Mathematische Methoden der Physik I
Nachklausur

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Bearbeitungszeit: 120 min
Hilfsmittel: keine

Bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt verwenden!

Aufgabe 1 — *Variation der Konstanten*

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $I(t)$ der Differentialgleichung eines R-L-Schwingkreises

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t),$$

wobei R, L, U_0, ω Konstanten sind. Verwenden Sie dazu das Verfahren der Variation der Konstanten.

Hinweis: $\int e^{ax} \sin(bx) \mathrm{d}x = e^{ax} \, \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2}$

5 Punkte

Aufgabe 2 — *Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung*

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 64xe^x$$

indem Sie für die Lösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

5 Punkte

Aufgabe 3 — *Exakte Differentialgleichung*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x \cos^2 y \mathrm{d}x + [2y - x^2 \sin(2y)] \mathrm{d}y = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Auffinden einer Potentialfunktion $U(x, y) = \text{const.}$

(c) Machen Sie eine Probe durch implizites (!) Differenzieren.

Hinweis: $2 \cos x \sin x = \sin(2x)$

5 Punkte

Aufgabe 4 — *Konservatives Vektorfeld*

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F} = \tan y \mathbf{i} + \frac{x}{\cos^2 y} \mathbf{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist.

(b) Berechnen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$ mit Hilfe eines Kurvenintegrals, dessen Integrationsweg parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.

5 Punkte

Aufgabe 5 *Wegintegrale berechnen*

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V} = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$W = \int_C \mathbf{V} \mathrm{d}\mathbf{r}$$

wobei die Kurve C die Schnittkurve der Flächen $z = 1 - x^2$ und $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Hinweis: $\int \sin^2 \mathrm{d}x = \frac{2x - \sin(2x)}{4} + C$

5 Punkte

Aufgabe 6 *Weitere Fragen*

(a) Die Differentialgleichung

$$y'' - 2yy' = 0$$

hat die spezielle Lösung $y_1(x) = \tan x$, jedoch ist $y_2 = cy_1$ ($c \neq 0$) keine (spezielle) Lösung. Geben Sie eine kurze (!) Begründung dafür an.

(b) Gegeben sei die Eulersche Differentialgleichung für die Funktion $y(x)$

$$x^2 y'' - xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Transformation $x = e^t$ diese Differentialgleichung in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt. (Die Lösung der Differentialgleichung ist nicht verlangt.)

(c) Ein Teilchen der Masse m führt eine eindimensionale Bewegung unter dem Einfluss der Kraft

$$F(x) = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}, \quad a, b > 0$$

aus. Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt und seine Stabilität, und berechnen Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtlage.

(d) Zeigen Sie durch Berechnung der Wronski-Determinante, dass die beiden Funktionen

$$y_1(x) = e^{ax}, \quad y_2(x) = xe^{ax} \quad (a \neq 0)$$

ein Fundamentalsystem bilden und bestimmen Sie die Differentialgleichung deren allgemeine Lösung durch Linearkombination dieses Funktionenpaars gegeben ist.

(e) Bestimmen Sie alle Skalarfunktionen $v(x, y, z)$, für die das folgende Kurvenintegral wegunabhängig ist!

$$W = \int_C \left(xy \mathrm{d}x + \frac{x^2}{2} \mathrm{d}y + v(x, y, z) \mathrm{d}z \right)$$

11 Punkte

Zusatzaufgabe 7 *Fläche einer Ellipse*

Berechnen Sie die von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umschlossene Fläche durch Verwendung eines Doppelintegrals und substituieren Sie $x' = x/a$ und $y' = y/b$.

3 Punkte