Mathematische Methoder der Physik II
Übungsserie 7

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Version: 28. Mai 2018
Sommersemester 2018

Aufgabe 1 *Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten*

Gegeben seien das skalare Feld U und das Vektorfeld $\vec{V}$. Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten

(i) $\operatorname{div}\vec{V}$

(ii) ΔU.

Aufgabe 2 *Zylinderkoordinaten und Feldlinien*

Es sei U die skalare Funktion

$$U = \rho\cos\phi$$

der Zylinderkoordinaten ρ und ϕ.

(a) Skizzieren Sie in der $(x - y)$-Ebene die Linien $U = \text{const}$.

(b) Berechnen Sie die radiale Komponente V_ρ und die azimutale Komponente V_ϕ von $\vec{V} = \operatorname{grad} U$ in Zylinderkoordinaten.

(c) Die Feldlinien von $\vec{V} = \operatorname{grad} U$ können durch die Funktion $\rho = \rho(\phi)$ beschrieben werden. Zeigen Sie, dass diese Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\rho(\phi)}{\mathrm{d}\phi} = \frac{\rho V_\rho}{V_\phi}$$

genügt.

(d) Lösen Sie diese Differentialgleichung für $\rho(\phi)$ und tragen Sie die $\vec{V}$-Feldlinien in Ihre Skizze mit den Linien $U = \text{const}$ ein.

Aufgabe 3 *Laplaceoperator in 3 Dimensionen*

Der LAPLACE-Operator wird u.a. in der Elektrodynamik auch auf Vektoren angewendet. Im kartesischen wird die Definition aus der Vorlesung einfach komponentenweise gebraucht, d.h. es ist

$$\Delta\vec{a} = (\Delta a_1)\vec{e}_1 + (\Delta a_2)\vec{e}_2 + (\Delta a_3)\vec{e}_3$$

wobei die a_i die Komponenten von $\vec{a}$ sind und $\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Berechnen Sie nun $\Delta\vec{a}$ in Zylinderkoordinaten und zeigen Sie, dass – im Gegensatz zu kartesischen Koordinaten –

$$\Delta a_i \neq (\Delta\vec{a})_i.$$