Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 8 - Krummlinige Koordinaten II

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 11.06.2018

Aufgabe 1 *Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten*

(a) Ein Vektor $\mathbf{V}$ habe in kartesischen Koordinaten die Form $\mathbf{V} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Geben Sie im kartesischen Punkt $(1, 2, 1)$ seine Komponenten in Kugelkoordinaten an.

(b) Es seien $U = 2yz$ und $\mathbf{V} = x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ ein skalares bzw. ein Vektorfeld. Berechnen Sie in Kugelkoordinaten

(i) U (ii) $\mathbf{V}$ (iii) $\operatorname{grad} U$ (iv) $\operatorname{rot} \mathbf{V}$

Aufgabe 2 *Paraboloidkoordinaten*

Die Paraboloidkoordinaten hängen u, w und ϕ hängen mit den kartesischen Koordinaten gemäß

$$x = uw\cos\phi \quad y = uw\sin\phi \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - w^2)$$

zusammen.

(a) Bestimmen Sie die zugehörigen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_w$ und $\mathbf{e}_\phi$, jeweils ausgedrückt durch $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$.

(b) Berechnen Sie das Linienelement $\mathrm{d}s^2$ sowie unter Verwendung der JACOBI-Determinante das Volumenelement $\mathrm{d}V$ für die Paraboloidkoordinaten.

(c) Berechnen Sie das Volumenelement noch einmal, in dem Sie das (ein) Spatprodukt der Einheitsvektoren bilden.

(d) Prüfen Sie ob das Koordinatensystem rechtshändig ist und die Einheitsvektoren orthogonal zueinander stehen.

Aufgabe 3 *Sphärische Trigonometrie*

Die Abbildung zeigt zwei verdrehte Systeme von Kugelkoordinaten. Die Drehachse ist die x-Achse, ζ der Drehwinkel. Es entsteht das sphärische Dreieck mit de Eckpunkten P, P' und G.

(a) Schreiben Sie die Transformationsformeln auf, die die Koordinaten (x, y, z) bei Drehung um den Winkel ζ in die Koordinaten (x', y', z') überführen.

(b) Führen Sie anstelle der kartesischen Koordinaten (x, y, z) die Kugelkoordinaten (r, ϑ, ϕ) ein (mit $r = R$; für die gestrichenenen Koordinaten entsprechend).

(c) Ersetzen Sie die Azimute ϕ und ϕ' durch die Innenwinkel C bzw. A des sphärischen Dreiecks und gewinnen Sie so

- den sphärischen Sinussatz

$$\sin\vartheta' \sin A = \sin\vartheta \sin C,$$

- sphärische Kosinus-Formel (manchmal auch Sinus-Kosinus-Satz) genannt

$$\sin\vartheta' \cos A = -\sin\vartheta \cos C \cos\zeta + \cos\vartheta \sin\zeta$$

- den sphärischen Seiten-Kosinussatz

$$\cos\vartheta' = \sin\vartheta \cos C \sin\zeta + \cos\vartheta \cos\zeta.$$