
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 5

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 22.11.17

Aufgabe 1

Der integrierende Faktor

Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit.

- (i) $(x + y) x^2 y' + xy^2 + 3x^2 y = 0$
- (ii) $yx^3 - 2x^4 = (3y^2 x^3 - x^4) y'$
- (iii) $(x \cos y - xy \sin y) y' + 2y \cos y + x = 0$

Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen der nicht-exakten Differentialgleichungen in impliziter Form, indem Sie die folgende Anleitung verwenden.

- (a) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$.
- (b) Notieren Sie die neue, mit dem integrierenden Faktor multiplizierte, Differentialgleichung.
- (c) Zeigen Sie die Exaktheit der neuen Differentialgleichung.
- (d) Lösen Sie die neue Differentialgleichung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.
- (e) Führe Sie die Probe durch, indem Sie die erhaltene Lösung implizit differenzieren und auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückführen.

Aufgabe 2

Konstruktion eines integrierenden Faktors

Wir wenden uns noch einmal der folgenden Differentialgleichung zu.

$$y' - y + 3x^2 y^3 = 0$$

Konstruieren Sie nun einen integrierenden Faktor $\Lambda(x, y)$ auf zwei Wegen.

- (a) Sie haben diese Differentialgleichung in der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie mit der Substitution $z = y^{-2}$ in eine lineare Differentialgleichung überführt, die auch nicht exakt ist. Bestimmen Sie zuerst für diese Gleichung einen integrierenden Faktor $\lambda(x)$, der nur von der Variablen x abhängt. Dieser Faktor allein macht die ursprüngliche Differentialgleichung noch nicht exakt. Ermitteln Sie nun für die mit $\lambda(x)$ multiplizierte ursprüngliche Gleichung einen integrierenden Faktor $\mu(y)$, der nur von der Variablen y abhängt.

bitte wenden

- (b) Machen Sie von vornherein für den integrierenden Faktor $\Lambda(x, y)$ der ursprünglichen Differentialgleichung den Produktansatz $\Lambda(x, y) = \lambda(x) \cdot \mu(y)$ und bestimmen Sie die Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(y)$ ohne Rückgriff auf die in der Variablen z lineare Differentialgleichung.
- (c) **Zusatz:** Weisen Sie nach, dass die Ausgangsgleichung mit diesem integrierenden Faktor $\Lambda(x, y)$ exakt ist und lösen Sie diese. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem vorherigen Resultat aus der zweiten Aufgabe der dritten Übungsserie.

Aufgabe 3

Ideales Gas

Ein ideales Gas befinde sich in einem Kolben, der zusammengepresst wird. Dabei gelten die folgenden Zustandsgleichungen.

$$pV = Nk_B T, \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T$$

Darin steht p für den Druck, V für das Volumen, N für die Teilchenanzahl, T für die Temperatur, E für die innere Energie und k_B für die Boltzmann-Konstante. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ändert sich die innere Energie E durch das Verrichten von Arbeit $p \, dV$ und die Abgabe von Wärme δQ .

$$dE = \delta Q - p \, dV$$

- (a) Schon die Schreibweise δQ (anstelle von dQ) deutet an, dass es keine Funktion $Q(V, T)$ mit dem totalen Differential δQ gibt. Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.
- (b) Suchen Sie nun einen integrierenden Faktor λ , der nur von T abhängt, sodass $dS = \lambda \delta Q$ ein totales Differential beschreibt.
- (c) Führen Sie eine Probe durch, indem Sie nun für dS die Integrabilitätsbedingung nachprüfen.