Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 8: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Das Phasenportrait

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v aufgespannte Ebene heißt Phasenebene. Die Kurven $v = v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und zusammengenommen Phasenportrait einer Bewegung.

(a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

(b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?

(c) Berechnen Sie die von ihnen umschlossene Fläche in der $(\dot{x}, x)$-Phasenebene.

Aufgabe 2

Linearisierte Schwingungen

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x, \qquad k = \text{const}$$

in der Nähe des Minimums.

(a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ befindet.

(b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U \ .$$

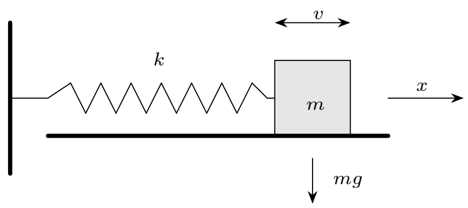
(c) Stellen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung auf. Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die Gleichgewichtsposition. Benutzen Sie dafür $F = m\ddot{x}$.

(d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

bitte wenden

Aufgabe 3 *Oszillator auf rauer Unterlage*

Ein Oszillator (Masse m, Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_{\mathrm{R}} = \mu m g$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, und mg ist das Gewicht der Masse m.



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

(a) Lösen Sie für die ganze erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \mp \mu m g \ ,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflusst die Reibung die Schwingungsfrequenz?

Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mithilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück.

(b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultates $x(t)$ und $v(t)$ für die n-te Halbperiode für alle $n \in \mathbb{N}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, dass die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung.

WS 15/16
Thema 6, A1

Aufgabe 1: Das Phasenportrait

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v als Ordinate aufgespannte Ebene heißt Phasenebene, die Kurven $v = v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und, zusammengenommen, Phasenportrait einer Bewegung.

a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?

c) Berechnen Sie die von ihnen umschlossene Fläche in der $(\dot{x}, x)$-Phasenebene.

d) Ein schwingendes System werde durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + (a+2)y = 0$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der aperiodische Grenzfall eintritt.

bitte wenden

Aufg. 1 Das Phasenportrait

1 harmonischer Oszillator $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, ω_0: Eigenfrequenz

Lösung: $x = \alpha \cos(\omega_0 t - \theta)$

$\dot{x} = -\alpha\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta)$

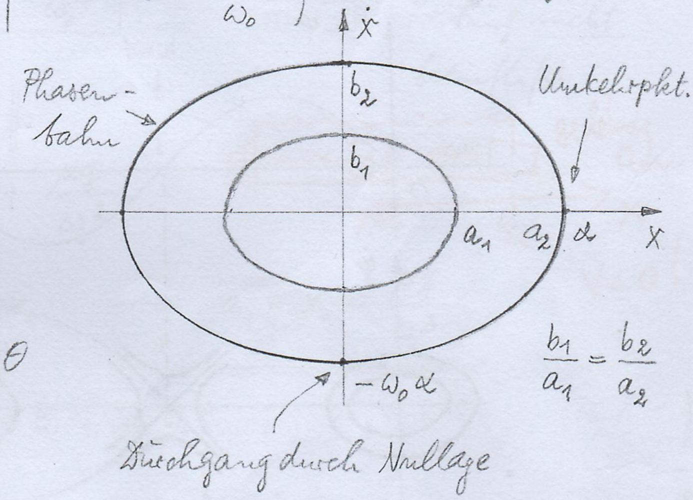
$$\sin^2(\omega_0 t - \theta) + \cos^2(\omega_0 t - \theta) = 1 = \frac{\dot{x}^2}{(\alpha\omega_0)^2} + \frac{x^2}{\alpha^2}$$

1 • Resultat: $\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2\alpha^2} = 1}$, Ellipsen

– Halbachsen: $\left.\begin{array}{l} a = \alpha \\ b = \alpha\omega_0 \end{array}\right\} \frac{b}{a} = \omega_0$ unabhängig von Anfangsbedingungen

1 – Zusammenhang mit Anfangsbedingungen: $\left.\begin{array}{l} \alpha\cos\theta = x_0 \\ \alpha\sin\theta = \frac{v_0}{\omega_0} \end{array}\right\} \alpha^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$

1 Skizze $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \frac{b}{\omega_0}$



$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$$

– Fläche der Ellipsen:

1 $A = \pi a b = \pi\omega_0\alpha^2$ = const für bestimmte Anfangsbed.; unabhängig von θ

– Phasenbahnen schneiden sich nicht.

d) Lösung:

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + (a+2)y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (a+2) = 0$$

1/2 $\Rightarrow \lambda_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - a - 2}$

aperiodischer Grenzfall: $\lambda_1 = \lambda_2$

1/2 $a^2 - a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 0 = a^2 - a - 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad \Big| + \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \quad \Big|\,^{1/2}$

$\pm \frac{3}{2} = a - \frac{1}{2} \quad \Big| + \frac{1}{2}$

1 $a_1 = 2 \quad , a_2 = -1$ //

6 Punkte

bitte wenden

Aufgabe 2: Linearisierte Schwingung

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x \quad , \; k = \text{const.}$$

in der Nähe des Minimums.

a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ befindet.

b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

c) Stellen Sie die linearisierte ~~n~~ Bewegungsgleichung ~~en~~ auf. Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die Gleichgewichtsposition. [Benutzen Sie $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$.]

d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

5 Punkte
+ 1 Zusatz

Lösung:

$U(x) = k x^2 \ln x$ mit $k = \text{const.}$
$k > 0$

a) Minimum:

$$0 \overset{!}{=} \frac{dU}{dx} = 2kx \ln x + kx^2 \cdot \frac{1}{x} = kx(2\ln x + 1)$$

1 $\Rightarrow \quad x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ (Extremstelle)

Berechne 2. Ableitung, um zu überprüfen, ob es sich um Minimum handelt:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k(2\ln x + 1) + kx\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$= 2k \ln x + 3k$$

+ 1 ZP falls jemand das überprüft

$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{e}}} = 2k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3k = 2k > 0 \quad \text{, da } k > 0$$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ ist das Minimum des Potentials //

b) Eindimensionaler Fall:

1 $\vec{F} = -\text{grad}\, U \longrightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -kx(2\ln x + 1)$ //

c) $F = m \cdot \ddot{x}$

1 $F = -kx(2\ln x + 1)$

$$\left.\begin{array}{l} F = m \cdot \ddot{x} \\ F = -kx(2\ln x + 1) \end{array}\right\} m\ddot{x} = -kx(2\ln x + 1)$$

$\Rightarrow$ nicht linear

Taylorentwicklung von $F(x)$ in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$F(x) = F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + F'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \mathcal{O}(x^2)$$

werden nicht verwendet, da Linearisierung gesucht

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = k \frac{1}{\sqrt{e}}\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 0$$
$$F'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -2k\left(-\frac{1}{2}\right) - 3k = -2k$$

$$\Rightarrow \quad F(x) \approx 0 - 2k\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

1 $\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -2k\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ //

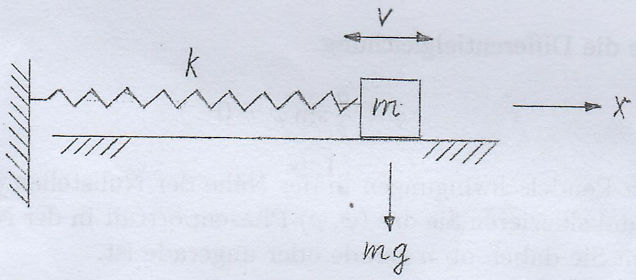
d) Für die Frequenz ω von Schwingungen um den Gleichgewichtszustand gilt:

1 $$\omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{-\frac{(-2k)}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \text{ //}$$

bitte wenden

Aufgabe 3: Oszillator auf rauher Unterlage (WS 15/16)

Ein Oszillator (Masse m, Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_R = \mu mg$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, und mg ist das Gewicht der Masse m.



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

a) Lösen Sie für die *ganze* erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \mp \mu mg\,,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflußt die Reibung die Schwingungsfrequenz?

Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

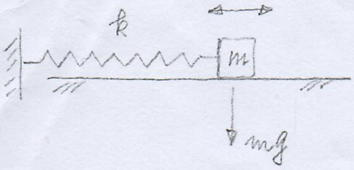
auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück. 4P

b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultats $x(t)$ und $v(t)$ für die n-te Halbperiode an ($n = 1, 2, 3, \dots$). 1P

c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, daß die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung. 4P

(2/1)

Aufgabe 3: Oszillator auf rauher Unterlage



$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \mp \mu m g}$$ mit $\mp \begin{cases} v>0 \\ v<0 \end{cases}$

μ: Koeffizient der kinetischen Reibung

· Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$

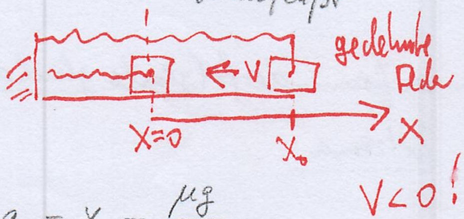
Substitution: $\ddot{x} + \omega_0^2 \underbrace{\left(x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)}_{\xi} = 0$; $\ddot{x} = \ddot{\xi}$

allgemeine Lösung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mp \mu g$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Partikulärlösung: $x_p = \mp \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ (offensichtlich oder „unbestimmte Koeff.")

1 damit $$\boxed{x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t \mp \frac{\mu g}{\omega_0^2}}$$ mit $\underline{\omega = \omega_0}$, Frequenz durch Reibung nicht beeinflußt

· Erste Halbperiode: $v<0$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{\omega_0}$



$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Anfangsbedingungen: $x_1(0) = a_1 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \overset{!}{=} x_0 \longrightarrow \underline{a_1 = x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}}$

$$\dot{x}_1 = -a_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + b_1 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}_1(0) = b_1 \omega_0 \overset{!}{=} 0 \longrightarrow \underline{b_1 = 0}$$

1 Lösung:
$$\left.\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\ \dot{x}_1(t) &= -\omega_0\left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\sin\omega_0 t \end{aligned}}\right\} (*)$$

· Zweite Halbperiode: $v>0$ für $\frac{\pi}{\omega_0} \le t \le \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$x_2(t) = a_2 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Anfangsbedingungen ergeben sich aus $(*)$ für $t = \frac{\pi}{\omega_0}$: $x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -x_0 + 2\frac{\mu g}{\omega_0^2}$

1 $\dot{x}_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 0$ (Umkehrpunkt)

bitte wenden

(2/2) damit $x_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -a_2 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \stackrel{!}{=} -x_0 + 2\frac{\mu g}{\omega_0^2} \longrightarrow a_2 = x_0 - 3\frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2\omega_0 \sin\omega_0 t + b_2\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -b_2\omega_0 \stackrel{!}{=} 0 \longrightarrow b_2 = 0$$

Lösung:

1
$$\boxed{\begin{aligned} x_2(t) &= \left(x_0 - 3\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega_0\left(x_0 - 3\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right)\sin\omega_0 t \end{aligned}}$$

• Diskussion: – Verallgemeinerung für n-te Halbperiode, $(n-1)\frac{\pi}{\omega_0} \le t \le n\frac{\pi}{\omega_0}$; $n = 1, 2, \dots$

1
$$x_n(t) = \left[x_0 - (2n-1)\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right]\cos\omega_0 t + (-1)^{n+1}\frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$v_n(t) = -\omega_0\left[x_0 - (2n-1)\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right]\sin\omega_0 t$$

– aufeinanderfolgende gleichartige Extrema:

$$x_n\left(n\frac{\pi}{\omega_0}\right) = (-1)^n\left[x_0 - (2n-1)\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] + (-1)^{n+1}\frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$= (-1)^n\left[x_0 - 2n\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right], \left(n = \left[\frac{\omega_0^2 x_0}{2\mu g}\right]\right)$$

damit
$$\frac{x_{n+2} - x_n}{(n+2)\frac{\pi}{\omega_0} - n\frac{\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{2\pi}\left\{(-1)^{n+2}\left[x_0 - 2(n+2)\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] - (-1)^n\left[x_0 - 2n\frac{\mu g}{\omega_0^2}\right]\right\}$$

Differenzenquotient

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}(-1)^n\left[\cancel{x_0} - \cancel{2n\frac{\mu g}{\omega_0^2}} - 4\frac{\mu g}{\omega_0^2} - \cancel{x_0} + \cancel{2n\frac{\mu g}{\omega_0^2}}\right]$$

$$= (-1)^n\frac{\omega_0}{2\pi}(-4)\frac{\mu g}{\omega_0^2} = (-1)^{n+1}\cdot 2\frac{\mu g}{\pi\omega_0}$$

1
$$= \pm 2\frac{\mu g}{\pi\omega_0} \begin{cases} \text{Minima} & (n \text{ ungerade}) \\ \text{Maxima} & (n \text{ gerade}) \end{cases}$$

unabhängig von n, d.i. Konstanter Anstieg → Gerade

→ Gerade, auf der Maxima liegen: $x = -2\frac{\mu g}{\pi\omega_0}t + c$

$$x_2\left(2\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -2\frac{\mu g}{\pi\omega_0}\cdot 2\frac{\pi}{\omega_0} + c \stackrel{!}{=} x_0 - 4\frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$t = 0 \curvearrowright x = x_0$

$$c = x_0$$

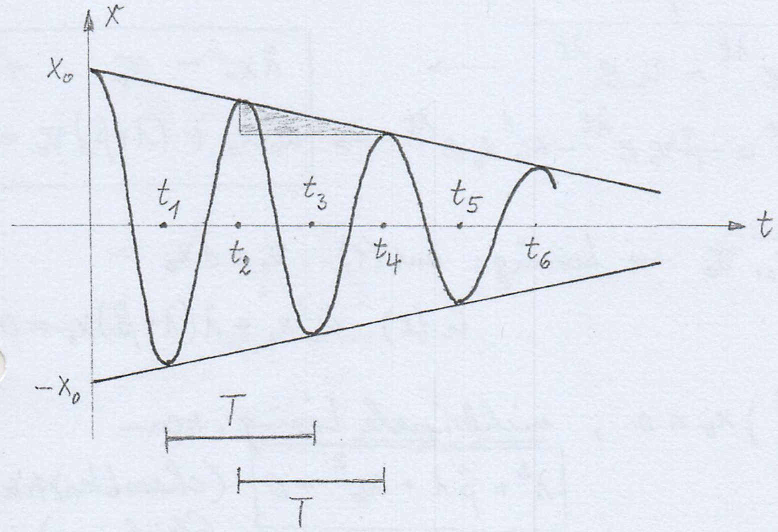
1
$$\boxed{x = -2\frac{\mu g}{\pi\omega_0}t + x_0}$$

rade, auf der Minima liegen: $x = 2\,\frac{\mu g}{\pi \omega_0}\, t + d$

$$x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 2\,\frac{\mu g}{\pi \omega_0}\,\frac{\pi}{\omega_0} + d \overset{!}{=} -x_0 + 2\,\frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$d = -x_0$$

1 $\boxed{x = 2\,\frac{\mu g}{\pi \omega_0}\, t - x_0}$, an Zeitachse gespiegelte Gerade für Maxima



1

9