Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 5

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 22.11.17

Aufgabe 1

Der integrierende Faktor

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit.

(i) $(x+y)\,x^2y' + xy^2 + 3x^2y = 0$

(ii) $yx^3 - 2x^4 = \left(3y^2x^3 - x^4\right)y'$

(iii) $(x\cos y - xy\sin y)\,y' + 2y\cos y + x = 0$

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der nicht-exakten Differentialgleichungen in impliziter Form, indem Sie die folgende Anleitung verwenden.

- Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor, der nur von der ersten freien Variable abhängt.
- Notieren Sie die neue, mit dem integrierenden Faktor multiplizierte, Differentialgleichung.
- Zeigen Sie die Exaktheit der neuen Differentialgleichung.
- Lösen Sie die neue Differentialgleichung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.
- Führe Sie die Probe durch, indem Sie die erhaltene Lösung implizit differenzieren und auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückführen.

Aufgabe 2

Spezielle integrierende Faktoren

Es sei die folgende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für zwei stetig differenzierbare Funktionen $A, B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

Weiterhin seien der Term $M(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xA(x,y) \neq yB(x,y)$ und der Term $N(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $A(x,y) \neq B(x,y)$ gegeben.

$$M(x,y) := \frac{\partial_1 B(x,y) - \partial_2 A(x,y)}{xA(x,y) - yB(x,y)}, \qquad N(x,y) := \frac{\partial_1 B(x,y) - \partial_2 A(x,y)}{A(x,y) - B(x,y)}$$

(a) Man nehme nun an, dass der Term $M(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x \cdot y$ beschrieben werden kann, das heißt es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x \cdot y) = M(x,y)$ gilt. Zeigen, dass es in diesem Falle auch einen integrierenden Faktor $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass sich $\lambda(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x \cdot y$ darstellen lässt. Es muss also eine Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben, sodass $\gamma(x \cdot y) = \lambda(x,y)$ gilt. Geben Sie zudem den Zusammenhang zwischen γ und f an.

bitte wenden

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung der Bedingung aus (a) genügt und bestimmen Sie den entsprechenden integrierenden Faktor. Berechnen Sie dann eine implizite Lösung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

$$y + \left(x - 2x^2y^3\right) y' = 0$$

(c) **Zusatz:** Man nehme nun an, dass der Term $N(x, y)$ nur in Abhängigkeit von $x + y$ beschrieben werden kann, das heißt es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x + y) = N(x, y)$ gilt. Zeigen, dass es in diesem Falle auch einen integrierenden Faktor $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass sich $\lambda(x, y)$ nur in Abhängigkeit von $x + y$ darstellen lässt. Es muss also eine Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben, sodass $\gamma(x + y) = \lambda(x, y)$ gilt. Geben Sie zudem den Zusammenhang zwischen γ und f an.

(d) **Zusatz:** Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung der Bedingung aus (c) genügt und bestimmen Sie den entsprechenden integrierenden Faktor. Berechnen Sie dann eine implizite Lösung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

$$0 = 1 + \frac{e^{x-y}}{\cos(x+y)} + \left[1 + \frac{1 - e^{x-y}}{\cos(x+y)}\right] y'$$

Aufgabe 3 *Ideales Gas*

Ein ideales Gas befinde sich in einem Kolben, der zusammengepresst wird. Dabei gelten die folgenden Zustandsgleichungen.

$$pV = Nk_{\mathrm{B}}T, \qquad E = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T$$

Darin steht p für den Druck, V für das Volumen, N für die Teilchenanzahl, T für die Temperatur, E für die innere Energie und k_{B} für die Boltzmann-Konstante. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ändert sich innere Energie durch das Verrichten von Arbeit $p\mathrm{d}V$ und die Abgabe von Wärme δQ.

$$\mathrm{d}E = \delta Q - p\mathrm{d}V$$

(a) Schon die Schreibweise δQ (anstelle von $\mathrm{d}Q$) deutet an, dass die Funktion Q kein totales Differential besitzt. Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(b) Suchen Sie nun einen integrierenden Faktor λ, der nur von T abhängt, sodass $\mathrm{d}S = \lambda\delta Q$ ein totales Differential beschreibt.

(c) Führen Sie eine Probe durch, indem Sie nun für $\mathrm{d}S$ die Integrabilitätsbedingung nachprüfen.