Einführung in die Astronomie – Übungen

Lösungsvorschläge zur 8. Übungsserie

2018-12-20

Aufgabe 8.1

Die Linienverbreiterung wird hauptsächlich durch Dopplerverschiebung auf Grund der Bewegung der Emittenten und Absorber (Moleküle, Atome, Ionen) hervorgerufen, Bewegung auf den Beobachter zu oder von ihm weg. Ein wichtiger Aspekt ist die Rotationsverbreiterung, also die Verbreiterung der Spektrallinien auf Grund der Rotation des Sterns um seine Achse. Die maximale Stärke dieses Effekts lässt sich abschätzen indem man die Ränder des scheinbaren Sternscheibchens betrachtet: Am Rand auf dem Äquator des Stern bewegt sich die Oberfläche (bei entsprechendem Betrachtungswinkel) rein radial auf den Betrachter zu bzw. von ihm weg. Die für die Dopplerverschiebung relevante Radialgeschwindigkeit ist hier betragsmäßig gegeben durch die Tangentialgeschwindigkeit der Rotation:

$$v_{\mathrm{rot}} = \frac{2\pi R_*}{P_*}, \tag{1}$$

wobei R_* den Radius des Sterns und P_* seine Rotationsperiodendauer bezeichne. Allgemein kann diese Geschwindigkeit die Fluchtgeschwindigkeit des Sterns nicht überschreiten, da sich sonst dessen Hülle ablösen würde. Es gilt also

$$v_{\mathrm{rot}} < \sqrt{\frac{GM_*}{R_*}}, \tag{2}$$

wobei M_* die Masse des Sterns darstelle. Wählt man einen Stern wie die Sonne als erste Näherung ($M_* \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg und $R_* = R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m), dann erhält man etwa

$$v_{\mathrm{rot}} < 440\,\mathrm{km/s}. \tag{3}$$

Dies entspricht einer Verschiebung

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\mathrm{rot}}}{c} \lessapprox 1{,}5 \cdot 10^{-3}. \tag{4}$$

Setzt man stattdessen die konkrete Rotationsperiode der Sonne als Beispiel ein, $P_* = P_\odot = 25\,\mathrm{d}$, dann folgt $v_{\mathrm{rot}} \approx 2\,\mathrm{km/s}$ bzw.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 7 \cdot 10^{-6}. \tag{5}$$

Ebenfalls wichtig ist die thermische Verbreiterung, das heißt der Einfluss der thermischen Bewegung. Näherungsweise gilt hier

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{m v_{\mathrm{therm}}^2}{2} = kT_* \tag{6}$$

und somit

$$v_{\mathrm{therm}} = \sqrt{\frac{2kT_*}{m}}. \tag{7}$$

Der Parameter T_* bezeichne dabei die effektive Sterntemperatur und m die typische atomare Masse, also konkret etwa die Masse des Wasserstoffatoms: $m \approx 1{,}6 \times 10^{-27}$ kg. Für $T \approx 6000\,\mathrm{K}$ erhält

$$v_{\mathrm{therm}} \approx 10\,\mathrm{km/s} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-5}. \tag{8}$$

Die Abhängigkeit von der Temperatur ist hier relativ gering, sodass sich das Ergebnis selbst über einen Bereich von 2000 bis 20 000 K nur um einen Faktor 3 ändert. (Einige Fraunhoferlinien gehen auch auf andere Elemente wie Natrium, Magnesium oder Eisen zurück und weisen durch das größere Atomgewicht eine geringere thermische Verbreiterung auf.)

Zusammenfassend kann man sagen, dass für alte, langsam rotierende Sterne wie die Sonne die thermische Verbreiterung etwas stärker ist. Für schneller rotierende (wie z. B. Wega) kann allerdings die Rotationsverbreiterung dominieren.

Aufgabe 8.2

Der Übergang zwischen zwei Energieniveaus des Wasserstoffs findet bei einer Wellenlänge

$$\lambda_{ik} = \lambda_{1\infty} \frac{i^2 k^2}{|i^2 - k^2|} \tag{9}$$

statt. Für $i = 10$ und $k = 11$ und mit $\lambda_{1\infty} = 912\,\text{Å}$ ergibt dies

$$\lambda_{10,11} \approx 576 \lambda_{1\infty} \approx 52{,}5\,\mu\text{m}. \tag{10}$$

Diese Wellenlänge liegt im fernen Infraroten, das nahezu vollständig von der Erdatmosphäre geblockt wird. Daher ist die Beobachtung dieses Übergangs vom Erdboden aus nicht sinnvoll möglich.

Zusatzaufgabe 8.3

Aus der Übergangswahrscheinlichkeit (bzw. Zerfallsrate) p ergibt sich sofort die Lebensdauer dieses Zustandes:

$$\Delta t = \frac{1}{p} = \frac{1}{2{,}9 \cdot 10^{-15}\,/\text{s}} = 3{,}4 \cdot 10^{14}\,\text{s} = 1{,}1 \cdot 10^{7}\,\text{Jahre}. \tag{11}$$

(auch wenn die explizite Berechnung von Δt nicht nötig ist, da man, wie sich weiter unten zeigen wird, nur das bereits gegebene $1/\Delta t$ benötigt). Mittels der Unschärferelation gelangt man dann zur (energetischen) Breite der Linie:

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}. \tag{12}$$

Die Energie eines Übergangs hängt nun mit der Wellenlänge der zugehörigen Photonen über

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{13}$$

zusammen, woraus sich

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda \tag{14}$$

und

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{hc} \Delta E \tag{15}$$

ergibt. Mit $\lambda = 21\,\text{cm}$ und $1/\Delta t = 2{,}9 \cdot 10^{-15}\,\text{s}^{-1}$ erhält man schließlich

$$\Delta\lambda \geq \frac{\lambda^2}{4\pi c \Delta t} = 3{,}4 \cdot 10^{-26}\,\text{m}. \tag{16}$$

Die extrem geringe (natürliche) Linienbreite ist – genau wie die lange Lebensdauer – ein Maß für die ebenfalls extrem geringe Wahrscheinlichkeit des Übergangs.