Aufgabe: Satz von Stokes

5 Punkte

$$\vec{F} = (x+y-z)\vec{i} + (1+3x)\vec{j} + (y^2-x)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= (2y-0)\vec{i} + (-1-(-1))\vec{j} + (3-1)\vec{k}$$

1 $$= 2y\vec{i} + 2\vec{k}$$

Bestimme Schnittkurve von:

$$z = \sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Gleichsetzen:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1-x^2-y^2$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 = 0$$

$$y^2 = -(x^2-x) \qquad \text{quad. Ergänzung}$$

$$= -\left[(x-1/2)^2 - 1/4\right]$$

1 $$(x-1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$$ Kreis um $(1/2, 0, 1/2)$ mit Radius $1/2$

Bestimme Oberflächennormalenvektor $d\vec{f}$

$$d\vec{f} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)dx\,dy$$

entscheidend ist nur die Randkurve, das Integrationsgebiet an sich kann beliebig deformiert werden:

wähle als $z(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

1 $$\Rightarrow d\vec{f} = \left(\frac{x\vec{i}}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} + \frac{y\vec{j}}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} + \vec{k}\right)dx\,dy$$

$$W = \oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\,d\vec{f} = \iint_S \frac{2xy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} + 2\,dx\,dy$$

1 $$= \underbrace{\int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{+\sqrt{x-x^2}} \frac{2xy}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\,dx\,dy}_{\text{nach Integration gerade Funktion, Grenzen heben sich auf: } =0} + 2\underbrace{\int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{+\sqrt{x-x^2}} dx\,dy}_{\text{Fläche von Kreis mit Radius } 1/2 = \pi\cdot 1/4}$$

$$= 2\int_{x=0}^{1} \left[-x\sqrt{1-(x^2+y^2)} \right]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dx + 2\cdot\pi\cdot 1/4$$

$$= 2\int_{x=0}^{1} -x\cancel{\sqrt{1-(x^2+x-x^2)}} + x\cancel{\sqrt{1-(x^2+x-x^2)}}\; dx + 1/2\,\pi$$

$$= \pi/2$$ 1

Variante:

$$d\vec{f} = \left(-\frac{(x-1)\vec{i}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} - \frac{y\vec{j}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + \vec{k}\right) dx\,dy$$

$$W = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\, d\vec{f} = \iint \frac{-2(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} + 2 \quad dx\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{+\sqrt{x-x^2}} \frac{-2(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\, dx\,dy + 2\underbrace{\int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{x-x^2}}^{+\sqrt{x-x^2}} dx\,dy}_{\text{Kreisfläche, Radius } 1/2\ :\ = \pi\cdot 1/4}$$

$$= -2\int_{x=0}^{1}\left[(x-1)\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} dx + 2\cdot\pi\cdot 1/4$$

$$= -2\int_{x=0}^{1}(x-1)\left[\cancel{\sqrt{(x-1)^2+x-x^2}} - \cancel{\sqrt{(x-1)^2+x-x^2}}\right]dx + 1/2\,\pi$$

$$= \pi/2$$