Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 8

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 13.12.17

Aufgabe 1

Das Phasenportrait

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v aufgespannte Ebene heißt Phasenebene. Die Kurven $v = v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und zusammengenommen Phasenportrait einer Bewegung.

(a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

(b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?

(c) Berechnen Sie die von Ihnen umschlossene Fläche in der $(\dot{x}, x)$-Phasenebene.

(d) Ein schwingendes System werde durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + (a+2)y = 0$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Parameter a, sodass der aperiodische Grenzfall eintritt.

Aufgabe 2

Linearisierte Schwingungen

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x, \qquad k = \text{const}$$

in der Nähe des Minimums.

(a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{l}}$ befindet.

(b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass

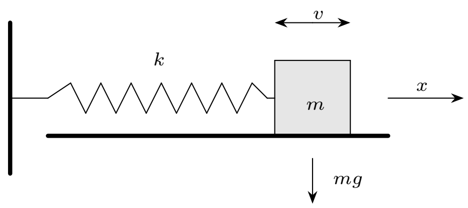
$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U \ .$$

(c) Stellen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung auf. Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die Gleichgewichtsposition. Benutzen Sie dafür $\vec{F} = m\vec{a}$.

(d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

Aufgabe 3 *Oszillator auf rauer Unterlage*

Ein Oszillator (Masse m, Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_{\mathrm{R}} = \mu m g$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, um mg ist das Gewicht der Masse m.



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

(a) Lösen Sie für die ganze erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx \mp \mu m g \ ,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflusst die Reibung die Schwingungsfrequenz?

Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mithilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück.

(b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultates $x(t)$ und $v(t)$ für die n. Halbperiode für alle $n \in \mathbb{N}$ an.

(c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, dass die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung.