Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 9

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 20.12.17

Aufgabe 1

Der Resonanzfall

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = Ae^{\varrho x}$$

mit Konstanten a, b, c, A und ϱ. ϱ erfülle die charakteristische Gleichung

$$a\varrho^2 + b\varrho + c = 0\ .$$

Hier versagt der Ansatz $y_\mathrm{p} = \alpha e^{\varrho x}$. Bestimmen Sie die Partikulärlösung, indem Sie für den Parameter α eine Variation der Konstanten durchführen. Unterscheiden Sie dabei die folgenden Fälle.

(a) Die Inhomogenität fällt mit einer der Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammen.

(b) Die Inhomogenität fällt mit beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammen.

Aufgabe 2

Die Methode des Energiesatzes

(a) Betrachten Sie die folgende nicht-lineare Differentialgleichung und lösen Sie diese gemäß der Anleitung.

$$\ddot{y} = y^3$$

- Multiplizieren Sie den Faktor $\dot{y}$ mit obiger Gleichung. Stellen Sie dann jede Seite als zeitliche Ableitung dar.
- Integrieren Sie einmal nach der Zeit und lösen Sie die so entstehende Differentialgleichung für die folgenden Anfangswerte.

$$y(0) = 1, \qquad \dot{y}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) Wenden Sie das oben beschriebene Verfahren auf

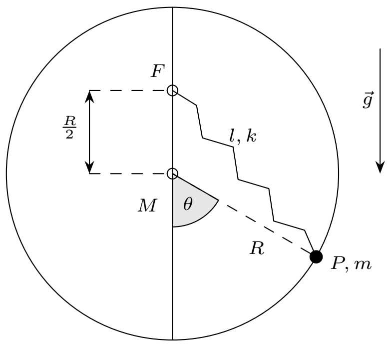
$$\ddot{y} = \frac{\sin y}{\cos^3 y}$$

an.

Aufgabe 3

Gleichgewichtspunkte und kleine Schwingungen

Eine Perle P mit Masse m soll sich reibungsfrei auf einem Reifen mit Mittelpunkt M und Radius R bewegen können. Sie steht dabei unter der Einwirkung sowohl der Schwerkraft als auch einer elastischen Kraft. Letztere wird von einer Feder mit Federkonstante k ausgeübt, die im Punkt F befestigt ist und im entspannten Zustand die Länge $l_0 = \frac{R}{2}$ hat. Die Position der Perle auf dem Reifen wird durch den Winkel $\theta(t)$ beschrieben. Die zugehörige Länge der gedehnten Feder ist $l(t)$.



Die gesamte Kraftkomponente, die die Perle auf dem Reifen bewegt, ist

$$F = \left[-mg + \frac{Rk}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5 + 4\cos\theta}}\right)\right]\sin\theta\ .$$

(a) Bestimmen Sie alle Winkel θ, die Gleichgewichtslagen der Perle beschreiben. Dabei ist es ausreichend, die Bestimmungsgleichungen für diese Winkel in impliziter Form anzugeben.

(b) Entscheiden Sie über die Stabilität dieser Gleichgewichtslagen.

Hinweis: Für Fallunterscheidungen ist es zweckmäßig, den dimensionslosen Parameter

$$\kappa = \frac{k}{k_{\text{krit}}} \quad \text{mit} \quad k_{\text{krit}} = 3\frac{mg}{R}$$

einzuführen.