Lösung: Aufgabe 6

a) Fluß: $\oiint_G \vec{\Phi}\, d\vec{f} = \iiint \operatorname{div}\vec{\Phi}\, dV$ da $\vec{\Phi} = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div}\vec{\Phi} = 0$

↑ Gauß'scher Satz

$\Rightarrow$ Fluß verschwindet

b) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \partial_i(\vec{a}\times\vec{b})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i(a_j b_k) = \varepsilon_{ijk} b_k \partial_i a_j + \varepsilon_{ijk} a_j \partial_i b_k$

$= (b_k \vec{e}_k)(\varepsilon_{ijl}\partial_i a_j \vec{e}_l) - (a_j \vec{e}_j)(\varepsilon_{ikl}\partial_i b_k \vec{e}_l)$

$= \vec{b}\cdot \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$

c) i) $\int_{1,5}^{2,5} \delta(x+2)\,dx = 0$, da $-2 \notin [1,5; 2.5]$

ii) $\int_0^{2\pi} \sin x\, \delta(x-\frac{\pi}{2})\,dx = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, da $\frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi]$

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln x\, \delta(5(x-1))\,dx = \frac{1}{5}\ln(1) = 0$, da $1 \in (-\infty,\infty)$

iv) $\int_0^{\infty} f(x)\cdot\delta(ax^2-b)\,dx = \frac{f(\sqrt{b/a})}{|2\sqrt{ab}|}$

NR: $ax_0^2 - b = 0 \Rightarrow x_0^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow x_{01} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ & $x_{02} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\Rightarrow$ nur $x_{01} \in [0,\infty)$

$g'(x) = 2ax \rightsquigarrow g'(x_{01}) = 2a\sqrt{\frac{b}{a}} = 2\sqrt{ab}$

d) gegeben: $f(t)$, $\hat{f}(k)$

$\mathcal{F}[f(t-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\, e^{-ikt}\,dt$ $\quad t-a=\tilde{t}$, $t = \tilde{t}+a$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{t})\, e^{-ik(\tilde{t}+a)}\,d\tilde{t}$

$= \frac{e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{t})\,e^{-ik\tilde{t}}\,d\tilde{t} = e^{-ika}\cdot\hat{f}(k)$

e) A 4, B 5, C 1, D 3, E 2

f) Der Laplace-Operator ist kein Vektoroperator, sondern ein Skalar. Als solches hat er keine Richtung.