Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 7. Übungsserie

2018-12-13

Aufgabe 7.1

Steht ein Planet von der Erde aus gesehen in Konjunktion mit der Sonne, dann steht er „hinter" der Sonne. Der Abstand zu ihm beträgt somit $r_1 = a_\oplus + a_{\text{Planet}}$. Steht der Planet in Opposition zur Sonne, ihr also gegenüber, dann beträgt der Abstand zur Erde nur $r_2 = a_{\text{Planet}} - a_\oplus$. Aus dem gegebenen Entfernungsmodul Δm mag zu diesen beiden Extremwerten ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\Delta m &= m_1 - m_2 = 5 \log_{10} \frac{r_1}{r_2} && (1)\\
\Delta m &= 5 \log_{10} \frac{a_\oplus + a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Planet}} - a_\oplus} && (2)\\
10^{\frac{\Delta m}{5}} &= \frac{a_\oplus + a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Planet}} - a_\oplus} && (3)\\
10^{\frac{\Delta m}{5}} (a_{\text{Planet}} - a_\oplus) &= a_\oplus + a_{\text{Planet}} && (4)\\
a_{\text{Planet}} \left(10^{\frac{\Delta m}{5}} - 1\right) &= a_\oplus \left(10^{\frac{\Delta m}{5}} + 1\right) && (5)\\
a_{\text{Planet}} &= a_\oplus \frac{10^{\frac{\Delta m}{5}} + 1}{10^{\frac{\Delta m}{5}} - 1}. && (6)
\end{aligned}$$

Mit $\Delta m = 3{,}4$ mag und $a_\oplus = 1$ AE hat man somit

$$a_{\text{Planet}} \approx 1\,\text{AE} \cdot \frac{5+1}{5-1} = 1{,}53\,\text{AE}. \tag{7}$$

Beim gesuchten Planeten handelt es sich also um Mars.

Aufgabe 7.2

Die gesuchte Gesamthelligkeit lässt sich über die Gesamtflussdichte F ableiten:

$$m - m_1 = 2{,}5 \log_{10} \frac{F_1}{F} = -2{,}5 \log_{10} \frac{F}{F_1}, \tag{8}$$

wobei

$$F = F_1 + F_2. \tag{9}$$

Damit hat man

$$m = m_1 - 2{,}5 \log_{10} \frac{F_1 + F_2}{F_1} = m_1 - 2{,}5 \log_{10} \left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right). \tag{10}$$

Aus

$$m_1 - m_2 = 2{,}5 \log_{10} \left(\frac{F_2}{F_1}\right) \tag{11}$$

erhält man nun

$$\frac{F_2}{F_1} = 10^{0{,}4(m_1 - m_2)} \tag{12}$$

und somit

$$m = m_1 - 2{,}5 \log_{10} \left(1 + 10^{0{,}4(m_1 - m_2)}\right). \tag{13}$$

Nebenbemerkung. Sucht man eine Variante, die möglichst allgemein und symmetrisch bzgl. m_1 und m_2 sei, dann kann man folgendermaßen vorgehen. Für den Gesamtfluss F gilt

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i, \tag{14}$$

für die beitragenden Komponenten jeweils

$$F_i = F_0 10^{0,4(m_0 - m_i)}, \tag{15}$$

wobei F_0 und m_0 hier Bezugsgrößen (oder Normierungen) darstellen. Wie sich weiter unten zeigt, spielen diese keine Rolle, und man könnte auch gleich $F_0 = F$ und $m_0 = m$ setzen. Die Gesamthelligkeit folgt nun aus

$$\begin{aligned}
m - m_0 &= -2{,}5 \log_{10} \frac{F}{F_0} = -2{,}5 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i}{F_0} && (16)\\
&= -2{,}5 \log_{10} \sum_{i=1}^{N} 10^{0,4(m_0 - m_i)} && (17)\\
&= -2{,}5 \log_{10} \left(10^{0,4 \cdot m_0} \sum_{i=1}^{N} 10^{-0,4 \cdot m_i} \right) && (18)\\
&= -m_0 - 2{,}5 \log_{10} \sum_{i=1}^{N} 10^{-0,4 \cdot m_i}, && (19)\\
m &= -2{,}5 \log_{10} \sum_{i=1}^{N} 10^{-0,4 \cdot m_i}. && (20)
\end{aligned}$$

Im Spezialfall von zwei Komponenten ($N = 2$) führt das zu

$$m = -2{,}5 \log_{10} \left(10^{-0,4 m_1} + 10^{-0,4 m_2} \right). \tag{21}$$

Mit $m_1 = 2$ mag und $m_2 = 3$ mag folgt letztlich aus beiden Gleichungen

$$m = 1\overset{\mathrm{m}}{,}64. \tag{22}$$

Aufgabe 7.3

Zunächst bestimmen wir das Maximum von

$$B_\lambda^{\mathrm{W}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-hc}{\lambda kT}} \tag{23}$$

bezüglich λ. Dazu setzt man wie gewohnt die erste Ableitung gleich Null und stellt dann nach λ um:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{10hc^2}{\lambda^6} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-hc}{\lambda kT}} + \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{hc}{\lambda^2 kT} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-hc}{\lambda kT}} && (24)\\
&= -\frac{5}{\lambda} B_\lambda^{\mathrm{W}} + \frac{hc}{\lambda^2 kT} B_\lambda^{\mathrm{W}} && (25)\\
\frac{5}{\lambda} &= \frac{hc}{\lambda^2 kT} && (26)\\
\lambda_{\max} &= \underline{\underline{\frac{hc}{5kT}}}. && (27)
\end{aligned}$$

[Die exakte Lösung für die Planckfunktion (anstelle der Wien'schen Näherung) sieht übrigens so aus: Man bekommt zunächst aus den Nullstellen der ersten Ableitung die transzendente Beziehung

$$\lambda = \frac{hc}{5kT} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{hc}{\lambda kT}\right]} \qquad \text{bzw.} \quad \frac{hc}{\lambda kT} = 5 \cdot \left(1 - \exp\left[-\frac{hc}{\lambda kT}\right]\right) \tag{28}$$

Durch iteratives Lösen – Einsetzen von λ_n auf der rechten Seite gibt λ_{n+1} auf der linken – erhält man schließlich

$$\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5\,(1 - \exp[-5(1 - \exp[-5(1 - \exp[-5(1 - \ldots)])])]) \approx \frac{5}{1{,}0070} \tag{29}$$

und

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{5kT} \cdot \frac{1}{1 - \exp[-5(1 - \exp[-5(1 - \exp[-5(1 - \ldots)])])]} \approx 1{,}0070 \cdot \frac{hc}{5kT}. \tag{30}$$

Der Fehler, den man macht, wenn man das Maximum über die Wien'sche Näherung bestimmt, beträgt also nur 0,7 % im Vergleich zur vollen Planckfunktion.]
Für die Proportionalitätskonstante zwischen $\lambda_{\max}$ und T^{-1} gilt damit

$$\frac{hc}{5k} = 2{,}9 \times 10^{-3}\ \mathrm{K\,m}. \tag{31}$$

Setzt man $\lambda = \lambda_{\max}$ in B_λ^{W} ein, dann erhält man

$$B_\lambda^{\mathrm{W}}(\lambda_{\max}) = \frac{6250 k^5 T^5}{h^4 c^3} \cdot \mathrm{e}^{-5} \tag{32}$$

$$B_\lambda^{\mathrm{W}}(\lambda_{\max}) \approx 42 \frac{k^5 T^5}{h^4 c^3} \approx 4{,}1 \times 10^{-6}\ \mathrm{W\,m^{-3}\,K^{-5}} \cdot T^5. \tag{33}$$

Die Intensität im Bereich des Maximums ist also proportional zu T^5.

Zusatz 2. Da der Vorfaktor $2hc^2\lambda^{-5}$ der Planckfunktion und der Wien'schen Näherung gemein ist und sich somit wegkürzt, folgt der relative Fehler fast unmittelbar aus der Definition:

$$\delta = \frac{B_\lambda - B_\lambda^{\mathrm{W}}}{B_\lambda} = \frac{\left[\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]^{-1} - \mathrm{e}^{-\frac{hc}{\lambda kT}}}{\left[\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]^{-1}} = \mathrm{e}^{-\frac{hc}{\lambda kT}}. \tag{34}$$

Fordert man nun $\delta = 0{,}1$ bzw. $\delta = 0{,}01$, dann bekommt man

$$\lambda(\delta = 0{,}1) = \frac{hc}{2{,}3kT} \approx 2\lambda_{\max}, \tag{35}$$

$$\lambda(\delta = 0{,}01) = \frac{hc}{4{,}6kT} \approx \lambda_{\max}. \tag{36}$$

Im Bereich des Maximums ist die Wien'sche Näherung also noch bis auf etwa 1 % genau.