Aufgabe 2: ~~Zum~~ Satz von Gauß

5 Punkte

Gegeben sei ein Zylinder, dessen Grundkreis in der (x-y)-Ebene liegt, mit dem Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung. Seine Höhe betrage H. Weiterhin sei das Vektorfeld

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\vec{e}_z$$

gegeben.

a) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche des Zylinders durch Ausführen eines Oberflächenintegrals.

b) Berechnen Sie $\iiint \operatorname{div}\vec{\Phi}\, dV$, indem Sie über das Volumen des Zylinders integrieren.

c) Begründen Sie, warum beide Ergebnisse nicht übereinstimmen.

Lösung:

a) Mantel: $d\vec{f}_1 = R\,\vec{e}_r\, d\varphi\, dz \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le H, \quad r = R$

Boden: $d\vec{f}_2 = -\vec{k}\, r\, dr\, d\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le R, \quad z = 0$

Deckel: $d\vec{f}_3 = +\vec{k}\, r\, dr\, d\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le R, \quad z = H$ 1

$$\oint\!\!\oint \vec{\Phi}\, d\vec{f} = \int_{z=0}^{H}\int_{\varphi=0}^{2\pi} R \cdot \frac{1}{R}\, d\varphi\, dz - \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{r}{\sqrt{r^2+0^2}}\, dr\, d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} \frac{r}{\sqrt{r^2+H^2}}\, dr\, d\varphi$$

$$= 2\pi H - 2\pi R + 2\pi\left[\sqrt{r^2+H^2}\right]_0^R = 2\pi\left(H - R + \sqrt{R^2+H^2} - H\right)$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{R^2+H^2} - R\right)$$ 1

b) $$\operatorname{div}\vec{\Phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) = 0 + 0 + \frac{-z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$ 1

$$\iiint \operatorname{div}\vec{\Phi}\, dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H}\int_{r=0}^{R} \frac{-zr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi \int_{r=0}^{R}\left[\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^H dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{r}{\sqrt{r^2+H^2}} - 1\, dr = 2\pi\left[\sqrt{r^2+H^2} - r\right]_0^R = 2\pi\left[\sqrt{R^2+H^2} - R + H\right]$$ 1

c) Der Gauß'sche Satz ist hier nicht anwendbar, da über den Koordinatenursprung und die ganze z-Achse integriert wird, wo Φ nicht definiert ist. 1