Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 9. Übungsserie

2019-01-10

Aufgabe 9.1

Wie die meisten nicht-stellaren Himmelskörper strahlt der Jupitermond Europa im sichtbaren Licht kaum selbst, sondern reflektiert hauptsächlich das einfallende Sonnenlicht. Wir wissen, dass die Flussdichte proportional zum Abstand hoch -2 ist: $F \propto r^{-2}$. Wenn wir zunächst die bei Europa eintreffende mit der direkt von der Sonnenoberfläche abgestrahlten vergleichen, dann erhalten wir:

$$\frac{F_{\mathrm{ein}}}{F_\odot} = \frac{R_\odot^2}{r^2}, \tag{1}$$

wobei $r_\mathrm{E} \approx 8 \cdot 10^8$ km die Entfernug Sonne–Europa (bzw. Sonne–Jupiter) und $R_\odot \approx 7 \cdot 10^5$ km den Sonnenradius kennzeichnet. Von diesem auftreffenden Fluss reflektiert Europa einen Teil F_E gemäß seiner „Rückstrahlfähigkeit“ (*Albedo*): $F_\mathrm{E} = F_{\mathrm{ein}} A_\mathrm{E}$. Die Albedo ist eine Zahl zwischen 0 und 1 (bei 0 wird kein Licht reflektiert, bei 1 das gesamte Licht). Um die scheinbaren Helligkeiten zu bekommen, muss noch die jeweilige Flussdichte auf der Erde und damit der Abstand zur Erde (quadratisch) einfließen:

$$\begin{aligned} F_{\odot\oplus} &= F_\odot \frac{R_\odot^2}{a_\oplus^2}, && (2)\\ F_{\mathrm{E}\oplus} &= F_\mathrm{E} \frac{R_\mathrm{E}^2}{(r - r_\oplus)^2}, && (3) \end{aligned}$$

wobei $R_\mathrm{E} = 1600$ km Europas Radius und $r_\oplus \approx 1{,}5 \cdot 10^8$ km den Abstand Erde–Sonne bezeichnet. Man bekommt schließlich

$$\begin{aligned} m_\mathrm{E} - m_\odot &= 2{,}5 \log_{10} \frac{F_{\odot\oplus}}{F_{\mathrm{E}\oplus}} = 2{,}5 \log_{10} \frac{F_\odot \frac{R_\odot^2}{r_\oplus^2}}{F_\mathrm{E} \frac{R_\mathrm{E}^2}{(r_\mathrm{E} - r_\oplus)^2}} = 2{,}5 \log_{10} \frac{F_\odot \frac{R_\odot^2}{r_\oplus^2}}{A_\mathrm{E} F_\odot \frac{R_\odot^2}{r_\mathrm{E}^2} \frac{R_\mathrm{E}^2}{(r_\mathrm{E} - r_\oplus)^2}} \\ &= 2{,}5 \log_{10} \frac{r_\mathrm{E}^2 (r_\mathrm{E} - r_\oplus)^2}{A_\mathrm{E} r_\oplus^2 R_\mathrm{E}^2} = 5 \log_{10} \frac{r_\mathrm{E}(r_\mathrm{E} - r_\oplus)}{R_\mathrm{E} r_\oplus} - 2{,}5 \log_{10} A_\mathrm{E} \\ m_\mathrm{E} - m_\odot &= 31{,}7\,\mathrm{mag} - 2{,}5 \log_{10} A_\mathrm{E}. && (4) \end{aligned}$$

Mit einer moderaten Albedo von z. B. $A_\mathrm{E} = 0{,}5$ und der scheinbaren Sonnenhelligkeit $m_\odot = -26{,}7$ mag erhielte man

$$m_\mathrm{E} = m_\odot + 31{,}7\,\mathrm{mag} - \log_{10} A_\mathrm{E} = -26{,}7\,\mathrm{mag} + 31{,}7\,\mathrm{mag} + 0{,}75\,\mathrm{mag} \approx 5{,}7\,\mathrm{mag}. \tag{5}$$

Mit großer Eisbedeckung und $A_\mathrm{E} \approx 1$ änderte sich das Ergebnis leicht zu

$$m_\mathrm{E} = -26{,}7\,\mathrm{mag} + 31{,}7\,\mathrm{mag} + 0\,\mathrm{mag} \approx 5{,}0\,\mathrm{mag}. \tag{6}$$

Europas tatsächliche Albedo liegt bei 0,68, seine scheinbare Helligkeit bei 5,3 mag.
Prinzipiell müsste Europa also gerade noch mit freiem Auge zu sehen sein. Europas Entfernung von Jupiter beträgt allerdings nur etwa etwa 670 000 km, Jupiters Entfernung von der Erde $629 \cdot 10^6$ km. Damit ergibt sich für den Winkelabstand

$$\alpha = \arctan \frac{670\,000}{629 \cdot 10^6} \sim 3{,}6'. \tag{7}$$

Der Winkelabstand liegt zwar ebenfalls noch über dem nominellen Auflösungsvermögen des menschlichen Auges; dieses gilt aber nur für etwa gleich helle Objekte. Zusammen mit dem wesentlich helleren Jupiter (bis zu $m = -2{,}9$ mag) wird Europa allerdings überstrahlt und kann nicht mehr gesehen werde. Callisto, der äußerste der Galileischen Monde hat zwar einen größeren Winkelabstand, ist aber sehr dunkel (die Albedo beträgt nur 0,2). Ganymed, der dritte (und größte) Mond hat eine Albedo von etwa 0,5 – bei guten Beobachtungsbedingungen könnte auch er theoretisch noch von Menschen mit sehr guten Augen gesehen werden!

Aufgabe 9.2

Dem dritten Kepler'schen Gesetz entsprechend folgt die Umlaufzeit eines gegebenen Zentralobjektes zu

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \tag{8}$$

wobei a die große Halbachse und M die Masse des Zentralobjekts repräsentiert. Verwendet man nun

$$M = \frac{4\pi\rho R^3}{3} \tag{9}$$

für die Masse einer homogenen Kugel sowie R für ihren Radius und ρ für ihre Dichte, dann erhält man

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{3a^3}{4\pi\rho G R^3}} = \sqrt{\frac{3\pi a^3}{\rho G R^3}}. \tag{10}$$

Die minimale Umlaufperiode ergibt sich nun für $a = R$, also für einen Flug entlang der Oberfläche. Es folgt

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} \approx \frac{3.3\ \mathrm{h}}{\sqrt{\rho[\mathrm{g/cm^3}]}}. \tag{11}$$

Da das Ergebnis also nur von der mittleren Dichte des Zentralobjektes abhängt und diese für alle Objekte im Sonnensystem im Bereich von wenigen Gramm je Kubikzentimeter liegt, ist P näherungsweise eine Konstante. Für die Erde (ρ = 5,5 g cm^{-3} = 5500 kg m^{-3}) sind dies etwa 84 Minuten. Für Saturn (ρ = 0,69 g cm^{-3}) erhält man 240 Minuten. Alle weiteren Planeten und Asteroiden (Bennu: ρ = 1,1 g cm^{-3}, $P \approx$ 190 min) sowie die Sonne (ρ = 1,4 g cm^{-3}, $P \approx$ 170 min) liegen dazwischen.
Die zugehörige Bahngeschwindigkeit $v = 2\pi R/P$ ist gegeben durch

$$v = \frac{2\pi R}{P} = R\sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}. \tag{12}$$

Zusatzaufgabe 9.3

Zunächst einige Vorbetrachtungen: Damit Venus von der Erde aus vor der Sonnenscheibe gesehen werden kann, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. Venus muss zwischen Erde und Sonne stehen (im hellgelb markierten Bereich in Abb. 1a) – also in unterer Konjunktion.
2. Die Bahnebene von Venus ist um etwa 3,4° gegenüber der Ekliptik geneigt – d. h. bei einer Konjunktion steht Venus meist über oder unter der Sonne. Damit der Planet gerade noch vor der Sonnenscheibe zu sehen ist, darf der Winkel, von der Erde aus gesehen, maximal 15 Bogenminuten betragen (=Winkelradius der Sonne). Siehe Abb 1b.

Das heißt, es kommt nur dann zu einem Transit, wenn Venus sich bei einer unteren Konjunktion nahe genug an einem der beiden Knotenpunkte ihrer Bahn befindet.

Die eigentlich gesuchte Dauer T zwischen zwei Transits der Venus lässt sich ebenfalls gut abschätzen: Damit die Venus in unterer Konjunktion durch die Sonnenscheibe läuft, darf sie, von der Erde aus gesehen, zu diesem Zeitpunkt maximal $\beta/2 = 0{,}25°$ ober- oder unterhalb der Ekliptik stehen. Von der Sonne aus gesehen (siehe Abb. 1b und c) entspricht dies dem Winkel

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}\frac{a_\oplus - a_♀}{a_♀}. \tag{13}$$

Der Bogen γ bezeichnet nun den Bahnabschnitt, vom Ekliptikdurchgang der Venus aus gemessen, innerhalb dessen eine stattfindende Konjunktion auch zum Transit führt. Abb. 1c entnimmt man

$$\gamma \sin i = \frac{\alpha}{2} \tag{14}$$

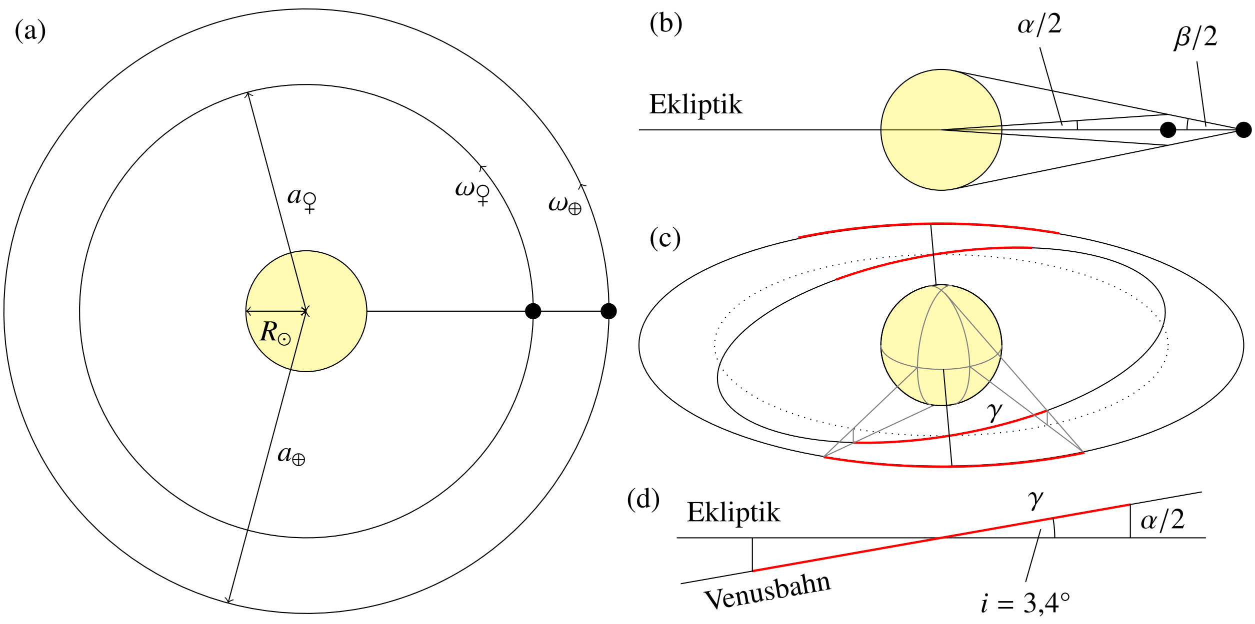

Abbildung 1: (a) Venus in unterer Konjunktion vom ekliptischen Nordpol aus gesehen („Draufsicht"). Transitbedingung (b) in Seitenansicht, (c) perspektivisch und (d) von der Sonne aus gesehen. Rot markiert sind die Bogenstücke γ in denen sich Venus und Erde bei der Konjunktion befinden müssen, damit ein Transit stattfindet.

bzw.

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\sin i} = \frac{\beta}{2\sin i}\frac{a_\oplus - a_♀}{a_♀}. \tag{15}$$

Mit $i = 3{,}4°$ erhält man nun

$$\gamma = 1{,}6°. \tag{16}$$

Da die Venus bei ihrem Umlauf einmal von oben und einmal von unten durch die Ekliptik läuft, ist die Transitbedingung also für eine Gesamtwinkelspanne von 4γ gegeben. Ins Verhältnis zum Vollkreis gesetzt ergibt sich schließlich die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{4\gamma}{360°} = \frac{1}{55} \tag{17}$$

dass die Venus gerade dann die Ekliptik kreuzt, wenn sie in unterer Konjunktion steht. Nur bei jeder 55. Konjunktion oder alle 55×584 d = 88 Jahre kommt es also zum Transit (also etwa 3 Mal in 243 Jahren; siehe unten).

Darüber hinaus ist auch die folgende, tiefer gehende Abschätzung für den Abstand zwischen Transits möglich: Die siderischen Umlaufzeiten von Erde und Venus stehen fast in einem 8:13 Verhältnis, d. h. $8 \cdot T_\oplus \sim 13 \cdot T_♀ \approx 2922{,}1$ Tage. Außerdem ist $5 \cdot T \approx 2919{,}6$ Tage – nach 8 Jahren kehrt die Venus also etwa 2,5 Tage vor dem ursprünglichen Tag an den Ausgangspunkt zurück. Bewegt sich die Erde 2,5 Tage entlang ihrer Bahn, schafft die schnellere Venus das entsprechende Winkelstück ihrer Bahn in $2{,}5 \cdot \frac{8}{13} \approx 1{,}5$ Tagen. Das entspricht einem Anteil ihres gesamten Umlaufs von $\frac{2{,}5}{356{,}25} = \frac{1{,}5}{224{,}7} = 0{,}0067$ bzw. $0{,}0067 \cdot 2\pi \cdot 0{,}72$ AU = 0,0305 AU. Die Bahnneigung der Venus beträgt 3,4° – sie bewegt sich in der Zeit also um $0{,}0305\ \text{AU} \cdot \sin 3{,}4° = 0{,}0018$ AU senkrecht zur Ebene der Ekliptik. Die Erde ist von der Venus 0,28 AU entfernt – von dort erscheint diese Strecke unter einem Winkel von $\arctan \frac{0{,}28\ \text{AU}}{0{,}0018\ \text{AU}} = 0{,}369° = 22{,}1'$. Ist der ursprüngliche Durchgang also weit genug vom Zentrum der Sonnenscheibe entfernt gewesen, bewegt sich Venus 8 Jahre später um nur 22 Bogenminuten vertikal verschoben wieder vor der Sonne vorbei. Deshalb treten Venus-Transits meist „doppelt" im Abstand von 8 Jahren auf (z. B. 8. Juni 2004 und 5. Juni 2012). Wieder 8 Jahre später hat sich die Venusbahn um weitere 22 Bogenminuten verschoben und ein Transit ist nicht mehr möglich. (Siehe Abb. 1b.) Eine noch bessere (wenngleich nicht exakte) Übereinstimmung findet sich bei einer 243 : 395-Resonanz – der Zeitraum mit dem sich Venusdurchgänge wiederholen beträgt dann 243 Jahre (also 152 synodische Umläufe). Insgesamt treten in einem Zeitraum von 243 Jahren meist 4 Transits auf: 2 Transits im Abstand von 8 Jahren; danach dauert es $\frac{152}{2} = 76$ synodische Umläufe oder 121,5 Jahre (gemessen vom ersten Transit), bis Venus sich wieder nahe beim zweiten Knotenpunkt befindet und ein dritter Transit möglich ist; noch einmal 8 Jahre später folgt dann ein vierter Transist. Nach weiteren 105,5 Jahren beginnt der Zyklus schließlich von vorn. Auch diese Resonanz ist nicht exakt, und Transitzyklen (mit einer Periode von 243 Jahre) beginnen und Enden nach einiger Zeit wieder: Der Transitpfad verschiebt sich von Periode zu Periode ein Stück und überstreicht irgendwann die Sonne nicht mehr.

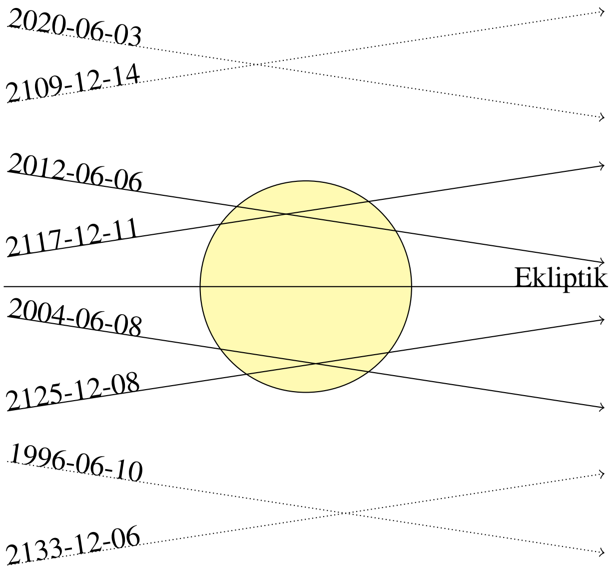

Abbildung 2: Untere Konjunktionen bei denen tatsächlich (durchgezogen) oder beinahe (gepunktet) ein Transit stattfand oder stattfinden wird (von der Erde aus gesehen).

Die Dauer eines Transits lässt sich übrigens folgendermaßen abschätzen. Die Winkelgeschwindigkeit der Venus bei ihrem Umlauf um die Sonne ($\omega_♀$) beträgt 360° in 224,7 Tagen, die der Erde ($\omega_\oplus$) 360° in 365,25 Tagen. Von der Sonne aus betrachtet durchläuft die Venus (im mitrotierenden Koordinatensystem) den Transitbereich also mit der Differenz dieser beiden Winkelgeschwindigkeiten:

$$\dot{\alpha} = \omega_♀ - \omega_\oplus = \frac{360°}{224{,}7\ \mathrm{d}} - \frac{360°}{365{,}25\ \mathrm{d}} = \frac{360°}{583{,}9\ \mathrm{d}} \tag{18}$$

(einmal 360 Grad innerhalb einer synodischen Periode von 583,9 Tagen). Von der Erde aus betrachtet ist der zu überstreichende Winkel nun gegeben durch den scheinbaren Sonnendurchmesser:

$$\beta = \alpha \frac{a_♀}{a_\oplus - a_♀} = \alpha \frac{0{,}72}{1 - 0{,}72}. \tag{19}$$

Die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Venus also scheinbar die Sonne überstreicht, ist somit

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} \frac{0{,}72}{1 - 0{,}72} = \frac{360°}{227\ \mathrm{d}}. \tag{20}$$

Der maximale über die Sonnenscheibe zurückzulegende Weg der Venus beträgt dabei $\beta = 32' = 0{,}53°$ und sie benötigt dafür

$$t = \frac{\beta}{\dot{\beta}} = 0{,}33\ \mathrm{d} \approx 8\ \mathrm{h}. \tag{21}$$