
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 4

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 15.11.17

Aufgabe 1

Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft (Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$) genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung. Dabei bezeichnet g die Fallbeschleunigung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

- (a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ genügt.
- (b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ . Dabei gilt die folgende Definition.

$$v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

- (c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung durch die Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 2

Exakte Differentialgleichungen

- (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und lösen Sie diese.

- (i) $(x + y^3) y' + y - x^3 = 0$

- (ii) $0 = \sin(xy^2) + xy^2 \cos(xy^2) + [2x^2y \cos(xy^2) + 2y] y'$

- (b) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen nicht exakt sind.

- (i) $0 = 2 \cos y + 4x^2y \sin y + (yx^3 \cos y + x^3 \sin y) y' - xy' \sin y$

- (ii) $x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2y^2}{x^2 + y^4} - \frac{2x^3y}{x^2 + y^4} y' = 0$

Aufgabe 3

Vollständiges Differential

- (a) Bestimmen Sie das totale Differential der folgenden Funktion. Verwenden Sie hierfür die dreidimensionale Kettenregel.

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) := x^4yz^2 + 2y^2x^3e^z$$

- (b) Es sei nun für ein $c \in \mathbb{R}$ eine Fläche im Raum durch die Gleichung $U(x, y, z) = c$ gegeben. Stellen Sie durch Verwendung des totalen Differentials die zugehörige exakte partielle Differentialgleichung dieser Fläche auf und überprüfen Sie diese nach der Multiplikation mit $\frac{1}{x^2}$ auf Exaktheit.