Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 2: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Orthogonaltrajektorien und Richtungsfeld

Betrachten Sie die Schar von Hyperbeln, die durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei stellt c einen reellen Parameter dar.

$$x^2 - 2y^2 = c^2$$

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurvenschar beschreibt.

(b) Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für die zugehörigen Orthogonaltrajektorien her und skizzieren Sie deren Richtungsfeld.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Orthogonaltrajektorien durch die Methode der Trennung der Variablen. Ergänzen Sie Ihre Skizze durch Hyperbeln und Orthogonaltrajektorien für den folgenden Anfangswert.

$$x_0 \coloneqq 6, \qquad y_0 \coloneqq y(x_0) \coloneqq 4$$

LÖSUNG:

(a) Wir nehmen an, dass es sich bei y um eine Funktion auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ handelt und dass der Graph von y die gegebene Gleichung für alle $x \in M$ erfüllt.

$$x^2 - 2y^2(x) = c^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\, \tilde{x}^2 - 2y^2(\tilde{x})\bigg|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{x}}\, c^2\bigg|_x \quad \Longrightarrow \quad 2x - 4y(x)y'(x) = 0$$

Man erhält damit eine Differentialgleichung der folgenden Formen.

$$2yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{2y}$$ 1 P.

(b) Die Orthogonaltrajektorien müssen demzufolge der folgenden Differentialgleichung genügen. Das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung wird in der nachfolgenden Skizze abgebildet.

$$y' = -\frac{2y}{x}$$ 1 P.

bitte wenden

(c) Durch Umstellung erhält man eine separierte Differentialgleichung, die sich für die Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $y_0 := y(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ direkt lösen lässt.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)}\,\mathrm{d}s = -2\int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

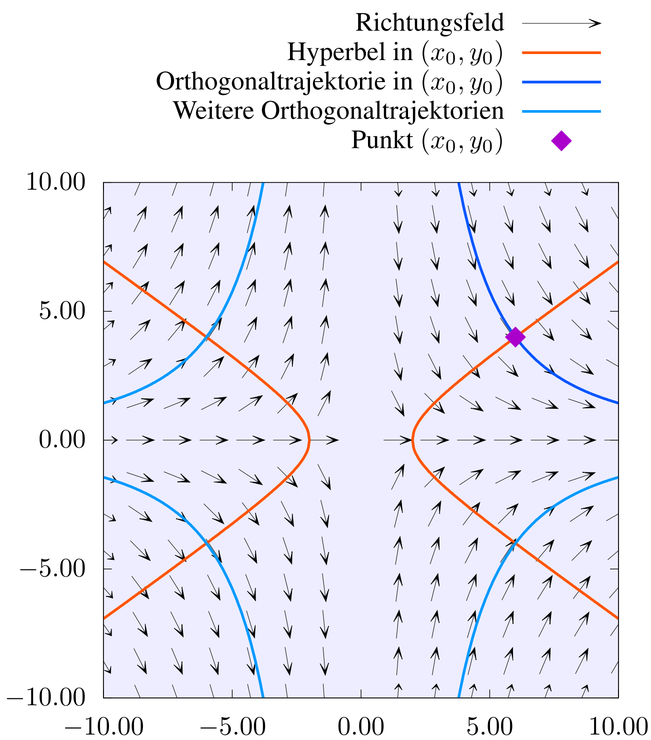
$$\Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left(\frac{y(x)}{y_0}\right) = -2\ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -2\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \frac{y_0 x_0^2}{x^2}$$ 1 P.

Setzt man nun $x_0 = 6$ und $y_0 = 4$, so erhält man die folgenden Aussagen.

$$c^2 = x_0^2 - 2y_0^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = \pm 2, \qquad y_0 x_0^2 = 144$$ 1 P.

Auch hier sind die entsprechende Hyperbel und die, der Differentialgleichung entsprechenden, Orthogonaltrajektorie in der nachfolgenden Skizze eingezeichnet.



3 P.

Das Diagramm zeigt das Richtungsfeld der Orthogonaltrajektorien und das Beispiel einer zugehörigen Hyperbel.

Aufgabe 2 *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*

Gegeben sei eine gewöhnliche nicht-separable Differentialgleichung mit der freien Variable t und der folgenden Form. Beachten Sie, dass $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ die erste Ableitung nach der Zeit beschreibt.

$$t\dot{y} = y\,(1 + \ln y - \ln t)$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung, indem Sie sie durch die folgende Substitution in eine separable Differentialgleichung überführen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

$$z(t) \coloneqq \frac{y(t)}{t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

LÖSUNG:

Durch die Verwendung der Substitution lassen sich die folgenden Aussagen für alle $t \in \mathbb{R}^+$ treffen.

$$y(t) = tz(t) \quad \Longrightarrow \quad y'(t) = z(t) + tz'(t) \qquad \text{1 P.}$$

Das Umformen der ursprünglichen Differentialgleichung und Einsetzen der Substitution führt dann zur gewünschten separablen Differentialgleichung, die sich durch die Methode der Trennung der Variablen lösen lässt.

$$ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] \quad \Longrightarrow \quad t\,[z(t) + tz'(t)] = tz(t)\,[1 + \ln z(t)]$$

$$\Longrightarrow \quad tz'(t) = z(t)\ln z(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{z'(t)}{z(t)\ln z(t)} = \frac{1}{t} \qquad \text{1 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{z(s)\ln z(s)}\,\mathrm{d}s = \int_{z_0}^{z(t)} \frac{1}{s\ln s}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{\ln z(t)}{\ln z_0}\right) = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad \Longrightarrow \quad z(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) = z_0^{\frac{t}{t_0}} \qquad \text{2 P.}$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = tz(t) = t\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \text{1 P.}$$

Für die Probe leitet man nun die Lösung ab und substituiert den erhaltenen Term mithilfe der berechneten Lösung.

$$y'(t) = \exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) + \frac{t\ln z_0}{t_0}\exp\left(\frac{t\ln z_0}{t_0}\right) \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

$$\Longrightarrow \quad y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\frac{y(t)}{t} = \frac{y(t)}{t}\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad ty'(t) = y(t)\left[1 + \ln\left(\frac{y(t)}{t}\right)\right] = y(t)\,[1 + \ln y(t) - \ln t] \qquad \tfrac{1}{2}\text{ P.}$$

Aufgabe 3 *Eine Zombieapokalypse*

Auf einer kleinen Insel gerät ein Virus in Umlauf, der die Bevölkerung in Zombies verwandelt. Jeder Infizierte hat in einer Zeitspanne $\tau \in \mathbb{R}^+$ Kontakt mit $\tau \cdot k$ anderen Personen, die teilweise ebenfalls infiziert, teilweise aber auch gesunde Menschen sind, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ gilt. Gerät ein gesunder Mensch in Kontakt mit einem Zombie, so wird dieser infiziert.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die dieser Zombieapokalypse genügt. Verwenden Sie $N \in \mathbb{N}$ für die Größe der Inselbevölkerung, $Z(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Infizierten, $M(t) \in [0, N]$ für die Anzahl der Gesunden und $t \in \mathbb{R}^+$ als freien Parameter der Zeit.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst nur die Infizierten zum Zeitpunkt $t + \tau$ und überführen Sie die Differenzengleichung durch Grenzwertbildung in die gesuchte Differentialgleichung.

(b) Lösen Sie diese Differentialgleichung und das folgende Anfangswertproblem.

$$t_0 := 0, \qquad Z_0 := Z(0) := \frac{N}{21}$$

(c) Skizzieren Sie $Z(t)$ und $M(t)$ für $k = 2$, $N = 1050$ und $t \in \mathbb{R}^+$.

(d) **Zusatz:** Ab wann ist nur noch weniger als $1\,\%$ der Bevölkerung nicht infiziert? Wie beeinflussen die Parameter k und N diesen Zeitpunkt?

LÖSUNG:

(a) Wir definieren als Erstes den Anteil der gesunden Menschen $\alpha(t)$ und den Anteil an infizierten Menschen $\beta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\alpha(t) := \frac{M(t)}{N}, \qquad \beta(t) := \frac{Z(t)}{N} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha(t) + \beta(t) = 1$$

Trifft eine infizierte Person nun $\tau \cdot k$ andere Personen, so teilen sich Infizierte und Gesunde entsprechend ihrer Anteile $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ auf diese Anzahl auf. Die Anzahl $S(t)$ der gesunden Menschen, die ein Zombie in der Zeit τ trifft und infiziert, kann demnach durch den folgenden Term approximiert werden.

$$S(t) = \tau \cdot k \cdot \alpha(t)$$

Die Gesamtanzahl $\Delta Z(t)$ der gesunden Menschen, die im Zeitschritt τ infiziert werden, kann dann mittels einer Multiplikation mit der Anzahl aller Zombies bestimmt werden.

$$\Delta Z(t) = \tau k \alpha(t) Z(t) = \frac{\tau k}{N} M(t) Z(t) = \frac{\tau k}{N} \left[N - Z(t) \right] Z(t)$$

$$\Longrightarrow \qquad Z(t+\tau) = Z(t) + \Delta Z(t) = Z(t) + \frac{\tau k}{N} \left[N - Z(t) \right] Z(t)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} = \frac{k}{N} \left[N - Z(t) \right] Z(t)$$

$$\Longrightarrow \qquad Z'(t) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{Z(t+\tau) - Z(t)}{\tau} = \frac{k}{N} \left[N - Z(t) \right] Z(t)$$