5. Levi-Civita-Symbol

a) allgemein: Wir bestimmen die Anzahl der Vertauschungen, jede Transposition ergibt ein Minuszeichen. Dabei ist die „Methode der Zählung" unwesentl., da die Parität erhalten ist.

auch mögl.: Zerlegen der Permutation in disjunkte Zyklen. Ist die Anzahl der Zyklen gerader Länge gerade, so ist die Permut. gerade (genau dann wenn). Zyklen ungerader Länge veränd. das Sign. nicht

b)

i) $\varepsilon_{1324} = -1$; (1 Transposition $3 \leftrightarrow 2$)

ii) $\varepsilon_{7125634} = 1$

7 1 2 5 6 3 4
1 7 2 5 6 3 4
1 2 7 5 6 3 4
1 2 3 5 6 7 4
1 2 3 4 6 7 5
1 2 3 4 5 7 6
1 2 3 4 5 6 7

6 Vertauschungen $\to$ sgn +1

oder disjunkter Zyklus: $1 \to 7 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1$

Es gibt Null Zyklen gerader Länge!

iii) $\varepsilon_{67812345} = -1$ (zyklisch, gerade Länge)
also anders als bei ε_{ijk}
(da ungerade Länge)

explizit $1 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2 \to 7 \to 4 \to 1$

iv) $\varepsilon_{364152} = -1$

3 6 4 1 5 2
1 6 4 3 5 2
1 2 4 3 5 6
1 2 3 4 5 6

3 Vertauschungen

oder $1 \to 3 \to 4 \to 1$ $\quad 2 \to 6 \to 2$ $\quad 5 \to 5$

Anz. gerader Zykle ungerade $\Rightarrow$ sgn -1

b) $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \det \begin{pmatrix} - & \vec{e}_{i_1} & - \\ - & \vec{e}_{i_2} & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \vec{e}_{i_n} & - \end{pmatrix}$

folgt z.B. aus Leibniz-Formel

$\det A = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{n i_n}$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_{i_1} \\ \vdots \\ \vec{e}_{i_n} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{e}_{j_1} \\ \vdots \\ \vec{e}_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_n} \\ \vdots & & \\ \delta_{i_n j_1} & \dots & \delta_{i_n j_n} \end{pmatrix}$$

da $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$
und $\det A^T = \det A$

c) $\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{mnop} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{io} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$

$$= \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{jn} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{kn} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{ln} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix} - \delta_{in} \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

$$+ \delta_{io} \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix} - \delta_{ip} \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jo} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ko} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lo} \end{vmatrix}$$

Fall $i=m$:

$$\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{inop} = \overbrace{\sum_{i=1}\delta_{ii}}^{4}\, \varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop} - \underbrace{\sum_i \delta_{in}\, \varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{iop}}_{\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}}$$

$$+ \underbrace{\sum \delta_{io}\, \varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{inp}}_{-\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}} - \underbrace{\sum \delta_{ip}\, \varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{ino}}_{\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{nop}}$$

$$= \underline{\underline{\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{nop}}}$$

Fall $i=m$ und $j=n$

$$\varepsilon_{ijkl}\cdot\varepsilon_{ijop} = \sum_{j=1}^{4}\varepsilon_{jkl}\cdot\varepsilon_{jop} = 2\left(\underline{\delta_{ko}\,\delta_{lp} - \delta_{kp}\cdot\delta_{lo}}\right)$$ (vgl. NR)

Fall $i=m$ und $j=n$ und $k=o$:

$$2\sum_{k=1}^{4}\left(\delta_{kk}\delta_{lp} - \delta_{kp}\cdot\delta_{lk}\right) = 2(4\,\delta_{lp} - \delta_{lp}) = \underline{\underline{3\,\delta_{lp}}}$$

Alle Indices gleich:

$$2\sum_{l=1}^{4} 3\,\delta_{ll} = \cancel{12}\,24 = \underline{\underline{4!}}$$

Nebenrechnung:

$$\sum_{j=1}^{4} \varepsilon_{jkl} \cdot \varepsilon_{jop} = \begin{vmatrix} \delta_{jj} & \delta_{jo} & \delta_{jp} \\ \delta_{kj} & \delta_{ko} & \delta_{kp} \\ \delta_{lj} & \delta_{lo} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{jj} (\delta_{ko}\delta_{lp} - \delta_{lo}\delta_{kp}) - \delta_{jo} (\delta_{kj}\delta_{lp} - \delta_{lj}\delta_{kp})$$

$$+ \delta_{jp} (\delta_{kj}\delta_{lo} - \delta_{lj}\delta_{ko}) = 4 - 1 - 1$$

$$= 2 (\delta_{ko}\delta_{lp} - \delta_{lo}\delta_{kp})$$

d) • allgem. Überlegung: $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ (ohne Summe) ~~ε~~ ist immer +1 oder 0 (bei gl. Indizes)
Wieviele Einsen sind zu summieren? genauso viele wie es Permutationen von n gibt
$\rightarrow n!$

• mit Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \dots & \delta_{i_1 i_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_n i_1} & \dots & \delta_{i_n i_n} \end{pmatrix}$$

symmetr. Matrix
jede Zeile hat genau eine 1

$$= \sum_{i_1 \dots i_n = 1}^{n} 1 = n!$$

• vollst. Induktion: Anfang $n=1$: $\varepsilon_{i_1} = 1 = 1!$

Es gelte $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = n!$

$n+1$: $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1 i_1} & \dots & \delta_{i_1 n+1} \\ & & \vdots \\ \delta_{i_1 i_{n+1}} & & \delta_{i_{n+1} i_{n+1}} \end{pmatrix}$

$$= \delta_{i_{n+1} i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{n+1}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$ q.e.d.