6 Punkte (2+4)

Lösung: Die Ableitung der Delta-Distribution

a) z.z: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$

Induktionsanfang: $n=0$

1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ ✓

Induktionsvoraussetzung: für festes n gelte

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta^{(n+1)}(x-x_0)\,dx$$

$$\underset{\text{part. Integration}}{=} f(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\delta^{(n)}(x-x_0)\,dx$$

$$\underset{\text{Induktionsvor.}}{=} 0 - (-1)^n f^{(n+1)}(x_0)$$

1 $= (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0)$ $\square$

b) Betrachte $I = \int f(x)\cdot x^m\,\delta^{(n)}(x)\,dx$

$$I \overset{a)}{=} (-1)^n \left[f(x)\cdot x^m\right]^{(n)}\Big|_{x=0}$$

1 $\overset{\text{Leibniz}}{=} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[(x^m)^{(k)}\cdot (f(x))^{(n-k)}\right]\Big|_{x=0}$

Fallunterscheidung:

1 $m>n$: $(x^m)^{(k)}\big|_{x=0} = 0$ (da $k \leq n$) $\Rightarrow I = 0$

1 $m=n$: $I = (-1)^n \binom{n}{n} n!\cdot f(x)\big|_{x=0} = (-1)^n n!\,f(0)$

$$= \int f(x)\,(-1)^n\, n!\,\delta(x)\,dx$$

(da $(x^m)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k<m \\ k! & k=m \end{cases}$)

1 $m<n$: $I = (-1)^n\cdot\binom{n}{m}\cdot m!\, f^{(n-m)}(x)\big|_0$

$$= (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} f^{(n-m)}(0)\cdot(-1)^{n-m}$$

$$= \int \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!} f(x)\cdot\delta^{(n-m)}(x)\,dx$$