Aufgabe 2 4 Punkte

Konstruieren Sie jeweils ein Vektorfeld, das die folgenden Bedingungen erfüllt, und weisen Sie dies nach. / machen Sie eine Probe. ⊛

a) $\operatorname{rot}\vec{V}$ besitzt nur eine von x-abhängige Komponente in $\vec{k}$-Richtung.

$\operatorname{div}\vec{V}$ verschwindet nicht.

b) $\operatorname{div}\vec{W}$ hängt nur von x^2+y^2 ab.

$\operatorname{rot}\vec{W}$ ~~verschwindet nicht~~. hat keine verschwindende Komponente.

⊛ Dabei ist $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.

Lösung:

a) $\operatorname{rot}\vec{V} \overset{!}{=} f(x)\vec{k} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \overset{!}{\neq} 0$$

Beispiele für richtige Vektoren:

$\vec{V} = g(x)\vec{i} + h(x)\vec{j} + m(z)\vec{k}$

$\vec{V} = g(y)\vec{i} + h(y)\vec{j} + m(z)\vec{k}$

2 z.B. $\vec{V} = x\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j} \rightarrow \operatorname{rot}\vec{V} = x\vec{k}$ & $\operatorname{div}\vec{V} = 1$

b) $\operatorname{div}\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \overset{!}{=} f(x^2+y^2)$

$$\operatorname{rot}\vec{W} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{k} \overset{!}{\neq} 0$$

bzw. $\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \neq 0 \wedge \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \neq 0 \wedge \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \neq 0$

z.B. $\vec{W} = (x^3+y)\vec{i} + y^3\vec{j} + xy\vec{k} \rightarrow \operatorname{div}\vec{W} = 3(x^2+y^2)$

2 $\operatorname{rot}\vec{W} = x\vec{i} - y\vec{j} - \vec{k}$