Aufgabe 1 *Ionenkristalle*

(a) Skizzieren Sie die Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)[2\delta(z) - 3\delta(z + 3)]$$

und schreiben Sie diese in Zylinderkoordinaten um.

(b) Geben Sie die Flächenladungsdichte $\eta(x, y)$ und die Raumladungsdichte $\rho(x, y, z)$ des in der Abbildung gegebenen zweidimensionalen Kristalls an.

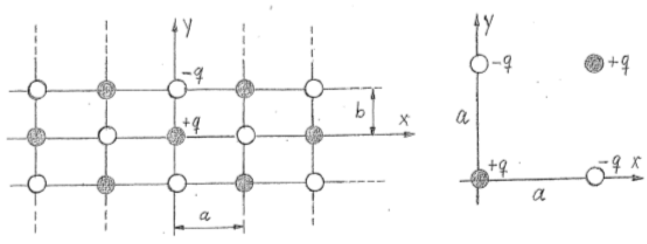


Abbildung 1: Links: zu Aufgabe (b), rechts: zu Aufgabe (c)

(c) Berechnen Sie das elektrische Monopolmoment

$$\iiint\limits_V \rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

und das Dipolmoment

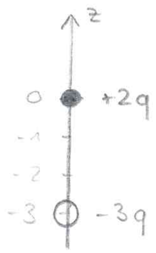
$$\iiint\limits_V \vec{r}\rho(x, y, z)\mathrm{d}V$$

indem Sie über den gesamten Raum integrieren. Dabei sei $\rho(x, y, z)$ die Ladungsverteilung aus Abb. 1.

LÖSUNG:

Lösung: Jonenkristalle 6 Punkte

a) $\rho(x,y,z) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,[2\,\delta(z) - 3\,\delta(z+3)]$



$x = y = 0$

$\dim[\rho] = \frac{As}{m^3} \quad \rightsquigarrow \quad [q] = As$

1

in Zylinderkoordinaten: $r = 0$, $\varphi = 0$ o.B.d.A., $z_1 = 0$, $z_2 = -3$

$$\rho(r,\varphi,z) = \frac{q}{r}\,\delta(r)\,\delta(\varphi)\,[2\,\delta(z) - 3\,\delta(z+3)]$$ 1

$$\Big([\rho] = [q] \cdot \left[\tfrac{1}{r}\right] \cdot [\delta(r)] \cdot [\delta(\varphi)] \cdot [(2\delta(z) - 3\delta(z+3))]$$
$$= As \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m}$$
$$= \frac{As}{m^3} \checkmark \Big)$$

b) Flächenladungsdichte:

$$\sigma(x,y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(-1)^{i+j} \cdot q]\,\delta(x - i\cdot a)\,\delta(y - j\cdot b)$$ 1

$$\rho(x,y,z) = \delta(z) \cdot \sum \sum \ldots$$ 1

c) $\rho(x,y,z) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{i+j}\, q\,\delta(x - ia)\,\delta(y - jb) \cdot \delta(z)$

$$Q = \iiint \rho\, dx\,dy\,dz = \iint \sigma(x,y)\,dx\,dy \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\,dz}_{=1}$$
$$= q \iint \delta(x)\delta(y) - \delta(x-a)\delta(y) - \delta(x)\delta(y-b) + \delta(x-a)\delta(y-b)\,dx\,dy$$
$$= q\,[1 - 1 - 1 + 1] = 0 \,/\!/$$ 1

$$\vec{p} = \iiint \vec{r}\rho\, dx\,dy\,dz = \iiint \begin{pmatrix} x \cdot \sigma(x,y)\,\delta(z) \\ y \cdot \sigma(x,y)\,\delta(z) \\ z \cdot \sigma(x,y)\,\delta(z) \end{pmatrix} dx\,dy\,dz$$
$$= q\Big[\iint x\,[\delta(x)\delta(y) - \delta(x-a)\delta(y) - \delta(x)\delta(y-b) + \delta(x-a)\delta(y-b)\,dx\,dy \cdot \vec{i}$$
$$+ \iint y\,[\delta(x)\delta(y) - \delta(x-a)\delta(y) - \delta(x)\delta(y-b) + \delta(x-a)\delta(y-b)\,dx\,dy \cdot \vec{j}\Big]$$
$$= q\,[(0 - a - 0 + a)\,\vec{i} + (0 - 0 - b + b)\,\vec{j}]$$
$$= \vec{0} \,/\!/$$ 1