

Aufgabe 1: Das Phasenportrait

Die von der Ortskoordinate x als Abszisse und der Geschwindigkeit v als Ordinate aufgespannte Ebene heißt Phasenebene, die Kurven $v=v(x)$ heißen Phasenbahnen oder Phasentrajektorien und, zusammengekommen, Phasenportrait einer Bewegung.

- a) Konstruieren Sie das Phasenportrait des harmonischen Oszillators, indem Sie aus den Lösungen $\dot{x}(t)$ und $v=\dot{x}(t)$ der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

den Zeitparameter t eliminieren.

- b) Skizzieren Sie die Phasenbahnen für verschiedene Anfangsbedingungen. Wie verhalten sich diese zueinander?
c) Berechnen Sie die von ihnen umschlossene Fläche in der (\dot{x}, x) -Phasenebene.

- d) Ein schwingendes System werde durch die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + (\alpha+2)y = 0$$

beschrieben. Bestimmen Sie den Parameter α so, dass der aperiodische Grenzfall eintritt.

1. Das Phasenporträt

1) harmonischer Oszillator $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, ω_0 : Eigenfrequenz

$$\text{Lösung: } x = \alpha \cos(\omega_0 t - \theta)$$

$$\dot{x} = -\alpha \omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta)$$

$$\sin^2(\omega_0 t - \theta) + \cos^2(\omega_0 t - \theta) = 1 = \frac{\dot{x}^2}{(\alpha \omega_0)^2} + \frac{x^2}{\alpha^2}$$

• Resultat:

$$\left[\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 \alpha^2} = 1 \right], \text{ Ellipsen}$$

- Halbachsen: $a = \alpha$ $b = \alpha \omega_0$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} = \omega_0 \\ \text{unabhängig von Anfangsbedingungen} \end{array} \right.$

- Zusammenhang mit Anfangsbedingungen: $\left. \begin{array}{l} \alpha \cos \theta = x_0 \\ \alpha \sin \theta = \frac{v_0}{\omega_0} \end{array} \right\} \alpha^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$

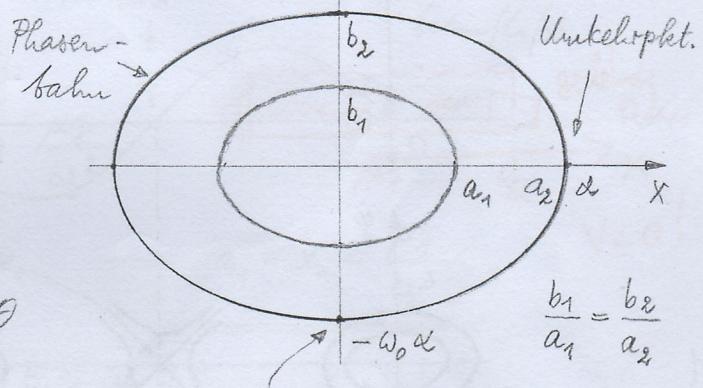
$$\alpha = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} = \frac{b}{\omega_0}$$

- Fläche der Ellipsen:

$$A = \pi ab = \pi \omega_0 \alpha^2 = \text{const für}$$

bestimmte Anfangsbed.; unabhängig von θ

- Phasenbahnen schneiden sich nicht.



Übergang durch Nullage

d) Lösung:

$$\ddot{y} + 2ay + (a+2)y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (a+2) = 0$$

$$1/2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - a - 2}$$

aperiodischer Grenzfall: $\lambda_1 = \lambda_2$

$$1/2 \quad a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = a^2 - a - 2 = (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \quad | + \frac{9}{4}$$
$$\frac{9}{4} = (a - \frac{1}{2})^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm \frac{3}{2} = a - \frac{1}{2} \quad | + \frac{1}{2}$$

$$1 \quad a_1 = 2, a_2 = -1 //$$

6 Punkte

Aufgabe 2: Linearisierte Schwingung

Ein Teilchen bewege sich eindimensional in folgendem Potential

$$U(x) = kx^2 \ln x, \quad k = \text{const.}$$

in der Nähe des Minimums.

a) Zeigen Sie, dass sich das Minimum bei $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ befindet.

b) Geben Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft an, indem Sie benutzen, dass:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

c) Stellen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen auf.

Entwickeln Sie zu diesem Zwecke die Kraft um die gleichgewichtsposition. [Benutzen Sie $\vec{F} = m\vec{a}$.]

d) Geben Sie die Frequenz kleiner Schwingungen um diese Gleichgewichtslage an.

S Punkte
+1 Zusatz

Lösung:

$$U(x) = kx^2 \ln x \quad \text{mit } k = \text{const.}, \quad k > 0$$

a) Minimum:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{dU}{dx} = 2kx \ln x + kx^2 \cdot \frac{1}{x} = kx(2 \ln x + 1)$$

$$1 \Rightarrow x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (\text{Extremstelle})$$

Berechne 2. Ableitung, um zu überprüfen, ob es sich um Minimum handelt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= k(2 \ln x + 1) + kx(2 \cdot \frac{1}{x}) \\ &= 2k \ln x + 3k \end{aligned}$$

+1 ZP
falls jemand das überprüft

$$\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=\frac{1}{\sqrt{e}}} = 2k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3k = 2k > 0, \quad \text{da } k > 0.$$

b) Eindimensionaler Fall:

$$1 \quad \vec{F} = -\text{grad } U \quad \rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = -kx(2 \ln x + 1) //$$

$$\begin{aligned} 1 \quad \vec{F} &= m \cdot \ddot{x} \\ &\Rightarrow \ddot{x} = -kx(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

=> nicht linear

Taylorentwicklung von $F(x)$ in $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$F(x) = F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) + F'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + O(x^2)$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = k \frac{1}{\sqrt{e}} \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right) = 0$$

$$F'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -2k \left(-\frac{1}{2}\right) - 3k = -2k$$

$$\Rightarrow F(x) \approx 0 - 2k \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$1 \Rightarrow m \ddot{x} = -2k \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) //$$

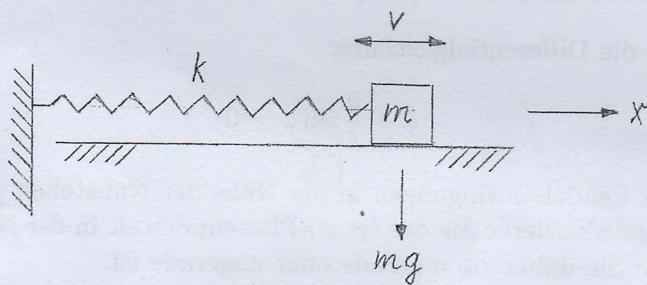
[würden nicht verwendet, da Linearisierung gesucht]

d) Für die Frequenz ω von Schwingungen um den Gleichgewichtszustand gilt:

$$1 \quad \omega = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}} = \sqrt{-\frac{(-2k)}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} //$$

Aufgabe 3: Oszillator auf rauher Unterlage (WS 15/16)

Ein Oszillator (Masse m , Federkonstante k) gleitet auf einer horizontalen Fläche, wodurch zur elastischen Kraft eine konstante Reibungskraft $F_R = \mu mg$ hinzutritt. Darin ist μ der kinetische Reibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Fläche, auf der sie gleitet, und mg ist das Gewicht der Masse m .



Die Anfangsbedingungen der Bewegung zur Zeit $t = 0$ seien $x(0) = x_0$ und $v(0) = 0$.

- a) Lösen Sie für die *ganze* erste Periode der Bewegung die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \mp \mu mg,$$

wobei das obere Vorzeichen für $v > 0$ und das untere für $v < 0$ gilt. Wie beeinflußt die Reibung die Schwingungsfrequenz?

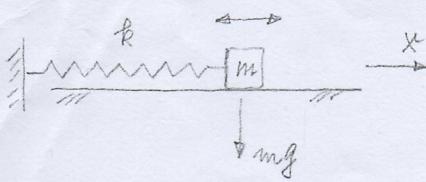
Hinweis: Führen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe der neuen Variablen

$$\xi = x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

auf die Gleichung des harmonischen Oszillators zurück.

- b) Geben Sie durch Verallgemeinerung Ihres Resultats $x(t)$ und $v(t)$ für die n -te Halbperiode an ($n = 1, 2, 3, \dots$). 1P
- c) Untersuchen Sie die Abnahme der Amplituden in aufeinanderfolgenden Perioden und zeigen Sie, daß die Maxima und Minima der Funktion $x(t)$ auf Geraden liegen. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden. Skizzieren Sie den Verlauf der gedämpften Schwingung. 4P

Aufgabe 3: Oszillator auf rauher Unterlage



$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu mg$$

$$\text{mit } \mp \begin{cases} v > 0 \\ v < 0 \end{cases}$$

μ : Koeffizient der kinetischen Reibung

- Aufangsbedingungen: $x(0) = x_0$
- $v(0) = 0$

allgemeine Lösung: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Substitution:
 $\ddot{x} + \omega_0^2 (x \pm \frac{\mu g}{\omega_0^2}) = 0$
 $\ddot{x} = \ddot{\xi}$

Partikularlösung: $x_p = -\frac{\mu g}{\omega_0^2}$ (offensichtlich oder „unbestimmt Koeff.“)

1 damit

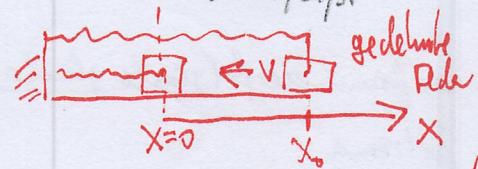
$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

mit $\omega = \omega_0$, Frequenz durch Reibung nicht beeinflusst

• Erste Halbperiode: $v < 0$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0}$ //

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Aufangsbedingungen: $x_1(0) = a_1 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \stackrel{!}{=} x_0 \rightarrow a_1 = x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$



$v < 0$!

$$\dot{x}_1 = -a_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + b_1 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}_1(0) = b_1 \omega_0 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow b_1 = 0$$

Lösung:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \\ \dot{x}_1(t) &= -\omega_0 \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} (*)$$

• Zweite Halbperiode: $v > 0$ für $\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$ //

$$x_2(t) = a_2 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Aufangsbedingungen ergeben sich aus (*) für $t = \frac{\pi}{\omega_0}$: $x_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -x_0 + 2 \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$$\dot{x}_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 0 \quad (\text{Umkehrpunkt})$$

2/2

$$\text{damit } x_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -a_2 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \stackrel{!}{=} -x_0 + 2 \frac{\mu g}{\omega_0^2} \rightarrow a_2 = x_0 - 3 \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2 \omega_0 \sin \omega_0 t + b_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}_2\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -b_2 \omega_0 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow b_2 = 0$$

Lösung:

$$x_2(t) = \left(x_0 - 3 \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_0 \left(x_0 - 3 \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right) \sin \omega_0 t$$

- 1 Diskussion: - Verallgemeinerung für n-te Halbperiode, $(n-1)\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq n\frac{\pi}{\omega_0}$; $n=1,2,\dots$

$$x_n(t) = \left[x_0 - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] \cos \omega_0 t + (-1)^{n+1} \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$v_n(t) = -\omega_0 \left[x_0 - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] \sin \omega_0 t$$

- aufeinanderfolgende gleichartige Extrema: $x_n(n\frac{\pi}{\omega_0}) = (-1)^n \left[x_0 - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] + (-1)^{n+1} \frac{\mu g}{\omega_0^2}$
 $= (-1)^n \left[x_0 - 2n \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right], \left(n = \left[\frac{\omega_0^2 x_0}{2\mu g}\right]\right)$

damit

$$\frac{x_{n+2} - x_n}{(n+2)\frac{\pi}{\omega_0} - n\frac{\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \left\{ (-1)^{n+2} \left[x_0 - 2(n+2) \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] - (-1)^n \left[x_0 - 2n \frac{\mu g}{\omega_0^2}\right] \right\}$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} (-1)^n \left[x_0 - 2n \cancel{\frac{\mu g}{\omega_0^2}} - 4 \frac{\mu g}{\omega_0^2} - x_0 + 2n \cancel{\frac{\mu g}{\omega_0^2}}\right]$$

Differenzenquotient

$$= (-1)^n \frac{\omega_0}{2\pi} (-4) \frac{\mu g}{\omega_0^2} = (-1)^{n+1} \cdot 2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0}$$

$$= \pm 2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} \begin{cases} \text{Minima (n ungerade)} \\ \text{Maxima (n gerade)} \end{cases}$$

unabhängig von n , d.h.
 konstanter Anstieg \rightarrow
 Gerade

→ Gerade, auf der Maxima liegen: $x = -2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} t + c$

$$t=0 \Rightarrow x=x_0$$

$$x_2\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right) = -2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} \cdot 2 \frac{\pi}{\omega_0} + c \stackrel{!}{=} x_0 - 4 \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

$$c = x_0$$

$$x = -2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} t + x_0$$

Gerade auf der Minima liegen: $x = 2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} t + d$

$$x_1\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} \frac{\pi}{\omega_0} + d \stackrel{!}{=} -x_0 + 2 \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

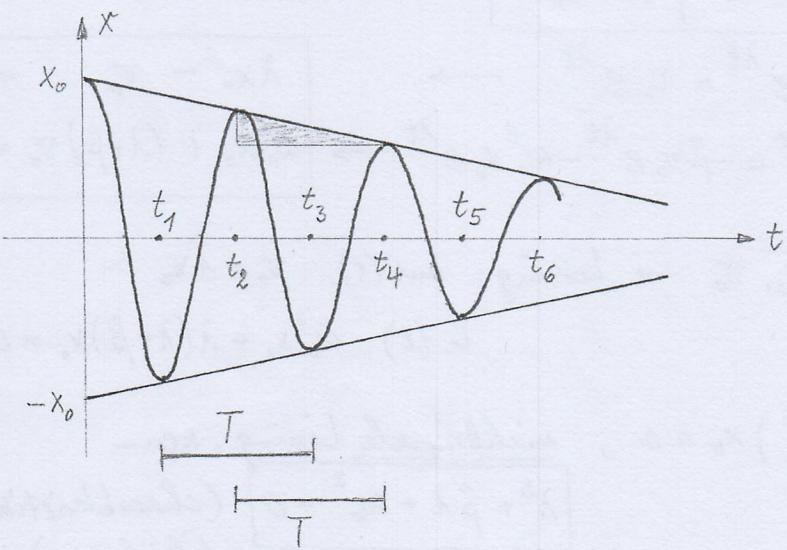
$$d = -x_0$$

1

$$x = 2 \frac{\mu g}{\pi \omega_0} t - x_0$$

, an Zeitachse gespiegelte Gerade für Maxima

1



9