

# Elektrodynamik

22.10.14

1346

Vl. Mi 10<sup>15</sup>-11<sup>15</sup>, Fr 8<sup>30</sup>-10<sup>00</sup>

Ü. Mo 8-10, ~~Di 12-14~~ <sup>8<sup>30</sup>-10</sup> ~~Do 12-14~~ ; freitags abgeben  
(SR 4) (SR 3)

Klausur: Do 19.02.15, 10<sup>00</sup>-12<sup>00</sup> Uhr, HS 1

Voraussetzung: aktive Teilnahme an Übungen

Literatur: Jackson, Klassische Elektrodyn. (3. Auflage, de Gruyter, Berlin 2002)  
Landau/Lifschitz II, VII; Sommerfeld II; Becker/Becker, Theoret. Elektro. 1  
(4. Auflage, de Gruyter, Berlin 1974)

## Vorbemerkungen und Einführung

TM: Bewegung von Teilchen in vorgegebenen Kraftfeldern.  
Wichtiger Fall: Bew. eines geladenen Teilchens unter dem Einfluss der Lorentz-Kraft  $\vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  in einem elektromagn. Feld

ED: Beschreibung des elektromagn. Feldes und seiner Quellen  
Klassische Elektrodynamik = Maxwell'sche ED (J.C. Maxwell: 1831-1879)  
• Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus & Optik  
• Einordnung in moderne Physik  
"Standardmodell" der Theorie der Teilchen und ihrer Wechselwirkungen beschreibt elektromagnetische, schwache und starke WW durch elementare Bausteine (Quarks und Leptonen), die über Kraftträger (Photonen, W- und Z-Bosonen, Gluonen) in Verbindung treten (relativistische Quantenfeldtheorien)

Die klassische ED ist Grenzfall der QED (für große Photonen-zahlen).

- Prototyp einer klassischen Feldtheorie
- großer Anwendungsbereich

Bem.: Es gibt noch keine QFT der Gravitation.  
Ziel: weitere Vereinigung (Teilerfolg: Theorie der elektromagn. schwachen WW von Glashow, Weinberg & Salam → Nobelpreis 1979)  
Stringtheorie ??

## Struktur der Elektrodynamik:

<u>Materie</u>	<u>Feld</u>	<u>Verknüpfung</u>
Ladungen, Ströme $\rho, \vec{j}$ Pers. („Medium“) $\epsilon, \mu, \sigma, \dots$ (Materialkonstanten)	Erregungsfeld $\vec{D}, \vec{H}$ Kraftfeld $\vec{E}, \vec{B}$	Maxwell-Gln: $\text{div } \vec{D} = \rho$ $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{div } \vec{B} = 0$ Materialgln: z.B. $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{j} = \sigma \vec{E}$
<u>Verknüpfung</u>		

Bem.:  $\rho, \vec{j}, \vec{D}, \dots$  hängen von  $\vec{r}$  und  $t$  ab!  
Bez.:  $\frac{\partial}{\partial t}$  (↗ Unterschied zur Mechanik!)



"Phänomenologische Theorie": keine Herleitung der Materialgl. und -konstanten

Math. Voraussetzungen: Vektoranalysis, Integralrechen, Potentialgl. u. Poissongl., inhomog. Wellengl.

## 1. Elektrostatik

• rein elektrisches, zeitunabh. Feld wird von Ladungen erzeugt:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q \quad \vec{D}(\vec{r}), \rho(\vec{r})$$

(für alle Flächen)

$$[\oint \text{div } \vec{D} d^3\vec{r} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \int \rho d^3\vec{r} = Q]$$

Kraftwirkung auf (kleine) Probekladung (Testladung)  $q$ :  $\vec{K} = q \vec{E}$

Das Kraftfeld ist konservativ:  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

$$[\oint \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0]$$

$\rho$ : Ladungsdichte,  $\frac{As}{m^3}$

$Q$ : Ladung,  $As$  (= coulomb)

$\vec{E}$ : el. Feldstärke,  $\frac{V}{m} = \frac{N}{As}$

$\vec{D}$ : dielekt. Verschiebung,  $\frac{As}{m^2}$

### 1.1 Ladungen und Felder im Vakuum

#### 1.1.1 Grundlagen

"Materialgl.":  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

Dielektrizitätskonstante d. Vakuums

- führt nur daher, dass es im SI-System eine unabh. Grundeinheit für die el. Stromstärke gibt (A)
- man kann andere Einheitensysteme einführen, für die  $\epsilon_0 = 1$  gilt

Bem:  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$  (exakt!)

$$\epsilon_0 = \frac{10^9}{4\pi c^2} \cdot \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{As}{Vm} \rightarrow \text{genauer Zahlenwert [SI-System]}$$

→ Grundgl. der Elektrostatik des Vakuums:

$$\left| \begin{array}{l} \text{div } \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \end{array} \right|$$

Grundaufgaben:

1) geg. Feld ges. Ladungsverteilung

2) geg. Ladungsverteilung ges. Feld

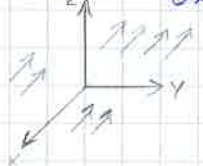
3) Untersuchung der Bew. von (Test-)Ladungen im vorgeg. Feld  
→ später

# 1.1.2 Bestimmung der Ladungsverteilung aus bekanntem Feld

zu berechnen:  $\vec{D}$

Beispiel 1: 1) homogenes Feld  $\vec{D} = (a, b, c)$  (kart. Koord.)

$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \rho = 0$$



(Bild einer quellenfreien Flussströmung)

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \checkmark$$

$$2) \vec{D} = (ax, 0, 0)$$

$$\text{div } \vec{D} = a$$

konst. Ladungsdichte

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \checkmark$$



(Bild einer Strömung mit Quellen)

Bem.: beide Beispiele sind physik. nur in gewissen Raum-  
reichen realisierbar!

Beispiel 3: (Kugelkoord.  $r, \vartheta, \varphi$ )  $D_r = \frac{c}{r^2}$ ,  $D_\vartheta = D_\varphi = 0$ , d.h.  $\vec{D} = \frac{c}{r^2} \vec{r}$   
 $\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \checkmark$

$$\text{div } \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial D_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \vartheta D_\varphi) = 0 \quad (r \neq 0)$$

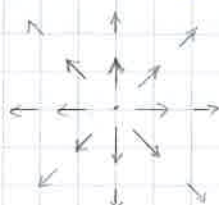
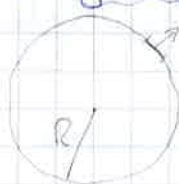


Bild einer Quelle

$\vec{D}$  ist singulär bei  $r=0 \rightarrow \text{div } \vec{D}$  dort nicht  
erklärt

integrale Form:  $\oint \vec{D} d\vec{f} = Q$



Kugel um Ursprung

$$|d\vec{f}| = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$d\vec{f} = R^2 \frac{\vec{r}}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\begin{aligned} \rightarrow Q &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{c}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (r=R) \\ &= c \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi c \end{aligned}$$

Ladung  $Q = 4\pi c$  sitzt im Ursprung (Punkt-  
ladung)

$$[\rho = 4\pi c \delta(\vec{r})]$$

Bem.: Die integrale Form empfiehlt sich bei Singularitäten!  
aber Vorsicht:

$$4) \vec{D} = \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{a}}{r^3} \quad \text{wiederum singulär bei } r=0$$

$$r \neq 0: \text{div } \vec{D} = 0; \text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad \checkmark$$

Betrachten wie: Kugel um Ursprung

$$\rightarrow Q = \oint \vec{D} d\vec{f} = R \int \vec{E} d\vec{f}$$

24.10.14



$$\rightarrow Q = \oint \vec{D} d\vec{f} = R^2 \oint \left[ \frac{3(\vec{a}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{a}}{r^3} \right] \cdot \frac{\vec{r}}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\frac{2\vec{a}\vec{r}}{r^4}$$

Legen z-Achse in  $\vec{a}$ -Richtung:  $\vec{a} = a \vec{e}_z \Rightarrow \vec{a}\vec{r} = az = ar \cos \vartheta$

$$\Rightarrow Q = \frac{2a}{R} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\text{NR: } \int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{4} \cos 2\vartheta \Big|_0^\pi = 0$$

$$\Rightarrow Q = 0$$

- gleiche Menge positiver und negativer Ladung innerhalb der Kugel (mehr kann man daraus nicht schließen?)
- im Ursprung bildet ein el. Dipol, vgl. später  $[p = -4\pi a \text{ grad } \vec{r}(r)]$

### 1.1.3 Bestimmung des Feldes aus der Ladungsverteilung

Vorlesung: Eindeutigkeit?  $\text{div } \vec{D} = \rho, \text{rot } \vec{E} = \vec{0}, \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$   
Mit  $\vec{D}$  ist z. B. auch  $\vec{D} + \vec{D}_0, \vec{D}_0 = \text{const.}$  eine Lsg.

Falls die Quellen sich nur im Endlichen befinden, fordert man  $\vec{D} = \vec{0}$  für  $\vec{r} \rightarrow \infty$ . Dann folgt eine eindeutige Lsg., vgl. später  
[Physikal. einleuchtend: Je weiter man sich von den Ladungen entfernt, desto schwächer wird das Feld.]

### Verwendung der integralen Form der Maxwell-Gln.

- sinnvoll bei hoher Symmetrie

Beispiele: 1) Feld einer Punktladung  
Punktladung  $Q$  im Ursprung des Koord. Systems, Feld muss kugelsymmetrisch sein:  $\vec{E} = f(r) \vec{r}$

$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  ist damit automatisch erfüllt.

$\oint \vec{D} d\vec{f} = Q$ , wählen Kugel  $r=R$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \oint f(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot R^2 \frac{\vec{r}}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = Q$$

$$Q = 4\pi \epsilon_0 R^2 f(R) \Rightarrow f(R) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} \quad \forall R > 0$$

$$\Rightarrow f(r) \text{ bestimmt } \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \text{ el. Feld einer Punktlad.}$$

Bem.:  $\Rightarrow$  Coulomb-Gesetz:  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$  (q muss nicht klein sein)  
gleichen Vorzeichen der Ladg

### Verwendung der differentiellen

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho, \text{rot } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = -\vec{g}$$

$$\text{Mechanik: } \vec{K} = q\vec{E}$$

1: elektrostatisches Potential [Volt] (el. Spannung = Potentialdifferenz)

### als elektrost. Potential

Bem.:  $\text{Volt} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}}$

$\Rightarrow -\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{U} = \rho$

$\Rightarrow \Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  "Poissongleichung"

- im ladungsfreien Raum gilt:  $\Delta U = 0$  "Potentialgleichung" (Laplacegleichung)

- U nur bis auf Konstante bestimmt; meistens Normierung  $U=0$  für  $r \rightarrow \infty$

- Arten von Ladungsverteilungen:

- $\rho(\vec{r})$ : Raumladungsdichte
- $\sigma(\vec{r})$ : Flächenladungsdichte
- $\omega(\vec{r})$ : Linienladungsdichte
- $Q_i$ : Punktladungen

Beispiel: 1) Potential einer Punktladung

Kugelkoordin.: 
$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin^2 \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Symmetrie:  $U = U(r)$ ;  $\Delta U = 0$  für  $r \neq 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{dU}{dr} = -A \Rightarrow \frac{dU}{dr} = -\frac{A}{r^2}$

$\Rightarrow U = \frac{A}{r} + B$

Normierung:  $U=0$  für  $r \rightarrow \infty$ :  $B=0$

$\Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} U = \frac{A}{r^2} \vec{r}$

Vgl. mit Ergebnis aus integraler Form:

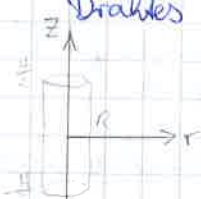
$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Bem.: Dieses Ergebnis gilt im Außenraum einer bel. kugelsymmetrischen Ladungsverteilung ( $Q$ : Gesamtladung)!

Punktladung am Ort  $\vec{r}_Q$ :  
$$U(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|^3}$$

2) Potential eines unendlich langen, geraden geladenen Drahtes



Zylinderkoordin.:  $r, \varphi, z$  Draht =  $z$ -Achse  
(hier:  $r$  Abstand zur  $z$ -Achse)

Man beachte: Ortsvektor  $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$   
also  $|\vec{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$

Linienladungsdichte  $\omega = \text{konst.}$  [ $\frac{\text{As}}{\text{m}}$ ]

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \text{ für } r \neq 0$$

$U = U(r)$  wegen Symmetrie

$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dU}{dr} = A \Rightarrow \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r}$

$\Rightarrow U = A \ln r + B = A \ln \frac{r}{r_0}$

Normierung (willkürlich):  $U=0$  für  $r=r_0$



(hier ist die Normierung  $U=0$  im Unendlichen nicht mgl., unphysikal. Annahme: Draht unendlich lang)

Bestimmung von A: Zylinder mit Radius R, Höhe H

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} D_r r d\varphi dz = 2\pi R H D_r = Q = \omega H$$

$$\Rightarrow D_r = \frac{\omega}{2\pi r} = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} = -\epsilon_0 \frac{A}{r} \Rightarrow A = -\frac{\omega}{2\pi \epsilon_0}$$

Nebenüberlegungen:  $\vec{D}$  hat nur r-Komponente

$\Rightarrow$  kein Beitrag für Grund- und Deckfläche

$$\Rightarrow U = \frac{\omega}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

23.10.14 Bei

3) Potential einer homogenen Ladungskugel



innen:  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$

außen:  $\rho = 0$

(geht wieder Kugelkoordin., d.h.  $r = |\vec{r}|$ )

Symmetrie  $\rightarrow U(r)$

$$\text{Außen: } U = \frac{A}{r} + B = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad \text{mit } Q = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Innen: } \Delta U = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 \Rightarrow r^2 \frac{dU}{dr} = -\frac{\rho_0 r^3}{3\epsilon_0} + C$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dr} = -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} + \frac{C}{r^2} \Rightarrow U = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C}{r} + F$$

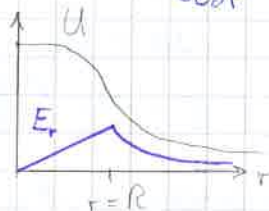
U endlich bei  $r=0$ :  $C=0$  ( $\vec{E} = \vec{0}$  bei  $r=0$ !)

U stetig bei  $r=R$  ( $\vec{E}$  endlich):

$$\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} = F - \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} \Rightarrow F = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) ; \quad \vec{E} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\text{Außen: } U = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$



Bem.:  $\vec{E}$  ist also auch stetig. Gilt immer für  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ , falls keine Flächenladung, vgl. später!

Lösung der Poissonsgleichung für eine beliebige Ladungsverteilung

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

{Ladungsverteilung soll nicht bis ins Unendliche reichen (bzw.  $\rho \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  hinreichend stark)}

Lineare Superposition!

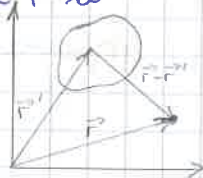
$$\text{Punktladung: } U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} ; \text{ mehrere Punktladgn: } U(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\text{Kontinuierliche Ladungsverteilung: } \sum \rightarrow \int : Q_i \rightarrow \rho d^3 \vec{r}', \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'$$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

"Poisson-Integral"  
"quellenmäßige Darstellung"

- kartesische Koord. Volumenelement  $d^3\vec{r}' = dx' dy' dz'$
- Normierungsbed.  $U \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$
- $\vec{r}'$ : Aufpunkt  
 $\vec{r}$ : Quellpunkt



Aufpunkt kann innerhalb und außerhalb der Ladungsverteilung liegen.

- Eindeutigkeit, da die einzige überall reguläre Lösung von  $\Delta U = 0$  die Konstante ist.

Bem. 1) Das Potential einer Punktladung erhält man formal durch  $\rho(\vec{r}) = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  zurück.  
2) Analog Formeln für Flächen- und Linienladungsdichten.  
[Bei Punktladungen und Linienladungen wird  $U$  am Ort der Ladungen regulär.]

#### 1.1.4 Die Multipolentwicklung des Potentials einer beliebig inhomogenen Ladungsverteilung



Ladungsverteilung soll auf ein endliches Gebiet beschränkt sein.  
Aufpunkt  $\vec{r}$  weit entfernt von der Ladungsverteilung, d.h.  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$

$$\rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| = r \rightarrow U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dQ$$

$$\Rightarrow U(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad Q = \int \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

(Nullte Näherung) Gesamtladung

Genauer: Entwicklung von  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  in eine Taylorreihe bei  $\vec{r}' = 0$ .

$$f(\vec{r}') = f(x', y', z') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

(kartes. Koord.:  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ )

$$f(\vec{r}') = f(\vec{0}) + \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{r}') \right]_{\vec{r}'=\vec{0}} x_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(\vec{r}') \right]_{\vec{r}'=\vec{0}} x_i' x_k' + \dots$$

$f(\vec{r}')$  hängt von  $x-x', y-y', z-z'$  ab  $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i'}$

$$\rightarrow \text{z.B. } \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{r}') \right]_{\vec{r}'=\vec{0}} = - \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{\vec{r}'=\vec{0}} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r}$$

Hier kann man auch erst  $\vec{r}' = \vec{0}$  setzen (damit Ableitung nach  $\vec{r}'$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) x_i' + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{r} \right) x_i' x_k' + \dots$$

Beim Ableiten von  $\frac{1}{r}$  fällt die  $r$ -Potenz um 1:

$$\text{z.B.: } \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\text{Kugelkoord.: } x = r \cos \varphi \sin \vartheta \rightarrow \frac{x}{r} = \cos \varphi \sin \vartheta$$

Somit haben wir eine Entwicklung nach Potenzen von  $\frac{1}{r}$ ; für große  $r$  werden die Terme immer kleiner.



Einsetzen in die quellenmäßige Darstellung:

$$\rightarrow U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots$$

• Polterm ( $\frac{1}{r}$ ):  $U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  Nähe Näherung

Feld einer Punktladung; Veranschaulichung: Feldlinienbild, Äquipotentialflächen

("Monopolterm")



$$(\vec{E} = -\text{grad } U \rightarrow \vec{E} \perp \text{ auf Flächen } U = \text{konst.})$$

(Richtung von  $\vec{E}$  für den Fall  $Q > 0$ )

• Dipolterm ( $\frac{1}{r^2}$ ):  $U_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \underbrace{\sum_i x_i' \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right)}_{\vec{r}' \cdot \text{grad } \frac{1}{r}} \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$   
 $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$$\rightarrow U_1 = \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{mit } \vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

Dipolmoment

Es heißt  $U_0 + U_1$  die erste Näherung.

vgl. Definition des Schwerpunktes einer Massenverteilung:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r} \mu(\vec{r}) d^3r = \frac{1}{M} \int \vec{r} dM$$

Massenpunktsystem:  $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum \vec{r}_i m_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = \int \vec{r} dQ$

• Für  $Q \neq 0$  stellt  $\frac{\vec{p}}{Q}$  den Ortsvektor des „Schwerpunktes der Ladungsverteilung“ dar.

Durch Übergang ins „Schwerpunktsystem“ kann das Dipolmoment „wegtransformiert“ werden.

• Allgemein: Wechsel des Koordinatenursprungs  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$ ,  $\vec{a} = \text{const.}$

$$\Rightarrow \vec{p} \rightarrow \int (\vec{r} + \vec{a}) dQ = \vec{p} + \vec{a} Q$$

Für  $Q=0$  ist  $\vec{p}$  invariant!

Ladungsverteilungen mit  $Q=0$  werden in 1. Näherung durch den Dipolterm charakterisiert „Dipol“

25.11.14

Realisierung eines Dipolfeldes durch Punktladungen:

1)

$$Q=0 \Rightarrow \text{mind. 2: } +q, -q$$



$$\vec{p} = \int \vec{r} dQ = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = q \vec{l}$$

„physikalischer Dipol“:  $U \approx U_1 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  für  $r \gg l$ ,  $l = |\vec{l}|$

„mathematischer Dipol“:  $U = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \forall r \neq 0 \quad (l \rightarrow 0, q \rightarrow \infty; \vec{p} = \text{const.})$

- Viele Moleküle (z.B.  $\text{H}_2\text{O}$ ) besitzen ein permanentes Dipolmoment.
- Ein äußeres elektrisches Feld kann ein Dipolmoment induzieren:



$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (\alpha: \text{Polarisierbarkeit})$$

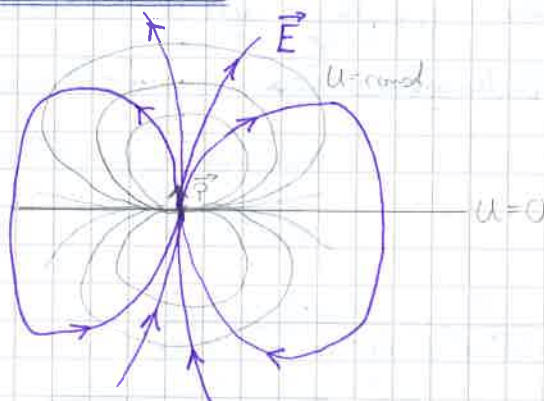
$$\vec{E}\text{-Feld: } \vec{E} = -\text{grad } U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad } \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right)$$

Veranschaulichung:

$$\vec{p} = (0, 0, p)$$

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p z}{r^3} = \frac{p \cos \vartheta}{r^2}$$



Quadrupolterm ( $\frac{1}{r^3}$ ):  $U_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \sum_{i,k} x_i' x_k' \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} \right) \rho(\vec{r}') d^3r'$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_k}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{x_k}{r^3} \right) = -\frac{\delta_{ik}}{r^3} + \frac{3x_i x_k}{r^5}$$

$$\Rightarrow U_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) \int x_i' x_k' \rho(\vec{r}') d^3r'$$

(↑↑  
Sammelnkonvention)

$$\Rightarrow U_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^5} (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) D_{ik} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{mit } D_{ik} = \int (3x_i' x_k' - r'^2 \delta_{ik}) \rho(\vec{r}') d^3r'$$

Quadrupolmoment

Bem.:  $(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) \delta_{ik} = 3x_i x_i - r^2 \delta_{ii} = 3r^2 - 3r^2 = 0$

Durch das Hineinfügen des Terms  $-r'^2 \delta_{ik}$  in der Def. des Quadrupolmoments wird die Spurfreiheit ( $D_{ii} = 0$ ) gesichert.

$$\Rightarrow U_2 = \frac{x_i x_k D_{ik}}{8\pi\epsilon_0 r^5}$$

2) Für  $Q=0$ ,  $\vec{p}=\vec{0}$  ist  $D_{ik}$  invariant  
(gilt allgemein für das erste nichtverschwindende Multipolmoment!)  
„Quadrupol“

Realisierung eines Quadrupolfeldes durch Punktladungen

Punktladungen gleicher Beträge  $\rightarrow 4$ , d.h. 2 nicht sich kompensierende Dipolmomente



allg.: Parallelogramm

wieder physik. bzw. math. Quadrupol

www.

## Allg. Bem.:

1) Für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung verschwinden (bei geeigneter Wahl des Nullpunktes des Koordinatensystems: Symmetriezentrum) alle Multipolmomente außer dem Monopol, klar:  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$  gilt im Außenraum exakt.

2) Ladungsfreier Raum innerhalb einer Ladungsverteilung:



Entwicklung für  $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \dots$$

3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma}} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad (r' < r) \end{aligned}$$



bzw. (vgl. Bem. 2:  $r \leftrightarrow r'$ )  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma) \quad (r' > r)$

→ Die Multipolenentwicklung konvergiert außerhalb einer Kugel, die die gesamte Ladungsverteilung umschließt (bzw. innerhalb einer ladungsfreien Kugel) [Kugelmittelpunkt-Koord. Ursprung]

Die Funktion  $f(X) = \frac{1}{\sqrt{1+X^2-2X\cos\gamma}}$  nennt man erzeugende Fkt. der „Legendre-Polynome“  $P_n(\cos\gamma)$ ;  $P_n(\cos\gamma)$  auch „Kugelfunktionen“

Taylorreihe bei  $X=0$ :

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n P_n(\cos\gamma)$$

$$P_0=1, P_1=\cos\gamma, P_2=\frac{1}{2}(3\cos^2\gamma-1), \dots$$

mit  $\cos\gamma = \xi$  gilt allg.:  $P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2-1)^n$

- Kugelkoord.  $r, \vartheta, \varphi$ ;  $r', \vartheta', \varphi'$

„Additionstheorem der Kugelfunktionen“:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^m(\cos\vartheta')$$

mit  $P_n^m(\xi) = \frac{(1-\xi^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\xi^{n+m}} (\xi^2-1)^n \quad (P_n^0 = P_n)$

„zugeordnete Legendre-Funktionen“

$$[\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi-\varphi')] = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}'}{r'}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow \text{Multipl. Entwicklung in Kugelkoord.}$$

Struktur:  $U(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{r^{-n-1}}{r^n} \right\} [a_n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\vartheta)]$

Auf diese Struktur kommt man auch durch einen Separationsansatz zur Lösung der Potentialgl.:  $U = f(r) g(\vartheta) h(\varphi)$



(jedereinzelne Summand ist spezielle Lösung der Potentialgl.)

$r > r'$  ( $V(r')$ ) (eigentliche Multipolentwicklung)

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n; \quad U_n = \frac{1}{r^{n+1}} \left[ C_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \vartheta) \right]$$

$$\rightarrow U_0 = \frac{C_0}{r}, \text{ d.h. } Q = 4\pi\epsilon_0 C_0$$

$$\rightarrow U_1 = \frac{1}{r^2} (C_1 \cos \vartheta + a_{11} \cos \varphi \sin \vartheta + b_{11} \sin \varphi \sin \vartheta),$$

$$\text{d.h. } \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 (a_{11}, b_{11}, C_1)$$

$$\rightarrow U_2 = C_2, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} \leftrightarrow D_{ik} \text{ (eine sym. spartreue } 3 \times 3 \text{-Matrix hat 5 unabh. Elemente!)} \quad \text{usw.}$$

Val. mit anderen Begeben.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

$$U = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

### 1.1.5 Kräfte zwischen Ladungen, Energie einer Ladungsverteilung

Kraft auf Teilchen:  $\vec{K} = q \vec{E}$

Kraft zwischen 2 Punktladungen:  $\vec{K}_{21} = -\vec{K}_{12}$ ;  $\vec{K}_{21}$ : Kraft auf Teilchen 2, ausgeübt von Teilchen 1

$$\vec{K}_{21} = Q_2 \vec{E}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$



abstoßend, falls  $Q_1 Q_2 > 0$

Energie des Systems 2er-Platzlsgn:

= Arbeit, die man aufbringen muss, um die Ladungen  $Q_2$  aus dem Unendlichen an den Ort  $P$  ( $\vec{r} = \vec{r}_2$ ) zu bringen:

(gegen die Kraft  $\vec{K}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$ )  
 $\rightarrow$  aufzuwendende Kraft:  $-\vec{K}_{21}$

Diese Arbeit ist wegunabhängig (wegen rot  $\vec{E}_1 = \vec{0}$ )!

$$dA = -\vec{K}_{21} d\vec{r} = -\vec{K}_{21} d(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (\text{Die Ladung } Q_1 \text{ sei an OA } \vec{r}_1 \text{ fixiert, also } d\vec{r}_1 = \vec{0})$$

$$W = \int_{\infty}^P dA = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^P \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot d(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\frac{Q_1 Q_2}{8\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^P \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_1)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\cdot (\vec{r} - \vec{r}_1)^2 = |\vec{r} - \vec{r}_1|^2; \text{ Subst. } |\vec{r} - \vec{r}_1| = u, \quad d(u^2) = 2u du$$

$$= -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{u=\infty}^{u=|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{du}{u^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{u} \Big|_{\infty}^{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \Rightarrow W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$W > 0 \text{ für } Q_1 Q_2 > 0$$

$$W < 0 \text{ für } Q_1 Q_2 < 0$$

Bem.:  $W$  ist Potential (= potent. Energie) für das 2-Teilchen-System im Sinne der Mechanik:

$$\vec{K}_{12} = -\text{grad}_1 W \quad \vec{K}_{21} = -\text{grad}_2 W; \quad \text{grad}_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \quad i=1,2$$

( $W$  ist hierfür als Funktion von  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  aufzufassen)

Bei infinitesimalen Verschiebungen von  $Q_1$  und  $Q_2$  gilt:  

$$dW = \text{grad}_1 W d\vec{r}_1 + \text{grad}_2 W d\vec{r}_2 = -\vec{K}_{12} d\vec{r}_1 - \vec{K}_{21} d\vec{r}_2 = -\vec{K}_{21} (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$

$$= -\vec{K}_{21} d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Es war also nicht wesentlich, die Ladung  $Q_1$  zu fixieren.

### Energie einer bel. Ladungsverteilung:

- System von Punktladg.

$$W = \sum_{\substack{\text{alle Paare} \\ (i,j)}} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \sum' : \text{keine Summanden mit } i=j$$

[Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen (nacheinander) aus dem Unendlichen an ihre Positionen zu bringen.]

kontinuierliche Ladungsverteilung:  $Q_i \rightarrow \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$   
 $Q_j \rightarrow \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$   
 $\vec{r}_i - \vec{r}_j \rightarrow \vec{r} - \vec{r}'$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

Umformungen: mit  $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  folgt

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) U(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (2)$$

12.11.14

[Achtung: Bei Anwendung von (1) auf ein System von Punktladungen,  $\rho(\vec{r}) = \sum_i Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ , entsteht  $W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$ , also ein Ausdruck inklusive der unendlichen „Selbstenergie“-Terme  $i=j$ .]

Mit  $\text{div } \vec{D} = \rho$  folgt aus (2)  $W = \frac{1}{2} \int \text{div } \vec{D} U d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \text{div}(\vec{D} U) d^3\vec{r} - \frac{1}{2} \int \vec{D} \text{grad } U d^3\vec{r}$

$\int \text{div}(\vec{D} U) d^3\vec{r} = \oint \vec{D} U d\vec{f}$  Integral über Kugel mit Radius  $r \rightarrow \infty$

$$U \propto \frac{1}{r}, \vec{D} \propto \frac{1}{r^2}, d\vec{f} \propto r^2$$

$$\Rightarrow \int \text{div}(\vec{D} U) d^3\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \vec{D} d^3\vec{r} = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3\vec{r} \quad (3)$$

3 äquivalente Formeln:

- (1): wechselseitige pot. Energie der Ladungen
- (2): Energie als „pot. Energie der Ladungen in ihrem eigenen Feld“ (Selbstenergie d. Ladungsverteilung)
- (3): Energie als Feldenergie  
 $[\frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \text{ kann als Energiedichte interpretiert werden. vgl. später}]$

Bem.: 1) In den Formeln (1) und (2) kommen Beiträge nur dort, wo Ladgn. sitzen. Bei (3): Beiträge überall, wo ein Feld vorhanden ist.  
 2) Die Formel (3) wird sich als verallgemeinerungsfähig erweisen.  
 3) Formel (3) zeigt, dass immer  $W > 0$  ist [gilt nicht für Systeme mit Punktladg., wenn man die Selbstenergieterme vernachlässigt].



Beispiel: Energie einer homogenen Ladungsbugel  
 $\rho = \rho_0$  für  $r \leq R$ ,  $U = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$  für  $r \leq R$

$$\begin{aligned} \text{Formel (2)} \rightarrow W &= \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{\epsilon_0} \int (3R^2 - r^2) r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= \frac{4\pi \rho_0^2}{12\epsilon_0} \left( R^3 r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^R \, d^3\vec{r} \\ &= \frac{\pi \rho_0^2}{3\epsilon_0} \frac{4}{5} R^5 = \frac{4\pi \rho_0^2}{15\epsilon_0} R^5, \quad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ \Rightarrow W &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

Bem.: 1) Punktladung ( $Q$  endlich,  $R \rightarrow 0$ ):  $W \rightarrow \infty$

hingegen:  $\rho_0$  endlich,  $R \rightarrow 0$ :  $\frac{W}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow 0$  *Energie/Volumen*

2) Elektron:  $W \approx mc^2$

$$m \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad Q \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad [C = As]$$

$$4\pi\epsilon_0 c^2 = 10^7 \frac{\text{Am}}{\text{Vs}} \quad [V = \frac{\text{Nm}}{\text{As}}] \quad [W = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}]$$

$$\Rightarrow R \approx \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{mc^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad \text{"klass. Elektronenradius"}$$

Energie einer (Test-)Ladungsverteilung im äußeren Feld:

$$W = \int \rho(\vec{r}) U(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad \text{Punktladung im äußeren Feld: } W = qU$$

mögl. Herleitung: Ladungsverteilung  $\rho$  (Potential  $U_L$ ); Potential des äußeren Feldes  $U$  (erzeugt von Ladungsverteilung  $\rho_F$ )

$$\begin{aligned} \text{Gesamtenergie: } W_{\rho} &= \frac{1}{2} \int (\rho + \rho_F) (U_L + U) d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} \int \rho U_L d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho_F U d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int (\rho U_F + \rho_F U) d^3\vec{r} \\ &\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Selbstergie der} & \text{Energie des} & \text{Wechselwirkungs-} \\ \text{Ladungsverteilung} & \text{äußeren Feldes} & \text{energie} \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \int \rho U_L d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho_F U d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho U_F d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \rho_F U d^3\vec{r} \\ &\quad \begin{array}{l} W = 2 \cdot \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r} \\ \left( \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \rho_F U_L d^3\vec{r} \right. \\ \left. \text{quellensymmetrische Darstellung von } U \text{ und } U_L(\vec{r}) \right) \end{array} \end{aligned}$$

Für eine Ladungsverteilung mit geringer Ausdehnung [Ausdehnung klein gegenüber der char. Längenskala für Veränderung von  $U(\vec{r})$ ] ist eine Taylorentwicklung des Potentials sinnvoll:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{0}) + \text{grad } U|_{\vec{0}} \cdot \vec{r} + \dots \quad \vec{E} = -\text{grad } U$$

$$\Rightarrow W = U(\vec{0}) \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} - \vec{E}(\vec{0}) \cdot \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} + \dots$$

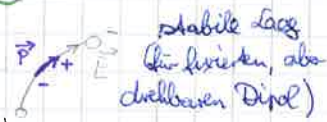
Also:  $W = QU - \vec{p} \cdot \vec{E} + \dots$  + ...: Terme mit höheren Multipolmomenten  
 [Koord.ursprung ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) innerhalb bzw. nahe der Ladungsverteilung]

Dipol:  $Q=0$ ; höhere Multipolmomente als Dipolmoment

- verschwinden (math. Dipol) [Bezugspunkt = Ort d. Dipols?]
- vernachlässigbar (phys. Dipol) [Bezugspunkt nahe Ladungsverteilung]

$\Rightarrow$  Energie eines Dipols im äußeren Feld:  $W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Minimum für  $\vec{p} \parallel \vec{E}$  (gleiche Richtung)



Kraft und Drehmoment:

$$\vec{K} = \int \vec{k} d^3\vec{r}, \quad \vec{M} = \int (\vec{r} \times \vec{k}) d^3\vec{r}$$

mit der Kraftdichte  $\vec{k} = \rho \vec{E}$

$E_{\text{ext}} W = \text{grad } U$   
 $E = \text{grad } U$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

$\vec{E}$  bei  $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$  in Taylorreihe entwickeln:

$$\vec{K} = Q\vec{E} + (\vec{p} \cdot \text{grad})\vec{E} + \dots$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \dots$$

Kraft auf Dipol:  $\vec{K} = (\vec{p} \cdot \text{grad})\vec{E}$   
 Drehmom. auf Dipol:  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

Bem.: Drehmoment abhängig von der Wahl des Bezugspunktes

• Homogenes Feld:  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$  exakt gültig für bel. Ladungsverteilung;  
 für  $Q=0$  ist  $\vec{p}$  und  $\vec{M}$  unabh. von der Wahl des Bezugspunktes ( $\vec{K} = Q\vec{E} = \vec{0}$ )

14.11.14

## 1.2 Felder und Ladungsverteilung bei Anwesenheit von Leitern (Elektrostatik von Leitern)

### 1.2.1 Grundlagen

- Feldgleichungen unverändert ( $\text{div } \vec{D} = \rho$ ,  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ )
- Im Inneren der Leiter gilt:  $\vec{E} = \vec{0}$ ,  $\vec{D} = \vec{0}$  (sonst würden Ströme fließen und wir hätten keine statische Situation!)

- Folgerungen:
- $\rho = 0$  im Leiter, Ladungen können sich nur auf der Oberfläche befinden (Idealisierung: Flächenladungsdichte  $\eta$ )
  - $\vec{E} = -\text{grad } U \Rightarrow U = \text{const.}$  im Leiter  $\Rightarrow$  Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche?  
 $\Rightarrow \vec{E} \perp$  zur Leiteroberfläche; Feldlinien enden (bzw. starten) auf der Oberfläche, d.h. dort, wo die Ladungen sitzen!

außen (Vakuum) gilt:  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$



$$\oint \vec{D} d\vec{f} = Q \quad d\vec{f} = \vec{n} df, \quad \vec{n}: \text{Normaleinheitsvektor, nach außen gerichtet}$$

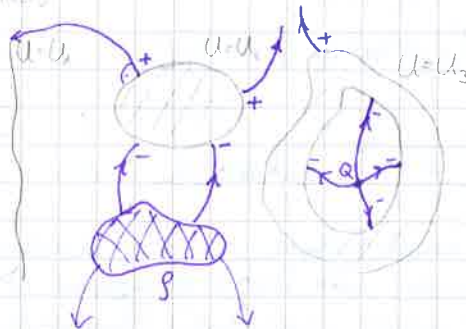
$$\vec{E} = -\text{grad } U \Rightarrow \vec{D} = -\epsilon_0 \text{grad } U$$

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n} = -\epsilon_0 (\text{grad } U \cdot \vec{n}) = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} \text{ "Normalable"}$$

Innen: kein Beitrag, Mantelfläche kein Beitrag ( $\vec{n} \perp \vec{D}$ )

Außen:  $\oint \vec{D} \cdot \vec{n} df = \int \eta df \Rightarrow D_n = \eta = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$

Struktur des Feldes:



im Vakuum:  $\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

in Leitern:  $U = U_i = \text{const.}$

### Grundaufgaben:

- Ges: Feld (Potential) Ges: Ladungsverteilung
- Ges: Raumladungen, Potentiale  $U_i$  der Leiter Ges: Feld + Oberflächenladungen



3) Geg: Raumladungen, Gesamtladungen  $Q_i$  der Leiter  
Geg.: Feld und Verteilung der Oberflächenladungen

### 1.2.2 Berechnung der Ladungsverteilung aus dem Feld

$U(\vec{r})$  gegeben  $\rightarrow \rho = -\epsilon_0 \Delta U, \quad \eta = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$

Beispiel: Außenfeld einer leitenden Kugel:  $U = \frac{A}{r}, \quad r \geq R$   
 $\rightarrow$  innen:  $U = \frac{A}{R} = \text{const.}$



$\Delta U = 0 \rightarrow \rho = 0; \quad \eta = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\epsilon_0 A}{R^2} = \text{const.}$

$\rightarrow$  Gesamtladung:  $Q = \oint \eta d\vec{r} = 4\pi R^2 \eta = 4\pi \epsilon_0 A$

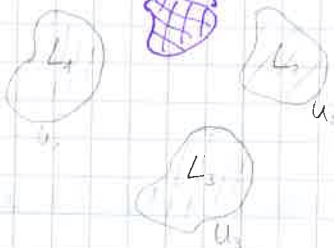
(also  $U = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$  wie Potential einer Punktladung)

### 1.2.3

vorgegeben: Raumladungen, Geometrie der Leiter + Potentiale  $U_i$ ; oder Gesamtladungen der Leiter

#### a) Potentiale vorgegeben

ges:  $U(\vec{r})$  mit  $\Delta U = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$  außerhalb der Leiter,  
 $U \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$   
 $U = U_i = \text{const.}$  auf Leitern  $L_i$



#### Algorithmus:

(1) Man löse  $\Delta \bar{U} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  durch  $\bar{U} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$   
 (erfüllt nicht die Bed.  $U = U_i$  auf den Oberflächen der  $L_i$ )

(2) Man suche eine Lösung  $V$  der Potentialgl. ( $\Delta V = 0$ ) mit den Randwerten  
 $V = V_i(\vec{r}) = U_i - \bar{U}(\vec{r})$  auf  $\partial L_i$   $\partial L_i$ : Rand (Oberfläche) von  $L_i$   
 $\Delta V = 0$  außerhalb der Leiter,  $V = 0$  für  $r \rightarrow \infty$

(3) Lösung:  $U = \bar{U} + V$  (außerhalb der Leiter)  $\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, U = U_i$  auf  $\partial L_i$   
 $\eta = \eta_i = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$  berechenbar

Schritt (2): Randwertaufgabe der Potentialtheorie (log. ex. und ist eindeutig)  
 - oft mit Tricks elegant lösbar

Struktur der Lösung:  $U(\vec{r}) = \sum_i U_i G_i(\vec{r}) + F(\vec{r})$  mit  $F(\vec{r}) = 0$  auf  $\partial L_i$ ;  
 $G_i(\vec{r}) = \delta_{ij}$  auf  $\partial L_j$

$F$ : Lösung des Problems für den Fall, dass alle Leiter geerdet sind.  $\Delta F = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, F = 0$  auf  $\partial L_i$

$G_i$ : Lösung von  $\Delta G_i = 0$  mit RB  $G_i(\vec{r}) = \delta_{ij}$  auf  $\partial L_j$

Die Funktionen  $G_i(\vec{r})$  hängen dabei nur von der Geometrie der Leiteranordnung ab („Greensche Funktionen“).

#### b) Gesamtladungen $Q_i$ der Leiter vorgegeben

ges:  $U(\vec{r})$  mit  $\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, U = 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ,  
 $Q_i = -\epsilon_0 \oint_{\partial L_i} \frac{\partial U}{\partial n} d\vec{r}$  vorgegeben,  $U = U_i = \text{const.}$  auf  $\partial L_i$  (aber  $U_i$  unbekannt)

### Algorithmus:

(1) Man gebe beliebige Werte  $U_i$  vor und löse die PWA gemäß (a), ohne auf die  $Q_i$  Rücksicht zu nehmen.

(2) Man bestimme die so entstehenden Werte  $Q_i$ :

$$Q_i = -\epsilon_0 \oint_{\partial L_i} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \sum_j U_j G_j(\vec{r}) + F(\vec{r}) \right] dP = \sum_j K_{ij} U_j + K_i;$$

$K_{ij}, K_i$ : Konstanten  
(Für  $\phi=0$  folgt  $F=0$  und somit  $K_i=0$ )

$K_{ij}$ : „Kapazitätskoeffizienten“

(3) Man löse dieses System nach den  $U_i$  auf und bestimme die  $U_i$  aus den vorgegebenen Werten  $Q_i$ .

Bem. Besonderheit bei einem „inneren Problem“:

Die innere Gesamtoberflächenladung  $Q_1$  des Leiters  $L_1$  muss gleich minus der gesamten im Hohlraum enthaltenen Ladung (Raumlading, Oberflächenladung von  $L_2$ ) sein.  
[folgt aus  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = Q$  mit  $\vec{D} = \vec{0}$  in  $L_1$ ]

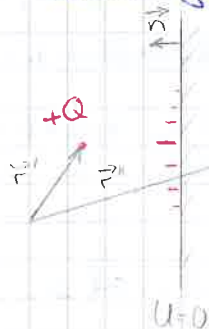


- Lösung wird eindeutig, wenn man  $U_1$  vorgibt

18.11.14

### 1.2.4 Beispiele

a) Punktladung vor leitender geerdeter Ebene



(Man kann den gesamten rechten Halbraum als leitend betrachten.)

(1) Lösung der Poissongl. ohne Rücksicht auf

$-Q$  Randwerte:

$$\bar{U} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(2) Lösung der Potentialgl.  $\Delta V = 0$  (im linken Halbraum) mit  $V = -\bar{U}(\vec{r})$  auf der Ebene.

Trick: Spiegelungsmethode: Setzen in den „Spiegelpunkt“ die „Spiegelladung“  $-Q$ .

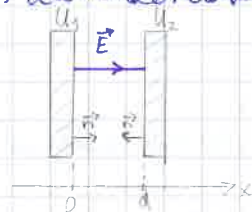
$$V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}''|} \quad \Delta V = 0 \text{ im linken Halbraum!}$$

Auf der Ebene gilt  $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}''|$ , also  $V = -\bar{U}$

$\Rightarrow$  Lösung  $U = \bar{U} + V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right)$  im linken Halbraum  
(rechter Halbr.:  $U=0$ )

$$\eta = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}, \quad \int \eta d\vec{f} = -Q \quad \text{„Influenz“}$$

b) Plattenkondensator



Potentiale  $U_1, U_2$  vorgegeben, keine Raumladungen  
(Sei  $U_1 > U_2$  Wir fragen nur nach dem Potential zwischen den Platten.)



Realisierung: eindimensionales Problem

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \frac{d^2 U}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow U = Ax + B, \quad U(0) = U_1, \quad U(d) = U_2 \rightarrow B = U_1$$

$$Ad + U_1 = U_2 \Rightarrow A = \frac{U_2 - U_1}{d}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{U_2 - U_1}{d} x + U_1 = \underbrace{U_1 \left(1 - \frac{x}{d}\right)}_{G_1} + \underbrace{U_2 \frac{x}{d}}_{G_2}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } U = -\frac{U_2 - U_1}{d} \vec{e}_x$$

$$\eta_1 = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{U_2 - U_1}{d} = -\eta_2$$

$$\Rightarrow Q_1 = \eta_1, \quad F = -Q_2 = Q, \quad F: \text{Plattenfläche}$$

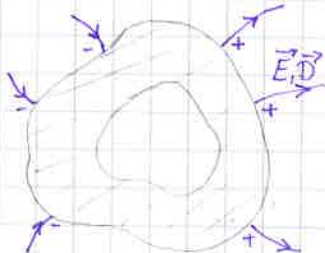
Kapazität:  $C = \frac{Q}{U_1 - U_2} = \epsilon_0 \frac{F}{d}$   $\frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}}$   $C = \frac{Q}{U} \quad U = U_1 - U_2$

[vgl.:  $Q_i = \sum_j K_{ij} U_j$  hier  $K_{11} = K_{22} = C, \quad K_{12} = K_{21} = -C$ ]

Vorgabe der Ladungen:  $Q_1 = -Q_2 \Rightarrow$  Potentiale nicht eindeutig bestimmt, aber Differenz  $U_1 - U_2$  (Spannung) und natürlich das el. Feld

(vgl. Bem. im Kap. 1.2.3 zu „inneren Problemen“)

c) Hohlraum in einem Leiter



(1) Innen keine Raumladungen

$\Rightarrow \Delta U = 0$  innen,  $U = \text{const.}$  im Leiter

$\Rightarrow U = \text{const.}$  im inneren Hohlraum

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \eta = 0$  auf innerer Oberfläche

(Abschirmwirkung nach innen!)

(2) Ladungen im Inneren, außen keine Ladungen, Leiter geerdet



$\Delta U = 0$  außen,  $U = 0$  auf Oberfläche,  $U = 0$  im Unendlichen

$\Rightarrow U \equiv 0$  außen  $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \eta = 0$  auf äußerer Oberfläche

(Abschirmwirkung eines geerdeten Leiters nach außen!)

### 1.2.5 Kräfte und Energie

Die Formeln aus Kap. 1.1.5 behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Oberflächenladungen auf den Leitern mit berücksichtigt, die ja auch zum Potential beitragen:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \int_{\mathcal{A}_i} \frac{\eta(\vec{r}') d\vec{f}_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bem.: Diese Formel (Darstellung des Potentials) gilt außerhalb und innerhalb des Leiters?

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \sum_i \int_{\partial L_i} \eta U df_i$$

Mit  $U = U_i = \text{const. auf } \partial L_i$  folgt:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i \quad \left( \int_{\partial L_i} \eta df_i = Q_i \right)$$

System von Leitern ohne Raumladungen:

$$Q_i = \sum_j K_{ij} U_j \quad (\text{vgl. Kap. 1.2.3}) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{ij} U_i U_j$$

- $K_{ij}$ : Kapazitätskoeffizienten, hängen nur von Geometrie der Leiteranordnung ab
- $K_{ii}$ : "Kapazität" des  $i$ -ten Leiters ( $Q_i = K_{ii} U_i$  falls  $U_j = 0$  für  $j \neq i$ )  
nicht summieren

Beispiel: Plattenkondensator

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) \quad U = U_1 - U_2 \text{ Spannung, Kapazität } C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon F}{d}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Kraft zwischen den Platten:

a) "isolierter" Kondensator ( $Q = \text{const.}$ )

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 F} \Rightarrow \delta W = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 F} \delta d$$

$\Rightarrow$  Die Platten ziehen sich mit einer Kraft vom Betrag

$$K = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 F} \text{ an.}$$

b) Spannung  $U = \text{const.}$

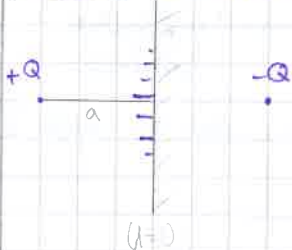
Die Kraft muss offensichtlich dieselbe sein.

$$\text{Aber: } W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{U^2 \epsilon_0 F}{2d} \Rightarrow \delta W = - \frac{U^2 \epsilon_0 F}{2d^2} \delta d$$

$$= - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 F} \text{ falsches Vorzeichen?}$$

Aufklärung s. Übung!

Beispiel: Punktladung vor leitender Ebene



$$W = \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \sum_i Q_i U_i$$

$$\rho = Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

erfüllt, da  $U=0$  auf Leiter

$$\rho U = \rho (U_{+Q} + U_{-Q}); \quad U_{-Q} = U_{+Q} \text{ im link. Halbr.}$$

$\Rightarrow$  unvoll. Selbstenergie der Punktladg.  
Kontinuitätsweg  
 [Bem:  $U_{+Q} + U_{-Q} = 0$ ]

$$\Rightarrow W^* = W - \text{Selbstenergie von } Q_+$$

$$W^* = \frac{1}{2} \frac{Q(-Q)}{4\pi \epsilon_0 2a} = - \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0 a}$$