Lösung: Spezielle Vektorfelder 4 Punkte

1 a) zz: $\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi\cdot\operatorname{div}\vec{A}$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) &= \partial_i(\Phi\cdot A_i) = (\partial_i\Phi)\cdot A_i + \Phi\cdot(\partial_i A_i)\\ &= (\partial_i\Phi)\cdot\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}A_j + \Phi\cdot(\partial_i\vec{e_i})(A_j\vec{e_j})\\ &= (\operatorname{grad}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi\cdot\operatorname{div}\vec{A}\end{aligned}$$

1 b) $\vec{A} = \operatorname{grad}\Phi$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi) = (\operatorname{grad}\Phi)^2 + \Phi\cdot\Delta\Phi$ $\quad(\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad})$

c) $\Phi = 0$ auf S

$\Delta\Phi = 0$ in V

1
$$0 \underset{\substack{\uparrow\\ \Phi=0 \text{ auf } S}}{=} \oint\!\!\oint_S \Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi \, d\vec{f} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Gauß'scher Satz}}}{=} \iiint_V \operatorname{div}(\Phi\operatorname{grad}\Phi)\, dV$$

$$\overset{(b)}{=} \iiint_V (\operatorname{grad}\Phi)^2\, dV + \underbrace{\iiint_V \Phi\Delta\Phi\, dV}_{=0 \quad \text{da } \Delta\Phi = 0 \text{ auf } V}$$

$$= \iiint_V (\operatorname{grad}\Phi)^2\, dV$$

$\Rightarrow (\operatorname{grad}\Phi)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{grad}\Phi = \vec{0} \Rightarrow \Phi = \text{const.}$ auf V

1 da $\Phi = 0$ auf S $\Rightarrow$ $\underline{\Phi = 0 \text{ in } V}$