Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 1: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Klassifikation von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Klassifizieren Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen durch ihre Ordnung, Homogenität, Linearität und Separabilität. Lösen Sie zudem die separablen Differentialgleichungen.

(i) $$\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y$$

(ii) $$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + \sin y - x^2 = 0$$

(iii) $$y' + \tan(x) \cdot y = 0$$

(iv) $$\frac{y''}{y'} + x = 0$$

(v) $$yy' - x = 0$$

(vi) $$\frac{x+1}{y+2} = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$$

(vii) $$\sqrt{y^2 + 3a^2 + ya\left(2 - \frac{4a}{2y}\right)} + \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}$$

LÖSUNG:

(i) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y'' + 2y' - y = 0$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung.

(ii) Durch eine einfache Umformung erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$y' + \sin y = x^2$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung.

(iii) Durch eine Äquivalenzumformung lässt sich die Differentialgleichungen in die beiden folgenden Formen bringen.

$$y' + \tan(x)y = 0, \qquad y' = -y\tan x$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Durch Anwendung der Methode der Trennung der Variablen, erhält man die folgende Lösung.

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\tan x \quad \Longrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\tan s\,\mathrm{d}s$$

bitte wenden

$$\implies \quad \ln\left|\frac{y(x)}{y_0}\right| = \ln\left|\frac{\cos x}{\cos x_0}\right| \quad \implies \quad |y(x)| = \left|\frac{y_0}{\cos x_0}\right| |\cos x|$$

(iv) Wir formen wieder die gegebene Differentialgleichung um und erhalten die folgenden beiden Ausdrücke.

$$y'' = -xy', \qquad y'' + xy' = 0$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare, homogene, nicht-separable Differentialgleichung 2.Ordnung. Durch die Substitution mit $z := y'$ lässt sich zudem noch zeigen, dass sie in eine separable Differentialgleichung umgeformt werden kann.

(v) Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Es lässt sich hier keine Homogenität definieren, da sie nicht linear ist. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung.

$$\int_{x_0}^{x} y(s)y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s\,\mathrm{d}s \quad \implies \quad \int_{y_0}^{y(x)} s\,\mathrm{d}s = \frac{y^2(x) - y_0^2}{2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$$

$$\implies \quad y^2(x) = x^2 - x_0^2 + y_0^2 \quad \implies \quad y(x) = \pm\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2}$$

(vi) Durch die Trennung von Zähler und Nenner lässt sich die Differentialgleichung in eine Form bringen, an der sich ihre Eigenschaften ablesen lassen.

$$y' = (x+1)\frac{1}{y+2}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, separable, Differentialgleichung 1.Ordnung. Die Methode der Trennung der Variablen liefert dann die folgende Lösung.

$$[y(x) + 2]\,y'(x) = x + 1 \quad \implies \quad \int_{y_0}^{y(x)} s + 2\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} s + 1\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \quad \frac{1}{2}\left([y(x)+2]^2 - [y_0+2]^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)^2 - (x_0+1)^2\right)$$

$$\implies \quad [y(x)+2]^2 = (x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2$$

$$\implies \quad y(x) = -2 \pm \sqrt{(x+1)^2 - (x_0+1)^2 + (y_0+2)^2}$$

(vii) Berechnet man den ersten Term auf der linken Seite dieser Gleichung, so ist es möglich die zweite binomische Formel zu verwenden. In diesem Falle erhält man das folgende Resultat.

$$|y+a| + y'\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{x+a}$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, nicht-lineare, nicht-separable Differentialgleichung 1.Ordnung. Ist jedoch durch gewisse Bedingungen festgelegt, dass $y + a$ nicht negativ wird, so kann die gegebene Differentialgleichung auch als lineare, inhomogene Differentialgleichung geschrieben werden.

Aufgabe 2 *Zwei separable Differentialgleichungen*

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mittels Trennung der Variablen. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie eine Probe durchführen.

(i) $$\frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -\tan x \cdot y^{-2}$$

(ii) $$xyy' = y - 1$$

LÖSUNG:

(i) Durch Umformung trennen wir $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung.

$$y^2(x)y'(x) = -\tan x \cos x = -\sin x$$

$$\implies \quad \int_{x_0}^{x} y(s)^2 y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} -\sin s\,\mathrm{d}s$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite lässt sich direkt integrieren.

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\left(y^3(x) - y_0^3\right) = \cos x - \cos x_0$$

$$y(x) = \sqrt[3]{3\left(\cos x - \cos x_0\right) + y_0^3}$$

(ii) Durch Umformung trennen wir $y(x)$ von x und erhalten die folgende Gleichung.

$$\frac{y(x)y'(x)}{y(x)-1} = \frac{1}{x}$$

$$\implies \quad \int_{x_0}^{x} \frac{y(s)y'(s)}{y(s)-1}\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

Für die linke Seite der Gleichung lässt sich nun die Substitutionsregel verwenden. Die rechte Seite lässt sich direkt integrieren.

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s-1+1}{s-1}\,\mathrm{d}s = \int_{y_0}^{y(x)} \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{s-1}\,\mathrm{d}s$$

$$\implies \quad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{s}{s-1}\,\mathrm{d}s = y(x) - y_0 + \ln\left(\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right)$$

Durch Einsetzen erhält man

$$y(x) - y_0 + \ln\left(\frac{y(x)-1}{y_0-1}\right) = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad \implies \quad \frac{y(x)-1}{y_0-1}e^{y(x)-y_0} = \frac{x}{x_0}$$

$$\implies \quad \left[y(x)-1\right]e^{y(x)} = \left(y_0-1\right)e^{y_0}\frac{x}{x_0}$$