

wichtige Anwendung: Dynamo
el. leitfähige Flüssigkeiten oder Gase (Plasma) \rightarrow Magnetohydrodynamik
(wichtig für kosmische Magnetfelder, Kernfusion!)

Bem.: Jetzt wird die Bezeichnung der L_{ik} als Induktionskoeffizient
klar: $\Phi_k = \sum_i L_{ik} J_i \Rightarrow U_{ind} = -\frac{d}{dt} \sum_i L_{ik} J_i$ (für gleiche Leiterachse für
im k -ten Kreis induz. Sp.) $U_{ind} = -\sum_i L_{ik} \dot{J}_i$

14.01.15

4.3 Skin-Effekt

- Stromdichteverteilung über Leiterquerschnitt bei Wechselstrom
($\propto e^{-i\omega t}$)
- Wähler langen geraden Draht mit kreisförmigen Querschnitt
(vgl. Kap. 3.2)



$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{J} = \sigma \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\Rightarrow \text{rot rot } \vec{J} = -\mu_0 \sigma \vec{J} \quad (\text{innen})$$

$$\text{rot } \vec{J} = (0, -\frac{\partial J_z}{\partial r}, 0), \text{rot rot } \vec{J} = (0, 0, -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial J_z}{\partial r})$$

$$\text{Setze } J_z(r, t) = \text{Re}(a(r) e^{-i\omega t})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{da}{dr} = -i\omega \mu_0 \sigma a \quad (\text{Variablentransform. } x = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} r \text{ (x komplex)})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{da}{dx} + a = 0 \quad \frac{d}{dr} = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} \frac{d}{dx}$$

$$a' = \frac{da}{dx} : a'' + \frac{a'}{x} + a = 0 \quad (a'' + \frac{a'}{x} + (1 - \frac{n^2}{x^2})a = 0)$$

Besselsche Dgl. ($n=0$)

$$\text{allg. Lsg: } a(x) = A J_0(x) + B N_0(x)$$

$$a \text{ endlich bei } r=0 \rightarrow B=0$$

$$\Rightarrow J_z = \text{Re}[A J_0(\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} r) e^{-i\omega t}]$$

$$[A \Rightarrow \text{komplexe Amplitude } J_0 \text{ der Gesamtstromstärke: } J = \text{Re}(J_0 e^{-i\omega t})]$$

$$J = \int \vec{J} d\vec{F} = \int_0^{r_0} J_z 2\pi r dr; \text{ Magnetfeld im Außenraum: } \vec{H} = \frac{J(t)}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

Diskussion: 1) für kleine ω , genauer: $\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} r_0 \ll 1$, gilt $J_0(\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} r) \approx 1$
 \Rightarrow Stromdichte über Leiterquerschnitt nahezu konstant (wie bei Gleichstrom)

2) für große ω , $\sqrt{i\omega \mu_0 \sigma} r_0 \gg 1$, fließt der Hauptteil des Stroms in einer dünnen oberflächennahen Schicht der Größenordnung $(\mu_0 \sigma \omega)^{-\frac{1}{2}}$



Man beachte: Wir verlassen hier sehr große ω das Gebiet quasistationärer Felder!

aber: in Leiterinneren reicht die Bed. ① $\sigma \gg \epsilon \omega$

prakt. Bedeut.: nur oberflächennahe Schicht muss gut leitend sein!

Allg. gilt: Hochfrequente Felder dringen nicht tief in Metall ein (nur nur Oberflächenströme hervor) "Skinneffekt"
 Eindringtiefe $\propto (\mu_0 \sigma \omega)^{-\frac{1}{2}}$
 → Abschirmwirkung eines "Faraday-Käfigs" nicht nur in Elektrostatik (vgl. Kap. 1.2.4 (c))

3) Konsequenz: Selbstinduktionskoeff. eines Leiters L_{ii} (hängt auch für dünne Leiter von der Stromdichteverteilung über Querschnitt ab, vgl. Kap. 3.4) wird frequenzabhängig.
 ebenso: Frequenzabhängigkeit des Ohmschen Widerstandes R (klar: Der Ohmsche Widerstand wächst mit der Frequenz, da die "effektive" Querschnittsfläche kleiner wird.)

4.4. Elektrische Stromkreise

Beispiel: einfacher Schwingkreis

L : Selbstinduktionskoeff. des ges. Stromkreises

R : Ohmscher Widerstand des ges. Stromkreises



[In diesem Kapitel vernachlässigen wir den Skinneffekt]

Problem: Wegen des Kondensators handelt es sich um einen offenen Stromkreis (Gleichstrom nicht möglich!). Ein zeitlich veränderlicher Strom kann fließen: Kondensatorplatten werden aufgeladen bzw. entladen und spielen somit die Rolle von "Quellen" und "Senken" des Stroms.

Bem: Beim Kondensator ist die Gl. $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ ($\rightarrow \text{div } \vec{j} = 0$) nicht mehr gültig! \Rightarrow Kap. 5.3

1. Gl: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_{\text{ind}} = -L \frac{d\vec{j}}{dt}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = R\vec{j} - U_{12} - U_e$ (Umlaufsumme gemäß Strompfeil)

U_{12} : elektrostatische Spannung am Kondensator (Ladungszustand veränderl.)

$U_{12} = \frac{Q}{C}$ Q : Ladung der Kondensatorplatte 1 (= Ldg. der Platte 2)

$\vec{j} = -\frac{dQ}{dt}$

$\Rightarrow -R\vec{j} - \frac{Q}{C} - U_e = L\ddot{Q} \quad -\dot{Q} = \vec{j}$

$\Rightarrow -U_e = L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q$ bzw. $U_e = L\ddot{j} + R\dot{j} + \frac{1}{C}j$ Dgl für $j(t)$

vgl. Mechanik: erzwungene Schwingung mit Dämpfung

Energierate: Multiplikation mit $\dot{Q} \Rightarrow -U_e\dot{Q} = L\dot{Q}\ddot{Q} + R\dot{Q}^2 + \frac{1}{C}Q\dot{Q}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \dot{Q}^2 + \frac{Q^2}{2C} \right) = U_e \dot{j} - R \dot{j}^2$

↑ ↑ ↑ ↑
 magn. Energie el. Energie Leistung der Stromquelle Joulesche Wärmeleistung

Bem: 1) Für $U_e = 0 \rightarrow$ Analogie freie gedämpfte Schwingung

$R \rightarrow 0$: ungedämpfte Schwingung mit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Thomsonsche Formel)

2) Wechselstromwiderstand (Impedanz)

Für $U_e = \text{Re}(U_e e^{-i\omega t})$ gilt (im eingeschwungenen Zustand) auch $j = \text{Re}(\dot{j} e^{-i\omega t})$

mit $-i\omega \hat{U}_e = (-\omega^2 L - i\omega R + \frac{1}{C}) \hat{I}$, also: $\hat{U}_e = Z \hat{I}$ mit
 $Z = R - i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ Impedanz

3) Induktiv gekoppelte Stromkreise

$$\sum_b L_{ab} \dot{Q}_b + R_a \dot{Q}_a + \frac{Q_a}{C_a} = -U_a^{(e)} \quad (\text{über } a \text{ nicht summieren})$$

Für $U_a^{(e)} = \operatorname{Re}(\hat{U}_a^{(e)} e^{-i\omega t})$ folgt (im eingeschw. Zustand)

$$\hat{U}_a^{(e)} = \sum_b Z_{ab} \hat{I}_b, \quad \hat{I}_b = \operatorname{Re}(\hat{I}_b e^{-i\omega t})$$

mit $Z_{ab} = j\omega L_{ab} + R_a \delta_{ab} - \frac{j}{\omega C_a} \delta_{ab}$
 Eigenfrequenzen: $\det(Z_{ab}) = 0$

5 Das allgemeine elektromagnetische Feld

16.01.15

5.1 Das vollständige System der Maxwell-Gln.

$$\begin{array}{ll} \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} & \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \end{array} \quad \rho = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{f} \quad \oint \vec{D} d\vec{f} = Q = \int \rho d^3r$$

$$\oint \vec{B} d\vec{f} = 0 \quad \oint \vec{H} d\vec{r} = \int (\vec{j} + \dot{\vec{D}}) d\vec{f}$$

Sprechweisen: Die rechten Seiten werden oft als „Quellen“ bezeichnet.

Doppelt problematisch: a) Quellen und Wirbel (im Sinne der Vektoranalysis)
b) Die eigentlichen „Quellen“ sind ρ und \vec{j} , d.h. die Terme $-\dot{\vec{B}}$, $\dot{\vec{D}}$ gehören eigentlich auf die linken Seiten. Andererseits anschaulich: $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$, $\vec{D} \rightarrow \vec{H}$

Wir werden ρ und \vec{j} als die Quellen des elektromagnetischen Feldes bezeichnen.

Quellenfreie Felder (auch: „freie Felder“): $\rho=0$, $\vec{j}=\vec{0}$
- nützliche Abstraktion, einfachster Zugang zu QFT (QED)

Die Quellen (ρ, \vec{j}) sind selbst nicht mit rein elektromagn. Hilfsmitteln beschreibbar (Fremdkörper der Theorie der E-Dyn.)

Nahwirkung statt Fernwirkung

Das Feld vermittelt die Kraftwirkung zw. den Quellen; QFT: Feldquanten (Photonen)

Kraft auf Probeladung: $\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ Lorentzkraft
endliche Ausbreitungsgeschw. \vec{v} (wird bei statischen oder stationären Problemen noch nicht deutlich)

z.B. Vektor
 $\vec{r} = q\vec{B}(\vec{r} - \vec{r}(t))$
 $\vec{j} = q\vec{v}(\vec{r} - \vec{r}(t))$
 $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

Für eine Ladungs- und Stromdichteverteilung im Vakuum:

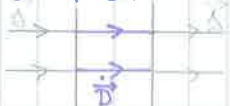
Kraftdichte: $\vec{k} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

5.2 Verschiebungsstrom und Kontinuitätsgleichung

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}, \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

$\dot{\vec{D}}$: zeitliche Änderung der dielekt. Verschiebung, wirkt wie \vec{j}
→ „Verschiebungsstromdichte“, Verschiebungsstrom: $\int \dot{\vec{D}} d\vec{f}$

Beispiel: Wechselstromkreis mit Kondensator (vgl. Kap. 4.4)



im Leiter \vec{D} im Vgl. zu \vec{j} vernachlässigbar ($\sigma \gg \omega \epsilon$),
im Zwischenraum übernimmt \vec{D} die Rolle von \vec{j}
(in diesem Sinne ist der Stromkreis geschlossen - Idee von Maxwell)

Das Hinzufügen des Terms $\dot{\vec{D}}$ hat weitreichende Konsequenzen:

- Elektromagnetische Wellen
- Nahwirkung statt Fernwirkung

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leadsto \text{div}(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \rightarrow \text{Normalkomponente von } \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ stetig?}$$

Kontinuitätsgl: $\text{div}(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \leadsto \text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = 0$
 $\leadsto \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ (Lsg. Hydrodynamik: $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \text{div}(\rho_m \vec{v}) = 0$)

Die Kontinuitätsgl. folgt also aus der Maxwell-Gln.!

Integrale Form: $\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r + \oint \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0 \leadsto \frac{d}{dt} \int \rho d^3r + \oint \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0$
 $\leadsto \frac{dQ}{dt} + \oint \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0$

Ladung in einem Volumen kann sich nur dadurch ändern, dass sie durch die Oberfläche hinein- oder herausströmt. Falls kein Strom durch die Oberfläche (Oberfläche weit weg bzw. Vakuum) \rightarrow Satz von der Erhaltung der Ladung

Kondensator  $\frac{dQ}{dt} + j = 0$ (haben wir in Kap. 4 benutzt!)

5.3 Materialgleichungen

Maxwell-Gln. zerfallen bisher in 2 Systeme für \vec{E}, \vec{B} einerseits und $\vec{H}, \vec{D}, \vec{j}, \vec{j}$ andererseits. Verknüpfung?

- Vakuum: $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

- Materie: mikroskopisch: geladene Teilchen (Elektronen, Atomkerne) im Vakuum, die sich bew. \rightarrow Lückungsl., Quantentheorie?
 makroskopisch: Mittelung über kleine Volumenelemente \rightarrow Maxwell-Gln. für makrosk. (gemittelte) Felder mit
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M})$

(Die makroskopischen Felder \vec{E} und \vec{B} ergeben sich direkt durch Mittelung über die mikroskopischen Felder \vec{E}_{micro} und \vec{B}_{micro} !)

Materialgln. beschreiben den Zusammenhang von \vec{P}, \vec{M} (\vec{D}, \vec{H}) und \vec{j} mit \vec{E} und \vec{B} .

Dieser Zusammenhang kann nichtlinear sowie zeitlich und räumlich nichtlokal sein.

Symbolisch: $\vec{D} = \vec{D}[\vec{E}, \vec{B}]$
 $\vec{H} = \vec{H}[\vec{E}, \vec{B}]$
 $\vec{j} = \vec{j}[\vec{E}, \vec{B}]$
 Die Materialgln. können natürlich auch räumlich und zeitlich variieren. (Abh. von Dichte, Temperatur, ...)

(Vor: char. Skalen des mikrosk. Feldes \gg atomare Skalen)

- Herleitung der Materialgln. mit Methoden der statist. Thermodyn.
- große Vielfalt, je nach phys. und untersuchten Prozess, Näherungschar.

Beispiele für Materialgln. (ruhende Medien)

a) Dielektrische Verschiebung

lineares isotropes Medium: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

lineares anisotropes Medium: $D_i = \epsilon_{ik} E_k$ (\vec{D} und \vec{E} i.d. nicht parallel!)
 ϵ_{ik} : dielektrischer Tensor

Wichtige Differentialoperatoren der Physik

• Gradient: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

• Divergenz: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
 $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$

• Rotation: $\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$

$\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x$
 $\frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y$
 $\frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

Frage: Darstellung dieser Operatoren in anderen Koordinaten:

Wiederholung aus der Mechanik:

Bsp. Zylinderkoord.
 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \rightarrow (x^1, x^2, x^3) = (\rho, \varphi, z')$



Komponenten der Koordinateneinheitsvektoren in kartes. Koord.

Transformation: $x = \rho \cos \varphi$
 $y = \rho \sin \varphi$
 $z = z'$

$\Rightarrow \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_{z'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

allg.: Koord. Transf. zw. KS Σ (Koord. x^i) und KS Σ' (Koord. x'^i)

• Linie entlang der Koord. x'^k innerhalb von Σ' :

$x'^i(\lambda) = x_A^i + \lambda \vec{\partial}_{x'^k}^i \quad (x_A^i = \text{const.})$

in unseren Bsp.: Linie entlang der Winkelkoord. φ .



$\rho = \rho_A, \varphi(\lambda) = \varphi_A + \lambda, z' = z_A$



Berechnung der Komp. der Koord. Basisvektoren \vec{b}_k im System Σ :

$(\vec{b}_k)^i = \frac{d}{d\lambda} (x^i(x'^j(\lambda))) = \frac{d}{d\lambda} (x^i(x_A^j + \lambda \vec{\partial}_{x'^k}^j))$
 $= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \delta_{x'^k}^j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$

$\Rightarrow \vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \vec{b}_i$

damit gilt umgekehrt: $\vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \vec{b}_i$

Bsp: $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$

$$(\vec{b}_\rho)^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_\rho)^i$$

$$(\vec{b}_\varphi)^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho (\vec{e}_\varphi)^i$$

$$(\vec{b}_z)^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_z)^i$$

Umrechnung der Komponenten eines beliebigen Vektors

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^3 v^k \vec{b}_k = \sum_{k=1}^3 v^k \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \vec{b}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \right) \vec{b}_i$$

$$= \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i$$

also: $v^i = \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \Rightarrow v^i = \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial x^k}$

Man bekommt aus diesen Formeln folgende Relation zwischen den $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\right)$ und $\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^i}\right)$:

$$v^i = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \sum_{k=1}^3 v^k \underbrace{\left(\sum_{l=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \right)}_{= \delta_{kl}^i}$$

\Rightarrow also: Matrizen sind invers zueinander.

jetzt: zurück zu den Differentialoperatoren
wollen z.B. die Komponenten des Gradienten in Zylinderkoordin. \Rightarrow brauchen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\right)$

$$\left. \begin{matrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{matrix} \right.$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} & \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \varphi & \frac{1}{\rho} \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder anders:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi \\ \rho & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dx} [f^{-1}(f(x))] = 1$$

inverse Matrix 2x2

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

$$v^s = v^x \frac{\partial}{\partial x} + v^y \frac{\partial}{\partial y} + v^z \frac{\partial}{\partial z} = v^x \cos \varphi + v^y \sin \varphi$$

$$v^\varphi = v^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v^y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v^z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -v^x \frac{1}{\rho} \sin \varphi + v^y \frac{1}{\rho} \cos \varphi$$

$$\text{Man beachte: } \vec{v} = v^s \vec{b}_s + v^\varphi \vec{b}_\varphi + v^z \vec{b}_z \\ = v^s \vec{e}_s + v^\varphi \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi + v^z \vec{e}_z$$

$$\tilde{v}_\varphi = v^\varphi \rho = -v^x \sin \varphi + v^y \cos \varphi$$

brauchen außerdem die Umrechnung der Ableitungen:

$$v^s \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$v^\varphi \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi + \cos \varphi \left(\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

30.10.14

$$v^\varphi = -\frac{1}{\rho} \sin \varphi v^x + \frac{1}{\rho} \cos \varphi v^y = -\frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v^\varphi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_\varphi = \rho v^\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z}$$

Ziel: Berechnung der Divergenz in Zylinderkoordin.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$F_x = F_\rho \cos \varphi - F_\varphi \rho \sin \varphi = F_\rho \cos \varphi - \tilde{F}_\varphi \sin \varphi$$

$$F_y = F_\rho \sin \varphi + F_\varphi \rho \cos \varphi = F_\rho \sin \varphi + \tilde{F}_\varphi \cos \varphi$$

$$F_z = F_z$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{F} = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (F_\rho \cos \varphi - \tilde{F}_\varphi \sin \varphi) \\ + \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (F_\rho \sin \varphi + \tilde{F}_\varphi \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \rho} F_\rho + \frac{1}{\rho} F_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{F}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{F}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} F_z}$$

Bemerkung: Umbenennung $\tilde{F}_\varphi \rightarrow F_\varphi$ *)

*) Beziehen uns immer auf die normierten Basen
hier $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$

Berechnen nun $\text{rot } \vec{F}$ in Zylinderkoordin.

$$\text{rot } \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

leicht modifizierte Weg:

$$\vec{e}_3 = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$$

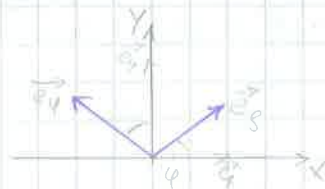
$$\vec{e}_4 = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_3 - \sin \varphi \vec{e}_4$$

$$\vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_3 + \cos \varphi \vec{e}_4$$

$$\text{rot } \vec{F} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$$

$$= (R_x \cos \varphi + R_y \sin \varphi) \vec{e}_3 + (R_y \cos \varphi - R_x \sin \varphi) \vec{e}_4 + R_z \vec{e}_z$$



allg. $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = F_3 \vec{e}_3 + F_4 \vec{e}_4 + F_z \vec{e}_z$

$\rightarrow \vec{e}_3, \vec{e}_4$ einsetzen $\rightarrow F_x, F_y$ ablesen

$$\underbrace{(F_3 \cos \varphi - F_4 \sin \varphi)}_{F_x} \vec{e}_x + \underbrace{(F_3 \sin \varphi + F_4 \cos \varphi)}_{F_y} \vec{e}_y$$

$$R_x = \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) F_z - \frac{\partial}{\partial z} (F_3 \sin \varphi + F_4 \cos \varphi)$$

R_y analog

also $R_3 = \left(\sin \varphi \frac{\partial F_z}{\partial s} + \frac{1}{s} \cos \varphi \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \sin \varphi - \frac{\partial F_4}{\partial z} \cos \varphi \right) \cos \varphi$
 $+ \left(\cos \varphi \frac{\partial F_z}{\partial s} - \sin \varphi \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{1}{s} \sin \varphi \frac{\partial F_4}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi$
 $= \frac{1}{s} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_4}{\partial z}$

andere Komponenten analog

$$\text{rot } \vec{F} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_4}{\partial z} \right] \vec{e}_3 + \left[\frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial s} \right] \vec{e}_4 + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s \cdot F_4) - \frac{\partial F_3}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_z$$

Determinanten Hilfsformel

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{s} \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \frac{1}{s} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_3 & s F_4 & F_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{s} \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_3 & s F_4 \end{vmatrix}$$