Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 0 - Doppel- und Dreifachintegrale

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: keine

Fertigen Sie zu allen Aufgaben Skizzen an!

Aufgabe 1 *Fläche einer Ellipse*

Berechnen Sie die von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umschlossene Fläche durch Verwendung eines Doppelintegrals und substituieren Sie $x' = x/a$ und $y' = y/b$.

Aufgabe 2 *Integrationsreihenfolge*

(a) Kehren Sie die Reihenfolge der Integrationen in dem Doppelintegral

$$I = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=\sqrt{4a^2-4ay}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

um und nehmen Sie dafür an, dass die Funktion $f(x,y)$ im Integrationsgebiet wohldefiniert ist.

(b) Kehren Sie die Reihenfolge der Integrationen um und berechnen Sie die Integrale

(i) $$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x}^{y=2-x} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

(ii) $$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} x\sqrt{y(2-y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3 *Volumenberechnung I*

Berechnen Sie das von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2), \quad a > 0$$

eingeschlossene Volumen. Verwenden Sie dazu Kugelkoordinaten.

Hinweis: Es ist

$$\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin(4x) - 8\sin(2x) + 12x}{32} + C$$

LÖSUNG:

Damit erhalten wir:

$$V = 2\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{1-r^2} r\,dr\,d\varphi\,dz = 4\pi\int_0^1 (1-r^2)r\,dr = 4\pi\int_0^1 (r-r^3)dr =$$

$$= 4\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\bigg|_0^1 = 4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \pi.$$

9. Berechnen Sie den Inhalt des von den Flächen

$$z = x^2 + 2y^2 \quad \text{und} \quad z = 1 - x^2 - y^2$$

eingeschlossenen Volumenbereichs B.

Lösung:
Bei der ersten Fläche handelt es sich um ein nach oben geöffnetes elliptisches Paraboloid mit Scheitel im Ursprung und bei der zweiten um ein nach unten geöffnetes Rotationsparaboloid mit Scheitel in $P(0,0,1)$. Durch Gleichsetzen der z-Werte erhalten wir die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene. $\bar{B} : 2x^2 + 3y^2 \leq 1$. Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Es gilt:

$$B = \Big\{(x,y,z)\,\Big|\, x^2+2y^2 \leq z \leq 1-x^2-y^2,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}\ ,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}.\ \text{ Damit erhalten wir:}$$

$$V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}\int_{x^2+2y^2}^{1-x^2-y^2} dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} (1-2x^2-3y^2)dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} (1-2x^2-3y^2)dx\,dy = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (y-2x^2y-y^3)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-2x^2}-2x^2\sqrt{1-2x^2}-\frac{1}{3}(1-2x^2)^{3/2}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{1-2x^2}\left(1-2x^2\right)-\frac{1}{3}(1-2x^2)^{3/2}\right]dx = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{3/2}dx\ .$$

Die Substitution $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$ liefert dann:

$$V = \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\Big(\cos(2t)+1\Big)\right]^2 dt =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{6}}\Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^2(2t)\,dt}_{\frac{\pi}{4}} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}dt}_{\frac{\pi}{2}}\Bigg) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\ .$$

10. Berechnen Sie den Inhalt des von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2), \quad a > 0$$

eingeschlossenen Volumenbereichs.

Aufgabe 4 *Volumenberechnung II*

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int\int\int_V \left[xz^2 \exp\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über den durch die Koordinatenflächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ begrenzten Oktanten. Rechnen Sie in Kugelkoordinaten.

Hinweis: Es ist

$$\int t^2 e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}\left(\alpha^2 t^2 - 2\alpha t + 2\right)}{\alpha^3} + C$$