

---

# Mathematische Methoden der Physik II

## Übungsserie 5 - Gaußscher Satz

Dr. Agnes Sambale  
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018  
Abgabe: 14.05.2018

---

### Aufgabe 1 *Kuppelkatastrophe*

Gegeben sei eine halbkugelförmige Kuppel mit Radius  $R$ , deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liege. Die Kuppel sei mit einem giftigen Gas gefüllt. Der böartige Simon Bar Sinister sorgt dafür, dass die gesamte Kuppel kurz durchlässig wird, so dass eine winzige Menge Gas entweichen kann. Die Dichte des Gases  $\rho = D_0$  ist als konstant anzunehmen. Außerhalb der Kuppel wehe der Wind mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (5kx + py^2)\mathbf{i} + ky\mathbf{j} \quad p, k = \text{const.}$$

- (a) Berechnen Sie den Massenstrom der austretenden Chemikalie, indem Sie das Oberflächeintegral über die Impulsdichte bilden.
- (b) Verifizieren Sie den GAUSSschen Satz, indem Sie den Massenstrom noch einmal über ein Volumenintegral berechnen.
- (c) Führen Sie für das Ergebnis eine Einheitenbetrachtung durch.

### Aufgabe 2 *Verifikation des GAUSSschen Satzes*

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = \frac{6ka^2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\mathbf{i} + \frac{3ka^2z}{\sqrt{y^2 + z^2 + 4a^2}}\mathbf{j} + \frac{2ka^2x}{\sqrt{x^2 + z^2 + 9a^2}}\mathbf{k}$$

durch die Oberfläche eines Quaders, der durch die Eckpunkte  $(0, 0, 0)$ ,  $(2a, 0, 0)$ ,  $(2a, 3a, 0)$ ,  $(0, 3a, 0)$ ,  $(0, 0, a)$ ,  $(2a, 0, a)$ ,  $(2a, 3a, a)$ ,  $(0, 3a, a)$  beschrieben wird.

- (a) Fertigen Sie eine Skizze an.
- (b) Integrieren Sie über die Oberfläche des Quaders im Sinne des GAUSSschen Satzes.
- (c) Integrieren Sie über das Volumen des Quaders im Sinne des GAUSSschen Satzes.

### Aufgabe 3 *Anwendbarkeit des GAUSSschen Satzes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- (a) Berechnen Sie die Divergenz dieses Vektorfeldes.

(b) Berechnen Sie den Fluss

$$\oiint_{S_1} \mathbf{F} \, d\mathbf{f}$$

worin  $S_1$  die Einheitskugel mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung sein soll, direkt aus dem Oberflächenintegral. Kann man dieses Integral mit Hilfe des GAUSSschen Satzes berechnen?

(c) Wiederholen Sie die Berechnung des Flusses für eine Fläche  $S_2$ , die die Einheitskugel ist, deren Mittelpunkt der Punkt  $M(0, 0, 2)$  ist. Verifizieren Sie das Resultat mit Hilfe des GAUSSschen Satzes, falls dieser anwendbar ist.

**Hinweis:** für das Oberflächenintegral: Verschieben Sie den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt  $M$ .