
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 8

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 13.12.17

Aufgabe 1

Das Phasenportrait

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v aufgespannte Ebene heißt Phasenebene. Die Kurven $v = v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und zusammengekommen Phasenportrait einer Bewegung.

- (a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

- (b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?
- (c) Berechnen Sie die von ihnen umschlossene Fläche in der (\dot{x}, x) -Phasenebene.

Aufgabe 2

Linearisierte Schwingungen

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x, \quad k = \text{const}$$

in der Nähe des Minimums.

- (a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ befindet.
- (b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\nabla U.$$

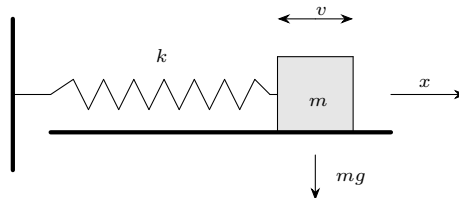
- (c) Stellen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung auf. Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die Gleichgewichtsposition. Benutzen Sie dafür $F = m\ddot{x}$.
- (d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

bitte wenden

Aufgabe 3

Oszillator auf rauher Unterlage

Ein Oszillator (Masse m , Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_R = \mu mg$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, und mg ist das Gewicht der Masse m .



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

- (a) Lösen Sie für die ganze erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \mp \mu mg,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflusst die Reibung die Schwingungsfrequenz?

Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mithilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück.

- (b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultates $x(t)$ und $v(t)$ für die n -te Halbperiode für alle $n \in \mathbb{N}$ an.
- (c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, dass die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung.