Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 6. Übungsserie

2018-12-06

Aufgabe 6.1

Zwischen Perizentrum und Apozentrum liegt genau die Hälfte einer Bahn und damit der Umlaufzeit. Gesucht ist hier also die halbe Umlaufzeit einer Bahn, deren Perihel konkret etwa mit der großen Halbachse der Erde (1 au) und deren Aphel mit der großen Halbachse des Mars (1,5 au) zusammenfällt. In Formeln gilt also für die gesuchte Bahn:

$$\text{Perizentrum:} \quad q = a(1-e) = a_\oplus, \tag{1}$$

$$\text{Apozentrum:} \quad Q = a(1+e) = a_♂. \tag{2}$$

Aus Gl.+(1)+(2) folgt dann

$$2a = a_\oplus + a_♂ \tag{3}$$

$$\text{bzw.} \quad a = \frac{1}{2}(a_\oplus + a_♂) = 1{,}25 \text{ au}. \tag{4}$$

Nach Gleichung (1) beträgt die Exzentrizität somit $e = 1 - q/a = 0{,}2$. Als halbe Umlaufzeit bekommt man schließlich

$$\frac{P}{2} = \frac{P_\oplus}{2}\left(\frac{a}{a_\oplus}\right)^{3/2} = 0{,}5 \text{ yr} \cdot 1{,}25^{3/2} \approx 0{,}7 \text{ yr} \approx 255 \text{ d}. \tag{5}$$

Die Reise auf einem Homann-Orbit von der Erde zum Mars dauert also 255 Tage.

Aufgabe 6.2

Von der Sonne ($\odot$) erfährt der Mond eine Gravitationskraft

$$F_{\odot\text{Mond}} = \frac{GM_\odot M_\text{Mond}}{r^2_{\odot\text{Mond}}}, \tag{6}$$

von der Erde ($\oplus$)

$$F_{\oplus\text{Mond}} = \frac{GM_\oplus M_\text{Mond}}{r^2_{\oplus\text{Mond}}}. \tag{7}$$

Das Verhältnis daraus ist

$$\frac{F_\odot}{F_\oplus} = \frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{r_{\oplus\text{Mond}}}{r_{\odot\oplus}}\right)^2, \tag{8}$$

und mit $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg, $M_\oplus \approx 6 \times 10^{24}$ kg, $r_{\odot\text{Mond}} = 1 \text{ AE} \approx 1{,}5 \times 10^8$ km sowie $r_{\oplus\text{Mond}} \approx 3{,}8 \times 10^5$ km erhält man

$$\frac{F_\odot}{F_\oplus} \approx 2. \tag{9}$$

Die Sonne zieht also stärker am Mond als die Erde, obwohl der Mond an letztere gebunden ist. Dies ist kein Widerspruch: Der Bewegung beider Einzelkörper um die Sonne ist die Bewegung beider um einander *überlagert*. Als Zusatz: Um Erde und Mond voneinander zu trennen, müsste die relative Beschleunigung, also die Differenz der beiden Beschleunigungen Sonne–Erde und Sonne–Mond, größer sein als die gegenseitige Anziehung Erde–Mond. Die Relativbeschleunigung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} \frac{F_{\odot\oplus}}{M_\oplus} - \frac{F_{\odot\text{Mond}}}{M_\text{Mond}} &= \frac{GM_\odot}{r^2_{\odot\oplus}} - \frac{GM_\odot}{r^2_{\odot\text{Mond}}} \\ &= \frac{GM_\odot(r^2_{\odot\text{Mond}} - r^2_{\odot\oplus})}{r^2_{\odot\oplus} r^2_{\odot\text{Mond}}} \end{aligned} \tag{10}$$

und beträgt maximal (für $r_{\odot\mathrm{Mond}} = r_{\odot\oplus} + r_{\oplus\mathrm{Mond}}$)

$$\frac{F_{\odot\oplus}}{M_\oplus} - \frac{F_{\odot\mathrm{Mond}}}{M_\mathrm{Mond}} = \frac{GM_\odot(r_{\odot\oplus}^2 + 2r_{\odot\oplus}r_{\oplus\mathrm{Mond}} + r_{\oplus\mathrm{Mond}}^2 - r_{\odot\oplus}^2)}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}^2} = \frac{GM_\odot(2r_{\odot\oplus}r_{\oplus\mathrm{Mond}} + r_{\oplus\mathrm{Mond}}^2)}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}^2} \tag{11}$$

$$= \frac{GM_\odot(2r_{\odot\oplus}r_{\oplus\mathrm{Mond}} + r_{\oplus\mathrm{Mond}}^2)}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}^2} \approx \frac{GM_\odot(2r_{\odot\oplus}r_{\oplus\mathrm{Mond}})}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}^2} = \frac{2GM_\odot r_{\oplus\mathrm{Mond}}}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}}. \tag{12}$$

Die Beschleunigung des Mondes Richtung Erde beträgt dagegen

$$\frac{F_{\oplus\mathrm{Mond}}}{M_\mathrm{Mond}} = \frac{GM_\oplus}{r_{\oplus\mathrm{Mond}}^2}, \tag{13}$$

das Verhältnis der Beschleunigungen somit

$$\left(\frac{F_{\odot\oplus}}{M_\oplus} - \frac{F_{\odot\mathrm{Mond}}}{M_\mathrm{Mond}}\right)\left(\frac{F_{\oplus\mathrm{Mond}}}{M_\mathrm{Mond}}\right)^{-1} = \frac{2GM_\odot r_{\oplus\mathrm{Mond}}}{r_{\odot\mathrm{Mond}}^2 r_{\odot\oplus}} \frac{r_{\oplus\mathrm{Mond}}^2}{GM_\oplus} \approx 2\frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{r_{\oplus\mathrm{Mond}}}{r_{\odot\oplus}}\right)^3 \approx 10^{-2}. \tag{14}$$

Durch die dritte Potenz beim Abstandsverhältnis gewinnt diesmal das Paar aus Erde und Mond. Die Sonne zieht absolut stärker an Erde und Mond, aber überwiegend in die gleiche Richtung. Sie schafft es daher nicht, beide zu trennen.

[Ist man an der Stabilität von ausgedehnten Himmelskörpern (z. B. Gasplanet der Masse m mit Radius R) gegenüber der zerreißenden Wirkung eines Zentralobjekts (Masse M im Abstand d) interessiert, ergibt sich das nach Edouard Roche benannte Stabilitätskriterium:

$$\frac{m}{M} \gtrsim \left(2\frac{R}{d}\right)^3. \tag{15}$$

In genaueren Rechnungen spielt natürlich auch die Zentrifugalkraft durch Rotation des Körpers eine Rolle.]

Aufgabe 6.3

Änderte sich schlagartig nur die Masse der Sonne, dann würde sich der momentane Impuls (also die unmittelbare Bewegung) der Erde nicht ändern, da sich nur die beschleunigende Kraft ändert. Diese veränderte Beschleunigung führt dann dazu, dass die Erde im weiteren Verlauf doch von ihrem Kurs abweicht und einer anderen Bahn folgt. Um die Daten dieser neuen Bahn zu bekommen, kann man zum Beispiel mit dem Energieintegral beginnen (Energieerhaltung). Die kinetische Energie ist gleich dem negativen der potentiellen Energie plus der Gesamtenergie:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\mu}{r} + \frac{h}{2}. \tag{16}$$

Mit $h = -\frac{\mu}{a}$ folgt daraus

$$\frac{v^2}{2} = \mu \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right). \tag{17}$$

Ändert man nun bei unveränderter Geschwindigkeit v und unverändertem Abstand r die Masse, also μ hin zu μ', dann muss gelten, dass

$$\mu \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) = \mu' \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a'}\right). \tag{18}$$

Es ändert sich damit die große Halbachse hin zu

$$a' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r} - \frac{\mu}{\mu'} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)\right]^{-1} \tag{19}$$

$$a' = \left[\frac{2}{r}\left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right) + \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{1}{a}\right]^{-1} = \frac{\mu'}{\mu}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{\mu'}{\mu} - 1\right) + \cdot\frac{1}{a}\right]^{-1} \tag{20}$$

Im konkreten Fall, dem Start von einer Kreisbahn, können wir nun noch $r = a$ setzen,

$$a' = a\frac{\mu'/\mu}{2\mu'/\mu - 1}. \tag{21}$$

Wir erhalten für die halbierte Masse, $\mu'/\mu = 1/2$,

$$a' = a\frac{1/2}{0} \to \infty. \tag{22}$$

Die große Halbachse ginge gegen unendlich, was bedeutet, dass die Erde das Sonnensystem auf einer Parabel verließe ($h = 0$). Die Umlaufzeit ist damit unendlich bzw. undefiniert. Im Falle der verdoppelten Masse, $\mu'/\mu = 2$, ergibt sich

$$a' = \underline{\underline{\frac{2}{3}a}}. \tag{23}$$

Die große Halbachse reduzierte sich auf zwei Drittel ihres Ausgangswertes. Die Umlaufzeit folgt allgemein aus

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \tag{24}$$

womit

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{-1/2}\left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} = \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{-1/2}\left(\frac{\mu'/\mu}{2\mu'/\mu - 1}\right)^{3/2} = \frac{\mu'/\mu}{(2\mu'/\mu - 1)^{3/2}} \overset{\mu'/\mu=2}{=} 2 \cdot 3^{-3/2} \approx 0{,}38. \tag{25}$$

Die Erde hätte also eine Umlaufzeit von nur noch 0,38 Jahren.
Zur Bestimmung der Exzentrizität (die ja die Form der Bahn beschreibt) für diesen Fall genügt es zu betrachten, dass die Erde in ihrem Startpunkt keine radiale Geschwindigkeitskomponente besitzt (da ursprünglich Kreisbahn). Der Startpunkt ist also entweder der neue sonnennächste oder sonnenfernste Punkt. Da nun die neue Halbachse kleiner ist als die alte, kann es nur der neue sonnenfernste Punkt, Q', sein:

$$Q' = a' \cdot (1 + e') = a. \tag{26}$$

Daraus folgt mit $a' = \frac{2}{3}a$, dass

$$e' = \frac{a}{a'} - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \tag{27}$$