
Mathematische Methoden der Physik II

Übungsserie 4 - Divergenz und Fluss

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 07.05.2018

Aufgabe 1 *Gradient und Rotation*

Gegeben seien das skalare Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$$

und das skalare Feld

$$U(x, y, z) = 2xyz^2.$$

Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten

- | | | | |
|-------|---------------------------|------|--|
| (i) | $\text{grad } U$ | (iv) | $\text{rot rot } \mathbf{A}$ |
| (ii) | $\text{rot } \mathbf{A}$ | (v) | $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A})$ |
| (iii) | $\text{rot}(U\mathbf{A})$ | (vi) | $\text{rot grad } U.$ |

LÖSUNG:

Aufgabe 1 Gradient und Rotation

3/1

$$a = xy \vec{i} - y^2 z \vec{j} + xz^2 \vec{k}, \quad u = 2xy z^2$$

$$(i) \text{ grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = 2yz^2 \vec{i} + 2xz^2 \vec{j} + 4xyz \vec{k} \\ = 2z(yz \vec{i} + xz \vec{j} + 2xy \vec{k})$$

$$(ii) \text{ rot } a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -y^2 z & xz^2 \end{vmatrix} \\ = \vec{i}(0 + y^2) - \vec{j}(z^2 - 0) + \vec{k}(0 - x)$$

$$\text{rot } a = y^2 \vec{i} - z^2 \vec{j} - x \vec{k}$$

$$(iii) \text{ rot } (u a) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 y^2 z^2 & -2xy^3 z^3 & 2x^2 y z^4 \end{vmatrix} \\ = \vec{i}(2x^2 z^4 + 6xy^3 z^2) - \vec{j}(4xy z^4 - 4x^2 y^2 z) + \vec{k}(-2y^3 z^3 - 4x^2 y z^2) \quad (*)$$

$$\text{rot}(u a) = 2xz^2(xz^2 + 3y^3) \vec{i} + 4xyz(xy - z^3) \vec{j} - 2yz^2(y^2 z + 2x^2) \vec{k} \\ (2x^2 z^4 + 6xz^2 y^3) \vec{i} + (4x^2 y^2 z - 4xyz^4) \vec{j} - (2y^3 z^3 + 4yz^2 x^2) \vec{k}$$

• zum Vergleich:

$$u \text{ rot } a + (\text{grad } u) \times a = 2xy^3 z^2 \vec{i} - 2xyz^4 \vec{j} - 2x^2 y z^2 \vec{k}$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \\ xy & -y^2 z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} [2xy^3 z^2 + (2x^2 z^4 + 4xy^3 z^2)] + \vec{j} [-2xyz^4 - (2xy z^4 - 4x^2 y^2 z)] \\ + \vec{k} [-2x^2 y z^2 + (-2y^3 z^3 - 2x^2 y z^2)] \quad \text{Übereinstimmung mit } (*)$$

Aufgabe 2 *Rotation und Divergenz*

Aufgabe 3 *Zweidimensionales Vektorfeld*