Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 4: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 \coloneqq 0$ und $v_0 \coloneqq v(t_0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung des Anfangswertproblems.

$$v_\infty \coloneqq \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

LÖSUNG:

(a) Die zur gegebenen Differentialgleichung zugehörigen homogene Differentialgleichung kann durch die folgende Form beschrieben werden.

$$m\dot{v} + \gamma v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = -\frac{\gamma}{m} v \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Diese Formel lässt sich separieren und durch die Methode der Trennung der Variablen lösen.

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\gamma}{m} \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t} \frac{\gamma}{m}\,\mathrm{d}t \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\frac{\gamma}{m}(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten gehen wir nun davon aus, dass sich die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung durch die folgende Funktion beschreiben lässt.

$$v(t) = \varphi(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

bitte wenden

$$\Longrightarrow \qquad \dot{v}(t) = \dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \varphi(t)\frac{\gamma}{m}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Das Einsetzen der Ableitung in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt dann das Folgende.

$$m\dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = mg \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varphi}(t) = ge^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(t) = \frac{mg}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{\gamma} + \varphi(t_0)$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t) = \varphi(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] + \varphi(t_0)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Zu beachten ist hier, dass $v_0 = v(t_0) = \varphi(t_0)$ gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit wegen $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gegeben durch die folgende Funktion.

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(b) Die stationäre Endgeschwindigkeit lässt sich nun einfach mithilfe des Limes berechnen.

$$v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \lim_{t\longrightarrow\infty} e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

Ohne die Kenntnis der Lösung lässt sich nun das Folgende notieren.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\left[m\dot{v}(t) + \gamma v(t)\right] = \lim_{t\longrightarrow\infty} mg \qquad \Longrightarrow \qquad m\lim_{t\longrightarrow\infty}\dot{v}(t) + \gamma\lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = mg$$

Da der Limes existiert und v eine stetig differenzierbare Funktion ist, muss demnach das Folgende gelten.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\dot{v}(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

(c) Die in der Aufgabe gegebene Differentialgleichung ist separierbar und damit durch die Methode der Trennung der Variablen lösbar.

$$\dot{v}(t) = g - \frac{\gamma}{m}v(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{t_0}^{t}\frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t \qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \qquad -\frac{m}{\gamma}\ln\left[\frac{g - \frac{\gamma}{m}v(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v_0}\right] = t - t_0$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t) = \frac{m}{\gamma}\left[g - \left(g - \frac{\gamma}{m}v_0\right)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right]$$

$$\Longrightarrow \qquad v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] + v_0e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Aufgabe 2 *Exakte Differentialgleichungen*

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $\left(x+y^3\right)y'+y=x^3$

(ii) $0=\sin\left(xy^2\right)+xy^2\cos\left(xy^2\right)+\left[2x^2y\cos\left(xy^2\right)+2y\right]y'$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $0=2\cos y+4x^2y\sin y+\left(yx^3\cos y+x^3\sin y\right)y'-xy'\sin y$

(ii) $x\arctan\left(\frac{x}{y^2}\right)+\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}=\frac{2x^3y}{x^2+y^4}y'$

LÖSUNG:

(a) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f,g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, sodass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ folgende Gleichungen gelten.

$$f(x,y):=y-x^3,\qquad g(x,y):=x+y^3$$
$$\implies\quad f(x,y)+g(x,y)y'=0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x,y\in\mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt.

$$\partial_2 f(x,y)=\partial_{\tilde{y}}f(x,\tilde{y})\big|_y=1=\partial_{\tilde{x}}g(\tilde{x},y)\big|_x=\partial_1 g(x,y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1\varphi=f,\qquad \partial_2\varphi=g$$

Um diese zu berechnen, kann man zum Beispiel einen der beiden folgenden Wege verwenden.

$$\varphi(x,y)=\int\partial_1\varphi(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x=\int f(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x=yx-\frac{x^4}{4}+c(y)$$
$$\implies\quad \partial_2\varphi(x,y)=x+c'(y)=g(x,y)=x+y^3$$
$$\implies\quad c'(y)=y^3\quad\implies\quad c(y)=\frac{y^4}{4}+K$$
$$\implies\quad \varphi(x,y)=xy-\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}+K$$
$$\varphi(x,y)=\int\partial_2\varphi(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y=\int g(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y=xy+\frac{y^4}{4}+d(x)$$
$$\implies\quad \partial_1\varphi(x,y)=y+d'(x)=f(x,y)=y-x^3$$

bitte wenden

$$\Longrightarrow \qquad d'(x) = -x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad d(x) = -\frac{x^4}{4} + K$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

Jetzt gehen wir davon aus, dass es sich bei y um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Nach Verwendung der Kettenregel und der gegebenen Differentialgleichung können wir auf das Folgende für alle x einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ schließen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\varphi(s,y(s))\bigg|_x = \partial_1\varphi(x,y(x)) + \partial_2\varphi(x,y(x))y'(x) = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn es für alle $x \in U$ eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Folgende gilt.

$$\varphi(x,y(x)) = C = xy(x) - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4(x)}{4} + K$$

Dies ist auch gleichzeitig die Funktion y in impliziter Form.

(ii) Wir definieren zwei Funktionen $f,g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x,y \in \mathbb{R}$ folgende Gleichungen gelten.

$$f(x,y) \coloneqq \sin\left(xy^2\right) + xy^2\cos\left(xy^2\right), \qquad g(x,y) \coloneqq 2x^2y\cos\left(xy^2\right) + 2y$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x,y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt.

$$\partial_2 f(x,y) = \partial_{\tilde{y}} f(x,\tilde{y})\big|_y = 4xy\cos(xy2) - 2x^2y^3\sin\left(xy^2\right) = \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x},y)\big|_x = \partial_1 g(x,y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1\varphi = f, \qquad \partial_2\varphi = g$$

Um diese zu berechnen, kann man zum Beispiel einen der beiden folgenden Wege verwenden.

$$\varphi(x,y) = \int \partial_1\varphi(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = \int f(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = -\frac{\cos\left(xy^2\right)}{y^2} + c(y)$$

$$\Longrightarrow \qquad \partial_2\varphi(x,y) = +c'(y) = g(x,y) =$$

$$\Longrightarrow \qquad c'(y) = y^3 \qquad \Longrightarrow \qquad c(y) = \frac{y^4}{4} + K$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

$$\varphi(x,y) = \int \partial_2\varphi(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y = \int g(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y = xy + \frac{y^4}{4} + d(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \partial_1\varphi(x,y) = y + d'(x) = f(x,y) = y - x^3$$

$$\Longrightarrow \qquad d'(x) = -x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad d(x) = -\frac{x^4}{4} + K$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

(b) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Gleichungen gelten.

$$f(x,y) \coloneqq 2\cos y + 4x^2 y \sin y, \qquad g(x,y) \coloneqq yx^3 \cos y + x^3 \sin y - x \sin y$$
$$\implies \quad f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\partial_2 f(x,y) = \partial_{\tilde{y}} f(x,\tilde{y})\big|_y = -2\sin y + 4x^2 \sin y + 4x^2 y \cos y$$
$$\partial_1 g(x,y) = \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x},y)\big|_x = 3x^2 y \cos y + 3x^2 \sin y - \sin y$$
$$\implies \quad \partial_2 f(x,y) - \partial_1 g(x,y) = \left(x^2 - 1\right)\sin y + \left(1 - 3x^2\right) y \cos y \neq 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt.

(ii) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ folgende Gleichungen gelten.

$$f(x,y) \coloneqq x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, \qquad g(x,y) \coloneqq -\frac{2x^3 y}{x^2 + y^4}$$
$$\implies \quad f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\partial_2 f(x,y) = \partial_{\tilde{y}} f(x,\tilde{y})\big|_y = -\frac{4x^4 y^5}{\left(x^2 + y^4\right)^2}$$
$$\partial_1 g(x,y) = \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x},y)\big|_x = -\frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} + \frac{4x^4 y}{\left(x^2 + y^4\right)^2}$$
$$\implies \quad \partial_2 f(x,y) - \partial_1 g(x,y) = \frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} - \frac{8x^4 y}{\left(x^2 + y^4\right)^2} \neq 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt.

Aufgabe 3 *Vollständiges Differential*

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad U(x,y,z) := x^4yz^2 + 2y^2x^3e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U.

(b) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass das totale Differential $\mathrm{d}V$ von V für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) := \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z)$$

Hinweis: Überprüfen Sie dafür die Integrabilitätsbedingung des gegebenen Differentials.

LÖSUNG:

(a) Der Gradient der skalaren Funktion U berechnet sich wie folgt, da es sich bei U um eine stetig differenzierbare Funktion handelt.

$$\nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1 U(x,y,z) \\ \partial_2 U(x,y,z) \\ \partial_3 U(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3yz^2 + 6x^2y^2e^z \\ x^4z^2 + 4x^3ye^z \\ 2x^4yz + 2x^3y^2e^z \end{pmatrix}$$

Das totale Differential existiert, da sich U zweimal stetig differenzieren lässt und damit durch den Satz von Schwarz die Integrabilitätsbedingung automatisch erfüllt ist. Es ist dann durch den folgenden Ausdruck gegeben.

$$\mathrm{d}U = \langle \nabla U, \mathrm{d}r \rangle, \qquad \mathrm{d}r := \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \mathrm{d}U(x,y,z) = \partial_1 U(x,y,z)\mathrm{d}x + \partial_2 U(x,y,z)\mathrm{d}y + \partial_3 U(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \quad \mathrm{d}U(x,y,z) = \left(4x^3yz^2 + 6x^2y^2e^z\right)\mathrm{d}x + \left(x^4z^2 + 4x^3ye^z\right)\mathrm{d}y + \left(2x^4yz + 2x^3y^2e^z\right)\mathrm{d}z \qquad \text{1 P.}$$

(b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt nun die folgende Aussage. Wir definieren hierfür die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z) = \underbrace{\left(4xyz^2 + 6y^2e^z\right)}_{=:f(x,y,z)}\mathrm{d}x + \underbrace{\left(x^2z^2 + 4xye^z\right)}_{=:g(x,y,z)}\mathrm{d}y + \underbrace{\left(2x^2yz + 2xy^2e^z\right)}_{=:h(x,y,z)}\mathrm{d}z$$

Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Existenz der in der Aufgabenstellung beschriebenen Funktion V, ist die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung. Es gibt nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, die die folgenden Implikationen erfüllen.

$$\partial_2 f(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_1 U(x,s,z)}{x^2}\right)\bigg|_y = \frac{\partial_2\partial_1 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_1 g(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_2 U(s,y,z)}{s^2}\right)\bigg|_x = \frac{\partial_2\partial_1 U(x,y,z)}{x^2} - \frac{2\,\partial_2 U(x,y,z)}{x^3}$$

$$\implies \quad \partial_2 f(x,y,z) - \partial_1 g(x,y,z) = \frac{2\,\partial_2 U(x,y,z)}{x^3} = xz^2 + 4ye^z \neq 0$$

$$\partial_3 f(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_1 U(x,y,s)}{x^2}\right)\bigg|_z = \frac{\partial_3\partial_1 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_1 h(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_3 U(s,y,z)}{s^2}\right)\bigg|_x = \frac{\partial_3\partial_1 U(x,y,z)}{x^2} - \frac{2\,\partial_3 U(x,y,z)}{x^3}$$

$$\implies \quad \partial_3 f(x,y,z) - \partial_1 h(x,y,z) = \frac{2\,\partial_3 U(x,y,z)}{x^3} = 2xyz + 2y^2 e^z \neq 0$$

$$\partial_3 g(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_2 U(x,y,s)}{x^2}\right)\bigg|_z = \frac{\partial_3\partial_2 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_2 h(x,y,z) = \partial_s \left(\frac{\partial_3 U(x,s,z)}{x^2}\right)\bigg|_y = \frac{\partial_2\partial_3 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\implies \quad \partial_3 g(x,y,z) - \partial_2 h(x,y,z) = 0$$

Die ersten beiden Folgerungen zeigen, dass die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Es 1 P.
reicht eine dieser beiden Aussagen zu zeigen. Demzufolge kann es eine solche Funktion V 1 P.
nicht geben.