Übungsserie 01

(1) (i) $f(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k!}\right|}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k!|} = \infty$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{|k!|} \sim \sqrt[k]{|e^{-k}k^k|} = \frac{k}{e} \to \infty$$

$k!$ kann abgeschätzt werden durch $e^{-k}k^k$ (Stirling-Formel)

(ii – v) analog: nur kein $\lim_{k\to\infty}$, sondern $\limsup_{k\to\infty}$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+x]{\left|\frac{1}{(2n+x)!}\right|}, \quad x \in \{0,1\}$$

$$= 0 \quad \text{(wieder Anwendung Stirling-Formel)}$$

(2) $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{C}$

(an x muss keine Bedingung gestellt werden, da alle Reihen auf $\mathbb{C}$ definiert sind) $\square$

(3) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann unter Anwendung von (2)

(*) $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$

(**) $e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z)$

$= \cos(z) - i \sin(z)$

Offensichtlich gilt nach Reihendefinition:

$\cos(z) = \cos(-z)$

$\sin(z) = -\sin(-z)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(*) + (**)] = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(*) - (**)] = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = i \sin(z)$$

$\square$

(4) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. z: $e^{z+w} = e^z e^w$

$$e^z \cdot e^w = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)}_{\substack{\text{abs.}\\ \text{konvergent}}} \underbrace{\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{w^p}{p!}\right)}_{\substack{\text{abs.}\\ \text{konvergent}}} = \sum_{k,p=0}^{\infty} \frac{z^k w^p}{k! p!}$$

$$e^{z+w} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} \overset{(**)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^n w^{m-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n w^{m-n}}{n!(m-n)!} \overset{(*)}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{z^m w^n}{m! n!} = e^z \cdot e^w$$

(*) Anwendung Cauchy-Produkt

(**) Binomische Summenformel $\square$

(5) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt

$$e^{z+2\pi i} \overset{(4)}{=} e^z \cdot e^{2\pi i} \overset{(2)}{=} e^z \left(\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)\right) = e^z$$

$\Rightarrow$ $e^{\cdot}$ ist periodisch mit Periode $2\pi i$, da z beliebig $\square$

(6) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann

$$\sinh(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \overset{(3)}{=} i \sin(z)$$

$$\cosh(iz) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \overset{(3)}{=} \cos(z)$$

$\square$

(7) Sei $z := x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}\right)$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right)$$

$$e^{ix}e^{-y} = (\cos x + i \sin x)(\cosh y - \sinh y)$$
$$= \cos x \cosh y - \cos x \sinh y$$
$$+ i(\sin x \cosh y - \sin x \sinh y)$$

$$\Rightarrow e^{-ix}e^{y} = \cos x \cosh y + \cos x \sinh y$$
$$+ i(-\sin x \cosh y - \sin x \sinh y)$$

$$\Rightarrow \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \overset{(6)}{=} \cosh(iz)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \overset{(6)}{=} \frac{1}{i} \sinh(z) \quad \square$$

<u>analog:</u>

$$\cosh z = \cosh x \cos y - i \sinh x \sin y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

(8) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. $z := x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

·) $0 = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\neq 0} e^{iy} \Rightarrow e^{iy} = 0$

$= \cos y + i \sin y$

$\Rightarrow \cos y = \sin y = 0$ ↯

$\Rightarrow e^{\cdot}$ besitzt keine Nullstellen

·) $\sin z = 0 \overset{(7)}{=} \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

$\Rightarrow \sin x \underbrace{\cosh y}_{\neq 0} = 0 = \cos x \sinh y$

$\Rightarrow \sin x = 0$ und $(\cos x = 0$ oder $\sinh y = 0)$

$\Rightarrow$ Nullstellen $y = 0$, $x = k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(Nullstellen nur im reellen Bereich vorhanden)

·) $\cos z = 0 \overset{(7)}{=} \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$\Rightarrow \cos x \cosh y = 0 = \sin x \sinh y$

$\Rightarrow$ Nullstellen: $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

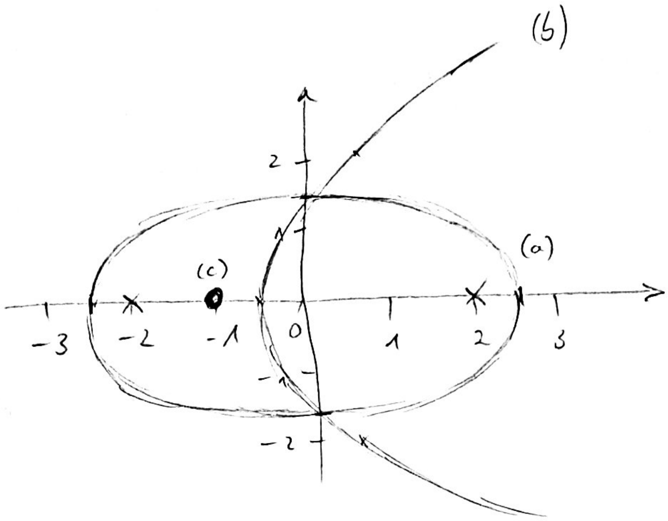
·) Nach (6) $\cos z = \cosh(iz) \Rightarrow \cosh(z) = \cos(\frac{z}{i}) = \cos(iz)$

$\overset{(7),(8)}{\Rightarrow}$ Nullstellen: $i(\frac{\pi}{2} + k\pi + 0i)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

$= i(\frac{\pi}{2} + k\pi)$

·) $\sin z = -i \sinh(iz) \Rightarrow$ Nullstellen: $ik\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

(9)



a) Ellipse

b) Parabel in x-Richtung

c) Punkt

(10) $z \in \mathbb{C}$

(a) $iz^2 + (1-i)z - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad z^2 + \frac{1-i}{i} z = -3i$

$\frac{1-i}{i} = -i(1-i) = -i + i^2 = -1-i$

$\Rightarrow \quad z^2 - (1+i)z + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \left(z - \frac{1+i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 - 3i$

$\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{4}(1+2i+i^2) = \frac{i}{2}$

$\frac{i}{2} - 3i = -\frac{5}{2}i$

$\Rightarrow \quad z = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{-\frac{5}{2}i} = \frac{1+i}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(1-i)$

$\Rightarrow \quad z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + i\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + i\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(b) $z^4 + (1+i)z^2 + i = 0$ (Fundamentalsatz d. Algebra $\Rightarrow$ 4 Nullstellen)

$\varphi := z^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 + (1+i)\varphi + i = 0$

$\Rightarrow \quad \varphi^2 + (1+i)\varphi + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \left(\varphi + \frac{1+i}{2}\right)^2 = -i + \frac{(1+i)^2}{4} = -\frac{i}{2}$

$\Rightarrow \quad \varphi = -\frac{1+i}{2} \pm \sqrt{-\frac{i}{2}}$

$= -\frac{1+i}{2} \pm \frac{1-i}{2}$

$\Rightarrow \quad \varphi_1 = -i$

$\varphi_2 = -1$

$\Rightarrow \quad z_{1/2} = \pm\sqrt{-i}\,, \quad z_{3/4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

(c) $(1+z)^5 = (1-z)^5$ (Anwendung 5. Wurzel)

$\Rightarrow (1+z) = \alpha(1-z)$ $\alpha := e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ mit $k \in \{0,1,2,3,4\}$

$\Rightarrow$ Lösungen: $z_1 = 0$

$1+z = \alpha - \alpha z$

$\Rightarrow (1+\alpha) z = \alpha - 1$

$\Rightarrow z = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

$$z = \frac{\alpha - 1}{(\alpha+1)} \frac{\bar{\alpha}+1}{(\bar{\alpha}+1)} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + \alpha - \bar{\alpha} - 1}{\alpha\bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha} + 1}$$

$$= \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2 + \alpha + \bar{\alpha}} = \frac{2i \sin\frac{2\pi k}{5}}{2 + 2\cos\frac{2\pi k}{5}} = i \cdot \frac{\sin\frac{2\pi k}{5}}{1 + \cos\frac{2\pi k}{5}} = i \tan\frac{\pi k}{5}$$

Übungsserie 02

(1)

(1) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4 + 2n^3}{5n^4 + 23n^3} z^n$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_k|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5n^4 + 23n^3}{7n^4 + 2n^3}\right|}$$

$$\overset{\text{(Sandwich)}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{5}{7} \pm \varepsilon\right|} = 1$$

für ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

(2)

$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(4+3i)^n}$ $\Rightarrow R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|4+3i|^n}$

$$= \lim_{n\to\infty} |4+3i|^{1/2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

(3) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n (2n)!} (z-1)^n$ $\Rightarrow R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n (2n)!}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2 \sqrt[n]{\left|\frac{(2n)!}{n!}\right|} = \infty$$

(4) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(n^2)}}{n^3} \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{e^{3\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3\ln(n)}{n^2}} = 1$

(5) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n} z^n$ $\quad \sin(n\pi) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

$\Rightarrow R = \infty$

(6) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{\log n}{n}} z^n \Rightarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-\log n/n}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\ln^2 n / n^2\right) = 1$

(7) $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} z^{n!}$

$\Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{n^3} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{3\ln n}{n!}\right) = 1$

(2)

(a) $f(z) := \frac{z^3}{z^3+z^2-2} \Rightarrow f$ ist ganzrationale Funktion

$\Rightarrow f$ ist holomorph außer an Polstellen

Polstellen: $z^3 + z^2 - 2 = 0 \qquad z_1 = 1$

$= (z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz$
$\qquad - az^2 - bz - c$

$\Rightarrow a = 1, \; c = 2, \; b = 2$

$z^2 + 2z + 2 = 0 = (z+1)^2 + 1$

$\Rightarrow z+1 = \pm i \Rightarrow z_{2/3} = -1 \pm i$

(b) $f(z) := f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$

$\Rightarrow \quad f(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$

$\Rightarrow$ f holomorph in $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$

(c) $f(z) := z^2 \bar{z}$

$$\Rightarrow \quad f(x+iy) = z|z|^2 = (x+iy)(x^2+y^2)$$
$$= x^3 + xy^2 + i(x^2y + y^3)$$
$$= u(x,y) + iv(x,y)$$

mit $u(x,y) := x^3 + xy^2$, $\quad v(x,y) := x^2y + y^3$

$\partial_1 u(x,y) = 3x^2 + y^2 \qquad \partial_1 v(x,y) = 2xy$

$\partial_2 u(x,y) = 2xy \qquad \partial_2 v(x,y) = x^2 + 3y^2$

$\partial_1 u(x,y) \overset{!}{=} \partial_2 v(x,y) \quad \Rightarrow \quad 3x^2+y^2 = x^2+3y^2$

$\partial_2 u(x,y) \overset{!}{=} -\partial_1 v(x,y) \qquad\qquad 2xy = -2xy$

$\Rightarrow \quad x^2 = y^2, \quad xy = 0$

$\Rightarrow$ komplex diffbar in $0+i0$, $f'(0) = 0$

$\Rightarrow$ nicht holomorph

(d) $f(z) := f(x+iy) = \underbrace{x^3y^2 + ix^2y^3}_{\varphi(z)} + \underbrace{e^x(\cos y + i\sin y)}_{e^z}$ (holomorph auf $\mathbb{C}$)

$u(x,y) := x^3y^2 \qquad v(x,y) = x^2y^3$

$\Rightarrow \quad \partial_1 u(x,y) = 3x^2y^2 \qquad \partial_1 v(x,y) = 2xy^3$

$\qquad \partial_2 u(x,y) = 2x^3y \qquad \partial_2 v(x,y) = 3x^2y^2$

$\Rightarrow \quad x^3y \overset{!}{=} xy^3$ $\qquad$ Fall $x=0$ oder $y=0$ erfüllt Bedingung

Fall $x \neq 0, y \neq 0$: $\quad x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

$\Rightarrow$ f ist komplex diffbar in $\{x+iy \in \mathbb{C} \mid x=0 \text{ oder } y=0 \text{ oder } x = \pm y\}$

$f'(z) = e^z$ für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x=0$ oder $y=0$

$f'(z) = 3x^4 \mp i2x^4 + e^z$ für alle $x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x = \pm y$

$\quad = \frac{3}{4}|z|^4 \mp \frac{i}{2}|z|^4 + e^z$

$\Rightarrow$ f ist nirgends holomorph

(e) $f(z) := f(x+iy) = -6(\cos x + i\sin x) + 2(1-i)y^3 + 15(y^2+2y)$

$$= [-6\cos x + 2y^3 + 15y^2 + 30y]$$
$$+ i[-6\sin x - 2y^3]$$

$$\Rightarrow \partial_1 u(x,y) = 6\sin x$$
$$\partial_2 u(x,y) = 6y^2 + 30y + 30$$
$$\partial_1 v(x,y) = -6\cos x$$
$$\partial_2 v(x,y) = -6y^2$$

$$\Rightarrow 6\sin x \overset{!}{=} -6y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x + y^2 = 0$$
$$6y^2 + 30y + 30 \overset{!}{=} 6\cos x \qquad\qquad y^2 + 5y + 5 = \cos x$$

$$\Rightarrow y^4 + 5y^3 + 5y^2 + 5y^3 + 25y^2 + 25y + 5y^2 + 25y + 25$$
$$= y^4 + 10y^3 + 35y^2 + 50y + 25 = \cos^2 x$$
$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = y^4 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - y^4$$

$$\Rightarrow 2y^4 + 10y^3 + 35y^2 + 50y + 24 = 0$$

(3) $f(z) := f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

$u(x,y) := x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x$

Finde v, sodass f holomorph in $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \partial_1 u(x,y) = 2x + e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x$$
$$\partial_2 u(x,y) = -2y - e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x$$

Forderung der Cauchy-Riemannschen-DGLs:

$$\partial_1 u = \partial_2 v \quad , \quad \partial_2 u = -\partial_1 v$$

$$v(x,y) := \int \partial_1 u(x,s)\, ds \Big|_y = 2xy - e^{-y}\cos x + e^{y}\sin x + C(x)$$

$$\Rightarrow \partial_1 v(x,y) = 2y + e^{-y}\sin x + e^{y}\cos x + C'(x) \overset{!}{=} -\partial_2 u(x,y)$$
$$\Rightarrow C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(x) = K \in \mathbb{R}$$

$f : U_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph

(4) (a) $\operatorname{Re} f(z) = 1$ für alle $z \in U_1(0)$

$\Rightarrow \partial_1 u = 0 = \partial_2 u \quad \Rightarrow \partial_2 v = 0 = \partial_1 v$

$\Rightarrow f$ ist konstant

(b) $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U_1(0)$

$\Rightarrow u^2 + v^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2u\partial_1 u + 2v\partial_1 v = 0 \\ 2u\partial_2 u + 2v\partial_2 v = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_1 u & \partial_1 v \\ \partial_2 u & \partial_2 v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \partial_1 u & \partial_1 v \\ \partial_2 u & \partial_2 v \end{pmatrix} = 0 = \partial_1 u \partial_2 v - \partial_2 u \partial_1 v$$

$$= (\partial_1 u)^2 + (\partial_2 u)^2 = (\partial_1 v)^2 + (\partial_2 v)^2$$

$\Rightarrow \partial_1 u = \partial_2 u = \partial_1 v = \partial_2 v = 0$

$\Rightarrow f$ ist konstant

Übungsserie 03

(1) Sei $\ln : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\} \to \mathbb{C}$

$\ln z := \ln|z| + i \arg z$ (Hauptzweig $-\pi < \arg z \leq \pi$)

Bemerkung: Definition von $\ln$ ergibt sich aus: $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow z = |z| e^{i \arg z} \Rightarrow \ln z = \ln(|z| e^{i \arg z})$

$\Rightarrow \ln z = \ln|z| + i \arg z$ (Fortsetzung von $e^{\ln z} = z$ und $\ln(z \cdot w) = \ln z + \ln w$)

.) Umkehrfunktion: $e^{\ln z} = \exp(\ln|z| + i \arg z)$

$= \exp(\ln|z|) \cdot \exp(i \arg z) = |z| e^{i \arg(z)} = z$

$$-1 = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x}_{1} (\underbrace{\cos y}_{-1} + i \underbrace{\sin y}_{0})$$

$$\Rightarrow x = 0,\ y = \pi$$

$$e^{\circ} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\ln e^z = \ln |e^z| + i \arg e^z$$
$$= \ln (e^{\mathrm{Re}\, z}) + i \,\mathrm{Im}\, z$$
$$= \mathrm{Re}(z) + i \,\mathrm{Im}(z) = z$$

•) $$\ln(z \cdot w) = \ln |z \cdot w| + i \arg(z \cdot w)$$
$$= \ln(|z| \cdot |w|) + i \left[\arg(z) + \arg(w)\right]$$
$$= \ln|z| + i \arg(z) + \ln|w| + i \arg(w)$$
$$= \ln(z) + \ln(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Re}(w) > 0$
(so bleiben alle $\arg(\cdot)$ im Intervall $(-\pi, \pi]$)

Allgemeiner: $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z = |z|\, e^{i\arg(z) + 2\pi i k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$

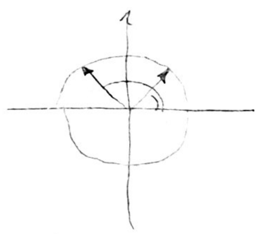
$$\Rightarrow \ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

•) Holomorphie:

$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $x > 0$

$$\Rightarrow \partial_1 u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \partial_1 v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\partial_2 u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \partial_2 v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$



$v(x,y) = \pi - \arctan \frac{y}{-x}$, $x < 0, y > 0$

$$\Rightarrow \partial_1 v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \partial_2 v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$v(x,y) = -\pi - \arctan \frac{y}{x}$, $x < 0, y < 0$

$\Rightarrow$ $\ln$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

mit $$\ln' z = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

(2) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$. Dann $z^w := e^{w \ln z}$

(i) $i^i = e^{i \ln i} = \exp(i \cdot \ln i)$

$\ln i = \ln|i| + i \arg(i) = i\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow i^i = \exp(i \cdot i\frac{\pi}{2}) = e^{-\pi/2}$

$\ln(i+1) = \ln|i+1| + i \arg(i+1) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (i+1)^i = \exp(i \cdot \ln(i+1)) = \exp(i\ln\sqrt{2} + i \cdot i \cdot \frac{\pi}{4})$

$= e^{-\pi/4} \cdot e^{i \ln 2/2}$

$\Rightarrow (1+i)^{1+i} = \exp((1+i) \cdot \ln(1+i))$

$= \exp[(1+i) \cdot (\ln\sqrt{2} + i\pi/4)]$

$= \exp[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + i\ln\sqrt{2} + i \cdot i \cdot \frac{\pi}{4}]$

$= \exp(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \exp(\frac{\pi}{4}i + \frac{\ln 2}{2}i)$

(ii) $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z^w$

$\Rightarrow f(z) = e^{w \ln z} = f(x+iy) = e^{(\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w)(\ln\sqrt{x^2+y^2} + i \arg z)}$

$e^{\cdot}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und $\ln$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$\xRightarrow{\text{(Komposition erhält Holomorphi)}}$ f ist mindestens auf $\mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ holomorph

$$f(x+iy) = \exp[\operatorname{Re}(w) \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{Im}(w) \arg(z) + i(\operatorname{Im}(w) \ln\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{Re}(w) \arg(z))]$$

$f'(z) = \frac{w}{z} e^{w \ln z} = \frac{w}{e^{\ln z}} e^{w \ln z} = w e^{w \ln z - \ln z}$

$= w e^{w-1}$

Wenn $w \in \mathbb{Z}$ dann f holomorph auf $\mathbb{C}$.

(iii) Seien $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$g(w) := z^w = e^{w \ln z}$

$\ln z$ ist konstant ; Identitätsfunktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$, $e^{\bullet}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$,

$\ln z \bullet$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$

$\overset{\text{(Komposition)}}{\Longrightarrow}$ g holomorph auf $\mathbb{C}$

$\Rightarrow g'(w) = \ln(z)\, e^{w \ln(z)} = \ln(z)\, z^w$

(3) (a) $z: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $z(t) := 2e^{it} + e^{-it}$

$$\int_{z([0,2\pi])} (1+z^3)^{15}\, dz = \int_0^{2\pi} (1+z^3(t))^{15} \cdot \dot{z}(t)\, dt$$

$\dot{z}(t) = 2ie^{it} - ie^{-it}$

$z^3(t) = [2e^{it} + e^{-it}]^3 = [4e^{2it} + 4 + e^{-2it}](2e^{it} + e^{-it})$

$= 8e^{3it} + 4e^{it} + 8e^{it} + 4e^{-it} + 2e^{-it} + e^{-3it}$

$= 8e^{3it} + 12e^{it} + 6e^{-it} + e^{-3it}$

$(1+\bullet^3)^{15}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$, z ist glatte Kurve

$\overset{\text{(Cauchy)}}{\Longrightarrow}$ $\int_{\mathrm{im}\, z} (1+\bullet^3)^{15}\, dz = F(z(2\pi)) - F(z(0))$

mit F als Stammfunktion von $(1+\bullet^3)^{15}$

z ist geschlossene Kurve und zusammenziehbar auf $\mathbb{C}$

$\overset{\text{(Cauchy)}}{\Longrightarrow}$ $\int_z (1+\bullet^3)^{15}\, dz = 0$

(b) $f(z) := z e^{z} \quad , z \in \mathbb{C}$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \ \gamma(t) := (t-1) i\pi + t i\pi$

$\Rightarrow$ f ist holomorph $\Rightarrow \int_\gamma f \, d\gamma = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$

mit F als Stammfunktion von f

$\gamma'(t) = 2i\pi \quad \Rightarrow \int_\gamma f \, d\gamma = \int_0^1 \gamma(t) e^{\gamma(t)} \gamma'(t) \, dt$

$= \int_0^1 [(t-1)i\pi + ti\pi] \, e^{(t-1)i\pi + ti\pi} \, 2i\pi \, dt$

$F(z) = (z-1) e^z \quad \Rightarrow \int_\gamma f \, d\gamma = (i\pi - 1) e^{i\pi} + (1+i\pi) e^{-i\pi}$

$= (1 - i\pi) - (1 + i\pi)$

$= -2i\pi$

(c) $f(z) := iz^2 + 1 - 2iz^{-2} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ f holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ Stammfunktion : $F(z) := \frac{iz^3}{3} + z + \frac{2i}{z}$

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \ \gamma(0) := i+1, \ \gamma(1) = 2i$, γ regulär

$\overset{\text{(Cauchy)}}{\underset{\text{(HDI)}}{\Rightarrow}} \int_\gamma f \, d\gamma = F(2i) - F(i+1)$

(4) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) := \operatorname{Re} z$

$\gamma_1 : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_1(t) := \cos t + i \sin t = e^{it}$

$\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}, \ \gamma_2(t) := (1-t) z_1 + t z_2$, für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$\gamma_3 : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_3(t) := r e^{it} + z_0 \quad , r \in (0,\infty), z_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \gamma_1'(t) = i e^{it}, \ \gamma_2'(t) = z_2 - z_1, \ \gamma_3'(t) = r i e^{it}$

$\int_{\operatorname{im}\gamma_1} f \, d\gamma_1 = \int_0^\pi \cos(t) \cdot i e^{it} \, dt = \int_0^\pi i \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) \, dt$

$\int_0^\pi \cos^2(t) \, dt = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\pi \sin t \cos t \, dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2t \, dt = -\frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^\pi = 0$

$\Rightarrow \int_{\operatorname{im}\gamma_1} f \, d\gamma_1 = \frac{i\pi}{2}$

$$\int_{\operatorname{im}\gamma_2} f \, d\gamma_2 = \int_0^1 [(1-t)\operatorname{Re} z_1 + t \operatorname{Re} z_2]\,(z_2 - z_1)\, dt$$

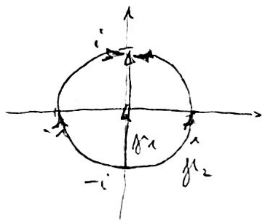
$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(z_1 + z_2)\,(z_2 - z_1)$$

$$\int_{\operatorname{im}\gamma_3} f \, d\gamma_3 = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(re^{it} + z_0) \cdot rie^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\cos(t) + \operatorname{Re} z_0) \cdot rie^{it}\, dt$$

$$= i\pi r^2$$

(5) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := |z|$



$z_1 := -i, \quad z_2 := i$

$\gamma_1: [0,1] \to \mathbb{C}, \ \gamma_1(t) := (1-t)(-i) + ti = i(2t-1)$

$\Rightarrow \gamma_1'(t) = 2i$

$$\Rightarrow \int_{\operatorname{im}\gamma_1} |z| \, d\gamma_1(z) = \int_0^1 |i(2t-1)|\, 2i \, dt$$

$$= 2i \left(\underbrace{\int_0^{1/2} 1 - 2t \, dt}_{3/4} + \underbrace{\int_{1/2}^1 2t - 1 \, dt}_{1/4} \right)$$

$$= 2i$$

$\gamma_2: [0,\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_2(t) := \sin(t) - i\cos(t) = -ie^{it} = e^{i(t - \frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow \gamma_2'(t) = e^{it}$

$$\Rightarrow \int_{\operatorname{im}\gamma_2} |z| \, d\gamma_2(z) = \int_0^\pi \underbrace{|-ie^{it}|}_{1} e^{it} \, dt = 2i$$

$\gamma_3: [0,\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_3(t) := -\sin(t) - i\cos(t) = e^{-i(t + \frac{\pi}{2})} = -ie^{-it}$

$\Rightarrow \gamma_3'(t) = -e^{-it}$

$$\Rightarrow \int_{\operatorname{im}\gamma_3} |z| \, d\gamma_3(z) = \int_0^\pi |-ie^{-it}|\,(-e^{-it}) \, dt = -2i$$

(6) $z_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}, \ f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}, \ f(z) := (z - z_0)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ f ist ganze Funktion (holomorph auf $\mathbb{C}$) für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ f lasst sich in eindeutige Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ entwickeln für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Fall $n \in \mathbb{N}_0$: $\overset{(\text{Cauchy})}{\Longrightarrow} \int_\Gamma f \, d\gamma = 0$

Fall $n \in \mathbb{Z}, n < -1$:

$$F: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) := \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

$\Longrightarrow$ F ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

mit $F'(z) = (z - z_0)^n = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow$ F ist Stammfunktion von f

$\overset{(\text{Cauchy})}{\Longrightarrow} \int_\Gamma f \, d\gamma = 0$

Fall $n = -1$: $f(z) := \frac{1}{z - z_0}$

Nach Cauchy gilt für zwei geschlossene Kurven γ_1, γ_2, die z_0 umschließen die Gleichung: $\int_{\mathrm{im}\,\gamma_1} f \, d\gamma_1 = \int_{\mathrm{im}\,\gamma_2} f \, d\gamma_2$

$\Longrightarrow$ Wahl der Kurve: $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \ \gamma_1(t) = e^{it} + z_0$

$$\Longrightarrow \int_{\mathrm{im}\,\gamma_1} f \, d\gamma_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \, i e^{it} \, dt = 2\pi i$$

(7) Seien $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\omega := e^{i \frac{2\pi}{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$

$z_k := a\omega^k$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ und $z_0 := z_n$

$\xi_k := \frac{z_{k-1} + z_k}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}, k \leq n$

Z: $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k - z_{k-1}}{\xi_k} = \int_{\partial U_{|a|}(0)} \frac{1}{z} \, d\gamma(z)$$

Wissen bereits: $\int_{\partial U_{|a|}(0)} \frac{1}{z} \, d\gamma(z) = 2\pi i$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k - z_{k-1}}{\xi_k} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k - z_{k-1}}{z_k + z_{k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{a\omega^k - a\omega^{k-1}}{a\omega^k + a\omega^{k-1}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\exp(2i\pi k/n) - \exp(2i\pi(k-1)/n)}{\exp(2i\pi k/n) + \exp(2i\pi(k-1)/n)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega - 1}{\omega + 1} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{(\omega - 1)(\overline{\omega} + 1)}{|\omega + 1|^2}$$

$$= 2n \frac{|\omega|^2 + \omega - \overline{\omega} - 1}{|\omega + 1|^2} = 2ni \frac{2 \operatorname{Im} \omega}{(1 + \operatorname{Re} \omega)^2 + \operatorname{Im}^2 \omega} = 2ni \frac{2 \operatorname{Im}(\omega)}{2 + 2\operatorname{Re}(\omega)}$$

$$= 2ni \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{1 + \operatorname{Re}(\omega)} = 2ni \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} = 2ni \tan \frac{\pi}{n} \to 2\pi i, n \to \infty$$

Übungsserie 04

(1) Berechne $\oint_{\Gamma} (1+z^2)^{-1} \, d\gamma(z)$

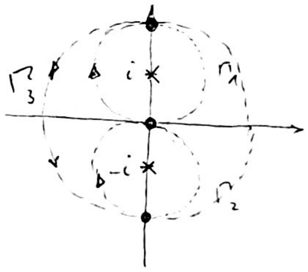
mit $\Gamma_1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1 \}$

$\Gamma_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 1 \}$

$\Gamma_3 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$

Polstellen : $1 + z^2 = 0 \implies z^2 = -1$

$\implies z = \pm i$



$f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$

$f(z) := \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$

$\implies f$ ist holomorph (in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$)

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := e^{it} + i$, $\gamma_2(t) := e^{it} - i$, $\gamma_3(t) := 2e^{it}$

Dann nach Cauchy : $-\int_{\gamma_1([\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi])} f \, d\gamma_1 - \int_{\gamma_2([\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi])} f \, d\gamma_2 + \int_{\gamma_3([\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi])} f \, d\gamma_3 = 0$

$\implies \int_{\operatorname{im}\gamma_3} f \, d\gamma_3 = \int_{\operatorname{im}\gamma_1} f \, d\gamma_1 + \int_{\operatorname{im}\gamma_2} f \, d\gamma_2$

$g : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$, $g(z) := \dfrac{1}{z-i} \implies g$ holomorph

$\implies \int_{\operatorname{im}\gamma_2} f \, d\gamma_2 = \int_{\operatorname{im}\gamma_2} \dfrac{g(z)}{z+i} \, d\gamma_2(z) \overset{(\text{Cauchy})}{=} 2\pi i \, g(-i) = -\pi$

$h : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $h(z) := \dfrac{1}{z+i} \implies h$ holomorph

$\implies \int_{\operatorname{im}\gamma_1} f \, d\gamma_1 = \int_{\operatorname{im}\gamma_1} \dfrac{h(z)}{z-i} \, d\gamma_1(z) \overset{(\text{Cauchy})}{=} 2\pi i \, h(i) = \pi$

$\implies \int_{\operatorname{im}\gamma_3} f \, d\gamma_3 = 0$

(2) $\displaystyle \oint_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2}\, dz \overset{(\text{Cauchy})}{=} 2\pi i\, (2)^2 = 8\pi i$

$$\oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{z^2+\pi}\, d\gamma(z) = \oint_{|z+2i|=3} \frac{1}{(z-i\sqrt{\pi})(z+i\sqrt{\pi})}\, d\gamma(z)$$

$\rightarrow$ Kurve enthält nicht $z = i\sqrt{\pi}$

$$\overset{(\text{Cauchy})}{=} 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i\sqrt{\pi}} = -\sqrt{\pi}$$

Übungsserie 05

(1) (a) $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)$

$\Rightarrow$ f ist holomorph mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos(\pi n) = \frac{(-1)^n}{n}$$

(b) $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} = \dfrac{z^2}{1 - z^2}$

$\Rightarrow$ f holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$

(c) $\Rightarrow$ $|a_k| = \dfrac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k!$

$\Rightarrow$ $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \geq \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k!} = \infty$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius 0 $\Rightarrow$ holomorphe Funktion existiert nicht

(d) $f(z) := e^{-1/z}$ $\Rightarrow$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

(2)

(a) $f(z) := e^z$ $\Rightarrow$ $f^{(n)}(z) = e^{(z)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{k!}(z - z_0)^k$$

$(z_0 = i\pi)$

$\Rightarrow$ $e^z = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(z - i\pi)^k}{k!}$

(b) $f(z) = (z-i)^{-3}$ $\Rightarrow$ $f'(z) = (-3)(z-i)^{-4}$

$\Rightarrow$ $f^{(n)} = (-1)^n \dfrac{(n+2)!}{2}(z-i)^{-3-n}$

$z_0 = -i$

(3) (a) $f(z) := e^z$ auf $B_1(0) \subset \mathbb{C}$

$f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_1(0)$, f stetig, $B_1(0)$ zusammenhängend

$\overset{\text{(Maximumpr.)}}{\Longrightarrow}$ $|f|$ nimmt Maximum und Minimum auf $\partial B_1(0)$ an

$\Rightarrow$ $\gamma : [0, 2\pi] \to B_1(0)$, $\gamma(t) = e^{it}$

$\Rightarrow$ $|f \circ \gamma(t)| = |e^{e^{it}}| = |e^{\cos t} e^{i \sin t}| = e^{\cos t} =: g(t)$

$\Rightarrow$ $g'(t) = -\sin(t)\, e^{\cos t} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $t = 0$, $t = \pi$

$\Rightarrow$ Maximum: $|e^{\gamma(0)}| = e$ Minimum: $|e^{\gamma(\pi)}| = e^{-1}$

(b)