Mathematische Methoder der Physik I
Übungsserie 7

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Abgabe: 6. Dezember 2017
Wintersemester 17/18

Aufgabe 1 *Die Methode der unbestimmten Koeffizienten*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten für die nebenstehenden Anfangsbedingungen. Führen Sie eine Probe durch.

(i) $3y'' - 6y' - 24y = 72x^2 - 12x - 6\ , \qquad y(0) = -1\ , \qquad y'(0) = 8$

(ii) $y'' + y' + y = (2 + x)\cos x\ , \qquad y(0) = -1\ , \qquad y'(0) = 1$

(iii) $y'' + y' + y = 2 + x + \cos x\ , \qquad y(0) = -7\ , \qquad y'(0) = 8$

(iv) $y^{(3)} - 12y' + 16y = 32x - 8\ , \qquad y(0) = -\ , \qquad y'(0) = 1\ , \qquad y''(0) = -28$

(v) $y'' - 9y = e^{3x}\ , \qquad y(0) = 3\ , \qquad y'(0) = \dfrac{55}{6}$

Hinweis:

zu (ii): Verwenden Sie einen Ansatz der Form

$$y_{\mathrm{p}} = (a_0 + a_1 x)\sin x + (b_0 + b_1 x)\cos x$$

zu (iii): Bestimmen Sie nur eine neue Partikulärlösung. Die homogene Lösung kann aus (ii) übernommen werden.

zu (iv): Überlegen Sie sich, wie der Ansatz für Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf solche dritter Ordnung erweitert werden kann.

Aufgabe 2 *Gekoppelte Differentialgleichungen*

Betrachten Sie folgendes System von miteinander gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x + y + t\ , \qquad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 3x - y$$

bitte wenden

Bestimmen Sie die Lösungen, indem Sie die beiden Gleichungen erster Ordnung in eine Gleichung zweiter Ordnung überführen. Finden Sie die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = -\frac{1}{4}$ und $y(0) = 1$ und führen Sie eine Probe durch.

Hinweis: Eliminieren Sie dazu y.

Aufgabe 3 *Die Variation der Konstanten*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 5y' + 4y = \cos 2x$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung soll nicht die Methode des Koeffizientenvergleichs benutzt werden, sondern nach einem allgemeineren Verfahren vorgegangen werden:

(a) Bestimmen Sie zunächst die Fundamentallösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung.

(b) Variieren Sie die beiden Konstanten in

$$y_{\mathrm{h}} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} \ ,$$

indem Sie diese durch Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ausdrücken. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung.

(c) Setzen Sie die dadurch erhaltenen Funktionen in die inhomogene Differentialgleichung ein und vereinfachen Sie die daraus resultierende Gleichung, indem Sie benutzen, dass y_1 und y_2 die homogene Differentialgleichung lösen.

(d) Vereinfachen Sie die Gleichung weiter, indem Sie fordern, dass

$$u'(x)e^{-4x} + v'(x)e^{-x} = 0 \tag{1}$$

gilt. Begründen Sie, warum diese Forderung zulässig ist.

(e) Leiten Sie aus der Gleichung 1 eine weitere Bedingung ab, die Ihnen bei der Vereinfachung hilft.

(f) Sie erhalten nun eine einfachere Form der ursprünglichen Differentialgleichung

$$-4u'(x)e^{-4x} - v'(x)e^{-x} = \cos 2x \tag{2}$$

Bestimmen Sie ausgehend von den Gleichungen (1) und (2) die Funktionen u und v.

(g) Führen Sie eine Probe für die so erhaltene allgemeine Lösung durch.