Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 10. Übungsserie

2019-01-17

Aufgabe 10.1

Durch die leichte Exzentrizität ($e = 0{,}017$) der Erdbahn, variiert ihr Abstand r zur Sonne und damit auch die Intensität der auftreffenden Strahlung. Für r gilt allgemein

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}, \tag{1}$$

und es folgen

$$r_{\min} = r(\theta = 0) = a\frac{1 - e^2}{1 + e} = a \cdot (1 - e), \tag{2}$$

$$r_{\max} = r(\theta = 180°) = a\frac{1 - e^2}{1 - e} = a \cdot (1 + e). \tag{3}$$

Die zugehörigen Flussdichten variieren entsprechend

$$\frac{F_{\max}}{F_{\min}} = \left(\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\right)^{-2} = \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^2 \approx 1 + 4e \approx 1{,}07. \tag{4}$$

Die Halbamplitude der jährlichen Schwankung beträgt also etwa $\pm 3{,}5\,\%$ bzw. $\pm 46\,\mathrm{W/m^2}$.

Aufgabe 10.2

Werden bei der Proton-Proton-Reaktion je 4 Protonen (oder Wasserstoffkerne) zu einem α-Teilchen (oder Heliumkern) verschmolzen wird eine Energie von etwa 26 MeV $= 4 \cdot 10^{-12}$ J frei. Der Grund hierfür ist der Massendefekt von etwa 0,7 %:

$$E_\alpha = 0{,}007 m_\alpha c^2 \approx 0{,}007 \cdot 4 m_{\mathrm{Proton}} c^2 \approx 4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}. \tag{5}$$

Die Frage ist nun, wieviele Heliumkerne *kann* die Sonne mit dem ihr zur Verfügung stehenden Material produzieren und wieviele *muss* sie pro Zeiteinheit produzieren um die gegenwärtige Leuchtkraft (i.e. Leistung) zu erzeugen. Die Brenndauer ergibt sich aus dem Verhältnis von Gesamtenergie E zu Strahlungsleistung $L_\odot$:

$$T = \frac{E}{L_\odot}. \tag{6}$$

Die Gesamtenergie ist dabei das Produkt aus der Anzahl der erzeugbaren Heliumkerne N_α und der jeweils freiwerdenden Energie $\Delta E = 26$ MeV, wobei man N_α auch über die verfügbare Protonenzahl N_p ausdrücken kann: $N_\alpha = N_\mathrm{p}/4$. Die Protonenzahl schließlich hängt mit der Gesamtmasse der Sonne ($M_\odot$) und der Masse eines Einzelprotons (m_p) zusammen über $M_\odot = N_\mathrm{p} m_\mathrm{p} x$. Das „$x$“ soll hier den Massenanteil des tatsächlich verbrennbaren Wasserstoffs bezeichnen. man erhält

$$T = \frac{E}{L_\odot} = \frac{N_\alpha \Delta E}{L_\odot} = \frac{N_\mathrm{p} \Delta E}{4 L_\odot} = \frac{x M_\odot \Delta E}{4 m_\mathrm{p} L_\odot} = x \cdot 10^{11}\ \text{Jahre}. \tag{7}$$

Könnte die Sonne ihre gesamte Masse in Helium umwandeln, dann würde der Brennstoff für 10^{11} Jahre reichen. Allerdings besteht die Sonne nur zu etwa 70 % aus Wasserstoff und kann zudem nur im Kernbereich Fusion betreiben, also nur die innersten 10 % der Masse umwandeln. Mit $x \approx 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$ folgt dann

$$T = 7 \times 10^9\ \text{Jahre}. \tag{8}$$

Es verbleiben also noch einige Milliarden Jahre.

Zusatzaufgabe 10.3

Bei der Akkretion von Material wird seine ursprüngliche potenzielle Energie zunächst in kinetische und schließlich, beim Auftreffen auf die Sonnenoberfläche, in thermische Energie umgewandelt. Es gilt damit

$$\Delta E_{\mathrm{therm}} = \Delta E_{\mathrm{pot}} = \frac{GM_\odot \Delta M_\odot}{r_1} - \frac{GM\Delta M}{r_0}, \tag{9}$$

wobei der Endradius gleich dem Sonnenradius ist: $r_1 = R_\odot$. Ist der Anfangsradius r_0 deutlich größer als ein Sonnenradius, dann kann man ihn als unendlich betrachten und diesen Term vernachlässigen. Man erhält

$$\Delta E_{\mathrm{therm}} = \frac{GM_\odot \Delta M_\odot}{R_\odot}. \tag{10}$$

Betrachtet man die Akkretion jetzt pro Zeiteinheit und setzt den Energieeintrag gleich der abgestrahlten Leuchtkraft, dann folgt

$$L_\odot = \dot{E}_{\mathrm{therm}} = \frac{GM_\odot \dot{M}_\odot}{R_\odot}. \tag{11}$$

Die notwendige Akkretionsrate lautet somit

$$\dot{M}_\odot = \frac{L_\odot R_\odot}{GM_\odot} = 2 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg\,s^{-1}} = 3 \cdot 10^{-8}\ M_\odot\ \mathrm{a^{-1}}. \tag{12}$$

Das wäre eine Sonnenmasse in einer vergleichsweise kurzen Zeitspanne von 30 Mio. Jahren. In den frühen Entwicklungsphasen, kurz nach ihrer Entstehung, ist eine solche Akkretionsrate aber durchaus realistisch.
Da für die Umlaufzeit gilt, dass

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \tag{13}$$

und ganz allgemein auch

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial P}{\partial\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial P}{\partial\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial P}{\partial\mu} + \frac{\partial P}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right)\\ &= \dot{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial\mu} + \frac{\partial P}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right),\end{aligned} \tag{14}$$

folgt

$$\dot{P} = \dot{\mu}\left(-\frac{P}{2\mu} + \frac{3P}{2a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right) = P\frac{\dot{\mu}}{2\mu}\left(3\frac{\mu}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu} - 1\right). \tag{15}$$

Diese Gleichung beschreibt, wie sich die Umlaufzeit nicht nur direkt über die sich vergrößernde Sonnenmasse ändert, sondern auch indirekt über den sich verringernden Abstand.
Was die stetige Änderung der Sonnenmasse aber bewirkt, ist eine Änderung der potenziellen Energie und damit auch der Gesamtenergie, welche wiederum mit der großen Halbachse zusammenhängt. Die Gesamtenergie wird kleiner (aber betragsmäßig größer), weil die potenzielle kleiner (aber betragsmäßig größer) wird:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right) = 0 - \frac{2\dot{\mu}}{r} \overset{r=a}{=\!=} -\frac{2\dot{\mu}}{a}. \tag{16}$$

Die übrigen Terme, also die mit $\dot{r}$ und $\dot{v}$, summieren sich zu Null, weil das ja genau die Terme sind, die sonst die Konstanz der Energie ausmachen. Nur die veränderliche Masse spielt hier also eine Rolle. Mit

$$h = -\frac{\mu}{2a} \tag{17}$$

gilt dann auch

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2h\frac{\dot{\mu}}{\mu}. \tag{18}$$

Die kinetische Energie ist nicht unmittelbar vom Massenverlust betroffen und damit auch nicht unmittelbar von der Zeit abhängig. Gleichzeitig gilt analog zu Gleichung (14):

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dot{\mu}\left(\frac{\partial h}{\partial \mu} + \frac{\partial h}{\partial a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right). \tag{19}$$

Aus Gleichung (17) folgt dann

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dot{\mu}\left(\frac{h}{\mu} - \frac{h}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right) = h\frac{\dot{\mu}}{\mu}\left(1 - \frac{\mu}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\right) \tag{20}$$

und, umgestellt nach $\mathrm{d}a/\mathrm{d}\mu$,

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu} = \frac{a}{\mu}\left(1 - \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mu}{h\dot{\mu}}\right). \tag{21}$$

Nach Einsetzen von (18) erhält man schließlich

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu} = -\frac{a}{\mu}. \tag{22}$$

Geht man mit diesem Resultat zurück in Gleichung (15), folgt

$$\dot{P} = -2P\frac{\dot{\mu}}{\mu}. \tag{23}$$

Mit

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{\dot{M}}{M} = 3 \cdot 10^{-8}/\mathrm{Jahr} \tag{24}$$

(siehe oben) und $P = 1$ Jahr lautet das zahlenmäßige Endergebnis

$$\dot{P} = -6 \cdot 10^{-8} = -6 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{Jahre}}{\mathrm{Jahr}} \approx -2\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{Jahr}}. \tag{25}$$

Nachsatz: Die heutige Sonne *verliert* aber an Masse. Zum einen ist dafür der Sternwind verantwortlich, der sich auf $-2 \cdot 10^{-14}\ M_\odot$ pro Jahr beläuft. Zum anderen führt der Massendefekt auf Grund der tatsächlich die Leuchtkraft befeuernden Kernfusion (also letztlich die abgestrahlte Masse) zu einem Verlust von weiteren $-7 \cdot 10^{-14}\ M_\odot$ pro Jahr. Da der Materialeintrag durch abstürzende Kometen vernachlässigbar gering ist, ergeben sich in Summe somit etwa $-10^{-13}\ M_\odot$ pro Jahr, was zu einer Verlängerung der Umlaufzeit der Erde um 8 Mikrosekunden pro Jahr führt. Ein sehr kleiner Wert. Die große Halbachse der Erde ändert sich wie folgt:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \overset{(22)}{=} -\frac{a}{\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -a\frac{\dot{\mu}}{\mu} = +1\ \mathrm{AE} \cdot 10^{-13}\ /\mathrm{Jahr} = +1{,}5\,\mathrm{cm}/\mathrm{Jahr}. \tag{26}$$