$\{1\}\,,\qquad \{2 \mid 3\}$

$:=,\qquad =:,\qquad \stackrel{!}{=},\qquad f\colon X \to Y$

$\mathbb{R},\qquad \mathbb{N},\qquad \mathbb{Z},\qquad \mathbb{Q}$

$(a)\,,\qquad \{b\}\,,\qquad [c]\,,\qquad \langle d\rangle\,,\qquad \lfloor e\rfloor\,,\qquad \lceil f\rceil$

$|a|\,,\qquad \|b\|\,,\qquad c^{-1}$

$(a\cdot b)\,,\qquad \langle c,d\rangle\,,\qquad e\times f$

$\dot{a},\qquad \ddot{b},\qquad \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$

$a\,\mathrm{m},\qquad b\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-2},\qquad c\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

## Aufgabe 1 — *Räuber und Beute*

Betrachten Sie die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen mit den Koeffizienten $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \alpha H - \beta H F\\ \dot{F} &= -\gamma F + \delta H F\end{aligned}$$

(a) Interpretieren Sie kurz, was die einzelnen Terme im Kontext eines einfachen Räuber-Beute-Modells bedeuten. Erweitern Sie die Differentialgleichungen der Räuber, so dass ein konstanter Abschluss (etwa durch Jäger) berücksichtigt wird.

(b) Leiten Sie aus dem gegebenem Differentialgleichungssystem (ohne Jäger) eine neue Differentialgleichung für $F(H)$ her. Bringen Sie diese in die bekannte Form einer exakten Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass $\Lambda = \frac{1}{FH}$ ein integrierender Faktor ist und lösen Sie die gefundene Differentialgleichung nach der Ihnen bekannten Methode.

(d) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte, an denen die folgende Gleichung gilt, ohne die Verwendung der impliziten Lösung.

$$\dot{F} + \dot{H} = 0$$

## Aufgabe 2 — *Spieglein, Spieglein...*

Bestimmen Sie die Form des Spiegels, der parallel einfallende Strahlen in den Punkt $O$ reflektiert.

**Hinweis:** Wählen Sie den Ursprung im Punkt $O$. Es gilt die folgende Gleichung.

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}$$

Benutzen Sie die Substitution $y^2 = r^2 - x^2$.

## Aufgabe 3 *Quadratisches Reibungsgesetz*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den Koeffizienten $m, \gamma, k \in \mathbb{R}^+$.

$$m\ddot{y} \pm \gamma\dot{y}^2 + ky = 0$$

Das Vorzeichen vor dem quadratischen Reibungsterm wirke immer so, dass die Reibung die Bewegung behindert. Diese nichtlineare Differentialgleichung kann gelöst werden, wenn man sich zunutze macht, dass die unabhängige Variable $t$ nicht vorkommt. Substituieren Sie $p = \dot{y}$, um auch die Ableitungen nach $t$ zu eliminieren. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bernoulli-Gleichung und substituieren Sie angemessen. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen

$$\dot{y}(0) = 0$$

und $y > 0$ für kleine $t$ (so kleine Zeiten, dass sich das Vorzeichen im Reibungsterm nicht umkehrt). Es soll hier genügen $\dot{y}$ zu bestimmen.

## Aufgabe 4 *Lösungsmethode der inhomogenen Differentialgleichung 2.Ordnung*

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, indem Sie diese auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen.

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}\cos 3x$$

## Aufgabe 5 *Magnetfeld eines Leiters*

Gegeben sei das folgende Vektorfeld.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := \frac{-y\vec{\imath}}{x^2+y^2} + \frac{x\vec{\jmath}}{x^2+y^2}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Integrationsbedingungen erfüllt sind.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral für die beiden folgenden Integrationswege und skizzieren Sie die zugehörigen Kurven.

(i) $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \vec{\imath}\cos\varphi + \vec{\jmath}\sin\varphi$

(ii) $r\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad r(\varphi) := \vec{\imath}\cos\varphi - \vec{\jmath}\sin\varphi$

(c) Vergleichen Sie die Integrationswege und finden Sie heraus, ob das Vektorfeld konservativ ist.

## Aufgabe 6 *Aufstellen von Differentialgleichungen*

(a) Eine Bakterienpopulation zeige exponentielles Wachstum, das heißt die Anzahl der Bakterien erhöht sich proportional zur Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate $r$. Zusätzlich werden der Bakterienkultur kontinuierlich $k$ Bakterien pro Zeiteinheit zugefügt. Allerdings seien die Bakterien empfindlich gegen Lichteinfall. Sie sterben deshalb proportional zu Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate $1+\sin t$, welche den Rhythmus der Tageszeiten simuliert. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Anzahl $N$ der Bakterien auf.

(b) Ein Zylinder von Grundkreisradius $r$ und Masse $m$ schwimmt mit vertikaler Achsenlage im Wasser. Seine Eintauchtiefe sei $l$. Gesucht ist die Periode der Schwingung, die sich ergibt, wenn man den Zylinder ein Wenig in das Wasser eintaucht und danach loslässt. Der Bewegungswiderstand sei angenähert gleich Null anzunehmen. Wählen Sie die $y$-Achse vertikal nach unten mit dem Nullpunkt auf der Wasseroberfläche.

## Aufgabe 7 *Konservative Vektorfelder*

(a) Überprüfen Sie, welche der folgenden Vektorfelder $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ konservativ sind.

(i) $F(x,y,z) := q\,(v \times B)$

(ii) $F(x,y,z) := 2y^2z^3\vec{\imath} + 4xyz^3\vec{\jmath} + 6xy^2z^2\vec{k}$

(iii) $F(x,y,z) := 2(y+x)\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath}$

(iv) $F(x,y,z) := x^2\cos y\vec{\imath} + 2x\sin y\vec{\jmath} + z^2\vec{k}$

(b) Berechnen Sie das Wegintegral für das folgende Vektorfeld $F$ und den Weg $C = C_1 + C_2$.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) = 2(y+x)\vec{\imath} + 2x\vec{\jmath}$$

$C_1$ verläuft vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(1,1)$ und erfüllt $y = x^2$. $C_2$ verläuft vom Punkt $(1,1)$ zum Punkt $(0,0)$ und erfüllt $y = x^4$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihren Erwartungen und begründen Sie es.

## Aufgabe 8 *Parametrisierung gegeben*

Skizzieren Sie die Kurven $xy$-Ebene, die durch die folgenden Parametrisierungen gegeben werden.

(i) $r\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(s) := \frac{1}{2}\left[(1-s)\vec{\imath} + (-7+3s)\vec{\jmath}\right]$

(ii) $\quad r\colon \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\vec{\imath} + 2\sin t\vec{\jmath}$

(iii) $\quad r\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\right)\vec{\jmath}$

(iv) $\quad r\colon [1, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := t\vec{\imath} + \frac{7t^2 - 2 - 20\pi^2}{4\pi^2 - 1}\vec{\jmath}$

### Aufgabe 9 *Kurve gegeben*

Geben Sie für jede der nachfolgend genannten Kurven eine Parametrisierung an.

(a) Die Verbindungsstrecke vom Punkt $P_1 := (1, 1)$ zum Punkt $P_2 := (2, 5)$.

(b) Die obere Halbellipse mit Halbachsen $a$ und $b$.

(c) Die Schnittkurve des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ mit dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$.

(d) Die Schnittkurve der Ebene $x + y = 1$ mit dem Kegel $z^2 = x^2 + y^2$.

### Aufgabe 10 *Wegintegrale berechnen*

Berechnen Sie das Kurvenintegral für das Vektorfeld $F$ und die im Folgenden gegebenen Kurven.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x, y) := (x^2 + y^2)\vec{\imath} + 4xy\vec{\jmath}$$

(i) $\quad 2y = x^2$

(ii) $\quad y = x$

(iii) $\quad test$

### Aufgabe 11 *Wie ein Fisch im Wasser*

Die Temperaturverteilung in einem See sei gegeben durch die folgende Funktion.

$$T\colon \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z < 0\right\} \to \mathbb{R}, \qquad T(x, y, z) := -\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + 2z^2\right)$$

(a) Bestimmen Sie die Isothermen und fertigen Sie eine Skizze dieser in der $yz$-Ebene an.

(b) Ein Fisch im Wasser befinde sich am Punkt $(1, 2, -1)$. Bestimmen Sie die Richtung, in die sich die Temperatur am stärksten verändert und entscheiden Sie, ob es wärmer oder kälter wird.

(c) Der Fisch bewege sich auf dem folgenden Weg.

$$r\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad r(t) := 2\cos t\vec{\imath} + \sin t\vec{\jmath} + (\cos t - 2)\vec{k}$$

Bestimmen Sie die Zeitpunkte, an denen Fisch die größte und die kleinste Temperatur empfindet und berechnen sie die zugehörigen Position des Fisches. Skizzieren Sie die Temperatur $T \circ r$, die der Fisch entlang seines Weges in Abhängigkeit der Zeit erfährt.

## Aufgabe 12 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable $t$ und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y\,(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) := \frac{y(t)}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

LÖSUNG:

Durch die Verwendung der Substitution lassen sich die folgenden Aussagen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ treffen.

$$y(t) = tz(t) \implies y'(t) = z(t) + tz'(t)$$ 1 P.

Das Umformen der ursprünglichen Differentialgleichung und Einsetzen der Substitution führt dann zur gewünschten separablen Differentialgleichung, die sich durch die Methode der Trennung der Variablen lösen lässt.

$$ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] \implies t\left[z(t) + tz'(t)\right] = tz(t)\left[1 + \ln z(t)\right]$$

$$\implies tz'(t) = z(t)\ln z(t) \implies \frac{z'(t)}{z(t)\ln z(t)} = \frac{1}{t}$$ 1 P.

$$\implies \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{z(s)\ln z(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{s\ln s}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \ln\left(\frac{\ln z(t)}{\ln z_0}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \implies z(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) = z_0^{\frac{t}{t_0}}$$ 2 P.

$$\implies y(t) = tz(t) = t\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right)$$ 1 P.

Für die Probe leitet man nun die Lösung ab und substituiert den erhaltenen Term mithilfe der berechneten Lösung.

$$y'(t) = \exp\left(\frac{t \ln z_0}{t_0}\right) + \frac{t \ln z_0}{t_0} \exp\left(\frac{t \ln z_0}{t_0}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\implies y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t)}{t}\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right]$$

$$\implies ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] = y(t)\left[1 + \ln y(t) - \ln t\right] \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

## Aufgabe 13 *Eine Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

**Hinweis:** Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \qquad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

(c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als $1\,\%$ der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter $k$ und $N$ diesen Zeitpunkt?

LÖSUNG:

(a) Wir definieren als Erstes den Anteil der gesunden Menschen $\alpha(t) \in [0, 1]$ und den Anteil der infizierten Menschen $\beta(t) \in [0, 1]$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\alpha(t) := \frac{M(t)}{N}, \qquad \beta(t) := \frac{Z(t)}{N}$$

Wir wählen nun eine festen Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}^+$. Nähern wir für kleine Zeitspannen $\tau \in \mathbb{R}^+$ die Anzahl der Personen, die ein Zombie trifft, durch $\tau k$ an, so teilen sich Infizierte und Gesunde entsprechend ihrer Anteile auf diese Anzahl auf.

$$\tau k \approx \tau k \alpha(t) + \tau k \beta(t)$$

Die Anzahl $S(t)$ der gesunden Menschen, die ein Zombie in der Zeitspanne $\tau$ trifft und infiziert, kann demnach wie folgt für kleine $\tau$ approximiert werden.

$$S(t) \approx \tau k \alpha(t) = \frac{\tau k}{N} M(t)$$

Diese Approximation gilt für jeden Zombie. Dementsprechend lässt sich nun die Anzahl der Zombies $Z(t+\tau)$ nach der Zeitspanne $\tau$ beschreiben.

$$Z(t+\tau) \approx Z(t) + S(t)Z(t) = Z(t) + \frac{\tau k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t) \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} \approx \frac{k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

Um die Fehler der Näherung mithilfe einer Differentialgleichung zu korrigieren, bildet man den Grenzwert der erhaltenen Differenzengleichung für $\tau \longrightarrow 0$.

$$Z'(t) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} = \frac{k}{N}\left[N - Z(t)\right] Z(t)$$

$$\Longrightarrow \quad Z' = \frac{k}{N}(N - Z)Z \qquad \text{1 P.}$$

(b) Bei der oben beschriebenen Gleichung handelt es sich offensichtlich um eine separable Differentialgleichung. Die Methode der Trennung der Variablen ergibt dann das Folgende.

$$\frac{Z'(t)}{\left[N - Z(t)\right] Z(t)} = \frac{k}{N} \quad \Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{Z'(s)}{\left[N - Z(s)\right] Z(s)} \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{k}{N} \,\mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s} \,\mathrm{d}s = \frac{k}{N}(t - t_0) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Lösung des Integrals zeigt sich eine Partialbruchzerlegung als sinnvoll.

$$\frac{1}{(N-s)s} = \frac{N}{N}\frac{1}{(N-s)s} = \frac{1}{N}\frac{N - s + s}{(N-s)s} = \frac{1}{Ns} - \frac{1}{N(s-N)}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{(N-s)s} \,\mathrm{d}s = \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{Ns} \,\mathrm{d}s - \int_{Z_0}^{Z(t)} \frac{1}{N(s-N)} \,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{N} \ln\left[\frac{Z(t)}{Z_0}\right] - \frac{1}{N} \ln\left[\frac{Z(t) - N}{Z_0 - N}\right] = \frac{1}{N} \ln\left(\frac{Z(t)\left[Z_0 - N\right]}{Z_0\left[Z(t) - N\right]}\right) \qquad \text{+1 P.}$$

Die Lösung des Integrals wird nun eingesetzt und die entstehende Gleichung wird explizit nach $Z(t)$ umgestellt.

$$\frac{Z(t)}{Z(t) - N} = \frac{Z_0 e^{k(t-t_0)}}{Z_0 - N} = -A e^{k(t-t_0)}, \qquad A := \frac{Z_0}{N - Z_0}$$

 *bitte wenden*

$$\implies Z(t) = \frac{NAe^{k(t-t_0)}}{1+Ae^{k(t-t_0)}} = N\left(1 - \frac{1}{1+Ae^{k(t-t_0)}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Nun setzen wir die Anfangswerte ein und unterstreichen unser Ergebnis doppelt.

$$A = \frac{1}{20} \implies Z(t) = N\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{20}e^{kt}}\right) \qquad \text{1 P.}$$

(c) Die nachfolgende Skizze zeigt die Werte $M(t)$ und $Z(t)$ für verschiedene Zeiten $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) Es sei $\alpha^* \in \left(0, 1 - \frac{Z_0}{N}\right)$ eine feste Grenze für den Anteil der Menschen. Wir suchen nun den frühesten Zeitpunkt $t^* \in \mathbb{R}^+$, sodass $\alpha(t^*) \le \alpha^*$ gilt. Durch Äquivalenzumformungen zeigt man, dass $t^*$ existiert und eindeutig ist.

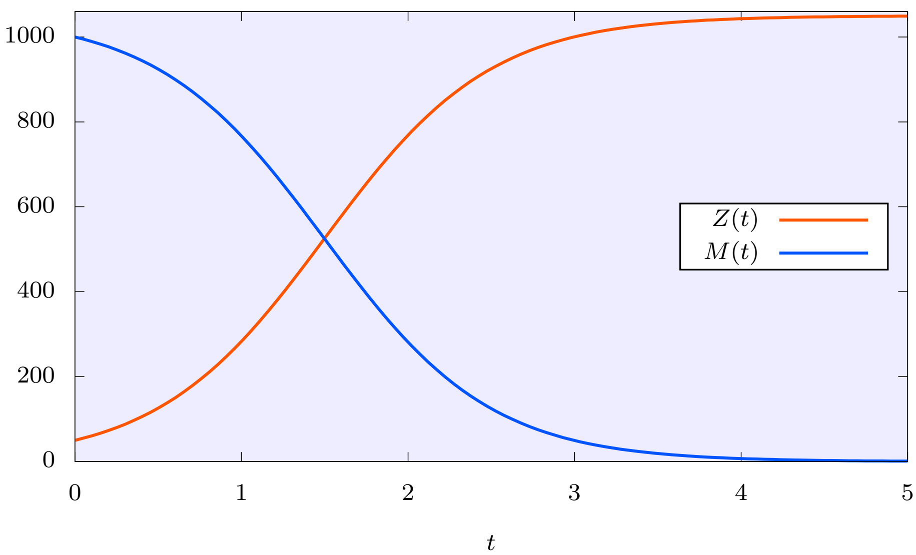
$$\alpha^* = \alpha(t^*) = 1 - \beta(t^*) = 1 - \frac{Z(t^*)}{N} = \frac{1}{1+Ae^{k(t^*-t_0)}}$$

$$\implies t^* = t_0 + \frac{1}{k}\ln\left[\frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha^*} - 1\right)\right] = t_0 + \frac{1}{k}\ln\left[\frac{N-Z_0}{Z_0}\left(\frac{1}{\alpha^*} - 1\right)\right]$$

Setzt man nun die gewünschten Werte der Parameter ein, so erhält man das folgende Ergebnis.

$$t_0 = 0, \qquad k = 2, \qquad A = 0.05, \qquad \alpha^* = 1\,\% \implies t^* = \frac{\ln 1980}{2} \approx 3.8 \qquad +1 \text{ P.}$$

Zu beachten ist, dass $t^*$ sowohl von $k$ als auch von $N$ abhängig ist. Steigt $k$, so verringert sich $t^*$. Steigt $N$, so erhöht sich auch $t^*$. +1 P.




2 P.

Abbildung 1: Die Abbildung zeigt die Anzahl der Zombies $Z(t)$ und der gesunden Menschen $M(t)$ für verschiedene Zeiten $t$.

**Aufgabe 14** *Homogene Differentialgleichungen*

Eine Funktion von zwei Variablen heißt homogen vom Grad $k$, wenn für einen beliebigen Parameter $\lambda$ das Folgende gilt.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

Dementsprechend nennt man eine Differentialgleichungen der folgenden Form auch homogen, wenn $f$ und $g$ homogene Funktionen vom gleichen Grad sind.

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

(a) Lösen Sie die folgende homogene Differentialgleichung.

$$2xyy' = 3y^2 - x^2$$

Anleitung: Führen Sie eine neue Variable $z(x)$ gemäß $y(x) =: x \cdot z(x)$ ein und behandeln Sie die für $z(x)$ entstehende Differentialgleichung mit der Methode der Trennung der Variablen.

(b) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung, die nicht homogen ist.

$$y' = \frac{y + x - 2}{y - x + 4}$$

Schuld daran sind die beiden additiven Konstanten in Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite. Gehen Sie in zwei Schritten nach folgender Anleitung vor.

- Führen Sie die neue Variablen $v := y - y_0$ und $u := x - x_0$ ein und bestimmen Sie $x_0$ und $y_0$, sodass die neue Differentialgleichung in den Variablen $u$ und $v$ homogen ist (Gleichungssystem mit zwei Unbekannten).
- Verfahren Sie mit der Substitution $v(u) =: u \cdot z(u)$ weiter, wie in Teilaufgabe (a).

(c) Machen Sie in beiden Fällen die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung $y(x)$ in die ursprüngliche Differentialgleichung.

**Aufgabe 15** *Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen*

Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen durch ihre Ordnung, Homogenität, Linearität und Separabilität. Lösen Sie zudem die separablen Differentialgleichungen.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \sin y - x^2 = 0$

(iii) $y' + \tan(x) \cdot y = 0$

(iv) $\dfrac{y''}{y'} + x = 0$

(v) $yy' - x = 0$

(vi) $\dfrac{x+1}{y+2} = \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$

(vii) $$\sqrt{y^2 + 3a^2 + ya\left(2 - \frac{4a}{2y}\right)} + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x + a}$$

LÖSUNG:

(i) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 2y' - y = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. 1 P.

(ii) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y' + \sin y = x^2$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

(iii) Durch eine Äquivalenzumformung lässt sich die Differentialgleichungen in die beiden folgenden Formen bringen.

$$y' + \tan(x)y = 0, \qquad y' = -y\tan x$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Durch Anwendung der Methode der Trennung der Variablen, erhält man dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\tan x \implies \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\tan s\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{\cos x}{\cos x_0}\right| \implies |y(x)| = \left|\frac{y_0}{\cos x_0}\right| |\cos x|$$ 1 P.

(iv) Wir formen wieder die gegebene Differentialgleichung um und erhalten die folgenden beiden Ausdrücke.

$$y'' = -xy', \qquad y'' + xy' = 0$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. Durch die Substitution mit $z := y'$ lässt sich zudem noch zeigen, dass sie in eine separable Differentialgleichung umgeformt werden kann. 1 P. $+\frac{1}{2}$ P.

(v) Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Es lässt sich hier keine Homogenität definieren, da sie nicht linear ist. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s\,\mathrm{d}s \implies \int_{y_0}^{y(x)} s\,\mathrm{d}s = \frac{y^2(x)-y_0^2}{2} = \frac{x^2-x_0^2}{2}$$

$$\implies y^2(x) = x^2 - x_0^2 + y_0^2 \implies y(x) = \pm\sqrt{x^2-x_0^2+y_0^2}$$ 1 P.

(vi) Durch die Trennung von Zähler und Nenner lässt sich die Differentialgleichung in eine Form bringen, an der sich ihre Eigenschaften ablesen lassen.

$$y' = (x+1)\frac{1}{y+2}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable, Differentialgleichung 1.Ordnung. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung. 1 P.

$$[y(x)+2]\,y'(x) = x+1 \implies \int_{y_0}^{y(x)} s+2\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s+1\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \frac{1}{2}\left([y(x)+2]^2 - [y_0+2]^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2-(x_0+1)^2\right)$$

$$\implies [y(x)+2]^2 = (x+1)^2-(x_0+1)^2+(y_0+2)^2$$

$$\implies y(x) = -2 \pm \sqrt{(x+1)^2-(x_0+1)^2+(y_0+2)^2}$$ 1 P.

(vii) Berechnet man den ersten Term auf der linken Seite dieser Gleichung, so ist es möglich die zweite binomische Formel zu verwenden. In diesem Falle erhält man das folgende Resultat.

$$|y+a| + y'\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{x+a}$$

Damit handelt es sich bei dieser Differentialgleichung um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. 1 P.

## Aufgabe 16 *Die Methode der Variablentrennung*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen und bestimmen Sie gegebenenfalls die Integrationskonstante, sodass die nebenstehenden Anfangsbedingungen erfüllt sind.

(i) $y' = \dfrac{xe^{-y}}{x^2+1}, \qquad y(1) = 0$

(ii) $xyy' = \dfrac{x^2+2}{y-1}$

(iii) $\quad y' = \dfrac{x+y}{x+y+2}, \qquad y(1) = -1$

Machen Sie in allen Fällen die Probe durch Einsetzen Ihrer Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung. Dies ist auch dann verlangt, wenn die Lösung nur in impliziter Form angebbar ist.

**Hinweis:** Führen Sie in Teilaufgabe (iii) die neue Variable $z(x) \coloneqq x + y(x)$ ein.

LÖSUNG:

(i) Separieren Sie $x$ und $y(x)$ auf jeweils eine Seite der Differentialgleichung und integrieren Sie die erhaltene Gleichung.

$$y'(x) = \frac{xe^{-y(x)}}{x^2+1} \implies e^{y(x)}y'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\implies \int e^{y(x)}y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \qquad \text{1 P.}$$

Lösen Sie das Integral mithilfe einer logarithmischen Integration oder durch Substitution, indem Sie $x^2$ durch eine geeignete Variable ersetzen.

$$\int e^y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\implies e^{y(x)} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\sqrt{x^2+1} + C \qquad \text{1 P.}$$

Notieren Sie die explizite Lösung durch die Anwendung von $\ln$.

$$y(x) = \ln\left[\ln\left(A\sqrt{x^2+1}\right)\right], \qquad A \coloneqq e^C \qquad \text{1 P.}$$

Fordern Sie nun $y(1) \stackrel{!}{=} 0$, bestimmen Sie die Konstante $A$ und setzen Sie die erhaltene Lösung in die explizite allgemeine Form ein.

$$y(1) \stackrel{!}{=} 0 \implies 1 = \ln\left(A\sqrt{2}\right) \implies A = \frac{\sqrt{2}}{2}e \qquad \text{1 P.}$$

$$y(x) = \ln\left[\ln\left(\frac{e}{2}\sqrt{2(x^2+1)}\right)\right] = \ln\left[1 + \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+1)}\right)\right] \qquad \text{1 P.}$$

Sei $y \eqqcolon \ln u$ mit $u(x) = \ln\left(A\sqrt{x^2+1}\right)$. Dann erhält man durch die Anwendung der Kettenregel die folgende Aussage.

$$y'(x) = u'(x)\ln' u(x) = \frac{1}{A\sqrt{x^2+1}} \cdot A \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{u(x)} = e^{-y(x)}\frac{x}{x^2+1} \qquad \text{1 P.}$$

(ii) Separieren Sie $x$ und $y(x)$ wieder auf jeweils eine Seite der Differentialgleichung

$$xy(x)y'(x) = \frac{x^2+2}{y(x)-1} \implies y(x)\,[y(x)-1]\,y'(x) = \frac{x^2+2}{x} \qquad \text{1 P.}$$

Integrieren Sie die rechte Seite der erhaltenen Gleichung durch Polynomintegration und der Umkehrregel.

$$\int \left[y^2(x) - y(x)\right] y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$$

$$\implies \int y^2 - y\,\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| \qquad \text{1 P.}$$

Lösen Sie nun auch das Integral der rechten Seite durch Polynomintegration und notieren Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + C$$

$$\implies 2y^3 - 3y^2 = 3x^2 + 12\ln|x| + D \qquad \text{1 P.}$$

Durch implizite Ableitung der allgemeinen Form erhalten Sie Folgendes.

$$6y^2(x)y'(x) - 6y(x)y'(x) = 6x + \frac{12}{x} \implies y(x)\,[y(x)-1]\,y'(x) = x + \frac{2}{x}$$

$$\implies xy(x)\,[y(x)-1]\,y'(x) = x^2 + 2 \qquad \text{1 P.}$$

(iii) Definieren Sie $z(x) := x + y(x)$ und bestimmen Sie die Ableitung von $z$.

$$z'(x) = 1 + y'(x) \implies y'(x) = z'(x) - 1$$

Substituieren Sie nun $x + y(x)$ in der Differentialgleichung durch $z(x)$.

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x + y(x) + 2} \implies z'(x) - 1 = \frac{z}{z+2} \qquad \text{1 P.}$$

Führen Sie für die erhaltene Differentialgleichung das Verfahren der Trennung der Variablen durch. Separieren Sie $z(x)$ und $x$ auf jeweils eine Seite und integrieren Sie die erhaltene Gleichung.

$$z'(x) = \frac{z(x)}{z(x)+2} + 1 = \frac{2z(x)+2}{z+2} = 2\,\frac{z(x)+1}{z(x)+2} \qquad \text{1 P.}$$

$$\implies \int \frac{z(x)+2}{z(x)+1} z'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{z+1}\right) \mathrm{d}z = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$\implies z(x) + \ln|z(x)+1| = 2x + C \qquad \text{1 P.}$$



*bitte wenden*

Führen Sie die Resubstitution durch und geben Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form an.

$$
\begin{aligned}
& x + y(x) + \ln|x + y(x) + 1| = 2x + C \\
\implies\ & x + y(x) + 1 = \exp(x - y(x) + C) = Ae^{x-y(x)}, \qquad A := e^C \\
\implies\ & x + y(x) = Ae^{x-y(x)} - 1 && \text{1 P.}
\end{aligned}
$$

Fordern Sie die gegebenen Anfangsbedingungen und bestimmen Sie die Konstante $A$.

$$
\begin{aligned}
& y(1) \overset{!}{=} -1 \implies 0 = Ae^2 - 1 \implies A = e^{-2} \\
\implies\ & x + y(x) = \frac{e^{x-y(x)}}{e^2} - 1 = e^{x-y(x)-2} - 1 && \text{1 P.}
\end{aligned}
$$

Auch hier ist wieder eine implizite Ableitung notwendig.

$$
1 + y'(x) = Ae^{x-y(x)}\left[1 - y'(x)\right]
$$

Durch Verwendung der allgemeinen Lösung erhalten Sie für die Konstante $A$ den folgenden Ausdruck.

$$
A = e^{y(x)-x}\left[x + y(x) + 1\right]
$$

Das Einsetzen dieser Gleichung resultiert dann in der gewünschten Differentialgleichung.

$$
\begin{aligned}
& 1 + y'(x) = e^{y(x)-x}\left[x + y(x) + 1\right] e^{x-y(x)}\left[1 - y'(x)\right] \\
\implies\ & 1 + y'(x) = x + y(x) + 1 - \left[x + y(x) + 1\right] y'(x) \\
\implies\ & y'(x)\left[x + y(x) + 2\right] = x + y(x) && \text{1 P.}
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 17 *Orthogonaltrajektorien*

(a) Skizzieren Sie die folgende Kurvenschar, wobei $c$ eine eine reelle Konstante darstellt.

$$
xy = c
$$

Bestimmen Sie dazu die Schar der Orthogonaltrajektorien ud tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(b) Skizzieren Sie die folgende Kurvenschar und bestimmen Sie die Differentialgleichung, die dieser Kurvenschar genügt. Auch hier stellt $c$ eine reelle Konstante dar.

$$
y^2 = 4c(x + c)
$$

Zeigen Sie dann, dass diese Differentialgleichung die gleiche bleibt, wenn $y'$ durch $-\frac{1}{y'}$ ersetzt wird. Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus dieser Eigenschaft?

## Aufgabe 18 *Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld*

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt $c$ einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.

(b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 \coloneqq 6, \qquad y_0 \coloneqq y(x_0) \coloneqq 4$$

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen an, dass es sich bei $y$ um eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ handelt und dass der Graph von $y$ die gegebene Gleichung für alle $x \in M$ erfüllt.

$$x^2 - 2y^2(x) = c^2 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\tilde{x}^2 - 2y^2(\tilde{x})\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}c^2\bigg|_x \implies 2x - 4y(x)y'(x) = 0$$

Man erhält damit eine Differentialgleichung der folgenden Formen.

$$2yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{2y}$$ 1 P.

(b) Die Orthogonaltrajektorien müssen demzufolge der folgenden Differentialgleichung genügen. Das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung wird in der nachfolgenden Skizze abgebildet.

$$y' = -\frac{2y}{x}$$ 1 P.

(c) Durch Umstellung erhält man eine separierte Differentialgleichung, die sich für die Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y_0 \coloneqq y(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ direkt lösen lässt.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \implies \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\,\mathrm{d}s = -2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

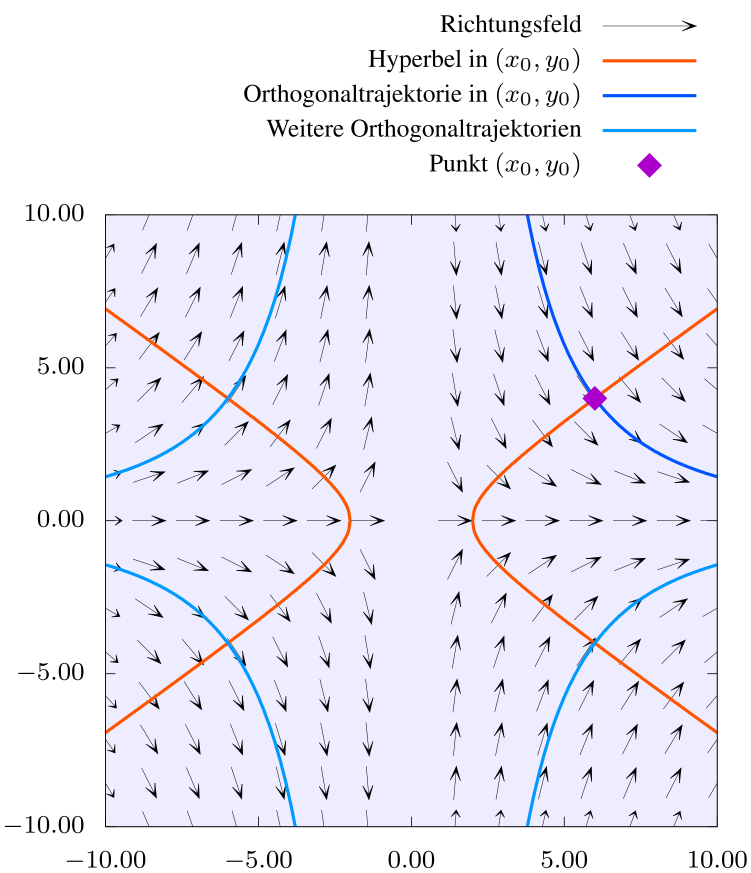
$$\implies \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -2\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \; y(x) = \frac{y_0 x_0^2}{x^2} \qquad\qquad 1\text{ P.}$$

Setzt man nun $x_0 = 6$ und $y_0 = 4$, so erhält man die folgenden Aussagen.

$$c^2 = x_0^2 - 2y_0^2 = 4 \;\Longrightarrow\; c = \pm 2, \qquad y_0 x_0^2 = 144 \qquad\qquad 1\text{ P.}$$

Auch hier sind die entsprechende Hyperbel und die, der Differentialgleichung entsprechenden, Orthogonaltrajektorie in der nachfolgenden Skizze eingezeichnet.




3 P.

Abbildung 2: Das Diagramm zeigt das Richtungsfeld der Orthogonaltrajektorien und das Beispiel einer zugehörigen Hyperbel.

## Aufgabe 19 *Zwei separable Differentialgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mittels Trennung der Variablen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

(i) $$\frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\tan x \cdot y^{-2}$$

(ii) $$xyy' = y - 1$$

LÖSUNG:

(i) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von $x$ und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir $x_0$ und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$y^2(x)y'(x) = -\tan x \cos x = -\sin x \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\sin s\,\mathrm{d}s$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{y(x_0)}^{y(x)} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left[y^3(x) - y_0^3\right] = \cos x - \cos x_0 \qquad \text{2 P.}$$

$$\Longrightarrow y(x) = \sqrt[3]{3\left(\cos x - \cos x_0\right) + y_0^3} \qquad \text{1 P.}$$

Um die Probe durchzuführen, leiten wir als Erstes die erhaltene Lösung ab und substituieren dann geeignete Terme durch $y(x)$. Zudem erweitern wir mit $\cos x$ um auf die ursprüngliche Differentialgleichung zu kommen.

$$y'(x) = \frac{-\sin x}{\left[3(\cos x - \cos x_0) + y_0^3\right]^{\frac{2}{3}}} = \frac{-\sin x}{y^2(x)} = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x} y^{-2}(x) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \frac{y'(x)}{\cos x} = -y^{-2}(x)\tan x \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

(ii) Durch Umformung trennen wir in der Differentialgleichung zuerst $y(x)$ von $x$ und erhalten die folgende Gleichung. Hierbei definieren wir $x_0$ und $y_0 := y(x_0)$ als die Anfangsbedingungen einer Lösung der Differentialgleichung.

$$\frac{y(x)y'(x)}{y(x) - 1} = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s) - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s \qquad \text{1 P.}$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun wieder entsprechend der Lösung für separable Differentialgleichungen die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite ist durch die Anwendung von Integrationsregeln direkt integrierbar.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s) - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| \qquad \text{1 P.}$$

Die Lösung des Integrals lässt sich wie folgt durch intelligente Addition einer Null im Zähler des Bruches bestimmen.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s - 1 + 1}{s - 1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s-1}\,\mathrm{d}s \qquad +1\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = y(x) - y_0 + \ln\left|\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right| \qquad 1\text{ P.}$$

Die endgültige Lösung ist jetzt durch Einsetzen ermittelbar. Zu beachten sind lediglich die Singularitäten an den Stellen $x_0 = 0$ und $y_0 - 1 = 0$. Durch Sie folgt, dass $x$ beziehungsweise $y(x) - 1$ das gleiche Vorzeichen besitzt wie $x_0$ beziehungsweise $y_0 - 1$.

$$\left|\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right| = \frac{y(x)-1}{y_0-1}, \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow y(x) - y_0 + \ln\left(\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{y(x)-1}{y_0-1} e^{y(x)-y_0} = \frac{x}{x_0}$$

$$\Longrightarrow [y(x)-1]\, e^{y(x)} = (y_0 - 1)\, e^{y_0} \frac{x}{x_0} \qquad 1\text{ P.}$$

Um die Probe durchzuführen, differenzieren wir als Erstes die erhaltene Lösung implizit und vereinfachen die erhaltenen Terme.

$$y'(x)e^{y(x)} + [y(x)-1]\, y'(x)e^{y(x)} = y(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0} e^{y_0} \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Um zur ursprünglichen Differentialgleichung zu gelangen, erweitern wir die Gleichung mit $x$ und substituieren die daraus entstehende rechte Seite der Gleichung durch die berechnete Lösung.

$$xy(x)y'(x)e^{y(x)} = \frac{y_0-1}{x_0} e^{y_0} x = [y(x)-1]\, e^{y(x)}$$

$$\Longrightarrow xy(x)y'(x) = y(x) - 1 \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$