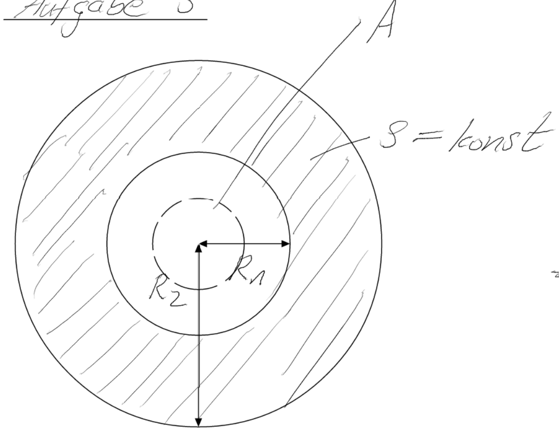
Elektrodynamik - Übung 02

Markus Pawellek - 144645   Übung: Do 12-14

Aufgabe 3



o.E. Kugelmittelpunkt in Koordinatenursprung
$\Rightarrow$ ρ ist kugelsymmetrisch und auf endlichen Bereich beschränkt

$\Rightarrow$ für $r \geq R_2$ gilt:

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{mit} \quad Q = \int_V \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \rho \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 \right) = \frac{4}{3}\pi\rho \left(R_2^3 - R_1^3 \right)$$

für $r < R_1$ folgt mit Fläche A (geschlossen) mit Maxwell-Gleichung:

$$\int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \overset{(*)}{=} 0$$

(*) im Inneren ist keine Ladung vorhanden

$$= |\vec{E}| \cdot A = E \cdot 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \quad \text{für } r < R_1$$

$$\Rightarrow \quad U = \text{konst} \quad \text{für } r < R_1$$

$$\Rightarrow \text{für } R_1 < r < R_2: \quad \int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho}{3\varepsilon_0} \left(r^3 - R_1^3 \right)$$

$$= E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad U = -\int E \, dr = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C \quad \text{für } R_1 \leq r < R_2$$

$$\Rightarrow \text{(wegen } U \text{ stetig)} \quad -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + C = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \, \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_2^2$$

$$U(R_1) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_2^2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(R_2^2 - R_1^2 \right)$$

$$= U(r) \quad \text{für } r < R_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{U(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) & r < R_1 \\ -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R_2^2 & R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r} & R_2 \leq r \end{cases}}$$

Aufgabe 9

Sei nun $Q = \text{konst}, \; R_1 \to R_2 \quad \Longrightarrow \rho \to \infty, \; R_1 \to R_2$

$r \geq R_2$: $\quad U(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \xrightarrow{Q = \text{konst.}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \; R_1 \to R_2$

$r < R_1$: $\quad U(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^3 - R_1^3} = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{(R_1 + R_2)(R_2 - R_1)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)}$

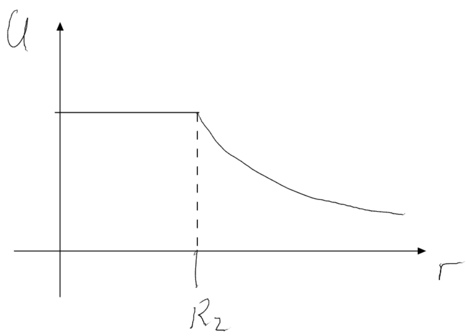
$$= \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2} \xrightarrow{Q = \text{konst}} \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{2R_2}{3R_2^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \quad R_1 \to R_2$$

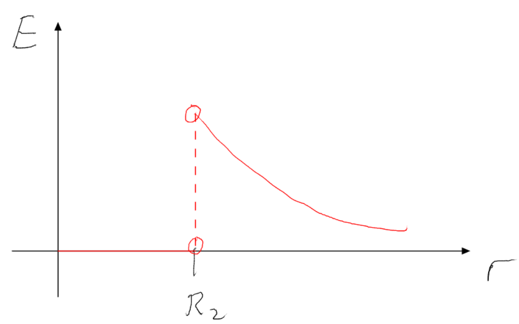
$$\Longrightarrow \boxed{U(r) \xrightarrow{Q = \text{konst.}} \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} & r \leq R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R_2 \end{cases}, \quad R_1 \to R_2}$$

$\Longrightarrow$ Grenzwert von $U(r)$ ist stetig, aber nicht diffbar bei $r = R_2$

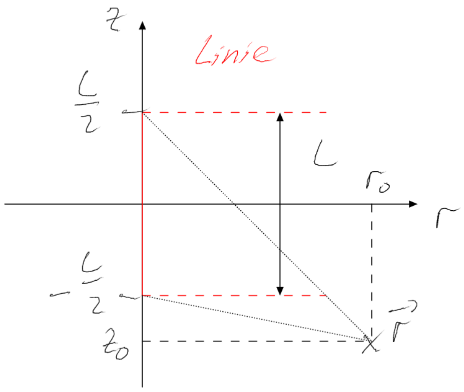
$$\Longrightarrow \boxed{E(r) \xrightarrow{Q = \text{konst}} \begin{cases} 0 & r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_2 \end{cases}, \quad R_1 \to R_2}$$

$\Longrightarrow$ E ist bei $r = R_2$ nicht definiert und damit nicht stetig





Aufgabe 5



$$\omega = \frac{dq}{dz} = \text{konst} \quad \text{für} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

Koordinatensystem: – Ursprung im Mittelpunkt der Linie
– Zylinderkoordinaten

$\Rightarrow$ axialsymmetrisch zur z-Achse

$\Rightarrow$ U ist unabhängig von φ

$\Rightarrow$ Aufsummierung der Potentiale aller Ladungselemente am Ort $\vec{r}$

$$\Rightarrow \quad U(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \overset{\text{(Deltafunktion anwenden)}}{=} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dz}{\sqrt{r_0^2 + (z-z_0)^2}}$$

Sei nun $x = z - z_0$. $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 \Rightarrow dz = dx$

$$\Rightarrow \quad U(\vec{r}) = \frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{-\frac{L}{2}-z_0}^{\frac{L}{2}-z_0} \frac{dx}{\sqrt{r_0^2 + x^2}} = \frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{arsinh} \frac{x}{r_0} \Bigg|_{-\frac{L}{2}-z_0}^{\frac{L}{2}-z_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U(\vec{r}) = \frac{\omega}{4\pi\varepsilon_0} \left[\operatorname{arsinh}\left(\frac{L - 2z_0}{2r_0}\right) + \operatorname{arsinh}\left(\frac{L + 2z_0}{2r_0}\right) \right]}$$