Mathematische Methoden der Physik I
Nachklausur

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Bearbeitungszeit:: 120 min
Hilfsmittel: keine

Bitte für jede Aufgabe ein eigenes Blatt verwenden!

Aufgabe 1 *Variation der Konstanten*

Lösen Sie die Differentialgleichung eines $R-L$-Schwingkreis

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{U_0}{L}\sin(\omega t)$$

wobei R, L, U_0, ω Konstanten sind. Verwenden Sie dazu das Verfahren der Variation der Konstanten.

5 Punkte

Aufgabe 2 *Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung*

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung

$$y''-2y'-3y=64xe^{-x}$$

indem Sie für die Lösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

5 Punkte

Aufgabe 3 *Konservatives Vektorfeld*

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\mathbf{F}=\tan y\mathbf{i}+\frac{x}{\cos^2 y}\mathbf{j}.$$

(a) Überzeugen Sie sich, dass das Kraftfeld konservativ ist.

(b) Berechnen Sie das Potential $U(\mathbf{r})$ mit Hilfe eines Kurvenintegrals, dessen Integrationsweg parallel zu den Koordinatenachsen verläuft.

5 Punkte

Aufgabe 4 *Wegintegrale berechnen*

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{V}=(x+y)\mathbf{i}+z\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. Berechnen Sie das Wegintegral

$$W=\int_C \mathbf{V}\mathrm{d}\mathbf{r}$$

wobei die Kurve C die Schnittkurve der Flächen $z = 1 - x^2$ und $x^2 + y^2 = 1$ ist.

5 Punkte

Aufgabe 5 *Exakte Differentialgleichung*

Gegeben sei die Differententialgleichung

$$2x\cos^2 y\mathrm{d}x + (2y - x^2\sin(2y)\mathrm{d}y) = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Auffinden einer Potentialfunktion $U = \text{const.}$

(c) Machen Sie eine Probe durch implizites (!) Differentieren.

(d) Spezifizieren Sie die Lösung, so dass die Anfangsbedingung $y(1) = \pi$ erfüllt ist.

5 Punkte

Aufgabe 6 *Weitere Fragen*

(a) Eine Masse hängt an einer Feder mit Eigenfrequenz ω_0 und wird aus der Anfangslage losgelassen. Berechnen Sie die Maximalgeschwindigkeit, die die Masse bei der Schwingung erreicht? Wie groß ist im Verhältnis dazu die Maximalgeschwindigkeit, wenn das Experiment in einer Flüssigkeit wiederholt wird, die die Bewegung gerade kritisch dämpft?

(b) Welche der folgenden Differentialgleichungen beschreibt den exponentiellen Zerfall mit konstanter Zufuhr? Begründen Sie!

(i) $\dot{y} = -ay + b \quad a, b > 0$

(ii) $\dot{y} = e^{\alpha t} \quad \alpha < 0$

(iii) $\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = c \quad c > 0$

(c) Gegeben sei die Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad x > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Transformation $x = e^t$ diese Differentialgleichung in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten überführt.

(d) Ein Teilchen der Masse m bewege sich eindimensional unter dem Einfluss der Kraft

$$F(x) = \frac{2A}{x^3} - \frac{B}{x^2}, \quad A, B = \text{const} > 0.$$

Bestimmen Sie den Gleichgewichtspunkt und seine Stabilität, und berechnen Sie die Frequenz kleiner Schwinungen um diese Gleichgewichtlage.

(e) Zeigen Sie durch Berechnung der Wronski-Determinante, dass die beiden Funktionen

$$y_1 = e^{ax} \quad y_2 = xe^{ax}$$

ein Fundamentalsystem bilden und bestimmen Sie die Differentialgleichung deren allgemeine Lösung durch Linearkombination dieses Funktionenpaars gegeben ist.

11 Punkte

Zusatzaufgabe 7 *Fläche einer Ellipse*

Berechnen Sie die von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umschlossene Fläche, indem Sie die halbe Fläche als Integral aufschreiben und geeignet substitutieren.

3 Punkte