Markus Pawellek
144645

Einführung in die Astronomie

Übungsserie 9

Aufgabe 1

- auf Europa messbare Flussdichte durch direkte Sonneneinstrahlung (indirekte Strahlung durch Jupiter wird vernachlässigt)

$$F_{\odot\mu} = \frac{L_\odot}{4\pi R_{\odot\mu}^2}$$ $L_\odot$ … Leuchtkraft der Sonne, $R_{\odot\mu}$ … Abstand zwischen Sonne und Europa

- Aufnahmefläche von Europa (Fläche senkrecht zur Einstrahlung):

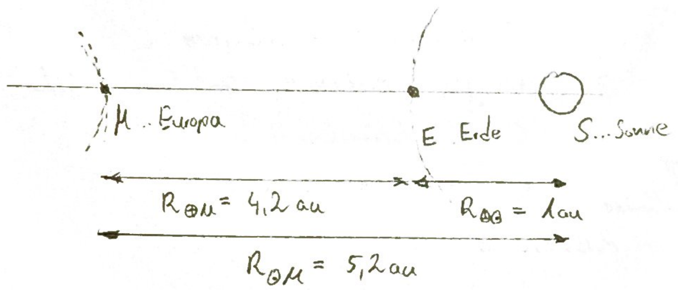
$$A_\mu = \pi r_\mu^2$$ r_μ … Radius von Europa

- Licht, welches auf Europa eintrifft, wird diffus reflektiert mit Reflexionskoeffizient α

$\Longrightarrow$ Leuchtkraft von Europa: $L_\mu = \alpha \pi r_\mu^2 F_{\odot\mu} = \frac{\alpha}{4} L_\odot \frac{r_\mu^2}{R_{\odot\mu}^2}$

- Europa ist komplett mit Eis bedeckt. Dieses reflektiert sichtbares Licht (Hauptanteil bei Sonneneinstrahlung) sehr gut. Durch Korrektur aufgrund indirekter Einstrahlung sollte $\alpha \approx 1$ gelten.

- für maximale scheinbare Helligkeit muss sich Europa so nah wie möglich an der Erde befinden (wir berechnen damit den kleinsten Magnitudenwert)



$\Longrightarrow$ Erde muss zwischen Sonne und Europa stehen

$\Longrightarrow$ von der Erde messbare Flussdichte der Sonne: $F_{\odot\oplus} = \frac{L_\odot}{4\pi R_{\odot\oplus}^2}$

von der Erde messbare Flussdichte von Europa: $F_{\mu\oplus} = \frac{L_\mu}{4\pi R_{\oplus\mu}^2}$

$$\Longrightarrow \quad F_{\mu\oplus} = \frac{\alpha}{4} \frac{r_\mu^2}{R_{\odot\mu}^2} \cdot \frac{L_\odot}{4\pi R_{\oplus\mu}^2}$$

- der scheinbare Helligkeitsunterschied zwischen Sonne und Europa:

$$m_\mu - m_\odot = -\frac{5}{2} \lg\left(\frac{F_{\mu\oplus}}{F_{\odot\oplus}}\right) \mathrm{mag}$$

m_μ … scheinbare Helligkeit Europa
$m_\odot$ … scheinbare Helligkeit Sonne
$m_\odot \approx -26{,}8$

$$\Longrightarrow \quad m_\mu = m_\odot - \frac{5}{2} \lg\left[\frac{\alpha}{4} \cdot \frac{r_\mu^2}{R_{\odot\mu}^2} \cdot \frac{R_{\odot\oplus}^2}{R_{\oplus\mu}^2}\right] \mathrm{mag}$$

$$\Rightarrow \quad m_\mu = m_\odot - \frac{5}{2}\,\mathrm{mag} \cdot \left[\underbrace{\lg \frac{\alpha}{4}}_{\approx -0{,}602} + 2 \underbrace{\lg \frac{r_\mu}{R_{\odot\mu}}}_{} + 2 \underbrace{\lg \frac{R_{\odot\oplus}}{R_{\oplus\mu}}}_{} \right]$$

$$\approx \underline{\underline{6{,}26\ \mathrm{mag}}}$$

$$\lg \frac{1600\,\mathrm{km}}{5{,}2\ \mathrm{au}} = \lg \frac{1{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{km}}{5{,}2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}} = \lg\left(\frac{1{,}6}{5{,}2 \cdot 1{,}5}\right) - 5 \approx -5{,}688$$

$$\lg \frac{1\ \mathrm{au}}{4{,}2\ \mathrm{au}} \approx -0{,}623$$

Referenzwert für scheinbare Helligkeit:

$$m_\mu^{Tab} = 5{,}3\ \mathrm{mag}$$

Europa reflektiert das Sonnenlicht zwar diffus, strahlt aber nicht in alle Richtungen gleich (nicht isotrop) $\Rightarrow$ 4π Raumwinkel müsste korrigiert werden

einfachste Korrektur: Europa wird zur Hälfte von Sonne beleuchtet

$\Rightarrow$ strahlt näherungsweise mit 2π Raumwinkel ab

$\Rightarrow$ Korrektur um den Wert: $-\frac{5}{2}\,\mathrm{mag} \cdot \lg(2)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{m_\mu^{korr} \approx 5{,}51\ \mathrm{mag}}}$

(weitere Korrekturen durch die Bestrahlung anderer Quellen möglich)

Aufgabe 2

Kann man die Masse des Satelliten im Vergleich zum Körper vernachlässigen, so gilt nach dem dritten Keplerschen Gesetz das Folgende.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

T... Umlaufzeit des Satelliten

a... große Halbachse der Satellitenbahn

G... Gravitationskonstante

M... Masse des Körpers

$\Rightarrow$ die Umlaufzeit hängt nur von großer Halbachse und nicht von kleiner Halbachse ab

$\Rightarrow$ man kann ohne Einschränkung annehmen, dass sich der Satellit auf einer kreisförmigen Bahn bewegt, die mindestens den Radius R des Körpers haben muss, damit der Satellit nicht in den Körper stürzt

$$T: [R, \infty) \to \mathbb{R}, \quad T(a) := \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} a^3}$$

$\Rightarrow$ bei T handelt es sich um eine strikt monoton steigende Funktion

$\Rightarrow$ T erreicht Minimum T^* bei R $\Rightarrow$ $T^* = T(R) = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} R^3}$

Bezeichnet ρ die mittlere Dichte des Körpers, so gilt weiterhin: $M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$\Rightarrow \frac{R^3}{M} = \frac{3}{4\pi\rho} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T^* = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}}$$

$\Rightarrow$ weisen Körper eine ähnliche Dichte auf, so müssen auch ihre minimalen Umlaufzeiten ähnlich sein mittlere Dichten : $\rho_{\odot} \approx 1400 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{\oplus} \approx 5500 \frac{kg}{m^3}$,

$$\rho_B \approx \frac{7 \cdot 10^{10} kg}{\frac{4}{3}\pi (250m)^3} \approx 1070 \frac{kg}{m^3}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{T^*_{\odot} \approx 2{,}8h}}$, $\underline{\underline{T^*_{\oplus} \approx 1{,}4h}}$, $\underline{\underline{T^*_B \approx 3{,}2h}}$