Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 0 - Doppel- und Dreifachintegrale

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: keine

Fertigen Sie zu allen Aufgaben Skizzen an!

Aufgabe 1 *Fläche einer Ellipse*

Berechnen Sie die von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

umschlossene Fläche durch Verwendung eines Doppelintegrals und substituieren Sie $x' = x/a$ und $y' = y/b$.

Aufgabe 2 *Integrationsreihenfolge*

(a) Kehren Sie die Reihenfolge der Integrationen in dem Doppelintegral

$$I = \int_{y=0}^{y=a} \int_{x=0}^{x=\sqrt{4a^2-4ay}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

um und nehmen Sie dafür an, dass die Funktion $f(x,y)$ im Integrationsgebiet wohldefiniert ist.

(b) Kehren Sie die Reihenfolge der Integrationen um und berechnen Sie die Integrale

(i) $$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=x}^{y=2-x} \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

(ii) $$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \sqrt{y(2-y)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3 *Volumenberechnung I*

Berechnen Sie das von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2), \quad a > 0$$

eingeschlossene Volumen. Verwenden Sie dazu Kugelkoordinaten.

Hinweis: Es ist

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(4x) - 8\sin(2x) + 12x}{32} + C$$

LÖSUNG:

Aufgabe 3

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2) \quad , \quad a>0$$

Verwende Kugelkoordinaten:

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

$$x^2+y^2 = r^2\sin^2\vartheta$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \quad r^4 = a^2 \cdot r^2 \sin^2\vartheta \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2\sin^2\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad r = a\sin\vartheta \quad (\text{da } \sin\vartheta \geq 0 \text{ für } 0 \leq \vartheta \leq \pi)$$

Berechne eingeschlossenes Volumen:

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a\sin\vartheta} r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{a\sin\vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^4\vartheta \, d\vartheta$$

Hinweis

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \cdot \frac{\cancel{12}^{3}\pi}{\cancel{32}_{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\pi^2 a^3}}$$

Aufgabe 4 *Volumenberechnung II*

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int\int\int_V \left[xz^2 \exp\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

über den durch die Koordinatenflächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ begrenzten Oktanten. Rechnen Sie in Kugelkoordinaten.

Hinweis: Es ist

$$\int t^2 e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{\alpha t}\left(\alpha^2 t^2 - 2\alpha t + 2\right)}{\alpha^3} + C$$