Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 4

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 15.11.17

Aufgabe 1 — *Freier Fall mit Reibung*

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 := 0$ und $v_0 := v(t_0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung des Anfangswertproblems.

$$v_\infty := \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 2 — *Exakte Differentialgleichungen*

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $$\left(x + y^3\right) y' + y = x^3$$

(ii) $$0 = \sin\left(xy^2\right) + xy^2 \cos\left(xy^2\right) + \left[2x^2 y \cos\left(xy^2\right) + 2y\right] y'$$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $$0 = 2\cos y + 4x^2 y \sin y + \left(yx^3 \cos y + x^3 \sin y\right) y' - xy' \sin y$$

(ii) $$x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = \frac{2x^3 y}{x^2 + y^4} y'$$

bitte wenden

Aufgabe 3 *Vollständiges Differential*

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad U(x,y,z) \coloneqq x^4 y z^2 + 2y^2 x^3 e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U.

(b) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt, sodass das totale Differential $\mathrm{d}V$ von V für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z)$$

Hinweis: Überprüfen Sie dafür die Integrabilitätsbedingung des gegebenen Differentials.