Mathematische Methoder der Physik II
Übungsserie 6

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Sommersemester 2018

Alle Aufgaben sind im Indexkalkül zu lösen (sonst gibt es keine Punkte!).
Hinweis: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

Aufgabe 1 *Vektoroperatoridentitäten I*

Bestätigen Sie im Indexkalkül folgende Identitäten:

(i) $\operatorname{rot}(\lambda\vec{a}) = (\operatorname{grad}\lambda) \times \vec{a} + \lambda \operatorname{rot}\vec{a}$

(ii) $\operatorname{grad}(UV) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U$

(iii) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot}\vec{b}$

(iv) $\operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b} \operatorname{grad})\vec{a} + (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot}\vec{a}$

(v) $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \operatorname{grad})\vec{a} - (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a} \operatorname{div}\vec{b} - \vec{b} \operatorname{div}\vec{a}$

(vi) $(\vec{a} \operatorname{grad})\vec{a} = -\vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{a}, \quad \text{wenn} \quad \vec{a}^2 = \text{const}$

(vii) $\Delta(UV) = U\Delta V + V\Delta U + 2 \operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} V$

Aufgabe 2 *Vektoroperatoridentitäten II*

Bestätigen Sie im Indexkalkül die Identitäten

(i) $\vec{c} \operatorname{grad}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\vec{c} \operatorname{grad})\vec{b} + \vec{b}(\vec{c} \operatorname{grad})\vec{a}$

(ii) $(\vec{c} \operatorname{grad})(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{c} \operatorname{grad})\vec{b} - \vec{b} \times (\vec{c} \operatorname{grad})\vec{a}$

(iii) $(\nabla\vec{a})\vec{b} = (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} + \vec{b} \operatorname{div}\vec{a}$

(iv) $(\vec{a} \times \vec{b}) \operatorname{rot}\vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \operatorname{grad})\vec{c} - \vec{a}(\vec{b} \operatorname{grad})\vec{c}$

(v) $(\vec{a} \times \operatorname{grad}) \times \vec{b} = (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} + \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} - \vec{a} \operatorname{div}\vec{b}$

(vi) $(\nabla \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \operatorname{div}\vec{b} - (\vec{a} \operatorname{grad})\vec{b} - \vec{a} \times \operatorname{rot}\vec{b} - \vec{b} \times \operatorname{rot}\vec{a}$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Nabla-Operator ∇ in den Beispielen (iii) und (vi) auf *beide* rechts von ihm stehende Vektorfelder wirken soll.

bitte wenden

Aufgabe 3 *Spezielle Vektorfelder*

(a) Es sei Φ ein skalares Feld und $\vec{A}$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die Beziehung

$$\operatorname{div}(\Phi\vec{A}) = \vec{A} \cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi \cdot \operatorname{div}\vec{A}.$$

(b) Spezialisieren Sie das Resultat von (a) für den Fall $\vec{A} = \operatorname{grad}\Phi$.

(c) Das skalare Feld Φ erfülle nun die Bedingungen $\Phi = 0$ auf S und $\Delta\Phi = 0$ in V, worin Δ den LAPLACE-Operator S die Fläche bezeichnet, die das Volumen V umgibt. Zeigen Sie, dass $\phi = 0$ in V gilt.

(d) In diesem Aufgabenteil sei $\vec{A} = \vec{c}$ ein konstanter Vektor. Weisen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad}\Phi \,\mathrm{d}V = \oiint\limits_S \Phi \,\mathrm{d}\vec{f}$$

nach.

Aufgabe 4 *Die Identitäten von JACOBI und LAGRANGE*

Bestätigen Sie jeweils im Indexkalkül

(a) die JACOBI-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}.$$

(b) die LAGRANGE-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$