Lösung: Kolossale Kuppelkatastrophe   6 Punkte

gegeben: Oberfläche ist Halbkugel mit Radius R

Dichte $\rho = D_0$, D_0 const.

Windgeschwindigkeit $\vec{v} = (5kx + py^2)\vec{i} + ky\vec{j}$, k, p const

a) Impulsdichte: $\vec{m} = \rho \cdot \vec{v} = D_0(5kx+py^2)\vec{i} + D_0 ky\vec{j}$

Massenstrom $\tilde{M} = \oiint_S \vec{m}\, d\vec{f}$

geschlossene Oberfläche: Kuppelfläche + Boden darunter

→ Boden muss nicht berücksichtigt werden, da

$\vec{m}$ keine Komponente in $\vec{k}$-Richtung besitzt

1 (das Gas kann nicht durch Boden entweichen).

obere Halbkugel: $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$d\vec{f} = \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \vec{k}\right) dx\,dy$$

1 $$\tilde{M} = D_0 \cdot \iint_G \frac{(5kx+py^2)x + ky^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\,dy$$

Polarkoordinaten
$$\hookrightarrow = D_0 \cdot \int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4kr^2\cos^2\varphi + pr^3\sin^2\varphi\cos\varphi + kr^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= D_0 \int_{r=0}^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}} \left(4kr^2\left[\tfrac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} + pr^3\left[\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{2\pi} + kr^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right) dr$$

$$= D_0 \int_{r=0}^{R} \frac{kr^3}{\sqrt{R^2-r^2}}(4\pi + 2\pi)\, dr = 6\pi D_0 k \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr$$

NR:

+1 ZP (falls Integral von Hand berechnet)

$$\int r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr = -r^2\sqrt{R^2-r^2} + 2\int r\sqrt{R^2-r^2}\, dr$$

$u = r^2 \rightarrow u' = 2r$

$v' = \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$\hookrightarrow v = -\sqrt{R^2-r^2}$

$$= -r^2\sqrt{R^2-r^2} - \tfrac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}$$

$$= -\sqrt{R^2-r^2}\left[r^2 + \tfrac{2}{3}(R^2-r^2)\right]$$

$$= -\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\left[2R^2 + r^2\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{M} = 6\pi D_0 k \left[-\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\left[2R^2+r^2\right]\right]_0^R$$

$= 2\pi D_0 k \cdot R \cdot 2R^2$

$= 4\pi D_0 k R^3$ // 1

b) $\tilde{M} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{m} \, dV$

$\operatorname{div} \vec{m} = D_0 \cdot (5k + k) = 6k D_0 = \text{const.}$ 1

$\Rightarrow \tilde{M} = 6kD_0 \underbrace{\iiint_V dV}$

↳ Volumen Halbkugel: $\frac{2}{3}\pi R^3$

$= 4\pi k D_0 R^3$ // $\Rightarrow$ Übereinstimmung 1

c) D_0 ist Dichte: $[D_0]$ = Masse / Volumen

$\vec{v}$ ist Geschwindigkeit: $[\vec{v}] = [k \cdot x]$ = Länge / Zeit

$\Rightarrow [k] = 1/\text{Zeit}$

$\Rightarrow [\tilde{M}] = [k] \cdot [D_0] \cdot [R]^3$

$= 1/\text{Zeit} \cdot \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \cdot \text{Volumen}$

$= \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$ // ist die richtige Einheit für einen Massenstrom 1