Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 9

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 20.12.17

Aufgabe 1

Räuber und Beute

Betrachten Sie die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen mit den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\dot{H} = \alpha H - \beta HF$$
$$\dot{F} = -\gamma F + \delta HF$$

(a) Interpretieren Sie kurz, was die einzelnen Terme im Kontext eines einfachen Räuber-Beute-Modells bedeuten. Erweitern Sie die Differentialgleichungen der Räuber, so dass ein konstanter Abschluss (etwa durch Jäger) berücksichtigt wird.

(b) Leiten Sie aus dem gegebenem Differentialgleichungssystem (ohne Jäger) eine neue Differentialgleichung für $F(H)$ her. Bringen Sie diese in die bekannte Form einer exakten Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass $\Lambda = \frac{1}{FH}$ ein integrierender Faktor ist und lösen Sie die gefundene Differentialgleichung nach der Ihnen bekannten Methode.

(d) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte, an denen die folgende Gleichung gilt, ohne die Verwendung der impliziten Lösung.

$$\dot{F} + \dot{H} = 0$$

Aufgabe 2

Lösungsmethode der inhomogenen Differentialgleichung 2.Ordnung

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, indem Sie diese auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \cos 3x$$

Aufgabe 3

Quadratisches Reibungsgesetz

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den Koeffizienten $m, \gamma, k \in \mathbb{R}^+$.

$$m\ddot{y} \pm \gamma(\dot{y})^2 + ky = 0$$

bitte wenden

Das Vorzeichen vor dem quadratischen Reibungsterm wirke immer so, dass die Reibung die Bewegung behindert. Diese nichtlineare Differentialgleichung kann gelöst werden, wenn man sich zunutze macht, dass die unabhängige Variable t nicht vorkommt. Substituieren Sie $p = \dot{y}$, um auch die Ableitungen nach t zu eliminieren. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bernoulli-Gleichung und substituieren Sie angemessen. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen

$$\dot{y}(0) = 0$$

und $y > 0$ für kleine t (so kleine Zeiten, dass sich das Vorzeichen im Reibungsterm nicht umkehrt). Es soll hier genügen $\dot{y}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4

Aufstellen von Differentialgleichungen

(a) Eine Bakterienpopulation zeige exponentielles Wachstum, das heißt die Anzahl der Bakterien erhöht sich proportional zur Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate r. Zusätzlich werden der Bakterienkultur kontinuierlich k Bakterien pro Zeiteinheit zugefügt. Allerdings seien die Bakterien empfindlich gegen Lichteinfall. Sie sterben deshalb proportional zu Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate $1 + \sin t$, welche den Rhythmus der Tageszeiten simuliert. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Anzahl N der Bakterien auf.

(b) Ein Zylinder von Grundkreisradius r und Masse m schwimmt mit vertikaler Achsenlage im Wasser. Seine Eintauchtiefe sei l. Gesucht ist die Periode der Schwingung, die sich ergibt, wenn man den Zylinder ein Wenig in das Wasser eintaucht und danach loslässt. Der Bewegungswiderstand sei angenähert gleich Null anzunehmen. Wählen Sie die y-Achse vertikal nach unten mit dem Nullpunkt auf der Wasseroberfläche.

Aufgabe 5

Spieglein

Bestimmen Sie die Form des Spiegels, der parallel einfallende Strahlen in den Punkt O reflektiert.

Hinweis: Wählen Sie den Ursprung im Punkt O. Es gilt die folgende Gleichung.

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1 - \tan^2\vartheta}$$

Benutzen Sie die Substitution $y^2 = r^2 - x^2$.

Aufgabe 6

Parametrisierung gegeben

Skizzieren Sie die Kurven xy-Ebene, die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben werden.

(i) $r\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(s) := \frac{1}{2}\left[(1-s)\vec{i} + (-7+3s)\vec{j}\right]$

(ii) $r\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\vec{i} + 2\sin t\vec{j}$

(iii) $r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\vec{i} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\right)\vec{j}$

(iv) $r\colon [1, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\vec{i} + \frac{7t^2 - 2 - 20\pi^2}{4\pi^2 - 1}\vec{j}$

Aufgabe 7 *Kurve gegeben*

Geben Sie für jede der nachfolgend genannten Kurven eine Parametrisierung an.

(a) Die Verbindungsstrecke vom Punkt $P_1 := (1,1)$ zum Punkt $P_2 := (2,5)$.

(b) Die obere Halbellipse mit Halbachsen a und b.

(c) Die Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(d) Die Schnittkurve der Ebene $x + y = 1$ mit dem Kegel $z^2 = x^2 + y^2$.

Aufgabe 8 *Wie ein Fisch im Wasser*

Die Temperaturverteilung in einem See sei gegeben durch die folgende Funktion.

$$D := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z < 0\right\}$$

$$T\colon D \to \mathbb{R}, \qquad T(x,y,z) := -\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 2z^2\right)$$

(a) Bestimmen Sie die Isothermen und fertigen Sie eine Skizze dieser in der yz-Ebene an.

(b) Ein Fisch im Wasser befinde sich am Punkt $(1,2,-1)$. In welche Richtung verändert sich die Temperatur am stärksten? Wird es wärmer oder kälter?

(c) Der Fisch bewege sich auf dem folgenden Weg.

$$r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + (\cos t - 2)\vec{k}$$

Wann ist die Temperatur für ihn am größten und wann am kleinsten? Wo befindet er sich zu diesem Zeitpunkt? Skizzieren Sie die Temperatur $T \circ r$, die der Fisch entlang seines Weges erfährt.

Aufgabe 9 *Wegintegrale berechnen*

Berechnen Sie das Kurvenintegral für das Vektorfeld F und die im Folgenden gegebenen Kurven.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := (x^2 + y^2)\vec{i} + 4xy\vec{j}$$

(i) $2y = x^2$

(ii) $y = x$

(iii) $test$

Aufgabe 10 *Konservative Vektorfelder*

(a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ konservativ sind.

(i) $F := q(v \times B)$

bitte wenden

(ii) $F := 2y^2z^3\vec{i} + 4xyz^3\vec{j} + 6xy^2z^2\vec{k}$

(iii) $F := 2(y+x)\vec{i} + 2x\vec{j}$

(iv) $F := x^2\cos y\vec{i} + 2x\sin y\vec{j} + z^2\vec{k}$

(b) Berechnen Sie das Wegintegral für das folgende Vektorfeld F und den Weg $C = C_1 + C_2$.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = 2(y+x)\vec{i} + 2x\vec{j}$$

C_1 verläuft vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,1)$ und erfüllt $y = x^2$. C_2 verläuft vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(0,0)$ und erfüllt $y = x^4$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Erwartungen und begründen Sie es.

Aufgabe 11

Magnetfeld eines Leiters

Gegeben sei das folgende Vektorfeld.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Integrationsbedingungen erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral für die beiden folgenden Integrationswege und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

(i) $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$

(ii) $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j}$

(c) Vergleichen Sie die Integrationswege und finden Sie heraus, ob das Vektorfeld konservativ ist.