Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 5

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 22.11.17

Aufgabe 1

Der integrierende Faktor

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit.

(i) $(x+y)\,x^2y' + xy^2 + 3x^2y = 0$

(ii) $yx^3 - 2x^4 = \left(3y^2x^3 - x^4\right)y'$

(iii) $(x\cos y - xy\sin y)\,y' + 2y\cos y + x = 0$

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der nicht-exakten Differentialgleichungen in impliziter Form, indem Sie die folgende Anleitung verwenden.

(a) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$.

(b) Notieren Sie die neue, mit dem integrierenden Faktor multiplizierte, Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie die Exaktheit der neuen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie die neue Differentialgleichung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(e) Führen Sie die Probe durch, indem Sie die erhaltene Lösung implizit differenzieren und auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückführen.

Aufgabe 2

Konstruktion eines integrierenden Faktors

Wir wenden uns noch einmal der folgenden Differentialgleichung zu.

$$y' - y + 3x^2y^3 = 0 \tag{1}$$

Konstruieren Sie nun einen integrierenden Faktor $\Lambda(x,y)$ auf zwei Wegen.

(a) Sie haben diese Differentialgleichung in der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie mit der Substitution $z = y^{-2}$ in eine lineare Differentialgleichung überführt, die auch nicht exakt ist.

$$z' + 2z - 6x^2 = 0 \tag{2}$$

Bestimmen Sie zuerst für diese Gleichung (2) einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$, der nur von der Variablen x abhängt. Dieser Faktor allein macht die ursprüngliche Differentialgleichung (1) noch nicht exakt. Ermitteln Sie nun für die mit $\lambda(x)$ multiplizierte ursprüngliche Gleichung einen integrierenden Faktor $\mu(y)$, der nur von der Variablen y abhängt.

bitte wenden

(b) Machen Sie von vornherein für den integrierenden Faktor $\Lambda(x, y)$ der ursprünglichen Differentialgleichung (1) den Produktansatz $\Lambda(x, y) = \lambda(x) \cdot \mu(y)$ und bestimmen Sie die Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(y)$ ohne Rückgriff auf die in der Variablen z lineare Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Weisen Sie nach, dass die Ausgangsgleichung (1) mit diesem integrierenden Faktor $\Lambda(x, y)$ exakt ist und lösen Sie diese. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem vorherigen Resultat aus der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie.

Aufgabe 3 *Ideales Gas*

Ein ideales Gas befinde sich in einem Kolben, der zusammengepresst wird. Dabei gelten die folgenden Zustandsgleichungen.

$$pV = Nk_{\mathrm{B}}T, \qquad E = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T$$

Darin steht p für den Druck, V für das Volumen, N für die Teilchenanzahl, T für die Temperatur, E für die innere Energie und k_{B} für die Boltzmann-Konstante. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ändert sich die innere Energie E durch das Verrichten von Arbeit $p\,\mathrm{d}V$ und die Abgabe von Wärme δQ.

$$\mathrm{d}E = \delta Q - p\,\mathrm{d}V$$

(a) Schon die Schreibweise δQ (anstelle von $\mathrm{d}Q$) deutet an, dass es keine Funktion $Q(V, T)$ mit dem totalen Differential δQ gibt. Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(b) Suchen Sie nun einen integrierenden Faktor λ, der nur von T abhängt, sodass $\mathrm{d}S = \lambda\,\delta Q$ ein totales Differential beschreibt.

(c) Führen Sie eine Probe durch, indem Sie nun für $\mathrm{d}S$ die Integrabilitätsbedingung nachprüfen.