Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 5. Übungsserie

2018-11-29

Aufgabe 5.1

Gaia, die gerade laufende Nachfolgemission zum in den Neunzigern geflogenen Satelliten Hipparcos, soll jährliche Parallaxen π bis hinunter zu 10–20 µmas messen können (siehe Abb. ??). Die maximal messbare Entfernung, die dieser minimalen Parallaxe entspricht, ergibt sich aus

$$\pi = \frac{a_\oplus}{d}, \tag{1}$$
$$\pi[''] = \frac{1}{d[pc]} \tag{2}$$

zu

$$d_{\max}[pc] = 1/\pi_{\min}[''] = 50\,000\ldots100\,000. \tag{3}$$

Damit können, zumindest einige der helleren, Sterne bis an den gegenüberliegenden Rand der Milchstraße vermessen werden.

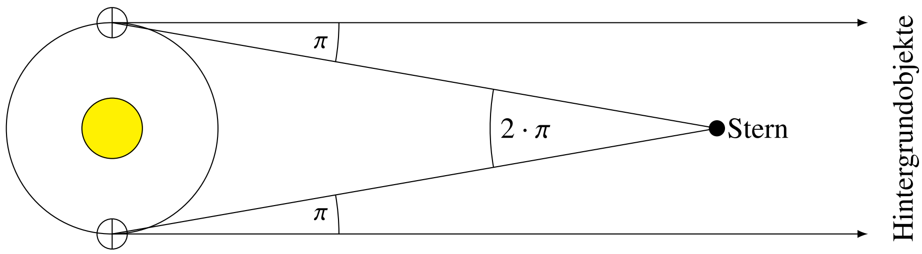

Abbildung 1: Jährliche Parallaxe π eines Sterns auf Grund des Umlaufs der Erde um die Sonne.

Aufgabe 5.2

Barnards Stern hatte im Jahre 1950 die folgenden Koordinaten:

$$\alpha = 17\,\text{h}\,55\,\text{min}\,17{,}2\,\text{s} = 17{,}9214\text{ h} = 268{,}8216^\circ, \tag{4}$$
$$\delta = +04^\circ\,33'\,15'' = 4{,}55416^\circ. \tag{5}$$

Die Verschiebung des Frühlingspunkts aufgrund der Präzession beträgt jährlich etwa $50'' = 0{,}014^\circ$. Die jährliche Änderung von Rektaszension und Deklination ergibt sich folgendermaßen. Geht man von den Transformationsgleichungen aus dem ekliptikalen ins äquatoriale System aus,

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta, \tag{6}$$
$$\sin\alpha\cos\delta = -\sin\beta\sin\epsilon + \sin\lambda\cos\beta\cos\epsilon, \tag{7}$$
$$\sin\delta = \sin\beta\cos\epsilon + \sin\lambda\cos\beta\sin\epsilon, \tag{8}$$

und berücksichtigt man, dass die Präzession eine Drehung entlang der Ekliptik bedeutet (also $\dot\beta = 0$ und $\dot\epsilon = 0$), dann ergeben sich die folgenden zeitlichen Ableitungen. Aus Gleichung (8) erhält man

$$\dot\delta\cos\delta = \dot\lambda\underbrace{\cos\lambda\cos\beta}_{=\cos\alpha\cos\delta}\sin\epsilon \tag{9}$$
$$\dot\delta = \dot\lambda\cos\alpha\sin\epsilon \qquad (\text{mit } \dot\lambda\sin\epsilon \equiv m) \tag{10}$$
$$\dot\delta = m\cos\alpha. \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Aus Gleichung (7) folgt dann

$$
\begin{aligned}
\dot\alpha\cos\alpha\cos\delta - \dot\delta\sin\delta\sin\alpha &= \dot\lambda\underbrace{\cos\lambda\cos\beta}_{=\cos\alpha\cos\delta}\cos\epsilon && (13)\\
\dot\alpha\cos\alpha\cos\delta &= \dot\lambda\cos\alpha\cos\delta\cos\epsilon + \dot\delta\sin\delta\sin\alpha && (14)\\
\dot\alpha &= \dot\lambda\cos\epsilon + \underset{=m\cos\alpha}{\underset{\downarrow}{\dot\delta}}\tan\delta\tan\alpha \qquad (\text{mit } \dot\lambda\cos\epsilon \equiv n) && (15)\\
\dot\alpha &= n + m\sin\alpha\tan\delta. && (16)
\end{aligned}
$$

Dazu müssen zunächst die Präzessionskonstanten berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
n &= \dot\lambda\cos\epsilon = \frac{50''}{1\ \mathrm{yr}}\cos 23{,}5^\circ = 45{,}9''\mathrm{yr}^{-1} = 0{,}0127^\circ\mathrm{yr}^{-1}, && (17)\\
m &= \dot\lambda\sin\epsilon = \frac{50''}{1\ \mathrm{yr}}\sin 23{,}5^\circ = 19{,}9''\mathrm{yr}^{-1} = 0{,}0055^\circ\mathrm{yr}^{-1}. && (18)
\end{aligned}
$$

Damit folgt nun für $\dot\delta$ und $\dot\alpha$ des Barnardsterns:

$$
\begin{aligned}
\dot\delta &= m\cos\alpha = 0{,}0055^\circ\mathrm{yr}^{-1}\cos 268{,}8216^\circ\\
&= -0{,}000113^\circ\mathrm{yr}^{-1} = -0{,}41''\mathrm{yr}^{-1}, && (19)\\
\dot\alpha &= n + m\sin\alpha\tan\delta = 0{,}0127^\circ\mathrm{yr}^{-1} + 0{,}0055^\circ\mathrm{yr}^{-1}.\sin 268{,}8216^\circ\tan 4{,}55416^\circ\\
&= 0{,}0122^\circ\mathrm{yr}^{-1} = 44{,}14''\mathrm{yr}^{-1}. && (20)
\end{aligned}
$$

Im Zeitraum zwischen 1950 und 2000 ($\Delta t = 50$ yr) betrug die Änderung auf Grund der Präzession somit insgesamt

$$
\begin{aligned}
\Delta\delta_\mathrm{p} &\approx \dot\delta_\mathrm{p}\Delta t = -0{,}0057^\circ = -20{,}52'', && (21)\\
\Delta\alpha_\mathrm{p} &\approx \dot\alpha_\mathrm{p}\Delta t = 0{,}61^\circ = 36{,}6'. && (22)
\end{aligned}
$$

Damit ergäben sich die Koordinaten im Jahr 2000 (auf Grund der Präzession) zu

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 268{,}8216^\circ + 0{,}61^\circ = 269{,}4316^\circ = 17\,\mathrm{h}\,57\,\mathrm{min}\,55\,\mathrm{s}, && (23)\\
\delta &= 4^\circ.55416 - 0^\circ.0057 = 4^\circ.5485 = +04^\circ\,32'\,55''. && (24)
\end{aligned}
$$

Für die Änderung von Rektaszension und Deklination auf Grund der Eigenbewegung μ gelten folgende Formeln

$$
\begin{aligned}
\mu_\alpha[''\mathrm{yr}^{-1}] &= \mu[''\mathrm{yr}^{-1}]\sin\theta, && (25)\\
\mu_\delta[''\mathrm{yr}^{-1}] &= \mu[''\mathrm{yr}^{-1}]\cos\theta, && (26)\\
& && (27)
\end{aligned}
$$

wobei θ hier den Positionswinkel bezeichnet und μ_α und $\mu_\delta[''\mathrm{yr}^{-1}]$ die Komponenten der Eigenbewegung in Richtung der Rektaszension und der Deklination. Die Eigenbewegung von Barnards Stern beträgt $10{,}31''\mathrm{yr}^{-1}$ pro Jahr, der Positionswinkel $\theta \approx 0^\circ$. Damit ergibt sich für die jährliche Änderung:

$$
\begin{aligned}
\mu_\alpha &= 10{,}31''\mathrm{yr}^{-1}\sin 0^\circ = 0''\mathrm{yr}^{-1} = 0^\circ\mathrm{yr}^{-1}, && (28)\\
\mu_\delta &= 10{,}31''\mathrm{yr}^{-1}\cos 0^\circ = 10{,}31''\mathrm{yr}^{-1} = 0{,}003^\circ\mathrm{yr}^{-1}. && (29)
\end{aligned}
$$

In den 50 Jahren zwischen 1950 und 2000 ergibt sich damit eine Gesamtänderung auf Grund der Eigenbewegung von

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_\mathrm{e} &\approx \mu_\alpha\Delta t/\cos\delta \approx 0^\circ, && (30)\\
\Delta\delta_\mathrm{e} &\approx \mu_\delta\Delta t = 0{,}15^\circ = 9'. && (31)
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich die Koordinaten im Jahr 2000 (auf Grund der Eigenbewegung) zu

$$
\alpha = 268{,}8216^\circ = 17\,\mathrm{h}\,55\,\mathrm{min}\,17{,}2\,\mathrm{s}, \qquad (32)
$$

$$\delta = 4{,}55416° + 0{,}15° = 4{,}70416° = +04°\,42'\,15''. \quad (33)$$

Insgesamt ergeben sich in Summe der beiden Effekt (Präzession und Eigenbewegung) folgende Koordinaten im Jahr 2000:

$$\alpha_{2000} = \alpha_{1950} + \Delta^p_\alpha + \Delta^e_\alpha, \quad (34)$$

$$\delta_{2000} = \delta_{1950} + \Delta^p_\delta + \Delta^e_\delta, \quad (35)$$

also

$$\alpha_{2000} = 268{,}8216° + 0{,}61° = 269{,}4316° = 17\,\text{h}\ 57\,\text{min}\ 44\,\text{s}, \quad (36)$$

$$\delta_{2000} = 4{,}55416° - 0{,}0057° + 0{,}15° = 4{,}69846° = +04°\,41'\,54''. \quad (37)$$

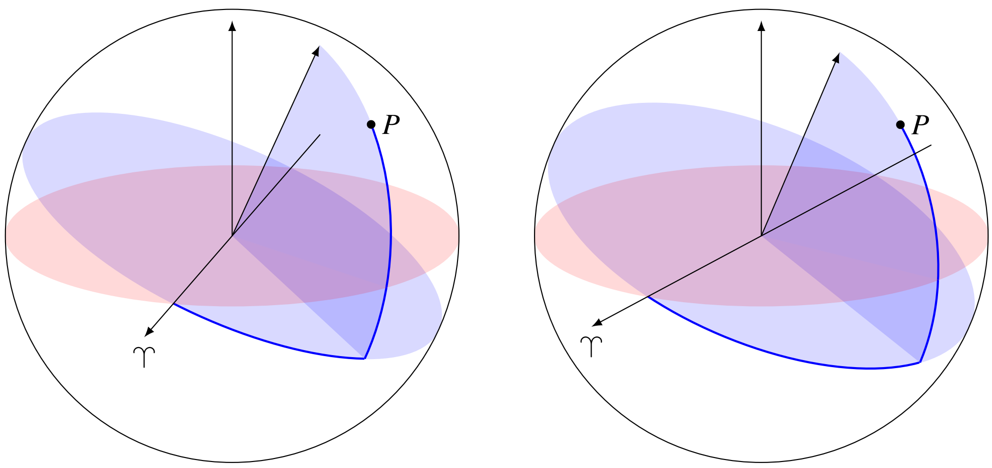

Abbildung 2: Präzession der Erdachse und damit des Frühlingspunktes und des Äquatorsystems II (blau) relativ zum Ekliptiksystem (rot). Der Punkt P an der Himmelskugel behält seine ekliptikale Breite β bei. Seine ekliptikale Länge λ sowie seine Rektaszension α und Deklination δ ändern sich.

Aufgabe 5.3

Für diese *Abschätzung* muss man zunächst eine Annahme darüber machen, was man als „merkliche Veränderung“ betrachtet, das heißt wie weit sich die Position der Sterne verändern soll. Dafür soll hier pauschal $1° = 3600''$ angesetzt werden. (Das entspricht dem doppelten des scheinbaren Sonnendurchmessers, also schon einer ordentlichen Verschiebung.) Um dies nun mit der typischen Eigenbewegung der hellen Sterne in den Sternbildern zu vergleichen, benötigen wir noch deren typische Geschwindigkeiten und Abstände. Für ersteres kann man ganz grob $v \sim 10$ km/s = 2 AE/Jahr ansetzen (siehe z.B. „Universum in Zahlen“). (Für die Umrechnung ist folgendes als Eselsbrücke geeignet: Die Erde schafft mit ihrer Bahngeschwindigkeit von 30 km/s einen Sonnenumlauf pro Jahr, also 30 km/s = $2\pi \cdot 1$ AE/Jahr $\approx$ 6 AE/Jahr) Die markantesten Sterne sind nun zwar fast ausnahmslos sehr hell aber trotzdem eben auch (für galaktische Verhältnisse) recht nah, sodass ein guter Schätzwert für ihre typische Entfernung bei etwa 10 bis 100 pc läge. In einer Entfernung von einem Parsec entsprächen 2 AE/Jahr nun per Definition $2''$/Jahr, in 10 bis 100 pc sind es entsprechend 0,2 bis $0{,}02''$/Jahr. Für eine Bewegung um 1 Grad benötigt ein solcher Stern also etwa 20 000 bis 200 000 Jahre. Ein guter Schätzwert wären also „einige Zehntausend Jahre“.

Zusatzaufgabe 5.4

Ist die Höhe der unteren Kulmination größer als Null, dann geht das Objekt nicht unter. Für die Sommersonnenwende ($\delta_\odot = 23{,}4°$) und den Mount Macdonald ($\phi = 64°43{,}5' \approx 64{,}7°$) folgt allerdings:

$$h_{\mathrm{UK}} = -90° + |\delta + \phi| = -90° + 64{,}7° + 23{,}4° = -1{,}9°. \tag{38}$$

Das würde also nicht für Mitternachtssonne reichen. Bedenkt man, dass es für die Aufgabenstellung reichen würde, wenn die obere Kante der Sonne zu sehen ist, gewinnt man noch ein Viertelgrad. Und die Refraktion in Horizontnähe bringt noch einmal ein halbes Grad. Beide Effekte verschieben den „scheinbaren Polarkreis" also um etwa 0,75° nach Süden.
Entscheidend ist aber, dass man vom Gipfel des Berges aus weiter schauen kann. Ist am sichtbaren Horizont noch der Boden beleuchtet, dann sieht man selbst auch die Sonne noch. Kann man also vom Gipfel des Berges weit genug nach Norden blicken, dann haben wir das gesuchte Ergebnis. Die Geometrie für die Lösung dieses Problems ist in Abbildung 3 dargestellt. Mit gegebener Standorthöhe $h = 2{,}76\,\mathrm{km}$ und Erdradius $R = 6400\,\mathrm{km}$ ergibt sich die Entfernung d bis zum sichtbaren Horizont aus $(R+h)^2 = R^2 + d^2$ zu

$$d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2} \overset{h \ll R}{\approx} \sqrt{2Rh}. \tag{39}$$

Der Winkel, um den man über den eigenen Standort hinaus weiter nach Norden schauen kann, bzw. um den der sichtbare Horizont unter der Horizontebene liegt, ist

$$\Delta = \arctan\frac{d}{R} = \arctan\sqrt{2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}} \approx \arctan\sqrt{2\frac{h}{R}} = \arctan\sqrt{2\frac{2{,}76\,\mathrm{km}}{6400\,\mathrm{km}}} \approx 1{,}7°. \tag{40}$$

In Summe beträgt die scheinbare Höhe der unteren Kulmination der Sonnenoberkante über dem sichtbaren Horizont dann also $-1{,}9° + 0{,}75° + 1{,}7° \approx \underline{+0{,}55°}$. Damit steht die Sonne letztlich sogar komplett über dem sichtbaren Horizont. (Vernachlässigt wurde hier, dass auch auf der Sichtlinie vom Beobachter zum Horizont Refraktion auftritt, die den Effekt noch verstärkt. Von sehr hohen Bergen zum Horizont ist sie sogar noch einmal fast so stark wie auf dem Weg von der Lichtquelle zum Horizont.)

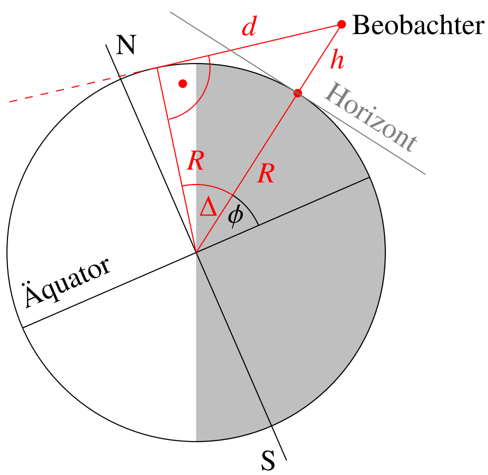

Abbildung 3: Entfernung d bis zum wahren Horizont von einem Standort der (übertrieben dargestellten) Höhe h auf geografischer Breite ϕ mit Erdradius R. Die Nachtseite der Erde ist grau schattiert.