4 Punkte

A **Lösung:** Eine häufig gebrauchte Erkenntnis

zz: $\vec{\nabla}\,\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\,\delta(\vec{r})$

1) Führe Kugelkoordinaten für die Divergenz ein:

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \ldots + \ldots \qquad \text{hier: nur } F_r \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0 \qquad \text{für } r \neq 0 \;!$$

2) Wähle Testfunktion $f(r)$

$$\mathrm{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = f(r)\cdot\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) + \frac{\vec{e}_r}{r^2}\,\mathrm{grad}\,f(r)$$
$$= f(r)\cdot\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{df}{dr} \qquad (1) \qquad 1$$

Gauß'scher Satz:

$$\iiint \mathrm{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV = \oint\!\!\oint f(r)\,\frac{\vec{e}_r}{r^2}\,d\vec{f} \qquad (2) \qquad 1$$

3) Integration über Kugel mit Radius R:

$$\iiint f(r)\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV$$

$$\stackrel{(1)}{=} \iiint \mathrm{div}\left(f(r)\cdot\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)dV - \iiint \frac{1}{r^2}\frac{df}{dr}\,dV$$

$$\stackrel{(2)}{=} \oint\!\!\oint_{r=R} f(r)\,\frac{\vec{e}_r}{r^2}\,d\vec{f} - \int_0^R \cancel{\frac{1}{r^2}}\frac{df}{dr}\cdot\cancel{r^2}dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R)\cancel{\frac{1}{R^2}}\cancel{R^2}\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta - 2\pi\cdot 2\cdot\left[f(r)\right]_0^R$$

$$= 4\pi f(R) - 4\pi\left(f(R) - f(0)\right)$$

$$= 4\pi f(0) \qquad 1$$

4) Vergleiche:

$$\iiint f(r)\cdot 4\pi\,\delta(\vec{r})\,dV = 4\pi f(0)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\,\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 4\pi\,\delta(\vec{r}) \qquad 1$$