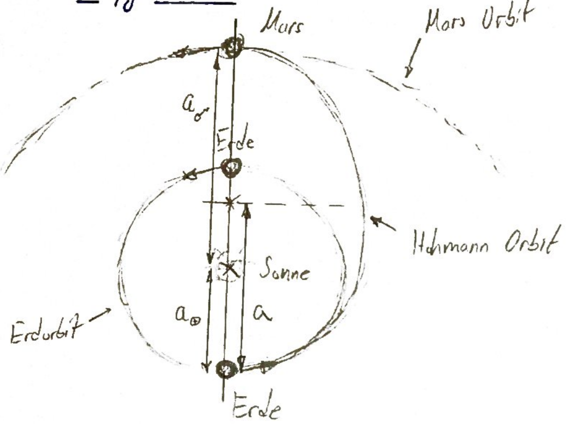
Markus Pawelleh
144645

Einführung in die Astronomie

Übungsserie 6

Aufgabe 1



Nach dem dritten Keplerschen Gesetz gilt:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{P_\oplus^2}{a_\oplus^3} = \frac{P_♂^2}{a_♂^3}$$

P... Umlaufzeit des Hohmann - Orbits

a... große Halbachse des Hohmann - Orbits

$P_\oplus / P_♂$... Umlaufzeit der Erde / des Mars

$a_\oplus / a_♂$... große Halbachse der Erde / des Mars

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}(a_\oplus + a_♂)$$

Flugdauer: $$T = \frac{P}{2} = \frac{1}{2} P_\oplus \sqrt{\frac{a^3}{a_\oplus^3}} = \frac{1}{2} P_\oplus \sqrt{\frac{(a_\oplus + a_♂)^3}{8\, a_\oplus^3}}$$

$$\approx \frac{1}{2}\, 1\,\mathrm{a} \sqrt{\frac{1{,}25^3}{1^3}} \approx \underline{\underline{0{,}70\,\mathrm{a} \approx 8{,}4 \text{ Monate}}}$$

Aufgabe 2

Gravitationsgesetz: $$\vec{F} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \Rightarrow \|\vec{F}\| = \frac{G m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}$$

Erde - Mond: $$F_{\oplus M} = \frac{G m_\oplus m_M}{\|\vec{r}_\oplus - \vec{r}_M\|^2} \approx \frac{G m_\oplus m_M}{r_{\oplus M}^2}$$

Sonne - Mond: $$F_{\odot M} = \frac{G m_\odot m_M}{\|\vec{r}_\odot - \vec{r}_M\|^2} \approx \frac{G m_\odot m_M}{r_{\odot M}^2} \approx \frac{G m_\odot m_M}{r_{\odot\oplus}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{\odot M}}{F_{\oplus M}} = \frac{m_\odot r_{\oplus M}^2}{m_\oplus r_{\odot\oplus}^2} \approx \frac{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1}{400}\,\mathrm{AE}\right)^2}{6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{AE}^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{16} 10^{-4} = \frac{1}{48} 10^2 > 1$$

$$\Rightarrow \quad F_{\odot M} > F_{\oplus M}$$

Der Mond bewegt sich analog zur Erde um die Sonne.
Man kann durch die Nähe des Mondes zur Erde sagen, dass deren gemeinsamer Schwerpunkt um die Sonne kreist. Demzufolge kreisen Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Aufgabe 3

Nach dem Energieintegral gilt: $\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} + \frac{h}{2} \Rightarrow h = v^2 - \frac{2\mu}{r}$

Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt: $\frac{p^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}$

$$v = 30 \frac{km}{s} = 3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}, \quad \mu = GM_\odot \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} kg$$

$$r = 1\,AE \approx 1{,}5 \cdot 10^{11} m$$

$$\Rightarrow v^2 = 9 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}, \quad \frac{\mu}{r} \approx 9 \cdot 10^8 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow h = v^2 - \frac{2\mu}{r} \approx -\frac{\mu}{r} < 0 \Rightarrow \text{gebundene Bewegung}$$

Verdopplung: $h_2 = v^2 - \frac{4\mu}{r} \approx -\frac{3\mu}{r} < 0 \Rightarrow$ gebundene Bewegung

r = const

v = const

$\Rightarrow$ da es sich vorher um einen Kreis handelte, muss es jetzt eine Ellipse sein *

$$\cancel{\Rightarrow \frac{p_2^2}{a^3} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{a^3} \Rightarrow p_2 = \frac{p}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7\,a \approx 8{,}5 \text{ Monate}}$$

Halbierung: $h_{1/2} = v^2 - \frac{\mu}{r} \approx 0 \Rightarrow$ Bewegung könnte gebunden und nicht gebunden.

r = const

v = const

$h_{1/2} = 0 \Rightarrow$ Parabelform $\Rightarrow$ es existiert keine Umlaufzeit mehr.

* $a = -\frac{\mu}{h} \Rightarrow a_2 = -\frac{\mu_2}{h_2} = -\frac{2\mu}{3h} = \frac{2}{3} a$

(3. KG) $\Rightarrow \frac{p_2^2}{a_2^3} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{a^3} \Rightarrow p_2 = \sqrt{\frac{4}{27}}\, p \approx 0{,}38\,a \approx 4{,}6$ Monate