Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 1: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen durch ihre Ordnung, Homogenität, Linearität und Separabilität. Lösen Sie zudem die separablen Differentialgleichungen.

(i) $$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y$$

(ii) $$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \sin y - x^2 = 0$$

(iii) $$y' + \tan(x) \cdot y = 0$$

(iv) $$\frac{y''}{y'} + x = 0$$

(v) $$yy' - x = 0$$

(vi) $$\frac{x+1}{y+2} = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$$

(vii) $$\sqrt{y^2 + 3a^2 + ya\left(2 - \frac{4a}{2y}\right)} + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}$$

LÖSUNG:

(i) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 2y' - y = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. 1 P.

(ii) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y' + \sin y = x^2$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

(iii) Durch eine Äquivalenzumformung lässt sich die Differentialgleichungen in die beiden folgenden Formen bringen.

$$y' + \tan(x)y = 0, \qquad y' = -y\tan x$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Durch Anwendung der Methode der Trennung der Variablen, erhält man dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\tan x \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\tan s\,\mathrm{d}s$$

bitte wenden

$$\Longrightarrow \quad \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{\cos x}{\cos x_0}\right| \quad \Longrightarrow \quad |y(x)| = \left|\frac{y_0}{\cos x_0}\right| |\cos x|$$ 1 P.

(iv) Wir formen wieder die gegebene Differentialgleichung um und erhalten die folgenden beiden Ausdrücke.

$$y'' = -xy', \qquad y'' + xy' = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. Durch die Substitution mit $z := y'$ lässt sich zudem noch zeigen, dass sie in eine separable Differentialgleichung umgeformt werden kann. 1 P. $+\frac{1}{2}$ P.

(v) Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Es lässt sich hier keine Homogenität definieren, da sie nicht linear ist. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} s\,\mathrm{d}s = \frac{y^2(x) - y_0^2}{2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad y^2(x) = x^2 - x_0^2 + y_0^2 \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \pm\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2}$$ 1 P.

(vi) Durch die Trennung von Zähler und Nenner lässt sich die Differentialgleichung in eine Form bringen, an der sich ihre Eigenschaften ablesen lassen.

$$y' = (x+1)\frac{1}{y+2}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable, Differentialgleichung 1.Ordnung. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$[y(x)+2]\,y'(x) = x+1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} s+2\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s+1\,\mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left([y(x)+2]^2 - [y_0+2]^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - (x_0+1)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad [y(x)+2]^2 = (x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = -2 \pm \sqrt{(x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2}$$ 1 P.

(vii) Berechnet man den ersten Term auf der linken Seite dieser Gleichung, so ist es möglich die zweite binomische Formel zu verwenden. In diesem Falle erhält man das folgende Resultat.

$$|y+a| + y'\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

Aufgabe 2 *Zwei separable Differentialgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mittels Trennung der Variablen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

(i) $$\frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\tan x \cdot y^{-2}$$

(ii) $$xyy' = y - 1$$

LÖSUNG:

(i) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir x_0 und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$y^2(x)y'(x) = -\tan x \cos x = -\sin x \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\sin s\,\mathrm{d}s$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{y(x_0)}^{y(x)} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left[y^3(x) - y_0^3\right] = \cos x - \cos x_0 \qquad \text{2 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sqrt[3]{3\left(\cos x - \cos x_0\right) + y_0^3} \qquad \text{1 P.}$$

Um die Probe durchzuführen, leiten wir als Erstes die erhaltene Lösung ab und substituieren dann geeignete Terme durch $y(x)$. Zudem erweitern wir mit $\cos x$ um auf die ursprüngliche Differentialgleichung zu kommen.

$$y'(x) = \frac{-\sin x}{[3(\cos x - \cos x_0) + y_0^3]^{\frac{2}{3}}} = \frac{-\sin x}{y^2(x)} = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} y^{-2}(x) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'(x)}{\cos x} = -y^{-2}(x)\tan x \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(ii) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir x_0 und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$\frac{y(x)y'(x)}{y(x)-1} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s)-1}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{1 P.}$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun wieder entsprechend der Lösung für separable Differentialgleichungen die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist durch die Anwendung von Integrationsregeln direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s)-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \qquad \text{1 P.}$$

bitte wenden

Die Lösung des Integrals lässt sich wie folgt durch intelligente Addition einer Null im Zähler des Bruches bestimmen.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s-1+1}{s-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s-1}\,\mathrm{d}s \qquad +1\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = y(x) - y_0 + \ln\left|\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right| \qquad 1\text{ P.}$$

Die endgültige Lösung ist jetzt durch Einsetzen ermittelbar. Zu beachten sind lediglich die Singularitäten an den Stellen $x_0 = 0$ und $y_0 - 1 = 0$. Durch Sie folgt, dass x beziehungsweise $y(x) - 1$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie x_0 beziehungsweise $y_0 - 1$.

$$\left|\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right| = \frac{y(x)-1}{y_0-1}, \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) - y_0 + \ln\left(\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y(x)-1}{y_0-1} e^{y(x)-y_0} = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow \quad [y(x)-1]\, e^{y(x)} = (y_0 - 1)\, e^{y_0}\, \frac{x}{x_0} \qquad 1\text{ P.}$$

Um die Probe durchzuführen, differenzieren wir als Erstes die erhaltene Lösung implizit und vereinfachen die erhaltenen Terme.

$$y'(x)e^{y(x)} + [y(x)-1]\, y'(x)e^{y(x)} = y(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0}e^{y_0} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Um zur ursprünglichen Differentialgleichung zu gelangen, erweitern wir die Gleichung mit x und substituieren die daraus entstehende rechte Seite der Gleichung durch die berechnete Lösung.

$$xy(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0}e^{y_0}x = [y(x)-1]\, e^{y(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad xy(x)y'(x) = y(x) - 1 \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$