Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 12. Übungsserie

2019-01-31

Aufgabe 12.1

a) Das H-R-Diagramm zeigt den Zusammenhang zwischen Spektraltyp und absoluter Helligkeit. Absolut helle Sterne werden häufiger im H-R-Diagramm erscheinen, da sie auch noch aus großer Entfernungen gesehen werden können. Wird dagegen ein H-R-Diagramm betrachtet, das beispielsweise nur die Sterne innerhalb von 10 pc Entfernung zeigt, unterscheidet es sich vom „klassischen" H-R-Diagramm: Riesen oder helle Hauptreihensterne fehlen dann völlig.

b) Ganz allgemein gibt es zwei mögliche Gründe warum es von einer Sternsorte mehr gibt: Entweder es entstehen mehr, oder sie leben länger. Beim Vergleich von späten und frühen Spektraltypen trifft beides zu. Massereiche Sterne werden einerseits seltener gebildet. (In der Regel fragmentiert eine massereiche protostellare Wolke durch ihren Eigendrehimpuls oder Dichteschwankungen, anstatt einen einzelnen Stern zu bilden.) Andererseits verbrennen sie durch ihre größere Kerndichte und -temperatur ihren Wasserstoff deutlich schneller ($L \propto M^{3,9}$, somit Lebensdauer $\propto M/L \propto M^{-2,9}$) und erreichen so das Ende ihrer Hauptreihenphase früher.

Aufgabe 12.2

Gemäß $L \propto R^2 T^4$ gilt auch $R \propto L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$. Erhöht sich die Leuchtkraft um einen Faktor 2000 bei halbierter Temperatur, ergibt sich

$$\frac{R}{R_\odot} = 2000^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 180. \tag{1}$$

Die Sonne würde sich also auf das 180-fache ihrer jetzigen Größe aufblähen. Das ist fast eine Astronomische Einheit. Man muss hier allerdings ein wenig vorsichtig sein: Durch die starke Ausdehnung und die entsprechend geringe Oberflächengravitation sind die oberen Schichten von Roten Riesen vergleichsweise schwach gebunden. Photosphäre, Chromosphäre und Korona sind sehr ausgedünnt und ausgedehnt, noch über diese formal 180 Sonnenradien hinaus.

Zusatz zu 12.2

Auf der Erdoberfläche stellt sich (unter Vernachlässigung des Treibhauseffektes der Atmosphäre) ein Gleichgewicht zwischen absorbierter Sonnenstrahlung und emittierter Eigenwärmestrahlung ein:

$$L\frac{\pi R_\oplus^2}{4\pi a_\oplus^2} = 4\pi R_\oplus^2 \sigma T_\oplus^4. \tag{2}$$

(Die linke Seite der Gleichung ist im übrigen die Solarkonstante.) Schreibt man die Gleichung einmal für den heutigen Fall ($T_\oplus$ und $L_\odot$) und einmal für den Roten-Riesen-Fall ($T'_\oplus$ und $L'_\odot$) und dividiert beide Gleichungen, so bekommt man

$$\frac{L'_\odot}{L_\odot} = \left(\frac{T'_\oplus}{T_\oplus}\right)^4, \tag{3}$$

da der Erdradius unverändert bleibt. Schließlich folgt

$$T'_\oplus = T_\oplus \sqrt[4]{\frac{L'_\odot}{L_\odot}}. \tag{4}$$

Die 2000-fache Leuchtkraft führt somit zu einer Erhöhung der Temperatur auf der Erde um einen Faktor 7 auf nahezu 2000 K. Bei diesen Temperaturen wäre die Erdoberfläche wieder aufgeschmolzen.

Aufgabe 12.3

Auf die äußersten Schichten der Sonne wirkt, zu jedem Zeitpunkt, die komplette Anziehungskraft der restlichen, weiter innen liegenden Sonne, was äquivalent ist zu einer Punktmasse mit $M = 1\ M_\odot$ im Zentrum. Die äußerste Hülle fällt also so, als wäre die übrige Sonne schon komplett in sich zusammengefallen.
Nebenrechnung: Die Tatsache, dass die äußersten Schichten immer außen bleiben kann man sich folgendermaßen klar machen. Beginnt man mit der Freifall-Bewegungsleichung für ein Teilchen,

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{GM(<r)m}{r^2} = -\frac{4\pi\rho(<r)Gmr^3}{r^2} \tag{5}$$

$$\ddot{r} = -4\pi\rho(<r)Gr, \tag{6}$$

und substituiert den radialen Abstand durch seinen Logarithmus, erhält man

$$\lambda = \ln r \qquad (bzw.\ e^\lambda = r), \tag{7}$$

$$d\lambda = \frac{1}{r}dr, \tag{8}$$

$$e^\lambda d\lambda = dr, \tag{9}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^\lambda\frac{d\lambda}{dt}\right) = e^\lambda\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + e^\lambda\frac{d^2\lambda}{dt^2} = e^\lambda\left(\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda}\right), \tag{10}$$

$$e^\lambda\left(\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda}\right) = -4\pi\rho(<\lambda)Ge^\lambda \tag{11}$$

$$\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda} = -4\pi\rho(<\lambda)G \tag{12}$$

$$\ddot{\lambda} = -4\pi\rho(<\lambda)G - \dot{\lambda}^2. \tag{13}$$

Zu Beginn des Kollapses, wenn $\dot{\lambda} = 0$ für alle λ, gilt somit $\ddot{\lambda} = -4\pi\rho(<\lambda)G$. Wenn man nun eine homogene Massenverteilung mit (räumlich) konstanter Dichte ρ annimmt, dann ist $\ddot{\lambda}$ unabhängig von λ. Jeder Massenpunkt wird also (logarithmisch) gleich beschleunigt. Automatisch bleibt damit aber auch, unter diesen Anfangsbedingungen, $\dot{\lambda}$ stets unabhängig von λ. Die logarithmischen Abstände ändern sich also gleichförmig für alle Massenpunkte in der anfangs homogenen Kugel. Diese fällt somit selbstähnlich in sich zusammen und bleibt homogen. Die äußerste Schicht bleibt die äußerste Schicht und spürt immer die volle Anziehungskraft einer Masse M.
Die Bahn, die ein Teilchen dieser Hülle dann beschreibt, ist eine Keplerbahn (also ein Kegelschnitt) um das Massenzentrum. Genauer gesagt ist es eine entartete Ellipse, deren Aphel $Q = a \cdot (1 + e)$ beim ursprünglichen Sonnenradius $R_\odot$ liegt und deren Perihel $q = a \cdot (1 - e)$ mit dem Brennpunkt zusammenfällt (die Exzentrizität ist formal 1). Die Dauer des Kollaps entspricht somit der Zeit, die vergeht, um vom Aphel zum Perihel zu gelangen, also eine halbe Umlaufperiode. Mit $a = R_\odot/2$ liefert das 3. Kepler'sche Gesetz schließlich die gesuchte Zeit

$$\frac{t}{1\,\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{P}{1\,\mathrm{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1\,\mathrm{AE}}\right)^{3/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2\,\mathrm{AE}}\right)^{3/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7\cdot 10^5\,\mathrm{km}}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^8\,\mathrm{km}}\right)^{3/2} = 5{,}6\cdot 10^{-5} \tag{14}$$

also

$$\underline{t = 30\,\mathrm{min.}} \tag{15}$$

Ein Kollaps im freien Fall dauerte demnach etwa eine halbe Stunde. (Berücksichtigt man relativistische Effekte, dann gilt diese Aussage nur für den mitbewegten Beobachter.)
Für den allgemeinen Fall hat man (mit $a = R/2$)

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{8GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8\rho G}} \tag{16}$$

und

$$t = \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\rho G}}. \tag{17}$$

Eine interstellare Wolke mit $\rho = 10^{-21}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} = 10^{-18}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ fiele demnach in

$$t = 6{,}6 \cdot 10^{13}\,\mathrm{s} \approx 2{,}1 \cdot 10^{6}\,\mathrm{a} \tag{18}$$

in sich zusammen.
In der Realität tritt diesem Freifallkollaps aber zum einen die Drehimpulserhaltung und zum anderen eben der Gasdruck entgegen. Letzterer wird im sogenannten Jeans-Kriterium berücksichtigt.