Mathematische Methoden der Physik I
Übungsserie 4

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Wintersemester 17/18
Abgabe: Mittwoch, 15.11.17

Aufgabe 1

Freier Fall mit Reibung

Beim freien Fall mit Fallbeschleunigung $g \in \mathbb{R}^+$ unter dem Einfluss einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft mit Reibungskoeffizient $\gamma \in \mathbb{R}^+$ genügt die abwärts gerichtete Geschwindigkeitsfunktion v eines Massenpunktes mit Masse $m \in \mathbb{R}^+$ der folgenden Differentialgleichung.

$$m\dot{v} + \gamma v = mg$$

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch die Methode der Variation der Konstanten und bestimmen Sie eine Lösung, die der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ genügt.

(b) Berechnen Sie die stationäre Endgeschwindigkeit v_∞. Dabei gilt die folgende Definition.

$$v_\infty := \lim_{t \longrightarrow \infty} v(t)$$

(c) **Zusatz:** Lösen Sie noch einmal die Differentialgleichung des freien Falls durch die Methode der Trennung der Variablen.

Aufgabe 2

Exakte Differentialgleichungen

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Differentialgleichungen exakt sind, und lösen Sie diese durch das Auffinden einer Potentialfunktion.

(i) $$\left(x + y^3\right) y' + y = x^3$$

(ii) $$0 = \sin\left(xy^2\right) + xy^2 \cos\left(xy^2\right) + \left[2x^2 y \cos\left(xy^2\right) + 2y\right] y'$$

(b) Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Gleichungen um nicht exakte Differentialgleichungen handelt, indem Sie die Integrabilitätsbedingung überprüfen.

(i) $$0 = 2\cos y + 4x^2 y \sin y + \left(yx^3 \cos y + x^3 \sin y\right) y' - xy' \sin y$$

(ii) $$x \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = \frac{2x^3 y}{x^2 + y^4} y'$$

bitte wenden

Aufgabe 3

Vollständiges Differential

Es sei die folgende skalare Funktion für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad U(x,y,z) \coloneqq x^4yz^2 + 2y^2x^3e^z$$

(a) Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion U und begründen Sie, warum es sich bei $\mathrm{d}U$ um ein exaktes Differential handelt.

(b) Überprüfen Sie, ob das totale Differential $\mathrm{d}V$, definiert durch den folgenden Ausdruck, immer noch exakt ist.

$$\mathrm{d}V(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{x^2}\mathrm{d}U(x,y,z), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$