Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 5

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 22.11.17

Aufgabe 1

Der integrierende Faktor

Überprüfen Sie, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind und lösen Sie die nicht-exakten Differentialgleichungen.

(i) $(x+y)x^2y' + xy^2 + 3x^2y = 0$

(ii) $yx^3 - 2x^4 = (3y^2x^3 - x^4)y'$

(iii) $(x\cos y - xy\sin y)y' + 2y\cos y + x = 0$

Verwenden Sie für die Berechnung der Lösungen die folgende Anleitung.

- Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor, der nur von der ersten freien Variable x abhängt.
- Überprüfen Sie die Exaktheit der mit dem integrierenden Faktor multiplizierten Differentialgleichung.
- Lösen Sie nun die mit dem integrierenden Faktor multiplizierte Differentialgleichung durch das Auffinden einer Potentialfunktion.
- Führe Sie die Probe durch, indem Sie Ihre Lösung implizit differenzieren und auf die ursprüngliche Differentialgleichung zurückführen.

Aufgabe 2

Integrierende Faktoren

(a) Die folgende Differentialgleichung sei gegeben.

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

Zeigen Sie durch Verwendung der Integrabilitätsbedingung die beiden folgenden Aussagen.

- Kann der folgende Ausdruck als eine Funktion f der Variablen $z(x,y) \coloneqq xy$ geschrieben werden, so hängt auch der integrierende Faktor λ nur von dieser Variable z ab.

$$\frac{1}{xA(x,y) - yB(x,y)} \left(\partial_x B(x,y) - \partial_y A(x,y)\right)$$

Geben Sie den Zusammenhang von λ und f an.

- Kann der folgende Ausdruck als eine Funktion g der Variablen $w(x, y) \coloneqq x + y$ geschrieben werden, so hängt auch der integrierende Faktor λ nur von dieser Variable z ab.

  $$\frac{1}{A(x,y) - B(x,y)} \left(\partial_x B(x,y) - \partial_y A(x,y)\right)$$

  Geben Sie den Zusammenhang von λ und g an.

(b) Eine der beiden zuvor genannten Eigenschaften trifft auf eine der beiden folgenden Differentialgleichungen zu. Finden Sie diesen Fall heraus und berechnen Sie einen integrierenden Faktor mit dem Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

(i) $\quad (xy - 1) + \left(x^2 - xy\right) y' = 0$

(ii) $\quad y + \left(x - 2x^2y^3\right) y' = 0$

Lösen Sie die Differentialgleichung mit diesem integrierenden Faktor und machen Sie anschließend die Probe anhand der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Lösung der verbleibenden Differentialgleichung ist nicht verlangt.