Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 1. Übungsserie

2018-11-01

Aufgabe 1.1

Aus dem *„Universum in Zahlen"* folgt die Anzahl der Menschen auf der Erde zu $7 \cdot 10^9$ und die Anzahl der Sterne in der Milchstrasse $\sim 10^{11}$. Das heißt, pro Person gibt es ein gutes dutzend Sterne. Auch ohne etymologische Kenntnisse ist es leicht zu sehen, dass sehr viel mehr Mücken pro Kopf existieren. Wer das nicht glaubt, soll einmal im Sommer in die sibirische Taiga fahren – oder an einen deutschen See. Selbst wenn die Mücken außer acht gelassen werden: Die Fläche der sibirischen Taiga beträgt knapp 10^{13} m^2. Wird also angenommen, dass auf je 100 m^2 mindestens 1 Baum kommt gibt es allein dort 10^{11} Bäume (also soviele wie Sterne in der Galaxis!), ganz zu Schweigen von den restlichen Wäldern auf der Welt. Schwirrt also unter jedem Baum nur eine Mücke, reicht die Anzahl aus, um die der Sterne in den Schatten zu stellen. (Und Mücken haben die Angewohnheit, meistens in Schwärmen aufzutreten...).
Ein anderer Vergleich: Die Bundesrepublik Deutschland hat eine Grundfläche von zirka $3{,}5 \cdot 10^{11}$ m^2 – d.h. es gibt ungefähr 0,3 Sterne pro m^2. Eine Zahl von 0,3 Mücken m^{-2} ist zwar sicherlich etwas zu hoch – allerdings bezieht sich die Rechnung ja nur auf Deutschland – weltweit werden die Mücken wieder die Oberhand haben. . .

Aufgabe 1.2

Noch bevor man eine genauere Rechnung macht, kann man schon grob abschätzen, dass sowohl die Ozeane mit einer Tiefe von einigen Kilometern als auch die Atmospäre mit einer effektiven Höhe von 8 km in ihrer Dicke jeweils nur das äußerste Tausendstel der Erde ausmachen. Die Dichte des Wassers liegt außerdem etwa um einen Faktor von fünf unter der der Erde, die der Luft noch einen weiteren Faktor 1000. Somit haben die Ozeane etwa einen Anteil von 10^{-4}–10^{-3} an der Gesamtmasse, die Atmosphäre 10^{-7} bis 10^{-6}.
Will man es genauer rechnen, kann man zunächst tatsächlich die Volumina genauer abschätzen:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Erde}} &= \frac{4\pi R_{\text{Erde}}^3}{3}, && (1)\\
V_{\text{Ozean}} &= 4\pi R_{\text{Erde}}^2 d_{\text{Ozean}} \qquad \text{(Oberfläche mal Tiefe)}, && (2)\\
V_{\text{Atmo}} &= 4\pi R_{\text{Erde}}^2 d_{\text{Atmo}} \qquad \text{(Oberfläche mal Höhe)}. && (3)
\end{aligned}
$$

Nimmt man noch die Dichten $\rho_{\text{Erde}}, \rho_{\text{Wasser}}, \rho_{\text{Luft}}$ hinzu, ergibt sich für die Massenverhältnisse:

$$
\begin{aligned}
\frac{M_{\text{Ozean}}}{M_{\text{Erde}}} &= \frac{3 d_{\text{Ozean}} \rho_{\text{Wasser}}}{R_{\text{Erde}} \rho_{\text{Erde}}}, && (4)\\
\frac{M_{\text{Atmo}}}{M_{\text{Erde}}} &= \frac{3 d_{\text{Atmo}} \rho_{\text{Luft}}}{R_{\text{Erde}} \rho_{\text{Erde}}}. && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

Bis auf den Faktor 3 war also schon die obige Abschätzung zutreffend.
Eine von einem Studenten angebotene, interessante Alternative für die Bestimmung von M_{Atmo} ist die folgende: Man nehme die gut bekannte Größe der Erdoberfläche $A_{\text{Erde}} = 4\pi R_{\text{Erde}}^2$ sowie auf selbiger den Normalluftdruck P und die Fallbeschleunigung g und berechne darüber elegant die Gesamtmasse der Atmospähre, die ja die Ursache für den am Boden herrschenden Luftdruck ist. Unter Zuhilfenahme der Gewichtskraft $F_{\text{Atmo}} = M_{\text{Atmo}} g$ hat man also

$$P = \frac{F_{\text{Atmo}}}{A_{\text{Erde}}} = \frac{M_{\text{Atmo}} g}{A_{\text{Erde}}} \tag{7}$$

und somit

$$M_{\text{Atmo}} = \frac{P \cdot A_{\text{Erde}}}{g} = \frac{P \cdot 4\pi R_{\text{Erde}}^2}{g} \approx \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 12 \cdot (6 \times 10^6 \text{ m})^2}{10 \text{ m s}^{-2}} \approx 4 \times 10^{18} \text{ kg} \tag{8}$$

oder gleich

$$\frac{M_{\text{Atmo}}}{M_{\text{Erde}}} = \frac{P \cdot A_{\text{Erde}}}{M_{\text{Erde}} g} = 3 \frac{P \cdot}{g R_{\text{Erde}} \rho_{\text{Erde}}} \approx \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{10 \text{ m s}^{-2} \cdot 6 \times 10^6 \text{ m} \cdot 5500 \text{ kg m}^{-3}} \approx 10^{-6}. \tag{9}$$

Man nähert hier die Fallbeschleunigung mit einer Konstanten für die Atmosphäre. Man nimmt also an, dass die vertikale Ausdehnung der Atmosphäre im Vergleich zum Erdradius vernachlässigbar ist. Generell bestimmt dabei natürlich der Zweck der Rechnung (oder eben Abschätzung), wie detailliert diese durchzuführen ist.

Aufgabe 1.3

Wäre das Universum statisch, unendlich ausgedehnt und hätte überall ähnliche Eigenschaften, müsste jeder Blick ins All, egal in welche Richtung, irgendwann auf eine Sternoberfläche treffen. Dies lässt sich folgendermaßen zeigen. Wenn p den Bedeckungsgrad des Himmels mit Sternoberflächen darstellt, dann nimmt dieser mit zunehmendem Abstand r zu wie

$$\mathrm{d}p = n \cdot \underbrace{4\pi r^2 \mathrm{d}r}_{A} \cdot \underbrace{\frac{\pi R_*^2}{4\pi r^2}}_{B} \cdot \underbrace{(1-p)}_{C}, \tag{10}$$

wobei n die Zahl der Sterne pro Volumen, A das Volumen der Kugelschale als Volumenelement, B den Anteil der Querschnittsfläche des Sterns (πR_*^2) an der Himmelsfläche ($4\pi r^2$) und C die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass ein Stern nicht hinter einem schon besetzten Fleckchen steht. Trennung der Variablen und Integration führt zu

$$p(r) = 1 - e^{-n\pi R_*^2} \tag{11}$$

also

$$p \to 1 \quad \text{für} \quad r \to \infty. \tag{12}$$

Somit entspräche die Flächenhelligkeit in jeder Richtung etwa der der Sonne. Es wäre nicht nur gleißend hell sondern auch entsprechend heiß, was (glücklicherweise) nicht den tatsächlichen Gegebenheiten entspricht. Das nach Heinrich Wilhelm Olbers benannte Olbers-Paradoxon beschreibt diesen Umstand. Ausweg aus diesem Dilemma böte sich, wenn das Universum nicht unendlich ausgedeht ist oder uns aus einem anderen Grund das Licht sehr entfernter Sterne nicht mehr erreicht.

Man könnte nun meinen, dass Absorption von Sternenlicht auf dem Weg zu uns die Dunkelheit der Nacht erklären kann. Dem ist aber nicht so. Absorber würden die Helligkeit des Himmels letztlich nicht verringern, da sie genauso hell wären. Man kann sich dass z.B. anhand eines einzelnen Absorbers vorstellen. Dieser würde rundherum von Sonnen bestrahlt und erhitzte sich soweit, bis er, im thermischen Gleichgewicht angekommen, die gleiche Temperatur auf seiner (hypothetischen) Oberfläche hätte und Strahlung der gleichen Intensität und Temperatur abgäbe, wie er aufnimmt. Damit wäre er praktisch nicht von den Sternen zu unterscheiden.

Alternativ wäre es auch denkbar, dass die Sterne so systematisch angeordnet sind wie in einem Fraktal und sich großenteils gegenseitig verdecken. Darauf gibt es aber keinen Hinweis.

Die plausibelste Möglichkeit, ein unendliches Universum zu verdunkeln, ist ein expandierendes Universum, bei dem das Licht entfernter Galaxien ins Rote verschoben und damit in seiner Intensität verringert wird. Ist das Universum endlich, löst sich das Problem von selbst. Tatsächlich ist die Gesamtgröße des Universums nach gegenwärtiger Vorstellung zwar nicht bekannt. Für uns von Bedeutung ist allerdings nur das sichtbare Universum. Dieses ist jedoch endlich, da ein Blick in immer größere Entfernung auch ein Blick in immer weitere Vergangenheit bedeutet. Bis schließlich bei Licht, das seit knapp 14 Milliarden Lichtjahren unterwegs ist, die Rotverschiebung gegen unendlich geht und man das Nachglühen des Big Bang, der Entstehung des Universums, sieht. „Älteres" Licht gibt es nicht. Damit gibt es unterm Strich in unserem endlichen Universum nicht genügend Sterne, um den Nachthimmel komplett zu erhellen.