Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 2: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt c einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.

(b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 := 6, \qquad y_0 := y(x_0) := 4$$

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen an, dass es sich bei y um eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ handelt und dass der Graph von y die gegebene Gleichung für alle $x \in M$ erfüllt.

$$x^2 - 2y^2(x) = c^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\, \tilde{x}^2 - 2y^2(\tilde{x})\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\, c^2\bigg|_x \quad \Longrightarrow \quad 2x - 4y(x)y'(x) = 0$$

Man erhält damit eine Differentialgleichung der folgenden Formen.

$$2yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{2y}$$ 1 P.

(b) Die Orthogonaltrajektorien müssen demzufolge der folgenden Differentialgleichung genügen. Das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung wird in der nachfolgenden Skizze abgebildet.

$$y' = -\frac{2y}{x}$$ 1 P.

bitte wenden

(c) Durch Umstellung erhält man eine separierte Differentialgleichung, die sich für die Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y_0 \coloneqq y(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ direkt lösen lässt.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\,\mathrm{d}s = -2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

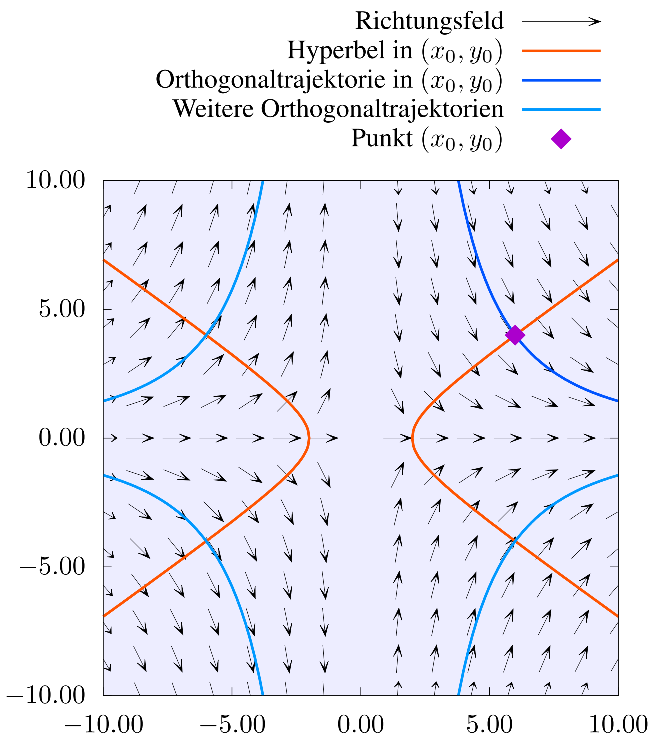
$$\Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -2\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \frac{y_0 x_0^2}{x^2}$$ 1 P.

Setzt man nun $x_0 = 6$ und $y_0 = 4$, so erhält man die folgenden Aussagen.

$$c^2 = x_0^2 - 2y_0^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = \pm 2, \qquad y_0 x_0^2 = 144$$ 1 P.

Auch hier sind die entsprechende Hyperbel und die, der Differentialgleichung entsprechenden, Orthogonaltrajektorie in der nachfolgenden Skizze eingezeichnet.



3 P.

Das Diagramm zeigt das Richtungsfeld der Orthogonaltrajektorien und das Beispiel einer zugehörigen Hyperbel.

Aufgabe 2 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable t und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y\,(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) \coloneqq \frac{y(t)}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

LÖSUNG:

Durch die Verwendung der Substitution lassen sich die folgenden Aussagen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ treffen.

$$y(t) = tz(t) \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = z(t) + tz'(t) \qquad \text{1 P.}$$

Das Umformen der ursprünglichen Differentialgleichung und Einsetzen der Substitution führt dann zur gewünschten separablen Differentialgleichung, die sich durch die Methode der Trennung der Variablen lösen lässt.

$$ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad t\,[z(t) + tz'(t)] = tz(t)\,[1 + \ln z(t)]$$

$$\Longrightarrow \quad tz'(t) = z(t)\ln z(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{z'(t)}{z(t)\ln z(t)} = \frac{1}{t} \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{z(s)\ln z(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{s\ln s}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{\ln z(t)}{\ln z_0}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad \Longrightarrow \quad z(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) = z_0^{\frac{t}{t_0}} \qquad \text{2 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = tz(t) = t\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Probe leitet man nun die Lösung ab und substituiert den erhaltenen Term mithilfe der berechneten Lösung.

$$y'(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) + \frac{t\ln z_0}{t_0}\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t)}{t}\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] = y(t)\,[1 + \ln y(t) - \ln t] \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

bitte wenden

Aufgabe 3 *Eine Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \qquad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

(c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als $1\,\%$ der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter k und N diesen Zeitpunkt?

LÖSUNG:

(a) Wir definieren als Erstes den Anteil der gesunden Menschen $\alpha(t) \in [0, 1]$ und den Anteil der infizierten Menschen $\beta(t) \in [0, 1]$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\alpha(t) := \frac{M(t)}{N}, \qquad \beta(t) := \frac{Z(t)}{N}$$

Wir wählen nun eine festen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^+$. Nähern wir für kleine Zeitspannen $\tau \in \mathbb{R}^+$ die Anzahl der Personen, die ein Zombie trifft, durch τk an, so teilen sich Infizierte und Gesunde entsprechend ihrer Anteile auf diese Anzahl auf.

$$\tau k \approx \tau k \alpha(t) + \tau k \beta(t)$$

Die Anzahl $S(t)$ der gesunden Menschen, die ein Zombie in der Zeitspanne τ trifft und infiziert, kann demnach wie folgt für kleine τ approximiert werden.

$$S(t) \approx \tau k \alpha(t) = \frac{\tau k}{N} M(t)$$

Diese Approximation gilt für jeden Zombie. Dementsprechend lässt sich nun die Anzahl der Zombies $Z(t + \tau)$ nach der Zeitspanne τ beschreiben.

$$Z(t+\tau) \approx Z(t) + S(t)Z(t) = Z(t) + \frac{\tau k}{N} \left[N - Z(t)\right] Z(t) \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \quad \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} \approx \frac{k}{N} \left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

Um die Fehler der Näherung mithilfe einer Differentialgleichung zu korrigieren, bildet man den Grenzwert der erhaltenen Differenzengleichung für $\tau \longrightarrow 0$.

$$Z'(t) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} = \frac{k}{N} \left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

$$\Longrightarrow \quad Z' = \frac{k}{N}(N - Z)Z \qquad \text{1 P.}$$

(b) Bei der oben beschriebenen Gleichung handelt es sich offensichtlich um eine separable Differentialgleichung. Die Methode der Trennung der Variablen ergibt dann das Folgende.

$$\frac{Z'(t)}{\left[N - Z(t)\right] Z(t)} = \frac{k}{N} \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{Z'(s)}{\left[N - Z(s)\right] Z(s)} \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{k}{N} \, \mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s} \, \mathrm{d}s = \frac{k}{N}(t - t_0) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Lösung des Integrals zeigt sich eine Partialbruchzerlegung als sinnvoll.

$$\frac{1}{(N-s)s} = \frac{N}{N} \frac{1}{(N-s)s} = \frac{1}{N} \frac{N - s + s}{(N-s)s} = \frac{1}{Ns} - \frac{1}{N(s-N)}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s} \, \mathrm{d}s = \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{Ns} \, \mathrm{d}s - \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{N(s-N)} \, \mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{N} \ln\left[\frac{Z(t)}{Z_0}\right] - \frac{1}{N} \ln\left[\frac{Z(t) - N}{Z_0 - N}\right] = \frac{1}{N} \ln\left(\frac{Z(t)\left[Z_0 - N\right]}{Z_0\left[Z(t) - N\right]}\right) \qquad \text{+1 P.}$$

Die Lösung des Integrals wird nun eingesetzt und die entstehende Gleichung wird explizit nach $Z(t)$ umgestellt.

$$\frac{Z(t)}{Z(t) - N} = \frac{Z_0 e^{k(t-t_0)}}{Z_0 - N} = -Ae^{k(t-t_0)}, \qquad A := \frac{Z_0}{N - Z_0}$$

$$\Longrightarrow \quad Z(t) = \frac{NAe^{k(t-t_0)}}{1 + Ae^{k(t-t_0)}} = N\left(1 - \frac{1}{1 + Ae^{k(t-t_0)}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Nun setzen wir die Anfangswerte ein und unterstreichen unser Ergebnis doppelt.

$$A = \frac{1}{20} \quad \Longrightarrow \quad Z(t) = N\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{20}e^{kt}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

(c) Die nachfolgende Skizze zeigt die Werte $M(t)$ und $Z(t)$ für verschiedene Zeiten $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) Es sei $\alpha^* \in \left(0, 1 - \frac{Z_0}{N}\right)$ eine feste Grenze für den Anteil der Menschen. Wir suchen nun den frühesten Zeitpunkt $t^* \in \mathbb{R}^+$, sodass $\alpha(t^*) \leq \alpha^*$ gilt. Durch Äquivalenzumformungen zeigt man, dass t^* existiert und eindeutig ist.

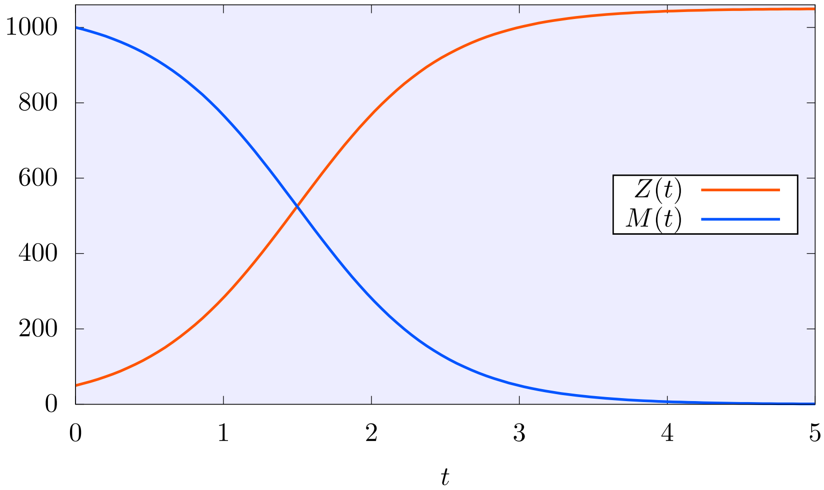
$$\alpha^* = \alpha(t^*) = 1 - \beta(t^*) = 1 - \frac{Z(t^*)}{N} = \frac{1}{1 + Ae^{k(t^* - t_0)}}$$

$$\Longrightarrow \quad t^* = t_0 + \frac{1}{k} \ln\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha^*} - 1\right)\right] = t_0 + \frac{1}{k} \ln\left[\frac{N - Z_0}{Z_0}\left(\frac{1}{\alpha^*} - 1\right)\right]$$

Setzt man nun die gewünschten Werte der Parameter ein, so erhält man das folgende Ergebnis.

$$t_0 = 0, \qquad k = 2, \qquad A = 0.05, \qquad \alpha^* = 1\,\% \quad \Longrightarrow \quad t^* = \frac{\ln 1980}{2} \approx 3.8 \qquad \text{+1 P.}$$

Zu beachten ist, dass t^* sowohl von k als auch von N abhängig ist. Steigt k, so verringert sich t^*. Steigt N, so erhöht sich auch t^*. +1 P.



2 P.

Die Abbildung zeigt die Anzahl der Zombies $Z(t)$ und der gesunden Menschen $M(t)$ für verschiedene Zeiten t.