
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 7

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 06.12.17

Aufgabe 1

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten für die nebenstehenden Anfangsbedingungen. Führen Sie eine Probe durch.

(i) $3y'' - 6y' - 24y = 72x^2 - 12x - 6, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 8$

(ii) $y'' - 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{55}{6}$

(iii) $y'' + y' + y = (2 + x) \cos x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$

(iv) $y'' + y' + y = 2 + x + \cos x, \quad y(0) = -7, \quad y'(0) = 8$

(v) $y^{(3)} - 12y' + 16y = 32x - 8, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 11, \quad y''(0) = -28$

Hinweis:

zu (iii): Verwenden Sie einen Ansatz der Form

$$y_p = (a_0 + a_1 x) \sin x + (b_0 + b_1 x) \cos x$$

zu (iv): Bestimmen Sie nur eine neue Partikulärlösung. Die homogene Lösung kann aus (iii) übernommen werden.

zu (v): Überlegen Sie sich, wie der Ansatz für Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf solche dritter Ordnung erweitert werden kann.

Aufgabe 2

Gekoppelte Differentialgleichungen

Betrachten Sie folgendes System von miteinander gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = x + y + t, \quad \dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} = 3x - y$$

Bestimmen Sie die Lösungen, indem Sie die beiden Gleichungen erster Ordnung in eine Gleichung zweiter Ordnung überführen. Finden Sie die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = -\frac{1}{4}$ und $y(0) = 1$ und führen Sie eine Probe durch.

Hinweis: Eliminieren Sie dazu y .

bitte wenden

Aufgabe 3

Die Variation der Konstanten

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 4y = \cos 2x .$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung soll nicht die Methode des Koeffizientenvergleichs benutzt werden, sondern nach einem allgemeineren Verfahren vorgegangen werden:

- (a) Bestimmen Sie zunächst die Fundamentallösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung.
- (b) Variieren Sie die beiden Konstanten in

$$y_h = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} ,$$

indem Sie diese durch Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ausdrücken. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung.

- (c) Setzen Sie die dadurch erhaltenen Funktionen in die inhomogene Differentialgleichung ein und vereinfachen Sie die daraus resultierende Gleichung, indem Sie benutzen, dass y_1 und y_2 die homogene Differentialgleichung lösen.
- (d) Vereinfachen Sie die Gleichung weiter, indem Sie fordern, dass

$$u'(x)e^{-4x} + v'(x)e^{-x} = 0 \tag{1}$$

gilt. Begründen Sie, warum diese Forderung zulässig ist.

- (e) Leiten Sie aus der Gleichung 1 eine weitere Bedingung ab, die Ihnen bei der Vereinfachung hilft.
- (f) Sie erhalten nun eine einfachere Form der ursprünglichen Differentialgleichung

$$-4u'(x)e^{-4x} - v'(x)e^{-x} = \cos 2x \tag{2}$$

Bestimmen Sie ausgehend von den Gleichungen (1) und (2) die Funktionen u und v .

- (g) Führen Sie eine Probe für die so erhaltene allgemeine Lösung durch.