Lösung: Gedämpfte erzwungene Schwingungen   5 Punkte [3+2] + 6 ZP auf c)

a) $f(t) = a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)$ für $0 \le t \le T_0$

Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)dt = \frac{a}{T_0}\left[t-\frac{t^2}{2T_0}\right]_0^{T_0} = \frac{a}{T_0}\left[T_0-\frac{T_0}{2}\right] = \frac{a}{2}$$ 1/2

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt$$

+ 1 ZP (wenn von Hand...)

NR: $\int t\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt = -\frac{2n\pi}{T_0}\, t\cdot\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right) + \frac{T_0}{2n\pi}\int\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt$

$u = t \to u' = 1$
$v' = \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)$
$\hookrightarrow v = -\frac{T_0}{2\pi n}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)$

$$= -\frac{2n\pi}{T_0}\, t\,\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\cdot\frac{T_0^2}{(2\pi n)^2}$$

$$= \frac{2a}{T_0}\cdot\frac{T_0}{2\pi n}\left[\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0} + \frac{2a}{T_0^2}\left[\frac{T_0}{2n\pi}\, t\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right) + \frac{T_0^2}{(2\pi n)^2}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0}$$

$$= \frac{a}{\pi n}\left[\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\right] + \frac{2a}{T_0}\left[\frac{T_0}{2n\pi}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} - 0 + \frac{T_0}{(2\pi n)^2}\left(\cos(2\pi n)-\cos(0)\right)\right]$$

$$= 0$$ 1

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt$$

NR: $\int_0^{T_0} t\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt = \left[-\frac{T_0 t}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0} + \int_0^{T_0}\frac{T_0}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)dt$

$u = t,\ u' = 1$
$v' = \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)$,
$v = -\frac{T_0}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)$

$$= -\frac{T_0^2}{2n\pi} + \left[\frac{T_0^2}{(2n\pi)^2}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0} = -\frac{T_0^2}{2n\pi} + (0-0)$$

+ 1 ZP (wenn von Hand

$$= \frac{2a}{T_0}\left(\left[-\frac{T_0}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T_0}\right)\right]_0^{T_0} - \frac{1}{T_0}\left(-\frac{T_0^2}{2n\pi}\right)\right) = \frac{2aT_0^2}{T_0^2\, n\pi} = \frac{a}{n\pi}$$ 1

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right)$$ 1/2

b) komplexe Fourier-Reihe

$$A_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\, e^{-2\pi i n t/T_0}dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)e^{-2\pi i n\, t/T_0}dt$$

(+1 ZP)

NR: $\int_0^{T_0} t\, e^{-2\pi i n t/T_0}dt = \left[\frac{t\,T_0}{2\pi i n}e^{-2\pi i n t/T_0}\right]_0^{T_0} - \left[\left(\frac{-T_0}{2\pi i n}\right)^2 e^{-2\pi i n t/T_0}\right]_0^{T_0}$

$u = t\quad u' = 1$
$v' = e^{-2\pi i n t/T_0}$
$v = \frac{-T_0}{2\pi i n}e^{-2\pi i n t/T_0}$

$$= \frac{i T_0^2}{2\pi n}\underbrace{e^{-2\pi i n}}_{=1} + \frac{T_0^2}{(2\pi n)^2}\left(\underbrace{e^{-2\pi i n}}_{=1} - \underbrace{e^0}_{=1}\right) = \frac{i T_0^2}{2\pi n}$$

$$= \frac{\;}{T_0}\Big(\underbrace{\Big[\frac{\;}{2\pi n}\, e^{\cdots}\Big]_0}_{=0} - \frac{\;}{T_0}\cdot\frac{\;}{2\pi n}\Big)$$

$$= \frac{-ia}{2\pi n} \qquad \underline{n \geq 1}$$ 1

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} a\left(1-\frac{t}{T_0}\right)dt = \frac{a}{T_0}\left[t - \frac{t^2}{2T_0}\right]_0^{T_0} = \frac{a}{T_0}\left(T_0 - \frac{T_0}{2}\right) = \frac{a}{2}$$ 1/2

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{ai}{2\pi n}\, e^{2\pi i n t/T_0}$$

$$= \frac{a}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{ai}{2\pi n}\, e^{i\Omega_n t} \quad \text{mit } \Omega_n = \frac{2\pi n}{T_0} \text{ Erregerfrequenz}$$ 1/2

Zusatz

c) $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = f(t)$

Ansatz: Fourier-Reihe für $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

$$\dot{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i\omega_n c_n e^{i\omega_n t}, \quad \ddot{x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\omega_n^2 c_n e^{i\omega_n t}$$ +1 ZP

$\Rightarrow$ Einsetzen in DGL:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}\left(m\cdot(-\omega_n^2) + \gamma i\omega_n + k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\Omega_n t}$$

Gleichheit muss für alle Zeiten gelten: $\omega_n \stackrel{!}{=} \Omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}$ +1 ZP

Schließe $n=0$ aus; vergleich die einzelnen Summanden:

$\underline{n\neq 0}$: $c_n(-m\omega_n^2 + i\gamma\omega_n + k) = A_n \Rightarrow c_n = \frac{A_n}{-m\omega_n^2 + i\gamma\omega_n + k}$ mit $A_n = \frac{-ia}{2\pi n}$ & $\omega_n = \frac{2\pi n}{T_0}$ +1

$n=0$: $c_0 \cdot k = \frac{a}{2} \Rightarrow c_0 = \frac{a}{2k}$ +1 Z

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a}{2k} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-ia}{2\pi n\left(-m\left(\frac{2\pi n}{T_0}\right)^2 + i\gamma\left(\frac{2\pi n}{T_0}\right) + k\right)}\, e^{2\pi i n t/T_0}$$

$$= \frac{a}{2k} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-iaT_0^2}{-m(2\pi n)^3 + i\gamma(2\pi n)^2 T_0 + 2\pi n k T_0^2}\, e^{2\pi i n t/T_0}$$ +1 ZP

Fazit: Es ist leichter, das Resultat aus b) zu benutzen, da sonst Sinus und Cosinus-Terme zu sortieren sind, die sich bei Ableitung mischen.

+1 ZP