Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 6 - Indexkalkül

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 28.05.2018

Alle Aufgaben sind im Indexkalkül zu lösen (sonst gibt es keine Punkte!).
Nützliche Relation:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Aufgabe 1 *Vektoroperatoridentitäten I*

Bestätigen Sie im Indexkalkül folgende Identitäten:

(i) $\mathrm{rot}(\lambda\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}\,\lambda) \times \mathbf{a} + \lambda\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

(ii) $\mathrm{grad}(UV) = U\,\mathrm{grad}\,V + V\,\mathrm{grad}\,U$

(iii) $\mathrm{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}$

(iv) $\mathrm{grad}(\mathbf{ab}) = (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} + (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

(v) $\mathrm{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$

(vi) $(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}, \quad \text{wenn} \quad \mathbf{a}^2 = \mathrm{const}$

(vii) $\Delta(UV) = U\Delta V + V\Delta U + 2\,\mathrm{grad}\,U \cdot \mathrm{grad}\,V$

Aufgabe 2 *Vektoroperatoridentitäten II*

Bestätigen Sie im Indexkalkül die Identitäten

(i) $\mathbf{c}\,\mathrm{grad}(\mathbf{ab}) = \mathbf{a}(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{b}(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{a}$

(ii) $(\mathbf{c}\,\mathrm{grad})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c}\,\mathrm{grad})\mathbf{a}$

(iii) $(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}\,\mathrm{grad})\mathbf{c}$

(v) $(\mathbf{a} \times \mathrm{grad}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$

(vi) $(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\,\mathrm{grad})\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{a}$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Nabla-Operator ∇ in den Beispielen (iii) und (vi) auf *beide* rechts von ihm stehende Vektorfelder wirken soll.

Aufgabe 3 *Spezielle Vektorfelder*

(a) Es sei Φ ein skalares Feld und $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die Beziehung

$$\operatorname{div}(\Phi\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}\Phi + \Phi \cdot \operatorname{div}\mathbf{A}.$$

(b) Spezialisieren Sie das Resultat von (a) für den Fall $\mathbf{A} = \operatorname{grad}\Phi$.

(c) Das skalare Feld Φ erfülle nun die Bedingungen $\Phi = 0$ auf S und $\Delta\Phi = 0$ in V, worin Δ den LAPLACE-Operator S die Fläche bezeichnet, die das Volumen V umgibt. Zeigen Sie, dass $\phi = 0$ in V gilt.

(d) In diesem Aufgabenteil sei $\mathbf{A} = \mathbf{c}$ ein konstanter Vektor. Weisen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad}\Phi \,\mathrm{d}V = \oiint\limits_S \Phi \,\mathrm{d}\mathbf{f}$$

nach.

Aufgabe 4 *Die Identitäten von JACOBI und LAGRANGE*

Bestätigen Sie jeweils im Indexkalkül

(a) die JACOBI-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

(b) die LAGRANGE-Identität

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc}).$$