Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 6

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 29.11.17

Aufgabe 1

Die charakteristische Gleichung

Konstruieren Sie für jede der beiden folgenden Differentialgleichungen deren allgemeine Lösung und bestimmen Sie die spezielle Lösung, die den nebenstehenden Anfangsbedingungen genügt. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

(i) $3y'' - 4y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$

(ii) $y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 4$

Aufgabe 2

Die Wronski-Determinante

(a) Drücken Sie die Ableitung W' der Wronski-Determinante

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

mithilfe der Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = 0$$

durch die Wronski-Determinante selbst aus.

(b) Lösen Sie die so entstehende einfache Differentialgleichung für W. Zeigen Sie anhand dieser Lösung, dass die Wronski-Determinante entweder identisch (d.h. für alle x) oder gar nicht verschwindet.

(c) Betrachten Sie nun eine lineae Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Geben Sie die zugehörige Wronski-Determinante an.

(d) Bestimmen Sie mit diesem Verfahren die Wronski-Determinante der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x^2}y = 0$$

(e) **Zusatz:** Überzeugen Sie sich, dass $y_1(x) = x^m$ eine Lösung der Gleichung ist. Konstruieren Sie eine zweite Lösung aus dem Ansatz $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$ aufstellen und diese durch zweimalige Integration lösen. Überprüfen Sie durch Einsetzen, dass auch y_2 eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

bitte wenden

Aufgabe 3 *Die homogene Euler-Gleichung*

Die Eulersche Differentialgleichung ist durch die folgende Form gegeben. Dabei stellen die Koeffizienten a,b und c reelle Konstanten dar.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

(a) Überführen Sie diese Differentialgleichung mithilfe der Substitution $x = e^{t(x)}$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(b) Ein wichtiges Beispiel für die Potentialtheorie stellt die folgende Differentialgleichung dar. Dabei beschreibt n eine nichtnegative reelle Konstante, r eine nichtnegative reelle Variable und R eine Funktion, welche von r abhängt.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$$

(1) Behandeln Sie die genannte Differentialgleichung nach der zuvor beschriebenen Methode.

(2) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung R der entstehenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(3) Geben Sie diejenige spezielle Lösung an, welche die folgende Bedingung erfüllt.

$$R \xrightarrow{r \longrightarrow \infty} 0$$

(c) **Zusatz:** Lösen Sie mit derselben Methode die folgende Differentialgleichung.

$$x^2y'' - xy' + 10y = 0$$

Aufgabe 4 *Die Wronski-Determinante*

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung, wobei p und q Funktionen in Abhängigkeit von x darstellen. Weiterhin seien y_1 und y_2 zwei Lösungen dieser Gleichung.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante W der folgenden separablen Differentialgleichung genügt und lösen Sie diese Gleichung durch Trennung der Variablen.

$$W' = -p(x) \cdot W$$

Damit ist es möglich die Wronski-Determinante direkt aus der zugehörigen Differentialgleichung ohne Kenntnis der Lösung dieser zu bestimmen.

(b) Es sei die Lösung y_1 bereits bekannt. Interpretieren Sie die folgende Gleichung als inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für y_2 und lösen Sie diese durch Variation der Konstanten.

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = W(x)$$

So können Sie die zweite Fundamentallösung aus der Kenntnis der ersten Fundamentallösung und der Wronski-Determinante bestimmen.

(c) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den reellen konstanten Koeffizienten a,b und c.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(1) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante dieser Differentialgleichung.

(2) Nehmen Sie an, dass die folgende Lösung bekannt ist, und bestimmen Sie durch Verwendung des zuvor beschriebenen Verfahrens die zweite Fundamentallösung.

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad \lambda_1 := -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

(d) Gegeben sei die folgende Differentialgleichung mit der reellen Konstanten m.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x}y = 0$$

(1) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante dieser Differentialgleichung.

(2) Überzeugen Sie sich, dass die folgende Funktion eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und berechnen Sie nach dem zuvor beschriebenen Verfahren die zweite Fundamentallösung.

$$y_1(x) = x^m$$

Machen Sie die Probe für diese zweite Lösung und geben Sie auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.