Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 3 - Zirkulation und Rotation

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 30.04.2018

Aufgabe 1 *Skalarprodukte im Integranden*

Berechnen Sie das folgende Integral

$$I = \iint (3\mathbf{e}_r + r^2\mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

(a) für die Mantelfläche

(b) für Boden- und Deckfläche

des Zylinders $0 \leq x^2 + z^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z < L$. Dabei sind $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten. Überlegen Sie sich $\mathrm{d}\mathbf{f}$, indem Sie dazu eine Skizze anfertigen. (Der Flächennormalenvektor soll immer aus der Fläche herauszeigen.)

LÖSUNG:

(a) Mantelfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{e}_r R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$

$$I = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} (3\mathbf{e}_r + r^2\mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_r R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

Das ergibt

$$I = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} 3R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = 3R \cdot 2\pi L = 6\pi RL$$

(b) Bodenfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = -\mathbf{e}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi$

$$I = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi = 2\pi r^2 |_0^R = 2\pi R^2$$

Deckelfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = +\mathbf{e}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \Rightarrow I = -2\pi R^2$.

Aufgabe 2 *Rotation berechnen*

Berechnen Sie die Rotation der gegebenen Vektorfelder im Punkt $(3, 4, 0)$!

(i) $\mathbf{u}(x, y, z) = 3\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i}$

(iii) $\mathbf{w}(x, y, z) = y\mathbf{j}$

(iv) $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+2y+3z)\mathbf{i} + 4xyz\mathbf{j} + x\sin(\pi y + z)\mathbf{k}$

(v) $\mathbf{g}(x,y,z) = \ln(x+2z)\mathbf{i} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$

(vi) $\mathbf{h}(x,y,z) = \left[\frac{x+z}{y}\mathbf{i} + \cos^2 z\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}\right]$

LÖSUNG:

(i) rot $u = 0$, da Vektorfeld konstant (homogen)
(ii) rot $v = 0$, da auf x-Richtung nur y- und z-Ableitungen wirken.
(iii) rot $w = -\mathbf{k}$
(iv) rot $f = (x\pi\cos(\pi y + z) - 4yx)\mathbf{i} + (3 - \sin(\pi y + z)\mathbf{j} + (4yz - 2)\mathbf{k} \rightarrow (3\pi - 48)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

Aufgabe 3 *Verifikation Satz von Stokes II*

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für das folgende Beispiel, indem Sie Kurvenintegral und Oberflächenintegral berechnen:

$$\int_C \mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_F \mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi} = 3x^2y\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - x^2zy\mathbf{k}$$

Die Kurve C sei der Einheitskreis um den Ursprung in der $x-y$-Ebene, die Fläche F sei

(a) die obere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

(b) die untere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

Stimmen die Resultate aus (a) und (b) überein?

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden. Die auftretende Integration kann durch ein geeignetes Additionstheorem wesentlich vereinfacht werden.

LÖSUNG:

(a) $C : \mathbf{r} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$ mit $0 < \phi \leq 2\pi$, damit $\mathrm{d}\mathbf{r} = (-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})\mathrm{d}\phi$ Verwende Additionstheorem bei der folgenden Integration

$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\int_0^{2\pi} (-3\cos^2\sin^2\phi + 0)\mathrm{d}\phi = -3\left[\frac{1}{32}(4\phi - \sin(4\phi))\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\pi}}$$

Berechnen Rotation:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi} = (-x^2z - xy)\mathbf{i} + (0 + 2xzy)\mathbf{j} + (yz - 3x^2)\mathbf{k}$$

Obere Halbkugel:
Für die Oberfläche benutzen wir nur die Kreisfläche mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Es ist damit $z = 0$ Integranden zu setzen, da das Integrationsgebiet in der $x-y$-Ebene liegt. Also:

$$\iint \mathrm{rot}\,\mathbf{\Phi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = \iint_{Kreis} (-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Verwende Polarkoordinaten $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$:

$$\begin{aligned}\iint \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{df} =& -3 \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \cos^2 \phi r \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\ =& 3/4 r^4|_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \Delta\phi = -3/4 \left[1/2(\phi + \sin\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\pi}}.\end{aligned}$$

(b) untere Halbkugel: Selbe Überlegungen wie oben, aber mit $\mathbf{df} = -\mathbf{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ erhält man für das Integral $I = 3/4\Pi$. Um den Satz von Stokes zu verifizieren ist hier also auch das Linienintegral nochmal in umgekehrter Richtung (gedanklich) zu berechnen (Rechte-Hand-Regel).

Aufgabe 4 *Oberflächenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{\Phi} = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

sowie als Fläche F das Dreieck mit Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,2)$. Berechnen Sie

$$\iint_F \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{df}.$$

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden.