Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 5 - Gaußscher Satz

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 14.05.2018

Aufgabe 1 *Kuppelkatastrophe*

Gegeben sei eine halbkugelförmige Kuppel mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liege. Die Kuppel sei mit einem giftigen Gas gefüllt. Der bösartige Simon Bar Sinister sorgt dafür, dass die gesamte Kuppel kurz durchlässig wird, so dass eine winzige Menge Gas entweichen kann. Die Dichte des Gases $\rho = D_0$ ist als konstant anzunehmen. Außerhalb der Kuppel wehe der Wind mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (5kx + py^2)\mathbf{i} + ky\mathbf{j} \quad p, k = \text{const.}$$

(a) Berechnen Sie den Massenstrom der austretenden Chemikalie, indem Sie das Oberflächeintegral über die Impulsdichte bilden.

(b) Verifizieren Sie den GAUSSschen Satz, indem Sie den Massenstrom noch einmal über ein Volumenintegral berechnen.

(c) Führen Sie für das Ergebnis eine Einheitenbetrachtung durch.

LÖSUNG:

Lösung: Kolossale Kuppelkatastrophe 6 Punkte

gegeben: Oberfläche ist Halbkugel mit Radius R

Dichte $\rho = D_0$, D_0 const.

Windgeschwindigkeit $\vec{v} = (5kx + py^2)\vec{i} + ky\vec{j}$, k, p const

a) Impulsdichte: $\vec{m} = \rho \cdot \vec{v} = D_0(5kx+py^2)\vec{i} + D_0 ky\vec{j}$

Massenstrom $\tilde{M} = \oiint_S \vec{m}\, d\vec{f}$

geschlossene Oberfläche: Kuppelfläche + Boden darunter

$\rightarrow$ Boden muss nicht berücksichtigt werden, da

$\vec{m}$ keine Komponente in $\vec{k}$-Richtung besitzt

1 (das Gas kann nicht durch Boden entweichen).

obere Halbkugel: $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$d\vec{f} = \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} + \vec{k}\right) dx\,dy$$

1 $$\tilde{M} = D_0 \cdot \iint_G \frac{(5kx+py^2)x + ky^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

Polarkoordinaten

$$\hookrightarrow = D_0 \cdot \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4kr^2\cos^2\varphi + pr^3\sin^2\varphi\cos\varphi + kr^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= D_0 \int_{r=0}^{R} \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}} \left(4kr^2\left[\tfrac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{2\pi} + pr^3\left[\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{2\pi} + kr^2\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \right) dr$$

$$= D_0 \int_{r=0}^{R} \frac{kr^3}{\sqrt{R^2-r^2}} (4\pi + 2\pi)\, dr = 6\pi D_0 k \int_0^R \frac{r^3}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr$$

NR:

+1 ZP (falls Integral von Hand berechnet)

$$\int r^2 \cdot \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr = -r^2\sqrt{R^2-r^2} + 2\int r\sqrt{R^2-r^2}\, dr$$

$u = r^2 \rightarrow u' = 2r$

$v' = \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}$

$\hookrightarrow v = -\sqrt{R^2-r^2}$

$$= -r^2\sqrt{R^2-r^2} - \tfrac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}$$

$$= -\sqrt{R^2-r^2}\left[r^2 + \tfrac{2}{3}(R^2-r^2)\right]$$

$$= -\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\left[2R^2 + r^2\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{M} = 6\pi D_0 k \left[-\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-r^2}\left[2R^2+r^2\right]\right]_0^R$$

$= 2\pi D_0 k \cdot R \cdot 2R^2$

$= 4\pi D_0 k R^3$ // 1

b) $\tilde{M} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{m}\, dV$

$\operatorname{div} \vec{m} = D_0 \cdot (5k + k) = 6 k D_0 = \text{const.}$ 1

$\Rightarrow \tilde{M} = 6 k D_0 \underbrace{\iiint_V dV}$

↳ Volumen Halbkugel: $\frac{2}{3}\pi R^3$

$= 4\pi k D_0 R^3$ // $\Rightarrow$ Übereinstimmung 1

c) D_0 ist Dichte: $[D_0] = \text{Masse} / \text{Volumen}$

$\vec{v}$ ist Geschwindigkeit: $[\vec{v}] = [k \cdot x] = \text{Länge}/\text{Zeit}$

$\Rightarrow [k] = 1/\text{Zeit}$

$\Rightarrow [\tilde{M}] = [k] \cdot [D_0] \cdot [R]^3$

$= 1/\text{Zeit} \cdot \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \cdot \text{Volumen}$

$= \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$ // ist die richtige Einheit für einen Massenstrom 1

Aufgabe 2 *Verifikation des GAUSSschen Satzes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \frac{6ka^2y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\mathbf{i} + \frac{3ka^2z}{\sqrt{y^2+z^2+4a^2}}\mathbf{j} + \frac{2ka^2x}{\sqrt{x^2+z^2+9a^2}}\mathbf{k}$$

und die Oberfläche eines Quaders, der durch die Eckpunkte der Grundfläche $(0,0,0)$ $(2a,0,0)$, $(2a,3a,0)$, $(0,3a,0)$ und die Höhe a beschrieben wird.

(a) Skizzieren Sie den Quader und die Flächennormalenvektoren.

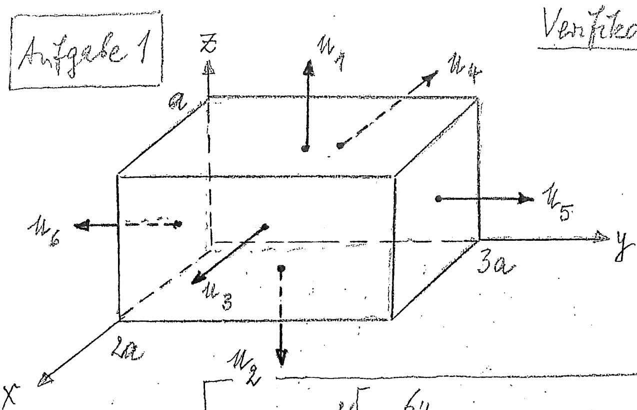
(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Oberfläche des Quaders durch Ausführen eines Oberflächenintegrals im Sinne des GAUSSschen Satzes.

(c) Berechnen Sie den Fluss noch einmal indem Sie über das Volumen des Quaders im Sinne des GAUSSschen Satzes integrieren.

LÖSUNG:

Aufgabe 1

Verifikation des Gaußschen Satzes



$n_1 = \vec{k} = -n_2$, $dx\,dy$

$n_3 = \vec{i} = -n_4$, $dy\,dz$

$n_5 = \vec{j} = -n_6$, $dx\,dz$

$$\boxed{\mathfrak{a} = ka^2\left[\frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\vec{i} + \frac{3z}{\sqrt{y^2+z^2+4a^2}}\vec{j} + \frac{2x}{\sqrt{x^2+z^2+9a^2}}\vec{k}\right]}$$

: Fluß: $\displaystyle\oiint_S \mathfrak{a}\,d\vec{f} = \sum_{i=1}^{6}\iint \mathfrak{a}\,d\vec{f}_i = \iint\limits_{\substack{A_1\\(z=a)}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+10a^2}}dx\,dy - \iint\limits_{\substack{A_2\\(z=0)}} \frac{2x}{\sqrt{x^2+9a^2}}dx\,dy$

(hier ohne Faktor ka^2)

$$+\iint\limits_{\substack{A_3\\(x=2a)}} \frac{6y}{\sqrt{y^2+5a^2}}dy\,dz - \iint\limits_{\substack{A_4\\(x=0)}} \frac{6y}{\sqrt{y^2+a^2}}dy\,dz$$

$$+\iint\limits_{\substack{A_5\\(y=3a)}} \frac{3z\,dx\,dz}{\sqrt{z^2+13a^2}} - \iint\limits_{\substack{A_6\\(y=0)}} \frac{3z}{\sqrt{z^2+4a^2}}dx\,dz$$

1

Integrale vom Typ $\displaystyle\int \frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}du = \sqrt{u^2+c^2}$, Bronstein, S. / S. 309, № 193 +12P (wenn von Hand, sonst Null)

$$\oiint_S \mathfrak{a}\,d\vec{f} = 2\int_0^{3a}dy\int_0^{2a}dx\,\frac{x}{\sqrt{x^2+10a^2}} - 2\int_0^{3a}dy\int_0^{2a}dx\,\frac{x}{\sqrt{x^2+9a^2}}$$

$$+6\int_0^{a}dz\int_0^{3a}dy\,\frac{y}{\sqrt{y^2+5a^2}} - 6\int_0^{a}dz\int_0^{3a}\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}dy$$

$$+3\int_0^{2a}dx\int_0^{a}dz\,\frac{z}{\sqrt{z^2+13a^2}} - 3\int_0^{2a}dx\int_0^{a}dz\,\frac{z}{\sqrt{z^2+4a^2}}$$

(42)

$$= 6a\left[\sqrt{x^2+10a^2} - \sqrt{x^2+9a^2}\right]_0^{2a} + 6a\left[\sqrt{y^2+5a^2} - \sqrt{y^2+a^2}\right]_0^{3a}$$

$$+ 6a\left[\sqrt{z^2+13a^2} - \sqrt{z^2+4a^2}\right]_0^{a}$$

$$= 6a\left[a\sqrt{14} - a\sqrt{10} - a\sqrt{13} + 3a\right] + 6a\left[a\sqrt{14} - a\sqrt{5} - a\sqrt{10} + a\right]$$

$$+ 6a\left[a\sqrt{14} - a\sqrt{13} - a\sqrt{5} + 2a\right]$$

$$= 6a^2\left[3\sqrt{14} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{13} + 6 - 2\sqrt{5}\right]$$

mit Faktor ka^2: $\boxed{\oint\!\!\oint_S \mathfrak{a}\, d\vec{f} = 6ka^4\left[6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{13} + 3\sqrt{14}\right]}$ 2 (falls bis zum Ende umgeformt)

: Gaußscher Satz: $\boxed{\operatorname{div}\mathfrak{a} = ka^2\left[\frac{-6xy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} - \frac{3yz}{(y^2+z^2+4a^2)^{3/2}} - \frac{2xz}{(x^2+z^2+9a^2)^{3/2}}\right]}$ 1

zu berechnen $\int_0^{2a} dx \int_0^{3a} dy \int_0^{a} dz \operatorname{div}\mathfrak{a}$

bei v-Integration u wie Konstante behandelt; Bronstein/S., S. 310, No 207

es ist $$\int_0^{u_0} du \int_0^{v_0} dv \frac{uv}{(u^2+v^2+c^2)^{3/2}} = \int_0^{u_0} du\, u \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+c^2}}\right]_{v=0}^{v_0}$$ +1ZP

$$= -\int_0^{u_0} du \frac{u}{\sqrt{u^2+v_0^2+c^2}} + \int_0^{u_0} du \frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}$$, Bronstein/S., S. 309, No 193

$$= -\sqrt{u^2+v_0^2+c^2}\Big|_0^{u_0} + \sqrt{u^2+c^2}\Big|_0^{u_0} = -\sqrt{u_0^2+v_0^2+c^2} + \sqrt{v_0^2+c^2}$$
$$+ \sqrt{u_0^2+c^2} + c$$ +1ZP

damit $$-6\int_0^a dz \cdot \int_0^{2a} dx \int_0^{3a} dy \frac{xy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} - 3\int_0^{2a} dx \cdot \int_0^{3a} dy \int_0^a dz \frac{yz}{(y^2+z^2+4a^2)^{3/2}}$$

$$-2\int_0^{3a} dy \cdot \int_0^{2a} dx \int_0^a dz \frac{xz}{(x^2+z^2+9a^2)^{3/2}}$$

$$= -6a\left[-\sqrt{14a^2}+\sqrt{10a^2}+\sqrt{5a^2}+a\right]-6a\left[-\sqrt{14a^2}+\sqrt{5a^2}+\sqrt{13a^2}+2a\right]$$

$$-6a\left[-\sqrt{14a^2}+\sqrt{10a^2}+\sqrt{13a^2}+3a\right]$$

mit Faktor ka^2:

$$\boxed{\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathfrak{A}\,dV = -6ka^4\left[-3\sqrt{14}+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}+6+2\sqrt{13}\right]}$$

$$\boxed{= 6ka^4\left[6-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}-2\sqrt{13}+3\sqrt{14}\right]},$$ Übereinstimmung

1

5+3 ZP

Aufgabe 3 *Anwendbarkeit des GAUSSschen Satzes*

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(a) Berechen Sie die Divergenz dieses Vektorfeldes.

(b) Berechnen Sie den Fluss

$$\oiint_{S_1} \mathbf{F}\, \mathrm{d}\mathbf{f},$$

worin S_1 die Einheitskugel mit ihrem Mittelpunkt im Korrdiantenursprung sein soll, direkt aus dem Oberflächenintegral. Kann man dieses Integral mit Hilfe des GAUSSschen Satzes berechnen? Begründen Sie kurz!

(c) Wiederholen Sie die Berechnung des Flusses für eine Fläche S_2, die die Einheitskugel ist, deren Mittelpunkt der Punkt $M(0, 0, 2)$ liegt. Verifizieren Sie das Resultat mit Hilfe des GAUSSschen Satzes, falls dieser anwendbar ist.

Hinweis: für das Oberflächenintegral: Verschieben Sie den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt M.

LÖSUNG:

Aufgabe 3 Anwendbarkeit des Gaußschen Satzes

$$\boxed{\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{r}}{r^3}} \quad \text{mit} \quad r \equiv |\mathfrak{r}|$$

a)

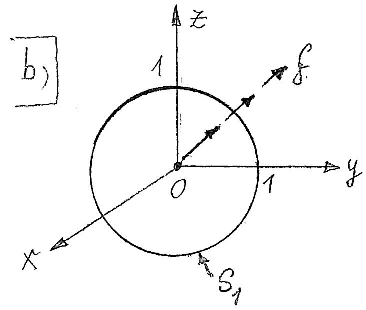
$$\mathfrak{f} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - x\cdot\frac{3}{\cancel{2}}\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\cdot\cancel{2}x = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\,, \quad (\mathfrak{r} \neq \vec{0})$$

analog für y, z. Zusammen:

1 $$\underline{\underline{\operatorname{div}\mathfrak{f}}} = \frac{3}{r^3} - 3\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - 3\,\frac{r^2}{r^5} \underline{\underline{= 0}}$$

b)



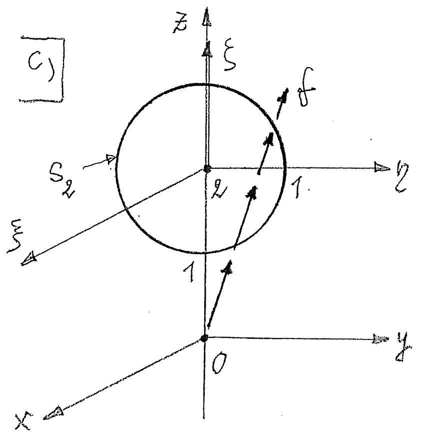
zu berechnen: $\oiint_{S_1} \mathfrak{f}\,d\vec{\mathfrak{f}}$ für $S:\ x^2+y^2+z^2 = 1$

$$\longrightarrow d\vec{\mathfrak{f}} = \frac{\mathfrak{r}}{r}\,df = \frac{\mathfrak{r}}{r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

1 damit $$\boxed{\oiint_{S} \mathfrak{f}\,d\vec{\mathfrak{f}}} = \int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\; \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r} = 4\pi\cdot\frac{1}{r^2}\Big|_{r=R=1} \boxed{= 4\pi}$$
$(r = R = 1)$

1 Gaußscher Satz nicht anwendbar, da Einheitskugel Koordinatenursprung enthält, wo $\mathfrak{f}$ nicht definiert

c)



hier $S:\ x^2+y^2+(z-2)^2 = 1$, Einheitskugel enthält Koordinatenursprung nicht mehr

- Gaußscher Satz anwendbar, $\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\oiint_{S_2} \mathfrak{f}\,d\vec{\mathfrak{f}} = 0}$$

1

- direkte Berechnung des Flusses: neues Koordinatensystem

$$\xi = x$$
$$\eta = y$$
$$\zeta = z - 2$$

bitte wenden

(4/8)

in diesem Koordinatensystem ist $d\vec{f} = \frac{\mathbf{r}'}{r'}\, df$ mit $\mathbf{r}' = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta k$,

und $$\boxed{f = \frac{\xi \vec{i} + \eta \vec{j} + (\zeta + 2) k}{\left[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta+2)^2\right]^{3/2}}}$$ 1

damit $$\oint\!\!\oint_S f\, d\vec{f} = \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta(\zeta+2)}{\left[\xi^2+\eta^2+(\zeta+2)^2\right]^{3/2}} \cdot \frac{1}{\left[\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{1/2}}$$

auf S_2: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2 = 1$

$$= \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{2\zeta + 1}{(1 + 4\zeta + 4)^{3/2}}$$

• Kugelkoordinaten:
$\zeta = r\cos\vartheta$
mit $r = R = 1$: $\zeta = \cos\vartheta$
$d\zeta = -\sin\vartheta\, d\vartheta$ 1

$$= -2\pi \cdot \int_1^{-1} d\zeta\, \frac{2\zeta + 1}{(4\zeta + 5)^{3/2}}$$

• Substitution:
$2\zeta + 1 = u$
$\zeta = \frac{1}{2}(u-1)$, $d\zeta = \frac{du}{2}$
$4\zeta + 5 = 2u + 3$

$$= -\cancel{2}\pi \int_{\zeta=1}^{-1} \frac{du}{\cancel{2}}\, \frac{u}{(2u+3)^{3/2}}$$

$$= \pi \int_{-1}^{3} du\, \frac{u}{(2u+3)^{3/2}}$$, Bronstein/S., S. 306, № 136

$$= \pi \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{2u+3} + \frac{3}{\sqrt{2u+3}} \right) \Bigg|_{u=-1}^{3}$$ V/H. 1 Z.P

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{S_2} f\, d\vec{f} = \frac{\pi}{2}\left(3 + \frac{3}{3} - 1 - \frac{3}{1}\right) = 0}$$, Übereinstimmung 1

7+1