$$
\begin{aligned}
&\{1\}\,, \qquad \{2 \mid 3\} \\
&\coloneqq, \qquad \eqqcolon, \qquad \overset{!}{=}, \qquad f\colon X \to Y \\
&\mathbb{R}, \qquad \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{C} \\
&(a)\,, \qquad \{b\}\,, \qquad [c]\,, \qquad \langle d\rangle\,, \qquad \lfloor e\rfloor\,, \qquad \lceil f\rceil \\
&|a|\,, \qquad \|b\|\,, \qquad c^{-1} \\
&(a \cdot b)\,, \qquad \langle c, d\rangle\,, \qquad e \times f \\
&\dot{a}, \qquad \ddot{b}, \qquad \dddot{c}, \qquad \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t), \qquad \frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3} \\
&x\big|_a\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,b\bigg|_c\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\,f, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\,f\bigg|_a\,, \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \\
&f \circ g, \qquad \mathrm{d}f \\
&\operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{rot} f, \qquad \operatorname{div} f, \qquad \Delta\, f, \qquad \nabla f, \qquad \nabla \cdot f, \qquad \nabla \times f \\
&a\,\mathrm{m}, \qquad b\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-2}, \qquad c\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
&\mathbf{x}, \qquad \mathbf{i}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Aufgabe 1 *Trennung der Variablen*

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \tan(x + y) - 1$$

in vier Schritten.

(a) Begründen Sie kurz, warum die gegebene Differentialgleichung nicht separabel ist.

(b) Substitutieren Sie $x + y = z(x)$, so dass eine separable Differentialgleichung entsteht.

(c) Lösen Sie die entstandene Differentialgleichung $z' = \tan z$ durch Trennung der Variablen.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösungskurve, welche den Punkt $y(0) = \pi$

Aufgabe 2 *Räuber und Beute*

Betrachten Sie die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen mit den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$.

$$
\begin{aligned}
\dot{H} &= \alpha H - \beta H F \\
\dot{F} &= -\gamma F + \delta H F
\end{aligned}
$$

(a) Interpretieren Sie kurz, was die einzelnen Terme im Kontext eines einfachen Räuber-Beute-Modells bedeuten. Erweitern Sie die Differentialgleichungen der Räuber, so dass ein konstanter Abschluss (etwa durch Jäger) berücksichtigt wird.

(b) Leiten Sie aus dem gegebenem Differentialgleichungssystem (ohne Jäger) eine neue Differentialgleichung für $F(H)$ her. Bringen Sie diese in die bekannte Form einer exakten Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass $\Lambda = \frac{1}{FH}$ ein integrierender Faktor ist und lösen Sie die gefundene Differentialgleichung nach der Ihnen bekannten Methode.

(d) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte, an denen die folgende Gleichung gilt, ohne die Verwendung der impliziten Lösung.

$$\dot{F} + \dot{H} = 0$$

Aufgabe 3 *Spieglein, Spieglein...*

Bestimmen Sie die Form des Spiegels, der parallel einfallende Strahlen in den Punkt O reflektiert.

Hinweis: Wählen Sie den Ursprung im Punkt O. Es gilt die folgende Gleichung.

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}$$

Benutzen Sie die Substitution $y^2 = r^2 - x^2$.

Aufgabe 4 *Quadratisches Reibungsgesetz*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den Koeffizienten $m, \gamma, k \in \mathbb{R}^+$.

$$m\ddot{y} \pm \gamma\dot{y}^2 + ky = 0$$

Das Vorzeichen vor dem quadratischen Reibungsterm wirke immer so, dass die Reibung die Bewegung behindert. Diese nichtlineare Differentialgleichung kann gelöst werden, wenn man sich zunutze macht, dass die unabhängige Variable t nicht vorkommt. Substituieren Sie $p = \dot{y}$, um auch die Ableitungen nach t zu eliminieren. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bernoulli-Gleichung und substituieren Sie angemessen. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen

$$\dot{y}(0) = 0$$

und $y > 0$ für kleine t (so kleine Zeiten, dass sich das Vorzeichen im Reibungsterm nicht umkehrt). Es soll hier genügen $\dot{y}$ zu bestimmen.

Aufgabe 5 *Lösungsmethode der inhomogenen Differentialgleichung 2.Ordnung*

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, indem Sie diese auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \cos 3x$$

Aufgabe 6 *Magnetfeld eines Leiters*

Gegeben sei das folgende Vektorfeld.

$$F \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := \frac{-y\mathbf{i}}{x^2+y^2} + \frac{x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Integrationsbedingungen erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral für die beiden folgenden Integrationswege und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

(i) $r \colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$

(ii) $r \colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \mathbf{i}\cos\varphi - \mathbf{j}\sin\varphi$

(c) Vergleichen Sie die Integrationswege und finden Sie heraus, ob das Vektorfeld konservativ ist.

Aufgabe 7 *Aufstellen von Differentialgleichungen*

(a) Eine Bakterienpopulation zeige exponentielles Wachstum, das heißt die Anzahl der Bakterien erhöht sich proportional zur Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate r. Zusätzlich werden der Bakterienkultur kontinuierlich k Bakterien pro Zeiteinheit zugefügt. Allerdings seien die Bakterien empfindlich gegen Lichteinfall. Sie sterben deshalb proportional zu Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate $1+\sin t$, welche den Rhythmus der Tageszeiten simuliert. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Anzahl N der Bakterien auf.

(b) Ein Zylinder von Grundkreisradius r und Masse m schwimmt mit vertikaler Achsenlage im Wasser. Seine Eintauchtiefe sei l. Gesucht ist die Periode der Schwingung, die sich ergibt, wenn man den Zylinder ein Wenig in das Wasser eintaucht und danach loslässt. Der Bewegungswiderstand sei angenähert gleich Null anzunehmen. Wählen Sie die y-Achse vertikal nach unten mit dem Nullpunkt auf der Wasseroberfläche.

Aufgabe 8 *Konservative Vektorfelder*

(a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ konservativ sind.

(i) $F(x, y, z) := q\,(v \times B)$

(ii) $F(x, y, z) := 2y^2z^3\mathbf{i} + 4xyz^3\mathbf{j} + 6xy^2z^2\mathbf{k}$

(iii) $F(x, y, z) := 2(y + x)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$

(iv) $F(x, y, z) := x^2 \cos y\mathbf{i} + 2x \sin y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

(b) Berechnen Sie das Wegintegral für das folgende Vektorfeld F und den Weg $C = C_1 + C_2$.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) = 2(y + x)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$$

C_1 verläuft vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$ und erfüllt $y = x^2$. C_2 verläuft vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(0, 0)$ und erfüllt $y = x^4$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Erwartungen und begründen Sie es.

Aufgabe 9 *Parametrisierung gegeben*

Skizzieren Sie die Kurven xy-Ebene, die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben werden.

(i) $r\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(s) := \frac{1}{2}\left[(1 - s)\mathbf{i} + (-7 + 3s)\mathbf{j}\right]$

(ii) $r\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

(iii) $r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\right)\mathbf{j}$

(iv) $r\colon [1, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\mathbf{i} + \frac{7t^2 - 2 - 20\pi^2}{4\pi^2 - 1}\mathbf{j}$

Aufgabe 10 *Kurve gegeben*

Geben Sie für jede der nachfolgend genannten Kurven eine Parametrisierung an.

(a) Die Verbindungsstrecke vom Punkt $P_1 := (1, 1)$ zum Punkt $P_2 := (2, 5)$.

(b) Die obere Halbellipse mit Halbachsen a und b.

(c) Die Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(d) Die Schnittkurve der Ebene $x + y = 1$ mit dem Kegel $z^2 = x^2 + y^2$.

Aufgabe 11 *Wegintegrale berechnen*

Berechnen Sie das Kurvenintegral für das Vektorfeld F und die im Folgenden gegebenen Kurven.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) := (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 4xy\mathbf{j}$$

(i) $2y = x^2$

(ii) $y = x$

(iii) $test$

Aufgabe 12 *Wie ein Fisch im Wasser*

Die Temperaturverteilung in einem See sei gegeben durch die folgende Funktion.

$$T\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z < 0\right\} \to \mathbb{R}, \qquad T(x,y,z) := -\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 2z^2\right)$$

(a) Bestimmen Sie die Isothermen und fertigen Sie eine Skizze dieser in der yz-Ebene an.

(b) Ein Fisch im Wasser befinde sich am Punkt $(1,2,-1)$. Bestimmen Sie die Richtung, in die sich die Temperatur am stärksten verändert und entscheiden Sie, ob es wärmer oder kälter wird.

(c) Der Fisch bewege sich auf dem folgenden Weg.

$$r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + (\cos t - 2)\mathbf{k}$$

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, an denen Fisch die größte und die kleinste Temperatur empfindet und berechnen sie die zugehörigen Position des Fisches. Skizzieren Sie die Temperatur $T \circ r$, die der Fisch entlang seines Weges in Abhängigkeit der Zeit erfährt.

Aufgabe 13 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable t und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y\,(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) := \frac{y(t)}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

LÖSUNG:

Durch die Verwendung der Substitution lassen sich die folgenden Aussagen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ treffen.

$$y(t) = tz(t) \implies y'(t) = z(t) + tz'(t) \qquad \text{1 P.}$$

Das Umformen der ursprünglichen Differentialgleichung und Einsetzen der Substitution führt dann zur gewünschten separablen Differentialgleichung, die sich durch die Methode der Trennung der Variablen lösen lässt.

$$ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] \implies t\left[z(t) + tz'(t)\right] = tz(t)\left[1 + \ln z(t)\right]$$

$$\implies tz'(t) = z(t)\ln z(t) \implies \frac{z'(t)}{z(t)\ln z(t)} = \frac{1}{t} \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{z(s)\ln z(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{s\ln s}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \ln\left(\frac{\ln z(t)}{\ln z_0}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \implies z(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) = z_0^{\frac{t}{t_0}} \qquad \text{2 P.}$$

$$\implies y(t) = tz(t) = t\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Probe leitet man nun die Lösung ab und substituiert den erhaltenen Term mithilfe der berechneten Lösung.

$$y'(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) + \frac{t\ln z_0}{t_0}\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t)}{t}\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right]$$

$$\implies ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] = y(t)\left[1 + \ln y(t) - \ln t\right] \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Aufgabe 14 — *Eine Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \qquad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

(c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als $1\,\%$ der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter k und N diesen Zeitpunkt?

LÖSUNG:

(a) Wir definieren als Erstes den Anteil der gesunden Menschen $\alpha(t) \in [0,1]$ und den Anteil der infizierten Menschen $\beta(t) \in [0,1]$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\alpha(t) := \frac{M(t)}{N}, \qquad \beta(t) := \frac{Z(t)}{N}$$

Wir wählen nun eine festen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^+$. Nähern wir für kleine Zeitspannen $\tau \in \mathbb{R}^+$ die Anzahl der Personen, die ein Zombie trifft, durch τk an, so teilen sich Infizierte und Gesunde entsprechend ihrer Anteile auf diese Anzahl auf.

$$\tau k \approx \tau k \alpha(t) + \tau k \beta(t)$$

Die Anzahl $S(t)$ der gesunden Menschen, die ein Zombie in der Zeitspanne τ trifft und infiziert, kann demnach wie folgt für kleine τ approximiert werden.

$$S(t) \approx \tau k \alpha(t) = \frac{\tau k}{N} M(t)$$

Diese Approximation gilt für jeden Zombie. Dementsprechend lässt sich nun die Anzahl der Zombies $Z(t+\tau)$ nach der Zeitspanne τ beschreiben.

$$Z(t+\tau) \approx Z(t) + S(t)Z(t) = Z(t) + \frac{\tau k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t) \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} \approx \frac{k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

Um die Fehler der Näherung mithilfe einer Differentialgleichung zu korrigieren, bildet man den Grenzwert der erhaltenen Differenzengleichung für $\tau \longrightarrow 0$.

$$Z'(t) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} = \frac{k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

$$\implies Z' = \frac{k}{N}(N - Z)Z \qquad \text{1 P.}$$

(b) Bei der oben beschriebenen Gleichung handelt es sich offensichtlich um eine separable Differentialgleichung. Die Methode der Trennung der Variablen ergibt dann das Folgende.

$$\frac{Z'(t)}{[N-Z(t)]\,Z(t)} = \frac{k}{N} \implies \int_{t_0}^{t} \frac{Z'(s)}{[N-Z(s)]\,Z(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{k}{N}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s}\,\mathrm{d}s = \frac{k}{N}(t-t_0) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Lösung des Integrals zeigt sich eine Partialbruchzerlegung als sinnvoll.

$$\frac{1}{(N-s)s} = \frac{N}{N}\frac{1}{(N-s)s} = \frac{1}{N}\frac{N-s+s}{(N-s)s} = \frac{1}{Ns} - \frac{1}{N(s-N)}$$

$$\implies \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s}\,\mathrm{d}s = \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{Ns}\,\mathrm{d}s - \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{N(s-N)}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{N}\ln\left[\frac{Z(t)}{Z_0}\right] - \frac{1}{N}\ln\left[\frac{Z(t)-N}{Z_0-N}\right] = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{Z(t)\,[Z_0-N]}{Z_0\,[Z(t)-N]}\right) \qquad \text{+1 P.}$$

Die Lösung des Integrals wird nun eingesetzt und die entstehende Gleichung wird explizit nach $Z(t)$ umgestellt.

$$\frac{Z(t)}{Z(t)-N} = \frac{Z_0 e^{k(t-t_0)}}{Z_0-N} = -Ae^{k(t-t_0)}, \qquad A \coloneqq \frac{Z_0}{N-Z_0}$$

$$\implies Z(t) = \frac{NAe^{k(t-t_0)}}{1+Ae^{k(t-t_0)}} = N\left(1 - \frac{1}{1+Ae^{k(t-t_0)}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Nun setzen wir die Anfangswerte ein und unterstreichen unser Ergebnis doppelt.

$$A = \frac{1}{20} \implies Z(t) = N\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{20}e^{kt}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

(c) Die nachfolgende Skizze zeigt die Werte $M(t)$ und $Z(t)$ für verschiedene Zeiten $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) Es sei $\alpha^* \in \left(0, 1-\frac{Z_0}{N}\right)$ eine feste Grenze für den Anteil der Menschen. Wir suchen nun den frühesten Zeitpunkt $t^* \in \mathbb{R}^+$, sodass $\alpha(t^*) \leq \alpha^*$ gilt. Durch Äquivalenzumformungen zeigt man, dass t^* existiert und eindeutig ist.

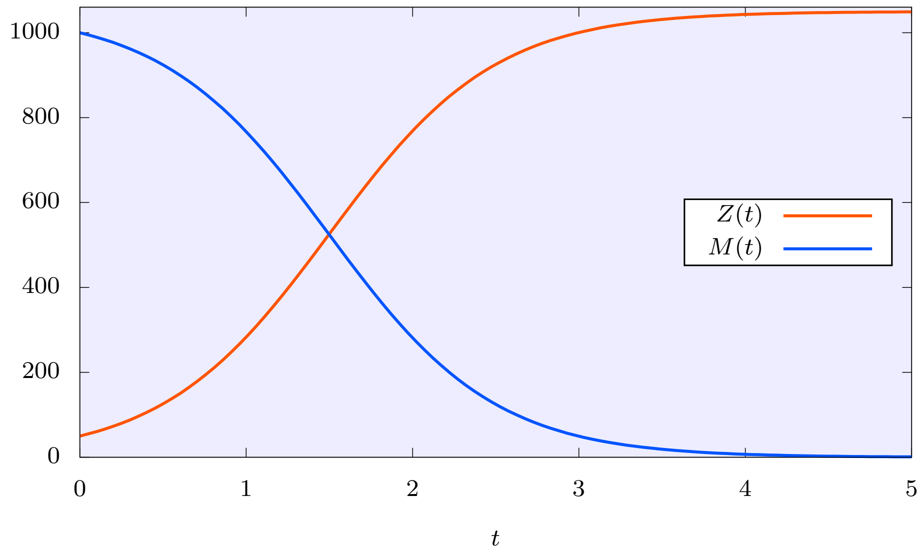
$$\alpha^* = \alpha(t^*) = 1 - \beta(t^*) = 1 - \frac{Z(t^*)}{N} = \frac{1}{1+Ae^{k(t^*-t_0)}}$$

$$\implies t^* = t_0 + \frac{1}{k}\ln\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha^*}-1\right)\right] = t_0 + \frac{1}{k}\ln\left[\frac{N-Z_0}{Z_0}\left(\frac{1}{\alpha^*}-1\right)\right]$$

Setzt man nun die gewünschten Werte der Parameter ein, so erhält man das folgende Ergebnis.

$$t_0 = 0, \qquad k = 2, \qquad A = 0.05, \qquad \alpha^* = 1\,\% \implies t^* = \frac{\ln 1980}{2} \approx 3.8 \qquad \text{+1 P.}$$

Zu beachten ist, dass t^* sowohl von k als auch von N abhängig ist. Steigt k, so verringert sich t^*. Steigt N, so erhöht sich auch t^*. +1 P.



2 P.

Abbildung 1: Die Abbildung zeigt die Anzahl der Zombies $Z(t)$ und der gesunden Menschen $M(t)$ für verschiedene Zeiten t.

Aufgabe 15 *Homogene Differentialgleichungen*

Eine Funktion von zwei Variablen heißt homogen vom Grad k, wenn für einen beliebigen Parameter λ das Folgende gilt.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

Dementsprechend nennt man eine Differentialgleichungen der folgenden Form auch homogen, wenn f und g homogene Funktionen vom gleichen Grad sind.

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

(a) Lösen Sie die folgende homogene Differentialgleichung.

$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$

Anleitung: Führen Sie eine neue Variable $z(x)$ gemäß $y(x) =: x \cdot z(x)$ ein und behandeln Sie die für $z(x)$ entstehende Differentialgleichung mit der Methode der Trennung der Variablen.

(b) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, die nicht homogen ist.

$$y' = \frac{y + x - 2}{y - x + 4}$$

Schuld daran sind die beiden additiven Konstanten in Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite. Gehen Sie in zwei Schritten nach folgender Anleitung vor.

- Führen Sie die neue Variablen $v := y - y_0$ und $u := x - x_0$ ein und bestimmen Sie x_0 und y_0, sodass die neue Differentialgleichung in den Variablen u und v homogen ist (Gleichungssystem mit zwei Unbekannten).
- Verfahren Sie mit der Substitution $v(u) =: u \cdot z(u)$ weiter, wie in Teilaufgabe (a).

(c) Machen Sie in beiden Fällen die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung $y(x)$ in die ursprüngliche Differentialgleichung.

Aufgabe 16 *Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen*

Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen durch ihre Ordnung, Homogenität, Linearität und Separabilität. Lösen Sie zudem die separablen Differentialgleichungen.

(i) $$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y$$

(ii) $$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \sin y - x^2 = 0$$

(iii) $$y' + \tan(x) \cdot y = 0$$

(iv) $$\frac{y''}{y'} + x = 0$$

(v) $$yy' - x = 0$$

(vi) $$\frac{x+1}{y+2} = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$$

(vii) $$\sqrt{y^2 + 3a^2 + ya\left(2 - \frac{4a}{2y}\right)} + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}$$

LÖSUNG:

(i) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 2y' - y = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. 1 P.

(ii) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y' + \sin y = x^2$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

(iii) Durch eine Äquivalenzumformung lässt sich die Differentialgleichungen in die beiden folgenden Formen bringen.

$$y' + \tan(x)y = 0, \qquad y' = -y\tan x$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Durch Anwendung der Methode der Trennung der Variablen, erhält man dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\tan x \implies \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\tan s\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{\cos x}{\cos x_0}\right| \implies |y(x)| = \left|\frac{y_0}{\cos x_0}\right| |\cos x| \qquad \text{1 P.}$$

(iv) Wir formen wieder die gegebene Differentialgleichung um und erhalten die folgenden beiden Ausdrücke.

$$y'' = -xy', \qquad y'' + xy' = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. Durch die Substitution mit $z := y'$ lässt sich zudem noch zeigen, dass sie in eine separable Differentialgleichung umgeformt werden kann. 1 P. $+\frac{1}{2}$ P.

(v) Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Es lässt sich hier keine Homogenität definieren, da sie nicht linear ist. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s\,\mathrm{d}s \implies \int_{y_0}^{y(x)} s\,\mathrm{d}s = \frac{y^2(x) - y_0^2}{2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

$$\implies y^2(x) = x^2 - x_0^2 + y_0^2 \implies y(x) = \pm\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \qquad \text{1 P.}$$

(vi) Durch die Trennung von Zähler und Nenner lässt sich die Differentialgleichung in eine Form bringen, an der sich ihre Eigenschaften ablesen lassen.

$$y' = (x+1)\frac{1}{y+2}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable, Differentialgleichung 1.Ordnung. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$[y(x)+2]\,y'(x) = x+1 \implies \int_{y_0}^{y(x)} s+2\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s+1\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \frac{1}{2}\left([y(x)+2]^2 - [y_0+2]^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - (x_0+1)^2\right)$$

$$\implies [y(x)+2]^2 = (x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2$$

$$\implies y(x) = -2 \pm \sqrt{(x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2} \qquad \text{1 P.}$$

(vii) Berechnet man den ersten Term auf der linken Seite dieser Gleichung, so ist es möglich die zweite binomische Formel zu verwenden. In diesem Falle erhält man das folgende Resultat.

$$|y+a| + y'\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{x+a}$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

Aufgabe 17

Die Methode der Variablentrennung

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen und bestimmen Sie gegebenenfalls die Integrationskonstante, sodass die nebenstehenden Anfangsbedingungen erfüllt sind.

(i) $$y' = \frac{xe^{-y}}{x^2+1}, \qquad y(1) = 0$$

(ii) $$xyy' = \frac{x^2+2}{y-1}$$

(iii) $$y' = \frac{x+y}{x+y+2}, \qquad y(1) = -1$$

Machen Sie in allen Fällen die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung. Dies ist auch dann verlangt, wenn die Lösung nur in impliziter Form angebbar ist.

Hinweis: Führen Sie in Teilaufgabe (iii) die neue Variable $z(x) := x + y(x)$ ein.

LÖSUNG:

(i) Separieren Sie x und $y(x)$ auf jeweils eine Seite der Differentialgleichung und integrieren Sie die erhaltene Gleichung.

$$y'(x) = \frac{xe^{-y(x)}}{x^2+1} \implies e^{y(x)}y'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\implies \int e^{y(x)}y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$ 1 P.

Lösen Sie das Integral mithilfe einer logarithmischen Integration oder durch Substitution, indem Sie x^2 durch eine geeignete Variable ersetzen.

$$\int e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\implies e^{y(x)} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C$$ 1 P.

Notieren Sie die explizite Lösung durch die Anwendung von $\ln$.

$$y(x) = \ln\left[\ln\left(A\sqrt{x^2+1}\right)\right], \qquad A := e^C \qquad \text{1 P.}$$

Fordern Sie nun $y(1) \overset{!}{=} 0$, bestimmen Sie die Konstante A und setzen Sie die erhaltene Lösung in die explizite allgemeine Form ein.

$$y(1) \overset{!}{=} 0 \implies 1 = \ln\left(A\sqrt{2}\right) \implies A = \frac{\sqrt{2}}{2}e \qquad \text{1 P.}$$

$$y(x) = \ln\left[\ln\left(\frac{e}{2}\sqrt{2(x^2+1)}\right)\right] = \ln\left[1 + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+1)}\right)\right] \qquad \text{1 P.}$$

Sei $y =: \ln u$ mit $u(x) = \ln\left(A\sqrt{x^2+1}\right)$. Dann erhält man durch die Anwendung der Kettenregel die folgende Aussage.

$$y'(x) = u'(x)\ln' u(x) = \frac{1}{A\sqrt{x^2+1}} \cdot A \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{u(x)} = e^{-y(x)}\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{1 P.}$$

(ii) Separieren Sie x und $y(x)$ wieder auf jeweils eine Seite der Differentialgleichung

$$xy(x)y'(x) = \frac{x^2+2}{y(x)-1} \implies y(x)\left[y(x)-1\right]y'(x) = \frac{x^2+2}{x} \qquad \text{1 P.}$$

Integrieren Sie die rechte Seite der erhaltenen Gleichung durch Polynomintegration und der Umkehrregel.

$$\int \left[y^2(x) - y(x)\right] y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\implies \int y^2 - y\,\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| \qquad \text{1 P.}$$

Lösen Sie nun auch das Integral der rechten Seite durch Polynomintegration und notieren Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C$$

$$\implies 2y^3 - 3y^2 = 3x^2 + 12\ln|x| + D \qquad \text{1 P.}$$

Durch implizite Ableitung der allgemeinen Form erhalten Sie Folgendes.

$$6y^2(x)y'(x) - 6y(x)y'(x) = 6x + \frac{12}{x} \implies y(x)\left[y(x)-1\right]y'(x) = x + \frac{2}{x}$$

$$\implies xy(x)\left[y(x)-1\right]y'(x) = x^2 + 2 \qquad \text{1 P.}$$

(iii) Definieren Sie $z(x) \coloneqq x + y(x)$ und bestimmen Sie die Ableitung von z.

$$z'(x) = 1 + y'(x) \implies y'(x) = z'(x) - 1$$

Substituieren Sie nun $x + y(x)$ in der Differentialgleichung durch $z(x)$.

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x + y(x) + 2} \implies z'(x) - 1 = \frac{z}{z+2} \qquad \text{1 P.}$$

Führen Sie für die erhaltene Differentialgleichung das Verfahren der Trennung der Variablen durch. Separieren Sie $z(x)$ und x auf jeweils eine Seite und integrieren Sie die erhaltene Gleichung.

$$z'(x) = \frac{z(x)}{z(x)+2} + 1 = \frac{2z(x)+2}{z+2} = 2\,\frac{z(x)+1}{z(x)+2} \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \int \frac{z(x)+2}{z(x)+1} z'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{z+1}\right) \mathrm{d}z = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$\implies z(x) + \ln|z(x)+1| = 2x + C \qquad \text{1 P.}$$

Führen Sie die Resubstitution durch und geben Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form an.

$$x + y(x) + \ln|x + y(x) + 1| = 2x + C$$

$$\implies x + y(x) + 1 = \exp(x - y(x) + C) = Ae^{x-y(x)}, \qquad A \coloneqq e^C$$

$$\implies x + y(x) = Ae^{x-y(x)} - 1 \qquad \text{1 P.}$$

Fordern Sie die gegebenen Anfangsbedingungen und bestimmen Sie die Konstante A.

$$y(1) \overset{!}{=} -1 \implies 0 = Ae^2 - 1 \implies A = e^{-2}$$

$$\implies x + y(x) = \frac{e^{x-y(x)}}{e^2} - 1 = e^{x-y(x)-2} - 1 \qquad \text{1 P.}$$

Auch hier ist wieder eine implizite Ableitung notwendig.

$$1 + y'(x) = Ae^{x-y(x)}\left[1 - y'(x)\right]$$

Durch Verwendung der allgemeinen Lösung erhalten Sie für die Konstante A den folgenden Ausdruck.

$$A = e^{y(x)-x}\,[x + y(x) + 1]$$

Das Einsetzen dieser Gleichung resultiert dann in der gewünschten Differentialgleichung.

$$1 + y'(x) = e^{y(x)-x}\,[x + y(x) + 1]\,e^{x-y(x)}\left[1 - y'(x)\right]$$

$$\implies 1 + y'(x) = x + y(x) + 1 - [x + y(x) + 1]\,y'(x)$$

$$\implies y'(x)\,[x + y(x) + 2] = x + y(x) \qquad \text{1 P.}$$

Aufgabe 18 *Orthogonaltrajektorien*

(a) Skizzieren Sie die folgende Kurvenschar, wobei c eine eine reelle Konstante darstellt.

$$xy = c$$

Bestimmen Sie dazu die Schar der Orthogonaltrajektorien ud tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(b) Skizzieren Sie die folgende Kurvenschar und bestimmen Sie die Differentialgleichung, die dieser Kurvenschar genügt. Auch hier stellt c eine reelle Konstante dar.

$$y^2 = 4c(x + c)$$

Zeigen Sie dann, dass diese Differentialgleichung die gleiche bleibt, wenn y' durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt wird. Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus dieser Eigenschaft?

Aufgabe 19 *Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld*

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt c einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.

(b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 \coloneqq 6, \qquad y_0 \coloneqq y(x_0) \coloneqq 4$$

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen an, dass es sich bei y um eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ handelt und dass der Graph von y die gegebene Gleichung für alle $x \in M$ erfüllt.

$$x^2 - 2y^2(x) = c^2 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\,\tilde{x}^2 - 2y^2(\tilde{x})\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\,c^2\bigg|_x \implies 2x - 4y(x)y'(x) = 0$$

Man erhält damit eine Differentialgleichung der folgenden Formen.

$$2yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{2y}$$ 1 P.

(b) Die Orthogonaltrajektorien müssen demzufolge der folgenden Differentialgleichung genügen. Das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung wird in der nachfolgenden Skizze abgebildet.

$$y' = -\frac{2y}{x} \qquad 1\text{ P.}$$

(c) Durch Umstellung erhält man eine separierte Differentialgleichung, die sich für die Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y_0 := y(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ direkt lösen lässt.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \implies \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\,\mathrm{d}s = -2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

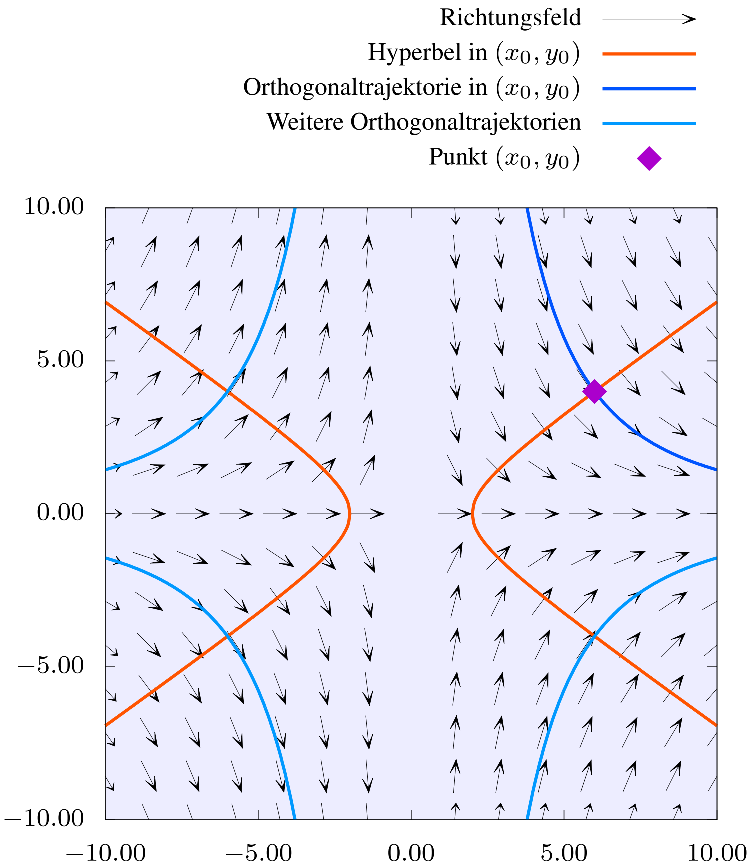
$$\implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -2\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\implies y(x) = \frac{y_0 x_0^2}{x^2} \qquad 1\text{ P.}$$

Setzt man nun $x_0 = 6$ und $y_0 = 4$, so erhält man die folgenden Aussagen.

$$c^2 = x_0^2 - 2y_0^2 = 4 \implies c = \pm 2, \qquad y_0 x_0^2 = 144 \qquad 1\text{ P.}$$

Auch hier sind die entsprechende Hyperbel und die, der Differentialgleichung entsprechenden, Orthogonaltrajektorie in der nachfolgenden Skizze eingezeichnet.



3 P.

Abbildung 2: Das Diagramm zeigt das Richtungsfeld der Orthogonaltrajektorien und das Beispiel einer zugehörigen Hyperbel.

Aufgabe 20 *Zwei separable Differentialgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mittels Trennung der Variablen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

(i) $$\frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\tan x \cdot y^{-2}$$

(ii) $$xyy' = y - 1$$

LÖSUNG:

(i) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir x_0 und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$y^2(x)y'(x) = -\tan x \cos x = -\sin x$$ 1 P.

$$\implies \int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\sin s\,\mathrm{d}s$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{y(x_0)}^{y(x)} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left[y^3(x) - y_0^3\right] = \cos x - \cos x_0 \qquad 2\text{ P.}$$

$$\implies y(x) = \sqrt[3]{3\left(\cos x - \cos x_0\right) + y_0^3} \qquad 1\text{ P.}$$

Um die Probe durchzuführen, leiten wir als Erstes die erhaltene Lösung ab und substituieren dann geeignete Terme durch $y(x)$. Zudem erweitern wir mit $\cos x$ um auf die ursprüngliche Differentialgleichung zu kommen.

$$y'(x) = \frac{-\sin x}{\left[3(\cos x - \cos x_0) + y_0^3\right]^{\frac{2}{3}}} = \frac{-\sin x}{y^2(x)} = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} y^{-2}(x) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies \frac{y'(x)}{\cos x} = -y^{-2}(x)\tan x \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(ii) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir x_0 und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$\frac{y(x)y'(x)}{y(x) - 1} = \frac{1}{x} \implies \int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s) - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \qquad 1\text{ P.}$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun wieder entsprechend der Lösung für separable Differentialgleichungen die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist durch die Anwendung von Integrationsregeln direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s) - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s - 1}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \qquad 1\text{ P.}$$

Die Lösung des Integrals lässt sich wie folgt durch intelligente Addition einer Null im Zähler des Bruches bestimmen.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s - 1 + 1}{s - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s - 1}\,\mathrm{d}s \qquad +1\text{ P.}$$

$$\implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s - 1}\,\mathrm{d}s = y(x) - y_0 + \ln\left|\frac{y(x) - 1}{y_0 - 1}\right| \qquad 1\text{ P.}$$

Die endgültige Lösung ist jetzt durch Einsetzen ermittelbar. Zu beachten sind lediglich die Singularitäten an den Stellen $x_0 = 0$ und $y_0 - 1 = 0$. Durch Sie folgt, dass x beziehungsweise $y(x) - 1$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie x_0 beziehungsweise $y_0 - 1$.

$$\left|\frac{y(x) - 1}{y_0 - 1}\right| = \frac{y(x) - 1}{y_0 - 1}, \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow\ y(x) - y_0 + \ln\left(\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \frac{y(x)-1}{y_0-1} e^{y(x)-y_0} = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow\ [y(x)-1]\, e^{y(x)} = (y_0-1)\, e^{y_0} \frac{x}{x_0}$$ 1 P.

Um die Probe durchzuführen, differenzieren wir als Erstes die erhaltene Lösung implizit und vereinfachen die erhaltenen Terme.

$$y'(x)e^{y(x)} + [y(x)-1]\, y'(x)e^{y(x)} = y(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0} e^{y_0}$$ $\frac{1}{2}$ P.

Um zur ursprünglichen Differentialgleichung zu gelangen, erweitern wir die Gleichung mit x und substituieren die daraus entstehende rechte Seite der Gleichung durch die berechnete Lösung.

$$xy(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0} e^{y_0} x = [y(x)-1]\, e^{y(x)}$$

$$\Longrightarrow\ xy(x)y'(x) = y(x) - 1$$ $\frac{1}{2}$ P.

Aufgabe 21 *Die charakteristische Gleichung*

Konstruieren Sie für jede der beiden folgenden Differentialgleichungen deren allgemeine Lösung und bestimmen Sie die spezielle Lösung, die den nebenstehenden Anfangsbedingungen genügt. Führen Sie anschließend eine Probe durch.

(i) $3y'' - 4y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1$

(ii) $y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 4$

Aufgabe 22 *Gekoppelte Differentialgleichungen*

Betrachten Sie folgendes System von miteinander gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x + y + t, \qquad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 3x - y$$

Bestimmen Sie die Lösungen, indem Sie die beiden Gleichungen erster Ordnung in eine Gleichung zweiter Ordnung überführen. Finden Sie die spezielle Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = -\frac{1}{4}$ und $y(0) = 1$ und führen Sie eine Probe durch.

Hinweis: Eliminieren Sie dazu y.

Aufgabe 23 *Die homogene Euler-Gleichung*

Die Eulersche Differentialgleichung ist durch die folgende Form gegeben. Dabei stellen die Koeffizienten a, b und c reelle Konstanten dar.

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

(a) Überführen Sie diese Differentialgleichung mithilfe der Substitution $x = e^{t(x)}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(b) Ein wichtiges Beispiel für die Potentialtheorie stellt die folgende Differentialgleichung dar. Dabei beschreibt n eine nichtnegative reelle Konstante, r eine nichtnegative reelle Variable und R eine Funktion, welche von r abhängt.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$$

(1) Behandeln Sie die genannte Differentialgleichung nach der zuvor beschriebenen Methode.

(2) Konstruieren Sie die allgemeine Lösung R der entstehenden Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

(3) Geben Sie diejenige spezielle Lösung an, welche die folgende Bedingung erfüllt.

$$R \xrightarrow{r \longrightarrow \infty} 0$$

Aufgabe 24 *Die Methode der unbestimmten Koeffizienten*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten für die nebenstehenden Anfangsbedingungen. Führen Sie eine Probe durch.

(i) $3y'' - 6y' - 24y = 72x^2 - 12x - 6, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 8$

(ii) $y'' + y' + y = (2 + x)\cos x, \qquad y(0) = -1, \qquad y'(0) = 1$

(iii) $y'' + y' + y = 2 + x + \cos x, \qquad y(0) = -7, \qquad y'(0) = 8$

(iv) $y^{(3)} - 12y' + 16y = 32x - 8, \qquad y(0) = -, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = -28$

(v) $y'' - 9y = e^{3x}, \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = \frac{55}{6}$

Hinweis:

zu (ii): Verwenden Sie einen Ansatz der Form

$$y_\mathrm{p} = (a_0 + a_1x)\sin x + (b_0 + b_1x)\cos x$$

zu (iii): Bestimmen Sie nur eine neue Partikulärlösung. Die homogene Lösung kann aus (ii) übernommen werden.

zu (iv): Überlegen Sie sich, wie der Ansatz für Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf solche dritter Ordnung erweitert werden kann.

Aufgabe 25 *Die Variation der Konstanten*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 5y' + 4y = \cos 2x$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung soll nicht die Methode des Koeffizientenvergleichs benutzt werden, sondern nach einem allgemeineren Verfahren vorgegangen werden:

(a) Bestimmen Sie zunächst die Fundamentallösungen y_1 und y_2 der homogenen Gleichung.

(b) Variieren Sie die beiden Konstanten in

$$y_{\mathrm{h}} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} ,$$

indem Sie diese durch Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ausdrücken. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung.

(c) Setzen Sie die dadurch erhaltenen Funktionen in die inhomogene Differentialgleichung ein und vereinfachen Sie die daraus resultierende Gleichung, indem Sie benutzen, dass y_1 und y_2 die homogene Differentialgleichung lösen.

(d) Vereinfachen Sie die Gleichung weiter, indem Sie fordern, dass

$$u'(x)e^{-4x} + v'(x)e^{-x} = 0 \tag{2}$$

gilt. Begründen Sie, warum diese Forderung zulässig ist.

(e) Leiten Sie aus der Gleichung 2 eine weitere Bedingung ab, die Ihnen bei der Vereinfachung hilft.

(f) Sie erhalten nun eine einfachere Form der ursprünglichen Differentialgleichung

$$-4u'(x)e^{-4x} - v'(x)e^{-x} = \cos 2x \tag{3}$$

Bestimmen Sie ausgehend von den Gleichungen (2) und (3) die Funktionen u und v.

(g) Führen Sie eine Probe für die so erhaltene allgemeine Lösung durch.

Aufgabe 26 *Die Wronski-Determinante*

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung, wobei p und q Funktionen in Abhängigkeit von x darstellen. Weiterhin seien y_1 und y_2 zwei Lösungen dieser Gleichung.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wronski-Determinante W der folgenden separablen Differentialgleichung genügt und lösen Sie diese Gleichung durch Trennung der Variablen.

$$W' = -p(x) \cdot W$$

Damit ist es möglich die Wronski-Determinante direkt aus der zugehörigen Differentialgleichung ohne Kenntnis der Lösung dieser zu bestimmen.

(b) Es sei die Lösung y_1 bereits bekannt. Interpretieren Sie die folgende Gleichung als inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für y_2 und lösen Sie diese durch Variation der Konstanten.

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = W(x)$$

So können Sie die zweite Fundamentallösung aus der Kenntnis der ersten Fundamentallösung und der Wronski-Determinante bestimmen.

(c) Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den reellen konstanten Koeffizienten a, b und c.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(1) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante dieser Differentialgleichung mit der in (a) beschriebenen Methode.

(2) Nehmen Sie an, dass die folgende Lösung bekannt ist, und bestimmen Sie durch Verwendung des zuvor beschriebenen Verfahrens die zweite Fundamentallösung.

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad \lambda_1 := -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

(d) **Für Interessierte:** Gegeben sei die folgende Differentialgleichung mit der reellen Konstanten m.

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x}y = 0$$

(1) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante dieser Differentialgleichung.

(2) Überzeugen Sie sich, dass die folgende Funktion eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und berechnen Sie nach dem zuvor beschriebenen Verfahren die zweite Fundamentallösung.

$$y_1(x) = x^m$$

Machen Sie die Probe für diese zweite Lösung und geben Sie auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

Aufgabe 27 *Die Wronski-Determinante*

(a) Drücken Sie die Ableitung W' der Wronski-Determinante

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

mithilfe der Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = 0$$

durch die Wronski-Determinante selbst aus.

(b) Lösen Sie die so entstehende gewöhnliche Differentialgleichung für W. Zeigen Sie anhand dieser Lösung die folgende Aussage.

$$\exists x \in \mathbb{R}\colon W(x) \neq 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}\colon W(x) \neq 0$$

(c) Betrachten Sie nun eine lineae Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Geben Sie die zugehörige Wronski-Determinante an.

(d) Bestimmen Sie mit diesem Verfahren die Wronski-Determinante der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{m^2}{x^2}y = 0$$

(e) **Zusatz:** Überzeugen Sie sich, dass $y_1(x) = x^m$ eine Lösung der Gleichung ist. Konstruieren Sie eine zweite Lösung aus dem Ansatz $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$ aufstellen und diese durch zweimalige Integration lösen. Überprüfen Sie durch Einsetzen, dass auch y_2 eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 28 *Ein Ausweg aus der Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Auf dieser Insel wird sofort mit der Evakuierung aller gesunden Menschen begonnen. Für kleine Zeitspannen $\tau \in \mathbb{R}^+$ und Parameter $\delta, N_0 \in \mathbb{R}^+$ kann der Anteil der gesunden Menschen, die sich infizieren, durch $\tau \cdot \delta$ und die Anzahl der Menschen, die die Insel per Schiff verlassen, durch $\tau \cdot N_0$ approximiert werden.

(a) Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem auf, welches den oben genannten Bedingungen genügt. Verwenden Sie $M(t) \in \mathbb{R}^+$ für die Anzahl der gesunden Menschen, $Z(t) \in \mathbb{R}^+$ für die Anzahl der Infizierten und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

(b) Lösen Sie das erhaltene Differentialgleichungssystem für die folgenden Anfangsbedingungen.

$$t_0 := 0, \qquad M_0 := M(0) := N \in \mathbb{N}, \qquad Z_0 := Z(t) := 0$$

(c) **Zusatz:** Skizzieren Sie $M(t)$ und $Z(t)$ für $t \in \mathbb{R}^+$ und die folgenden Parameter.

$$N := 10000, \qquad \delta := \frac{1}{3}, \qquad N_0 := 100$$

(d) **Zusatz:** Bestimmen Sie die Anzahl der geretteten Menschen. Berechnen Sie zudem die Änderung dieser Anzahl, wenn statt einem Einzigem zwei identische Schiffe zum Einsatz kommen.

Aufgabe 29 *Freier Fall mit Reibung*

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 := 0$ und $v_0 := v(t_0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung des Anfangswertproblems.

$$v_\infty := \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

LÖSUNG:

(a) Die zur gegebenen Differentialgleichung zugehörigen homogene Differentialgleichung kann durch die folgende Form beschrieben werden.

$$m\dot{v} + \gamma v = 0 \implies \dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Diese Formel lässt sich separieren und durch die Methode der Trennung der Variablen lösen.

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\gamma}{m} \implies \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t} \frac{\gamma}{m}\,\mathrm{d}t \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\frac{\gamma}{m}(t-t_0) \implies v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten gehen wir nun davon aus, dass sich die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung durch die folgende Funktion beschreiben lässt.

$$v(t) = \varphi(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies \dot{v}(t) = \dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \varphi(t)\frac{\gamma}{m}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Das Einsetzen der Ableitung in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt dann das Folgende.

$$m\dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = mg \implies \dot{\varphi}(t) = g e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies \varphi(t) = \frac{mg}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{\gamma} + \varphi(t_0)$$

$$\implies v(t) = \varphi(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = \frac{mg}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right] + \varphi(t_0)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Zu beachten ist hier, dass $v_0 = v(t_0) = \varphi(t_0)$ gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit wegen $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gegeben durch die folgende Funktion.

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(b) Die stationäre Endgeschwindigkeit lässt sich nun einfach mithilfe des Limes berechnen.

$$v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - \lim_{t\longrightarrow\infty} e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

Ohne die Kenntnis der Lösung lässt nun das Folgende notieren.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\left[m\dot{v}(t) + \gamma v(t)\right] = \lim_{t\longrightarrow\infty} mg \implies m\lim_{t\longrightarrow\infty}\dot{v}(t) + \gamma\lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = mg$$

Da der Limes existiert und v eine stetig differenzierbare Funktion ist, muss demnach die Ableitung im Unendlichen verschwinden.

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\dot{v}(t) = 0 \implies v_\infty = \lim_{t\longrightarrow\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \qquad 1\text{ P.}$$

(c) Die in der Aufgabe gegebene Differentialgleichung ist separierbar und damit durch die Methode der Trennung der Variablen lösbar.

$$\dot{v}(t) = g - \frac{\gamma}{m}v(t) \implies \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)} = 1 \implies \int_{t_0}^{t}\frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t \qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ -\frac{m}{\gamma}\ln\left[\frac{g-\frac{\gamma}{m}v(t)}{g-\frac{\gamma}{m}v_0}\right]=t-t_0\\
&\Longrightarrow\ v(t)=\frac{m}{\gamma}\left[g-\left(g-\frac{\gamma}{m}v_0\right)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right]\\
&\Longrightarrow\ v(t)=\frac{mg}{\gamma}\left[1-e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}\right]+v_0e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)}
\end{aligned}
\qquad +\tfrac{1}{2}\text{ P.}
$$

Aufgabe 30 *Die Methode der Variation der Konstanten*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der Variation der Konstanten. Führen Sie in allen Fällen eine Probe durch.

(i) $\dfrac{y'}{x^3}-\dfrac{2y}{x^4}=\sin x$

(ii) $y'=y\sin x-2\sin x$

(iii) $(x+1)y'=2y+(x+1)^{\frac{5}{2}}$

Aufgabe 31 *Die Methode der Variation der Konstanten I*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

(i) $\dfrac{y'}{x^3}-\dfrac{2y}{x^4}=\sin x$

(ii) $y'\tan x+y=\sin x$

Machen Sie in allen Fällen die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung.

Aufgabe 32 *Die Methode der Variation der Konstanten II*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mithilfe der Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine spezielle Lösung, sodass die nebenstehenden Anfangsbedingungen erfüllt sind.

(i) $2y'=y+2\sin x,\qquad y(0)=-1$

(ii) $(x+1)y'=2y+(x+1)^{\frac{5}{2}},\qquad y(0)=3$

Machen Sie in allen Fällen die Probe durch Einsetzen der allgemeinen Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung.

Aufgabe 33 *Eine nichtlineare Differentialgleichung*

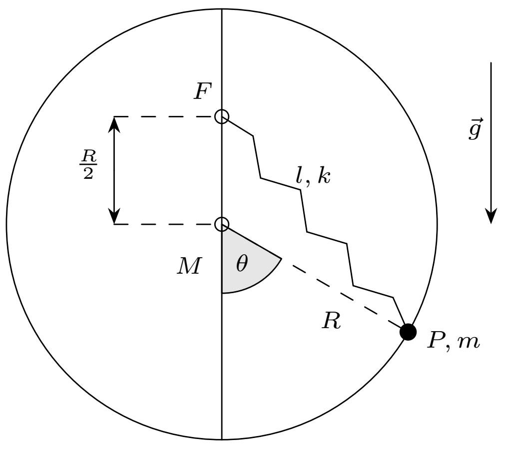
Lösen Sie die folgende nichtlineare Differentialgleichung, indem Sie diese auf eine lineare Differentialgleichung durch die Substitution $z = y^{-2}$ zurückführen und mithilfe der Methode der Variation der Konstanten behandeln.

$$y' - y + 3x^2y^3 = 0$$

Machen Sie die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung.

Aufgabe 34 *Gleichgewichtspunkte und kleine Schwingungen*

Eine Perle P mit Masse m soll sich reibungsfrei auf einem Reifen mit Mittelpunkt M und Radius R bewegen können. Sie steht dabei unter der Einwirkung sowohl der Schwerkraft als auch einer elastischen Kraft. Letztere wird von einer Feder mit Federkonstante k ausgeübt, die im Punkt F befestigt ist und im entspannten Zustand die Länge $l_0 = \frac{R}{2}$ hat. Die Position der Perle auf dem Reifen wird durch den Winkel $\theta(t)$ beschrieben. Die zugehörige Länge der gedehnten Feder ist $l(t)$.



Die gesamte Kraftkomponente, die die Perle auf dem Reifen bewegt, ist

$$F = \left[-mg + \frac{Rk}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5 + 4\cos\theta}}\right)\right] \sin\theta \, .$$

(a) Bestimmen Sie alle Winkel θ, die Gleichgewichtslagen der Perle beschreiben. Dabei ist es ausreichend, die Bestimmungsgleichungen für diese Winkel in impliziter Form anzugeben.

(b) Entscheiden Sie über die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen.

Hinweis: Für Fallunterscheidungen ist es zweckmäßig, den dimensionslosen Parameter

$$\kappa = \frac{k}{k_{\text{krit}}} \quad \text{mit} \quad k_{\text{krit}} = 3\frac{mg}{R}$$

einzuführen.

Aufgabe 35 *Linearisierte Schwingungen*

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x, \qquad k = \text{const}$$

in der Nähe des Minimums.

(a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ befindet.

(b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U\ .$$

(c) Stellen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung auf. Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die Gleichgewichtsposition. Benutzen Sie dafür $F = m\ddot{x}$.

(d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

Aufgabe 36 *Die Methode des Energiesatzes*

(a) Betrachten Sie die folgende nicht-lineare Differentialgleichung und lösen Sie diese gemäß der Anleitung.

$$\ddot{y} = y^3$$

- Multiplizieren Sie den Faktor $\dot{y}$ mit obiger Gleichung. Stellen Sie dann jede Seite als zeitliche Ableitung dar.
- Integrieren Sie einmal nach der Zeit und lösen Sie die so entstehende Differentialgleichung für die folgenden Anfangswerte.

$$y(0) = 1, \qquad \dot{y}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

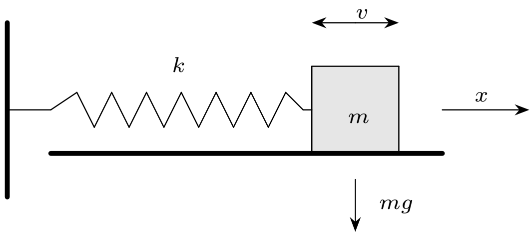
(b) Wenden Sie das oben beschriebene Verfahren auf

$$\ddot{y} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$$

an.

Aufgabe 37 *Oszillator auf rauer Unterlage*

Ein Oszillator (Masse m, Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_{\mathrm{R}} = \mu mg$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, und mg ist das Gewicht der Masse m.



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

(a) Lösen Sie für die ganze erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \mp \mu mg \ ,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflusst die Reibung die Schwingungsfrequenz?

Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mithilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück.

(b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultates $x(t)$ und $v(t)$ für die n-te Halbperiode für alle $n \in \mathbb{N}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, dass die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung.

Aufgabe 38 *Das Phasenportrait*

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v aufgespannte Ebene heißt Phasenebene. Die Kurven $v = v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und zusammengenommen Phasenportrait einer Bewegung.

(a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

(b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?

(c) Berechnen Sie die von ihnen umschlossene Fläche in der $(\dot{x}, x)$-Phasenebene.

Aufgabe 39 *Der Resonanzfall*

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\varrho x}$$

mit Konstanten a, b, c, A und ϱ. ϱ erfülle die charakteristische Gleichung

$$a\varrho^2 + b\varrho + c = 0 \, .$$

Hier versagt der Ansatz $y_\text{p} = \alpha e^{\varrho x}$. Bestimmen Sie die Partikulärlösung, indem Sie für den Parameter α eine Variation der Konstanten durchführen. Unterscheiden Sie dabei die folgenden Fälle.

(a) Die Inhomogenität fällt mit einer der Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammen.

(b) Die Inhomogenität fällt mit beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammen.

Aufgabe 40 *Der integrierende Faktor*

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit.

(i) $$(x+y)\,x^2y' + xy^2 + 3x^2y = 0$$

(ii) $$yx^3 - 2x^4 = \left(3y^2x^3 - x^4\right) y'$$

(iii) $$(x\cos y - xy\sin y)\,y' + 2y\cos y + x = 0$$

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der nicht-exakten Differentialgleichungen in impliziter Form, indem Sie die folgende Anleitung verwenden.

(a) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$.

(b) Notieren Sie die neue, mit dem integrierenden Faktor multiplizierte, Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie die Exaktheit der neuen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie die neue Differentialgleichung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(e) Führen Sie die Probe durch, indem Sie die erhaltene Lösung implizit differenzieren und auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückführen.

Aufgabe 41 *Eine nichtexakte Differentialgleichung*

(a) Weisen Sie nach, dass die folgende Differentialgleichung nicht exakt ist.

$$x^2y' - xy = \frac{2}{x}$$

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor λ, der nur von der Variablen x abhängt, und überzeugen Sie sich, dass dieser die Differentialgleichung exakt macht.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung in „vollständigen Differentialen" und machen Sie die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung.

(d) Geben Sie diejenige spezielle Lösung an, die der folgenden Bedingung genügt.

$$y(1) = 2$$

Aufgabe 42 *Exakte Differentialgleichungen*

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $$\left(x + y^3\right) y' + y = x^3$$

(ii) $$0 = \sin\left(xy^2\right) + xy^2\cos\left(xy^2\right) + \left[2x^2y\cos\left(xy^2\right) + 2y\right] y'$$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $$0 = 2\cos y + 4x^2y\sin y + \left(yx^3\cos y + x^3\sin y\right) y' - xy'\sin y$$

(ii) $$x\arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{2x^3y}{x^2+y^4}y'$$

LÖSUNG:

(a) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x,y) \coloneqq y - x^3, \qquad g(x,y) \coloneqq x + y^3$$

$$\implies f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt. 1 P.

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f(x,\tilde{y})\bigg|_y = 1 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} g(\tilde{x},y)\bigg|_x = \partial_1 g(x,y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1\varphi = f, \qquad \partial_2\varphi = g$$

Um diese zu berechnen, kann man zum Beispiel einen der beiden folgenden Wege verwenden.

$$\varphi(x,y) = \int \partial_1\varphi(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = \int f(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = yx - \frac{x^4}{4} + c(y)$$ 1 P.

$$\implies \partial_2\varphi(x,y) = x + c'(y) = g(x,y) = x + y^3$$

$$\implies c'(y) = y^3 \implies c(y) = \frac{y^4}{4} + K$$ 1 P.

$$\implies \varphi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

$$\varphi(x,y) = \int \partial_2\varphi(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y = \int g(x,s)\,\mathrm{d}s\bigg|_y = xy + \frac{y^4}{4} + d(x)$$

$$\implies \partial_1\varphi(x,y) = y + d'(x) = f(x,y) = y - x^3$$

$$\implies d'(x) = -x^3 \implies d(x) = -\frac{x^4}{4} + K$$

$$\implies \varphi(x,y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

Jetzt gehen wir davon aus, dass es sich bei y um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Nach Verwendung der Kettenregel und der gegebenen Differentialgleichung können wir auf das Folgende für alle x einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ schließen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s,y(s))\bigg|_x = \partial_1\varphi(x,y(x)) + \partial_2\varphi(x,y(x))y'(x) = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn es für alle $x \in U$ eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Folgende gilt.

$$\varphi(x, y(x)) = C = xy(x) - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4(x)}{4} + K \qquad \text{1 P.}$$

Dies ist auch gleichzeitig die Funktion y in impliziter Form.

(ii) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x,y) \coloneqq \sin\left(xy^2\right) + xy^2\cos\left(xy^2\right), \qquad g(x,y) \coloneqq 2x^2y\cos\left(xy^2\right) + 2y$$

$$\implies f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt. 1 P.

$$\partial_2 f(x,y) = 4xy\cos(xy2) - 2x^2y^3\sin\left(xy^2\right) = \partial_1 g(x,y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1\varphi = f, \qquad \partial_2\varphi = g$$

Um diese zu berechnen, können wir den folgenden Weg verwenden.

$$\varphi(x,y) = \int \partial_1\varphi(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = \int f(s,y)\,\mathrm{d}s\bigg|_x = x\sin\left(xy^2\right) + c(y) \qquad \text{1 P.}$$

Das Integral wurde dabei wie folgt gelöst.

$$\begin{aligned}\int s\cos\left(sy^2\right)\,\mathrm{d}s\bigg|_x &= \frac{x\sin\left(xy^2\right)}{y^2} - \frac{1}{y^2}\int \sin\left(sy^2\right)\,\mathrm{d}s\bigg|_x \\ &= \frac{x\sin\left(xy^2\right)}{y^2} + \frac{\cos\left(xy^2\right)}{y^4} + c(y) \qquad \text{+1 P.}\end{aligned}$$

Dieses Wissen verwenden wir nun für die Ableitung nach der zweiten Komponente.

$$\partial_2\varphi(x,y) = 2x^2y\cos\left(xy^2\right) + c'(y) = g(x,y) = 2x^2y\cos\left(xy^2\right) + 2y$$

$$\implies c'(y) = 2y \implies c(y) = y^2 + K \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \varphi(x,y) = x\sin\left(xy^2\right) + y^2 + K$$

Jetzt gehen wir davon aus, dass es sich bei y um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Nach Verwendung der Kettenregel und der gegebenen Differentialgleichung können wir auf das Folgende für alle x einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ schließen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi(s, y(s))\bigg|_x = \partial_1\varphi(x, y(x)) + \partial_2\varphi(x, y(x))y'(x) = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn es für alle $x \in U$ eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Folgende gilt.

$$\varphi(x, y(x)) = C = x \sin\left(xy^2\right) + y^2 + K$$ 1 P.

Dies ist auch gleichzeitig die Funktion y in impliziter Form.

(b) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x,y) := 2\cos y + 4x^2 y \sin y, \qquad g(x,y) := yx^3 \cos y + x^3 \sin y - x \sin y$$

$$\implies f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\partial_2 f(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f(x, \tilde{y})\right|_y = -2\sin y + 4x^2 \sin y + 4x^2 y \cos y$$

$$\partial_1 g(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} g(\tilde{x}, y)\right|_x = 3x^2 y \cos y + 3x^2 \sin y - \sin y$$

$$\implies \partial_2 f(x,y) - \partial_1 g(x,y) = \left(x^2 - 1\right)\sin y + \left(1 - 3x^2\right) y \cos y \neq 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt. 1 P.

(ii) Wir definieren zwei Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0 \mid \to\} \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x,y) := x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, \qquad g(x,y) := -\frac{2x^3 y}{x^2 + y^4}$$

$$\implies f(x,y) + g(x,y)y' = 0$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\partial_2 f(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} f(x, \tilde{y})\right|_y = -\frac{4x^4 y^5}{\left(x^2 + y^4\right)^2}$$

$$\partial_1 g(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} g(\tilde{x}, y)\right|_x = -\frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} + \frac{4x^4 y}{\left(x^2 + y^4\right)^2}$$

$$\implies \partial_2 f(x,y) - \partial_1 g(x,y) = \frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} - \frac{8x^4 y}{\left(x^2 + y^4\right)^2} \neq 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt. 1 P.

Aufgabe 43 *Ideales Gas*

Ein ideales Gas befinde sich in einem Kolben, der zusammengepresst wird. Dabei gelten die folgenden Zustandsgleichungen.

$$pV = Nk_\mathrm{B}T, \qquad E = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T$$

Darin steht p für den Druck, V für das Volumen, N für die Teilchenanzahl, T für die Temperatur, E für die innere Energie und k_B für die Boltzmann-Konstante. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ändert sich die innere Energie E durch das Verrichten von Arbeit $p\,\mathrm{d}V$ und die Abgabe von Wärme δQ.

$$\mathrm{d}E = \delta Q - p\,\mathrm{d}V$$

(a) Schon die Schreibweise δQ (anstelle von $\mathrm{d}Q$) deutet an, dass es keine Funktion $Q(V,T)$ mit dem totalen Differential δQ gibt. Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(b) Suchen Sie nun einen integrierenden Faktor λ, der nur von T abhängt, sodass $\mathrm{d}S = \lambda\,\delta Q$ ein totales Differential beschreibt.

(c) Führen Sie eine Probe durch, indem Sie nun für $\mathrm{d}S$ die Integrabilitätsbedingung nachprüfen.

Aufgabe 44 *Integrierende Faktoren*

(a) Die folgende Differentialgleichung sei gegeben.

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

Zeigen Sie durch Verwendung der Integrabilitätsbedingung die beiden folgenden Aussagen.

- Kann der folgende Ausdruck als eine Funktion f der Variablen $z(x,y) := xy$ geschrieben werden, so hängt auch der integrierende Faktor λ nur von dieser Variable z ab.

  $$\frac{\partial_x B(x,y) - \partial_y A(x,y)}{xA(x,y) - yB(x,y)}$$

  Geben Sie den Zusammenhang von λ und f an.

- Kann der folgende Ausdruck als eine Funktion g der Variablen $w(x,y) := x + y$ geschrieben werden, so hängt auch der integrierende Faktor λ nur von dieser Variable z ab.

  $$\frac{\partial_x B(x,y) - \partial_y A(x,y)}{A(x,y) - B(x,y)}$$

  Geben Sie den Zusammenhang von λ und g an.

(b) Eine der beiden zuvor genannten Eigenschaften trifft auf eine der beiden folgenden Differentialgleichungen zu. Finden Sie diesen Fall heraus und berechnen Sie einen integrierenden Faktor mit dem Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

(i) $(xy-1)+\left(x^2-xy\right)y'=0$

(ii) $y+\left(x-2x^2y^3\right)y'=0$

Lösen Sie die Differentialgleichung mit diesem integrierenden Faktor und machen Sie anschließend die Probe anhand der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Lösung der verbleibenden Differentialgleichung ist nicht verlangt.

Aufgabe 45 — *Konstruktion eines integrierenden Faktors*

Wir wenden uns noch einmal der folgenden Differentialgleichung zu.

$$y'-y+3x^2y^3=0 \tag{4}$$

Konstruieren Sie nun einen integrierenden Faktor $\Lambda(x,y)$ auf zwei Wegen.

(a) Sie haben diese Differentialgleichung in der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie mit der Substitution $z=y^{-2}$ in eine lineare Differentialgleichung überführt, die auch nicht exakt ist.

$$z'+2z-6x^2=0 \tag{5}$$

Bestimmen Sie zuerst für diese Gleichung (5) einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$, der nur von der Variablen x abhängt. Dieser Faktor allein macht die ursprüngliche Differentialgleichung (4) noch nicht exakt. Ermitteln Sie nun für die mit $\lambda(x)$ multiplizierte ursprüngliche Gleichung einen integrierenden Faktor $\mu(y)$, der nur von der Variablen y abhängt.

(b) Machen Sie von vornherein für den integrierenden Faktor $\Lambda(x,y)$ der ursprünglichen Differentialgleichung (4) den Produktansatz $\Lambda(x,y)=\lambda(x)\cdot\mu(y)$ und bestimmen Sie die Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(y)$ ohne Rückgriff auf die in der Variablen z lineare Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Weisen Sie nach, dass die Ausgangsgleichung (4) mit diesem integrierenden Faktor $\Lambda(x,y)$ exakt ist und lösen Sie diese. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem vorherigen Resultat aus der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie.

Aufgabe 46 — *Spezielle integrierende Faktoren*

Es sei die folgende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für zwei stetig differenzierbare Funktionen $A,B\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben.

$$A(x,y)+B(x,y)y'=0$$

Weiterhin seien der Term $M(x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ mit $xA(x,y) \neq yB(x,y)$ und der Term $N(x,y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ mit $A(x,y) \neq B(x,y)$ gegeben.

$$M(x,y) := \frac{\partial_1 B(x,y) - \partial_2 A(x,y)}{xA(x,y) - yB(x,y)}, \qquad N(x,y) := \frac{\partial_1 B(x,y) - \partial_2 A(x,y)}{A(x,y) - B(x,y)}$$

(a) Man nehme nun an, dass der Term $M(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x \cdot y$ beschrieben werden kann, das heißt es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x \cdot y) = M(x,y)$ gilt. Zeigen, dass es in diesem Falle auch einen integrierenden Faktor $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass sich $\lambda(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x \cdot y$ darstellen lässt. Es muss also eine Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben, sodass $\gamma(x \cdot y) = \lambda(x,y)$ gilt. Geben Sie zudem den Zusammenhang zwischen γ und f an.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung der Bedingung aus (a) genügt und bestimmen Sie den entsprechenden integrierenden Faktor. Berechnen Sie dann eine implizite Lösung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

$$y + \left(x - 2x^2y^3\right) y' = 0$$

(c) **Zusatz:** Man nehme nun an, dass der Term $N(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x+y$ beschrieben werden kann, das heißt es gibt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f(x+y) = N(x,y)$ gilt. Zeigen, dass es in diesem Falle auch einen integrierenden Faktor $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass sich $\lambda(x,y)$ nur in Abhängigkeit von $x+y$ darstellen lässt. Es muss also eine Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geben, sodass $\gamma(x+y) = \lambda(x,y)$ gilt. Geben Sie zudem den Zusammenhang zwischen γ und f an.

(d) **Zusatz:** Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung der Bedingung aus (c) genügt und bestimmen Sie den entsprechenden integrierenden Faktor. Berechnen Sie dann eine implizite Lösung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

$$0 = 1 + \frac{e^{x-y}}{\cos(x+y)} + \left[1 + \frac{1 - e^{x-y}}{\cos(x+y)}\right] y'$$

Aufgabe 47 *Vollständiges Differential*

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad U(x,y,z) := x^4yz^2 + 2y^2x^3e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U.

(b) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass das totale Differential $\mathrm{d}V$ von V für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) := \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z)$$

Hinweis: Überprüfen Sie dafür die Integrabilitätsbedingung des gegebenen Differentials.

LÖSUNG:

(a) Der Gradient der skalaren Funktion U berechnet sich wie folgt, da es sich bei U um eine stetig differenzierbare Funktion handelt.

$$\nabla U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_1 U(x,y,z) \\ \partial_2 U(x,y,z) \\ \partial_3 U(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3yz^2 + 6x^2y^2e^z \\ x^4z^2 + 4x^3ye^z \\ 2x^4yz + 2x^3y^2e^z \end{pmatrix}$$

Das totale Differential existiert, da sich U zweimal stetig differenzieren lässt und damit durch den Satz von Schwarz die Integrabilitätsbedingung automatisch erfüllt ist. Es ist dann durch den folgenden Ausdruck gegeben.

$$\mathrm{d}U = (\nabla U \cdot \mathrm{d}r)\,, \qquad \mathrm{d}r := \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}U(x,y,z) = \partial_1 U(x,y,z)\mathrm{d}x + \partial_2 U(x,y,z)\mathrm{d}y + \partial_3 U(x,y,z)\mathrm{d}z \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}U(x,y,z) = \left(4x^3yz^2 + 6x^2y^2e^z\right)\mathrm{d}x + \left(x^4z^2 + 4x^3ye^z\right)\mathrm{d}y + \left(2x^4yz + 2x^3y^2e^z\right)\mathrm{d}z \qquad \text{1 P.}$$

(b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt nun die folgende Aussage. Wir definieren hierfür die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z) = \underbrace{\left(4xyz^2 + 6y^2e^z\right)}_{=:f(x,y,z)}\mathrm{d}x + \underbrace{\left(x^2z^2 + 4xye^z\right)}_{=:g(x,y,z)}\mathrm{d}y + \underbrace{\left(2x^2yz + 2xy^2e^z\right)}_{=:h(x,y,z)}\mathrm{d}z$$

Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Existenz der in der Aufgabenstellung beschriebenen Funktion V, ist die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung. Es gibt nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, die die folgenden Implikationen erfüllen.

$$\partial_2 f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_1 U(x,s,z)}{x^2}\right)\bigg|_y = \frac{\partial_2\partial_1 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_1 g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_2 U(s,y,z)}{s^2}\right)\bigg|_x = \frac{\partial_2\partial_1 U(x,y,z)}{x^2} - \frac{2\,\partial_2 U(x,y,z)}{x^3}$$

$$\Longrightarrow \partial_2 f(x,y,z) - \partial_1 g(x,y,z) = \frac{2\,\partial_2 U(x,y,z)}{x^3} = xz^2 + 4ye^z \neq 0$$

$$\partial_3 f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_1 U(x,y,s)}{x^2}\right)\bigg|_z = \frac{\partial_3\partial_1 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_1 h(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_3 U(s,y,z)}{s^2}\right)\bigg|_x = \frac{\partial_3\partial_1 U(x,y,z)}{x^2} - \frac{2\,\partial_3 U(x,y,z)}{x^3}$$

$$\Longrightarrow \partial_3 f(x,y,z) - \partial_1 h(x,y,z) = \frac{2\,\partial_3 U(x,y,z)}{x^3} = 2xyz + 2y^2e^z \neq 0$$

$$\partial_3 g(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_2 U(x,y,s)}{x^2}\right)\bigg|_z = \frac{\partial_3\partial_2 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\partial_2 h(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial_3 U(x,s,z)}{x^2}\right)\Bigg|_y = \frac{\partial_2\partial_3 U(x,y,z)}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \partial_3 g(x,y,z) - \partial_2 h(x,y,z) = 0$$

Die ersten beiden Folgerungen zeigen, dass die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Es 1 P.
reicht eine dieser beiden Aussagen zu zeigen. Demzufolge kann es eine solche Funktion V 1 P.
nicht geben.

Aufgabe 48

Zwei exakte Differentialgleichungen

Weisen Sie nach, dass die beiden folgenden Differentialgleichungen exakt sind und konstruieren Sie deren Lösung in »vollständigen Differentialen«.

(i) $$\frac{y^2}{x} + 2yy' \ln x = 0$$

(ii) $$\left(8y - x^2 y\right) y' + \left(x - xy^2\right) = 0$$

Machen Sie in beiden Fällen die Probe durch Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung.