Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 4: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 \coloneqq 0$ und $v_0 \coloneqq v(t_0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung der Differentialgleichung.

$$v_\infty \coloneqq \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung des Anfangswertproblems nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

LÖSUNG:

(a) Die zur gegebenen Differentialgleichung zugehörigen homogene Differentialgleichung kann durch die folgende Form beschrieben werden.

$$m\dot{v} + \gamma v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Diese Formel lässt sich separieren und durch die Methode der Trennung der Variablen lösen.

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\gamma}{m} \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t} \frac{\gamma}{m}\,\mathrm{d}t \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\frac{\gamma}{m}(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten gehen wir nun davon aus, dass sich die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung durch die folgende Funktion beschreiben lässt.

$$v(t) = \varphi(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

bitte wenden

$$\Longrightarrow \quad \dot{v}(t) = \dot{\varphi}(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \varphi(t) \frac{\gamma}{m} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Das Einsetzen der Ableitung in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt dann das Folgende.

$$m\dot{\varphi}(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = mg \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = g e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t) = \frac{mg}{\gamma} e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{\gamma} + \varphi(t_0)$$

$$\Longrightarrow \quad v(t) = \varphi(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] + \varphi(t_0) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Zu beachten ist hier, dass $v_0 = v(t_0) = \varphi(t_0)$ gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit wegen $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gegeben durch die folgende Funktion.

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(b) Die stationäre Endgeschwindigkeit lässt sich nun einfach mithilfe des Limes berechnen.

$$v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \lim_{t\longrightarrow\infty} e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

Ohne die Kenntnis der Lösung lässt sich nun das Folgende notieren.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} [m\dot{v}(t) + \gamma v(t)] = \lim_{t\longrightarrow\infty} mg \quad \Longrightarrow \quad m \lim_{t\longrightarrow\infty} \dot{v}(t) + \gamma \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = mg$$

Da der Limes existiert und v eine stetig differenzierbare Funktion ist, muss demnach das Folgende gelten.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \dot{v}(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

(c) Die in der Aufgabe gegebene Differentialgleichung ist separierbar und damit durch die Methode der Trennung der Variablen lösbar.

$$\dot{v}(t) = g - \frac{\gamma}{m} v(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m} v(t)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m} v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{m}{\gamma} \ln\left[\frac{g - \frac{\gamma}{m} v(t)}{g - \frac{\gamma}{m} v_0}\right] = t - t_0$$

$$\Longrightarrow \quad v(t) = \frac{m}{\gamma}\left[g - \left(g - \frac{\gamma}{m} v_0\right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] + v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Aufgabe 2

Exakte Differentialgleichungen

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $\left(x+y^3\right)y'+y=x^3$

(ii) $0=\sin\left(xy^2\right)+xy^2\cos\left(xy^2\right)+\left[2x^2y\cos\left(xy^2\right)+2y\right]y'$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $0=2\cos y+4x^2y\sin y+\left(yx^3\cos y+x^3\sin y\right)y'-xy'\sin y$

(ii) $x\arctan\left(\dfrac{x}{y^2}\right)+\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}=\dfrac{2x^3y}{x^2+y^4}y'$

Aufgabe 3

Vollständiges Differential

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad U(x,y,z) \coloneqq x^4 y z^2 + 2y^2 x^3 e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U und begründen Sie, warum es sich bei $\mathrm{d}U$ um ein exaktes Differential handelt.

(b) Überprüfen Sie, ob das totale Differential $\mathrm{d}V$, definiert durch den folgenden Ausdruck, immer noch exakt ist.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$