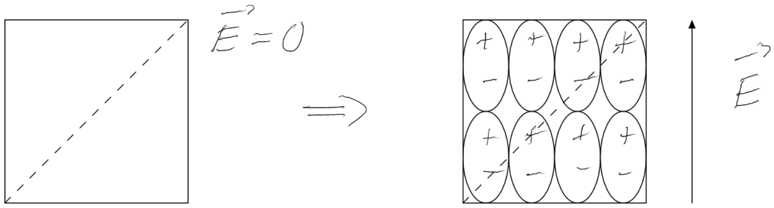
Elektrostatik der Dielektrika

Die elektrische Polarisation

- Dielektrikum $\Longleftrightarrow$ Isolator, Nicht-Leiter

- im Isolator gibt es im neutralen Zustand gleich viele positive und negative Ladungen, welche nicht frei beweglich sind
- durch Anlegen eines el. Feldes verschieben sich Ladungen etwas
  $\Longrightarrow$ Entstehung vieler kleiner Dipole oder Ausrichtung bereits vorhandener.



Definition: Polarisation $\vec{P}$

$=$ Dipolmomentdichte

$\Longrightarrow$ $\vec{P}\, d^3\vec{r} =$ Gesamtdipolmoment im Volumenelement $d^3\vec{r}$

$\Longrightarrow$ in $\vec{P}$ geht Mittelung ein (Volumenelement groß im Vergleich zur molekularen Dimension $\Longrightarrow$ enthält große Zahl von Molekülen)

- für nicht zu große Feldstärke $\vec{E}$ und für isotrope Medien und Ausschluss von Ferroelektrika gilt in guter Näherung:

$$\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$$

χ_e ... el. Suszeptibilität (kann ortsabhängig sein)

$\Longrightarrow$ vom makroskopischen Standpunkt aus gesehen, setzt sich das el. Feld aus zwei Anteilen zusammen:

1. Anteil von ρ („wahre Ladungen")
2. gemittelter Anteil der Dipole

$$\Longrightarrow \boxed{U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,'}$$

- Formel für praktische Zwecke ungeeignet
  z.B. für $\rho(\vec{r}\,')$ vorgegeben sucht man $\vec{E}$ und $\vec{P}$

- es gilt weiterhin: $\dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \vec{\nabla}'\left(\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{P}(\vec{r}\,')\,\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$\Longrightarrow$ Divergenzanteil verschwindet im Integral

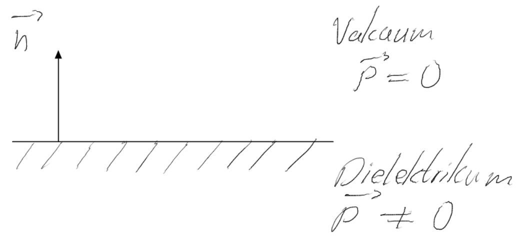
$$\Longrightarrow \quad \boxed{U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,') + \rho_p(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^3r'}$$

mit $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r})$
„Polarisationsladungsdichte"

Bemerkung: Effekt verständlich: Bei inhomogener Polarisation kann durch Ladungsverschiebung in einem Volumenelement eine Netto-Ladung entstehen

$\int_V \rho_p \, d^3r = 0$ gilt natürlich

Grenzfläche im Vakuum:



$\Longrightarrow$ Oberflächenpolarisationsladung: $\eta_P = P_n$

(vgl. Herleitung von $\eta = D_n$ auf Leiteroberfläche)

$$\Longrightarrow \quad \Delta U = -\frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{P})$$

$\Longrightarrow$ mit $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ folgt also $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho}$

im einfachsten Falle folgt: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$ mit $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)}$

$\Longrightarrow$ auch ε kann ortsabhängig sein (meistens auch: $\varepsilon_r := 1 + \chi_e$)

$\Longrightarrow$ ab jetzt prinzipieller Unterschied zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$

Quellen von $\vec{D}$: ρ („wahre Ladungen")
Quellen von $\vec{E}$: $\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_p)$

– im allgemeinen Falle gilt $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{r}) \Longrightarrow \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{r})$

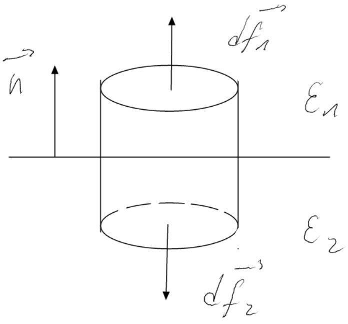
Grundgleichungen der Elektrostatik mit Dielektrika:
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}$

– oft: ε ist stückweise konstant $\Longrightarrow$ Übergangsbedingung an Grenzfläche nicht definiert

$$\vec{\nabla}(\varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}) = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}\varepsilon(\vec{r}) \quad \text{(Gradient nicht definiert für Grenzf.)}$$

Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

- integrale Form der Maxwell-Gleichungen: $\oint \vec{D}\, d\vec{f} = Q \qquad \oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$

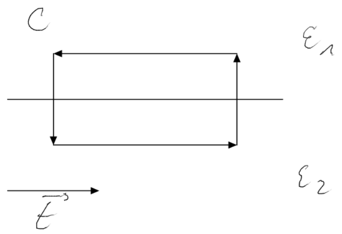


- flacher Zylinder $\Longrightarrow$ Mantelbeiträge vernachlässigbar
  (Voraussetzung: $\vec{E}$ und $\vec{D}$ endlich)

$$\Longrightarrow \int \vec{D}^{(1)}\, d\vec{f}_1 + \int \vec{D}^{(2)}\, d\vec{f}_2 = \int \eta\, df$$
$$= \int \vec{D}^{(1)}\, d\vec{f}_1 - \int \vec{D}^{(2)}\, d\vec{f}_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\eta = D_n^{(1)} - D_n^{(2)}} \qquad \text{mit } D_n = \vec{D}\cdot\vec{n}$$

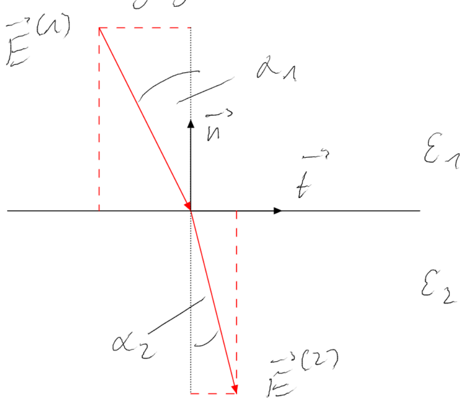
- vgl. mit Leiter: dort galt $D_n^{(1)} = \eta$ und $D_n^{(2)} = 0$
- meist $\eta = 0 \Longrightarrow \vec{D}$ stetig $\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_n^{(1)} = \varepsilon_2 E_n^{(2)}}$



$$\Longrightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = 0 \Longrightarrow E_t^{(1)} - E_t^{(2)} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_t^{(1)} = E_t^{(2)}} \Longrightarrow E_t \text{ stetig} \Longrightarrow \boxed{\frac{D_t^{(1)}}{\varepsilon_1} = \frac{D_t^{(2)}}{\varepsilon_2}}$$

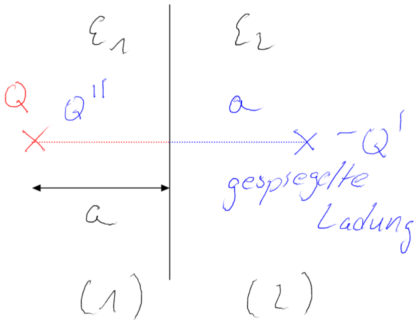
$\Longrightarrow$ Brechungsgesetz der Feldlinien:



$$\Longrightarrow E^{(1)} \sin\alpha_1 = E^{(2)} \sin\alpha_2$$
$$D^{(1)} \cos\alpha_1 = D^{(2)} \cos\alpha_2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

Punktladung vor dielektrischem Halbraum:



Ansatz: $U^{(1)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \frac{Q'}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}\right)$

$$U^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\,\frac{Q''}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$$

$\Longrightarrow$ Q' und Q'' so bestimmen, dass auf Grenzfläche $U^{(1)} = U^{(2)}$ und $\varepsilon_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}$ gilt.

Energie und Kraftdichte

Sei $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\cdot\vec{E}$. $\Longrightarrow$ $\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D}\,d^3\vec{r}}$

Bemerkung: Mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ folgt $\boxed{W = \frac{1}{2}\int_V \rho U\,d^3\vec{r}}$

Kraftdichte: $\vec{k}$, Kraft auf Volumenelement $= \vec{k}\,d^3\vec{r}$

$\boxed{\vec{k} = \rho\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon}$ (ohne Elektrostriktion)

Stationäre Ströme und ihre Felder

Grundgleichungen:

- Kopplung elektrischer und magnetischer Felder: $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{j} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq 0$

es gilt dann:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} & \text{als „Ohmsches Gesetz"} & \end{array}}$$

$\vec{j}$ ... Stromdichte $[\vec{j}] = A \cdot m^{-2}$ σ ... el. Leitfähigkeit $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{A}{Vm}$

hier ist Ohmsches Gesetz nur die einfachste Form (möglich auch Hall-Effekt)

elektrischer Strom: $\boxed{I = \int_A \vec{j}\, d\vec{f}}$

Stationäre Ströme in Leitern

Kontinuitätsgesetz: $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{H} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \Leftrightarrow \boxed{\oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{f} = 0}$

$\Rightarrow$ quellenfreies Stromfeld $\Rightarrow$ in V fließt gleichermaßen Strom hinaus, wie hinein

$\Rightarrow$ für Grenzfläche ist Normalkomponente j_n stetig
$\Rightarrow$ auf Leiteroberfläche $j_n = 0$ da im Vakuum $\sigma = 0$ gilt

Allgemeine Aussagen:

$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow$ Leiterinneres ist nicht mehr feldfrei für $\vec{j} \neq 0$

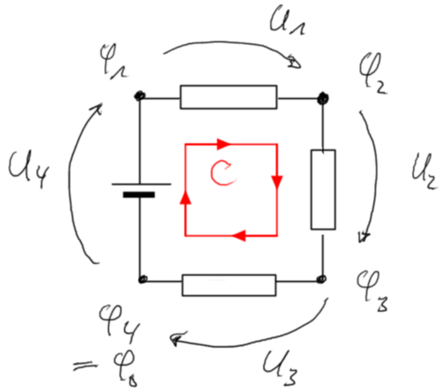
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$ (wie bisher)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla}(\sigma \vec{E}) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} + \vec{D}\, \vec{\nabla}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \boxed{\rho = -\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \vec{j}\, \vec{\nabla}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)}$

$\Rightarrow$ Raumladungen entstehen, wenn $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sich in Stromrichtung ändert
$\Rightarrow$ bei Unstetigkeiten von $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ entsteht eine Flächenladung
$\Rightarrow$ im homogenen Leiter ($\sigma / \varepsilon = \text{konst}$) gilt weiterhin $\rho = 0$

$\Rightarrow$ im homogenen Leiter gilt dann: $\boxed{\Delta \varphi = 0}$ ($\sigma = \text{konst}$ ausreichend)

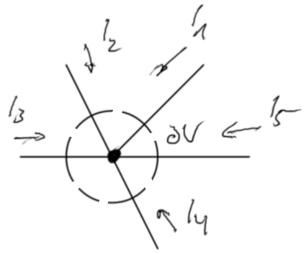
Kirchhoffschen Gesetze für Stromkreise:



$\oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = 0$ C entspricht hierbei dem Stromkreis

$\Longrightarrow \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} = \sum_i (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = \sum_i U_i$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\sum_i U_i = 0}$ Maschensatz

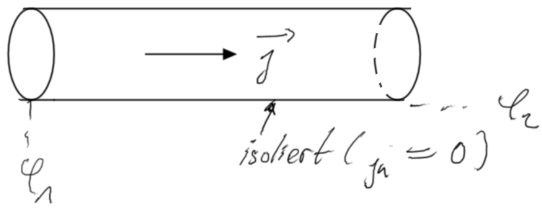


$\oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{f} = 0$

$\Longrightarrow \oint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{f} = \sum_i I_i$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\sum_i I_i = 0}$ Knotensatz

Definition des Widerstandes: $R := \frac{U}{I}$



$\Longrightarrow R = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{I}$

$\Longrightarrow I = \int_A \vec{j}\, d\vec{f}$ $U = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\, d\vec{r}$ und wegen $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$R =$ konst und hängt nur von σ und Leitergeometrie ab

im homogenen Leiter gilt dann $R \propto \frac{1}{\sigma}$

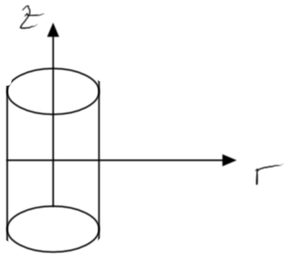
Magnetfeld stationärer Ströme

Aufgabenstellung: – Stromverteilung vorgegeben (in Leitern oder auch Bewegung geladener Körper z.B. geladene rotierende Kugel) [konvektive Stromdichte: $\vec{j} = \varrho \vec{v}$]

Gleichungen: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ [$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$]

$\Longrightarrow$ bei hoher Symmetrie führt meist integrale Form zu Ziel

Beispiel: gerader zylindrischer Leiter (unendlich lang) $\mu = \mu_0 =$ konst



Zylinderkoordinaten: r, φ, z

$\Longrightarrow$ innen: $\vec{j} = j\, \vec{e}_z =$ konst

$\Rightarrow$ wegen Symmetrie $\frac{\partial \vec{H}}{\partial \varphi} = 0 = \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}$ und $H_z = 0$

$\mu_0 \oint_A \vec{H}\, d\vec{f} = 0 = 4\pi r^2 \cdot H_n \cdot \mu_0 \Rightarrow H_n = 0 \Rightarrow \vec{H} = H(r)\, \vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow$ außen: $\oint_C \vec{H}\, d\vec{r} = \int_A \vec{j}\, d\vec{f} = I = 2\pi r \cdot H \cdot = \pi R^2 j$

$\Rightarrow H = j \frac{R^2}{2r} \Rightarrow \vec{H} = j \cdot \frac{R^2}{2r} \vec{e_\varphi}$ außen

Das Vektorpotential: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, wobei $\vec{A}$ das neu eingeführte Vektorpotential ist

Seien $\vec{A}'$ und $\vec{A}$ mit $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times A'$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{A}') = 0 \Rightarrow \vec{A} - \vec{A}' = \vec{\nabla} \Psi$

$\Rightarrow$ Vektorpotential ist bis auf Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion Ψ bestimmt

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$

oft: $\mu = \text{konst} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j}$ (in kartesischen Koordinaten)

Sei nun $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Psi \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = f + \Delta \Psi$

$\Rightarrow$ durch Lösung von $\Delta \Psi = -f$ wird Vektorpotential gefunden mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A}' = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{mit Eichung: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0}$ 3 Poisson-Gleichungen

$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$ Lösung, sofern Ströme im Endlichen bleiben

$\Rightarrow$ Multipolentwicklung: führender Term: $\vec{A} \approx \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$ mit $\vec{m} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j}\, d^3\vec{r}$

mit $\vec{m}$ als magnetisches Moment der Stromverteilung

physikalische Analogie: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ $\quad \rho \leftrightarrow \vec{j}$ $\quad \varphi \leftrightarrow \vec{A}$

$\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$ $\quad \varepsilon \leftrightarrow \frac{1}{\mu}$

Beispiele: Vektorpotential eines homogenen Feldes

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \text{konst.} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r}$$

magnetischer Dipol: $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Psi \quad \vec{B} = \frac{\vec{m}\,\vec{r}}{4\pi r^3} \quad \text{mit} \quad \vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$

Vektorpotential eines geraden Leiters: $\vec{j} = j\,\vec{e}_z$

$\Rightarrow$ Lösung nicht anwendbar, da Strom im Unendlichen vorhanden, aber es folgt $\vec{A} = A\,\vec{e}_z = A(r)\,\vec{e}_z$

Zylinderkoordinaten: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \qquad$ o.E. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr} = -\mu_0 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad A_z = -\frac{1}{4}\mu_0 j r^2 + C \cdot \ln r + D$$

Innen: Regularität bei $r = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow A_z = -\frac{\mu_0}{4} j r^2 + D$

Außen: $\vec{j} = 0 \Rightarrow A_z = C' \ln r + D'$

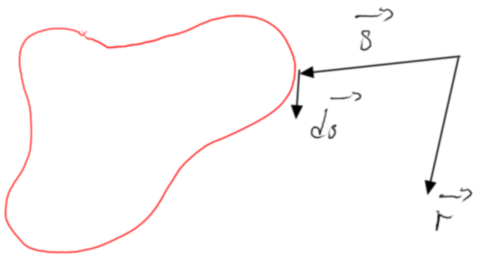
Das Biot-Savartsche-Gesetz

- stationärer Strom im endlichen Raumbereich $\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\,d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\int_V \vec{j} \times \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, d^3\vec{r}'$$

- Stromfluss durch dünnen Draht $(d \ll r) \Rightarrow \vec{j}\,d^3\vec{r}' \rightarrow I \cdot \vec{ds}$

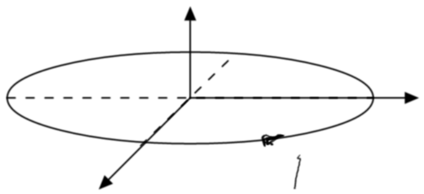


$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\vec{ds} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{\vec{ds} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}}$$

Bemerkung: Formel ist nicht an Bedingung $\mu = \mu_0$ geknüpft. Magnetische Eigenschaften des Leitermaterials haben hier keine Auswirkung auf Außenfeld, da Leiterdurchmesser vernachlässigt wurde.
$\Rightarrow$ auch ferromagnetisch möglich

Beispiel: Kreisstrom Feld im Mittelpunkt $\Rightarrow \vec r = 0$



$$\Rightarrow H = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\vec s \times d\vec s}{|s|^3} \qquad \text{mit } s = R$$

$$\vec s = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$d\vec s = R\,d\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$$= \frac{I}{4\pi R^3}\oint R^2\left(0, 0, \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{I\vec e_z}{4\pi R}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2R}\vec e_z$$

magnetisches Moment eines Ringstroms: $\vec m = \frac{\mu_0}{2}\int(\vec r \times \vec j)\, d^3\vec r$

$$\vec j\, d^3\vec r \longrightarrow I\, d\vec s \qquad \Longrightarrow \quad \vec m = \frac{\mu_0 I}{2}\oint \vec s \times d\vec s = \mu_0 I \int d\vec f$$

$\Longrightarrow$ Kreisstrom: $\vec m = \mu_0 I \pi R^2 \vec n$

Vektorpotential eines beliebigen Magnetfeldes (im stationären Fall)

es gilt allgemein: $\vec B = \mu_0 \vec H + \vec M = \vec\nabla \times \vec A \qquad (\vec\nabla \cdot \vec A = 0)$

$$\vec\nabla \times \vec H = \vec j$$

$$\Longrightarrow -\vec\nabla \times \vec\nabla \times \vec A = \Delta \vec A = -\mu_0 \vec\nabla \times \vec H - \vec\nabla \times \vec M$$
$$= -\mu_0 \vec j - \vec\nabla \times \vec M$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec j(\vec r\,')\, d^3\vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|} + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec\nabla \times \vec M\; d^3\vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|}}$$

es gilt: $\frac{\vec\nabla \times \vec M}{|\vec r - \vec r\,'|} = \underbrace{\vec\nabla \times \left(\frac{\vec M}{|\vec r - \vec r\,'|}\right)} + \vec M \times \vec\nabla\left(\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\right)$

Integral über Summand verschwindet, da sich jede Komponente als Divergenz betrachten lässt

$$\Longrightarrow \boxed{\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec j(\vec r\,')\, d^3\vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|} + \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec M \times (\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\, d^3\vec r\,'}$$

Leitungsstrom (isotroper Leiter): $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Leitungsstrom (im Kristall): $j_i = \sigma_{ik} E_k$ σ_{ik} ... Leitfähigkeitstensor

Hall-Effekt: $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \alpha (\vec{E} \times \vec{B})$

- in Leitern wird räumliche nicht-Lokalität unter Umständen wichtig

magnetische Feldstärke $\vec{H}$:

Lineares isotropes Medium: $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$

Permanentmagnete: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M})$ mit $\vec{M}$ vorgegeben

Übergangsbedingungen an Grenzflächen zweier Medien

Ausgangspunkt: integrale Form der Maxwell-Gleichungen:

$$\oint_A \vec{D}\, d\vec{\sigma} = Q \qquad \oint_A \vec{B}\, d\vec{\sigma} = 0$$

$\Rightarrow$ Normalkomponente des $\vec{B}$-Feldes ist stetig $B_n^{(1)} - B_n^{(2)} = 0$

$\rightarrow$ $D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta$

$$\oint_{\partial U} \vec{E}\, d\vec{r} = - \int_U \dot{\vec{B}}\, d\vec{\sigma} \qquad \oint_{\partial U} \vec{H}\, d\vec{r} = \int_U (\vec{j} + \dot{\vec{D}})\, d\vec{\sigma}$$

$\Rightarrow$ $E_t^{(1)} - E_t^{(2)} = 0$ ($\dot{\vec{B}}$ bleibt endlich)

$\Rightarrow$ $H_t^{(1)} - H_t^{(2)} = j_F^{\perp}$ $\Rightarrow \vec{n} \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \vec{j}_F$ ($\dot{\vec{D}}$ endlich)

Der Poyntingsche Satz

Poytingsche Satz für Ladungen und Ströme im Vakuum:

(I) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$
(II) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

$\Rightarrow$ $(-\vec{E} \cdot I + \vec{H} \cdot II)$ $\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{j}\vec{E} - \vec{E}\dot{\vec{D}} - \vec{H}\dot{\vec{B}}$

$$= \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{j}\vec{E} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{j}\vec{E}}$$ Poyntingscher Satz

Interpretation:

$\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = w_{el}$ ... elektrische Feldenergiedichte

$\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = w_{magn}$ ... magnetische Feldenergiedichte

$w_{el} + w_{magn} = w$ ... Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$\Longrightarrow$ Poyntingsche Satz ist damit Energiebilanz der Elektrodynamik.

$\vec{S} := \vec{E}\times\vec{H}$ Poynting-Vektor

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\int w \, d^3\vec{r} + \oint \vec{S}\, d\vec{f} = -\int \vec{j}\vec{E}\, d^3\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dW}{dt} + \oint \vec{S}\, d\vec{f} = -\int \vec{j}\vec{E}\, d^3\vec{r}}$$

Bedeutung von $-\int \vec{j}\vec{E}\, d^3\vec{r}$: Leistung an den Quellen

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(T + W\right) = -\oint \vec{S}\, d\vec{f}}$$

Der Poyntingsche Satz für Medien:

Ausgangspunkt: $\vec{E}\dot{\vec{D}} + \vec{H}\dot{\vec{B}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}$

a) einfachster Fall: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$
mit ε, μ, σ beliebige Funktionen von $\vec{r}$

$\Longrightarrow$ entspricht vorheriger Gleichung
$\Longrightarrow$ für Medien nicht allgemein gültig

$$\frac{d}{dt}\left[T + W\right] = -\oint \vec{S}\, d\vec{f} \qquad \text{mit } \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \sigma\vec{E}^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma}} \quad \text{joulesche Wärmeleitungsdichte}$$

b) quasistationäre Näherung (Kapitel 4) mit bewegten Leitern:

$\Longrightarrow$ $\dot{\vec{D}}$ kann vernachlässigt werden

$$\Longrightarrow \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}), \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{H}\dot{\vec{B}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\vec{j}\left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = -\frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma} - (\vec{j}\times\vec{B})\vec{v}$$

(rechte Seite ist 0 außerhalb des Leiters)

$\Longrightarrow$ Integration über gesamten Raum:

($\vec{E} \propto \frac{1}{r^2}$, $\vec{H} \propto \frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$; S_n stetig, da alle Größen endlich bleiben müssen)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\, d^3\vec{r}}_{W_{magn}} = -\underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}^{\,2}}{\sigma}\, d^3\vec{r}}_{\text{Joulsche Wärmeleitung}} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{j}\times\vec{B})\vec{v}\, d^3\vec{r}}_{\text{Leistung der Lorentzkräfte}}$$

$\vec{v} = 0 \quad \Longrightarrow$ freier Zerfall von Magnetfeldern

$\vec{v} \neq 0 \quad \Longrightarrow$ Umwandlung magn. in mech. Energie (beide Richtungen)

Beispiel: zwei starre Leiterschleifen mit Relativbewegung

.) $d\vec{s} := d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ z.B. Bewegung der Leiterschleife 1

es gilt: $\vec{F}_{12}\, d\vec{s} = I_1 I_2\, dL_{12}$

Energiebilanz:

$$\frac{dW_{magn}}{dt} = -R_1 I_1^2 - R_2 I_2^2 - I_1 I_2 \dot{L}_{12}$$

Andererseits: $W_{magn} = \frac{1}{2}\left(L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2\right) + L_{12} I_1 I_2$

(konstante $\Longrightarrow$ Ströme) $\frac{dW_{magn}}{dt} = I_1 I_2 \dot{L}_{12}$ (scheinbarer Widerspruch) (auch: magnetisches Paradoxon)

Auflösung: Ströme bleiben nicht konstant, sondern sie ändern sich gemäß (auch für $R_1 = R_2 = 0$) $R_1 I_1 = -\dot{\Phi}_1$, $R_2 I_2 = -\dot{\Phi}_2$

$$\Rightarrow \quad -\dot{\phi}_1 = -\frac{d}{dt}\left(L_{11} I_1 + L_{12} I_2\right)$$

$$-\dot{\phi}_2 = -\frac{d}{dt}\left(L_{21} I_1 + L_{22} I_2\right)$$

durch Einsetzen folgt vorige Gleichung ohne Widerspruch

einfachster Fall $R_1 = R_2 = 0$, $L_{11} = L_{22} = 0$: $\frac{dW_{magn}}{dt} = -I_1 I_2 \dot{L}_{12}$

<u>Impulsbilanz:</u> (nur im Vakuum)

$$\Rightarrow \quad \vec{k} = \varrho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \; \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_i = \varrho E_i + \varepsilon_{ijk} j_j B_k} \quad \text{(mit Summenkonvention)}$$

Maxwell-Gleichungen: (Summenkonvention)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \partial_i D_i = \varrho & \partial_i B_i = 0 \\ \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\partial_t B_i & \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k = j_i + \partial_t D_i \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad k_i = E_i \partial_n D_n + \varepsilon_{ijk} \left(-\partial_t D_j + \varepsilon_{jnm} \partial_n H_m\right) B_k$$

$$= E_i \partial_n D_n - \varepsilon_{ijk} \left(B_k \partial_t D_j + D_j \partial_t B_k\right) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{knm} D_j \partial_n E_m$$

$$+ \left(\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}\right) \partial_n H_m B_k$$

$$= E_i \partial_n D_n - \varepsilon_{ijk} \partial_t \left(B_k D_j\right) - \left(\delta_{jm} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{im}\right) D_j \partial_n E_m$$

$$+ \partial_k H_i B_k - \partial_i H_k B_k$$

$$= E_i \partial_n D_n - \varepsilon_{ijk} \partial_t \left(B_k D_j\right) - D_j \partial_i E_j + D_j \partial_j E_i$$

$$+ \partial_k H_i B_k - \partial_i H_k B_k$$

$$= -\varepsilon_{ijk} \partial_t \left(B_k D_j\right) - \frac{\varepsilon_0}{2} \partial_i \left(E_n E_n\right) + D_j \partial_j E_i$$

$$- \frac{\mu_0}{2} \partial_i \left(H_n H_n\right) + \partial_n \left(H_i B_n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} k_i = -\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \left(\varepsilon_{ijk} E_j H_k\right) + \partial_n T_{in} \\ \text{mit } T_{in} := E_i D_n + H_i B_n - \frac{1}{2} \delta_{in} \left(E_i D_i + B_i H_i\right) \end{array}}$$

$\varepsilon_{ijk} E_j H_k$ ... Poynting-Vektor $\qquad$ T_{in} ... Maxwellscher Spannungstensor ($\overleftrightarrow{T}$)

auch: $\boxed{\vec{k} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\vec{S}\right) = \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}}$

Die elektromagnetischen Potentiale

Einführung der Potentiale:

- Allgemein gilt: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ mit $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r};t)$

mit Eichtransformation $\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi}$ mit $\psi = \psi(\vec{r};t)$

Skalares Potential:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \iff \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times(\partial_t\vec{A})$$
$$\iff \vec{\nabla}\times(\vec{E} + \partial_t\vec{A}) = 0$$
$$\iff \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t\vec{A}} \quad \text{mit } \varphi = \varphi(\vec{r};t)$$

$\Longrightarrow$ bei einer Eichtransformation darf sich $\vec{E}$ nicht ändern:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varphi' = \varphi - \dot{\psi}}$$

$\Longrightarrow$ Maxwellgleichungen sind durch Potentiale automatisch erfüllt

Die inhomogenen Wellengleichungen

- Ladungen und Ströme im Vakuum: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t\vec{D} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\mu_0\vec{H} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\partial_t\vec{D}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\,\partial_t\vec{E}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j} - \mu_0\varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\dot{\varphi} + \partial_t^2\vec{A}\right)$$
$$\Longrightarrow -\varepsilon_0\,\Delta\varphi - \varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{A}} = \rho$$

$\Longrightarrow$ gekoppelte Gleichungen für φ und $\vec{A}$ $\Longrightarrow$ Entkopplung durch geeignete Wahl der Eichfunktion ψ

Lorenzeichung (Lorenzkonvention): $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\varphi} \overset{!}{=} 0 \qquad c^2 := \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$

$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + c^{-2}\dot{\varphi}' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\psi + c^{-2}\dot{\varphi} - c^{-2}\ddot{\psi}$

$\Longrightarrow$ Bestimmen von ψ durch Lösen der Gleichung:

$$\boxed{\Box\psi := \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

($\Box$ ... d'Alembert Operator)

- nach Mathematik: ψ ist nicht eindeutig bestimmt, aber immer lösbar (bis auf Lösungen von $\Box\psi = 0$ eindeutig)

(Lorenzeichung)
$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - c^{-2}\partial_t^2\vec{A}$

$-\varepsilon_0\Delta\varphi + \varepsilon_0 c^{-2}\partial_t^2\varphi = \rho$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\Box\vec{A} &= \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \\ \Box\varphi &= \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}}$$

inhomogene Wellengleichung mit Lorenzeichung

Bemerkung:
- Spezialfall der Zeitunabhängigkeit entsprechen Potentialen der Elektro- und Magnetostatik: $\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
- Andere Eichung: (Coulomb-Eichung) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

  $\Longrightarrow \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + c^{-2}\vec{\nabla}\partial_t\varphi$
- Lorenzeichung ist Lorentzinvariant (nicht aber Coulombeichung)
- weitere Eichungen möglich (sodass $\varphi \equiv 0$)
- inhomogene Wellengleichung + Lorenzeichung + Potentialgleichung mit Materialgleichungen sind Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit Materialgleichungen äquivalent

$\Longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung:

$\Box(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + c^{-2}\dot{\varphi}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t\rho = 0}$

- Zusammenfassung von $\vec{A}$ und φ zu einem Vierervektor:

$$\boxed{A^\mu := \left(\vec{A}, \frac{\varphi}{c}\right), \; j^\mu := (\vec{j}, \rho c) \quad \Longrightarrow \quad \Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu}$$

$\Rightarrow$ Lorenzeichung: $\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0 \,, \quad \partial_\mu j^\mu = 0}$

mit $x^1 = x, \; x^2 = y, \; x^3 = z, \; x^4 = ct$

Die retardierten Potentiale

Lösungen von $\Box \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ und $\Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + c^{-2}\dot{\varphi} = 0$:

$$\boxed{\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d^3r'}$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,', t - c^{-1}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \, d^3r'}$$

Bemerkung: •) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + c^{-2}\dot{\varphi} = 0$, falls $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

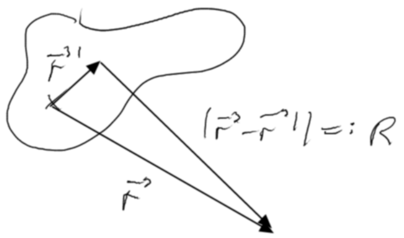
- retardierenden Potentiale stellen spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengleichung dar
- allgemeine Lösung: Hinzufügen der allgemeinen Lösungen von
  $\Box \varphi = 0$ und $\Box \vec{A} = 0$
- oft ist die Situation die, dass das Feld ausschließlich als von den Quellen (bewegte geladene Teilchen) verursacht angesehen werden kann. Dann stellen retardierenden Potentiale die richtige Lösung dar

  •) Ausstrahlungsbedingung (Effekte nicht instantan, sondern mit Geschwindigkeit c)
  •) Kausalitätsprinzip
  •) Auszeichnung einer Zeitrichtung

- avancierte Potentiale: $t - c^{-1}|\vec{r}-\vec{r}\,'| \longrightarrow t + c^{-1}|\vec{r}-\vec{r}\,'|$
  ebenfalls Lösung (unterscheiden sich bei homogener Lösung)

Ausstrahlung eines Systems von Ladungen und Strömen

Multipolentwicklung der retardierten Potentiale:



es gilt für $r \gg r'$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{x_i x_i'}{r^3} + \ldots$$

$$R = r - \frac{x_i x_i'}{r} + \ldots$$

$$j_n\left(\vec{r}\,', t - \frac{R}{c}\right) = j_n\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right) + \left.\frac{\partial j_n}{\partial R}\right|_{R=r} (R-r) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 j_n}{\partial R^2}\right|_{R=r} (R-r)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial j_n}{\partial R} = \frac{\partial j_n}{\partial t} \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \qquad \frac{\partial^2 j_n}{\partial R^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j_n}{\partial t^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{j_n(\vec{r}', t - c^{-1}R)}{R} = \left[j_n(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c}) - \frac{R-r}{c} \dot{j}_n(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c}) + \frac{(R-r)^2}{2c^2} \ddot{j}_n(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c}) + \dots \right] \cdot \left[\frac{1}{r} + \frac{x_i x_i'}{r^3} + \dots \right]$$

Sei nun ω eine charakteristische Frequenz für Zeitabhängigkeit der Ladungs- und Stromverteilung, L die Ausdehnung.

$\Longrightarrow$ Terme werden um Faktor $\frac{\omega L}{c}$ kleiner

$\Longrightarrow \quad \frac{c}{\omega} \overset{!}{\gg} L \qquad$ (Bemerkung: - Vergleich später: $\lambda \gg L$)

$\Longrightarrow$ Vernachlässigung aller Terme ab $\ddot{j}_n$; bei j_n nur bis $\frac{1}{r}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{j_n(\vec{r}', t - c^{-1}R)}{R} \overset{(*)}{\approx} \frac{1}{r} j_n(\vec{r}', t - c^{-1}r) + \frac{x_i x_i'}{r^3} j_n(\vec{r}', t - c^{-1}r) + \frac{x_i x_i'}{c r^2} \frac{\partial j_n}{\partial t}(\vec{r}', t - c^{-1}r)$$

$(*)$ $R - r \approx - \frac{x_i x_i'}{r}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A_n &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{1}{r} a_n(t - \tfrac{r}{c}) + \frac{x_i}{r^3} a_{ni}(t - \tfrac{r}{c}) + \frac{x_i}{c r^2} \dot{a}_{ni}(t - \tfrac{r}{c}) \right] \\ \text{mit} \quad a_n &= \int j_n(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c})\, d^3\vec{r}' \ , \quad a_{ni}(t - \tfrac{r}{c}) = \int x_i' j_n(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c})\, d^3\vec{r}' \end{aligned}}$$

Analoge Entwicklung von φ:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{x_i p_i}{r^3} + \frac{x_i \dot{p}_i}{c r^2} \right] \\ \text{mit} \quad Q &= \int \rho(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c})\, d^3\vec{r}' \ , \quad p_i(t - \tfrac{r}{c}) = \int x_i' \rho(\vec{r}', t - \tfrac{r}{c})\, d^3\vec{r}' \end{aligned}}$$

Voraussetzungen:
- $r \gg L$
- $c\omega^{-1} \gg L$

(Kontinuitätsgl.)
$\Longrightarrow \quad \dot{Q} = 0 \ , \quad a_n = \dot{p}_n$

Physikalische Interpretation der Terme:

Q: el. Gesamtladung (zeitunabhängig und damit konstant)

$\Longrightarrow$ Außenfeld einer beliebigen kugelsymmetrischen Ladungs- und Stromverteilung ist statisch

$\vec{p}$: el. Dipol

Bemerkung: - Terme an sich sind jeweils exakte Lösungen von $\Box\varphi = 0$, $\Box\vec{A} = 0$ mit Lorenzeichung ($r \neq 0$)

- im allgemeinen zeitabhängigen Fall ist $\vec{p}$ auch für $Q \neq 0$ nicht wegtransformierbar (Ladungsschwerpunkt zeitabhängig)

Q_{ni}: antisymmetrische Anteil $\longrightarrow$ magn. Dipol (hierzu gehören aber auch
symmetrischer Anteil $\longrightarrow$ el. Quadrupol höhere Terme in φ)

(genauer später)

<u>Feld eines zeitabhängigen Dipols</u> (Hertzscher Dipol)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{4\pi r^3} + \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{4\pi c r^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}\vec{r}}{cr^2}\right), \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}}{r}$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\ddot{\vec{p}}}{c^2 r} + \frac{(\ddot{\vec{p}}\vec{r})\vec{r}}{c^2 r^3} - \frac{\dot{\vec{p}}}{cr^2} + \frac{3(\dot{\vec{p}}\vec{r})\vec{r}}{cr^4} - \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$$

Nahfeld: $\vec{H} \approx 0$, $\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$ $\left(L \ll r \ll \frac{c}{\omega}\right)$

Fernfeld: $\vec{H} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{4\pi c r^2}$, $\vec{E} = \vec{H} \times \frac{\vec{r}}{\varepsilon_0 c r} \approx \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}$

$$\Longrightarrow \vec{S} \approx \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2 \vec{r}}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0 r^5}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{ges}}{dt} = -\oint \vec{S}\, d\vec{\sigma} = -\frac{(\ddot{\vec{p}})^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} < 0 \qquad \ddot{\vec{p}} = \ddot{\vec{p}}(t-\tfrac{r}{c})$$

Bemerkung: – nur beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab

– Sei $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin\omega t \Rightarrow \vec{p}(t-\frac{r}{c}) = \vec{p}_0 \sin(\omega t - kr)$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{dW_{ges}}{dt} \right\rangle = \frac{-\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

– in kleinen Raumbereichen kann das Feld in der Wellenzone (Fernfeld) als ebene Welle betrachtet werden.

Multipolstrahlung

Für $\lim\limits_{r\to\infty} \oint\limits_{B_r(0)} \vec{S}\, d\vec{\sigma}$ sind nur Terme nur bis auf r^{-2}-Anteil zurückzuführen. Rest wird gegen Null gehen

$\Rightarrow$ nur r^{-1}-Anteile von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ nötig ($\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$)

$$\Rightarrow \frac{dW_{ges}}{dt} = \lim_{r\to\infty} \oint_{B_r(0)} \vec{S}\, d\vec{\sigma} = \underbrace{\frac{-\ddot{\vec{p}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}_{\text{el. Dipolstrahlung}} - \underbrace{\frac{\ddot{\vec{m}}^2}{6\pi\mu_0 c^3}}_{\text{magn. Dipolstrahlung}} - \underbrace{\frac{\dddot{D}_{nm}\dddot{D}_{nm}}{720\pi\varepsilon_0 c^5}}_{\text{el. Quadrupolstrahlung}} - \dots$$

$\vec{p}$ ... Dipolmoment
$\vec{m}$ ... magn. Dipolmoment
D_{nm} ... Quadrupolmoment

Bemerkung: – für abgeschlossenes System aus Teilchen mit einheitlicher spezifischer Ladung q/m_0 verschwindet el. und magn. Dipolstrahlung (folgt aus dem Schwerpunkt- und Drehimpulssatz)

Elektromagnetische Wellen

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t \vec{A}$$

$\Rightarrow$ für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ im Vakuum folgt dann aus $\Box\vec{A} = 0$, $\Box\varphi = 0$:

$$\boxed{\Box\vec{E} = 0 \quad , \quad \Box\vec{H} = 0}$$

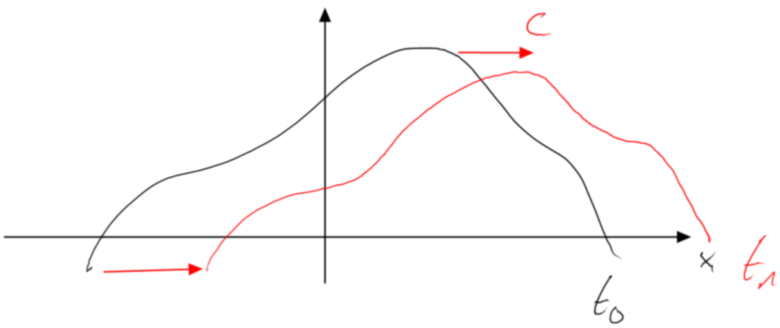
Bemerkung: ·) Gleichungen folgen damit auch aus den Maxwell-Gleichungen
·) Wellengleichungen sind nicht äquivalent zu Maxwell-Gleichung

$\Longrightarrow$ es interessieren nur Lösungen, die den Maxwell-Gleichungen genügen

einfacher Fall: $\vec{E} = E_z(x,t)\,\vec{e_z}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$\Longrightarrow$ Allgemeine Lösung: $E_z = f(x-ct) + g(x+ct)$



$\Longrightarrow$ gestaltstreue Ausbreitung (keine Dispersion) mit Lichtgeschwindigkeit c in positive bzw. negative x-Richtung

Begriffsbildung:

Welle: - jede zeitabhängige Lösung der Wellengleichung

ebene Welle: - $\vec{E}$ und $\vec{H}$ auf Ebenen konstant
$\Longrightarrow$ $\vec{E}$ und $\vec{H}$ Funktionen von $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ $\quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\right)$

ebene monochromatische Welle: - harmonische Abhängigkeit von der Zeit ($\propto \exp(-i\omega t)$)

$\Longrightarrow$ Ansatz: $\hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$ $\quad$ (o.E.: $\omega > 0$)

$\hat{\vec{H}} = \hat{\vec{H}}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$

Dann gilt: (z.B.) $\vec{E} = Re(\hat{\vec{E}})$, $\vec{H} = Re(\hat{\vec{H}})$ (Maxwell-Gl. linear, reelle)

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 & \Longrightarrow & \vec{k}\cdot\hat{\vec{E}} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \Longrightarrow & \vec{k}\cdot\hat{\vec{H}} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} & \Longrightarrow & \vec{k}\times\hat{\vec{E}} = \mu_0\omega\hat{\vec{H}} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \partial_t\vec{D} & \Longrightarrow & \vec{k}\times\hat{\vec{H}} = -\varepsilon_0\omega\hat{\vec{E}} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad -\varepsilon_0 \omega\, \vec{k} \times \hat{\vec{E}} = \vec{k} \times (\vec{k} \times \hat{\vec{H}}) = \underbrace{\vec{k}(\vec{k}\hat{\vec{H}})}_{=0} - \hat{\vec{H}}\vec{k}^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\vec{H}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$\Rightarrow$ für vorgegebenes ω kann beliebiger Vektor $\vec{k}$ mit $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ gewählt werden, sowie einen senkrecht auf $\vec{k}$ stehenden komplexen Vektor $\hat{\vec{E}}_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\hat{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\right]}$$

Diskussion: Flächen gleicher Phase $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$ sind Ebenen senkrecht auf $\vec{k}$. Dieser wandern mit Geschwindigkeit c in Richtung von $\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad c = \lambda \cdot f \quad \text{wobei} \quad \omega = 2\pi f, \; \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{transversale Wellen}$$

außerdem $\vec{E} \perp \vec{H}$

Poyntingscher Satz: $\partial_t w + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}})^2 + \frac{1}{2}\mu_0 (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}})^2 = \varepsilon_0 (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}})^2 = \mu_0 (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}})^2$$

$$\vec{S} = (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}}) \times (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}}) = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 \omega}\vec{k} = c\varepsilon_0 \vec{E}^2 \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = c w \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

$\Rightarrow$ auch „reines Strahlungsfeld"

Polarisation: $\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{E}}_0 \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)] = \hat{\vec{E}}_0\, e^{i\varphi}$

mit $\hat{\vec{E}}_0 \vec{k} = 0$ und $\varphi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$

$\Rightarrow$ Wahl des Koordinatensystems: $\vec{k} = (0, 0, k)$

$$\Rightarrow \quad \hat{\vec{E}}_0 = (A e^{i\alpha}, B e^{i\beta}, 0)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = A\cos(\alpha + \varphi), \quad E_y = B\cos(\beta + \varphi)$$

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ beschreibt Ellipse („elliptische Polarisation")

Spezialfälle: Gerade … „lineare Polarisation"
Kreis … „zirkulare Polarisation"

Viererschreibweise und Lorentzinvarianz

Viererstromdichte und Viererpotential

$$\boxed{\begin{aligned} j^\mu &:= (\vec{j}, \rho c) = (j_x, j_y, j_z, \rho c) \\ A^\mu &:= (\vec{A}, c^{-1}\varphi) = (A_x, A_y, A_z, c^{-1}\varphi) \end{aligned}} \qquad \mu := 1, \dots, 4$$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\partial_\mu j^\mu = 0$

$\Rightarrow$ Lorenzeichung: $\partial_\mu A_\mu = 0$

$\Rightarrow$ inhomogene Wellengl.: $\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$

Erläuterung: – transformieren sich durch Lorentztransformation:

$$\boxed{\begin{aligned} & x'^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu, \quad L^\alpha{}_\beta = \text{const} \\ & \eta_{\alpha\beta} L^\alpha{}_\gamma L^\beta{}_\delta = \eta_{\gamma\delta} \\ & \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ Skalarprodukt: $\boxed{a^\mu \cdot b^\mu = \vec{a} \cdot \vec{b} - a^4 b^4 = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu}$

$\Rightarrow$ bei Lorentztransformationen invariant.

Beispiel: (Linienelement des Minkowski-Raumes)

$$ds^2 = dx^\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c\,dt^2$$

abkürzende Schreibweise: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$

mit $b_\mu := \eta_{\mu\nu} b^\nu$ (analog: $b^\mu := \eta^{\mu\nu} b_\nu$)

invertierte Matrix zu $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} = \eta^\mu{}_\alpha = \delta_\alpha^\mu$$

Beispiel: $a_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} a^{\alpha\nu}$, $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta}\, a^{\alpha\beta}$

Bemerkung: – die partielle Ableitung erzeugt einen unteren Index

$$\Rightarrow \boxed{j_\mu = (\vec{j}, -\rho c) \qquad A_\mu = (\vec{A}, -c^{-1}\varphi)}$$

(mit unteren Indize)

Der Feldstärketensor

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Idee: Tensor $\partial_\mu A_\nu$: 16 Komponenten

$\Rightarrow$ Zerlegen des Tensors in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$\Rightarrow$ symmetrische Anteil: 10 Komponenten
antisymmetrischer Anteil: 6 Komponenten

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \qquad \text{(2 mal antisymmetr. Anteil)}$$

Feldstärketensor (Feldtensor) $\Rightarrow F_{\mu\nu}$ antisymmetrisch

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & c^{-1}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & c^{-1}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & c^{-1}E_z \\ -c^{-1}E_x & -c^{-1}E_y & -c^{-1}E_z & 0 \end{pmatrix}}$$

Beweis:

$$F_{a4} = \partial_a A_4 - \partial_4 A_a = -c^{-1}\partial_a \varphi - c^{-1}\partial_t A_a = -c^{-1}E_a$$

$$F_{12} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z \quad \text{(usw.)}$$

Maxwellgleichungen

(a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0} \qquad \text{(kurz: } F_{\langle\alpha\beta,\gamma\rangle} = 0\text{)}$$

(b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t \vec{D}$

$$\boxed{H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & cD_x \\ -H_z & 0 & H_x & cD_y \\ H_y & -H_x & 0 & cD_z \\ -cD_x & -cD_y & -cD_z & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\nu H^{\mu\nu} = j^\mu}$$

Bemerkung: Im Vakuum gilt: $F_{\mu\nu} = \mu_0 H_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\nu F_{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu}$$

$\Rightarrow$ mit $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt $\quad \square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$

Transformationsverhalten

Lorentztransformation: $\quad x'^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu$

$$a'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta a^{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ die Maxwellgleichungen sind kovariant (forminvariant bei Lorentztransf.)

spezielle Lorentztransformation:

·) System Σ' bewegt sich gegen System Σ mit Geschwindigkeit v in positive x-Richtung

$$\boxed{\begin{gathered} x' = \gamma(x - ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{vx}{c}\right) \\ \text{mit} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{gathered}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\frac{v}{c} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\frac{v}{c} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{j_x' = \gamma(j_x - \rho v), \quad j_y' = j_y, \quad j_z' = j_z, \quad c\rho' = \gamma\left(c\rho - \frac{v}{c} j_x\right)}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \text{Wellenzahlvierervektor:} \quad k^\mu = (k_x, k_y, k_z, c^{-1}\omega) \\ k_1' = \gamma\left(k_x - \frac{v}{c^2}\omega\right), \quad k_2' = k_y, \quad k_3' = k_z, \quad \frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \frac{v}{c}k_x\right) \end{gathered}}$$

In diesen Formeln steht Doppler-Effekt und Aberation

Bemerkung: ·) Im Vakuum gilt $k^\mu k_\mu = 0$ $\left(k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\right)$
·) Die Phase $\phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$ ist invariant.

Feldstärketensor: $F'^{\mu\nu} = L^\mu_{\ \alpha} L^\nu_{\ \beta} F^{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} E_x' = E_x, \quad E_y' = \gamma(E_y - vB_z), \quad E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \\ B_x' = B_x, \quad B_y' = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), \quad B_z' = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \end{array}}$$

$\Rightarrow$ analog ergibt sich dann $H'^{\mu\nu} = L^\mu_{\ \alpha} L^\nu_{\ \beta} H^{\alpha\beta}$

$$D_y' = \gamma\left(D_y - \frac{v}{c^2} H_z\right) \qquad H_y' = \gamma(H_y + vD_z)$$

Bemerkung: ·) Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ transformieren sich nicht wie die räumlichen Komponenten von Vierervektoren!

·) Aufteilung in elektrische und magnetische Feldstärke ist vom Bezugssystem abhängig!

Viererkraftdichte und Energie-Impuls-Tensor

$$f^\mu := F^{\mu\nu} j_\nu \qquad f_\mu := F_{\mu\nu} j^\nu$$

$$\Rightarrow f^\mu = (\vec{k}, c^{-1}\vec{j}\vec{E}) \Rightarrow f_\mu = (\vec{k}, -c^{-1}\vec{j}\vec{E})$$

es gilt: (I) $\vec{k} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{S}}{c^2}\right) + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$

mit $T_{ab} = E_a D_b + H_a B_b - \frac{1}{2}\delta_{ab}(E_i D_i + H_i B_i)$

(II) $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \partial_t w = -\vec{j}\vec{E}$

vierdimensionale Zusammenfassung: $\boxed{\begin{array}{l} f^\mu = \partial_\nu T^{\mu\nu} \text{ mit} \\ T^{\mu\nu} := F^{\mu\alpha} H_\alpha^{\ \nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \end{array}}$ Energie-Impuls-Tensor

Bemerkung: ·) $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ (symmetrisch)
·) $T^\mu_{\ \mu} = 0$ (spurfrei)
·) oft wird auch $-T^{\mu\nu}$ als Energie-Impuls-Tensor

·) $T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{mn} & c^{-1}\vec{S} \\ \hline c^{-1}\vec{S}^T & -w \end{array}\right)$, $T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{mn} & -c^{-1}\vec{S} \\ \hline -c^{-1}\vec{S}^T & -w \end{array}\right)$

T_{mn} ... Impulsstromdichte (Maxwellscher Spannungstensor)
$\vec{S}$ ... Energiestromdichte
$c^{-2}\vec{S}$ ... Impulsdichte
w ... Energiedichte

Bewegung von geladenen Teilchen

$$\boxed{m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu}$$ Viererkraft $\quad d\tau = \gamma^{-1} dt$ (Eigenzeit)

$$F^\mu = \left(\gamma \vec{K}, \frac{\gamma}{c} \vec{K}\cdot\vec{v}\right)$$

mit $\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$$\Longrightarrow \boxed{F^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu}$$ (Vierer-)Lorentzkraft

mit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ (Vierergeschwindigkeit) $\Rightarrow u^\mu = (\gamma\vec{v}, \gamma c)$

$m_0 u^\mu = p^\mu$ (Viererimpuls)

Bemerkung: .) im lokalen Ruhsystem des Teilchens gilt: $F^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu = (q\vec{E}, 0)$!!

.) Sei $m := \gamma m_0$ (nicht invariant)

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

und $\frac{d}{dt}(mc^2) = \vec{K}\cdot\vec{v} = q\vec{v}\vec{E}$

$$\Longrightarrow \boxed{E = mc^2 = m_0c^2 + T}$$

.) $p^\mu = (\vec{p}, c^{-1}E)$ mit $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

$\Longrightarrow p^\mu p_\mu = -m_0 c^2$ (auch: $p^\mu = \hbar k^\mu$)

Variationsprinzip

Bewegung eines geladenen Testteilchens

Wirkung $\boxed{W := \int \hat{L}\, d\tau} = \int L\, dt$ ($\hat{L}$: lorentzinvariant)

$\boxed{\hat{L} := -m_0c^2 + q A_\mu u^\mu} \Rightarrow L = -\gamma m_0 c^2 + q\vec{v}\vec{A} - q\varphi$

$$\delta W = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0}$$

Bemerkung: ·) $v \ll c \implies L = \frac{m_0}{2} v^2 + q\vec{v}\vec{A} - q\varphi$ wegen $m \approx m_0$

·) bei einer Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varphi$ ändert sich Wirkung nur um Konstante

Maxwell-Gleichungen

$$\boxed{W = \int L\, dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L}\, d^4x = \iiiint \mathcal{L}\, dx\, dy\, dz\, dt}$$

L ... Lagrange-Funktion
$\mathcal{L}$ ... Lagrange-Dichte (invariant) $\implies$ W invariant

$$\boxed{\mathcal{L} := -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + A_\mu j^\mu}$$

$$\delta W = 0 \implies \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}\right) = 0}$$

Bemerkung: ·) Eichinvarianz des Wirkungsprinzips $\iff$ Kontinuitätsgleichungen

·) $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(\vec{B}^2 - c^{-2}\vec{E}^2)$

$\implies \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\alpha$ (Maxwell-Gleichung folgen aus dem Prinzip)