Mathematische Methoden der Physik II
Übungsserie 4 - Divergenz und Fluss

Dr. Agnes Sambale
agnes.sambale@uni-jena.de

Sommersemester 2018
Abgabe: 07.05.2018

Aufgabe 1 *Gradient und Rotation*

Gegeben seien das skalare Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - y^2z\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$$

und das skalare Feld

$$U(x, y, z) = 2xyz^2.$$

Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten

(i) $\operatorname{grad} U$

(ii) $\operatorname{rot} \mathbf{A}$

(iii) $\operatorname{rot}(U\mathbf{A})$

(iv) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$

(v) $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A})$

(vi) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U.$

LÖSUNG:

Aufgabe 1 Gradient und Rotation

$$\mathfrak{a} = xy\,\vec{i} - y^2 z\,\vec{j} + x z^2\,\vec{k}\,, \qquad U = 2xyz^2$$

(i) $$\underline{\operatorname{grad} U} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = 2yz^2\,\vec{i} + 2xz^2\,\vec{j} + 4xyz\,\vec{k}$$
$$= \underline{2z\left(yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + 2xy\,\vec{k}\right)}$$

(ii) $$\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -y^2 z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(0 + y^2) - \vec{j}\,(z^2 - 0) + \vec{k}\,(0 - x)$$

$$\underline{\operatorname{rot}\mathfrak{a} = y^2\,\vec{i} - z^2\,\vec{j} - x\,\vec{k}}$$

(iii) $$\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y^2z^2 & -2xy^3z^3 & 2x^2yz^4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left(2x^2z^4 + 6xy^3z^2\right) - \vec{j}\left(4xyz^4 - 4x^2y^2z\right) + \vec{k}\left(-2y^3z^3 - 4x^2yz^2\right) \qquad (*)$$

$$\underline{\operatorname{rot}(U\mathfrak{a}) = 2xz^2\left(xz^2 + 3y^3\right)\vec{i} + 4xyz\left(xy - z^3\right)\vec{j} - 2yz^2\left(y^2z + 2x^2\right)\vec{k}}$$

$$\left(2x^2z^4 + 6xz^2y^3\right)\vec{i} + \left(4x^2y^2z - 4xyz^4\right)\vec{j} - \left(2y^3z^3 + 4yz^2x^2\right)\vec{k}$$

- zum Vergleich:

$$U\operatorname{rot}\mathfrak{a} + (\operatorname{grad} U)\times\mathfrak{a} = 2xy^3z^2\,\vec{i} - 2xyz^4\,\vec{j} - 2x^2yz^2\,\vec{k}$$
$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2yz^2 & 2xz^2 & 4xyz \\ xy & -y^2z & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\left[2xy^3z^2 + \left(2x^2z^4 + 4xy^3z^2\right)\right] + \vec{j}\left[-2xyz^4 - \left(2xyz^4 - 4x^2y^2z\right)\right]$$
$$+ \vec{k}\left[-2x^2yz^2 + \left(-2y^3z^3 - 2x^2yz^2\right)\right]\,,$$ Übereinstimmung mit $(*)$

Aufgabe 2 *Rotation und Divergenz*

Konstruieren Sie jeweils ein Vektorfeld, das die folgenden Bedingungen erfüllt, und machen Sie eine Probe. Dabei ist

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(a) $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ besitzt nur eine von x-abhängige Komponente in $\mathbf{k}$-Richtung. $\operatorname{div} \mathbf{v}$ verschwindet nicht.

(b) $\operatorname{div} \mathbf{w}$ hängt nur von $x^2 + y^2$ ab. $\operatorname{rot} \mathbf{w}$ hat keine verschwindende Komponente.

LÖSUNG:

Aufgabe 2 4 Punkte

Konstruieren Sie jeweils ein Vektorfeld, das die folgenden Bedingungen erfüllt, und weisen Sie dies nach. / machen Sie eine Probe. ⊛

a) rot $\vec{V}$ besitzt nur eine von x-abhängige Komponente in $\vec{k}$-Richtung.

⊛ div $\vec{V}$ verschwindet nicht.

b) div $\vec{W}$ hängt nur von x^2+y^2 ab.

rot $\vec{W}$ ~~verschwindet nicht~~. hat keine verschwindende Komponente.

⊛ Dabei ist $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.

Lösung:

a) $$\operatorname{rot}\vec{v} \overset{!}{=} f(x)\vec{k} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \overset{!}{\neq} 0$$

Beispiele für richtige Vektoren:

$$\vec{V} = g(x)\vec{i} + h(x)\vec{j} + m(z)\vec{k}$$

$$\vec{V} = g(y)\vec{i} + h(y)\vec{j} + m(z)\vec{k}$$

2 z.B. $\vec{V} = x\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j} \quad \rightarrow \operatorname{rot}\vec{V} = x\vec{k}$ & $\operatorname{div}\vec{V} = 1$

b) $$\operatorname{div}\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \overset{!}{=} f(x^2+y^2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{W} = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\vec{k} \overset{!}{\neq} 0$$

bzw. $$\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \neq 0 \ \wedge \ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \neq 0 \ \wedge \ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \neq 0$$

z.B. $\vec{W} = (x^3+y)\vec{i} + y^3\vec{j} + xy\vec{k} \quad \rightarrow \operatorname{div}\vec{W} = 3(x^2+y^2)$

2 $\operatorname{rot}\vec{W} = x\vec{i} - y\vec{j} - \vec{k}$

Aufgabe 3 *Zweidimensionales Vektorfeld*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{V} = x^2 y\mathbf{i} - x^3 y^2 \mathbf{j}$$

und den geschlossenen Weg C entlang des Rechteckes $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,2)$ und $D(2,1)$.

(a) Berechnen Sie die Arbeit, die entlang des Weges C in diesem Kraftfeld verrichtet wird, in dem Sie sowohl das Kurvenintegral, als auch das Flächenintegral berechnen [beide Seiten des GREENschen Satzes].

(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes durch die Kurve C, indem Sie beide Seiten des GAUSSschen Satzes in der Ebene berechnen.