
Mathematische Method der Physik I

Übungsserie 2

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Abgabe: 1. November 2017
Wintersemester 17/18

Aufgabe 1 *Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld*

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt c einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

- (a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.
- (b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 := 6, \quad y_0 := y(x_0) := 4$$

Aufgabe 2 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable t und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{dy(t)}{dt}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) := \frac{y(t)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

bitte wenden

Aufgabe 3 *Eine Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

- (a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

- (b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \quad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

- (c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.
- (d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als 1 % der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter k und N diesen Zeitpunkt?