Mathematische Methoder der Physik I
Übungsserie 10

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Abgabe: 3. Januar 2017
Wintersemester 17/18

Aufgabe 1 *Räuber und Beute*

Betrachten Sie die folgenden gekoppelten Differentialgleichungen mit den Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$.

$$\dot{H} = \alpha H - \beta HF$$
$$\dot{F} = -\gamma F + \delta HF$$

(a) Interpretieren Sie kurz, was die einzelnen Terme im Kontext eines einfachen Räuber-Beute-Modells bedeuten. Erweitern Sie die Differentialgleichungen der Räuber, so dass ein konstanter Abschluss (etwa durch Jäger) berücksichtigt wird.

(b) Leiten Sie aus dem gegebenem Differentialgleichungssystem (ohne Jäger) eine neue Differentialgleichung für $F(H)$ her. Bringen Sie diese in die bekannte Form einer exakten Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass $\Lambda = \frac{1}{FH}$ ein integrierender Faktor ist und lösen Sie die gefundene Differentialgleichung nach der Ihnen bekannten Methode.

(d) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte, an denen die folgende Gleichung gilt, ohne die Verwendung der impliziten Lösung.

$$\dot{F} + \dot{H} = 0$$

Aufgabe 2 *Inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung*

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = 64xe^x$$

indem Sie für die Lösung der inhomogenen Gleichung einen speziellen Ansatz machen.

bitte wenden

Aufgabe 3 *Quadratisches Reibungsgesetz*

Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit den Koeffizienten $m, \gamma, k \in \mathbb{R}^+$.

$$m\ddot{y} \pm \gamma\dot{y}^2 + ky = 0$$

Das Vorzeichen vor dem quadratischen Reibungsterm wirke immer so, dass die Reibung die Bewegung behindert. Diese nichtlineare Differentialgleichung kann gelöst werden, wenn man sich zunutze macht, dass die unabhängige Variable t nicht vorkommt. Substituieren Sie $p = \dot{y}$, um auch die Ableitungen nach t zu eliminieren. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bernoulli-Gleichung und substituieren Sie angemessen. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen

$$\dot{y}(0) = 0$$

und $y > 0$ für kleine t (so kleine Zeiten, dass sich das Vorzeichen im Reibungsterm nicht umkehrt). Es soll hier genügen $\dot{y}$ zu bestimmen.

Aufgabe 4 *Aufstellen von Differentialgleichungen*

(a) Eine Bakterienpopulation zeige exponentielles Wachstum, das heißt die Anzahl der Bakterien erhöht sich proportional zur Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate r. Zusätzlich werden der Bakterienkultur kontinuierlich k Bakterien pro Zeiteinheit zugefügt. Allerdings seien die Bakterien empfindlich gegen Lichteinfall. Sie sterben deshalb proportional zu Anzahl der vorhandenen Bakterien mit der Rate $1+\sin t$, welche den Rhythmus der Tageszeiten simuliert. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Anzahl N der Bakterien auf.

(b) Ein Zylinder von Grundkreisradius r und Masse m schwimmt mit vertikaler Achsenlage im Wasser. Seine Eintauchtiefe sei l. Gesucht ist die Periode der Schwingung, die sich ergibt, wenn man den Zylinder ein Wenig in das Wasser eintaucht und danach loslässt. Der Bewegungswiderstand sei angenähert gleich Null anzunehmen. Wählen Sie die y-Achse vertikal nach unten mit dem Nullpunkt auf der Wasseroberfläche.

Aufgabe 5 *Spieglein, Spieglein...*

Bestimmen Sie die Form des Spiegels, der parallel einfallende Strahlen in den Punkt O reflektiert.

Hinweis: Wählen Sie den Ursprung im Punkt O. Es gilt die folgende Gleichung.

$$\tan 2\vartheta = \frac{2\tan\vartheta}{1-\tan^2\vartheta}$$

Benutzen Sie die Substitution $y^2 = r^2 - x^2$.