Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 2

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 01.11.17

Aufgabe 1

Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt c einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.

(b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 \coloneqq 6, \qquad y_0 \coloneqq y(x_0) \coloneqq 4$$

Aufgabe 2

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable t und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y\,(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) \coloneqq \frac{y(t)}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

bitte wenden

Aufgabe 3

Eine Zombieapokalypse

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \qquad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

(c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als $1\,\%$ der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter k und N diesen Zeitpunkt?