

## Kosmologie

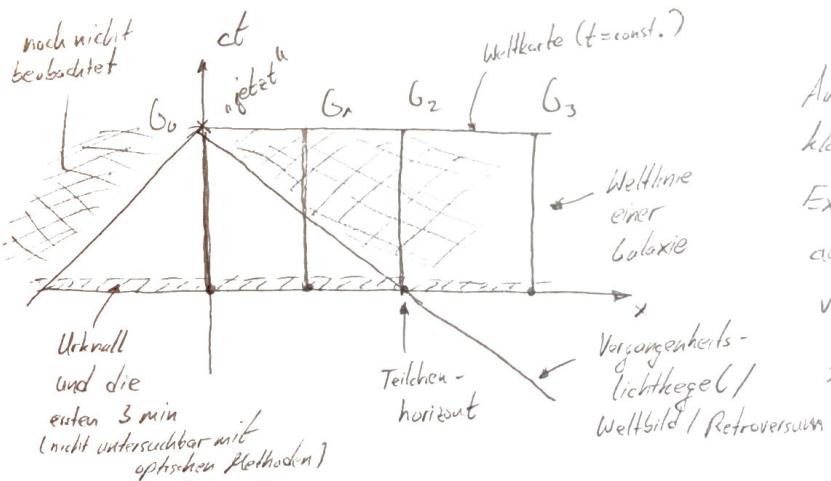
### Einführung: Der Gegenstand der Kosmologie

Wieso ist Kosmologie überhaupt möglich?

Kosmologie: Charakterisierung, Ursprung, und Entwicklung des Universums im Gantzen bzw. im Großen

Universum: enthält alles, einschließlich Raum und Zeit  
Es ist beschreibbar durch kontrollierte Experimente, widerlegbare Theorien mit Vorhersagekraft und nichts außerdem.

Bemerkung: 1.) in der Newtonschen Anecknung war das Universum in Raum und Zeit enthalten



Aus der Skizze wird klar, dass aus der Existenz eines Anfangs auch die Existenz von Teilchenhorizonten folgt. Umgedreht zeigte S. Hawking in seiner Doktorarbeit unter sehr offiziellen Voraussetzungen den Einzug des Urballs.

Wir wollen die physikalischen Gesetze überall anwenden. Dabei handelt es sich um eine Extrapolation, welche wir nicht überprüfen können. Es handelt sich also um ein Postulat.

Kosmologisches Modell: 1.) Allgemeine Relativitätstheorie  
2.) Zustandsgleichungen (Modell der idealen Flüssigkeit)  
3.) Anfangsbedingungen (nicht erfassbar)

Folgendes ist zu erklären:

- ) Dunkelheit des Nachthimmels
- ) Rotverschiebung und Galaxiespektren
- ) 2.7K - Strahlung und deren Planck'sches Spektrum
- ) Häufigkeit der leichten chemischen Elemente H, He, D, Be, Li  
(die ersten drei Minuten)
- ) mittlere Dichte der leuchtenden Materie bzw. Dunkelmaterie
- ) Grundprinzip der Kosmochronologie
- ) Strukturbildung

### Kinematik von Robertson-Walker - Kosmen

### Kosmologische Symmetrien und Prinzipien

#### Definition: (Kosmologisches Prinzip)

Im Ruhesystem der Materie gibt es weder eine ausgewählte Richtung noch einen ausgesuchten Ort.

Die Welt in drei Dimensionen ist immer und überall homogen und isotrop.

Bemerkung: •) Von unserem Punkt ist die Lokaalität beobachtbar  
•) Die Homogenität entspringt dem Kopernikanischen Prinzip  
•) Wir betrachten eine Skala  $\gtrsim 100 \text{ Mpc}$   
und damit Volumina mit ca.  $10^6$  Galaxien  
 $\Rightarrow$  Möglichkeit der Statistik (z.B. Temperatur der Hintergrundstrahlung)

## Robertson - Walker - Metrik

Nach Einstein beschreibt ein Gravitationsfeld die Änderung der Raumzeit-Metrik:

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha, t) \quad \longleftrightarrow \quad ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha, t) dx^\mu dx^\nu$$

Hierbei und im Folgenden gilt:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$x^4 = ct$$

- ) Summenkonvention von Einstein
- ) lateinische Buchstaben ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) laufen von 1 bis 4
- ) griechische Buchstaben ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) laufen von 1 bis 3

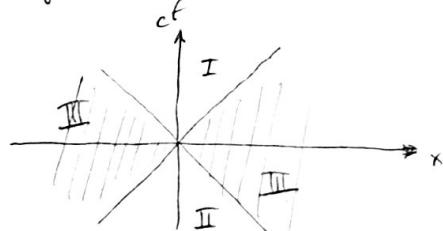
$$\begin{aligned} \rightarrow ds^2 &= g_{\mu\nu}(x^\rho) dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\alpha\beta}(x^\rho) dx^\alpha dx^\beta + 2g_{\alpha 4} dx^\alpha dt + g_{44}(x^\rho) (dx^4)^2 \end{aligned}$$

Vergleich zu Euklidischer Geometrie:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = I_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$(I_{\alpha\beta}) = \text{diag}(1, 1, 1)$$

Vergleich zum Minkowski-Raum:



$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$$

I ... Zukunft

II ... Vergangenheit

III ... enthält Raum-  
zeitige Abstände

1. Schritt: Lichtausbreitung:  $ds^2 = 0$

$\mathbb{R}^4$   $x^2, x^3 = \text{const.}$   $\times$   $\text{ct}$   $\Rightarrow$  Eigensystem  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$

$$= -c^2 dt^2$$

$$\Rightarrow g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{14} dx^1 dt + c^2 g_{44}(dt)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + 2c \frac{g_{14}}{g_{11}} \frac{dx^1}{dt} + c^2 \frac{g_{44}}{g_{11}} = 0$$

\* folgt aus Isotropie des kosmologischen Prinzips

$$\Rightarrow \frac{dx^1}{dt} = -c \frac{g_{14}}{g_{11}} \pm c \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{11}}} \sqrt{g_{14}^2 - g_{44}g_{11}}$$

$$\text{Für Fall } g_{14} = 0 : \frac{dx^1}{dt} = \pm \sqrt{\frac{-g_{44}}{g_{11}}} / c \quad (\text{also: } ds^2 = g_{11} dx^1 dx^1 + g_{44} (dx^4)^2)$$

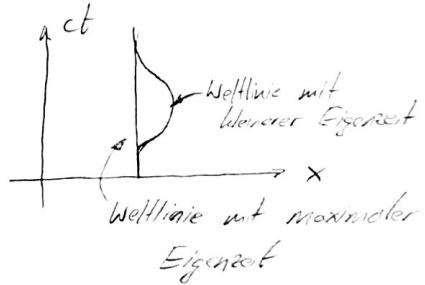
Dennach wollen wir sagen  $g_{44} = 0$ . \* (Licht aus einer Richtung bewegt sich in entgegengesetzter Richtung gewissermaßen schnell)

2. Schritt: (Vergleiche angehobene Koordinaten mit Analogie zum Luftballon: Städte haben auch nach dem Aufblasen feste Koordinaten, aber größeren Abstand)

Welllinie von Galaxien:  $x^\alpha = \text{const.} \Rightarrow$  mitbewegte Koordinaten

Zwangsparadoxon:

entspricht nicht den euklidischen Gegebenheiten.



$$\text{Geodaten-Gleichung: } \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (\text{siehe ART})$$

$$\text{im mitbewegten System gilt: } \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{44}^\alpha \left( \frac{dx^4}{ds} \right)^2 = 0$$

aufßerdem wissen wir in diesem System:  $ds^2 = g_{44} (dx^4)^2$   
(daher  $\frac{dx^4}{ds} \neq 0$ , wegen  $g_{44} \neq 0$ )

$$\Rightarrow \Gamma_{44}^\alpha = 0$$

$$\text{nach ART: } \Gamma_{44}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\beta g_{44} + \partial_4 g_{4\beta} - \partial_\beta g_{44})$$

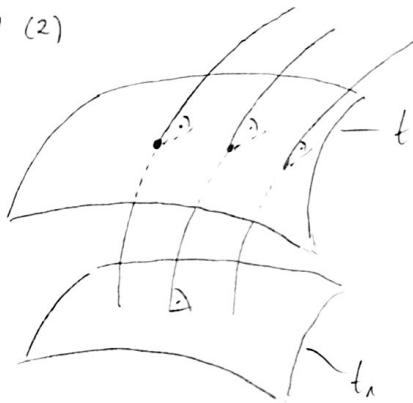
$$\Rightarrow g^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{44} = 0 \Rightarrow g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \partial_\beta g_{44} = g_\beta^\beta \partial_\beta g_{44} = 0$$

$\Rightarrow \partial_\beta g_{44} = 0 \Rightarrow g_{44}$  kann nicht von räumlichen Koordinaten abhängen.  $\Rightarrow$  es gibt eine Art Wellzeit

Jetzt:  $dx^4 := \sqrt{-g_{44}} / dx^4$  (gemeinsame Eigenschaft aller Galaxien)

 $\Rightarrow ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - (dx^4)^2$  (Querstrich wird hier einfach wieder weggelassen)
 $\Rightarrow$  transformiertes  $g_{44} = -1$   
wie im Minkowski-Raum
 $-c^2 dt = -c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau$ : Weltzeit, Eigenschaft der Galaxien  
kosmische Zeit

(1) und (2)



raumartige Hyperflächen

 $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad dx^x = 0 \quad (\text{mitbewegte Kordinaten})$ 
 $u^i = (0, 0, 0, c) \quad dt = d\tau$ 
 $x^4 = ct$

$a^i = (a^1, a^2, a^3, 0)$

$\Rightarrow g_{ij} a^i u^j = 0$

$\Rightarrow$  Hyperflächenorthogonal (sinvolle und sinnvolle Übersetzung Newtonscher Mechanik in Kosmologie)

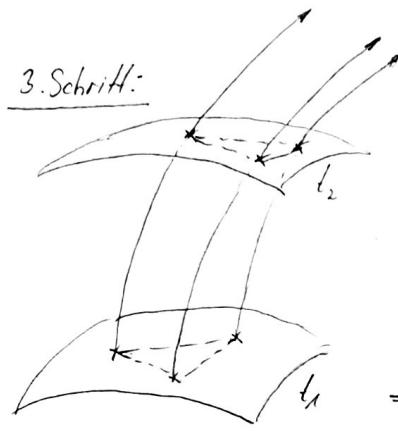
$g_{ij} u^i u^j = u_i u^i$

$\Rightarrow u_i u^i = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta + g_{44} (u^4)^2$ 
 $= -c^2 \Rightarrow \text{zeitfester Vektor}$

### Weylsches Postulat:

Die Weltlinien der Galaxien sind Geraden, die auf raumartigen Hyperflächen senkrecht stehen. Weltlinien schneiden sich in höchstens zweimal (einmal in Vergangenheit und einmal in Zukunft).

- Bemerkung:
- ) nur zwei Schnittpunkte implizieren die Möglichkeit von Urknall und Schließknall
  - ) in Realität können Galaxien kollidieren  
Kosmologie "ignoriert" diese Tatsachen



Dreiecke aus Galaxien bleiben sich selbst ähnlich, aufgrund von Isotropie.  
Keine Richtung kann schneller oder langsamer expandieren als eine andere.

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}(x^i, t) = a(t) \bar{g}_{\alpha\beta}(x^i)$$

$a(t)$  ... Skalenfaktor

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - c^2 dt^2 = \bar{g}_{ij} dx^i dx^j$$

$$= d\sigma^2 - c^2 dt^2 \quad \text{mit } d\sigma = ds^{(3)}$$

Räumliches Abstandsverhältnis:

$$\frac{d\sigma_1^2}{d\sigma_2^2} = \frac{a^2(t_1)}{a^2(t_2)} \frac{\bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{\bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = \frac{a^2(t_1)}{a^2(t_2)}$$

$\Rightarrow$  Wenn überhaupt, dann gibt es einen Urknall und einen Schlussknall für alle Galaxien



$$\Rightarrow ds^2(x^i, t) = a^2(t) g_{\alpha\beta}(x^i) dx^\alpha dx^\beta - c^2 dt^2$$

4. Schritt: Geometrie von Hyperflächen

→ Räume konstanter Krümmung

Riemannscher Krümmungstensor:  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \quad \text{mit } K = \text{const}$$

(Räume konstanter Krümmung)

Bemerkung:  $\rightarrow$  Weyl-Tensor verschwindet aufgrund des Skalenfaktors

$$\text{Ricci-Tensor: } R_{\beta\delta} = g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$\Rightarrow R_{\beta\delta} = K(g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g^{\alpha\gamma} g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma})$$

$$= K(3g_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}) = 2K g_{\beta\delta}$$

Riemannische Krümmungsinvariante:  $R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta}$

$$\Rightarrow R = g^{\beta\delta} 2K g_{\beta\delta} = 6K = \text{const.}$$

Wir verlangen Isotropie in jedem Punkt.

$$\text{Ansatz: } ds^2 = g_{\alpha\beta} (\times 8) dx^\alpha dx^\beta$$

$$= f(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r} \frac{f'}{f} \quad R_{22} = 1 + \frac{1}{2} \frac{f'}{f^2} - \frac{1}{f}$$

$$g_{11} = f(r) \quad g_{22} = r^2$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{1}{r} \frac{f'}{f} = 2K g_{11} = 2Kf$$

$$R_{22} = 1 + \frac{f'}{2f^2} - \frac{1}{f} = 2K g_{22} = 2Kr^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = \frac{1}{1-Kr^2}}$$

$$\Rightarrow ds^2(x^A, t) = a^2(t) \left[ \frac{1}{1-Kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] - c^2 dt^2$$

5. Schritt (Reskalierung)

$$(a) K = \varepsilon |K| \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{ansonsten } \varepsilon = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{dr^2}{1-Kr^2} = \frac{dr^2}{1-\varepsilon|K|r^2} = \frac{dr^2/|K|}{1-\varepsilon|K|r^2} \quad \text{mit } \frac{|K|r^2}{1-\varepsilon|K|r^2} = \tilde{r}^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{a^2(t)}{|K|} \left[ \frac{d\tilde{r}^2}{1-\varepsilon r^2} + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] - c^2 dt^2$$

$\underbrace{=}_{=:} \tilde{a}^2(t)$

$\Rightarrow$  Robertson-Walker - Geometrie mit  $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$

$$ds^2(r, \theta, \varphi, t) = \tilde{a}^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-\varepsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] - c^2 dt^2$$

Bemerkung: •)  $\varepsilon \in \{0, -1\}$  :  $r \in [0, \infty)$   
 •)  $\varepsilon = 1$  :  $r \in [0, 1]$  ( $r=1$  ist hebbare Polstelle)

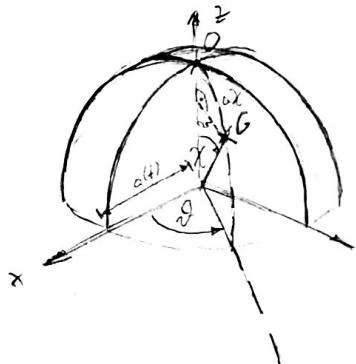
$$r(\chi) := \begin{cases} \sin \chi & : \varepsilon = 1, \chi \in [0, \pi] \\ \chi & : \varepsilon = 0, \chi \in [0, \infty) \\ \sinh \chi & : \varepsilon = -1, \chi \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 : \frac{dr^2}{1-r^2} = \frac{\cos^2 \chi d\chi^2}{\cos^2 \chi} = d\chi^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2(t) \left[ d\chi^2 + r^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - c^2 dt^2$$

Beispiel:  $t = \text{const}$ ,  $\vartheta = \text{const}$

$$\Rightarrow ds^2 = a(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2)$$



radialer Abstand:  $a(t)\chi$

metrischer Abstand:  $a\chi$

$$\begin{aligned} V &= \iiint \sqrt{g^{(3)}} d\chi d\theta d\varphi \\ &= a^3 \int_0^\pi \sin^2 \chi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi d\chi \\ &= 2\pi^2 a^3 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Sie interpretieren  $D(t)$   
 mit  $D(t) = \chi(t) \cdot a(t)$   
 als den Abstand.

(endliches Universum, da endlich  
 unbegrenztes Universum, da es keinen  
 ausgezeichneten Punkt gibt)

$$D(t) = \chi \cdot a(t)$$

$$V(t) := \frac{dD(t)}{dt} = \chi \frac{da(t)}{dt} = \chi a(t) \cdot \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}$$

$$= D(t) \cdot \underbrace{\frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt}}_{H(t)} \sim D(t)$$

$\frac{1}{H(t)}$  ... Hubble-Zeit

Hubble Parameter  
 $H(t)$

$\frac{c}{H(t)}$  ... Hubble-Länge

$$v(t) = H(t) D(t)$$

### Geschwindigkeits - Entfernung - Zusammenhang

( $D(t)$  ist nur im Prinzip messbar; Abstand zu heutiger Zeit  
 $\Rightarrow$  jeder Zusammenhang mit messbaren nicht bestimmbaren  
Größen muss demzufolge eine Approximation sein)

Bemerkung: 1.) Ist das Universum flach, so ist es zu allen Zeiten flach und der Urknall kann kein punktförmiges Ereignis sein. Die Metrik gibt nur einen lokalen Abstand an.

### Die Expansions - Rotverschiebung

radiale Lichtstrahlen emittiert von einer Galaxie  $X$  ( $g, g = \text{const}$ )

$t_e$  ... Emission bei  $0$ , da

$t_0$  ... Beobachtung bei  $0$ ,  $d_0$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2(t) d\chi^2 - c^2 dt^2$$

$$= 0 \quad (\text{da es sich um Licht handelt})$$

$$\Rightarrow \chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt \approx \int_{t_e + \frac{d_0}{c}}^{t_0 + \frac{d_0}{c}} \frac{c}{a(t)} dt$$

(Expansion des Universums wird für diese kurzen Zeitschritte vernachlässigt)

$$\Rightarrow \int_{t_e}^{t_0 + \frac{d_0}{c}} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_0}^{t_0 + \frac{d_0}{c}} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$\approx \frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}} \quad \begin{array}{l} \text{Expansion:} \\ a(t_0) > a(t_e) \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 > \lambda_e$$

"Rotverschiebung"

Alternative Herleitung:

1.) Aussendung einer Wellenlänge findet  
nichtscheinungsweise  
zu einem festen  
Zeitpunkt statt:

$$ds^2 \approx \lambda^2$$

$$dt^2 = 0$$

$$d\vartheta = d\psi = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lambda^2 = a^2(t) d\chi^2 \\ &\Rightarrow d\chi^2 = \frac{\lambda^2}{a^2(t)} = \text{const} \end{aligned}$$

2.)  $d\chi$  hängt nicht von  
Zeit ab und ist  
damit konstant

$$\Rightarrow \frac{\lambda_e^2}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0^2}{a(t_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}}$$

Bemerkung: 1.) Doppler - Effekt ist deutlich von Rotverschiebung zu unterscheiden

Hält man Expansion an, steht Expansion ; Rotverschiebung  
aber Doppler - Effekt bleibt nach "Anhalten" nicht bestehen  
(siehe kumulativer Effekt)

$$\text{Rotverschiebung: } z = \frac{t_0 - t_e}{t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = 1+z} \quad \text{Expansions-Rotverschiebungszusammenhang}$$

- Bemerkung:
- >  $a$  kann nicht gemessen werden
  - >  $a(t)$  beschreibt Änderung der Skalen
  - >  $z$  ist die eigentliche Messgröße

### Kosmische Nahzone

„heute“:  $t_0$ ,  $a(t_0)$

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} \ddot{a}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots$$

$$= a(t_0) \left[ 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t-t_0)^2 + \dots \right]$$

$$= a(t_0) \left[ 1 + H(t_0)(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right]$$

$$\text{mit } q = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} \quad \begin{array}{l} \text{Verzögerungsparameter} \\ (q < 0 \rightarrow q > 0) \end{array}$$

„Nahzone“:  $H_0(t-t_0) \ll 1$

(Lichtlaufzeiten sind viel kleiner als Alter des Universums)

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 = \frac{1}{1 + H_0(t_e-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_e-t_0)^2} - 1$$

$$= H_0(t_0-t_e) + H_0^2 \left( 1 + \frac{q_0}{2} \right) (t_0-t_e)^2 \quad (\text{Taylor expansion von } \frac{1}{a(t)} \text{ bei } t_0)$$

$$\Rightarrow \chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c dt}{a(t)} = \frac{c}{a(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} \left[ 1 - H_0(t-t_e) + \dots \right] dt$$

wir wollen nur bis zur zweiten Ordnung gehen

$$= \frac{c}{a(t_0)} \left[ (t_0-t_e) - H_0 \left( \frac{t_0^2}{2} - \frac{t_e^2}{2} \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{c}{a(t_0)} \left[ (t_0-t_e) + \frac{H_0}{2} (t_0-t_e)^2 + \dots \right]$$

$$\chi^2 \approx \frac{c^2}{a^2(t_0)} (t_0-t_e)^2$$

wir werden zeigen:

$$H_0 D(t_0) = c z - \frac{1}{2} (1+q_0) c z^2$$

$$z = H_0 \left[ (t_0 - t_e) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_e)^2 \right] + \frac{1}{2} H_0^2 (1+q_0) (t_0 - t_e)^2 + \dots$$

$$= \underbrace{\frac{H_0}{c} \chi a(t_0)}_{D(t_0)} + \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{c^2} (1+q_0) \underbrace{[\chi a(t_0)]^2}_{D^2(t_0)} + \dots$$

$$\Rightarrow z = \frac{H_0}{c} D(t_0) + \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{c^2} (1+q_0) D^2(t_0) + \dots$$

$$\Rightarrow H_0 D(t_0) = c z - \frac{1}{2} \frac{1+q_0}{c} [H_0 D(t_0)]^2 + \dots$$

Hier sehen Sie diesen Ausdruck  
in sich selbst ein.

$$= c z - \frac{1}{2} \frac{1+q_0}{c} [cz - \dots]^2 + \dots$$

$$H_0 D(t_0) = cz - \frac{1}{2} (1+q_0) cz^2 + \dots$$

Rotationsbewegungs-Entfernungszusammenhang

- Bemerkung:
- )  $D(t)$  ist immer noch eine nicht messbare Entfernung
  - ) Diese Gleichung gilt nur für die heutigen Parameter
  - ) Im weiteren Vorgehen wollen wir diese Gleichung durch eine messbare Größe nähern.

### Entfernungen

$$D(t) \begin{cases} D(t_e) =: D_e \\ D(t_0) =: D_0 \end{cases}$$

radiale Entfernung ( $D(t) = \chi \cdot a(t)$ )  
(engl.: proper distance)

$r(\chi)$  ... metrische Entfernung

$D_T = c(t_0 - t_e)$  ... Lichtlaufzeit-Entfernung

### Leuchtkraft-Entfernung

$$F = \frac{L}{A} \quad [L] = W \dots \text{Leuchtkraft}$$

$$[F] = \frac{W}{m^2} \dots \text{Fluss}$$

$$[A] = m^2 \dots \text{Fläche}$$

Frage:

$$D(t_0) \xrightarrow{?} D_e$$

Wie lautet der Zusammenhang?

$$\rightarrow \text{in euklidischer Geometrie: } F = \frac{L}{4\pi D_e^2}$$

In der gekrümmten Raumzeit:

$$ds^2 = \alpha^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - c^2 dt^2 \\ = \alpha^2(t) \underbrace{\left[ dr^2 + r^2(\theta) (d\theta^2 + \sin^2 \theta) \right]}_{=: d\Omega^2} - c^2 dt^2$$

(1) Beobachter:  $r = \text{const}$      $t_0 = t = \text{const}$      $\Rightarrow ds^2 = \alpha^2(t_0) r^2 d\Omega^2$

Photonen verteilen sich auf Fläche (Emitter im Zentrum):

$$A = \iint \sqrt{g^{11}} d\Omega d\theta = \alpha^2(t_0) r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \\ = 4\pi \alpha^2(t_0) r^2(\chi)$$

(2) Photonen:  $ds^2 = 0$ ,  $d\theta = d\varphi = 0$

$$\Rightarrow \alpha^2(t) d\chi^2 - c^2 dt^2 = 0$$

Emission:  $d\chi = \frac{c dt}{\text{alte})}$  oder auch  $\delta_e \chi = \frac{c \delta t}{\text{alte})}$

Beobachtung:  $\delta_o \chi = \frac{c \delta t}{\text{alte})}$      $\delta t \dots$  selbst ausgewähltes Zeitspann

( $\delta t$  gibt es nicht für einen Zeitpunkt)

(3) Rotverschiebung:

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\alpha(t_0)}{\text{alte})}$$

$$\Rightarrow F = \frac{L}{4\pi r^2(\chi) \alpha^2(t_0)} \frac{d\chi}{\delta_e \chi} \cdot \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\alpha^2(t_0)}{\alpha^2(t_0)} \cdot \frac{L}{4\pi r^2(\chi) \alpha^2(t_0)} \\ = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{L}{4\pi r^2(\chi) \alpha^2(t_0)} = \frac{L}{4\pi D_L^2} \quad \begin{array}{l} \text{(wir behalten Euklidische Distanz bei und betrachten sie Anwendung)} \end{array}$$

$$\Rightarrow D_L = r(\chi) \alpha(t_0) (1+z) = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}$$

Lenzichtung - Entfernung (Definition)

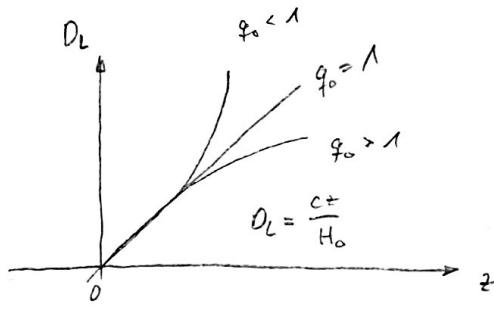
$$\text{Nahzone: } r(\chi) = \begin{cases} \sin \chi \\ \chi \\ \sinh \chi \end{cases} \approx \chi \implies D_L \approx D_{L_0}(1+z)$$

$\Rightarrow$  Rotverschiebungs - Entfernung - Relation mit messbarer Entfernung:

$$\frac{1}{c} H_0 D_L = (1+z) \left[ z - \frac{1}{2} (1-q_0) z^2 + \dots \right]$$

$$= z + \frac{1}{2} (1-q_0) z^2 + \dots$$

$$\Rightarrow D_L = \frac{cz}{H_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-q_0) z + \dots \right] \quad \text{Hubble-Diagramm}$$



### Winkeldurchmesser - Entfernung

standard - Maßstab: Länge  $l$

senkrecht zur Sichtlinie

Rotverschiebung  $z$ ,  $\chi = \text{const.}$  (Beobachter  $\chi = 0$ )

Winkeldurchmesser  $\Delta\theta \ll 1$

Stabisch - Euklidisch:  $D_A = \frac{l}{\Delta\theta}$  (eigentlich tan)

Linienelement:  $ds^2 = a^2(t) [d\chi^2 + r^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)] - c^2 dt^2$

Aus Übungsaufgabe wissen wir:  $\Delta s^2 = \Delta\vartheta^2 + \Delta\varphi^2 \sin^2 \vartheta$

Esetzen:  $ds^2 \rightarrow l^2$  Zeitpunkt:  $t = t_0$  (Kanson),  $\chi = \text{const.}$   
 $\hookrightarrow dt = 0, d\chi = 0$

$$l = \omega \int_{t=t_0} = a(t_0) r(\lambda) \Delta \delta, \quad D_A = a(t_0) r(\lambda)$$

Mit  $\frac{a(t_0)}{a(t_0)} = 1+z$  folgt

$$\boxed{D_A = a(t_0) r(\lambda) \frac{1}{1+z}} \quad \text{Winkelmaß - Entfernung}$$

$$\text{Es gilt: } D_L = a(t_0) r(\lambda) (1+z) = D_A (1+z)^2$$

$$\text{Nahzone bzw. für } z=0 \text{ (stetig): } D_A = a(t_0) \lambda \frac{1}{1+z} = D(t_0) \frac{1}{1+z}$$

### Hubble - Effekt

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hubble beobachtete 1929: } D_L = \frac{c z}{H_0} \\ \text{mit Winkeldurchmesser: } z = \frac{\nu}{c} \end{array} \right\} v = H_0 D_L \quad (\text{nach Hubble})$$

Aber aus dem kosmischen Prinzip folgt:  $v(t) = H(t) D(t)$  (damals nicht bekannt)  
Für  $z \approx 10^{-3}$  (damals üblich) gab es Übereinstimmung.

Vergleich:

$$\left. \begin{array}{l} D(t_0) = \frac{c z}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{2} (1+q) z + \dots \right] \\ D_L = \frac{c z}{H_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-q_0) z + \dots \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{beide wurden} \\ \text{damals bestätigt} \end{array}$$

## Dynamik von Robertson-Walker-Ketten

### Friedmann'sche Modelle

---

Einstein:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} + \Lambda g_{mn} = \mathcal{E} T_{mn}$$

auch:

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} + \Lambda g_{mn} = G_{mn}$$

mit  $\mathcal{E} = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2,07 \cdot 10^{-48} \frac{s^2}{g \text{ cm}}$

nach Newton:  $\Delta U = 4\pi G \rho$  (Poisson-Gleichung)

es gilt  $\nabla_n G^{mn} \equiv G^{mn}_{;n} = 0$  (kovariante Ableitung)

(Kontinuitätsgleichung / Bianchi-Identität)

$\Rightarrow T^{mn}_{;n} = 0 \Rightarrow$  Energie-Puls-Tensor ist divergenzfrei

Wir nennen  $\Lambda$  die kosmologische Konstante.

Für Robertson-Walker-Geometrie: (RW)

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \left( -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{8c^2 + \dot{a}^2}{a^2} + \Lambda c^2 \right) g_{\mu\nu}$$

$$G_{\alpha 4} = 0, \quad G_{44} = \frac{3}{c^2} \frac{8c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda$$

$\Rightarrow T_{\mu\nu} \sim g_{\mu\nu}, \quad T_{\alpha 4} = 0$

Behauptung (ohne Herleitung): Allgemeinste Lösung für RW:

$$T_{mn} = \rho(t) g_{mn} + \left( \mu(t) + \frac{p(t)}{c^2} \right) u_m u_n \quad \text{mit } u_m u^n = -c^2 \quad (\text{zertifiziert})$$

Im Ruhesystem der Materie  $(0,0,0,c) = u^m$

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu}, \quad T_{\alpha 4} = 0, \quad T_{44} = -\rho + \left( \mu + \frac{p}{c^2} \right) c^2 = \mu c^2$$

$\rho \dots$  Druck  $\mu c^2 \dots$  Energiedichte

$\Rightarrow$  ideale Flüssigkeit (vergleiche mit Linsen im Buch) (Staub)

(Beachte: positiver Druck wirkt attraktiv und nicht, wie intuitiv gedacht, repulsiv)

Bemerkung:

Faktor 3  
entsteht durch  
die 3 Raum-  
richtungen

$(1,1): \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\varepsilon c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\lambda \rho c^2$	Beschleunigungsgleichungen Friedmann-Gleichungen
$(4,4): \quad 3 \frac{\varepsilon c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = \lambda \mu c^4$	

Merkmale: 1. und 2. Friedmann-Gleichungen  
auch Einstein-Gleichungen für RW

$$T^{mn}_{;n} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda + \left( \mu + \frac{\rho}{c^2} \right) \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Strategie: Wähle z. B. Lise nach  $g(t), p(t), a(t)$  auf.  
(3 Gleichungen für 3 Unbekannte)

$\not\rightarrow$  Gibt nicht: Gleichungen sind nicht unabhängig (siehe unten)

$\Rightarrow$  weitere unabhängige Zustandsgleichungen  $p = p(\nu)$  werden benötigt

$$\frac{d}{dt} (\mu c^2 a^3) = -p \frac{d}{dt} a^3$$

Wir werden nun zeigen, dass die genannten Gleichungen nicht unabhängig sind.

(Ableitung Friedmann)

$$\Rightarrow 6 \frac{\dot{a}}{a^3} [a\ddot{a} - (\varepsilon c^2 + \dot{a}^2)] = \lambda \mu c^4$$

(Kontinuitätsgleichung)

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\varepsilon c^2 + \dot{a}^2}{a^2} = -\lambda \mu c^4 - \lambda \rho c^2$$

(Friedmann)

$$\Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\varepsilon c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\lambda \rho c^2$$

(Gleichungen addieren)

Bemerkung

Die Beschleunigungsgleichung lässt sich damit aus der Friedmann- und der Kontinuitätsgleichung herleiten.

Damit lassen sich die Größen  $\mu, \alpha, p$  nur durch eine weitere unabhängige Zustandsgleichung bestimmen.

$\epsilon$  gewählt, Unbekannte:  $a(t), \mu(t), p(t)$

→ neue Gleichung: Zustandsgleichung  $\mu = \mu(p)$

$$p = \omega \mu c^2 \quad \omega \dots \text{Zustandsparameter}$$

$\omega = 0$ : ( $p=0$ ) inkohärente Materie wie "Staub"

$\omega = \frac{1}{3}$ : ( $p = \frac{1}{3} \mu c^2$ ) Strahlung, (ultra)-relativistische Teilchen

$\omega = -1$ : ( $p = -\mu c^2$ ) Vakuum,  $\Lambda$ : "steife Zustandsgleichung"

### Friedmann'sche Staubkosmen

$$\Lambda = 0, p = 0$$

$$(\text{Kontinuitätsgleichung}) \Rightarrow \frac{\dot{\mu}}{\mu} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \Rightarrow \mu \sim \frac{1}{a^3} \quad (\text{Massenerhaltung})$$

$$\Rightarrow \mu c^2 a^3 = \text{const} =: \tilde{\mu} = \mu_0 c^2 a_0^3$$

$$(\text{Friedmann}) \Rightarrow \ddot{a}^2 = \frac{8\pi \tilde{\mu} c^2}{3a} - \epsilon c^2$$

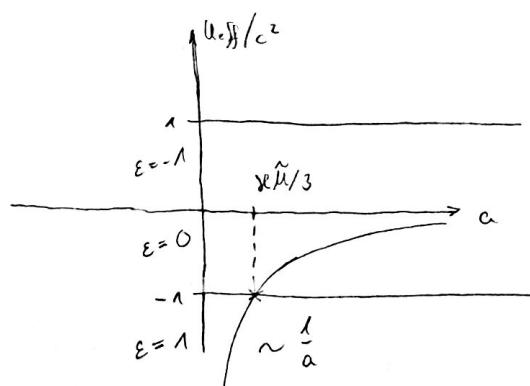
$$\Rightarrow U_{\text{eff}} = -\frac{8\pi \tilde{\mu} c^2}{3} \cdot \frac{1}{a} \quad [\frac{1}{a}, U_{\text{eff}}] = \Lambda$$

Vergleiche mit Mechanik - effektives Potenzial:

$$\frac{m}{2} v^2 - 6 \frac{U_{\text{eff}}}{r} = E$$

$$T + U = E$$

$$\Rightarrow \ddot{a}^2 = -U_{\text{eff}} - \epsilon c^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{-\epsilon c^2 \geq U_{\text{eff}}}$$



Bemerkung:

•) Kollaps bei  $\frac{8\pi \tilde{\mu}}{3}$

•) Expansions-Grenzfall wird durch kritische Dichte charakterisiert

⇒ nur für den Fall  $\epsilon=1$  gibt es ein Maximum von  $a$ , da sich Krümmungsgerade und das effektive Potenzial schneiden

$$\ddot{a}^2 = \frac{8\pi \tilde{\mu} c^2}{3a} - \epsilon c^2 \geq 0 \stackrel{(\epsilon=1)}{\Rightarrow} a^* : \frac{8\pi \tilde{\mu} c^2}{3a^*} = c^2 \Rightarrow \boxed{a^* = \frac{8\pi \tilde{\mu}}{3}}$$

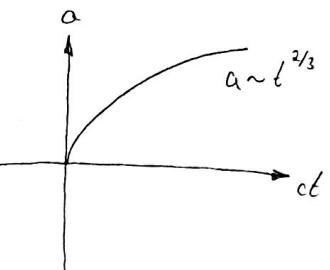
### Lösungen

(1)  $\varepsilon = 0$

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa \bar{\mu} c^2}{3a} \Rightarrow \sqrt{a} \dot{a} = \left[ \frac{1}{3} \kappa \bar{\mu} c^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} a^{3/2} = \left( \frac{\kappa \bar{\mu} c^2}{3} \right)^{1/2} (t - t_0)$$

$$\Rightarrow a(t) = \left( \frac{3\kappa \bar{\mu}}{4} \right)^{1/3} [c(t - t_0)]^{2/3} \quad \boxed{\text{Einstein - de Sitter - Kosmos (1932)}}$$



Bemerkung: •) Es gibt Zeit  $t^*$  mit  $a(t^*) = 0$

⇒ Punktsingularität im geometrischen Sinne

Wir nennen Ultronell (aber nur im geometrischen Sinne)

•) verschobene Form:  $\boxed{a(t) = a(t_0) \left[ 1 + \sqrt{\frac{3}{4} \kappa c^4 \bar{\mu}(t_0)} (t - t_0) \right]^{2/3}}$

(2)  $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = \frac{\kappa \bar{\mu} c^2}{3a} - c^2$$

Wir definieren:

$$ds^2 = a^2(t) \left[ d\chi^2 + r^2(\chi) \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right] - c^2 dt^2$$

$$=: a^2(t) \left[ d\chi^2 + r^2(\chi) \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) - dy^2 \right]$$

$$\text{mit } c^2 dt^2 = a^2 dy^2$$

Notation: Wir bezeichnen mit  $\eta$  die Ableitung nach  $\eta$ :

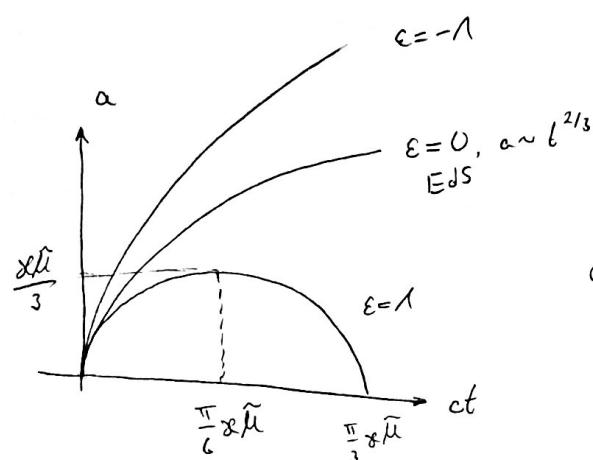
$$\dot{a} = a^\eta \frac{d\eta}{dt} = \pm c \frac{a^\eta}{a}$$

$$\Rightarrow a'^2 = \frac{\kappa \bar{\mu}}{3} a - \varepsilon a^2 \Rightarrow \left[ \frac{\kappa \bar{\mu}}{3} a - \varepsilon a^2 \right]^{-1/2} \frac{da}{d\eta} = 1$$

$$\Rightarrow \eta = -\arcsin \frac{-2a + \frac{\kappa \bar{\mu}}{3}}{\frac{\kappa \bar{\mu}}{3}} + \tilde{C}$$

$$\text{für } \eta = 0, a = 0 \Rightarrow \tilde{C} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\kappa \bar{\mu}}{6} (1 - \cos \eta), \quad c(t - t_0) = \pm \frac{\kappa \bar{\mu}}{6} (\eta - \sin \eta)} \quad \text{zyklisch}$$



Friedmann-Gleichung:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi\mu c^2}{3a} - \epsilon c^2$$

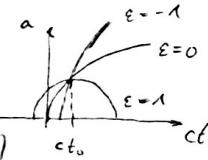
Term dominiert erst in späteren Zeiten des Universums

$\Rightarrow$  in früheren Zeiten reicht es dennoch  $\epsilon = 0$  zu setzen

analog  $\epsilon = -1$ :

$$a = \frac{\chi\tilde{\mu}}{6} (\cosh \eta - 1), \quad ct(t-t_0) = \pm \frac{\chi\tilde{\mu}}{6} (\sinh \eta - \eta)$$

Bemerkung: 1.) wir haben natürlich nur einen Weltradius und dafür ein vom gewählten Modell abhängiges Weltalter (siehe verschiedene Form und Diagramm)



### Die kritische Dichte

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\text{mit } \Lambda = 0 : \quad H^2(2q - 1) = 8\pi\mu c^2 + \frac{\epsilon c^2}{a^2} \quad (\text{Beschleunigungsgf})$$

$$H^2 = \frac{1}{3} 8\pi\mu c^4 - \frac{\epsilon c^2}{a^2} \quad (\text{Friedmann})$$

Wie groß muss  $\mu$  sein, damit  $\epsilon = 0$ ?

$$\mu_{\text{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$H = h \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{Mpc}} \Rightarrow \mu_{\text{krit}} = 1,86 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

( $h = 0,71$ )

$$\Rightarrow \mu_{\text{krit}} = 9,4 \cdot 10^{-30} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 5 \frac{m_p}{m^3}$$

$$\text{Staub: } p = 0 \Rightarrow H^2(2q - 1) = \frac{\epsilon c^2}{a^2} \Rightarrow q \begin{cases} > \frac{1}{2} & : \epsilon > 1 \quad \Omega > 1 \\ = \frac{1}{2} & : \epsilon = 0 \quad \Omega = 1 \\ < \frac{1}{2} & : \epsilon < 1 \quad \Omega < 1 \end{cases}$$

(siehe  $a$ - $ct$ -Diagramm)

$$\Rightarrow 2q = \frac{8\pi\mu c^4}{3H^2} = \frac{H}{\mu_{\text{krit}}} =: \Omega$$

## Das Weltalter

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \quad \rightarrow \quad t_o = \int_0^a \frac{da}{\dot{a}}$$

Wir wissen:  $\dot{a}^2 = \frac{d\tilde{\mu}c^2}{3a} - \epsilon c^2$ ,  $\tilde{\mu} = \mu c^2 a^3$

(Einfachheit)

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = \frac{d}{3} \mu c^4 a^2 - \epsilon c^2$$

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 \frac{a_0^3}{a^3}, \quad \frac{d\mu c^4 a^2}{3} = \frac{d}{3} \mu_0 c^4 \frac{a_0^3}{a} \\ &= \frac{d}{3} c^4 \mu_0 H_{0,0} \frac{a_0^3}{a} \\ &= \frac{d}{3} c^4 \mu_0 \frac{3H_0^2}{8c^4} \frac{a_0^3}{a} = \Omega_0 H_0^2 \frac{a_0^3}{a} \end{aligned}$$

$$\epsilon c^2 = \frac{d}{3} \mu_0 c^4 a_0^2 - \dot{a}_0^2 \quad \text{für } a \rightarrow a(t_o) = a_0$$

$$= a_0^2 \left( \frac{d}{3} \mu_0 c^4 \frac{1}{H_0^2} - 1 \right) = \dot{a}_0^2 \left( \frac{\mu_0}{H_{0,0}} - 1 \right)$$

$$= a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1)$$

$$\Rightarrow \text{Weltalter: } t_o = \frac{1}{H_0} \cdot \frac{1}{a_0} \int_0^{a_0} \frac{da}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_0 \frac{a_0^3}{a^3}}}$$

für  $a = \frac{a_0}{1+z}$  finden wir

$$t_o = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} \left[ (1+z)^2 \sqrt{1/\Omega_0 z / 1} \right]^{-1} dz$$

$$\frac{t}{H_0} = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{h_0} \cdot 9,78 \cdot 10^9 a, \quad h_0 = 0,7 \cdot \frac{t}{H_0} = 13,8 \cdot 10^9 a$$

Fall  $\epsilon = 0, \Omega_0 = 1$  (Einstein-de Sitter-Kosmos)

$$t_o = \frac{1}{H_0 a_0} \int_0^{a_0} \sqrt{\frac{a}{a_0}} da = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = \underline{\underline{\frac{2}{3} t_{H_0}}}$$

Fall  $\varepsilon = 1, \Omega > 1$ :

$$t_o = \frac{1}{H_0} \left[ \frac{1}{1-\Omega_0} + \frac{\Omega_0}{(\Omega_0-1)^{3/2}} \operatorname{arctan} \sqrt{\Omega_0-1} \right]$$

$$= \frac{1}{H_0} \left[ \frac{1}{1-\Omega_0} + \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{3/2}} \arccos \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} \right]$$

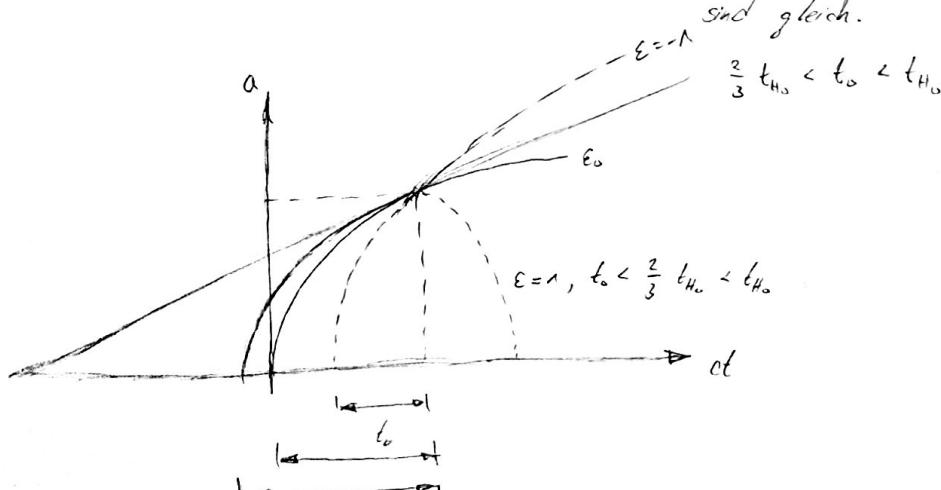
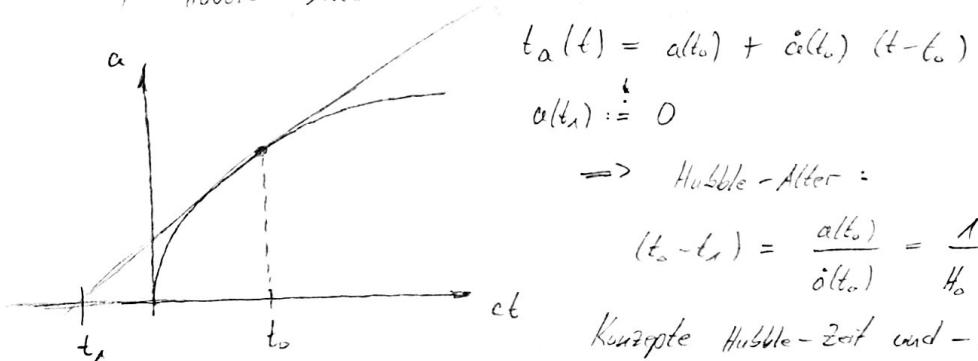
Fall  $\varepsilon = -1, \Omega < 1$ :

$$t_o = \frac{1}{H_0} \left[ \frac{1}{1-\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-\Omega_0} \right]$$

$$= \frac{1}{H_0} \left[ \frac{1}{1-\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}} \operatorname{arcosh} \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} \right]$$

Bemerkungen:

- ) Weltalter wurde definiert und für einfache Fälle berechnet.  
Hubble-Zeit mit Konzertsfaktor von Größenordnung 1.
- ) Hubble-Alter:



Notizen zur Rotorschreibungs -

Entfernung - Rotation

(nicht mehr  $\varepsilon \ll 1$ )

Beispiel:  $\rho = 0, \varepsilon = 1, q > \frac{1}{2}$ :

$$\alpha_t = r(\chi) \alpha_{t_0} (1+t^2)$$

$$1. \text{ Schritt: Licht: } \chi = \arcsin r = \int_{t_0}^{t_0} \frac{c dt}{\alpha(t)} = \int_{\eta_0}^{\eta_0} d\eta = \eta_0 - \eta_0$$

$$\left. \begin{aligned} r &= \sin(\eta_0 - \eta_0), \quad \tilde{\mu} = \mu_0 c^2 a_0^3 \\ 1 - \cos \eta &= 2 \sin^2 \frac{\eta}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha(t) = \frac{dt}{3} \mu_0 c^2 a_0^3 \sin^2 \frac{\eta}{2} \quad (*)$$

(Lösung der Einsteinius-Gleichung  
für  $\varepsilon = 1$ )

$$\Rightarrow \begin{aligned} r &= 2 \sin \frac{\eta_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\eta_0}{2}} / (1 - 2 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}) \\ &= 2 \sin \frac{\eta_0}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\eta_0}{2}} / (1 - 2 \sin^2 \frac{\eta_0}{2}) \quad (***) \end{aligned}$$

2. Schritt

$$\text{in } (*) : \mu_0 a_0 \rightarrow H_0 a_0 \Rightarrow \mu_0 = \tilde{\mu}_0 \mu_{\text{Kant},0} = 6 \frac{q_0 H_0^2}{\varepsilon c^4}$$

Beschleunigung: ( $\rho = 0, \varepsilon = 1$ )

$$H^2(2q - 1) = \frac{c^2}{a^2}, \quad a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{2q_0 - 1}}$$

$$(*) \sin^2 \frac{\eta_0}{2} = \frac{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}}{2q_0 c} \alpha(t)$$

$(a_0 = \frac{c}{1+t^2})$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\eta_0}{2} = \frac{2q_0 - 1}{2q_0}, \quad \sin^2 \frac{\eta_0}{2} = \frac{1}{1+t^2} \frac{2q_0 - 1}{2q_0}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{2q_0 - 1}}{q_0^2 (1+t^2)} \left[ q_0^2 + (1-q_0) \left( 1 - \sqrt{1+2q_0^2} \right) \right]$$

=>

$$H_0 D_L = H_0 r_{\alpha_0} (1+z) = \frac{c}{q_0^2} \left[ q_0 z + (1+q_0) \left( 1 - \sqrt{1+2q_0 z} \right) \right]$$

Mabg 1858

Bemerkung: 1) diese Formel ist sogar für alle Fälle von  $\epsilon$  gültig

2)  $z \ll 1$ :  $\frac{1}{c} H_0 D_L = z + \frac{1}{2} (1-q_0) z^2 + \dots$

3)  $\epsilon=0, q_0 = \frac{1}{2}$ :  $H_0 D_L = 2c \left[ 1+z - \sqrt{1+z} \right]$

$$v_0 = H_0 D_0, v_e = H_0 D_e, D_e = \frac{D_0}{1+z}, D_L = D_0 (1+z)$$

$$a(t) \propto t^{2/3} \Rightarrow H(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{t} \propto \frac{1}{a^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{H_e}{H_0} = \left( \frac{a_0}{a_e} \right)^{3/2} = (1+z)^{3/2} \Rightarrow v_e = v_0 \sqrt{1+z} \\ = 2c (\sqrt{1+z} - 1)$$

$$v_0 = H_0 D_0 = 2c \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right) \\ = c z \left( 1 - \frac{3}{4} z + \dots \right)$$

Kein Doppeleffekt!

### Friedmannsche Strahlungskosmen

Zustandsgleichung:  $\rho = \frac{1}{3} \mu c^2$

Energiebilanz:  $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -4 \frac{\dot{a}}{a}$

$$\Rightarrow \mu \sim \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a}$$

Frühzeitige  
Expansion

Rotverschiebung  
 $E = \frac{hc}{\lambda}$

$$\Rightarrow \mu c^2 a^4 = \text{const} = \tilde{\lambda}$$

Friedmann:  $\ddot{a}^2 = \frac{8\tilde{\lambda}c^2}{3a^2} - \epsilon c^2 \Rightarrow \ddot{a}^2 - \underbrace{\frac{8\tilde{\lambda}c^2}{3} \cdot \frac{1}{a^2}}_{= k_{eff}} = -\epsilon c^2$

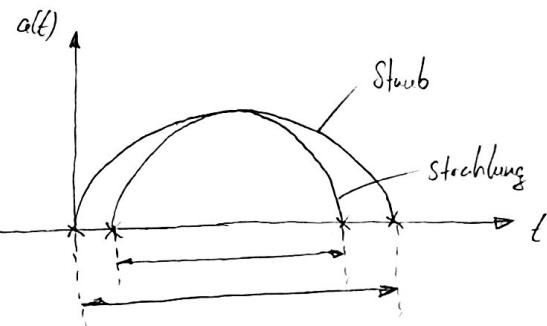
Lösungen:  $\epsilon = 0$

$$\dot{a} = c \sqrt{\frac{8\tilde{\lambda}}{3}} \frac{1}{a} \quad a^2(t) = 2 \sqrt{\frac{8\tilde{\lambda}}{3}} c(t-t_0), \quad a \sim t^{1/2}$$

$$\frac{\epsilon = \pm 1}{\dot{a} = \sqrt{\frac{8\tilde{\lambda}c^2}{3a^2} - \epsilon c^2}} \Rightarrow a^2(t) = \begin{cases} -c^2(t-t_0)^2 + 2\sqrt{\frac{8\tilde{\lambda}}{3}} c(t-t_0) & : \epsilon = 1 \\ c^2(t-t_0)^2 + 2\sqrt{\frac{8\tilde{\lambda}}{3}} c(t-t_0) & : \epsilon = -1 \end{cases}$$

$$\text{Diskussion: } \dot{a}^2 - \frac{8\pi G c^2}{3} \frac{1}{a^2} = -\epsilon c^2$$

$\Rightarrow t \rightarrow 0: a \sim t^{1/2}$  für alle  $\epsilon$



"Staub + Strahlung"  
(Wechselwirkung wird nicht berücksichtigt)

$$\text{Friedmann: } H^2 = \frac{8\pi G^4}{3} \left[ \frac{a_0^3}{a^3} \mu_{0,K} + \frac{a_0^4}{a^4} \mu_{0,R} \right] - \frac{\epsilon c^2}{a^2}$$

Materie      Strahlung

$$\Rightarrow \lambda = \frac{8\pi G^4}{3H^2} \frac{a_0^3}{a^3} \mu_{0,K} + \frac{8\pi G^4}{3H^2} \frac{a_0^4}{a^4} \mu_{0,R} - \frac{\epsilon c^2}{a^2 H}$$

$\frac{\mu_R}{\mu_{0,R}}$        $\frac{\mu_K}{\mu_{0,K}}$        $\frac{\epsilon c^2}{H^2}$

$$= \frac{\mu_R}{\mu_{0,R}} = \Omega_R \quad = \frac{\mu_K}{\mu_{0,K}} = \Omega_K$$

Bemerkung: 1.) in Vergangenheit überwog irgendwann  $\frac{1}{a^4}$   
 2.) früher Reverser Strahlungskrisis  
 irgendwann dominierte  $\frac{1}{a^3} \Rightarrow$  Strahlung  $\rightarrow$  Materie

$$1) \mu_R c^2 \sim \frac{1}{a^4}, \text{ (Stefan-Boltzmann)} \quad \mu_R c^2 \sim T^4$$

$$\rightarrow T \sim \frac{1}{a} \text{ (heißer Urknall)}, \quad a \sim t^{1/2}$$

## Leistungen und Grenzen der Newtonschen Kosmologie

$$m\ddot{r} = -6 \frac{\mu_m}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 - 6 \frac{\mu_m}{r} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} \dot{r}^2 - 6 \frac{\mu_m}{r} = E = \text{const} \geq 0$$

Expansion:  $r(t) = a(t)\chi$ ,  $\dot{r} = \dot{a}\chi \ll c$

Massenerhaltung:  $\mu = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , "Staub":  $\rho a^3 = \mu_0 a_0^3$

Expansion + Energiesatz:

$$\dot{a}^2 \chi^2 - \frac{8\pi}{3} G \mu \frac{(a\chi)^3}{a\chi} = \frac{2E}{m} \quad \mid \frac{1}{a^2 \chi^2}$$

$$\underbrace{\frac{\dot{a}^2}{a^2}}_{a(t), \mu} - \frac{8\pi}{3} G \mu = \underbrace{\frac{2E}{m a^2 \chi^2}}$$

$a(t), \mu$

"universell"

$E, m, \chi$

"Festgalaxie individuell"

$$[E/m \chi^2] = (\frac{m}{s})$$

$$E \underset{s_0}{\approx} \Rightarrow \text{Reskalierung}$$

$$\Rightarrow \frac{2E}{m \chi^2} = -8C^2 \quad (\text{durch Reskalierung: Einheiten + ausgewählte Lichtgesch.})$$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 - \frac{8\pi G}{3} \mu = -\frac{8C^2}{a^2}} \quad \text{Friedman}$$

Bemerkung:  
Folgt hauptsächlich  
aus Energiesatz.

Bewegungsgleichung:  $\ddot{\chi} = -6 \frac{4\pi}{3} \mu \frac{(a\chi)^3}{(a\chi)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \mu, q := \frac{\ddot{a}/a}{\dot{a}^2} \Rightarrow \boxed{H_q^2 = \frac{4\pi}{3} G \mu}$$

## Das Gravitationsparadoxon

(hier: statisches Newtonsches Weltmodell ohne Expansion)

$$\text{Poisson-Gleichung: } \Delta U = 4\pi G\mu$$

$$\xrightarrow{\text{(kugelsymmetrisch)}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 4G\mu$$

$$\Rightarrow U = \frac{2\pi}{3} G\mu r^2 - \frac{A}{r} + B$$

$$(a) U \text{ regulär bei } r=0 \Rightarrow A_{\text{inner}} = 0$$

$$U \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow B_{\text{außen}} = 0.$$

$$\text{Übergangsbedingung: } U_{\text{innen}}(R) = U_{\text{außen}}(R)$$

$$U'_{\text{innen}}(R) = U'_{\text{außen}}(R)$$

$$\Rightarrow A_{\text{außen}} = \frac{4\pi G}{3} \mu R^3, B_{\text{innen}} = -2\pi G\mu R^2$$

$$\Rightarrow U_{\text{innen}} = \frac{2\pi}{3} G\mu (r^2 - 3R^2) \quad \text{Folge: } \vec{F}_{\text{innen}} = -\nabla U_{\text{innen}}$$

$$U_{\text{außen}} = -\frac{4\pi}{3} G\mu \frac{R^3}{r} = -\frac{4\pi}{3} G\mu \vec{r}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G\mu \vec{r}$$

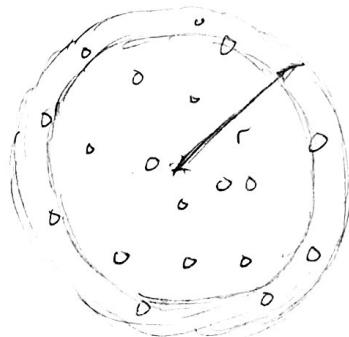
$$\vec{F}_{\text{außen}} = -\frac{4\pi}{3} G\mu \left(\frac{R^3}{r^3}\right) \vec{r}$$

$$= -\frac{6\mu}{r^3} \vec{r} \quad (\text{anähern zu 3})$$

(b) kugelsymmetrischer Hohlraum:

## Kosmologisch relevante astronomische Beobachtungen

### Die Dunkelheit des Nachthimmels



Baume - im - Wald - Analogon:

$$2\pi r \rho(r)$$

Ring: Anzahl  $2\pi r dr \cdot n$

$$[n] = \frac{1}{m^2}$$

bedeutet:  $2\pi r dr n D \rho(r)$  (Homogenität)

Zusamms:  $2\pi r dr n D - 2\pi r dr n D \rho(r)$

ist Teil des Umfangs:  $[1 - \rho(r)] n D dr$

$$\Rightarrow \rho(r) dr = \rho(r) + [1 - \rho(r)] n D dr \\ = \rho(r) + \frac{d\rho(r)}{dr} dr$$

$$\Rightarrow \rho(r) = 1 - C \cdot e^{-nDr}, \quad \rho(0) = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \rho(r) = 1 - e^{-nDr} \Rightarrow \langle r \rangle = \int_0^\infty r \frac{dr}{e^{-nDr}} = \frac{1}{nD}$$

→ Himmel sollte zwar nur so hell sein wie Sonne, aber auch das sehen wir nicht. → Olbers Paradoxie

Nach Kelvin: Ein heller Nachthimmel entspricht thermischem Gleichgewicht!

→ Universum befindet sich im extremen thermischen Ungleichgewicht.

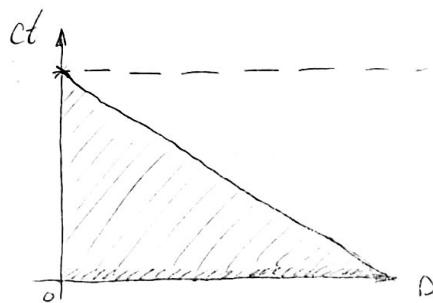
### Obers Paradoxon:

In einem städtischen, unendlich alten Universum mit unendlich vielen Sternen, die im unendlichen Raum homogen verteilt sind, würde der Nachthimmel hell sein. Aber wir sehen keinen hellen Nachthimmel.

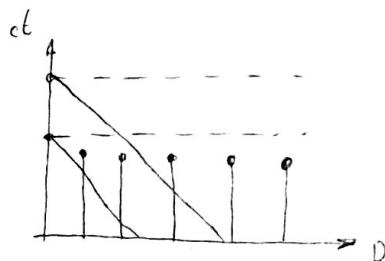
Selbst in einem endlichen Universum müsste jeder Punkt so hell sein, wie die Oberfläche eines Sterns. (siehe Waldanalogon)

### Erklärungsversuche

- ) Universum besitzt endliches Alter und die Lichtgeschwindigkeit ist endlich  
→ es können auch nur endlich viele Sterne geschen werden, sodass die Dichte in dem endlichen sichtbaren Volumen zu klein ist, um einen Schnittpunkt für jede Sichtlinie mit einem Stern zu bilden



- ) endliche Leuchtdauer der Sterne:



Die endliche Leuchtdauer bewirkt, dass nahegelegene Sterne ab einem bestimmten Zeitpunkt keine Leuchtdichte mehr beitragen.

- ) Expansion und Expansions - Rotverschiebung

Kurze Zeit nach dem Urknall schien das Universum hell gewesen zu sein. Die Expansions-Rotverschiebung verhindert, dass wir diesen einsehen, wenn in das Universum schauen.

Der Urknall liegt zweit zurück, dass die damalige Strahlung nur stark rotverschoben ( $\approx 1000$ ) gemessen werden kann. Es handelt sich hierbei um Mikrowellen, die für das menschliche Auge nicht sichtbar sind.

## Die kosmische Entfernungsstola

$$\text{Leuchtkraft-Entfernung: } F = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad [F] = \frac{W}{m^2}, \quad [L] = W$$

(a) Entfernungsmodul:  $F \leftrightarrow m$  scheinbare Helligkeit, Größenklasse „magritate“  $m$  keine Einheit

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{2}{5}(m_2 - m_1)}$$

$$m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \log \frac{L_1}{L_2} + 5 \log \frac{D_2}{D_1}$$

Wir messen  $m$  und müssen etwas über  $\mu$  wissen. Für  $\mu$  verwenden wir Standardkerzen (empirisches und theoretisches Wissen über  $\mu$ ).

Beispiel (ein Stern)

$$L_1 = L_2, \quad D_2 = D_L, \quad m_2 = m$$

$$m_1 = M$$

$$\text{absolute Helligkeit: } m - M = 5 \log \frac{D_L}{10 \text{ pc}}$$

$$\text{Standard-Entfernung: } D_L = 10 \text{ pc}$$

$$\Rightarrow m - M = 5 \log \frac{D_L}{10 \text{ pc}} + 25$$

### (b) Cepheiden als Standardkerzen, $\delta$ Cep

Riesensterne, Population I,  $5M_\odot \leq M \leq 15M_\odot$

$$\bar{\mu}_{\text{visible}} = -2 \dots -7, \quad \text{Periodenveränderlich} (\sim 10\%)$$

$$\text{Perioden: } 3d \leq T \leq 80d, \quad \Delta m \leq 2$$

Empirisch: Perioden - Helligkeits - Beziehung:

aus einer Galaxie:

$$\bar{m} = \alpha \log \frac{P}{d} + m_0$$

$$\bar{\mu} = \bar{m} - 5 \log \frac{D_L}{\text{pc}} + 5 = \alpha \log \frac{P}{d} + \left( m_0 - 5 \log \frac{D_L}{\text{pc}} + 5 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\mu} = \alpha \log \frac{P}{d} + \mu_0} \quad \text{Perioden - Leuchtkraft - Beziehung}$$

$D_L$  unbekannt,  $D_2$  bekannt (LHCZ, große Magellanesche Wolke)

$$\left. \begin{array}{l} \mu_0 = \mu_2 \\ M_{0,1} = M_{0,2} \end{array} \right\} \text{universell (anpassen, da wir in Vergangenheit schauen und sich Sterne früher anders entwickelt haben könnten)}$$

$$\Rightarrow m_{0,1} - 5 \log \frac{D_1}{\text{pc}} = m_{0,2} - 5 \log \frac{D_2}{\text{pc}}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_1 = D_2 10^{\frac{1}{5}(m_{0,1} - m_{0,2})}}$$

$$\left. \begin{array}{l} D_2 = D_{\text{LHC}} = (50,1 \pm 3,1) \text{ kpc} \\ \text{SN1987A} \end{array} \right\}$$

$$(m - M)_{\text{LHC}} = 18,56 \pm 0,15$$

$$\bar{m} = 2,765 \log \frac{P}{d} + 1,7045$$

(c) Supernovae Ia als Standardkerzen:

Lichtkurve, Spektrum, Doppelstern: überdauerter Weißer Zwerg

$$M_{\max} = m_{\max} - 5 \log \frac{D_L}{\text{Mpc}} - 25$$

empirisch ( $\delta(\mu)$ ):  $M_{\max} = -19,52 \pm 0,07$

$$\Rightarrow D_L = 10^{\frac{1}{5}(m_{\max} - M_{\max})} \text{ Mpc}$$

### Das Hubble-Diagramm

... des Theoretikers:

$$D_L(z) = \frac{c}{H_0} \cdot \frac{1}{q_0 z} \left[ q_0 z + (1-q_0) \left( 1 - \sqrt{1+2q_0 z} \right) \right]$$

$z \ll 1$ :  $D_L(z) \approx \frac{c}{H_0} \left[ z + \frac{1}{2} (1-q_0) z^2 + \dots \right]$

... des Beobachters:  $m_{\max}(z)$  von SNe Ia

$$m = 5 \log \frac{D_L}{\text{Mpc}} + \mu + 25, \quad D_L(z), \quad \mu = -19,52$$

$z \ll 1$ :  $D_L = \frac{cz}{H_0}, \quad m = 5 \log \frac{cz}{\text{km s}^{-1}} + \left( \mu + 25 - 5 \log \frac{H_0}{\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} \right)$

Tammon:  $H_0 \approx (50 \dots 60) \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$

Vaucouleurs:  $H_0 \approx 100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$

Geschwindigkeit-Entfernung-Beziehung:

$z \ll 1$ :  $v = H_0 D_L (\approx H_0 D_o)$

$$m - \mu = 5 \log \frac{v}{H_0 \cdot \text{Mpc}} + 25, \quad \log \frac{v}{\text{km s}^{-1}} = 0,2m + \left( \log \frac{H_0}{\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} - 5 - 0,2\mu \right)$$

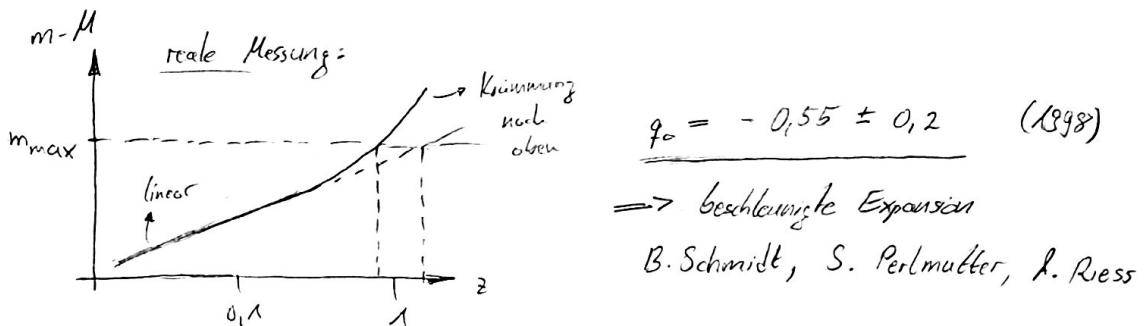
$z \approx 1$ :  $D_L \approx \frac{cz}{H_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-q_0) z \right]$

$$m = 5 \log \frac{cz}{\text{km s}^{-1}} + \left( \mu + 25 - 5 \log \frac{H_0}{\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} \right) + 5 \log \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-q_0) z \right]$$

$$5 \log \left[ 1 + \frac{1}{2} (1-q_0) z \right] \approx \frac{5}{2 \ln 10} (1-q_0) z \quad | \quad (n(\mu)) \approx \frac{z}{\ln(10)}$$

$$\approx 1,086 (1-q_0) z$$

$$m = 5 \log \frac{cz}{\text{km/s}} + \left( M + 25 - 5 \log \frac{H_0}{\text{km/s/Hpc}} \right) + 1,086 (1-q_0) z$$



### Die kosmische Mikrowellen-Hintergrundstrahlung

1948 Gamov, Alpher, Hermann ; 1964 Penzias, Wilson ; 1991 Smoot, Mather (COBE)

#### (a) Temperatur und Planck'sches Spektrum

Planck:  $S_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T}) - 1}, [S_\lambda(\lambda, T)] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen} \cdot \text{Wellenlänge}}$

$$S_\nu(\nu, T) = 8\pi h \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}, [S_\nu(\nu, T)] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen} \cdot \text{Frequenz}}$$

Maximum:  $x = \frac{h\nu}{k_B T}, y = \frac{x^3}{e^x - 1}, \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{x}{3} + 1 = e^{-x}$

$$\nu_{\max} = 2,82 \frac{k_B T}{h}, \lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\max}}, k_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}}, x \approx 2,82$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz (Wellenzahl, des Spektroskopikers)

$$T = (2,735 \pm 0,005) \text{ K}, \lambda_{\max} = 0,18 \text{ cm (Mikrowellen)}$$

$$\nu_{\max} = 1,61 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

#### (b) Planck'sches Spektrum und Expansion:

$$dS = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} d\nu, S_\nu = \frac{dS}{d\nu}, \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0} = 1+z$$

$$\Rightarrow dS = dS_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 = dS_0 \cdot (1+z)^4, \text{ Energiebilanz}^4$$

$$\Rightarrow dS = 8\pi h \left(\frac{\nu}{c}\right)^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu_0(1+z)}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1} (1+z)^4 d\nu = dS_0 (1+z)^4$$

Damit ändert sich der Planck'sche Charakter der Strahlung nicht, aber die Temperatur wird Rot-verschoben.  $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{1+z}{T} = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{1}{T}$

(c) Energiedichte

$$S = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^3 du}{e^{hv/k_B T} - 1} = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \quad \text{"Stefan-Boltzmann"}$$

bolometrisch

$$T = 2,735 \text{ K}, \quad S_0 = 0,26 \frac{\text{eV}}{\text{cm}^{-3}}, \quad \mu_{0,R} = \frac{S_0}{c^2} = 4,6 \cdot 10^{-34} \frac{\text{J}}{\text{cm}^{-3}}$$

$$\Delta \mu_{0,R} = 5,8 \cdot 10^{-5} \quad (h_0 = 0,65) \quad \Delta \mu_{0,R} = 0,3 \\ = 4,9 \cdot 10^{-5} \quad (h_0 = 0,7)$$

(d) Anzahldichte der Photonen

$$n = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^2}{\exp(hv/k_B T) - 1} dv = 16\pi \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 \underbrace{\zeta(3)}_{\approx 1,202} \quad \begin{matrix} \text{Riemannsche} \\ \text{Zeta-Funktion} \end{matrix}$$

$$(dn = \frac{df}{hv}) \quad T_0 = 2,725 \text{ K}, \quad n = 408 \frac{1}{\text{cm}^3}$$

### Die kosmologische Konstante

Der Einstein Kosmos (1917)

$$\left. \begin{array}{l} 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -8c^2 \rho \\ 3 \frac{8c^2 + \dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = 8\mu c^4 \end{array} \right\} \begin{matrix} \text{Friedmann-Lemaître-} \\ \text{Gleichungen} \end{matrix}$$

$$H := \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -H^2 + \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{H} = -H^2 - \frac{8c^4}{6} \left(\mu + 3\frac{L}{c^2}\right) + \frac{\Delta c^2}{3}} \quad \begin{matrix} \text{Raychaudhuri-Gleichung} \end{matrix}$$

Bemerkung: 1) Einstein wählte  $\Lambda$  so, sodass  $\dot{H}=0$ , um ein statisches Universum zu erreichen.

$$\text{Elimination von } \ddot{a}^2: \quad \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8c^4}{6} \left(\mu + \frac{3L}{c^2}\right) + \frac{\Delta c^2}{3}$$

Einstein:  $p=0$ , inkohärente Materie (Staub)

$\dot{a}=\ddot{a}=0$ , statik (keine Rotverschiebung) / "matter without motion"

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{a^2} = \Delta; \quad 3 \frac{\varepsilon}{a^2} - \Delta = 8\mu c^2 \Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \begin{matrix} \text{geschlossene Hypothese zu jeder} \\ \text{Zeit} \end{matrix}$$

$$\text{Elimination } \frac{1}{a^2}: \quad \boxed{\Delta_E = \frac{8c^2}{3} \mu c^2} \quad \begin{matrix} \text{(Gleichgewichtsbildung)} \end{matrix}$$

$$a_E = (\Delta_E)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mu = 2\pi^2 a_E^3 \mu = \frac{4\pi^2}{8c^2} a_E$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu = 5 \cdot 10^{-30} \frac{\text{J}}{\text{cm}^{-3}} \\ \Rightarrow \Delta_E = 4,7 \cdot 10^{-53} \text{ m}^{-2} \\ \Rightarrow a_E = 6,9 \text{ Gpc} \\ \mu = 1,7 \cdot 10^{-23} \text{ J} \\ \approx 10^{12} \text{ Jahren} \end{array} \right\}$$

Friedman - Lemaître - Kossmann

$$p=0, \Lambda \neq 0$$

$$\text{Friedman: } \tilde{\mu} = \mu c^2 a^3 = \text{const}$$

$$\text{Friedman - Lemaitre : } \dot{a}^2 = \frac{8\pi G c^2}{3} \rho$$

$$\frac{a \rightarrow 0}{\alpha^2} : \quad \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{8e\tilde{\mu}_c^2}{3} \frac{1}{a} + \frac{1}{3} \Delta c^2 a^2 - \epsilon c^2$$

$$\underline{a \rightarrow 0} : \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G c^2}{3} \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a \sim t^{2/3} \quad \text{Friedman - Lösung für Staub}$$

$$\underline{a \rightarrow \infty}: \dot{a}^2 = \frac{1}{3} \Lambda c^2 a^2 \Rightarrow a \sim \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) \quad \begin{matrix} \text{beschleunigte} \\ \text{Expansion} \end{matrix}$$

effektives F-L-Potential:

$$q^2 + U_{eff} = -\epsilon c^2, \quad U_{eff} = -\frac{1}{3} \alpha \hat{\mu}_c^2 \frac{1}{a} - \frac{1}{3} \Delta c^2 a^2$$

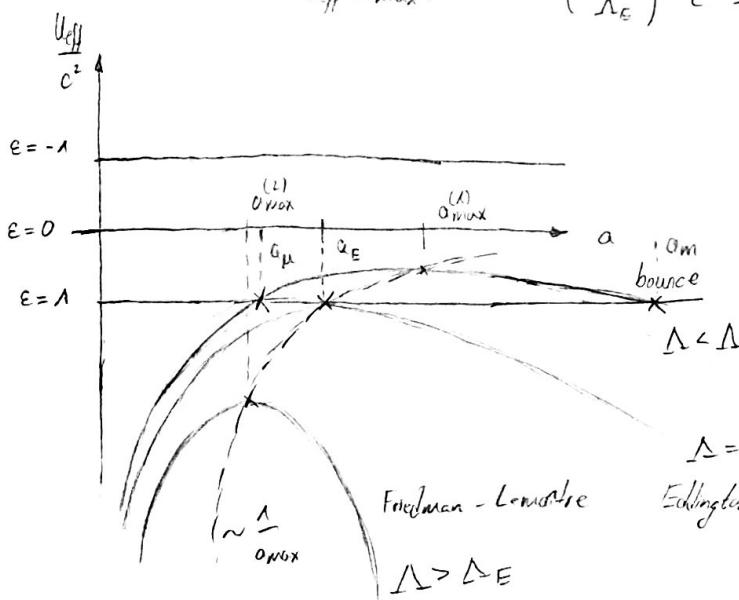
um einen Vergleich mit dem Einstein - Kasner anziehend abst. Bend  
 zu ermöglichen :  $\tilde{\mu} = \mu_E c^2 a_E^3 = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$  (innerer Oszillator)

.) Ueff besitzt keine Nullstellen

$$\text{Extrema : } \frac{dU_{eff}}{da} = 0 \Rightarrow a_{max} = \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\Lambda}}{\Lambda} \right)^{1/3} = \left( \frac{1}{\Lambda \sqrt{\Delta_E}} \right)^{1/3}$$

$$\frac{d^2U_{eff}}{da^2} \Big|_{a_{max}} = -2\Lambda c^2 \Rightarrow \text{Maximum}$$

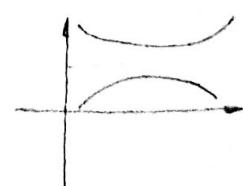
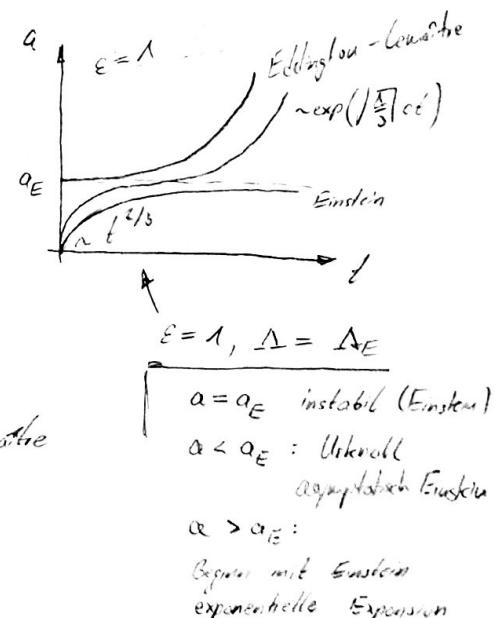
$$U_{\text{eff}}(a_{\max}) = - \left(\frac{\Delta}{\Delta_E}\right)^{1/3} c^2 = - \frac{c^2}{\sqrt{\Delta_E}} \frac{1}{a_{\max}} < 0$$



$$\Lambda < \Lambda_E, \varepsilon = \lambda$$

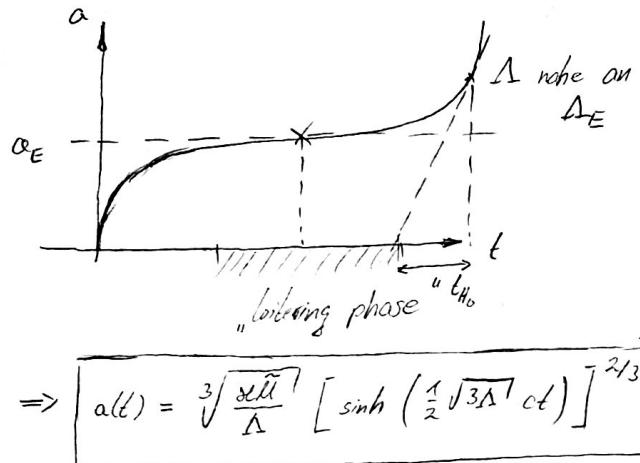
$a < a_E$ : Unknall  $\rightarrow a_H < a_E \rightarrow$  Rekontraktion

$a > a_E$ : "bounce": minimal  $a_m > a_E \rightarrow$  Reexpansion expansion



Friedmann-Lemaître-Modell:  $\Lambda > \Lambda_E$ ,  $P = 0$

$$ct = \int \left[ \frac{2\tilde{\alpha}}{3a} + \frac{\Lambda a^2}{3} - \varepsilon \right]^{-\frac{1}{2}} da$$



"elliptische Funktionen"

$$\underline{\varepsilon=0}: (x=a^3)$$

$$ct = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \int \left[ x \left( x + \frac{8\tilde{\alpha}}{\Lambda} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$a(0) = 0$$

$$\Rightarrow ct = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{x}{x + \frac{8\tilde{\alpha}}{\Lambda}}} \quad |$$

(heutiges beweiztes Wellenmodell)

$$\Rightarrow a(t) = \sqrt[3]{\frac{8\tilde{\alpha}}{\Lambda}} \left[ \sinh \left( \frac{1}{2} \sqrt{3\Lambda} ct \right) \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$t \rightarrow 0: a(t) = \sqrt[3]{\frac{32\tilde{\alpha}}{4\Lambda}} (ct)^{\frac{2}{3}} \quad (\text{EdS})$$

$$t \rightarrow \infty: a(t) = \sqrt[3]{\frac{8\tilde{\alpha}}{4\Lambda}} \exp \left( \frac{1}{3} \sqrt{3\Lambda} / ct \right)$$

### Das Vakuum als ideale Flüssigkeit

$$R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} + \Lambda g_{mn} = 8\pi T_{mn}$$

$$\text{"modern": } R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} = 8\pi \left( T_{mn} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{mn} \right)$$

$$T_{mn} = 0 \quad (\text{Vakuum}) \quad R_{mn} - \frac{1}{2} R g_{mn} = 8\pi T_{mn}^{(\text{vac})} \quad \text{mit} \quad T_{mn}^{(\text{vac})} := -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{mn}$$

Bemerkung:  $\rightarrow$  Niemand konnte bisher  $\Lambda$  vorherberechnen!

$$\text{ideale Flüssigkeit: } T_{mn} = \rho g_{mn} + \left( \mu + \frac{P}{c^2} \right) u_m u_n = -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{mn}$$

$$\Rightarrow P^{(\text{vac})} = -\frac{\Lambda}{8\pi} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} < 0 \quad \text{für } \Lambda > 0 \quad (\text{repulsiv})$$

$$\Rightarrow \mu^{(\text{vac})} = -\frac{P^{(\text{vac})}}{c^2} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P^{(\text{vac})} = -\mu^{(\text{vac})} c^2 = \omega \mu^{(\text{vac})} c^2$$

$\rightarrow \omega = -\Lambda$ : „Dunkle Energie“

$$3 \frac{\omega c^2 + \dot{a}^2}{a^2} = 8\mu c^4, \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\omega c^2 + \dot{a}^2}{a^2} = -8\rho c^2, \quad \rho = \omega \mu c^2$$

$$\Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{3} \omega \mu c^2 = -8\rho c^2, \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} = -8c^2 \left( \omega + \frac{1}{3} \right) \mu c^2 > 0 \Rightarrow \omega < -\frac{1}{3}$$

Bemerkung:  $\omega < -1$ : „Phantomenergie“

## Die kosmologischen Parameter

$$\text{Friedmann-Lemaitre: } 3 \frac{\dot{a}^2 + \ddot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = 8\pi G \mu c^4$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad \mu = \frac{8\pi G}{c^4} \Rightarrow 3H^2 + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = 8\pi G \mu \quad \left| \frac{1}{3H^2} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda = \underbrace{\frac{8\pi G}{3H^2} \mu}_{\mu/\mu_{\text{krit}}} + \frac{\Lambda c^2}{3H^2} + \left( -\frac{\dot{a}^2}{a^2 H^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_K}$$

$$\Omega_R = \frac{8\pi G}{3H^2} \mu_R$$

wird weggelassen

Bemerkung:  $\rightarrow$  96% des Universums besteht derzeit aus Dunkler Energie und Dunkler Materie. Über diese können wir keine Aussage treffen!

$$\text{Beschleunigungsgleichung } (\rho=0): \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + \ddot{a}^2}{a^2} - \Lambda c^2 = 0, \quad q = -\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$\Rightarrow -2qH^2 + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + H^2 - \Lambda c^2 = 0 \quad \left| \frac{-1}{2H^2}, \Omega_K, \Omega_\Lambda \right.$$

$$\Rightarrow q + \frac{1}{2} (\Omega_K - 1 + 3\Omega_\Lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2} (\Omega_M - \Omega_\Lambda)} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \quad : \text{Verzögerung} \\ < 0 \quad : \text{Beschleunigung} \end{array} \right.$$

$$\text{Wendepunkt: } \ddot{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \Omega_M = \Omega_\Lambda$$

$$\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3H^2} \mu = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3H_0^2} \mu_0 \cdot \frac{H}{H_0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \Omega_{M,0} \frac{H}{H_0} = \Omega_{\Lambda,0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = (1+z)^3 \end{array} \right\}$$

$$z_{\text{Wende}} = \sqrt[3]{2 \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{M,0}} - 1} \approx 0,67$$

(halbes Weltalter)

may be error:

$$z_{\text{Wende}} = \sqrt[3]{2 \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{M,0}}} - 1$$

Das Weltalter

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{\dot{a}} da; \quad \text{FL: } \dot{a}^2 = \underbrace{\frac{1}{3} \mu c^4 a^2}_{\Omega_M H_0^2} + \underbrace{\frac{1}{3} \Lambda c^2 a^2}_{\Omega_\Lambda} - \varepsilon c^2$$

$$\frac{a_0^3}{\dot{a}}$$

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = \Omega_M H_0^2 \frac{a_0^3}{a} + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a^2 - \varepsilon c^2; \quad \text{heute: } \dot{a}_0^2 = H_0^2 a_0^2 = \Omega_M H_0^2 a_0^2 + \frac{1}{3} \Lambda c^2 a_0^2 - \varepsilon c^2$$

$$\text{voneinander abziehen liefert: } \dot{a}^2 - H_0^2 a_0^2 = \Omega_M H_0^2 a_0^2 \left( \frac{a_0}{a} - 1 \right) + \frac{1}{3} \Lambda c^2 (a_0^2 - a^2); \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = H_0^2 a_0^2 \left[ 1 + \Omega_M \frac{a_0}{a} - \Omega_M + \Omega_\Lambda \frac{a^2}{a_0^2} - \Omega_\Lambda \right], \quad \text{nach: } \frac{a_0}{a} = 1,2$$

Dies ist der Integrand des Weltalters.

Fall  $\varepsilon = 0$ :  $\Omega_{\mu_0} + \Omega_{\Lambda_0} + \cancel{\Omega_2} = 1$

(Wie es in der Natur zu sein scheint)

and  $\dot{a} = H_0 a_0 \left( \Omega_{\mu_0} \frac{a_0}{a} + \Omega_{\Lambda_0} \frac{a^2}{a_0^2} \right)^{1/2}$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{a_0} \left[ \frac{a}{\Omega_{\mu_0} a_0^3 + \Omega_{\Lambda_0} a^3} \right]^{1/2} da \quad \left| \begin{array}{l} \text{Substitution} \\ \text{mit } x := a^3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}} \ln \left[ \sqrt{\sqrt{\Omega_{\mu_0}} a_0^3 + \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}} a_0^3} + \sqrt{\Omega_{\Lambda_0} a_0^3} \right] \Big|_{a_0}, \Omega_{\mu_0} = 1 - \Omega_{\Lambda_0}$$

$$\boxed{t_0 = \frac{2}{3H_0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}}{1 - \sqrt{\Omega_{\Lambda_0}}} \right]} \quad H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}, \quad t_{H_0} = 13,8 \text{ Gyr}$$

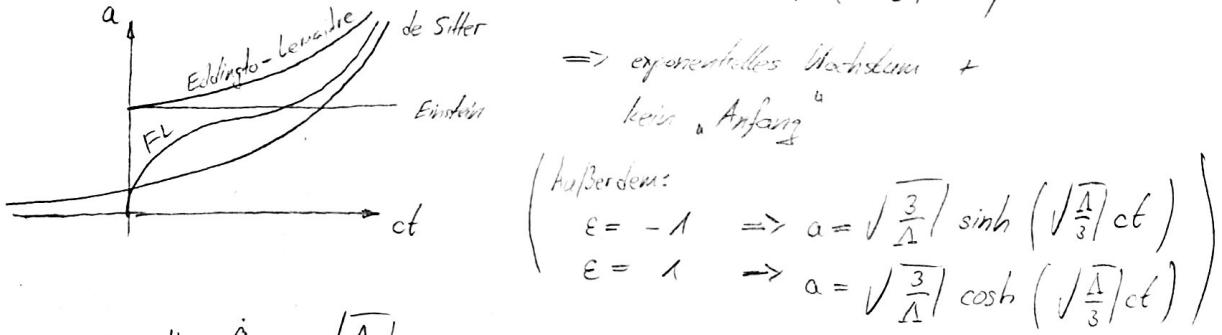
$$\Omega_{\Lambda_0} = 0,7$$

$$\Rightarrow \underline{t_0 \approx 13,3 \text{ Grd yr}} \quad (\text{älteste beobachtete Objekte: Kugelsternhaufen } \approx 12,5 \text{ Gyr})$$

### Der de Sitter - Kosmos (1917)

$\mu = 0, \Lambda \neq 0$  ("motion without matter"),  $\varepsilon = 0$

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = \frac{1}{3} \Lambda c^2 a^2 - \varepsilon c^2 \Rightarrow a = A \exp \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct \right)$$



$$\Rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} / c = \text{const.} ; \quad q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -1 < 0$$

historisch:  $\mu = 0, \Lambda = 0, \dot{a}^2 = -\varepsilon c^2, \varepsilon = -1$

$$\Rightarrow \dot{a} = c, \quad a = ct, \quad H = \frac{1}{c}, \quad q = 0$$

"kinematische Kosmologie" (Milne '32)

## Horizonte im Universum

### Konforme Raumzeit und gerader Lichtkegel

Licht:  $\partial_\mu \varphi = \text{const}$ ,  $d\varphi^2 = 0$

$$\text{RW: } ds^2 = a^2(t) d\chi^2 - c^2 dt^2 = 0$$

Wie weit kommt Licht?  $\chi(t) = \int_{t_0}^t \frac{c}{a(\ell)} d\ell$

Definition: (Konformzeit)  $c^2 dt^2 = a^2(t) d\eta^2 \Rightarrow ds^2 = a^2(d\chi^2 - d\eta^2) = 0$

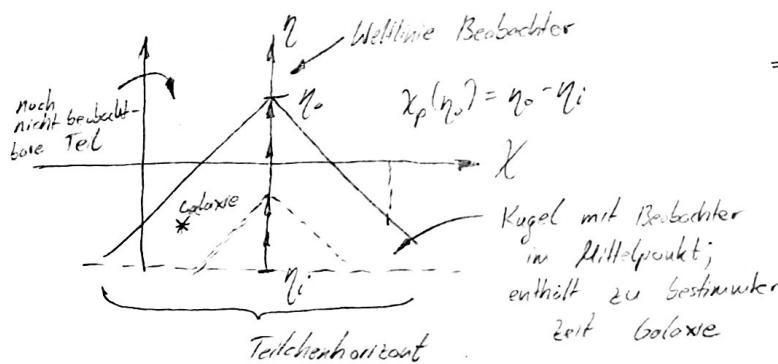
$$\Rightarrow d\chi^2 = d\eta^2 \Rightarrow \chi = \pm \eta \text{ „gerader Lichtkegel“}$$

### Teilchenhorizonte und Hubble-Kugel

Frage: Ist es möglich, jetzt ( $t=t_0$ ) Licht der entferntesten Galaxien zu beobachten, welches diese am Beginn ihrer Existenz ausgesandt haben?

$$\chi_p = \int_{t_i}^{t_0} \frac{c}{a(\ell)} d\ell = \eta_0 - \eta_i, \quad t_i = \begin{cases} 1. \text{ Minimum von } a(\ell) \text{ in Vergangenheit} \\ -\infty \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\chi_p < \chi_{\max} = \begin{cases} \pi & : \epsilon = 1 \\ \infty & : \epsilon = 0, -1 \end{cases} \Rightarrow \text{„Teilchen- (Weltlinien-) Horizont“}$$



$\Rightarrow$  Man sieht Galaxien am Horizont immer so, wie sie am Anfang aussahen:

Hubble-Kugel:

$$v(t) = H(t) D(t), \quad D_H = \frac{c}{H}$$

$$\Rightarrow v = c$$

$\Rightarrow$  Kugel mit Radius  $D_H$

(Galaxien am Rand mit Fliehgeschwindigkeit  $c$ )

### Bspiele

(1) Das Universum ist unendlich und statisch.

$$\Rightarrow a = a_0 = \text{const} \Rightarrow \chi_p(t_0) = - \int_{t_i}^{t_0} \frac{c}{a(\ell)} d\ell = \frac{c}{a_0} (t_0 - t_i)$$

$$(a) t_i \rightarrow \infty : \chi_p(t_0) = \infty$$

$\Rightarrow$  kein Teilchenhorizont

(b)  $t_i$  endlich:  $\Rightarrow$  es gibt einen Horizont, der mit der Zeit immer größer wird  
beobachtbare Teil des Universums (Retraversum)  $D_p(t_0) = a_0 \chi_p(t_0) = c(t_0 - t_i)$

$$\Rightarrow \text{Hubble-Kugel: } D_H = \frac{c}{H_0} = \infty, \text{ da } H_0 = 0$$

siehe Olbers-Paradoxon

(2) Urknall-Kosmos:

$\varepsilon=0$ :  $a(t) = k(ct)^\alpha$  mit  $\alpha \in (0, 1)$  vertigerte Expansion

$\Rightarrow a(0) = 0$  aus diesem Grund wählen wir Anfangszeit  $t_0 = 0$

$$\text{Staub: } \alpha = \frac{2}{3}, k = \left(\frac{3}{4} \cdot \tilde{\mu}\right)^{1/3}$$

$$\text{Strahlung: } \alpha = \frac{1}{2}, k = \left(\frac{4}{3} \cdot \tilde{\kappa}\right)^{1/4}$$

$$\Rightarrow \chi_p = \int_0^{t_0} \frac{1}{k(ct)^\alpha} dt = \frac{(ct_0)^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}, \chi_p(t_0) = \eta_0$$

$$\text{Hubble-Länge: } H_0 = \frac{\dot{a}}{a} \Big|_{t_0} = \frac{\alpha}{t_0} \Rightarrow D_{H_0} = \frac{c}{H_0} = \frac{ct_0}{\alpha}$$

$$\text{radiale Horizont-Erfahrung: } D_p(t_0) = a(t_0) \chi_p(t_0) = \frac{ct_0}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} D_{H_0} = \frac{D_{H_0}}{\frac{1}{\alpha}}$$

Geschwindigkeiten:

$$\text{Ausdehnung der Hubble-Kugel: } v_H = \dot{D}_H \Big|_{t_0} = \frac{c}{\alpha}$$

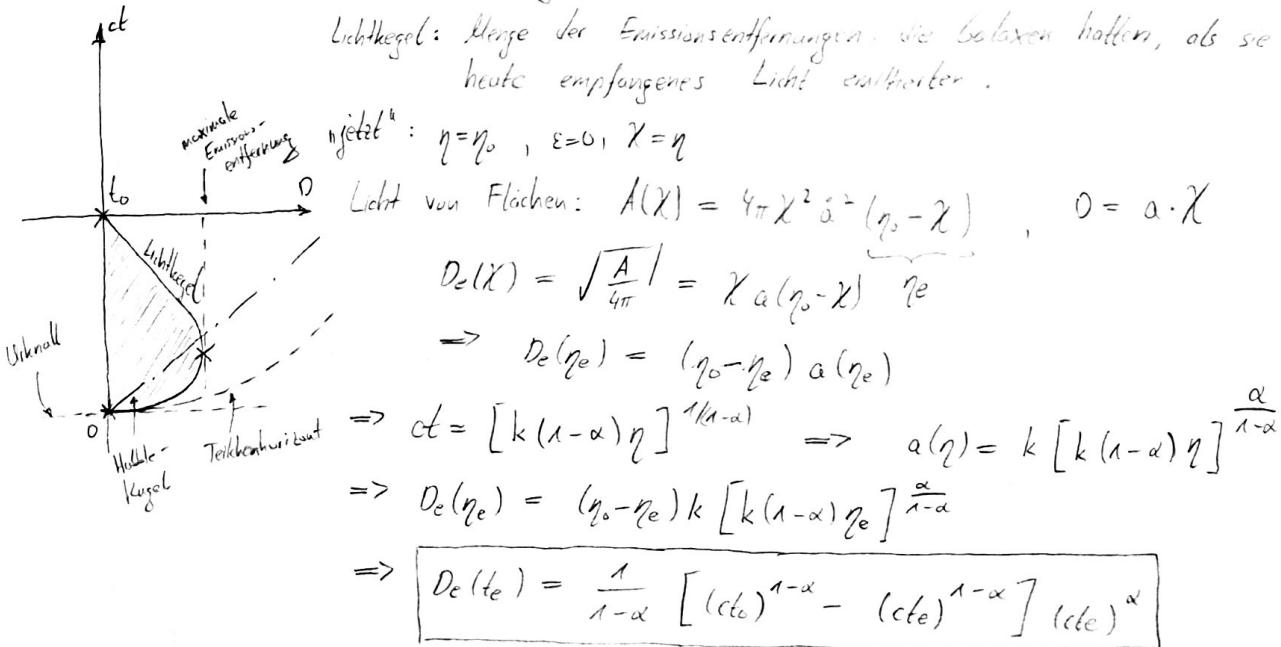
$$\text{Ausdehnung des Teilchenhorizonts: } v_p = \dot{D}_p \Big|_{t_0} = \frac{c}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} v_H = \frac{v_H}{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{Galaxien am Teilchenhorizont: } v_G = H_0 D_p(t_0) = \frac{\alpha}{1-\alpha} c = \frac{c}{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow v_p - v_G = c \quad \text{Bemerkung: Trotz Expansion werden Galaxien nicht vom Teilchenhorizont weggetragen. Teilchenhorizont übertrifft Galaxien am Teilchenhorizont mit } c. \text{ Wir sehen mit der Zeit mehr Galaxien.}$$

Gestalt des Lichtkegels:

Lichtkegel: Menge der Emissionsentfernungen, die Galaxien hatten, als sie ihr heute empfangenes Licht emittierten.



Extrema: maximale Emissionsentfernung:  $t_{\eta, \max} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} t_0, D_{\eta, \max} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} D_{H_0}$

Galaxien in maximalem Emissionsentfernung:

$$\Rightarrow z_m = \frac{D_{e,max}}{D_{e,max}} - 1 , D_{e,max} = \chi_{max} a(\eta_0) = (z_0 - z_{e,max}) a(\eta_0)$$

$$\Rightarrow z_m = \frac{\alpha}{\alpha - \chi} - 1 = (1 - \alpha) \eta_0 a(z_0) = (1 - \alpha) z_0 k [k(1 - \alpha) \eta_0]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$= [\alpha(1 - \alpha) \eta_0]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \alpha t_0 = \alpha D_{H_0}$$

Fall EoS:  $\alpha = \frac{2}{3}$ :  $z_m = \frac{5}{4}$  mit  $D_{e,max} = \frac{8}{27} D_H$

Galaxien am Teilchenhorizont: (jetzt):

$$z_p = \frac{D_{e,p}}{D_{e,p}} - 1 , D_{e,p} = D_p(t_0) = \frac{\alpha}{\alpha - \chi} D_{H_0} , D_{e,p} = \chi_p a(\eta_0 - \eta_p)$$

$\Rightarrow z_p = \infty$  Bemerkung: Teilchenhorizont ist dort, wo die Rotverschiebung den Wert  $\infty$  annimmt.

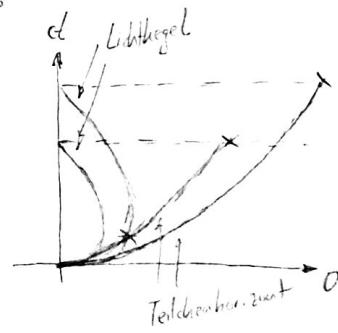
Fließgeschwindigkeit der Galaxien in maximalem Emissionsentfernung:

zur Zeit der Emission:  $v_e = H_0 \cdot D_{e,max} = \frac{\alpha}{\alpha - \chi} \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} D_{H_0}$

$$\Rightarrow v_e = c \cdot e^{\frac{\alpha - \chi}{\alpha - \chi} \frac{t_0}{t_{e,max}}} = c$$

heute:  $v_0 = H_0 D_{e,max}$

$$= \frac{\alpha}{t_0} c t_0 = \infty < v_e$$



Negung der Lichtkegel:

$$D = \chi a \Rightarrow \delta = \chi a + \chi_0 \quad \text{Lichtausbreitung: } \delta^2 = 0$$

$\Rightarrow$  Durch Lösung der Differentialgleichung erhalten wir die Negung der Lichtkegel

### Die Rückblendezeit

Friedmann-Lemaître,  $\varepsilon = 0$ : Wellenlänge:  $\lambda_0 = \frac{2}{3H_0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{R,0}}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\Omega_{R,0}}}{1 - \sqrt{\Omega_{R,0}}} \right]$

Rückblendezeit:  $t_0 - t_e =: \tau$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2}{3H_0} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{R,0}}} \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_{R,0}}}{1 - \sqrt{\Omega_{R,0}}} - \frac{2}{3H_0} \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{R,e}}} \ln \frac{1 + \sqrt{\Omega_{R,e}}}{1 - \sqrt{\Omega_{R,e}}} , \Omega_R = \frac{1c^2}{3H^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega_{R,e}}{\Omega_{R,0}} = \left( \frac{H_0}{H_e} \right)^2 , \mu := \frac{H_0}{H_e} , \text{ FL: } \Omega_{R,0} + \Omega_{R,e} - \frac{\varepsilon c^2}{a^2 H^2} = 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon c^2 = a^2 H^2 (\Omega_{R,0} + \Omega_{R,e} - 1) , \Rightarrow a_0^2 H_0^2 (\Omega_{R,0} + \Omega_{R,e} - 1) = a_e^2 H_e^2 (\Omega_{R,e} + \Omega_{R,0} - 1)$$

$$\frac{\Omega_{R,e}}{\Omega_{R,0}} = \frac{\mu_e}{\mu_0} \left( \frac{H_0}{H_e} \right)^2 = \mu^2 \frac{a_0^3}{a_e^3} = \mu^2 (a/e)^3 \Rightarrow \mu^2 = \left( \frac{a_0}{a_e} \right)^2 \frac{\Omega_{R,e} + \Omega_{R,0} - 1}{\Omega_{R,0} + \Omega_{R,e} - 1}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{(1+z)^3 \mu^2 \Omega_{M,0} + \mu^4 \Omega_{\Lambda,0} - 1}{\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma^2 = \frac{1}{(1+z)^3 \Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} - (1+z)^2 (\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1)}}$$

speziell Friedman ( $\Lambda = 0$ ):

$$\Rightarrow \Omega_{\Lambda,0} = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{H_0^2}{H_c^2} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{1}{1+z \Omega_{M,0}}, \quad \Omega_{M,c} = \frac{1+z}{1+z \Omega_{M,0}} \Omega_{M,0}$$

speziell Friedman-Lemaitre ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\gamma^2 = [(1+z)^3 \Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0}]^{-1}, \quad \Omega_{M,c} = \frac{(1+z)^3 \Omega_{M,0}}{(1+z)^3 \Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0}}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \ln \frac{(1+\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}})(1-\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}})}{(1-\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}})(1+\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}})}$$

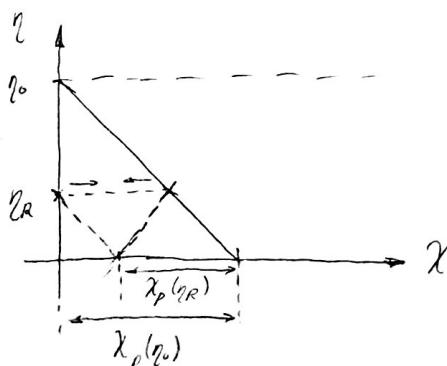
(EdS:  $\Omega_{\Lambda,0} = 0, \Omega_{M,0} = 1$ )

$$\tau = \frac{2}{3H_0} \left[ 1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right] )$$

Beispiele (Hesswerte):

$z$	$0,5$	$1$	$5$
$\tau/\tau_0$	$0,46$	$0,65$	$0,93$

### Das Horizon - Problem



$\eta_R$  ... Rekombinationszeit

(erster Zeitpunkt an dem Elektronen und Protonen gebunden wurden  $\Rightarrow$  Wasserstoffrekombinationszeit)

$\eta_R$  stellt den Übergang von Strahlungs- in Staubkosmos dar

Horizon - Problem:

Ab  $\eta_R$  herrschte homogene Temperaturverteilung.  
Aber wie ist das möglich, wenn die einzelnen Bereiche keineswegs zusammenhängen?

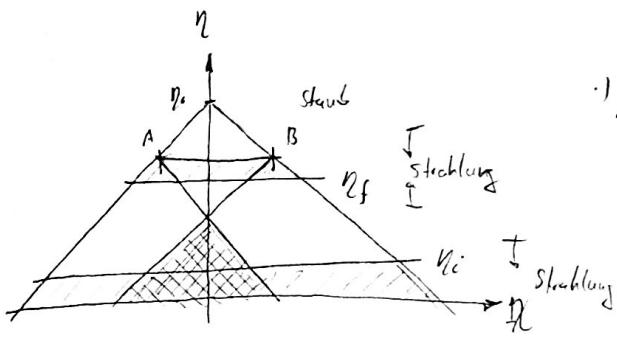
$$\Rightarrow \chi_{AB} = 2 [\chi_p(\eta_0) - \chi_p(\eta_R)]$$

$$= N \cdot 2 \chi_p(\eta_R)$$

$$\chi_p(\eta_0) = \chi_p(\eta_R) + \int_{\eta_R}^{\eta_0} \frac{c}{a(t)} dt \Rightarrow N = \frac{\int_{\eta_R}^{\eta_0} \frac{c}{a(t)} dt}{\int_{\eta_0}^{\eta_R} \frac{c}{a(t)} dt} \approx \frac{\int_{\eta_R}^{\eta_0} \frac{c}{a_R(t)} dt}{\int_{\eta_0}^{\eta_R} \frac{c}{a_R(t)} dt}$$

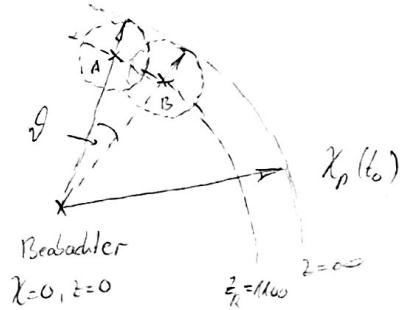
$$\Rightarrow N = 2 \left[ \left( \frac{a_0}{a_c} \right)^{1/2} - 1 \right] = 2 \left( \sqrt{1+z_R} - 1 \right) = 2 \left[ \left( \frac{T_R}{T_0} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

$\Rightarrow N \approx 65 \Rightarrow 65$  Horizontdurchmesser können nicht keinsel zusammenhängen



•) genaue Erklärung nur durch Quantenfeldtheorie möglich.

Innenhalb eines kleinen Zeitschriften von  $10^{-35}$  s konnte sich Universum um den Faktor  $10^{28}$  vergrößern.  $\Rightarrow$  Horizonte überlappen



•) heute:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\chi_{P,R}}{\chi_{P,0} - \chi_{P,R}} = \frac{2\chi_{P,R}}{\int_{t_0}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt} \\ &= \frac{2c}{H_R a_R} \frac{H_R a_R}{2c \left[ \left( \frac{a_0}{a} \right)^{1/3} - 1 \right]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{H_R^2 t - 1}} = 0,0331 \stackrel{!}{=} 1,8^\circ$$

$\Rightarrow$  Galaxien, die mehr als  $1,8^\circ$  voneinander liegen, brauchen zur  $\approx 7$  die Rekombination nichts voneinander wissen.