Aufgabe 3: Koordinatentransformation 6 Punkte + 3 ZP

Ein Koordinatensystem (u, w, z) sei gegeben durch

$$x = \alpha \cosh u \cos w$$
$$y = \alpha \sinh u \sin w \qquad \text{mit} \qquad 0 \le u < \infty, \quad 0 \le w < 2\pi, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$
$$z = z$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_u$, ~~und~~ $\vec{e}_w$ und $\vec{e}_z$.
Handelt es sich hierbei um Orthogonalkoordinaten? Wenn ja, um ein rechts- oder linkshändiges System?

b) Berechnen Sie das Linienelement ds^2 und das Volumenelement dV.

Zusatz: c) Skizzieren Sie die Linien $u = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ für $w \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösung:

a) $d_u\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du = (\alpha \sinh u \cos w \, \vec{i} + \alpha \cosh u \sin w \, \vec{j} + 0\vec{k}) du$ (allg. Formel) 1

$|d_u\vec{r}| = \alpha \sqrt{\sinh^2 u \cos^2 w + \cosh^2 u \sin^2 w}$

$\Rightarrow \vec{e}_u = \dfrac{\sinh u \cos w \, \vec{i} + \cosh u \sin w \, \vec{j}}{\sqrt{\sinh^2 u \cos^2 w + \cosh^2 u \sin^2 w}}$ 1

$d_w\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw = (-\alpha \cosh u \sin w \, \vec{i} + \alpha \sinh u \cos w \, \vec{j} + 0\vec{k}) dw$

$|d_w\vec{r}| = \alpha \sqrt{\cosh^2 u \sin^2 w + \sinh^2 u \cos^2 w}$

$\Rightarrow \vec{e}_w = \dfrac{-\cosh u \sin w \, \vec{i} + \sinh u \cos w \, \vec{j}}{\sqrt{\cosh^2 u \sin^2 w + \sinh^2 u \cos^2 w}}$ 1

$\vec{e}_z = \vec{k}$

Orthogonalität: $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_w \cdot \vec{e}_z = 0$ offensichtlich

$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_w = (-\sinh u \cos w \cosh u \sin w + \sinh u \cos w \cosh u \sin w) / (\sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{\ldots})$
$= 0$ ✓

Händigkeit: $\vec{e}_u \times \vec{e}_w = (\sinh^2 u \cos^2 w + \cosh^2 u \sin^2 w)\vec{k} / (\sinh^2 \cos^2 w + \cosh^2 u \sin^2 w) = \vec{k}$

$\rightarrow$ rechtshändig 1

b) $d\vec{r} = d_w\vec{r} + d_u\vec{r} + d_z\vec{r} = \vec{e}_w \cdot \alpha\sqrt{\sinh^2 u\cos^2 w + \cosh^2 u\sin^2 w}\; dw$

$+\; \vec{e}_u \cdot \alpha\sqrt{\qquad \text{"} \qquad \text{"} \qquad}\; du \quad + dz\,\vec{e}_z$

$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \alpha^2(\sinh^2 u\cos^2 w + \cosh^2 u\sin^2 w)\left[du^2 + dw^2\right] + dz^2$ Linienelement 1

$$dV = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,w,z)}\right| du\,dw\,dz = \begin{vmatrix} \alpha\sinh u\cos w & -\alpha\cosh u\sin w & 0 \\ \alpha\cosh u\sin w & \alpha\sinh u\cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} du\,dw\,dz$$

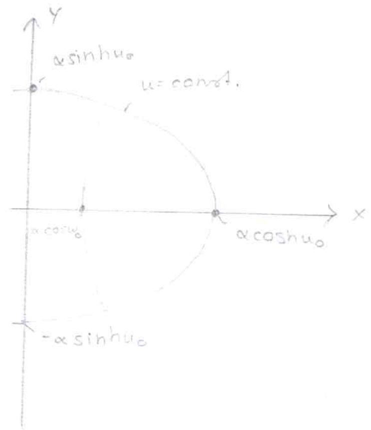
$= \alpha^2(\sinh^2 u\cos^2 w + \cosh^2 u\sin^2 w)\, du\,dw\,dz$ Volumenelement 1

c) $u = \text{const.} = u_0$

$1 = \cos^2 w + \sin^2 w = \boxed{\dfrac{x^2}{\alpha^2\cosh^2 u_0} + \dfrac{y^2}{\alpha^2\sinh^2 u_0} = 1}$ Ellipsen mit $a = \alpha\cosh u_0$ und $b = \alpha\sinh u_0$ +1

$w = \text{const.} = w_0$

$1 = \cosh^2 u - \sinh^2 u = \boxed{\dfrac{x^2}{\alpha^2\cos^2 w_0} - \dfrac{y^2}{\alpha^2\sin^2 w_0} = 1}$ Hyperbeln mit $a = \alpha\cos w_0$ und $b = \alpha\sin w_0$ +1



+1