches LTL-Tableau
- Lemma: endliche LTL-Tableaux reichen
- Satz: Vollständigkeitssatz für Tableau-Beweisbarkeit

##### 5.3 Frege-Kalkül für LTL-Formeln

- Definition: LTL-Frege-Kalkül

##### 5.4 Endliche Automaten und reguläre Sprachen

- Definition: endlicher Automat
- Definition: akzeptierte Wörter eines endlichen Automaten
- Satz: Äquivalenz von deterministischen und nicht-deterministischen Automaten
- Definition: reguläre Sprachen
- Satz: Abgeschlossenheit regulärer Sprachen unter Komplement, Vereinigung, Konkatenation und Sternbildung
- Definition: Leerheitsproblem
- Definition: Nicht-Leerheitsproblem
- Algorithmus: Nicht-Leerheitsproblem
- Komplexität der Leerheitsprobleme
- Definition: Alphabet, endliche Wörter,  $\omega$ -Wörter
- Definition: Büchi-Automat
- Beispiel
- Lemma: nicht-deterministische Büchi-Automaten können mehr als deterministische Büchi-Automaten
- Definition:  $\omega$ -reguläre Sprachen
- Lemma: Abschlusseigenschaften  $\omega$ -reguläre Sprachen
- Definition: Leerheitsproblem für Büchi-Automaten
- Algorithmus: Nicht-Leerheitsproblem
- Analyse des Algorithmus
- Definition: verallgemeinerter Büchi-Automat
- Beispiele
- Lemma: Jede  $\omega$ -Sprache, die von einem verallgemeinerten Büchi-Automaten akzeptiert wird, wird auch von Büchiauxomat akzeptiert.

### 5.5 Das Gültigkeitsproblem für LTL

- Gültigkeitsproblem für LTL
- Bemerkung: algorithmische Idee
- Definition:  $\varphi$ -ähnliche Belegungsfolgen und Mengenfolgen
- Definition: lokal-konsistente Menge für  $\varphi$
- Lemma
- Definition: Nachbarkonsistenz
- Lemma
- Definition: globale Konsistenz
- Lemma
- Folgerung
- Lemma
- Satz: Charakterisierung Pfad-Erfüllungsrelation
- Bemerkung: Konstruktion eines Büchi-Automaten

- Beispiel
- Definition: durch  $\varphi$  bestimmter Büchi-Automat  $B_\varphi$
- Satz
- Satz: Charakterisierung Gültigkeit
- Algorithmus: Komplement des Gültigkeitsproblems für LTL
- Analyse des Algorithmus
- Satz: Gültigkeitsproblem für LTL ist in PSPACE

### 5.6 Weitere temporale Logiken

- Computation-tree-logic
- Beispiel
- Pfad-Quantoren
- temporale Logiken
- Komplexitätsresultate