
Mathematische Methoden der Physik II

Übungsserie 5 - Gaußscher Satz

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 14.05.2018

Aufgabe 1 *Kuppelkatastrophe*

Gegeben sei eine halbkugelförmige Kuppel mit Radius R , deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liege. Die Kuppel sei mit einem giftigen Gas gefüllt. Der böartige Simon Bar Sinister sorgt dafür, dass die gesamte Kuppel kurz durchlässig wird, so dass eine winzige Menge Gas entweichen kann. Die Dichte des Gases $\rho = D_0$ ist als konstant anzunehmen. Außerhalb der Kuppel wehe der Wind mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (5kx + py^2)\mathbf{i} + ky\mathbf{j} \quad p, k = \text{const.}$$

- (a) Berechnen Sie den Massenstrom der austretenden Chemikalie, indem Sie das Oberflächeintegral über die Impulsdichte bilden.
- (b) Verifizieren Sie den GAUSSschen Satz, indem Sie den Massenstrom noch einmal über ein Volumenintegral berechnen.
- (c) Führen Sie für das Ergebnis eine Einheitenbetrachtung durch.

Aufgabe 2 *Verifikation des GAUSSschen Satzes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \frac{6ka^2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\mathbf{i} + \frac{3ka^2z}{\sqrt{y^2 + z^2 + 4a^2}}\mathbf{j} + \frac{2ka^2x}{\sqrt{x^2 + z^2 + 9a^2}}\mathbf{k}$$

und die Oberfläche eines Quaders, der durch die Eckpunkte der Grundfläche $(0, 0, 0)$, $(2a, 0, 0)$, $(2a, 3a, 0)$, $(0, 3a, 0)$ und die Höhe a beschrieben wird.

- (a) Skizzieren Sie den Quader und die Flächennormalenvektoren.
- (b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche des Quaders durch Ausführen eines Oberflächenintegrals im Sinne des GAUSSschen Satzes.
- (c) Berechnen Sie den Fluss noch einmal indem Sie über das Volumen des Quaders im Sinne des GAUSSschen Satzes integrieren.

Aufgabe 3 *Anwendbarkeit des GAUSSschen Satzes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz dieses Vektorfeldes.

(b) Berechnen Sie den Fluss

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \, d\mathbf{f},$$

worin S_1 die Einheitskugel mit ihrem Mittelpunkt im Koordinatenursprung sein soll, direkt aus dem Oberflächenintegral. Kann man dieses Integral mit Hilfe des GAUSSschen Satzes berechnen? Begründen Sie kurz!

(c) Wiederholen Sie die Berechnung des Flusses für eine Fläche S_2 , die die Einheitskugel ist, deren Mittelpunkt der Punkt $M(0, 0, 2)$ ist. Verifizieren Sie das Resultat mit Hilfe des GAUSSschen Satzes, falls dieser anwendbar ist.

Hinweis: für das Oberflächenintegral: Verschieben Sie den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt M .