Aufgabe 1 Kronecker- und Levi-Civitá-Symbol

a) $\boxed{\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}}$

b) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kn}\delta_{in} = \delta_{ik}\delta_{ki} = \boxed{\delta_{ii} = 3}$

c) $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = \varepsilon_{ijj} = 0$

d) $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj} = 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}}$ + 1

e) $\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 2\cdot 3 = 6}$ (in Aufgabe d) $k=n$) 5 + 1ZP

Aufgabe 2 Die Jacobi-Identität (Entwicklungssatz)

$$a\times(b\times c) \rightarrow \varepsilon_{ijk}\, a_j (b\times c)_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\, a_j b_l c_m$$

$$= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}\, a_j b_l c_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, a_j b_l c_m$$

1,5 $$= (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i \longrightarrow (ac)b - (ab)c$$

zyklische Vertauschung:

0,5 $$c\times(a\times b) \rightarrow (c_j b_j) a_i - (c_j a_j) b_i \longrightarrow (bc)a - (ac)b$$

0,5 $$b\times(c\times a) \rightarrow (b_j a_j) c_i - (b_j c_j) a_i \longrightarrow (ab)c - (bc)a$$

+

$\boxed{a\times(b\times c) + c\times(a\times b) + b\times(c\times a) = 0}$ Jacobi-Identität 0,5

$\frac{3}{5,5}$

Aufgabe 3 Spatprodukt

a) $\boxed{a(b\times c)} = a_i (b\times c)_i = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k = \varepsilon_{kij}\, c_k a_i b_j = \boxed{c(a\times b)}$ 1

$$= \varepsilon_{jki}\, b_j c_k a_i = \boxed{b(c\times a)}$$ 0,5

(zyklische Vertauschung)

• speziell $c = a$: $a\times(b\times a) = \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j a_k = \frac{1}{2} b_j (\varepsilon_{ijk}\, a_i a_k + \varepsilon_{kji}\, a_k a_i)$

$$a\times(b\times a) = \frac{1}{2} b_j a_i a_k (\varepsilon_{ijk} - \varepsilon_{ijk}) = 0$$ 0,5

2/2 b) $(a \times b) \times (c \times d) \longrightarrow \varepsilon_{ijk} (a \times b)_j (c \times d)_k$

• 1.) $\varepsilon_{ijk} (a \times b)_j \varepsilon_{klm} c_l d_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} (a \times b)_j c_l d_m$

$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) (a \times b)_j c_l d_m$

$= c_i (a \times b)_j d_j - (a \times b)_j c_j d_i = [d(a \times b)] c - [\underbrace{c(a \times b)}_{a(b \times c) \text{ (siehe a))}}] d$

2

(vgl. auch Entwicklungssatz, Aufg. 2)

aber auch: • 2.) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} a_l b_m (c \times d)_k = -\varepsilon_{jik} \varepsilon_{jlm} (c \times d)_k a_l b_m$

$= -(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}) (c \times d)_k a_l b_m$

$= -a_i (c \times d)_k b_k + b_i (c \times d)_k a_k = -[\underbrace{b(c \times d)}_{d(b \times c)}] a + [\underbrace{a(c \times d)}_{d(a \times c)}] b$

2

Subtraktion: $\boxed{0 = [d(a \times b)] c - [a(b \times c)] d + [b(c \times d)] a - [c(d \times a)] b}$

Spatprodukte

• Beispiel: $a = \vec{i},\ b = \vec{j},\ c = k$

z.B. $a \times b \rightarrow \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{i12}$, da $a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = 0$
$b_2 = 1,\ b_1 = b_3 = 0$

$= \varepsilon_{312} = 1$

$(a \times b)_1 = (a \times b)_2 = 0,\ (a \times b)_3 = 1 \longrightarrow \vec{i} \times \vec{j} = k$

usw. ($\rightarrow$ Multiplikationstabelle)

$(d \cdot k) k - (\vec{i} \cdot \vec{i}) d + (d \cdot \vec{i}) \vec{i} - [d \cdot (-\vec{j})] \vec{j} = 0$

$d_3 k - d + d_1 \vec{i} + d_2 \vec{j} = 0$

1 Das Ziel war, sich im Kreis zu drehen!

$\boxed{d = d_1 \vec{i} + d_2 \vec{j} + d_3 k}$

Aufgabe 4 Die Lagrange-Identität

$(a \times b)(c \times d) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m$

$= a_j c_j \cdot b_k d_k - a_j d_j \cdot b_k c_k$

$\boxed{(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)}$

2

0.5

Beispiel