Aufgabe 1 Gradient und Rotation

$$\mathfrak{a} = xy\,\vec{i} - y^2 z\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k}, \qquad U = 2xyz^2$$

(i) grad U

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 2yz^2\,\vec{i} + 2xz^2\,\vec{j} + 4xyz\,\vec{k}$$
$$= 2z\left(yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + 2xy\,\vec{k}\right)$$

(ii) rot $\mathfrak{a}$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -y^2 z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(0 + y^2) - \vec{j}\,(z^2 - 0) + \vec{k}\,(0 - x)$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{a} = y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} - x\,\vec{k}$$

(iii) rot $(U\mathfrak{a})$

$$\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y^2z^2 & -2xy^3z^3 & 2x^2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(2x^2z^4 + 6xy^3z^2) - \vec{j}\,(4xyz^4 - 4x^2y^2z) + \vec{k}\,(-2y^3z^3 - 4x^2yz^2) \qquad (*)$$

$$\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = 2xz^2(xz^2 + 3y^3)\,\vec{i} + 4xyz(xy - z^3)\,\vec{j} - 2yz^2(y^2z + 2x^2)\,\vec{k}$$

$$(2x^2z^4 + 6xz^2y^3)\,\vec{i} + (4x^2y^2z - 4xyz^4)\,\vec{j} - (2y^3z^3 + 4yz^2x^2)\,\vec{k}$$

• zum Vergleich:

$$U \operatorname{rot}\mathfrak{a} + (\operatorname{grad} U)\times\mathfrak{a} = 2xy^3z^2\,\vec{i} - 2xyz^4\,\vec{j} - 2x^2yz^2\,\vec{k}$$
$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \\ xy & -y^2z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[2xy^3z^2 + (2x^2z^4 + 4xy^3z^2)\right] + \vec{j}\left[-2xyz^4 - (2xyz^4 - 4x^2y^2z)\right]$$
$$+ \vec{k}\left[-2x^2yz^2 + (-2y^3z^3 - 2x^2yz^2)\right], \quad \text{Übereinstimmung mit } (*)$$

3/2

(iv) $\underline{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -z^2 & -x \end{vmatrix} = \vec{i}\,(0+2z) - \vec{j}\,(-1-0) + \vec{k}\,(0-2y)$

$= \underline{\underline{2z\,\vec{i} + \vec{j} - 2y\,\vec{k}}}$

1

(v) $\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = xy^3 + y^2z^3 - x^2z^2$

$\underline{\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a})} = (y^3 - 2xz^2)\,\vec{i} + (3xy^2 + 2yz^3)\,\vec{j} + (3y^2z^2 - 2x^2z)\,\vec{k}$

$= \underline{\underline{(y^3 - 2xz^2)\,\vec{i} + y(3xy + 2z^3)\,\vec{j} + z(3y^2z - 2x^2)\,\vec{k}}}$ (**)

2

: zum Vergleich: $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\times\operatorname{rot}\mathfrak{a}$

für $\mathfrak{b} = \operatorname{rot}\mathfrak{a}$

$\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a}) = (\operatorname{rot}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\operatorname{rot}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} + \underbrace{\operatorname{rot}\mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{a}}_{=0}$

- $(\operatorname{rot}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\mathfrak{a} = \left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - z^2\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)(xy\,\vec{i} - y^2z\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k})$

$= \vec{i}\,(y^3 - z^2x - 0)$
$+ \vec{j}\,(0 + 2yz^3 + xy^2)$
$+ \vec{k}\,(y^2z^2 + 0 - 2x^2z)$

- $(\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \left(xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2z\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)(y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} - x\,\vec{k})$

$= \vec{i}\,(0 - 2y^3z + 0)$
$+ \vec{j}\,(0 + 0 - 2xz^3)$
$+ \vec{k}\,(-xy + 0 + 0)$

- $\mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xy & -y^2z & xz^2 \\ 2z & 1 & -2y \end{vmatrix} = \vec{i}\,(+2y^3z - xz^2) - \vec{j}\,(-2xy^2 - 2xz^3) + \vec{k}\,(xy + 2y^2z^2)$

zusammen: $\vec{i}\,(y^3 - \underline{xz^2} - \cancel{2y^3z} + \cancel{2y^3z} - \underline{xz^2})$

$+\ \vec{j}\,(2yz^3 + \underline{xy^2} - \cancel{2xz^3} + \underline{2xy^2} + \cancel{2xz^3})$

$+\ k\,(\underline{y^2z^2} - 2x^2z - \cancel{xy} + \cancel{xy} + \underline{2y^2z^2})$

$= \vec{i}\,(y^3 - 2xz^2) + \vec{j}\,(2yz^3 + 3xy^2) + k\,(3y^2z^2 - 2x^2z)$, Übereinstimmung mit (**)

(vi)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \end{vmatrix} = \vec{i}\,(4xz - 4xz) - \vec{j}\,(4yz - 4yz) + k\,(2z^2 - 2z^2)$$

$\underline{\underline{\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{0}}}$, wie allgemein zu erwarten $\frac{1}{8}$

Aufgabe 2 Oberflächen-Integral

a) : S: $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u\,k$, $0 \le v \le 2\pi$ (Winkelkoordinate), $0 \le u \le h$

$x = u\cos v$, $y = u\sin v$ } $x^2 + y^2 = u^2$ Kreise mit Radius u (variabel)

$z = u$

} $\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$ 1

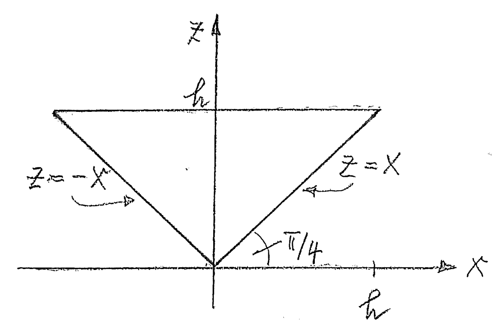
$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

(oberes Vorzeichen für $z = u \geq 0$)

$z = \text{const}$: Kreise

$x = 0$: $z = |y|$ } Ursprungsgeraden mit

$y = 0$: $z = |x|$ } Anstieg ± 1



(Schnitt $y = 0$)

Skizze + 1 P

• Resultat: auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel (-mantel)

Öffnungswinkel 90°

Grundkreisradius $R = h$