<u>Aufgabe 5:</u> 6 Punkte

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = 4-t^2$ im Bereich $-2 \le t \le 2$ und skizzieren Sie eine periodische Fortsetzung.

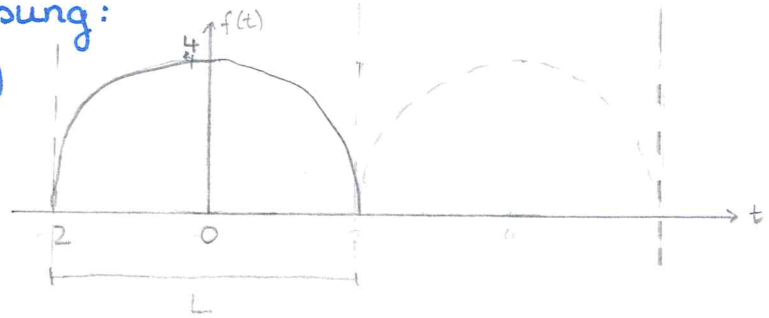
b) Berechnen Sie die Sinus-Cosinus-Fourier-Reihe zu $f(t)$.

c) Verifizieren Sie Parsevals Theorem für dieses Beispiel.

Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Lösung:

a)



1

b) $L = 4$

$b_n = 0$, da Funktion gerade 1

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} 4-t^2\,dt = \frac{1}{4}\left[4t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 \cdot 2 = \frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}\right) = 4\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$$ 1/2

n>0

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(4-t^2)\cdot\cos\left(\frac{2\pi n t}{4}\right)dt = \int_0^2 4\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt - \int_0^2 t^2\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$

$$= 4\left[\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2 - \left(\left[\frac{2t^2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 2t\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt\right)$$

$$= \frac{8}{\pi n}\underbrace{\sin(\pi n)}_{=0} - \frac{2\cdot 4}{\pi n}\underbrace{\sin(\pi n)}_{=0} + \frac{4}{\pi n}\int_0^2 t\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(\left[-\frac{2t}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt\right)$$

$$= \frac{-16}{(\pi n)^2}\underbrace{\cos(\pi n)}_{=(-1)^n} + \left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2}_{=0} = \frac{-16}{(\pi n)^2}\cdot(-1)^n$$ 1

$$\Rightarrow f(t) = \frac{8}{3} - \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right) \quad \text{für } -2 \le t \le 2$$ 1/2

c) Parseval'sches Theorem: $\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\right) + a_0^2 = \frac{1}{L}\int_a^b |f(t)|^2\,dt$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2}_{=0} = \left|\frac{8}{3}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^2}{(\pi n)^4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{64}{9} + \frac{256}{2\cdot\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \underset{\text{Hinweis}}{=} \frac{64}{9} + \frac{128}{\cancel{\pi^4}}\cdot\frac{\cancel{\pi^4}}{90}$$

$$= \frac{64}{9}\left[1+\frac{2}{10}\right] = \frac{64}{9}\cdot\frac{6}{\ldots} = \frac{64\cdot 2}{\ldots} = \frac{128}{\ldots}$$ 1

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}|4-t^2|^2\,dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 16-8t^2+t^4\,dt = \frac{1}{2}\left[16t-\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right) = \frac{32}{2}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{32}{2}\cdot\left(\frac{15-10+3}{15}\right)$$

$$= \frac{16\cdot 8}{15} = \frac{128}{15} \,/\!/$$

1

=> Übereinstimmung der Ergebnisse