Damit erhalten wir:

$$V = 2\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=0}^{1-r^2} r\,dr\,d\varphi\,dz = 4\pi\int_0^1 (1-r^2)r\,dr = 4\pi\int_0^1 (r-r^3)dr =$$

$$= 4\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \pi.$$

9. Berechnen Sie den Inhalt des von den Flächen

$$z = x^2 + 2y^2 \quad \text{und} \quad z = 1 - x^2 - y^2$$

eingeschlossenen Volumenbereichs B.

Lösung:
Bei der ersten Fläche handelt es sich um ein nach oben geöffnetes elliptisches Paraboloid mit Scheitel im Ursprung und bei der zweiten um ein nach unten geöffnetes Rotationsparaboloid mit Scheitel in $P(0,0,1)$. Durch Gleichsetzen der z-Werte erhalten wir die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene. $\bar{B} : 2x^2+3y^2 \le 1$. Dies ist die Gleichung einer Ellipse. Es gilt:

$$B = \Big\{(x,y,z)\,\Big|\,x^2+2y^2 \le z \le 1-x^2-y^2,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2} \le y \le \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}\ ,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}.$$ Damit erhalten wir:

$$V = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}\int_{x^2+2y^2}^{1-x^2-y^2} dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} (1-2x^2-3y^2)dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} (1-2x^2-3y^2)dx\,dy = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (y-2x^2y-y^3)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2x^2}} dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\sqrt{1-2x^2}-2x^2\sqrt{1-2x^2}-\frac{1}{3}(1-2x^2)^{3/2}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\sqrt{1-2x^2}(1-2x^2)-\frac{1}{3}(1-2x^2)^{3/2}\right]dx = \frac{8}{3\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)^{3/2}dx\ .$$

Die Substitution $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t$ liefert dann:

$$V = \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt = \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\Big(\cos(2t)+1\Big)\right]^2 dt =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{6}}\Bigg(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^2(2t)\,dt}_{\frac{\pi}{4}} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos(2t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}dt}_{\frac{\pi}{2}}\Bigg) = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\ .$$

10. Berechnen Sie den Inhalt des von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2), \quad a > 0$$

eingeschlossenen Volumenbereichs.

Lösung:
Bei der gegebenen Fläche handelt es sich um eine bezüglich der xy-Ebene symmetrische Rotationsfläche mit der z-Achse als Rotationsachse. Ein „Profilschnitt" in Zylinderkoordinaten liefert: $(r^2+z^2)^2 = a^2r^2$ bzw. $r^2 \pm ar + z^2 = 0$ oder weiters: $z^2 + \left(r \pm \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Das sind Kreise um die Punkte $P_{1/2}(\pm\frac{a}{2},0)$. Somit liegt eine Torusfläche (mit „Kehlkreisradius" 0) vor. Für den Volumensinhalt erhalten wir dann:

$$V = 2\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{\sqrt{ar-r^2}} r\,dr\,d\varphi\,dz = 4\pi\int_0^a r\sqrt{ar-r^2}dr =$$

$$= 4\pi\int_0^a r\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(r-\frac{a}{2}\right)^2}\,dr.$$

Mit der Substitution: $r = \frac{a}{2}(1-\cos t)$ erhalten wir:

$$V = 4\pi\frac{a^3}{8}\int_0^\pi (1-\cos t)\sin^2 t\,dt = \frac{a^3\pi}{2}\Big(\underbrace{\int_0^\pi \sin^2 t\,dt}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\,dt}_{0}\Big) = \frac{a^3\pi^2}{4}\,.$$

Bemerkung:
Im vorliegenden Beispiel ist eine Transformation auf Kugelkoordinaten möglich und sinnvoll: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\vartheta$
Die Gleichung der Fläche wird dann: $r^4 = a^2r^2\sin^2\vartheta$ bzw. $r = a\sin\vartheta$. Der Volumenbereich B wird somit beschrieben durch:

$$B = \left\{(r,\vartheta,\varphi)\,\middle|\,0\le r\le a\sin\vartheta, 0\le\vartheta\le\pi, 0\le\varphi\le 2\pi\right\}.$$

Damit erhalten wir für den Volumeninhalt:

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a\sin\vartheta} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\pi}\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{a\sin\vartheta}\sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\underbrace{\int_0^\pi \sin^4\vartheta\,d\vartheta}_{\frac{3\pi}{8}} = \frac{a^3\pi^2}{4}\,.$$