Mathematische Methoder der Physik II
Übungsserie 6

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Sommersemester 2018

Alle Aufgaben sind im Indexkalkül zu lösen (sonst gibt es keine Punkte!).
Hinweis: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

Aufgabe 1 *Vektoroperatoridentitäten I*

Bestätigen Sie im Indexkalkül folgende Identitäten:

(i) $\operatorname{rot}(\lambda\vec{a}) = (\operatorname{grad}\lambda) \times \vec{a} + \lambda \operatorname{rot}\vec{a}$

(ii) $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$

(iii) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot}\vec{b}$

(iv) $\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\operatorname{grad})\vec{a} + (\vec{a}\operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot}\vec{a}$

(v) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b}\operatorname{grad})\vec{a} - (\vec{a}\operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$

(vi) $(\vec{a}\operatorname{grad})\vec{a} = -\vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{a}, \quad \text{wenn} \quad \vec{a}^2 = \text{const}$

(vii) $\Delta(UV) = U\Delta V + V\Delta U + 2\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V$

Aufgabe 2 *Vektoroperatoridentitäten II*

Bestätigen Sie im Indexkalkül die Identitäten

(i) $\vec{c}\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\vec{c}\operatorname{grad})\vec{b} + \vec{b}(\vec{c}\operatorname{grad})\vec{a}$

(ii) $(\vec{c}\operatorname{grad})(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{c}\operatorname{grad})\vec{b} - \vec{b} \times (\vec{c}\operatorname{grad})\vec{a}$

(iii) $(\nabla\vec{a})\vec{b} = (\vec{a}\operatorname{grad})\vec{b} + \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$

(iv) $(\vec{a} \times \vec{b})\operatorname{rot}\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\operatorname{grad})\vec{c} - \vec{a}(\vec{b}\operatorname{grad})\vec{c}$

(v) $(\vec{a} \times \operatorname{grad}) \times \vec{b} = (\vec{a}\operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} - \vec{a}\operatorname{div}\vec{b}$

(vi) $(\nabla \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - (\vec{a}\operatorname{grad})\vec{b} - \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} - \vec{b} \times \operatorname{rot}\vec{a}$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Nabla-Operator ∇ in den Beispielen (iii) und (vi) auf *beide* rechts von ihm stehende Vektorfelder wirken soll.

bitte wenden

Aufgabe 3 *Spezielle Vektorfelder*

(a) Es sei Φ ein skalares Feld und $\vec{A}$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die Beziehung

$$\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi \cdot \operatorname{div}\vec{A}.$$

(b) Spezialisieren Sie das Resultat von (a) für den Fall $\vec{A} = \operatorname{grad}\Phi$.

(c) Das skalare Feld Φ erfülle nun die Bedingungen $\Phi = 0$ auf S und $\Delta\Phi = 0$ in V, worin Δ den LAPLACE-Operator und S die Fläche bezeichnet, die das Volumen V umgibt. Zeigen Sie, dass $\phi = 0$ in V gilt.

Aufgabe 4 *Die Identitäten von JACOBI und LAGRANGE*

Bestätigen Sie jeweils im Indexkalkül

(a) die JACOBI-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}.$$

(b) die LAGRANGE-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$

Zusatzaufgabe *Levi-Civita in n-Dimensionen*

Das LEVI-CIVITA-Symbol ist in n Dimensionen definiert als

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 \quad \text{wenn} \quad i_1, i_2 \ldots, i_n \quad \text{eine gerade Permutation von 1,2,...,n bilden} \\ -1 \quad \text{wenn} \quad i_1, i_2 \ldots, i_n \quad \text{eine ungerade Permutation von 1,2,...,n bilden} \\ 0 \quad \text{sonst, d.h. wenn mindestens 2 Indices gleich sind} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie

(i) ϵ_{1324} (ii) $\epsilon_{7125634}$ (iii) $\epsilon_{67812345}$ (iv) ϵ_{364152}

(Vorsicht: Nicht einfach loslegen wie in 3 Dimensionen, sondern die o.g. Definition verwenden und ggfs. nachlesen was gerade und ungerade Permuation bedeutet.)

(b) Das Levi-Civita-Symbol kann auch in einer Determinantenschreibweise angegeben werden als

$$\epsilon_{i_1\dots i_n} = \det \begin{pmatrix} — & \vec{e}_{i_1} & — \\ — & \vec{e}_{i_2} & — \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ — & \vec{e}_{i_n} & — \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Machen Sie sich zunächst klar, dass die Relation stimmt. Stellen Sie dann den Term $\epsilon_{i_1\dots i_n} \cdot \epsilon_{j_1\dots j_n}$ als Determinante dar, indem Sie Eigenschaften von Determinanten und die Relation $\vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$ verwenden.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Determinantenschreibweise $\epsilon_{ijkl} \cdot \epsilon_{mnop}$ und summieren Sie anschließend nacheinander über $i = m$, $j = n$, $k = o$ und $l = p$.

(d) Bestimmen Sie nun allgemein $\epsilon_{i_1\dots i_n} \cdot \epsilon_{i_1\dots i_n}$ (Summenkonvention), wobei hier allgemeine Überlegungen wesentlich schneller zum Ziel führen als das Rechnen mit der Determinantenschreibweise (ist aber auch möglich).