Aufgabe 3 — Anwendbarkeit des Gaußschen Satzes

$$\boxed{\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{r}}{r^3}} \quad \text{mit} \quad r = |\mathfrak{r}|$$

a)

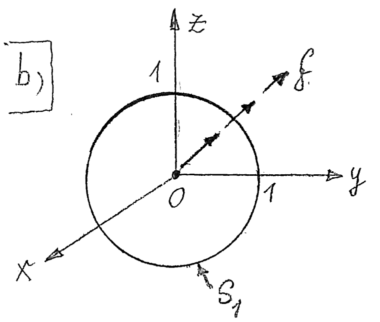
$$\mathfrak{f} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - x\cdot\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot 2x = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, \quad (\mathfrak{r} \neq \vec{0})$$

analog für y, z. Zusammen:

1 $$\operatorname{div}\mathfrak{f} = \frac{3}{r^3} - 3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5} = 0$$

b)



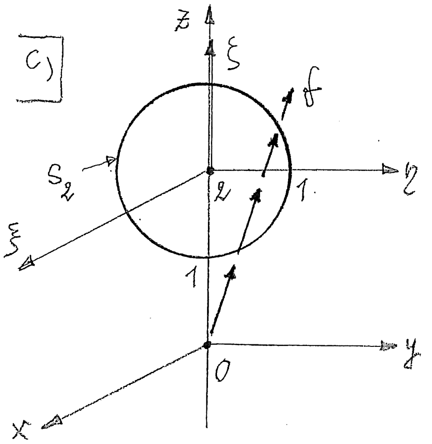
zu berechnen: $\oiint_{S_1} \mathfrak{f}\, d\vec{f}$ für $S: x^2+y^2+z^2 = 1$

$$\longrightarrow d\vec{f} = \frac{\mathfrak{r}}{r}\,df = \frac{\mathfrak{r}}{r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

1 damit $$\boxed{\oiint_S \mathfrak{f}\,d\vec{f}} = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r} = 4\pi\cdot\frac{1}{r^2}\Big|_{r=R=1} = \boxed{4\pi}$$
$(r = R = 1)$

1 Gaußscher Satz nicht anwendbar, da Einheitskugel Koordinatenursprung enthält, wo $\mathfrak{f}$ nicht definiert

c)



hier $S: x^2+y^2+(z-2)^2 = 1$, Einheitskugel enthält Koordinatenursprung nicht mehr

- Gaußscher Satz anwendbar, $\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\oiint_{S_2} \mathfrak{f}\,d\vec{f} = 0}$$

1

- direkte Berechnung des Flusses: neues Koordinatensystem

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z - 2$$

in diesem Koordinatensystem ist $d\vec{f} = \frac{r'}{r'}\, df$ mit $r' = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + \zeta k$.

und $$\boxed{f = \frac{\xi\vec{i} + \eta\vec{j} + (\zeta+2)k}{\left[\xi^2+\eta^2+(\zeta+2)^2\right]^{3/2}}}$$

1

damit $$\oiint_S f\, d\vec{f} = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\xi^2+\eta^2+\zeta(\zeta+2)}{\left[\xi^2+\eta^2+(\zeta+2)^2\right]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\left[\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{1/2}}$$

auf S_2: $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = R^2 = 1$

$$= \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{2\zeta+1}{(1+4\zeta+4)^{3/2}},$$

• Kugelkoordinaten:

$\zeta = r\cos\vartheta$

mit $r = R = 1$: $\zeta = \cos\vartheta$

$d\zeta = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

1

$$= -2\pi \cdot \int_1^{-1} d\zeta\, \frac{2\zeta+1}{(4\zeta+5)^{3/2}}$$

• Substitution:

$2\zeta + 1 = u$

$\zeta = \frac{1}{2}(u-1)$, $d\zeta = \frac{d}{2}$

$4\zeta + 5 = 2u + 3$

$$= -\cancel{2}\pi \int_{\zeta=1}^{-1} \frac{du}{\cancel{2}}\, \frac{u}{(2u+3)^{3/2}}$$

$$= \pi \int_{-1}^{3} du\, \frac{u}{(2u+3)^{3/2}},$$ Bronstein/S., S. 306, № 136

$$= \pi \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{2u+3} + \frac{3}{\sqrt{2u+3}}\right)\Bigg|_{u=-1}^{3}$$

VH.1
Z.P

$$\boxed{\oiint_{S_2} f\, d\vec{f} = \frac{\pi}{2}\left(3 + \frac{3}{3} - 1 - \frac{3}{1}\right) = 0},$$ Übereinstimmung

1

7+1