Mathematische Methoder der Physik II
Übungsserie 3

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Sommersemester 2018

Aufgabe 1 *Skalarprodukte im Integranden*

Berechnen Sie das folgende Integral

$$I = \iint (3\vec{e}_r + r^2\vec{e}_\phi - 2\vec{e}_z) \cdot \mathrm{d}\vec{f}$$

(a) für die Mantelfläche

(b) für Boden- und Deckfläche

des Zylinders $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad 0 \leq z < L$. Dabei sind $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_z$ die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten. Überlegen Sie sich $\mathrm{d}\vec{f}$, indem Sie dazu eine Skizze anfertigen.

Aufgabe 2 *Rotation berechnen*

Berechnen Sie die Rotation der gegebenen Vektorfelder im Punkt $(3, 4, 0)$!

(i) $\vec{u}(x, y, z) = 3\vec{i} - \pi\vec{j} + 16\vec{k}$

(ii) $\vec{v}(x, y, z) = x\vec{i}$

(iii) $\vec{w}(x, y, z) = y\vec{i}$

(iv) $\vec{f}(x, y, z) = (x + 2y + 3z)\vec{i} + 4xyz\vec{j} + x\sin(\pi y + z)\vec{k}$

(v) $\vec{g}(x, y, z) = \ln(x + 2z)\vec{i} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$

(vi) $\vec{h}(x, y, z) = \left[\dfrac{x + z}{y}\vec{i} + \cos^2 z\vec{j} + x^5\vec{k}\right]$

Aufgabe 3 *Verifikation Satz von Stokes II*

Verifizieren Sie den Stokes'schen Satz für das folgende Beispiel, indem Sie Kurvenintegral und Oberflächenintegral berechnen:

$$\int_C \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_F \operatorname{rot} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \quad \text{mit} \quad \vec{\Phi} = 3x^2y\vec{i} + xyz\vec{j} - x^2zy\vec{k}$$

Die Kurve C sei der Einheitskreis um den Ursprung in der $x-y$-Ebene, die Fläche F sei

(a) die obere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

(b) die untere Halbkugel mit Radius $R = 1$ um $(0,0,0)$

Stimmen die Resultate aus (a) und (b) überein?

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden. Die auftretende Integration kann durch ein geeignetes Additionstheorem wesentlich vereinfacht werden.

Aufgabe 4 *Oberflächenintegral*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = xy\vec{i} + xz\vec{j} + yz\vec{k}$$

sowie als Fläche F das Dreieck mit Eckpunkten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,2)$. Berechnen Sie

$$\iint_F \operatorname{rot} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{f}.$$

Hinweis: Erinnerung: Flächen dürfen deformiert werden.