
Mathematische Methoden der Physik I

Übungsserie 4: Aufgaben und Lösungen

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18

Aufgabe 1

Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

- (a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die den Anfangsbedingungen $t_0 := 0$ und $v_0 := v(t_0) = 0$ genügt.
- (b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞ mithilfe der folgenden Definition und der Lösung des Anfangswertproblems.

$$v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$$

Berechnen Sie ein zweites Mal v_∞ unter der Annahme, dass die Lösung der Differentialgleichung nicht bekannt ist. Betrachten Sie hierfür den Grenzwert der Differentialgleichung.

- (c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

LÖSUNG:

- (a) Die zur gegebenen Differentialgleichung zugehörigen homogene Differentialgleichung kann durch die folgende Form beschrieben werden.

$$m\dot{v} + \gamma v = 0 \quad \implies \quad \dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

Diese Formel lässt sich separieren und durch die Methode der Trennung der Variablen lösen.

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -\frac{\gamma}{m} \quad \implies \quad \int_{t_0}^t \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} dt = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{s} ds = - \int_{t_0}^t \frac{\gamma}{m} dt \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

$$\implies \quad \ln \left(\frac{v(t)}{v_0} \right) = -\frac{\gamma}{m}(t - t_0) \quad \implies \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

Nach der Methode der Variation der Konstanten gehen wir nun davon aus, dass sich die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung durch die folgende Funktion beschreiben lässt.

$$v(t) = \varphi(t) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

bitte wenden

$$\implies \dot{v}(t) = \dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \varphi(t)\frac{\gamma}{m}e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

Das Einsetzen der Ableitung in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt dann das Folgende.

$$m\dot{\varphi}(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = mg \implies \dot{\varphi}(t) = ge^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

$$\implies \varphi(t) = \frac{mg}{\gamma}e^{\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} - \frac{mg}{\gamma} + \varphi(t_0)$$

$$\implies v(t) = \varphi(t)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} = \frac{mg}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \right] + \varphi(t_0)e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

Zu beachten ist hier, dass $v_0 = v(t_0) = \varphi(t_0)$ gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit wegen $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gegeben durch die folgende Funktion.

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) \quad \frac{1}{2} \text{ P.}$$

- (b) Die stationäre Endgeschwindigkeit lässt sich nun einfach mithilfe des Limes berechnen.

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) = \frac{mg}{\gamma} \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{\gamma}{m}t} \right) = \frac{mg}{\gamma} \quad 1 \text{ P.}$$

Ohne die Kenntnis der Lösung lässt nun das Folgende notieren.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [m\dot{v}(t) + \gamma v(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} mg \implies m \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{v}(t) + \gamma \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = mg$$

Da der Limes existiert und v eine stetig differenzierbare Funktion ist, muss demnach die Ableitung im Unendlichen verschwinden.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{v}(t) = 0 \implies v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \quad 1 \text{ P.}$$

- (c) Die in der Aufgabe gegebene Differentialgleichung ist separierbar und damit durch die Methode der Trennung der Variablen lösbar.

$$\dot{v}(t) = g - \frac{\gamma}{m}v(t) \implies \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)} = 1 \implies \int_{t_0}^t \frac{\dot{v}(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v(t)} dt = \int_{t_0}^t dt \quad + \frac{1}{2} \text{ P.}$$

$$\implies -\frac{m}{\gamma} \ln \left[\frac{g - \frac{\gamma}{m}v(t)}{g - \frac{\gamma}{m}v_0} \right] = t - t_0$$

$$\implies v(t) = \frac{m}{\gamma} \left[g - \left(g - \frac{\gamma}{m}v_0 \right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \right]$$

$$\implies v(t) = \frac{mg}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \right] + v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_0)} \quad + \frac{1}{2} \text{ P.}$$

Aufgabe 2

Exakte Differentialgleichungen

- (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $(x + y^3) y' + y = x^3$

(ii) $0 = \sin(xy^2) + xy^2 \cos(xy^2) + [2x^2y \cos(xy^2) + 2y] y'$

- (b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $0 = 2 \cos y + 4x^2y \sin y + (yx^3 \cos y + x^3 \sin y) y' - xy' \sin y$

(ii) $x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2y^2}{x^2 + y^4} = \frac{2x^3y}{x^2 + y^4} y'$

LÖSUNG:

- (a) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x, y) := y - x^3, \quad g(x, y) := x + y^3$$

$$\implies f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt. 1 P.

$$\partial_2 f(x, y) = \partial_{\tilde{y}} f(x, \tilde{y})|_y = 1 = \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x}, y)|_x = \partial_1 g(x, y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1 \varphi = f, \quad \partial_2 \varphi = g$$

Um diese zu berechnen, kann man zum Beispiel einen der beiden folgenden Wege verwenden.

$$\varphi(x, y) = \int \partial_1 \varphi(s, y) \, ds \Big|_x = \int f(s, y) \, ds \Big|_x = yx - \frac{x^4}{4} + c(y) \quad 1 \text{ P.}$$

$$\implies \partial_2 \varphi(x, y) = x + c'(y) = g(x, y) = x + y^3$$

$$\implies c'(y) = y^3 \implies c(y) = \frac{y^4}{4} + K \quad 1 \text{ P.}$$

$$\implies \varphi(x, y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

$$\varphi(x, y) = \int \partial_2 \varphi(x, s) \, ds \Big|_y = \int g(x, s) \, ds \Big|_y = xy + \frac{y^4}{4} + d(x)$$

$$\implies \partial_1 \varphi(x, y) = y + d'(x) = f(x, y) = y - x^3$$

bitte wenden

$$\implies d'(x) = -x^3 \implies d(x) = -\frac{x^4}{4} + K$$

$$\implies \varphi(x, y) = xy - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + K$$

Jetzt gehen wir davon aus, dass es sich bei y um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Nach Verwendung der Kettenregel und der gegebenen Differentialgleichung können wir auf das Folgende für alle x einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ schließen.

$$\left. \frac{d}{ds} \varphi(s, y(s)) \right|_x = \partial_1 \varphi(x, y(x)) + \partial_2 \varphi(x, y(x)) y'(x) = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn es für alle $x \in U$ eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Folgende gilt.

$$\varphi(x, y(x)) = C = xy(x) - \frac{x^4}{4} + \frac{y^4(x)}{4} + K \quad 1 \text{ P.}$$

Dies ist auch gleichzeitig die Funktion y in impliziter Form.

- (ii) Wir definieren zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$f(x, y) := \sin(xy^2) + xy^2 \cos(xy^2), \quad g(x, y) := 2x^2 y \cos(xy^2) + 2y$$

$$\implies f(x, y) + g(x, y) y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung ist nach der folgenden Aussage für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Die Differentialgleichung ist damit exakt. 1 P.

$$\partial_2 f(x, y) = 4xy \cos(xy^2) - 2x^2 y^3 \sin(xy^2) = \partial_1 g(x, y)$$

Es gibt nun eine zweimal stetig differenzierbare Potentialfunktion $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt.

$$\partial_1 \varphi = f, \quad \partial_2 \varphi = g$$

Um diese zu berechnen, können wir den folgenden Weg verwenden.

$$\varphi(x, y) = \int \partial_1 \varphi(s, y) \, ds \Big|_x = \int f(s, y) \, ds \Big|_x = x \sin(xy^2) + c(y) \quad 1 \text{ P.}$$

Das Integral wurde dabei wie folgt gelöst.

$$\begin{aligned} \int s \cos(sy^2) \, ds \Big|_x &= \frac{x \sin(xy^2)}{y^2} - \frac{1}{y^2} \int \sin(sy^2) \, ds \Big|_x \\ &= \frac{x \sin(xy^2)}{y^2} + \frac{\cos(xy^2)}{y^4} + c(y) \end{aligned} \quad +1 \text{ P.}$$

Dieses Wissen verwenden wir nun für die Ableitung nach der zweiten Komponente.

$$\partial_2 \varphi(x, y) = 2x^2 y \cos(xy^2) + c'(y) = g(x, y) = 2x^2 y \cos(xy^2) + 2y$$

$$\implies c'(y) = 2y \implies c(y) = y^2 + K \quad 1 \text{ P.}$$

$$\implies \varphi(x, y) = x \sin(xy^2) + y^2 + K$$

Jetzt gehen wir davon aus, dass es sich bei y um eine stetig differenzierbare Funktion handelt. Nach Verwendung der Kettenregel und der gegebenen Differentialgleichung können wir auf das Folgende für alle x einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ schließen.

$$\left. \frac{d}{ds} \varphi(s, y(s)) \right|_x = \partial_1 \varphi(x, y(x)) + \partial_2 \varphi(x, y(x)) y'(x) = 0$$

Dies ist nur dann möglich, wenn es für alle $x \in U$ eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass das Folgende gilt.

$$\varphi(x, y(x)) = C = x \sin(xy^2) + y^2 + K \quad 1 \text{ P.}$$

Dies ist auch gleichzeitig die Funktion y in impliziter Form.

- (b) (i) Wir definieren zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= 2 \cos y + 4x^2 y \sin y, & g(x, y) &:= yx^3 \cos y + x^3 \sin y - x \sin y \\ \implies f(x, y) + g(x, y) y' &= 0 \end{aligned}$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, y) &= \partial_{\tilde{y}} f(x, \tilde{y})|_y = -2 \sin y + 4x^2 \sin y + 4x^2 y \cos y \\ \partial_1 g(x, y) &= \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x}, y)|_x = 3x^2 y \cos y + 3x^2 \sin y - \sin y \\ \implies \partial_2 f(x, y) - \partial_1 g(x, y) &= (x^2 - 1) \sin y + (1 - 3x^2) y \cos y \neq 0 \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt. 1 P.

- (ii) Wir definieren zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ folgenden Gleichungen gelten.

$$\begin{aligned} f(x, y) &:= x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}, & g(x, y) &:= -\frac{2x^3 y}{x^2 + y^4} \\ \implies f(x, y) + g(x, y) y' &= 0 \end{aligned}$$

Wir überprüfen wieder die Integrabilitätsbedingung. Es gibt also $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$, sodass die folgende Implikation gilt.

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, y) &= \partial_{\tilde{y}} f(x, \tilde{y})|_y = -\frac{4x^4 y^5}{(x^2 + y^4)^2} \\ \partial_1 g(x, y) &= \partial_{\tilde{x}} g(\tilde{x}, y)|_x = -\frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} + \frac{4x^4 y}{(x^2 + y^4)^2} \\ \implies \partial_2 f(x, y) - \partial_1 g(x, y) &= \frac{6x^2 y}{x^2 + y^4} - \frac{8x^4 y}{(x^2 + y^4)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung ist damit nicht erfüllt. Demzufolge ist diese Differentialgleichung nicht exakt. 1 P.

Aufgabe 3

Vollständiges Differential

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) := x^4 y z^2 + 2y^2 x^3 e^z$$

- (a) Bestimmen Sie das totale Differential dU der Funktion U .
- (b) Untersuchen Sie, ob es eine Funktion $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass das totale Differential dV von V für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ die folgende Gleichung erfüllt.

$$dV(x, y, z) := \frac{1}{x^2} dU(x, y, z)$$

Hinweis: Überprüfen Sie dafür die Integrabilitätsbedingung des gegebenen Differentials.

LÖSUNG:

- (a) Der Gradient der skalaren Funktion U berechnet sich wie folgt, da es sich bei U um eine stetig differenzierbare Funktion handelt.

$$\nabla U(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_1 U(x, y, z) \\ \partial_2 U(x, y, z) \\ \partial_3 U(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 y z^2 + 6x^2 y^2 e^z \\ x^4 z^2 + 4x^3 y e^z \\ 2x^4 y z + 2x^3 y^2 e^z \end{pmatrix}$$

Das totale Differential existiert, da sich U zweimal stetig differenzieren lässt und damit durch den Satz von Schwarz die Integrabilitätsbedingung automatisch erfüllt ist. Es ist dann durch den folgenden Ausdruck gegeben.

$$dU = \langle \nabla U, dr \rangle, \quad dr := \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\implies dU(x, y, z) = \partial_1 U(x, y, z) dx + \partial_2 U(x, y, z) dy + \partial_3 U(x, y, z) dz \quad 1 \text{ P.}$$

$$\implies dU(x, y, z) = (4x^3 y z^2 + 6x^2 y^2 e^z) dx + (x^4 z^2 + 4x^3 y e^z) dy + (2x^4 y z + 2x^3 y^2 e^z) dz \quad 1 \text{ P.}$$

- (b) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt nun die folgende Aussage. Wir definieren hierfür die Funktionen $f, g, h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x^2} dU(x, y, z) = \underbrace{(4xy z^2 + 6y^2 e^z)}_{=: f(x, y, z)} dx + \underbrace{(x^2 z^2 + 4xy e^z)}_{=: g(x, y, z)} dy + \underbrace{(2x^2 y z + 2xy^2 e^z)}_{=: h(x, y, z)} dz$$

Ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Existenz der in der Aufgabenstellung beschriebenen Funktion V , ist die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung. Es gibt nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, die die folgenden Implikationen erfüllen.

$$\partial_2 f(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_1 U(x, s, z)}{x^2} \right) \Big|_y = \frac{\partial_2 \partial_1 U(x, y, z)}{x^2}$$

$$\partial_1 g(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_2 U(s, y, z)}{s^2} \right) \Big|_x = \frac{\partial_2 \partial_1 U(x, y, z)}{x^2} - \frac{2 \partial_2 U(x, y, z)}{x^3}$$

$$\implies \partial_2 f(x, y, z) - \partial_1 g(x, y, z) = \frac{2 \partial_2 U(x, y, z)}{x^3} = xz^2 + 4ye^z \neq 0$$

$$\partial_3 f(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_1 U(x, y, s)}{x^2} \right) \Big|_z = \frac{\partial_3 \partial_1 U(x, y, z)}{x^2}$$

$$\partial_1 h(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_3 U(s, y, z)}{s^2} \right) \Big|_x = \frac{\partial_3 \partial_1 U(x, y, z)}{x^2} - \frac{2 \partial_3 U(x, y, z)}{x^3}$$

$$\implies \partial_3 f(x, y, z) - \partial_1 h(x, y, z) = \frac{2 \partial_3 U(x, y, z)}{x^3} = 2xyz + 2y^2 e^z \neq 0$$

$$\partial_3 g(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_2 U(x, y, s)}{x^2} \right) \Big|_z = \frac{\partial_3 \partial_2 U(x, y, z)}{x^2}$$

$$\partial_2 h(x, y, z) = \partial_s \left(\frac{\partial_3 U(x, s, z)}{x^2} \right) \Big|_y = \frac{\partial_2 \partial_3 U(x, y, z)}{x^2}$$

$$\implies \partial_3 g(x, y, z) - \partial_2 h(x, y, z) = 0$$

Die ersten beiden Folgerungen zeigen, dass die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Es 1 P.
reicht eine dieser beiden Aussagen zu zeigen. Demzufolge kann es eine solche Funktion V 1 P.
nicht geben.