Logiksysteme
Übungsserie 6

Markus Pawellek

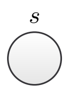
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 22

(1): Für die Konstruktion eines erfüllenden Kripke-Modells, verwenden wir zunächst die folgende Äquivalenzkette.

$$\begin{aligned}&(A \land \Box(A \to B)) \to \Box B\\ &\quad\equiv \neg(A \land \Box(A \to B)) \lor \Box B\\ &\quad\equiv (\neg A \lor \Diamond(A \land \neg B)) \lor \Box B\end{aligned}$$

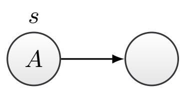
Es folgt unmittelbar, dass es sich bei dem folgenden Kripke-Modell mit Startwelt s, um ein erfüllendes Modell handelt.



Für die Konstruktion eines nicht-erfüllenden Kripke-Modells, betrachten wir analog die negierte Aussage.

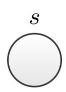
$$\begin{aligned}&\neg((A \land \Box(A \to B)) \to \Box B)\\ &\quad\equiv (A \land \Box(A \to B)) \land \neg\Box B\\ &\quad\equiv (A \land \Box(\neg A \lor B)) \land \Diamond\neg B\end{aligned}$$

Demzufolge erfüllt das folgende Modell mit Startwelt s die negierte Formel, was wiederum äquivalent dazu ist, dass die ursprüngliche Formel von diesem Modell mit Startwelt s nicht erfüllt wird.



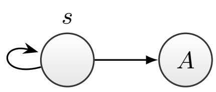
(2): Zunächst vereinfachen wir wieder die gegebene Formel, um das erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\Diamond A \to \Box A \equiv \neg\Diamond A \lor \Box A \equiv \Box\neg A \lor \Box A$$



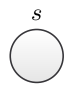
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\neg(\Diamond A \to \Box A) \equiv \Diamond A \land \Diamond\neg A$$



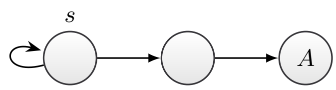
(3): Zunächst vereinfachen wir wieder die gegebene Formel, um das erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A \equiv \neg\Diamond\Box A \lor \Box\Diamond A$$



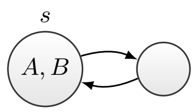
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\neg(\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A) \equiv \Diamond\Box A \land \Diamond\Box\neg A$$



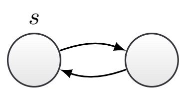
(4): Die gegebene Formel liegt bereits in einer vereinfachten Form vor. Das erfüllende Modell kann also direkt abgelesen werden.

$$\Box\Box A \land \Diamond\Diamond B$$



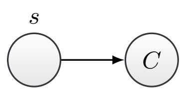
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\neg(\Box\Box A \land \Diamond\Diamond B) \equiv \Diamond\Diamond\neg A \lor \Box\Box\neg B$$



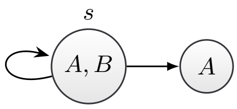
(5): Zunächst vereinfachen wir wieder die gegebene Formel, um das erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned}&(\Diamond(A \to B) \land \Diamond(B \to C)) \to \Diamond(A \to C)\\ &\quad\equiv \neg(\Diamond(A \to B) \land \Diamond(B \to C)) \lor \Diamond(A \to C)\\ &\quad\equiv (\Box(A \land \neg B) \lor \Box(B \land \neg C)) \lor \Diamond(\neg A \lor C)\end{aligned}$$



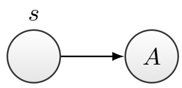
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &\neg((\Diamond(A \to B) \land \Diamond(B \to C)) \to \Diamond(A \to C)) \\ &\equiv (\Diamond(A \to B) \land \Diamond(B \to C)) \land \Box(A \land \neg C) \end{aligned}$$



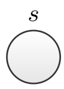
(6): Die gegebene Formel liegt bereits in einer vereinfachten Form vor. Das erfüllende Modell kann also direkt abgelesen werden.

$$\Diamond(A \land \Box(\neg A \land \Diamond A))$$



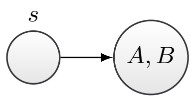
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &\neg(\Diamond(A \land \Box(\neg A \land \Diamond A))) \\ &\equiv \Box(\neg A \lor \Diamond(A \lor \Box\neg A)) \end{aligned}$$



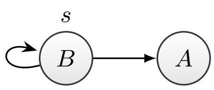
(7): Zunächst vereinfachen wir wieder die gegebene Formel, um das erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &(\Diamond A \land \Diamond B) \to \Diamond(A \land B) \\ &\equiv \neg(\Diamond A \land \Diamond B) \lor \Diamond(A \land B) \end{aligned}$$



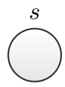
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &\neg((\Diamond A \land \Diamond B) \to \Diamond(A \land B)) \\ &\equiv (\Diamond A \land \Diamond B) \land \Box(\neg A \lor \neg B) \end{aligned}$$



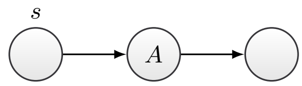
(8): Zunächst vereinfachen wir wieder die gegebene Formel, um das erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &(A \to \Box A) \to (\Box A \to \Box\Box A) \\ &\equiv \neg(A \to \Box A) \lor (\Box A \to \Box\Box A) \\ &\equiv (A \land \Diamond\neg A) \lor (\Diamond\neg A \lor \Box\Box A) \end{aligned}$$



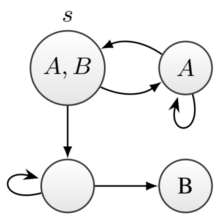
Jetzt betrachten wir die Negation, um das nicht-erfüllende Modell zu konstruieren.

$$\begin{aligned} &\neg((A \to \Box A) \to (\Box A \to \Box\Box A)) \\ &\equiv (\neg A \lor \Box A) \land (\Box A \land \Diamond\Diamond\neg A) \end{aligned}$$

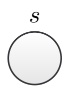


(9): Die gegebene Formel liegt bereits in einer vereinfachten Form vor. Das erfüllende Modell kann also direkt abgelesen werden.

$$\Diamond A \land \Diamond\neg A \land \Box(((A \land \Box A) \lor (\neg A \land \Box\neg A)) \land \Diamond B \land \Diamond\neg B)$$



Eine Betrachtung der Negation ist hier nicht nötig, da es für die Nichterfüllung ausreichend ist, ein Modell zu konstruieren, dessen Startwelt keine Nachfolger hat.



Aufgabe 23

Eine beliebige modal-logische Formel φ ist nach Definition genau dann gültig, wenn für alle Kripke-Modelle $\mathcal{M}$ und alle Welten w von $\mathcal{M}$ gilt, dass $\mathcal{M}, w \models_{\mathrm{K}} \varphi$. Nach Definition gilt $\varphi \equiv \top$ genau dann, wenn für alle Kripke-Modelle $\mathcal{M}$ und alle Welten w von $\mathcal{M}$ das Folgende gilt.

$$\mathcal{M}, w \models_{\mathrm{K}} \varphi \iff \mathcal{M}, w \models_{\mathrm{K}} \top \overset{\text{def.}}{\iff} \text{wahr}$$

Ist φ also gültig, so muss auch $\varphi \equiv \top$ gelten. Gilt $\varphi \equiv \top$, muss φ wiederum gültig sein.

$$\varphi \text{ ist gültig} \iff \varphi \equiv \top$$

Für die Aufgaben reicht es demnach die Äquivalenz zu $\top$ zu beweisen. Im Folgenden verwende ich vor allem die De Morganschen Gesetze, die aus dem Frege-Kalkül bekannten Äquivalenzen und die Äquivalenzen des Lemmas 6.6.

(1): Die Gültigkeit der Formel kann mithilfe einer einfachen Äquivalenzkette gezeigt werden.

$$\begin{aligned}
&\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B) \\
&\quad \equiv \neg\Box(A \to B) \lor (\Diamond A \to \Diamond B) \\
&\quad \equiv \Diamond(A \land \neg B) \lor (\neg\Diamond A \lor \Diamond B) \\
&\quad \equiv \Diamond(A \land \neg B) \lor (\neg\Diamond A \lor \Diamond B) \\
&\quad \equiv (\Diamond(A \land \neg B) \lor \Diamond B) \lor \neg\Diamond A \\
&\quad \equiv \Diamond((A \land \neg B) \lor B) \lor \neg\Diamond A \\
&\quad \equiv \Diamond((A \lor B) \land (\neg B \lor B)) \lor \neg\Diamond A \\
&\quad \equiv \Diamond(A \lor B) \lor \neg\Diamond A \\
&\quad \equiv (\Diamond A \lor \Diamond B) \lor \neg\Diamond A \\
&\quad \equiv \Diamond B \lor (\Diamond A \lor \neg\Diamond A) \equiv \Diamond B \lor \top \equiv \top
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit wurde damit gezeigt. □

(2): Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur den ersten Teil der Formel.

$$\begin{aligned}
&\Box A \land \Box(A \to B) \\
&\quad \equiv \Box(A \land (A \to B)) \equiv \Box(A \land (\neg A \lor B)) \\
&\quad \equiv \Box(A \land B) \equiv \Box A \land \Box B
\end{aligned}$$

Diese »Nebenrechnung« verwenden wir nun für die eigentliche Äquivalenzkette.

$$\begin{aligned}
&(\Box A \land \Box(A \to B)) \to \Box B \\
&\quad \equiv \neg(\Box A \land \Box(A \to B)) \lor \Box B \\
&\quad \equiv \neg(\Box A \land \Box B) \lor \Box B \\
&\quad \equiv (\neg\Box A \lor \neg\Box B) \lor \Box B \\
&\quad \equiv \neg\Box A \lor (\neg\Box B \lor \Box B) \\
&\quad \equiv \neg\Box A \lor \top \equiv \top
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Formel wurde damit gezeigt. □

(3): Bei dieser Formel eignet es sich in einer hierarchischen Struktur vorzugehen und zunächst einfachere Subformeln zu betrachten.

$$\begin{aligned}
&A \equiv A \land \top \equiv A \land (B \lor \neg B) \\
&\quad \equiv (A \land B) \lor (A \land \neg B)
\end{aligned}$$

Dieses Resultat soll nun verwendet werden, um eine alternative äquivalente Formel für die rechte Seite der gegebenen Formel zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
&\Diamond A \equiv \Diamond((A \land B) \lor (A \land \neg B)) \\
&\quad \equiv \Diamond(A \land B) \lor \Diamond(A \land \neg B)
\end{aligned}$$

$$\Diamond B \equiv \Diamond(A \land B) \lor \Diamond(\neg A \land B)$$

$$\begin{aligned}
&\Diamond A \land \Diamond B \\
&\quad \equiv (\Diamond(A \land B) \lor \Diamond(A \land \neg B)) \\
&\qquad \land (\Diamond(A \land B) \lor \Diamond(\neg A \land B)) \\
&\quad \equiv \Diamond(A \land B) \lor (\Diamond(A \land \neg B) \land \Diamond(\neg A \land B))
\end{aligned}$$

Durch die gezeigten Äquivalenzen lässt sich nun das Folgende notieren.

$$\begin{aligned}
&\Diamond(A \land B) \to (\Diamond A \land \Diamond B) \\
&\quad \equiv \neg\Diamond(A \land B) \lor (\Diamond A \land \Diamond B) \\
&\quad \equiv \neg\Diamond(A \land B) \\
&\qquad \lor (\Diamond(A \land B) \lor (\Diamond(A \land \neg B) \land \Diamond(\neg A \land B))) \\
&\quad \equiv (\neg\Diamond(A \land B) \lor \Diamond(A \land B)) \\
&\qquad \lor (\Diamond(A \land \neg B) \land \Diamond(\neg A \land B)) \\
&\quad \equiv \top \lor (\Diamond(A \land \neg B) \land \Diamond(\neg A \land B)) \equiv \top
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Formel wurde damit gezeigt. □

(4): Durch Verwendung der folgenden aus Lemma 6.6 bekannten Äquivalenz kann die Gültigkeit der Formel direkt gezeigt werden.

$$\Diamond(A \to B) \equiv \Box A \to \Diamond B$$

Wir verwenden zudem $\varphi \leftrightarrow \varphi \equiv \top$ für alle modal-logischen Formeln φ. Es folgt nun die folgende Kette.

$$\begin{aligned}
&\Diamond(A \to B) \leftrightarrow (\Box A \to \Diamond B) \\
&\quad \equiv (\Box A \to \Diamond B) \leftrightarrow (\Box A \to \Diamond B) \equiv \top
\end{aligned}$$

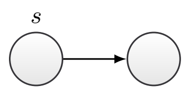
Die Gültigkeit dieser Formel ist gezeigt. □

Aufgabe 24

Es sei φ eine beliebige modal-logische Formel. Dann ist nach Definition $\Box\Diamond\varphi$ genau dann nicht gültig, wenn es ein Kripke-Modell $\mathcal{M}$ mit Startwelt s gibt, sodass $\mathcal{M}, s \not\models_{\mathrm{K}} \Box\Diamond\varphi$ gilt. Dies ist aber gerade äquivalent dazu, dass es ein Kripke-Modell $\mathcal{M}$ mit Startwelt s gibt, sodass $\mathcal{M}, s \models_{\mathrm{K}} \neg\Box\Diamond\varphi$ gilt. Wir wissen nun das Folgende.

$$\neg\Box\Diamond\varphi \equiv \Diamond\Box\neg\varphi$$

Damit erfüllt das folgende Modell, welches nicht von φ abhängt, mit Startwelt s die Formel $\neg\Box\Diamond\varphi$.



Insbesondere gibt es also ein Kripke-Modell mit ausgewählter Startwelt, welches $\neg\Box\Diamond\varphi$ erfüllt und damit $\Box\Diamond\varphi$ nicht erfüllt. $\Box\Diamond\varphi$ ist demzufolge nicht gültig. Da φ beliebig gewählt wurde, ist damit die Aussage gezeigt. □