Aufgabe 1 *Eine häufig gebrauchte Erkenntnis*

Beweisen Sie die Relation

$$\nabla \frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\delta(\vec{r})$$

indem Sie den Satz von Gauß auf eine geeignet gewählte Kugel anwenden.

LÖSUNG:

4 Punkte

A **Lösung:** Eine häufig gebrauchte Erkenntnis

zz: $\vec{\nabla}\,\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\,\delta(\vec{r})$

1) Führe Kugelkoordinaten für die Divergenz ein:

$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \ldots + \ldots$ hier: nur $F_r \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$ für $r \neq 0$!

2) Wähle Testfunktion $f(r)$

$$\operatorname{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = f(r)\cdot\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) + \frac{\vec{e}_r}{r^2}\operatorname{grad}f(r)$$
$$= f(r)\cdot\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{df}{dr} \qquad (1)$$ 1

Gauß'scher Satz:

$$\iiint \operatorname{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV = \oiint f(r)\frac{\vec{e}_r}{r^2}\,d\vec{f} \qquad (2)$$ 1

3) Integration über Kugel mit Radius R:

$$\iiint f(r)\operatorname{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV$$

$$\overset{(1)}{=} \iiint \operatorname{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV - \iiint \frac{1}{r^2}\frac{df}{dr}\,dV$$

$$\overset{(2)}{=} \oiint_{r=R} f(r)\frac{\vec{e}_r}{r^2}\,d\vec{f} - \int_0^R \frac{1}{r^2}\frac{df}{dr}\cdot r^2 dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R)\frac{1}{R^2}R^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta - 2\pi\cdot 2\cdot\left[f(r)\right]_0^R$$

$$= 4\pi f(R) - 4\pi(f(R) - f(0))$$

$$= 4\pi f(0)$$ 1

4) Vergleiche:

$$\iiint f(r)\cdot 4\pi\,\delta(\vec{r})\,dV = 4\pi f(0)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\,\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\,\delta(\vec{r})$$ 1