Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 4 - Divergenz und Fluss

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 07.05.2018

Aufgabe 1 *Gradient und Rotation*

Gegeben seien das skalare Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x,y,z) = xy\mathbf{i} - y^2 z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$$

und das skalare Feld

$$U(x,y,z) = 2xyz^2.$$

Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten

(i) $\operatorname{grad} U$

(ii) $\operatorname{rot} \mathbf{A}$

(iii) $\operatorname{rot}(U\mathbf{A})$

(iv) $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A}$

(v) $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A})$

(vi) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U.$

LÖSUNG:

Aufgabe 1 Gradient und Rotation

$$\mathfrak{a} = xy\,\vec{i} - y^2 z\,\vec{j} + x z^2\,k\,, \qquad U = 2xyz^2$$

(i) $\underline{\operatorname{grad} U} = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}k = 2yz^2\,\vec{i} + 2xz^2\,\vec{j} + 4xyz\,k$

$$= \underline{2z\,(yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + 2xy\,k)}$$

(ii) $\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -y^2 z & xz^2 \end{vmatrix}$

$$= \vec{i}\,(0 + y^2) - \vec{j}\,(z^2 - 0) + k\,(0 - x)$$

$$\underline{\operatorname{rot}\mathfrak{a} = y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} - x\,k}$$

(iii) $\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y^2z^2 & -2xy^3z^3 & 2x^2yz^4 \end{vmatrix}$

$$= \vec{i}\,(2x^2z^4 + 6xy^3z^2) - \vec{j}\,(4xyz^4 - 4x^2y^2z) \qquad (*)$$
$$+ k\,(-2y^3z^3 - 4x^2yz^2)$$

$$\underline{\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = 2xz^2(xz^2 + 3y^3)\,\vec{i} + 4xyz(xy - z^3)\,\vec{j} - 2yz^2(y^2z + 2x^2)\,k}$$

$(2x^2z^4 + 6xz^2y^3)\,\vec{i} + (4x^2y^2z - 4xyz^4)\,\vec{j} - (2y^3z^3 + 4yz^2x^2)\,k$

- zum Vergleich:

$$U \operatorname{rot}\mathfrak{a} + (\operatorname{grad} U)\times\mathfrak{a} = 2xy^3z^2\,\vec{i} - 2xyz^4\,\vec{j} - 2x^2yz^2\,k$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \\ xy & -y^2z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[2xy^3z^2 + (2x^2z^4 + 4xy^3z^2)\right] + \vec{j}\left[-2xyz^4 - (2xyz^4 - 4x^2y^2z)\right]$$

$$+ k\left[-2x^2yz^2 + (-2y^3z^3 - 2x^2yz^2)\right], \quad \text{Übereinstimmung mit } (*)$$

(iv)

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a}}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -z^2 & -x \end{vmatrix} = \vec{i}(0+2z) - \vec{j}(-1-0) + k(0-2y)$$

1

$$= \underline{\underline{2z\,\vec{i} + \vec{j} - 2y\,k}}$$

(v)

$$\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = xy^3 + y^2z^3 - x^2z^2$$

$$\underline{\underline{\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a})}} = (y^3 - 2xz^2)\,\vec{i} + (3xy^2 + 2yz^3)\,\vec{j} + (3y^2z^2 - 2x^2z)\,k$$

2

$$= \underline{\underline{(y^3 - 2xz^2)\,\vec{i} + y(3xy + 2z^3)\,\vec{j} + z(3y^2z - 2x^2)\,k}} \quad (**)$$

: zum Vergleich:

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathfrak{b}\operatorname{grad})\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\times\operatorname{rot}\mathfrak{a}$$

für $\mathfrak{b} = \operatorname{rot}\mathfrak{a}$

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{a}\operatorname{rot}\mathfrak{a}) = (\operatorname{rot}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\operatorname{grad})\operatorname{rot}\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} + \underbrace{\operatorname{rot}\mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\mathfrak{a}}_{=0}$$

• $$(\operatorname{rot}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\mathfrak{a} = \left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - z^2\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(xy\,\vec{i} - y^2z\,\vec{j} + xz^2\,k\right)$$

$$= \vec{i}\,(y^3 - z^2x - 0)$$
$$+\vec{j}\,(0 + 2yz^3 + xy^2)$$
$$+k\,(y^2z^2 + 0 - 2x^2z)$$

• $$(\mathfrak{a}\cdot\operatorname{grad})\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \left(xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2z\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} - x\,k\right)$$

$$= \vec{i}\,(0 - 2y^3z + 0)$$
$$+\vec{j}\,(0 + 0 - 2xz^3)$$
$$+k\,(-xy + 0 + 0)$$

• $$\mathfrak{a}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ xy & -y^2z & xz^2 \\ 2z & 1 & -2y \end{vmatrix} = \vec{i}\,(+2y^3z - xz^2)$$
$$-\vec{j}\,(-2xy^2 - 2xz^3)$$
$$+k\,(xy + 2y^2z^2)$$

zusammen: $\vec{i}\,(y^3 - \underline{xz^2} - \cancel{2y^3z} + \cancel{2y^3z} - \underline{xz^2})$

$+\,\vec{j}\,(2yz^3 + \underline{xy^2} - \cancel{2xz^3} + \underline{2xy^2} + \cancel{2xz^3})$

$+\,k\,(\underline{y^2z^2} - 2x^2z - \cancel{xy} + \cancel{xy} + \underline{2y^2z^2})$

$= \vec{i}\,(y^3 - 2xz^2) + \vec{j}\,(2yz^3 + 3xy^2) + k\,(3y^2z^2 - 2x^2z)$, Übereinstimmung mit (**)

(vi)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \end{vmatrix} = \vec{i}\,(4xz - 4xz) - \vec{j}\,(4yz - 4yz) + k\,(2z^2 - 2z^2)$$

$\underline{\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \vec{0}}$, wie allgemein zu erwarten $\frac{1}{8}$

$\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ Oberflächen-Integral

$\boxed{a)}$: (S:) $\vec r(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u\,k$, $0 \le v \le 2\pi$ (Winkelkoordinate), $0 \le u \le h$

$\left.\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{array}\right\}$ $x^2 + y^2 = u^2$ Kreise mit Radius u (variabel)

$z = u$

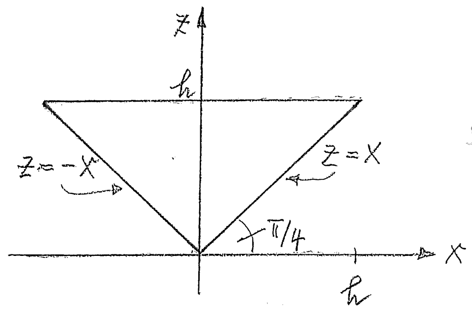
$\boxed{x^2 + y^2 = z^2}$ 1

$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

(oberes Vorzeichen für $z = u \ge 0$)

$z = \text{const}$: Kreise

$\left.\begin{array}{ll} x = 0: & z = |y| \\ y = 0: & z = |x| \end{array}\right\}$ Ursprungsgeraden mit Anstieg ± 1



(Schnitt $y=0$)

Skizze + 1/2 P

• Resultat: auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel(-mantel)

Öffnungswinkel 90°

Grundkreisradius $R = h$

Aufgabe 2 *Rotation und Divergenz*

Konstruieren Sie jeweils ein Vektorfeld, das die folgenden Bedingungen erfüllt, und machen Sie eine Probe. Dabei ist

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(a) $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ besitzt nur eine von x-abhängige Komponente in $\mathbf{k}$-Richtung. $\operatorname{div}\mathbf{v}$ verschwindet nicht.

(b) $\operatorname{div}\mathbf{w}$ hängt nur von $x^2 + y^2$ ab. $\operatorname{rot}\mathbf{w}$ hat keine verschwindende Komponente.

LÖSUNG:

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Konstruieren Sie jeweils ein Vektorfeld, das die folgenden Bedingungen erfüllt, und weisen Sie dies nach. / machen Sie eine Probe. ⊛

a) $\text{rot}\,\vec{V}$ besitzt nur eine von x-abhängige Komponente in $\vec{k}$-Richtung.

⊛ $\text{div}\,\vec{V}$ verschwindet nicht.

b) $\text{div}\,\vec{W}$ hängt nur von x^2+y^2 ab.

$\text{rot}\,\vec{W}$ ~~verschwindet nicht~~. hat keine verschwindende Komponente.

⊛ Dabei ist $\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.

Lösung:

a) $\text{rot}\,\vec{v} \overset{!}{=} f(x)\vec{k} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \overset{!}{\neq} 0$$

Beispiele für richtige Vektoren:

$$\vec{V} = g(x)\vec{i} + h(x)\vec{j} + m(z)\vec{k}$$

$$\vec{V} = g(y)\vec{i} + h(y)\vec{j} + m(z)\vec{k}$$

2 z.B. $\vec{V} = x\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j} \longrightarrow \text{rot}\,\vec{V} = x\vec{k}$ & $\text{div}\,\vec{V} = 1$

b) $\text{div}\,\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \overset{!}{=} f(x^2+y^2)$

$$\text{rot}\,\vec{W} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{k} \overset{!}{\neq} 0$$

bzw. $\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \neq 0 \wedge \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \neq 0 \wedge \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \neq 0$

z.B. $\vec{W} = (x^3+y)\vec{i} + y^3\vec{j} + xy\vec{k} \longrightarrow \text{div}\,\vec{W} = 3(x^2+y^2)$

2 $\text{rot}\,\vec{W} = x\vec{i} - y\vec{j} - \vec{k}$

Aufgabe 3 *Zweidimensionales Vektorfeld*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{V} = x^2 y\mathbf{i} - x^3 y^2 \mathbf{j}$$

und den geschlossenen Weg C entlang des Rechteckes $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,2)$ und $D(1,2)$.

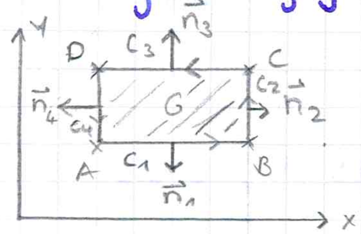
(a) Berechnen Sie die Arbeit, die entlang des Weges C in diesem Kraftfeld verrichtet wird, in dem Sie sowohl das Kurvenintegral, als auch das Flächenintegral berechnen [beide Seiten des GREENschen Satzes].

(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Kurve C, indem Sie beide Seiten des GAUSSschen Satzes in der Ebene berechnen.

LÖSUNG:

Lösung 8 Punkte

$$\vec{V} = x^2 y\,\vec{i} - x^3 y^2 \vec{j}$$



(vollst. Skizze) 2

a) $W = \oint_C \vec{V}\, d\vec{r}$

$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$C_1: \quad \vec{r}_1 = t\vec{i} + \vec{j}, \quad d\vec{r}_1 = \vec{i}\,dt, \quad 1 \le t \le 3$

$C_2: \quad \vec{r}_2 = 3\vec{i} + t\vec{j}, \quad d\vec{r}_2 = \vec{j}\,dt, \quad 1 \le t \le 2$

$C_3: \quad \vec{r}_3 = t\vec{i} + 2\vec{j}, \quad d\vec{r}_3 = \vec{i}\,dt, \quad 3 \ge t \ge 1$

1 $\quad C_4: \quad \vec{r}_4 = \vec{i} + t\vec{j}, \quad d\vec{r}_4 = \vec{j}\,dt, \quad 2 \ge t \ge 1$

$$W = \int_1^3 t^2\,dt + \int_1^2 -27\cdot t^2\,dt + \int_3^1 2\cdot t^2\,dt + \int_2^1 -t^2\,dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_1^3 - 9\left[t^3\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[t^3\right]_1^3 + \frac{1}{3}\left[t^3\right]_1^2$$

$$= \left(9 - \frac{1}{3}\right) - 9(8-1) - \frac{2}{3}(27-1) + \frac{1}{3}(8-1)$$

$$= \frac{26}{3} - 63 - 18 + \frac{2}{3} + \frac{7}{3}$$

$$= 9 - 1/3 - 81 + 3$$

1 $\quad = -69\,1/3$

4 $\quad W = \int_{y=1}^{2}\int_{x=1}^{3} \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{y=1}^{2}\int_{x=1}^{3} x^2(3y^2+1)\,dx\,dy$

$$= -\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^3 \cdot \left[y^3 + y\right]_1^2$$

1 $\quad = -\frac{1}{3}(27-1)\cdot\left[(8+2)-(1+1)\right] = -\frac{26}{3}\cdot 8 = -\frac{208}{3} = -69\,1/3$

$\Rightarrow$ Übereinstimmung

b) $F = \oint V \cdot \vec{n} \; ds \qquad , \; ds = |d\vec{r}|$

Weg ändert sich nicht, $|d\vec{r}_{1,2}| = dt$, $|d\vec{r}_{3,4}| = -dt$ da $dt < 0$

$\vec{n}_1 = -\vec{j}$, $\vec{n}_2 = \vec{i}$, $\vec{n}_3 = \vec{j}$, $\vec{n}_4 = -\vec{i}$ 1

$$F = \int_1^3 t^3 \cdot 1 \, dt + \int_1^2 9 \cdot t \, dt + \int_3^1 + t^3 \cdot 4 \, dt + \int_2^1 t \, dt$$

$$= \int_1^3 t^3 \, dt + 9 \int_1^2 t \, dt - 4 \int_1^3 t^3 \, dt - \int_1^2 t \, dt$$

$$= -3 \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_1^3 + 8 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{-3}{4} (81 - 1) + 4 (4 - 1)$$

$$= -3 \cdot 20 + 12$$

$$= -48$$ 1

$$F = \iint_G \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \, dx \, dy = \int_{y=1}^{2} \int_{x=1}^{3} 2xy - 2x^3 y \, dx \, dy$$

$$= \int_{y=1}^{2} 2y \, dy \cdot \int_{x=1}^{3} x - x^3 \, dx = \left[y^2 \right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_1^3$$

$$= (4-1) \cdot \left[\left(\frac{9}{2} - \frac{81}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$= 3 \cdot (4 - 20)$$

$$= -48$$ 1