Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 3 - Zirkulation und Rotation

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 30.04.2018

Aufgabe 1 *Skalarprodukte im Integranden*

Berechnen Sie das folgende Integral

$$I = \iint (3\mathbf{e}_r + r^2\mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

(a) für die Mantelfläche

(b) für Boden- und Deckfläche

des Zylinders $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z < L$. Dabei sind $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ und $\mathbf{e}_z$ die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten. Überlegen Sie sich $\mathrm{d}\mathbf{f}$, indem Sie dazu eine Skizze anfertigen.

LÖSUNG:

(a) Mantelfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathbf{e}_r R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$ (+ Skizze 1 Pkt)

$$I = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} (3\mathbf{e}_r + r^2\mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_r R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

Das ergibt

$$I = \int_{z=0}^{L} \int_{\phi=0}^{2\pi} 3R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = 3R \cdot 2\pi L = 6\pi RL \quad (1Pkt)$$

(b) Bodenfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = -\mathbf{e}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi$ (1 Pkt)

$$I = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi = 2\pi r^2 |_0^R = 2\pi R^2$$

(1 Pkt) Deckelfläche: $\mathrm{d}\mathbf{f} = +\mathbf{e}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \Rightarrow I = -2\pi R^2$. (1 Pkt)

gesamt: (5 Punkte)

Aufgabe 2 *Rotation berechnen*

Berechnen Sie die Rotation der gegebenen Vektorfelder im Punkt $(3, 4, 0)$!

(i) $\mathbf{u}(x, y, z) = 3\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$

(ii) $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i}$

(iii) $\mathbf{w}(x, y, z) = y\mathbf{i}$

(iv) $$\mathbf{f}(x,y,z) = (x+2y+3z)\mathbf{i} + 4xyz\mathbf{j} + x\sin(\pi y + z)\mathbf{k}$$

(v) $$\mathbf{g}(x,y,z) = \ln(x+2z)\mathbf{i} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$$

(vi) $$\mathbf{h}(x,y,z) = \left[\frac{x+z}{y}\mathbf{i} + \cos^2 z\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}\right]$$

LÖSUNG:

(i) $\operatorname{rot} u = 0$, da Vektorfeld konstant (homogen) - (1 Pkt)
(ii) $\operatorname{rot} v = 0$, da auf x-Richtung nur y- und z-Ableitungen wirken.(1 Pkt)
(iii) $\operatorname{rot} w = -\mathbf{k}$ - (1 Pkt)
(iv) $\operatorname{rot} f = (x\pi\cos(\pi y+z) - 4yx)\mathbf{i} + (3 - \sin(\pi y + z))\mathbf{j} + (4yz - 2)\mathbf{k} \rightarrow (3\pi - 48)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (1 Pkt)
(v) $\operatorname{rot} g = -x/y^2\mathbf{i} - \mathbf{j}(1/y - \frac{2}{x+2z}) + 0\mathbf{k}$, am Punkt also $(-\frac{3}{16}\mathbf{i} + \frac{5}{12}\mathbf{j})$ (1 Pkt)
(vi) $\operatorname{rot} f = (2\cos z\sin z)\mathbf{i} - \mathbf{j}(5x^4 - 1/y) + \frac{x+z}{y^2}\mathbf{k}$, am Punkt also $(1/4 - 5*81)\mathbf{j} + \frac{3}{16}\mathbf{k} = -\frac{1619}{4}\mathbf{j} + \frac{3}{16}\mathbf{k}$ (1 Pkt)

Aufgabe 3 *Verifikation Satz von Stokes II*

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für das folgende Beispiel, indem Sie Kurvenintegral und Oberflächenintegral berechnen:

$$\int_C \mathbf{\Phi}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_F \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Phi} = 3x^2y\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - x^2zy\mathbf{k}$$

Die Kurve C sei der Einheitskreis um den Ursprung in der $x-y$-Ebene, die Fläche F sei

(a) die obere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

(b) die untere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

Stimmen die Resultate aus (a) und (b) überein?

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden. Die auftretende Integration kann durch ein geeignetes Additionstheorem wesentlich vereinfacht werden.

LÖSUNG:

(a) $C : \mathbf{r} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$ mit $0 < \phi \le 2\pi$, damit $\mathrm{d}\mathbf{r} = (-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})\mathrm{d}\phi$ Verwende Additionstheorem bei der folgenden Integration

$$\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\int_0^{2\pi} (-3\cos^2\sin^2\phi + 0)\mathrm{d}\phi = -3\left[\frac{1}{32}(4\phi - \sin(4\phi))\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\pi}} \quad (1Pkt)$$

Berechnen Rotation:

$$\operatorname{rot}\mathbf{\Phi} = (-x^2z - xy)\mathbf{i} + (0 + 2xzy)\mathbf{j} + (yz - 3x^2)\mathbf{k} \quad (1Pkt)$$

Obere Halbkugel:
Für die Oberfläche benutzen wir nur die Kreisfläche mit dem vektoriellen Flächenelement $\mathbf{df} = \mathbf{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Es ist damit $z = 0$ Integranden zu setzen, da das Integrationsgebiet in der $x - y$-Ebene liegt. Also:

$$\iint \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{df} = \iint_{Kreis} (-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (1Pkt)$$

Verwende Polarkoordinaten $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$:

$$\begin{aligned}\iint \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{df} &= -\,3 \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \cos^2 \phi r \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\ &= 3/4r^4|_0^1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \Delta\phi = -3/4\,[1/2(\phi + \sin\phi\cos\phi)]_0^{2\pi} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\pi}} \quad (1Pkt).\end{aligned}$$

(b) untere Halbkugel: Selbe Überlegungen wie oben, aber mit $\mathbf{df} = -\mathbf{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ erhält man für das Integral $I = 3/4\pi$ (1/2 Pkt). Um den Satz von Stokes zu verifizieren ist hier also auch das Linienintegral nochmal in umgekehrter Richtung (gedanklich) zu berechnen (Rechte-Hand-Regel) (1/2 Pkt).

gesamt: (5 Punkte)

Aufgabe 4 *Oberflächenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{\Phi} = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

sowie als Fläche F das Dreieck mit Eckpunkten $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 2)$. Berechnen Sie

$$\iint_F \operatorname{rot} \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{df}.$$

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden.

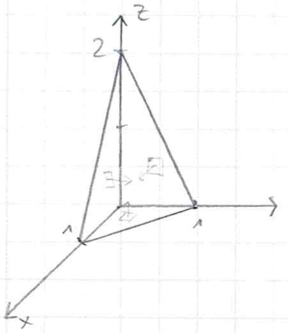
LÖSUNG:

Aufgabe 4 — 4 Punkte

$$\vec{\Phi} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{\Phi} = \left(\frac{\partial\Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= (z-x)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (z-x)\vec{k}$$



1/2 $\quad d\vec{f}_1 = \vec{e}_x\, dy\, dz \quad , x=0, \quad 0 \le z \le 2-2y, \quad 0 \le y \le 1$

1/2 $\quad d\vec{f}_2 = \vec{e}_y\, dx\, dz \quad , y=0, \quad 0 \le z \le 2-2x, \quad 0 \le x \le 1$

1/2 $\quad d\vec{f}_3 = \vec{e}_z\, dy\, dx \quad , z=0, \quad 0 \le y \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1$

$$\iint_F \operatorname{rot}\vec{\Phi}\, d\vec{f} = \iint_{F_1} \operatorname{rot}\vec{\Phi}\, d\vec{f}_1 + \iint_{F_2} \operatorname{rot}\vec{\Phi}\, d\vec{f}_2 + \iint_{F_3} \operatorname{rot}\vec{\Phi}\, d\vec{f}_3$$

$$= \int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{2-2y} z\, dy\, dz + \int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{2-2x} 0\, dx\, dz$$

(Aufstellen Integrale) 1

$$+ \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} (-x)\, dy\, dx$$

$$= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{2(1-y)} dy + \int_{x=0}^{1} -x\left[y\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \int_{y=0}^{1} 2(1-y)^2\, dy - \int_{x=0}^{1} x(1-x)\, dx$$

$$= -\frac{2}{3}\left[(1-y)^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

auf Rechnung verteilt) 1,5

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zum Vergleich:

$$\int_C \vec{\Phi}\, d\vec{r}$$

$C_1: \quad \vec{r}_1 = t\vec{i} + (1-t)\vec{j} \quad , d\vec{r}_1 = (\vec{i} - \vec{j})\, dt \qquad 1 \ge t \ge 0.$

$C_2: \quad \vec{r}_2 = t\vec{j} + 2(1-t)\vec{k} \quad , d\vec{r}_2 = (\vec{j} - 2\vec{k})\, dt \quad , 1 \ge t \ge 0$

$C_3: \quad \vec{r}_3 = t\vec{i} + 2(1-t)\vec{k} \quad , d\vec{r}_3 = (\vec{i} - 2\vec{k})\, dt \quad , 0 \le t \le 1$

$$\int_C \vec{\Phi}\, d\vec{r} = \int_1^0 t\cdot(1-t)\, dt + \int_1^0 t\cdot 2(1-t)\cdot(-2)\, dt + 0$$