Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 3. Übungsserie

2018-11-15

Aufgabe 3.1

Da eine Mondfinsternis nichts anderes ist als ein perfekter Vollmond, steht hier die Sonne dem Mond genau gegenüber (d. h. in Opposition). Die Deklination des Mondes ist damit das Negative der der Sonne ($\delta_{\mathrm{Mond}} = -\delta_{\mathrm{Sonne}}$). Seine Rektaszension ist einen Halbkreis voraus, also ±12 h ($\alpha_{\mathrm{Mond}} = \alpha_{\mathrm{Sonne}} \pm 12$ h). Zum Herbstanfang läuft nun (wie zum Frühlingsanfang) die Sonne auf ihrer scheinbaren Bahn entlang der Ekliptik durch den Himmelsäquator und hat somit eine Deklination von 0° – genau wie dann der Mond, sollte er eben zu dieser Zeit als Vollmond erscheinen. Die Rektaszension der Sonne beträgt zum Herbstanfang $\alpha_{\mathrm{Sonne}} = 12$ h. Ein Vollmond hat zu diesem Zeitpunkt also $\alpha_{\mathrm{Mond}} = 0$ h.

Aufgabe 3.2

Das Problem und die gesuchten Winkel bzw. Koordinaten sind in Abb. 1a dargestellt. Ekliptik- und Äquatorialebene sind gegeneinander um etwa $\epsilon = 23{,}4°$ geneigt. Entsprechend ist der ekliptische Nordpol (ENP) auch automatisch um diesen Winkel vom äquatorialen Nordpol (dem Himmelsnordpol) entfernt. Seine Deklination beträgt somit

$$\delta_{\mathrm{ENP}} = 90° - 23{,}4° = 66{,}6°. \tag{1}$$

Ekliptiksystem und Äquatorialsystem II teilen sich den Frühlingspunkt, die Schnittrichtung zwischen den beiden Bezugsebenen, als Bezugsrichtung. Der ENP ist also entweder in Richtung $\alpha = 6\,\mathrm{h}$ oder $\alpha = 18\,\mathrm{h}$ um 23,4° verkippt. Da die Sonne nun im Sommer (also beispielsweise zum Sommeranfang bei $\alpha = 6\,\mathrm{h}$) oberhalb des Äquators steht, muss der ENP Richtung

$$\alpha_{\mathrm{ENP}} = 18\,\mathrm{h} \tag{2}$$

verschoben sein.
Der ekliptische Südpol ist entsprechend gegenüber, also bei

$$\delta_{\mathrm{ESP}} = -66{,}6°, \quad \alpha_{\mathrm{ESP}} = 6\,\mathrm{h}. \tag{3}$$

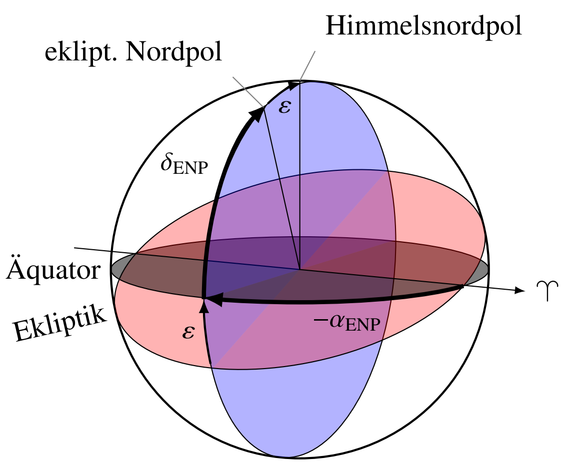

Abbildung 1: Lage des ekliptischen Nordpols ($\alpha_{\mathrm{ENP}}, \delta_{\mathrm{ENP}}$) im Äquatorsystem II.

Zusatzaufgabe 3.3

Als Vorarbeit ist es günstig den Abstand zwischen zwei gegebenen Punkten (z. B. im Äquatorialsystem II: $P_1 = (\alpha_1, \delta_1)$ und $P_2 = (\alpha_2, \delta_2)$) in einem Himmelskoordinatensystem zu kennen. Dieses Problem ist in Abb. 2 dargestellt, die gesuchte Entfernung ist a. Ein für die Berechnung geeignetes nautisches Dreieck ist das durch P_1, P_2 und den Himmelsnordpol aufgespannte. Von diesem kennen wir die Größen

$$\begin{aligned}
c &= 90^\circ - \delta_1, \\
b &= 90^\circ - \delta_2, \\
A &= \alpha_2 - \alpha_1.
\end{aligned}$$

Mit dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie lässt sich daraus a (bzw. $\cos a$) ermitteln:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
&= \cos(90^\circ - \delta_1) \cos(90^\circ - \delta_2) + \sin(90^\circ - \delta_1) \sin(90^\circ - \delta_2) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \\
&= \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Sind wie hier Horizontkoordinaten ($P_1 = (A_1, h_1)$ und $P_2 = (A_2, h_2)$) gegeben, folgt analog

$$\cos a = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos(A_2 - A_1). \qquad (5)$$

In Abb. 3a ist das eigentliche Problem dargestellt, der gesuchte Winkel zwischen den Großkreisen, die Stern ($*$) und Nordpol (HNP) sowie Stern und Sonne ($\odot$) verbinden. Der direkte Weg führt jetzt über eine Berechnung aller drei Seitenlängen des eingezeichneten Dreiecks (das jetzt ein anderes ist, als das eben verwendete) zu einer anschließenden Berechnung des Winkels mittels Kosinussatz. Man beginnt dann mit

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_\odot + \cos h_{\mathrm{HNP}} \cos h_\odot \cos(\underbrace{A_{\mathrm{HNP}} - A_\odot}_{90^\circ}) = \sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_\odot, \qquad (6) \\
\cos c &= \sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_* + \cos h_{\mathrm{HNP}} \cos h_* \cos(\underbrace{A_{\mathrm{HNP}} - A_*}_{180^\circ}) \\
&= \sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_* - \cos h_{\mathrm{HNP}} \cos h_* = -\cos(h_{\mathrm{HNP}} + h_*) \\
c &= 180^\circ - (h_{\mathrm{HNP}} + h_*), \qquad (7) \\
\cos b &= \sin h_* \sin h_\odot + \cos h_1 \cos h_2 \cos(\underbrace{A_* - A_\odot}_{-90^\circ}) = \sin h_* \sin h_\odot, \qquad (8) \\
\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \qquad (9)
\end{aligned}$$

und erhält

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{\sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_\odot + \sin h_* \sin h_\odot \cos(h_{\mathrm{HNP}} + h_*)}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot} \sin(h_{\mathrm{HNP}} + h_*)} \qquad (\text{da } \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{\sin h_\odot}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot}} \cdot \frac{\sin h_{\mathrm{HNP}} + \sin h_*(\cos h_{\mathrm{HNP}} \cos h_* - \sin h_{\mathrm{HNP}} \sin h_*)}{\sin(h_{\mathrm{HNP}} + h_*)} \\
&= \frac{\sin h_\odot}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot}} \cdot \frac{\sin h_{\mathrm{HNP}} \cos^2 h_* + \sin h_* \cos h_{\mathrm{HNP}} \cos h_*}{\sin(h_{\mathrm{HNP}} + h_*)} \\
&= \frac{\sin h_\odot \cos h_*}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot}} \cdot \cancelto{1}{\frac{\sin h_{\mathrm{HNP}} \cos h_* + \sin h_* \cos h_{\mathrm{HNP}}}{\sin(h_{\mathrm{HNP}} + h_*)}} \\
&= \frac{\sin h_\odot \cos h_*}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot}} = \frac{\sin(-20^\circ) \cos 60^\circ}{\sqrt{1 - \sin^2 60^\circ \sin^2(-20^\circ)}} \approx -0{,}18 \qquad (10)
\end{aligned}$$

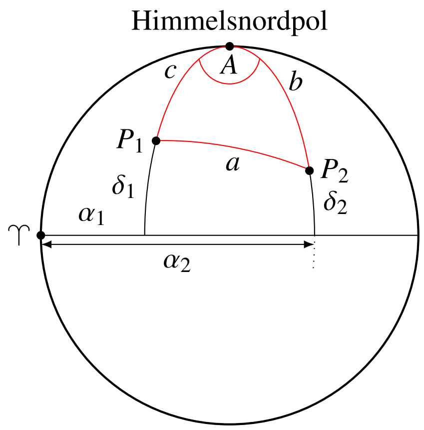

Abbildung 2: Abstand a zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 im Äquatorsystem II.

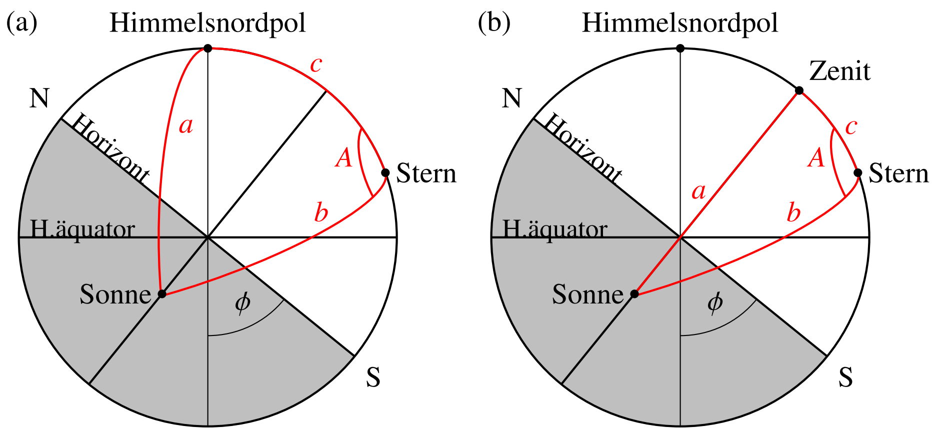

Abbildung 3: **(a)** Nautisches Dreieck zwischen Stern, Himmelsnordpol und Sonne. **(a)** Nautisches Dreieck zwischen Stern, Zenit und Sonne.

$$A \approx 100^\circ. \tag{11}$$

Alternativ könnte man aber auch ausnutzen, dass der Zenit im konkreten Fall auf demselben Großkreis liegt, der Stern und Nordpol verbindet, weil $A_* = 0\,\mathrm{h}$ (der Stern liegt also im Süden) und $A_{\mathrm{HNP}} = 12\,\mathrm{h}$. Man kann also auch das Dreieck aus Stern, Zenit und Sonne nutzen (Abb. 3b). Der Vorteil hiervon ist, dass nur die Strecke zwischen Stern und Sonne zunächst unbekannt ist. Der Abstand Zenit–Sonne dagegen ergibt sich aus der Höhe der Sonne. Hier hat man

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - h_\odot = 110^\circ, \\ c &= 90^\circ - h_* = 30^\circ, \\ \cos b &= \sin h_* \sin h_\odot \quad \text{(siehe oben)}, \\ \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

und erhält ebenfalls

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\sin h_\odot - \sin h_* \sin h_\odot \sin h_*}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot} \cos h_*}, \\ &= \frac{\sin h_\odot \cos h_*}{\sqrt{1 - \sin^2 h_* \sin^2 h_\odot}}. \end{aligned} \tag{12}$$