Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 7 - Krummlinige Koordinaten I

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 04.06.2018

Aufgabe 1 *Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten*

Gegeben seien das skalare Feld U und das Vektorfeld $\mathbf{V}$. Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten

(i) $\operatorname{div}\mathbf{V}$

(ii) ΔU.

Aufgabe 2 *Zylinderkoordinaten und Feldlinien*

Es sei U die skalare Funktion

$$U = \rho\cos\phi$$

der Zylinderkoordinaten ρ und ϕ.

(a) Skizzieren Sie in der $(x-y)$-Ebene die Linien $U = \text{const}$.

(b) Berechnen Sie die radiale Komponente V_ρ und die azimutale Komponente V_ϕ von $\mathbf{V} = \operatorname{grad} U$ in Zylinderkoordinaten.

(c) Die Feldlinien von $\mathbf{V} = \operatorname{grad} U$ können durch die Funktion $\rho = \rho(\phi)$ beschrieben werden. Zeigen Sie, dass diese Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\rho(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\rho V_\rho}{V_\phi}$$

genügt.

(d) Lösen Sie diese Differentialgleichung für $\rho(\phi)$ und tragen Sie die $\mathbf{V}$-Feldlinien in Ihre Skizze mit den Linien $U = \text{const}$ ein.

Aufgabe 3 *Laplaceoperator in 3 Dimensionen*

Der LAPLACE-Operator wird u.a. in der Elektrodynamik auch auf Vektoren angewendet. Im kartesischen wird die Definition aus der Vorlesung einfach komponentenweise gebraucht, d.h. es ist

$$\Delta\mathbf{a} = (\Delta a_1)\mathbf{e}_1 + (\Delta a_2)\mathbf{e}_2 + (\Delta a_3)\mathbf{e}_3$$

wobei die a_i die Komponenten von $\mathbf{a}$ sind und $\Delta = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Berechnen Sie nun $\Delta\mathbf{a}$ in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass – im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten –

$$\Delta a_i \neq (\Delta\mathbf{a})_i.$$