Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 4. Übungsserie

2018-11-22

Aufgabe 4.1

Sternzeit 12 h bedeuted, dass gerade Objekte mit einer Rektaszension von $\alpha = 12\,\mathrm{h}$ ihren Tageshöchststand haben (sich bei Stundenwinkel $t = 0°$ in oberer Kulmination befinden). Da gegen 12 Uhr mittags (Sonnenzeit) die Sonne kulminiert, muss die Sonne also auch bei $\alpha = 12\,\mathrm{h}$ stehen. Zur Frühlingstagundnachtgleiche steht die Sonne bei $\alpha = 0\,\mathrm{h}$, also bedeutet $\alpha = 12\,\mathrm{h}$, dass Herbstanfang ist.

Aufgabe 4.2

Sternzeit $\theta = t + \alpha = 6\,\mathrm{h}$ bedeutet, dass Sterne mit Rektaszension $\alpha = 6\,\mathrm{h}$ gerade in oberer Kulmination stehen ($t = 0$). Soll die Sonne sichtbar sein, darf ihr Stundenwinkel nur um einen gewissen Betrag x größer oder kleiner als null sein. Entsprechend gilt auch für ihre Rektaszension: $6\,\mathrm{h} - x < \alpha < 6\,\mathrm{h} + x$. Dies ist im Sommerhalbjahr gegeben, wo die Rektaszension von 0 h (Frühlingstagundnachtgleiche) nach 12 h (Herbsttagundnachtgleiche) läuft. (Zu diesen beiden Zeiten gilt im übrigen $x = 6\,\mathrm{h}$, sodass die Sonne dann genau an den Intervallgrenzen steht.)

Aufgabe 4.3

Die Zeitgleichung ist eine Überlagerung zweier Anteile. Zum einen ist da eine sinusähnliche Schwingung auf Grund der Abweichung der Ekliptik vom Himmelsäquator. Die Rektaszension, die die (sphärische!) Projektion der ekliptikalen Länge auf die Äquatorialebene darstellt, läuft mal langsamer (jeweils um den Sommer- und Winteranfang) und mal schneller (jeweils um den Frühlings- und Herbstanfang) als eben die ekliptikale Länge selbst. Das heißt, selbst eine kreisförmige, aber geneigte scheinbare Sonnenbahn würde zu einer nichtkonstanten, sinusähnlichen Zeitgleichung mit einer Periodendauer von einem halben Jahr führen. In Formeln betrachtet ergeben die entsprechenden Transformationsgleichungen (für ekliptische Breite $\beta = 0°$) folgendes: Aus

$$\cos\lambda = \cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos 90° = \cos\alpha\cos\delta \tag{1}$$

und

$$\sin\lambda\cos\epsilon = \sin\alpha\cos\delta - \cos\alpha\sin\delta\cos 90° = \sin\alpha\cos\delta \tag{2}$$

resultiert

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha\cos\delta}{\cos\alpha\cos\delta} &= \frac{\sin\lambda\cos\epsilon}{\cos\lambda} && (3)\\ \tan\alpha &= +\tan\lambda\cos\epsilon. && (4) \end{aligned}$$

Bei Winkeln nahe 0 bzw. 180° läuft α also um den Faktor $\cos\epsilon$ langsamer als λ. Für Winkel nahe bei 90 bzw. 270° kann man auch

$$\cot\lambda = \cot\alpha\cos\epsilon \tag{5}$$

schreiben. Hier läuft entsprechend λ langsamer als α.
(Zusatz: Zum anderen gibt es die Abweichung auf Grund der ungleichförmigen Bewegung entlang der Ellipse. Mathematisch entspricht dies der Abweichung zwischen wahrer Anomalie θ und mittlerer Anomalie M. Es gilt für eine Ellipse:

$$r = \frac{a\cdot(1-e^2)}{1+e\cos\theta}. \tag{6}$$

sowie

$$r^2\dot\theta = \mathrm{const.}, \tag{7}$$

wobei r den Abstand zum Brennpunkt, a die große Halbachse, e die numerische Exzentrizität und θ die wahre Anomalie bezeichnet. Da ja, von der Erde aus gesehen, $\dot{\alpha} = \dot{\theta}$ gilt (die wahre Bewegung der Erde entspricht der scheinbaren der Sonne), folgt somit

$$\dot{\alpha} = \frac{\text{const.}}{r^2} = \left(\frac{1 + e\cos\theta}{a \cdot (1 - e^2)}\right)^2 \cdot \text{const.} \tag{8}$$

Es gilt also

$$\dot{\alpha} \propto 1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta. \tag{9}$$

Auch hier ergibt sich somit eine periodische Abweichung mit einer Periodendauer von einem Jahr (da $e < 1$). Überlagert ist ihr eine weitere halbjährige Schwingung mit geringerer Amplitude. Dieser Anteil der Abweichung ist minimal, wenn sich die Erde im sonnennächsten oder sonnenfernsten Punkt befindet, d. h. um den 3. Januar oder um den 5. Juli eines Jahres.)

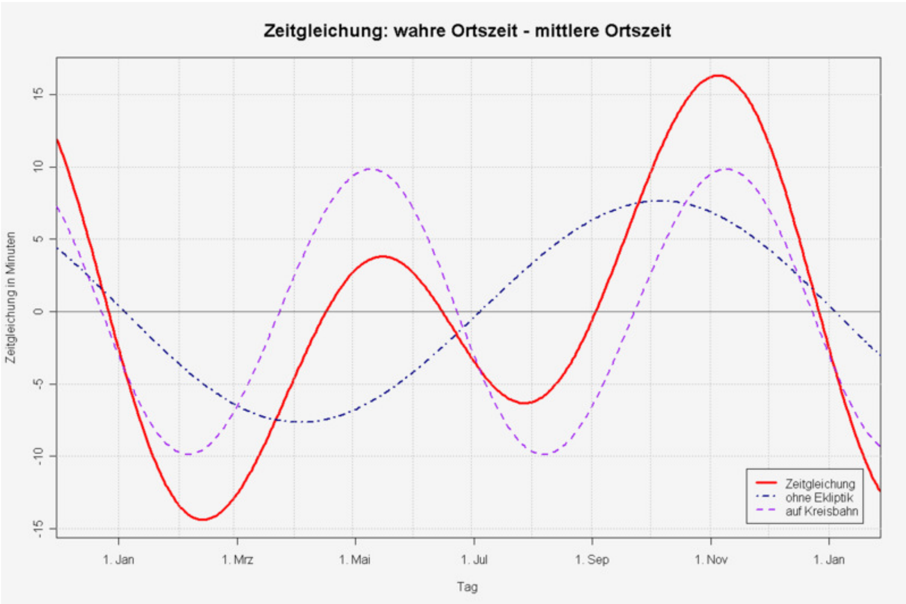

Abbildung 1: Reale Zeitgleichung, sowie Zeitgleichung für die fiktiven Fälle, dass die Äquatorebene mit der Ekliptik zusammenfiele (die Erdachse also nicht geneigt wäre), und dass die Erde auf einer Kreisbahn wäre. (Quelle der Grafik: WikiMedia Commons)

Zusatzaufgabe 4.4

Ziel eines Kalenders mit Schalttagen ist es, dass das Kalenderjahr im Mittel mit dem astronomischen (genau genommen dem tropischen) Jahr übereinstimmt, was in der Regel keine ganze Anzahl von Tagen aufweist. Die Konstruktion eines solchen Kalenders kann dabei sehr direkt sein. Bei der konkret gegebenen Jahreslänge von 668,5921 Tagen, könnte man zunächst mit einem Standardjahr von 669 Tagen beginnen (für 668 siehe unten). Das Standardjahr wäre dann 0,4079 Tage zu lang, was sich nach drei Jahren auf mehr als einen Tag beliefe. Man könnte also jedes dritte Jahr einen Tag auslassen (im Gegensatz zum zusätzlichen Schalttag bei uns). Im langjährigen Mittel hätte man dann $668\frac{2}{3}$, was immernoch um $0{,}0745\overline{6}$ Tage pro Jahr zu lang ist. Nach durchschnittlich 14 Jahren wäre auch so noch ein Tag zu viel im Jahr. Lässt man also nach jedem 5 Schaltjahr (also alle 15 Jahre) ein weiteres folgen, reduziert sich die Diskrepanz auf $0{,}0745\overline{6} - 1/15 = 0{,}0079$ Tage pro Jahr oder 1 Tag in etwa 126,6 Jahren. Nach 120 (also 8 Blöcken zu je 15 Jahren) könnte man dann also erneut einen Tag ausfallen lassen. Man würde somit auf das regulare 3-Jahres-Schaltjahr noch das 15-Jahres- und das 120-Jahres-Schaltjahr folgen lassen. Wir sind dann bei durchschnittlich $669 - 1/3 - 1/15 - 1/120 = 668.5916\overline{6}$ Tagen je Jahr. Bleibt eine Diskrepanz von $0{,}00043\overline{3}$ Tagen, die sich fast dadurch ausgleichen lässt, dass man bei jedem 20ten 120-Jahreszyklus den Tag doch nicht ausfallen lässt. Es gibt dann $669 - 1/3 - 1/15 - 1/120 + 1/2400 = 668{,}59208$ Tage, womit wir schon im Rahmen der angegebenen Genauigkeit sind.

Diese Variante ist aber nicht die einzige mögliche. Letztlich besteht die allgemeine Aufgabe darin, sich den nicht-ganzzahligen Rest in Brüche bis zur gesuchten Genauigkeit zu zerlegen. Möchte man lieber wie auf der Erde keine Tage weglassen und nur hin und wieder einen hinzufügen. Dann muss man mit einem Standardjahr von 668 Tagen beginnen. In dem Fall sollte dann schon jedes zweite Jahr ein weiterer Tag hinzugefügt werden. Der 5. solcher 2-Jahreszyklen muss dann aus zwei Schaltjahren bestehen, womit wir bei $668 + 1/2 + 1/10 = 668.6$ sind, also 0,0079 zu viel. Lässt man jeden 10. 10-Jahresschalttag aus behält ihn aber doch, wenn das Jahr durch 500 teilbar ist, sind wir bei $668 + 1/2 + 1/10 - 1/100 + 1/500 = 668{,}5920$. Damit fehlt uns nach 10000 Jahren ein Tag, den man entsprechend noch einschieben müsste.