A:K. Wöefe

Mathematische Methoden der Physik II

(Zweites Semester, Sommer 2016)

Vektoranalysis

Thema 2: Der Greensche Satz

Fertigen Sie zu allen Aufgaben Skizzen an.

Aufgabe 1: *Verifikation des Greenschen Satzes*

Berechnen Sie das Integral

$$\oint_C \left(xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y\right) \ ,$$

wobei der Integrationsweg C aus den Seiten des Quadrates mit den Eckpunkten $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ und $D(0,1)$ besteht und entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Verwandeln Sie dann das Kurvenintegral in ein Doppelintegral und verifizieren Sie den Greenschen Satz.

Aufgabe 2: *Ein Kurvenintegral (I)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Greenschen Satzes das Integral

$$\int_C \left(\mathrm{e}^x \cos y\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \sin y\,\mathrm{d}y\right)$$

ausgehend von dem Punkt $(\ln 2, 0)$ über $(0,1)$ nach $(-\ln 2, 0)$.

Aufgabe 3: *Ein Kurvenintegral (II)*

Berechnen Sie auf direktem Wege das Kurvenintegral

$$\oint_C \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

für das Vektorfeld

$$\mathbf{V} = \left(x^2+y^2\right) y\,\mathbf{i} - \left(x^2+y^2\right) x\,\mathbf{j} + \left(a^3+z^3\right)\,\mathbf{k}$$

und den Kreis $x^2+y^2=a^2$ in der (x,y)-Ebene als Integrationsweg C. Verifizieren Sie danach das Resultat mit Hilfe des Greenschen Satzes.

Hinweis: Führen Sie Polarkoordinaten ein.

bitte wenden

Aufgabe 4: *Kraft und Arbeit*

Die Kraft

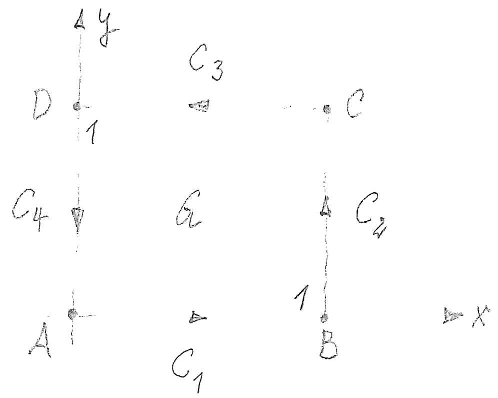
$$\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}$$

bewegt einen Massenpunkt entlang eines geschlossenen Weges, der im Koordinatenursprung beginnt und entlang der Kurve $x = 2\sqrt{y}$ bis zum Punkt $(2, 1)$ verläuft, dann weiter parallel zur x-Achse bis zum Punkt $(0, 1)$ und schließlich entlang der y-Achse zum Koordinatenursprung zurück. Berechnen Sie mit Hilfe des GREENschen Satzes die von der Kraft verrichtete Arbeit.

Aufgabe 1 Verifikation des Greenschen Satzes

$$\oint_C (xy\,dx + x^2\,dy)$$

a) Kurvenintegral



C_1: $y = 0, \quad dy = 0$

$0 \le x \le 1$

Kein Beitrag zum Integral

1

C_2: $x = 1, \quad dx = 0$

$0 \le y \le 1$

$$\int_{C_2} dy = \int_0^1 dy = y\Big|_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

C_3: $y = 1, \quad dy = 0$

$1 \ge x \ge 0$

$$\int_{C_3} x\,dx = \int_1^0 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

C_4: $x = 0, \quad dx = 0$

$1 \ge y \ge 0$

Kein Beitrag zum Integral

- Resultat: $\boxed{\oint_C (xy\,dx + x^2\,dy) = \frac{1}{2}}$ 2

b) Doppelintegral: $P = xy \qquad Q = x^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

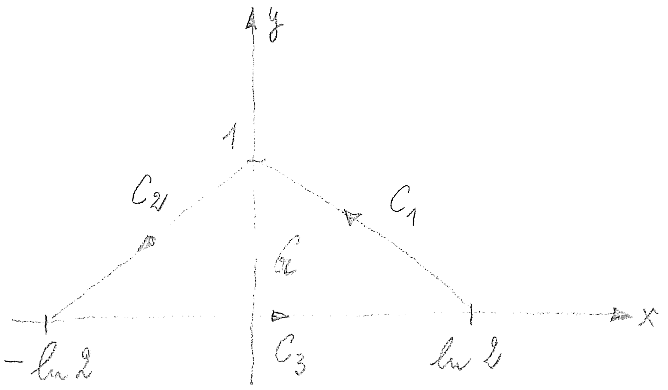
$$\boxed{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_G x\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 dy = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \cdot 1 = \frac{1}{2}}$$ 2

für alle x aus $0 \le x \le 1$ ist $0 \le y \le 1$

- Vergleich: Übereinstimmung 1

2/2 $\boxed{\text{Aufgabe 2}}$ Ein Kurvenintegral (I)

$$\int_{C_1+C_2} \left(e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy \right)$$



1

• Greenscher Satz:

$$\oint_{C_1+C_2+C_3} \left(e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy \right) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

(geschlossener Integrationsweg!) 1

hier: $P = e^x \cos y$ $\qquad Q = -e^x \sin y$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y$; Übereinstimmung, Doppelintegral Null 1

$$\rightarrow \boxed{\int_{C_1+C_2} \left(e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy \right)} = -\int_{C_3} \left(e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy \right)$$

C_3: $y = 0$, $dy = 0$, $(\cos 0 = 1)$

$-\ln 2 \le x \le \ln 2$

$$= -\int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x \, dx = -e^x \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = -\left(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} \right)$$ 1

$$= \frac{1}{e^{\ln 2}} - e^{\ln 2} = \frac{1}{2} - 2 = \boxed{-\frac{3}{2}}$$ 1

5

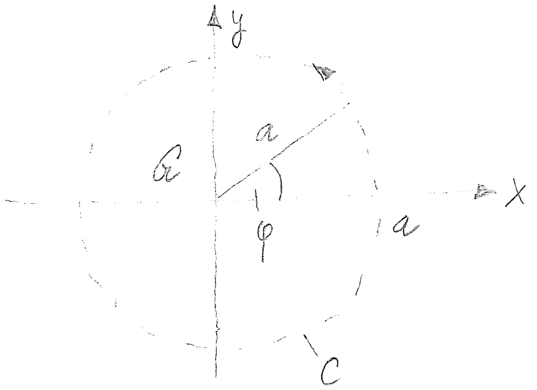
Fortsetzung siehe S. 2/5

Aufgabe 3 — Ein Kurvenintegral (II)

2/3

$$\oint_C \vec{w}\,d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \vec{w} = (x^2+y^2)\,y\,\vec{i} - (x^2+y^2)\,x\,\vec{j} + (a^3+z^3)\,\vec{k}$$

C in (x,y)-Ebene: $x^2+y^2=a^2$



1

Polarkoordinaten: $x = a\cos\varphi$

$y = a\sin\varphi$

$dx = -a\sin\varphi\,d\varphi$

$dy = a\cos\varphi\,d\varphi$ 1

a) Kurvenintegral

$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$, $dz = 0$

$$\boxed{\oint_C \left[(x^2+y^2)\,y\,dx - (x^2+y^2)\,x\,dy\right]}$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[a^2\cdot a\sin\varphi\,(-a\sin\varphi) - a^2\cdot a\cos\varphi\,(a\cos\varphi)\Big]\,d\varphi$$

$$= -a^4\int_0^{2\pi}\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1}\,d\varphi \qquad 1$$

$$\boxed{= -2\pi a^4} \qquad 1$$

b) Greenscher Satz

$P = x^2y + y^3 \qquad Q = -x^3 - xy^2$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2 - y^2$

$$\boxed{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy} = \iint_G (-4x^2 - 4y^2)\,dx\,dy \qquad 1$$

$$= -4\iint_G \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\,dx\,dy = -4\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot r^2 = -8\pi\int_0^a r^3\,dr$$

(nicht a^2 !)

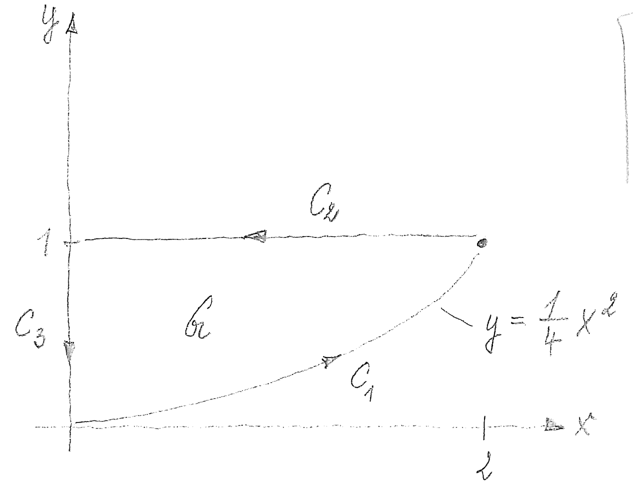
$$= -\cancel{8}^{\,2}\pi\,\frac{r^4}{\cancel{4}}\Big|_0^a = \boxed{-2\pi a^4} \qquad 1$$

Übereinstimmung 1

7

2/4 **Aufgabe 4** Kraft und Arbeit

$$\vec f = xy\,\vec i - y^2\,\vec j$$



1

a) Arbeit: $A = \oint_C \vec f\, d\vec r = \oint_C (xy\,dx - y^2\,dy)$

C_1: $y = \frac{1}{4}x^2$, $dy = \frac{1}{2}x\,dx$

$0 \le x \le 2$

$$\int_{C_1} \vec f\, d\vec r = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{x^4}{16}\cdot\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}x^4\Big|_0^2 - \frac{1}{32}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_0^2$$

$$= 1 - \frac{64}{32\cdot 6} = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

C_2: $y = 1$, $dy = 0$, $2 \ge x \ge 0$ $\quad \int_{C_2} \vec f\, d\vec r = \int_2^0 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^0 = \underline{\underline{-2}}$

C_3: $x = 0$, $dx = 0$, $1 \ge y \ge 0$ $\quad \int_{C_3} \vec f\, d\vec r = -\int_1^0 y^2\,dy = -\frac{1}{3}y^3\Big|_1^0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Zusammen: $\boxed{\oint \vec f\, d\vec r = \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{3} = -1}$

war nicht gefragt

b) Greenscher Satz: $P = xy$ $\qquad Q = -y^2$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

1

$$\boxed{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy} = \int_0^2 dx \int_{x^2/4}^1 dy\,(-x) = -\int_0^2 dx\; x\cdot\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

$$= -\int_0^2 dx\; x + \frac{1}{4}\int_0^2 dx\; x^3 = -\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = -2 + 1 = \boxed{-1}$$

1

Übereinstimmung

3

zu Aufgabe 2

Kurvenintegral

bereits berechnet $\displaystyle\int_{C_3} \left(e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy\right) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ (siehe S. 2/2)

C_1: $y = -\dfrac{x}{\ln 2} + 1$

$-\dfrac{x}{\ln 2} = y - 1$

$\boxed{x = \ln 2 \cdot (1-y)}$

$dx = -\ln 2 \cdot dy$

$\boxed{0 \leq y \leq 1}$

$$\int_0^1 e^{\ln 2 (1-y)} \left(-\ln 2 \cdot \cos y - \sin y\right) dy$$

$$= -2 \int_1^0 e^{-\ln 2 \cdot y} \left(\ln 2 \cdot \cos y + \sin y\right) dy$$

C_2: $y = +\dfrac{x}{\ln 2} + 1$

$\dfrac{x}{\ln 2} = y - 1$

$\boxed{x = \ln 2 \cdot (y-1)}$

$dx = \ln 2 \cdot dy$

$\boxed{1 \geq y \geq 0}$

$$\int_0^1 e^{\ln 2 \cdot (y-1)} \left(\ln 2 \cdot \cos y - \sin y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\ln 2 \cdot y} \left(\ln 2 \cdot \cos y - \sin y\right) dy$$

es ist $\displaystyle\int e^{ay} \cos y\, dy = \frac{e^{ay}}{a^2+1}\left(a \cos y + \sin y\right)$ Bronstein/S., S. 327, No 460

$\displaystyle\int e^{ay} \sin y\, dy = \frac{e^{ay}}{a^2+1}\left(a \sin y - \cos y\right)$ – " – , No 459

damit C_1

$$-2 \cdot \ln 2 \, \frac{e^{-\ln 2 \cdot y}}{(\ln 2)^2 + 1}\left(-\ln 2 \cdot \cos y + \sin y\right) - 2\, \frac{e^{-\ln 2 \cdot y}}{(\ln 2)^2+1}\left(-\ln 2 \cdot \sin y - \cos y\right)$$

$$= -2\, \frac{e^{-\ln 2 \cdot y}}{(\ln 2)^2 + 1}\left[-(\ln 2)^2 \cos y + \cancel{\ln 2 \cdot \sin y} - \cancel{\ln 2 \cdot \sin y} - \cos y\right]$$

(2/6)

$$= 2e^{-\ln 2\cdot y}\cos y\Big|_0^1 = -2 + 2e^{-\ln 2}\cos 1 = -2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cos 1$$

$$= \underline{\underline{-2+\cos 1}}$$

und C_2

$$\frac{1}{2}\ln 2\,\frac{e^{\ln 2\cdot y}}{(\ln 2)^2+1}(\ln 2\cos y + \sin y) - \frac{1}{2}\,\frac{e^{\ln 2\cdot y}}{(\ln 2)^2+1}(\ln 2\sin y - \cos y)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{\ln 2\cdot y}}{(\ln 2)^2+1}\left[(\ln 2)^2\cos y + \cancel{\ln 2\cdot\sin y} - \cancel{\ln 2\cdot\sin y} + \cos y\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{\ln 2\cdot y}\cos y\Big|_1^0 = -\frac{1}{2}e^{\ln 2}\cos 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cos 1 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\cos 1 + \frac{1}{2}}}$$

• <u>Zusammen:</u> $\boxed{\int_{C_1+C_2}\left(e^x\cos y\,dx - e^x\sin y\,dy\right) = -2 + \cancel{\cos 1} - \cancel{\cos 1} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}}$

Übereinstimmung mit Greenschem Satz

Mathematische Methoden der Physik II

(Zweites Semester, Sommer 2016)

Vektoranalysis

Thema 3: Zirkulation und Rotation, der STOKESsche Satz

Fertigen Sie zu den Aufgaben 2, 3 und 4 Skizzen an.

Aufgabe 1: *Gradient und Rotation*

Es sei

$$\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k} \quad \text{und} \quad U = x^2yz\,.$$

Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten

i) $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ ii) $\operatorname{rot}(U\mathbf{A})$ iii) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$
iv) $\operatorname{grad}(\mathbf{A}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A})$ v) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}U\,.$

Aufgabe 2: *Ein Oberflächen-Integral (I)*

Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_S \mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$$

für den Vektor $\mathbf{V} = x\mathbf{i}$. Die Fläche S sei die Oberfläche des Sphäroids

$$x^2 + y^2 + \alpha^2 z^2 = a^2, \quad z > 0\,,$$

worin α eine Konstante ist.

Aufgabe 3: *Ein Oberflächen-Integral (II)*

Es sei $\bar{S}$ der Teil von der Oberfläche des Zylinders

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad 0 < z < 3\,,$$

für den $x > 0$ und $y > 0$ ist. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \iint_S \mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$$

für den Vektor

$$\mathbf{V} = 6y\mathbf{i} + (2x+z)\mathbf{j} - x\mathbf{k}\,.$$

Dabei sei S der Teil von $\bar{S}$, der auf der gekrümmten Oberfläche des Zylinders liegt.

bitte wenden

Aufgabe 4: *Verifikation des* STOKES*schen Satzes*

Verifizieren Sie den STOKESschen Satz für den Vektor

$$\mathbf{V} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$$

und die Oberfläche S der Halbkugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z > 0\,.$$

Aufgabe 5: *Spezielles Vektorfeld*

Beweisen Sie mit Hilfe des STOKESschen Satzes die Gültigkeit der Beziehung

$$\iint_S \mathrm{d}\mathbf{f} \times \mathrm{grad}\phi = \oint_C \phi\,\mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

worin ϕ ein skalares Feld und S eine offene Oberfläche mit der Randkurve C ist.

Hinweise:

- Beweisen Sie die Identität

$$\mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{c}) = \mathrm{grad}\phi \times \mathbf{c} + \phi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{c}\,.$$

- Wenden Sie den STOKESschen Satz auf das Vektorfeld $\mathbf{V} = \phi\mathbf{c}$ mit $\mathbf{c}$ als einem konstanten Vektor an.

Aufgabe 1

- $\oint_C (xy\,dx + x^2 dy) = \int_A^B xy\,dx + \int_B^C x^2 dy + \int_C^D xy\,dx + \int_D^A x^2 dy$

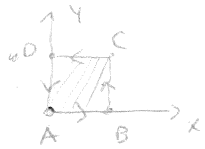
$= \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0,y=0}^{x=1,y=0} + \left[x^2 y\right]_{x=1,y=0}^{x=1,y=1} + \left[\frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=1,y=1}^{x=0,y=1}$

$+ \left[x^2 y\right]_{x=0,\,y=0}^{x=0,\,y=1}$

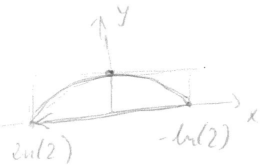
$= 0 + 1^2(1-0) + \frac{1}{2}(0^2-1^2) + 0$

$= 1 - \frac{1}{2} = 1/2$

- $\int_0^1\int_0^1 (2x - x)\,dx\,dy = 1 \cdot \int_0^1 x\,dx = 1\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$



Aufgabe 2



$\int_C (e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy) + \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} e^x \cos y\,dx$ y=0

$= \int_{x=-\ln(2)}^{\ln(2)}\int_0^1 \cancel{-e^x} \sin y + \sin y\, e^x\,dx\,dy = 0$

$\Rightarrow \int_C (e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy) = \int_{\ln(2)}^{-\ln(2)} e^x \cos y\,dx = \int_{\ln(2)}^{-\ln(2)} e^x dx = \left[e^x\right]_{\ln(2)}^{-\ln(2)}$

$= \exp(\ln(2^{-1})) - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 3) Kurvenintegral

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} (x^2+y^2)y \\ -(x^2+y^2)x \\ (a^3+z^3)\cancel{z} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \; x^2+y^2 = r^2$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} a^3\sin\varphi \\ -a^3\cos\varphi \\ a^3+z^3 \end{pmatrix}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{r} = \vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}\, d\varphi = \begin{pmatrix} a^3\sin\varphi \\ -a^3\cos\varphi \\ a^3+z3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ a\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= -a^4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= -a^4\, d\varphi$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{v}\, d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} a^4\, d\varphi = \underline{-2\pi a^4}$$