
Mathematische Methoden der Physik II

Übungsserie 1 - Der Greensche Satz

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: Montag, 16.04.18

Fertigen Sie zu allen Aufgaben Skizzen an!

Aufgabe 1 *Verifikation des Greenschen Satzes*

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C (xy dx + x^2 dy),$$

wobei der Integrationsweg C aus den Seiten des Quadrates mit den Eckpunkten $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ und $D(0,1)$ besteht und entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Verwandeln Sie dann das Kurvenintegral in ein Doppelintegral und verifizieren Sie den Greenschen Satz.

Aufgabe 2 *Kurvenintegral mit Greenschen Satz*

Berechnen Sie mit Hilfe des Greenschen Satzes das Integral

$$\int_C (e^x \cos y dx - e^x \sin y dy),$$

ausgehend vom Punkt $(\ln 2, 0)$ über $(0, 1)$ nach $(-\ln 2, 0)$.

Aufgabe 3 *Kraft und Arbeit*

Die Kraft

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$$

bewegt einen Massenpunkt entlang eines geschlossenen Weges, der im Koordinatenursprung beginnt und entlang der Kurve $x = 2\sqrt{y}$ bis zum Punkt $(2, 1)$ verläuft, dann weiter parallel zur x -Achse bis zum Punkt $(0, 1)$ und schließlich entlang der y -Achse zum Koordinatenursprung zurück. Berechnen Sie mit Hilfe des Greenschen Satzes die von der Kraft verrichtete Arbeit.

Zusatzaufgabe 4 *Kurvenintegral mit Polarkoordinaten*

Berechnen Sie auf direktem Wege das Kurvenintegral

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

für das Vektorfeld

$$\mathbf{V} = (x^2 + y^2)y\mathbf{i} - (x^2 + y^2)x\mathbf{j} + (a^3 + z^3)\mathbf{k}$$

und den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ in der (x, y) -Ebene als Integrationsweg C . Verifizieren Sie danach das Resultat des Greenschen Satzes. Führen Sie Polarkoordinaten ein.