

Aufgabe 3

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2), \quad a > 0$$

Verwende Kugelkoordinaten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$$

Einsetzen

$$\Rightarrow r^4 = a^2 \cdot r^2 \sin^2 \vartheta \quad \Rightarrow r^2 = a^2 \sin^2 \vartheta$$

$$\Rightarrow r = a \sin \vartheta \quad (\text{da } \sin \vartheta \geq 0 \text{ f\"ur } 0 \leq \vartheta \leq \pi)$$

Berechne eingeschlossenes Volumen:

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a \sin \vartheta} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{a \sin \vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^4 \vartheta \, d\vartheta$$

Hinweis \rightarrow

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{3 \cdot 2\pi}{8 \cdot 32} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \pi^2 a^3}}$$