LOGIKSYSTEME
ÜBUNGSSERIE 9: LÖSUNGEN

Markus Pawellek
markuspawellek@gmail.com

7. März 2018

Aufgabe 35

Es seien $X \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge und $R \subset X \times X$ eine binäre Relation auf X. Wir wollen zeigen, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) R ist reflexiv, transitiv und symmetrisch.

(ii) R ist reflexiv und euklidisch.

(i) ⇒ (ii): Unter Annahme von (i) wissen wir bereits, dass R reflexiv ist. Es reicht also zu zeigen, dass R euklidisch ist. Im Folgenden seien $x, y, z \in X$ beliebig gewählt.

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \in R \quad \& \quad (x,z) \in R \\
&\overset{\text{(Symmetrie)}}{\Longrightarrow} (y,x) \in R \quad \& \quad (x,z) \in R \\
&\overset{\text{(Transitivität)}}{\Longrightarrow} (y,z) \in R
\end{aligned}
$$

Damit wurde gezeigt, dass R reflexiv ist.

(ii) ⇒ (i): Unter Annahme von (i) wissen wir bereits, dass R reflexiv ist. Es reicht also zu zeigen, dass R transitiv und symmetrisch ist. Im Folgenden seien wieder $x, y, z \in X$ beliebig gewählt. Wir wollen zuerst die Symmetrie zeigen.

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \in R \\
&\overset{\text{(Reflexivität)}}{\Longrightarrow} (x,y) \in R \quad \& \quad (x,x) \in R \\
&\overset{\text{(Euklidizität)}}{\Longrightarrow} (y,x) \in R
\end{aligned}
$$

Durch Verwendung der Symmetrie lässt sich nun auch die Transitivität zeigen.

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \in R \quad \& \quad (y,z) \in R \\
&\overset{\text{(Symmetrie)}}{\Longrightarrow} (y,x) \in R \quad \& \quad (y,z) \in R \\
&\overset{\text{(Euklidizität)}}{\Longrightarrow} (x,z) \in R
\end{aligned}
$$

In allen Fällen waren die gewählten Variablen beliebig. Demnach wurde die gewünschte Äquivalenz gezeigt. □