
Mathematische Methoden der Physik I

Nachklausur

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Bearbeitungszeit: 120 min
Hilfsmittel: keine

Bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt verwenden!

Aufgabe 1

Variation der Konstanten

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $I(t)$ der Differentialgleichung eines R - L -Schwingkreises

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t),$$

wobei R, L, U_0, ω Konstanten sind. Verwenden Sie dazu das Verfahren der Variation der Konstanten.

Hinweis: $\int e^{ax} \sin(bx) dx = e^{ax} \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}$

5 Punkte

Aufgabe 2

Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 64xe^x$$

indem Sie für die Lösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

5 Punkte

Aufgabe 3

Konservatives Vektorfeld

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F} = \tan y \mathbf{i} + \frac{x}{\cos^2 y} \mathbf{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist.

(b) Berechnen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$ mit Hilfe eines Kurvenintegrals, dessen Integrationsweg parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.

5 Punkte

Aufgabe 4

Wegintegrale berechnen

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$W = \int_C \mathbf{V} d\mathbf{r}$$

wobei die Kurve C die Schnittkurve der Flächen $z = 1 - x^2$ und $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Hinweis: Partielle Integration, trigonometrischer Pythagoras

5 Punkte

Aufgabe 5

Exakte Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x \cos^2 y dx + [2y - x^2 \sin(2y)] dy = 0$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung exakt ist.
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Auffinden einer Potentialfunktion $U(x, y) = \text{const.}$
- (c) Machen Sie eine Probe durch implizites (!) Differenzieren.

Hinweis: $2 \cos x \sin x = \sin(2x)$

5 Punkte

Aufgabe 6

Weitere Fragen

- (a) Die Differentialgleichung

$$y'' - 2yy' = 0$$

hat die spezielle Lösung $y_1(x) = \tan x$, jedoch ist $y_2 = cy_1$ ($c \neq 0$) keine (spezielle) Lösung. Geben Sie eine kurze (!) Begründung dafür an.

- (b) Gegeben sei die Eulersche Differentialgleichung für die Funktion $y(x)$

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Transformation $x = e^t$ diese Differentialgleichung in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt. (Die Lösung der Differentialgleichung ist nicht verlangt.)

- (c) Ein Teilchen der Masse m führt eine eindimensionale Bewegung unter dem Einfluss der Kraft

$$F(x) = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}, \quad a, b > 0$$

aus. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt und seine Stabilität, und berechnen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage.

- (d) Zeigen Sie durch Berechnung der Wronski-Determinante, dass die beiden Funktionen

$$y_1(x) = e^{ax}, \quad y_2(x) = xe^{ax} \quad (a \neq 0)$$

ein Fundamentalsystem bilden und bestimmen Sie die Differentialgleichung deren allgemeine Lösung durch Linearkombination dieses Funktionenpaares gegeben ist.

- (e) Bestimmen Sie alle Skalarfunktionen $v(x, y, z)$, für die das folgende Kurvenintegral wegunabhängig ist!

$$W = \int_C \left(xy dx + \frac{x^2}{2} dy + v(x, y, z) dz \right)$$

11 Punkte

Zusatzaufgabe 7

Fläche einer Ellipse

Berechnen Sie die von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umschlossene Fläche durch Verwendung eines Doppelintegrals und substituieren Sie $x' = x/a$ und $y' = y/b$.

3 Punkte