Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 6 - Indexkalkül

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 28.05.2018

Alle Aufgaben sind im Indexkalkül zu lösen (sonst gibt es keine Punkte!).
Nützliche Relation:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}}$$

Aufgabe 1 *Vektoroperatoridentitäten I*

Bestätigen Sie im Indexkalkül folgende Identitäten:

(i) $\mathrm{rot}(\lambda\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}\,\lambda) \times \mathbf{a} + \lambda\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

(ii) $\mathrm{grad}(UV) = U\,\mathrm{grad}\,V + V\,\mathrm{grad}\,U$

(iii) $\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$

(iv) $\mathrm{grad}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

(v) $\mathrm{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$

(vi) $(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}, \quad \text{wenn} \quad \mathbf{a}^2 = \mathrm{const}$

(vii) $\Delta(UV) = U\Delta V + V\Delta U + 2\,\mathrm{grad}\,U \cdot \mathrm{grad}\,V$

LÖSUNG:

[Auf]gabe 5 Dreireihige Determinante

$$\boxed{(\det A)\, \varepsilon_{lmn} = A_{li} A_{mj} A_{nk}\, \varepsilon_{ijk}}$$

setzen $l=1,\ m=2,\ n=3$, so daß $\varepsilon_{lmn} = 1$

damit
$$\det A = A_{1i} A_{2j} A_{3k}\, \varepsilon_{ijk} = A_{11}\, \varepsilon_{1jk} A_{2j} A_{3k} + A_{12}\, \varepsilon_{2jk} A_{2j} A_{3k} + A_{13}\, \varepsilon_{3jk} A_{2j} A_{3k}$$

$$= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) + A_{12}(-A_{21}A_{33} + A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31})$$

- zum Vergleich: entwickeln $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$ nach erster Zeile $\longrightarrow$ Übereinstimmung

2

Aufgabe 6 Vektoroperator – Identitäten

a) $\boxed{\operatorname{div}(\lambda \mathfrak{a})} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\lambda a_i) = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_i} a_i + \lambda \dfrac{\partial a_i}{\partial x_i} = \boxed{\mathfrak{a} \operatorname{grad} \lambda + \lambda \operatorname{div} \mathfrak{a}}$ 0,5

„Produktregel"

b) $\boxed{\operatorname{rot}(\lambda \mathfrak{a})} \longrightarrow \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial}{\partial x_j}(\lambda a_k) = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_j} a_k + \lambda\, \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial a_k}{\partial x_j}$

$= [(\operatorname{grad} \lambda) \times \mathfrak{a}]_i + \lambda (\operatorname{rot} \mathfrak{a})_i \longrightarrow \boxed{(\operatorname{grad} \lambda) \times \mathfrak{a} + \lambda \operatorname{rot} \mathfrak{a}}$ 1,5

c) $\boxed{\operatorname{grad}(UV)} \longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i}(UV) = V \dfrac{\partial U}{\partial x_i} + U \dfrac{\partial V}{\partial x_i} \longrightarrow \boxed{V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V}$ 0,5

d) $\boxed{\operatorname{div}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i} b_k + \varepsilon_{ijk} a_j \dfrac{\partial b_k}{\partial x_i}$

$= b_k \varepsilon_{kij} \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_j \varepsilon_{jik} \dfrac{\partial b_k}{\partial x_i}$

$= b_k (\operatorname{rot} \mathfrak{a})_k - a_j (\operatorname{rot} \mathfrak{b})_j = \boxed{\mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \operatorname{rot} \mathfrak{b}}$ 1,5

- speziell: $\left.\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \operatorname{grad} U, & \operatorname{rot} \mathfrak{a} &= \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0 \\ \mathfrak{b} &= \operatorname{grad} V, & \operatorname{rot} \mathfrak{b} &= \operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0 \end{aligned}\right\}$ $\underline{\operatorname{div}(\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} V) = 0}$

2/4 oder direkt: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U \times \operatorname{grad} V) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_k}$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

antisymmetr. in i,j — symmetrisch — antisymmetr. in i,k — symmetrisch

e) $\boxed{\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(a_j b_j) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_j + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$

andererseits:

$\boxed{(\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \times \operatorname{rot}\mathfrak{b} + \mathfrak{b} \times \operatorname{rot}\mathfrak{a}} \longrightarrow$

$$b_j \frac{\partial}{\partial x_j} a_i + a_j \frac{\partial}{\partial x_j} b_i + \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial b_m}{\partial x_l} + \varepsilon_{ijk} b_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_j(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial b_m}{\partial x_l} + b_j(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= \cancel{b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}} + \cancel{a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial b_j}{\partial x_i} a_j - \cancel{\frac{\partial b_i}{\partial x_j} a_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_j - \cancel{\frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j}\text{, Übereinstimmung}$$

1,5 • speziell $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$: $\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}) = 2(\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{a} + 2\mathfrak{a} \times \operatorname{rot}\mathfrak{a}$

f) $\boxed{\operatorname{rot}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})} \longrightarrow \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_l b_m)$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j} b_m + a_l \frac{\partial b_m}{\partial x_j}\right)$$

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_j} b_i - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}$$

$$= b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_i \operatorname{div}\mathfrak{b} - b_i \operatorname{div}\mathfrak{a}$$

1,5 $\longrightarrow \boxed{(\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} - (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\operatorname{div}\mathfrak{a}}$

Aufgabe 2 *Vektoroperatoridentitäten II*

Bestätigen Sie im Indexkalkül die Identitäten

(i) $\mathbf{c}\,\mathrm{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{b}(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{a}$

(ii) $(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{a}$

(iii) $(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{c}$

(v) $(\mathbf{a} \times \mathrm{grad}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$

(vi) $(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Nabla-Operator ∇ in den Beispielen (iii) und (vi) auf *beide* rechts von ihm stehende Vektorfelder wirken soll.

LÖSUNG:

zu Aufgabe 4 Vektoroperator-Identitäten (I)

(vii) • $\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) a_k = a_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i}$ (*)

• $$-\varepsilon_{ijk}\, a_j\, (\text{rot}\, a)_k = -\varepsilon_{ijk}\, a_j\, \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} a_m = -\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\, a_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= -\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\, a_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l} = -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l}$$

$$= -a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$

für $a^2 = a_j a_j = \text{const}$ ist $\frac{\partial}{\partial x_k}(a_j a_j) = 2 a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_k} = 0 \longrightarrow a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0$

damit $\boxed{-\varepsilon_{ijk}\, a_j\, (\text{rot}\, a)_k = a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}}$, Übereinstimmung mit (*) 1

(viii) $$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}(UV) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(U \frac{\partial V}{\partial x_i} + V \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = 2 \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} + U \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_i} + V \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_i}$$

$$\boxed{\Delta(UV) = 2\, \text{grad}\, U \cdot \text{grad}\, V + U \Delta V + V \Delta U}$$ 1

9

Aufgabe 5 Vektoroperator-Identitäten (II)

(i) • $c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_k b_k) = c_i \frac{\partial a_k}{\partial x_i} b_k + c_i a_k \frac{\partial b_k}{\partial x_i}$

• $a_i \left(c_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) b_i + b_i \left(c_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) a_i = a_i c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_i c_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$

Übereinstimmung ($i \to j$, $k \to i$)

(ii) • $$\left(c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \varepsilon_{klm}\, a_l b_m = \varepsilon_{klm}\, c_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_l b_m) = \varepsilon_{klm}\, c_i \frac{\partial a_l}{\partial x_i} b_m + \varepsilon_{klm}\, c_i a_l \frac{\partial b_m}{\partial x_i}$$

• $$\varepsilon_{klm}\, a_l \left(c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) b_m - \varepsilon_{klm}\, b_l \left(c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) a_m$$

$$= \varepsilon_{klm}\, a_l c_i \frac{\partial b_m}{\partial x_i} - \varepsilon_{klm}\, b_l c_i \frac{\partial a_m}{\partial x_i}$$

$$= \varepsilon_{klm}\, a_l c_i \frac{\partial b_m}{\partial x_i} - \underbrace{\varepsilon_{kml}}_{-\varepsilon_{klm}}\, b_m c_i \frac{\partial a_l}{\partial x_i}$$, Übereinstimmung

(3/2) $\boxed{(iii)}$ • $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_i\right) b_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i b_j)$, wenn $\vec{\nabla}$ auf a und b wirken soll (!)

$$= \frac{\partial a_i}{\partial x_i} b_j + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$$

• $\left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) b_j + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, Übereinstimmung

$\boxed{(iv)}$ • $\varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{imn} \frac{\partial}{\partial x_m} c_n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) a_j b_k \frac{\partial c_n}{\partial x_m}$

$$= a_m b_n \frac{\partial c_n}{\partial x_m} - a_n b_m \frac{\partial c_n}{\partial x_m}$$

• $b_i \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) c_i - a_i \left(b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) c_i = a_m b_n \frac{\partial c_n}{\partial x_m} - a_n b_m \frac{\partial c_n}{\partial x_m}$, Übereinstimmung

$\boxed{(v)}$ • $\varepsilon_{ijk} (a \times \mathrm{grad})_j b_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} a_l \frac{\partial}{\partial x_m} b_k = -\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jlm} a_l \frac{\partial b_k}{\partial x_m}$

$$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) a_l \frac{\partial b_k}{\partial x_m} = -a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial b_k}{\partial x_i}$$

• $\left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) b_i + \varepsilon_{ijk} a_j (\mathrm{rot}\, b)_k - a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$

$$= a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} b_m - a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$$

$$= a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j \frac{\partial b_m}{\partial x_l} - a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$$

$$= a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j \frac{\partial b_m}{\partial x_l} - a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$$

$= \cancel{a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} + a_m \frac{\partial b_m}{\partial x_i} - \cancel{a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}} - a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$, Übereinstimmung

$\boxed{(vi)}$ • $\varepsilon_{ijk} (\vec{\nabla} \times a)_j b_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial}{\partial x_l}(a_m b_k)$, wenn $\vec{\nabla}$ auf a und b wirken soll (!)

$$= -\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jlm} \left(\frac{\partial a_m}{\partial x_l} b_k + a_m \frac{\partial b_k}{\partial x_l}\right)$$

$$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) \left(\frac{\partial a_m}{\partial x_l} b_k + a_m \frac{\partial b_k}{\partial x_l}\right)$$

$$= -\frac{\partial a_k}{\partial x_i} b_k - a_k \frac{\partial b_k}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} b_k + a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$$

• $$a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} - \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) b_i - \varepsilon_{ijk}\, a_j\, (\mathrm{rot}\, \vec{b})_k - \varepsilon_{ijk}\, b_j\, (\mathrm{rot}\, \vec{a})_k$$

$$= a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{ijk}\, a_j\, \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} b_m - \varepsilon_{ijk}\, b_j\, \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} a_m$$

$$= a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{klm} \left(a_j \frac{\partial b_m}{\partial x_l} + b_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l}\right)$$

$$= a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k} - \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\left(a_j \frac{\partial b_m}{\partial x_l} + b_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l}\right)$$

$$= a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_k} - \cancel{a_k \frac{\partial b_i}{\partial x_k}} - a_m \frac{\partial b_m}{\partial x_i} - b_m \frac{\partial a_m}{\partial x_i} + \cancel{a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$$, Übereinstimmung

Aufgabe 3 *Spezielle Vektorfelder*

(a) Es sei Φ ein skalares Feld und $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die Beziehung

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi \cdot \operatorname{div}\mathbf{A}.$$

(b) Spezialisieren Sie das Resultat von (a) für den Fall $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\Phi$.

(c) Das skalare Feld Φ erfülle nun die Bedingungen $\Phi = 0$ auf S und $\Delta\Phi = 0$ in V, worin Δ den LAPLACE-Operator und S die Fläche bezeichnet, die das Volumen V umgibt. Zeigen Sie, dass $\phi = 0$ in V gilt.

LÖSUNG:

Lösung: Spezielle Vektorfelder

4 Punkte

1 a) zz: $\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi\cdot \operatorname{div}\vec{A}$

$$\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \partial_i(\Phi\cdot A_i) = (\partial_i\Phi)\cdot A_i + \Phi\cdot(\partial_i A_i)$$

$$= (\partial_i\Phi)\cdot\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}A_j + \Phi\cdot(\partial_i\vec{e_i})(A_j\vec{e_j})$$

$$= (\operatorname{grad}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi\cdot\operatorname{div}\vec{A}$$

1 b) $\vec{A} = \operatorname{grad}\Phi$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi) = (\operatorname{grad}\Phi)^2 + \Phi\cdot\Delta\Phi$ $\qquad (\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad})$

c) $\Phi = 0$ auf S

$\Delta\Phi = 0$ in V

1 $$\underset{\substack{\uparrow\\ \Phi=0 \text{ auf } S}}{0} = \oiint_S \Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi\, d\vec{f} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gauß'scher Satz}}}{=} \iiint_V \operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\Phi)\, dV$$

$$\overset{(b)}{=} \iiint_V (\operatorname{grad}\Phi)^2\, dV + \underbrace{\iiint_V \Phi\Delta\Phi\, dV}_{=0 \quad \text{da } \Delta\Phi=0 \text{ auf V}}$$

$$= \iiint_V (\operatorname{grad}\Phi)^2\, dV$$

$\Rightarrow (\operatorname{grad}\Phi)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{grad}\Phi = \vec{0} \Rightarrow \Phi = \text{const.}$ auf V

1 da $\Phi = 0$ auf S $\Rightarrow$ $\underline{\Phi = 0 \text{ in } V}$

bitte wenden

Aufgabe 4 *Die Identitäten von JACOBI und LAGRANGE*

Bestätigen Sie jeweils im Indexkalkül

(a) die JACOBI-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

(b) die LAGRANGE-Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}).$$

LÖSUNG:

2/1

Aufgabe 1 Kronecker- und Levi-Civitá-Symbol

a) $\boxed{\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}}$

b) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kn}\delta_{in} = \delta_{ik}\delta_{ki} = \boxed{\delta_{ii} = 3}$

c) $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ijj} = 0$

d) $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}}$ +1

e) $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2\cdot 3 = 6}$ (in Aufgabe d) $k=n$) 5 + 1ZP

Aufgabe 2 Die Jacobi-Identität (Entwicklungssatz)

$$a\times(b\times c) \rightarrow \varepsilon_{ijk}\, a_j (b\times c)_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\, a_j b_l c_m$$

$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\, a_j b_l c_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j b_l c_m$$

1,5 $$= (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i \longrightarrow (ac)b - (ab)c$$

zyklische Vertauschung:

0,5 $$c\times(a\times b) \rightarrow (c_j b_j) a_i - (c_j a_j) b_i \longrightarrow (bc)a - (ac)b$$

0,5 $$b\times(c\times a) \rightarrow (b_j a_j) c_i - (b_j c_j) a_i \longrightarrow (ab)c - (bc)a$$

+

$\boxed{a\times(b\times c) + c\times(a\times b) + b\times(c\times a) = 0}$ Jacobi-Identität 0,5

$\frac{3}{5,5}$

Aufgabe 3 Spatprodukt

a) $\boxed{a(b\times c)} = a_i (b\times c)_i = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k = \varepsilon_{kij}\, c_k a_i b_j = \boxed{c(a\times b)}$ 1

$= \varepsilon_{jki}\, b_j c_k a_i = \boxed{b(c\times a)}$ 0,5

(zyklische Vertauschung)

- speziell $c = a$: $a\times(b\times a) = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j a_k = \frac{1}{2} b_j (\varepsilon_{ijk}\, a_i a_k + \varepsilon_{kji}\, a_k a_i)$

$$\underline{a\times(b\times a)} = \frac{1}{2} b_j a_i a_k (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) = \underline{0}$$ 0,5

2/2 b.) $(a\times b)\times(c\times d) \longrightarrow \varepsilon_{ijk}(a\times b)_j(c\times d)_k$

• 1.) $\varepsilon_{ijk}(a\times b)_j\, \varepsilon_{klm}\, c_l d_m = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}(a\times b)_j c_l d_m$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(a\times b)_j c_l d_m$$

$$= c_i (a\times b)_j d_j - (a\times b)_j c_j d_i = [d(a\times b)]c - [\overbrace{c(a\times b)}^{a(b\times c)\ \text{(siehe a))}}]d$$

2 (vgl. auch Entwicklungssatz, Aufg. 2,

aber auch: • 2.) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\, a_l b_m (c\times d)_k = -\varepsilon_{jik}\varepsilon_{jlm}(c\times d)_k a_l b_m$

$$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})(c\times d)_k a_l b_m$$

$$= -a_i (c\times d)_k b_k + b_i (c\times d)_k a_k = -[\overbrace{b(c\times d)}^{d(b\times c)}]a + [\overbrace{a(c\times d)}^{d(a\times c)}]b$$

2

Subtraktion: $\boxed{0 = [d(a\times b)]c - [a(b\times c)]d + [b(c\times d)]a - [c(d\times a)]b}$

Spatprodukte

• Beispiel: $a = \vec{i},\ b = \vec{j},\ c = k$

z.B. $a\times b \longrightarrow \varepsilon_{ijk}a_j b_k = \varepsilon_{i12}$, da $a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = 0$, $b_2 = 1,\ b_1 = b_3 = 0$

$$= \varepsilon_{312} = 1$$

$$(a\times b)_1 = (a\times b)_2 = 0,\quad (a\times b)_3 = 1 \longrightarrow \vec{i}\times\vec{j} = k$$

usw. (→ Multiplikationstabelle)

$$(d\cdot k)k - (\vec{i}\cdot\vec{i})d + (d\cdot\vec{i})\vec{i} - [d\cdot(-\vec{j})]\vec{j} = 0$$

$$d_3 k - d + d_1\vec{i} + d_2\vec{j} = 0$$

1 Das Ziel war, sich im Kreis zu drehen! $\boxed{d = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3 k}$

Aufgabe 4 Die Lagrange-Identität

$$(a\times b)(c\times d) = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})a_j b_k c_l d_m$$

$$= a_j c_j \cdot b_k d_k - a_j d_j \cdot b_k c_k$$

$$\boxed{(a\times b)(c\times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)}$$

2

Beispiel 0.5

Zusatzaufgabe 5 *Levi-Civita in n-Dimensionen*

Das LEVI-CIVITA-Symbol ist in n Dimensionen definiert als

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{wenn} \quad i_1, i_2 \dots, i_n \quad \text{eine gerade Permutation von 1,2,\dots,n bilden} \\ -1 & \text{wenn} \quad i_1, i_2 \dots, i_n \quad \text{eine ungerade Permutation von 1,2,\dots,n bilden} \\ 0 & \text{sonst, d.h. wenn mindestens 2 Indices gleich sind} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie

(i) ϵ_{1324} (ii) $\epsilon_{7125634}$ (iii) $\epsilon_{67812345}$ (iv) ϵ_{364152}

(Vorsicht: Nicht einfach loslegen wie in 3 Dimensionen, sondern die o.g. Definition verwenden und ggfs. nachlesen was gerade und ungerade Permuation bedeutet.)

(b) Das Levi-Civita-Symbol kann auch in einer Determinantenschreibweise angegeben werden als

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \det \begin{pmatrix} \text{—} & \mathbf{e}_{i_1} & \text{—} \\ \text{—} & \mathbf{e}_{i_2} & \text{—} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{—} & \mathbf{e}_{i_n} & \text{—} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Machen Sie sich zunächst klar, dass die Relation stimmt. Stellen Sie dann den Term $\epsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \epsilon_{j_1 \dots j_n}$ als Determinante dar, indem Sie Eigenschaften von Determinanten und die Relation $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ verwenden.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Determinantenschreibweise $\epsilon_{ijkl} \cdot \epsilon_{mnop}$ und summieren Sie anschließend nacheinander über $i = m$, $j = n$, $k = o$ und $l = p$.

(d) Bestimmen Sie nun allgemein $\epsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \epsilon_{i_1 \dots i_n}$ (Summenkonvention), wobei hier allgemeine Überlegungen wesentlich schneller zum Ziel führen als das Rechnen mit der Determinantenschreibweise (ist aber auch möglich).

LÖSUNG:

5. Levi-Civita-Symbol

a) allgemein: Wir bestimmen die Anzahl der Vertauschungen, jede Transposition ergibt ein Minuszeichen. Dabei ist die „Methode der Zählung" unwesentl., da die Parität erhalten ist.

auch mögl.: Zerlegen der Permutation in disjunkte Zyklen. Ist die Anzahl der Zyklen gerader Länge gerade, so ist die Permut. gerade (genau dann wenn). Zyklen ungerader Länge veränd. das Sign. nicht

b)

i) $\varepsilon_{1324} = -1$; (1 Transposition $3 \leftrightarrow 2$)

ii) $\varepsilon_{7125634} = 1$

7 1 2 5 6 3 4
1 7 2 5 6 3 4
1 2 7 5 6 3 4
1 2 3 5 6 7 4
1 2 3 4 6 7 5
1 2 3 4 5 7 6
1 2 3 4 5 6 7

6 Vertauschungen $\rightarrow$ sgn +1

oder disjunkter Zyklus: $1 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Es gibt Null Zyklen gerader Länge!

iii) $\varepsilon_{67812345} = -1$ (zyklisch, gerade Länge) also anders als bei ε_{ijk} (da ungerade Länge) explizit $1 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2 \to 7 \to 4 \to 1$

iv) $\varepsilon_{364152} = -1$

$$\begin{matrix} 3\,6\,4\,1\,5\,2 \\ 1\,6\,4\,3\,5\,2 \\ 1\,2\,4\,3\,5\,6 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6 \end{matrix}$$

3 Vertauschunge

oder $1 \to 3 \to 4$ $\quad 2 \to 6$ $\quad 5 \to 5$

Anz. gerader Zykle ungerade $\Rightarrow$ sgn -1

b) $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \det \begin{pmatrix} - & \vec{e}_{i_1} & - \\ - & \vec{e}_{i_2} & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \vec{e}_{i_n} & - \end{pmatrix}$

folgt z.B. aus Leibniz-Formel

$$\det A = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \vec{e}_{i_n} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \vec{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_n} \\ \vdots & & \\ \delta_{i_n j_1} & \dots & \delta_{i_n j_n} \end{pmatrix}$$

da $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

und $\det A^T = \det A$

c) $$\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{mnop} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{io} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{im}\begin{vmatrix} \delta_{jn} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{kn} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{ln} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix} - \delta_{in}\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

$$+ \delta_{io}\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix} - \delta_{ip}\begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jo} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ko} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lo} \end{vmatrix}$$

Fall $i=m$:

$$\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{inop} = \overbrace{\sum_{i=1}^{4}\delta_{ii}}^{4}\,\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop} - \underbrace{\sum_i \delta_{in}\,\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{iop}}_{\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}}$$

$$+ \underbrace{\sum \delta_{io}\,\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{inp}}_{-\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}} - \underbrace{\sum \delta_{ip}\,\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{ino}}_{\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{nop}}$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}}}$$

Fall $i=m$ und $j=n$

$$\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{ijop} = \sum_{j=1}^{4}\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{jop} = 2\underline{\underline{(\delta_{ko}\,\delta_{lp} - \delta_{kp}\cdot\delta_{lo})}}$$ (vgl. NR)

Fall $i=m$ und $j=n$ und $k=o$:

$$2\sum_{k=1}^{4}(\delta_{kk}\delta_{lp} - \delta_{kp}\cdot\delta_{lk}) = 2(4\,\delta_{lp} - \delta_{lp}) = \underline{\underline{3\,\delta_{lp}}}$$

Alle Indices gleich:

$$2\sum_{l=1}^{4} 3\,\delta_{ll} = \cancel{12}\,24 = \underline{\underline{4!}}$$

Nebenrechnung:

$$\sum_{j=1}^{4} \varepsilon_{jrl} \cdot \varepsilon_{jop} = \begin{vmatrix} \delta_{jj} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{rj} & \delta_{ro} & \delta_{rp} \\ \delta_{lj} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{jj} (\delta_{ro} \delta_{lp} - \delta_{lo} \delta_{rp}) - \delta_{jo} (\delta_{rj} \delta_{lp} - \delta_{lj} \delta_{rp})$$

$$+ \delta_{jp} (\delta_{rj} \delta_{lo} - \delta_{lj} \delta_{ro}) = 4 - 1 - 1$$

$$= 2 (\delta_{ro} \delta_{lp} - \delta_{lo} \delta_{rp})$$

d) • allgem. Überlegung: $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (ohne Summe)

ist immer +1 oder 0 (bei gl. Indizes)

Wieviele Einsen sind zu summieren? genauso viele wie es Permutationen von n gibt

$\rightarrow n!$

• mit Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \dots & \delta_{i_1 i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_n i_1} & \dots & \delta_{i_n i_n} \end{pmatrix}$$

symmetr. Matrix jede Zeile hat genau eine 1

$$= \sum_{i_1 \dots i_n = 1}^{n} 1 = n!$$

• vollst. Induktion: Anfang $n=1$: $\varepsilon_{i_1} = 1 = 1!$

Es gelte $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = n!$

$n+1$: $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \dots & \delta_{i_1 n+1} \\ & & \vdots \\ \delta_{i_1 i_{n+1}} & & \delta_{i_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix}$

$$= \delta_{i_{n+1} i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$ q.e.d.