
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 9

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 20.12.17

Aufgabe 1

Der Resonanzfall

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\varrho x}$$

mit Konstanten a, b, c, A und ϱ . ϱ erfülle die charakteristische Gleichung

$$a\varrho^2 + b\varrho + c = 0.$$

Hier versagt der Ansatz $y_p = \alpha e^{\varrho x}$. Bestimmen Sie die Partikulärlösung, indem Sie für den Parameter α eine Variation der Konstanten durchführen. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\varrho = \frac{-b}{2a}$ und $\varrho \neq \frac{-b}{2a}$.

Aufgabe 2

Die Methode des Energiesatzes

- (a) Betrachten Sie die folgende nicht-lineare Differentialgleichung und lösen Sie diese gemäß der Anleitung.

$$m_1 \ddot{y} = m_2 y^3$$

- Multiplizieren Sie den Faktor \dot{y} mit obiger Gleichung. Stellen Sie dann jede Seite (die Terme beider Seiten) als zeitliche Ableitung dar.
- Integrieren Sie einmal nach der Zeit und lösen Sie die so entstehende Differentialgleichung für die folgenden Anfangswerte.

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[4]{m_2}}, \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{\sqrt{2m_1}}$$

- (b) Wenden Sie das oben beschriebene Verfahren auf

$$\ddot{y} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$$

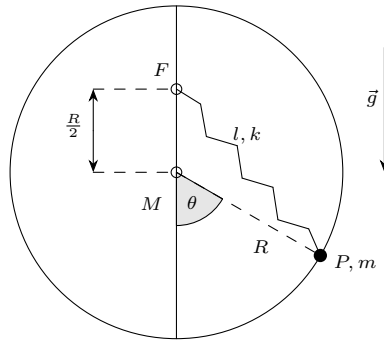
an.

bitte wenden

Aufgabe 3

Gleichgewichtspunkte und kleine Schwingungen

Eine Perle P mit Masse m soll sich reibungsfrei auf einem Reifen mit Mittelpunkt M und Radius R bewegen können. Sie steht dabei unter der Einwirkung sowohl der Schwerkraft als auch einer elastischen Kraft. Letztere wird von einer Feder mit Federkonstante k ausgeübt, die im Punkt F befestigt ist und im entspannten Zustand die Länge $l_0 = \frac{R}{2}$ hat. Die Position der Perle auf dem Reifen wird durch den Winkel $\theta(t)$ beschrieben. Die zugehörige Länge der gedehnten Feder ist $l(t)$.



Die gesamte Kraftkomponente, die die Perle auf dem Reifen bewegt, ist

$$F = \left[-mg + \frac{Rk}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos \theta}} \right) \right] \sin \theta .$$

- Bestimmen Sie alle Winkel θ , die Gleichgewichtslagen der Perle beschreiben. Dabei ist es ausreichend, die Bestimmungsgleichungen für diese Winkel in impliziter Form anzugeben.
- Entscheiden Sie über die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen.

Hinweis: Für Fallunterscheidungen ist es zweckmäßig, den dimensionslosen Parameter

$$\kappa = \frac{k}{k_{\text{krit}}} \quad \text{mit} \quad k_{\text{krit}} = 3 \frac{mg}{R}$$

einzuführen.