11 Punkte

Lösung: Aufgabe 6

a) Dirichlet-Bedingungen:

1) periodisch 1/2

2) eindeutig & stetig, außer an endlich vielen endlichen Unstetigkeitsstellen 1/2 1

3) endliche Anzahl an Extremwerten in einem Periodizitätsintervall 1

4) $\int_a^b |f(x)|\, dx$ konvergiert 1/2

b) $\mathrm{rot}(\lambda\vec{a}) = \varepsilon_{ijk}\, \partial_i(\lambda a_j)\vec{e}_k = \vec{e}_k \varepsilon_{ijk}\, \lambda\, \partial_i a_j + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} a_j\, \partial_i \lambda$

$= \lambda\, \mathrm{rot}\,\vec{a} + \vec{e}_k \varepsilon_{ijk} a_j [\mathrm{grad}\,\lambda]_i = \lambda\, \mathrm{rot}\,\vec{a} + \mathrm{grad}\,\lambda \times \vec{a}$ 2

c) gegeben: $g(t)$, $\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$

gesucht: $\mathcal{F}[g(t-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-a)\, e^{-i\omega t}\, dt$ $\qquad \tilde{t} = t-a,\ t = \tilde{t}+a,\ dt = d\tilde{t}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{t})\, e^{-i\omega(\tilde{t}+a)}\, d\tilde{t} = \frac{e^{-i\omega a}}{\boxed{\sqrt{2\pi}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tilde{t})\, e^{-i\omega\tilde{t}}\, d\tilde{t}}_{= \mathcal{F}[g(t)]}$$

$$= \frac{e^{-i\omega a}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\, \mathcal{F}[g(t)]$$ 2

d) $\vec{F}(\vec{r}, t) = (x + ty + z)\vec{i} + (x + y + t \cdot z)\vec{j} + (t \cdot x + y + z)\vec{k}$

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = [1-t]\vec{i} + [1-t]\vec{j} + [1-t]\vec{k}$

$\vec{F}$ wirbelfrei $\Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ $\qquad \mathrm{rot}\,\vec{F} = 0 \Rightarrow t = 1$

Für den Zeitpunkt $t = 1$ wird das Feld wirbelfrei. 2

e) 1: A, 2: A, D 3