Aufgabe 2: Lösung (Stokes) 6 Punkte

$$\left.\begin{array}{r} 2(x^2+y^2)+z^2=1 \\ z = 1/\sqrt{2} \end{array}\right] \to \text{Schnittkurve: } 2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}=1$$

$$2\cdot(x^2+y^2)=\frac{1}{2}$$

$$(x^2+y^2)=\frac{1}{4}$$ Kreis um $(0,0,1/\sqrt{2})$ mit Radius $1/2$

$$\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$$

a) Kurvenintegral:

$$\vec{r}=\frac{1}{2}\cos\varphi\,\vec{i}+\frac{1}{2}\sin\varphi\,\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$ 1

$$d\vec{r}=\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\,\vec{i}+\frac{1}{2}\cos\varphi\,\vec{j}\right)d\varphi$$

$$\oint_C \vec{F}d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cos\varphi\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\varphi\;d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}-\frac{1}{4}\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{=1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi$$

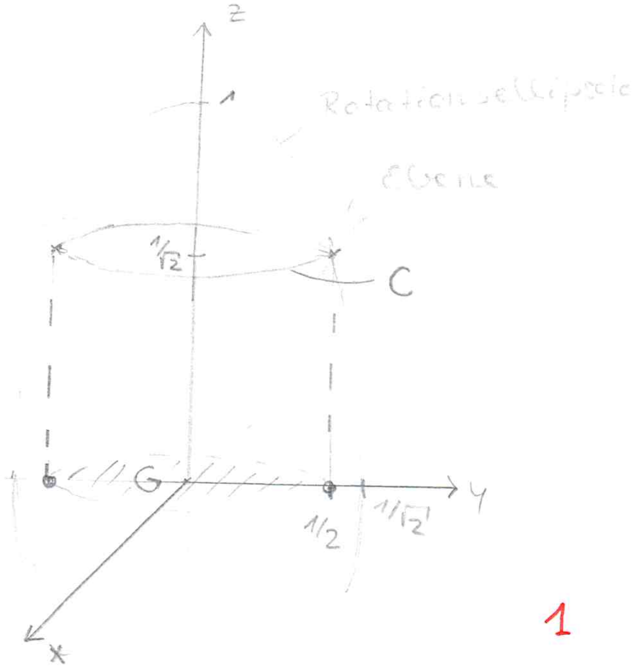
$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\varphi-\sin\varphi\right]_0^{2\pi}=-\frac{1}{4}\cdot 2\pi=-\frac{\pi}{2}$$ 1

b) Wähle deformierte Fläche $x^2+y^2\le 1/4$, $z=1/\sqrt{2}$, $d\vec{f}=\vec{k}\,dx\,dy$ 1

$$\text{rot}\,\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(x-y)-\frac{\partial}{\partial z}(z-x)\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}(y-z)-\frac{\partial}{\partial x}(x-y)\right)\vec{j}$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(z-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y-z)\right)\vec{k}$$
$$=-2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$ 1

$$\oint_C\vec{F}d\vec{r}=\iint_G \text{rot}\,\vec{F}\,dx\,dy\cdot\vec{k}=-2\underbrace{\iint_G dx\,dy}_{\substack{\text{Kreisfläche}\\ \pi\cdot r^2}}=-2\cdot\pi\cdot(1/2)^2=-\frac{\pi}{2}$$ 1

ausführlicher (ohne Fläche zu deformieren) siehe Skript



1