Mathematische Methoder der Physik I
Übungsserie 4

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Abgabe: 15. November 2017
Wintersemester 17/18

Aufgabe 1 *Freier Fall mit Reibung*

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 \coloneqq 0$ und $v_0 \coloneqq v(t_0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung des Anfangswertproblems.

$$v_\infty \coloneqq \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 2 *Exakte Differentialgleichung*

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x\cos^2 y\mathrm{d}x + [2y - x^2\sin(2y)]\mathrm{d}y = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch Auffinden einer Potentialfunktion $U(x, y) = \text{const.}$

bitte wenden

(c) Machen Sie eine Probe durch implizites (!) Differenzieren.

Hinweis: $2\cos x \sin x = \sin(2x)$

Aufgabe 3 *Vollständiges Differential*

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ , \qquad U(x,y,z) := x^4 y z^2 + 2y^2 x^3 e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U.

(b) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass das totale Differential $\mathrm{d}V$ von V für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) := \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z)$$

Hinweis: Überprüfen Sie dafür die Integrabilitätsbedingung des gegebenen Differentials.