Mathematische Methoder der Physik I
Übungsserie 6

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Abgabe: 29. November 2017
Wintersemester 17/18

Aufgabe 1 *Die charakteristische Gleichung*

Konstruieren Sie für jede der beiden folgenden Differentialgleichungen deren allgemeine Lösung und bestimmen Sie die spezielle Lösung, die den nebenstehenden Anfangsbedingungen genügt. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

(i) $3y'' - 4y' + y = 0\ , \qquad y(0) = 1\ , \qquad y'(0) = 1$

(ii) $y'' - 2y' + y = 0\ , \qquad y(0) = 3\ , \qquad y'(0) = 4$

Aufgabe 2 *Die Wronski-Determinante*

(a) Drücken Sie die Ableitung W' der Wronski-Determinante

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

mithilfe der Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = 0$$

durch die Wronski-Determinante selbst aus.

(b) Lösen Sie die so entstehende gewöhnliche Differentialgleichung für W. Zeigen Sie anhand dieser Lösung die folgende Aussage.

$$\exists x \in \mathbb{R}\colon W(x) \neq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}\colon W(x) \neq 0$$

(c) Betrachten Sie nun eine lineae Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Geben Sie die zugehörige Wronski-Determinante an.

bitte wenden

(d) Bestimmen Sie mit diesem Verfahren die Wronski-Determinante der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x^2}y = 0$$

(e) **Zusatz:** Überzeugen Sie sich, dass $y_1(x) = x^m$ eine Lösung der Gleichung ist. Konstruieren Sie eine zweite Lösung aus dem Ansatz $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$ aufstellen und diese durch zweimalige Integration lösen. Überprüfen Sie durch Einsetzen, dass auch y_2 eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 3 *Die homogene Euler-Gleichung*

Die Eulersche Differentialgleichung ist durch die folgende Form gegeben. Dabei stellen die Koeffizienten a, b und c reelle Konstanten dar.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

(a) Überführen Sie diese Differentialgleichung mithilfe der Substitution $x = e^{t(x)}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(b) Ein wichtiges Beispiel für die Potentialtheorie stellt die folgende Differentialgleichung dar. Dabei beschreibt n eine nichtnegative reelle Konstante, r eine nichtnegative reelle Variable und R eine Funktion, welche von r abhängt.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$$

(1) Behandeln Sie die genannte Differentialgleichung nach der zuvor beschriebenen Methode.

(2) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung R der entstehenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(3) Geben Sie diejenige spezielle Lösung an, welche die folgende Bedingung erfüllt.

$$R \xrightarrow{r\longrightarrow\infty} 0$$