

Elektrodynamik

Vorlesungs-Skriptum

Andreas Wipf

Theoretisch-Physikalisches-Institut

Friedrich-Schiller-Universität Jena

3. Auflage, WS 2006/2007

1. Auflage SS 2000

©2007 Andreas Wipf, Universität Jena

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet. Kommerzielle
Verwertung ist nicht gestattet.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen (wipf@tpi.uni-jena.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Die Ursprünge der Elektrodynamik	1
1.1	Literaturhinweise	1
1.2	Geschichtliches	2
1.3	Einleitung	5
2	Einführung in die Elektrostatik	8
2.1	Das Coulombsche Gesetz und Maßsysteme	9
2.1.1	Messung und Einheit der Ladung	9
2.2	Das elektrische Feld	13
2.3	Feldgleichungen der Elektrostatik	20
2.3.1	Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung	22
2.4	Energie des elektrostatischen Feldes	24
2.4.1	Probleme mit der Selbstenergie	26
3	Randwertprobleme der Elektrostatik	28
3.1	Ideale Leiter im elektrischen Feld	28
3.1.1	Randbedingungen für Metalle	30
3.1.2	Eindeutigkeit der Lösung	32
3.2	Die Methode der Spiegelladungen	32
3.2.1	Punktladung in der Nähe einer ebenen Metallplatte	33
3.2.2	Punktladung in der Nähe einer leitenden Kugel	34
3.2.3	Leitende Kugel im homogenen Feld	37
3.3	Die Methode der Greenschen Funktionen	39
3.3.1	Dirichlet-Problem	40
3.3.2	Neumann-Problem	41
3.4	Kapazitäten	42
3.4.1	Kugelkondensator	43

4	Multipole und spezielle Funktionen	46
4.1	Dipole und Quadrupole	47
4.2	Energie und Drehmoment von Multipolen	49
4.3	Differentialoperatoren und spezielle Funktionen	50
4.3.1	Differentialoperatoren in rechtwinkligen Koordinaten	51
4.4	Legendre-Polynome und Kugelfunktionen	52
4.4.1	Potenzreihen und erzeugende Funktionen	60
4.4.2	Punktladung in einem geerdeten „Faradaykäfig“	63
4.4.3	Zylindersymmetrische Probleme	63
4.5	Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	66
4.6	Vollständige Funktionensysteme	67
5	Elektrisches Feld in Materie	70
5.1	Polarisation und dielektrische Verschiebung	70
5.2	Grenzflächen zwischen Dielektrika	78
5.2.1	Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld	80
5.3	Clausius-Mosottische Formel	83
5.4	Feldenergie im Dielektrikum	85
6	Magnetostatik	87
6.1	Strom und Stromdichte	87
6.1.1	Stromerhaltung	89
6.2	Das magnetische Feld und das Biot-Savart-Gesetz	89
6.3	Die Grundgleichungen der Magnetostatik	95
6.3.1	Integrale Form der Grundgleichungen	96
6.3.2	Das Magnetostatische Potential	97
6.3.3	Das magnetische Feld einer unendlich langen Spule	98
6.4	Selbstinduktion	99
6.5	Multipolentwicklung	101
6.5.1	Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im Magnetfeld	104
6.6	Magnetismus in Materie	105
6.6.1	Makroskopische Grundgleichungen	105
6.6.2	Grenzflächen	110
6.6.3	Kugel im homogenen Magnetfeld	111
7	Maxwellgleichungen	113
7.1	Induktionsgesetz	113
7.2	Der Maxwellsche Verschiebungsstrom	117
7.3	Die Maxwell-Gleichungen	118

7.3.1	Integralform der Maxwellgleichungen	120
7.3.2	Elektromagnetische Potentiale	122
7.3.3	Eichtransformationen	123
7.3.4	Maxwellgleichungen im Vakuum	124
8	Ausbreitung von Wellen	126
8.1	Ebene Wellen	127
8.1.1	Monochromatische ebene Wellen	130
8.2	Kugelwellen	134
8.3	Besselwellen	135
8.4	TE- und TM-Wellen	137
8.5	Überlagerung von ebenen Wellen	138
8.6	Anhang: Fourier-Reihen und Integrale	139
9	Wellen in Medien	143
9.1	Wellen in homogenen Leitern	143
9.1.1	Transversal-Schwingungen und Skin-Effekt	143
9.1.2	Anwendung: Der Skineffekt im zylindrischen Leiter	146
9.1.3	Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen	147
9.2	Dispersion in Isolatoren	151
9.3	Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen	155
10	Relativistische Form der Elektrodynamik	158
10.1	Poincare Transformationen	158
10.2	Ströme, Potentiale und Feldstärke	162
10.3	Relativistische Feldgleichungen	165
10.3.1	Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung	168
10.4	Erhaltungssätze	169
11	Erzeugung und Abstrahlung von Wellen	174
11.1	Inhomogene Wellengleichung	174
11.2	Strahlungsfeld in der Fernzone	180
11.3	Multipolentwicklung	182
11.3.1	Abgestrahlte Leistung	185
11.4	Lienard-Wiechert-Potentiale	188
11.5	Der Hertzsche Dipol	195
11.6	Abstrahlung von bewegten Ladungen	196

Kapitel 1

Die Ursprünge der Elektrodynamik

1.1 Literaturhinweise

Folgende Bücher können empfohlen werden:

- R. BECKER UND F. SAUTER, *Theorie der Elektrizität 1 und 2*, Teubner, Stuttgart 1973
- J.D. JACKSON, *Klassische Elektrodynamik*, 4. Auflage, de Gruyter, Berlin 2006
- H. RÖMER UND M. FORGER, *Elementare Feldtheorie: Elektrodynamik, Hydrodynamik, spezielle Relativitätstheorie*, VHC, Weinheim, New York, 1993.
- H. MITTER, *Elektrodynamik*, 2. Auflage, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990
- F. SCHECK, *Theoretische Physik 3. Klassische Feldtheorie*, Springer, Berlin 2005.
- L.D. LANDAU UND E.M. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie*, 11. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1989
- A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band 3, Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Thun 1977
- R.P. FEYNMAN, R.B. LEIGHTON UND M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. I-III*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading 1971
- W. NOLTING, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 3, Elektrodynamik*, Vieweg & Son, Braunschweig 1997
- T. FLIESSBACH, *Elektrodynamik, 4. Auflage*, Spektrum Akademischer Verlag, 2005
- G. LEHNER, *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*, Springer Verlag, Berlin, 1996.
- P. REINEKER, M. SCHULZ UND B.M. SCHULZ, *Theoretische Physik II, Elektrodynamik*, Wiley-VCH, 2006

Skripten: Auch im Internet finden Sie empfehlenswerte Skripten. Gute Anlaufpunkte sind die Seiten von Wagner oder Lars Bähren:

<http://www.physik.tu-muenchen.de/~rwagner/physik/skripten.html>

<http://cips02.physik.uni-bonn.de/baehren/>.

Ich finde zum Beispiel das Skript H. Roemer und M. Forger von der Uni Freiburg, siehe <http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/405/>, nützlich. Auch das Skript des Kollegen G. Welsch ist empfehlenswert. Aber Skripten können keine Lehrbücher ersetzen.

1.2 Geschichtliches

Elektrizität und Magnetismus rühren von den griechischen Wörtern Bernstein ($\eta\lambda\epsilon\kappa\tau\rho\nu$) und Magneteisenstein ($\eta\lambda\iota\theta\omicron\varsigma\ \text{Μαγνητις}$) her. PETRUS PEREGRINUS hat bereits 1269 Untersuchungen zu den magnetischen Eigenschaften ausgeführt. Er hat die Kräfte an der Oberfläche eines in Kugelform geschliffenen Magneten mit Hilfe einer kleinen Nadel zu messen versucht. Dazu hat er Punkt für Punkt die Einstellrichtung der Nadel bestimmt und aufgezeichnet. Nach heutiger Sprechart hat er die magnetischen Feldlinien ausgemessen. Er fand, daß die Feldlinien ähnlich wie die Meridiane der Kugel verlaufen und sich an zwei gegenüberliegenden Polen treffen. PEREGRINUS Arbeiten wurden kaum beachtet und erst drei Jahrhunderte später von GILBERT (1544-1603) fortgesetzt. GILBERT hat die Theorie des Kompasses entwickelt, den Charakter der Kraftwirkung zwischen Magnetpolen erkannt und festgestellt, daß durch das Zerbrechen einer Kompassnadel beide Pole nicht voneinander zu trennen sind. Jedes Bruchstück wurde wieder eine Magnetnadel mit zwei Polen. Er hat auch elektrische Erscheinungen untersucht und dabei gefunden, daß neben Bernstein auch Stoffe wie Glas, Wachs, Schwefel und einige Edelsteine durch Reibung elektrisiert werden können. Er hat einen wesentlichen Charakterunterschied der magnetischen und elektrischen Kräfte herausgestellt: *Magneten rufen eine Drehwirkung hervor, während die elektrische Kraft sich als Anziehungskraft äußert.*

In der folgenden Zeit wandten sich die Naturwissenschaftler der klassischen Mechanik zu, bei der großartige Fortschritte erzielt wurden. Aus dieser einseitigen Orientierung resultierte ein geringes Interesse an der Elektrizität und dem Magnetismus. Selbst die Reibungselektrisiermaschine von VON GUERICKE (1602-1686) geriet zwei Generationen nahezu in Vergessenheit.

In der ersten Hälfte des 18. Jahrhundert, besonders nach der Erfindung der *Leidener Flasche*, hat das Interesse an der Elektrizität merklich zugenommen. Zuerst beschränkten sich die Wissenschaftler im wesentlichen auf qualitative Untersuchungen zur Elektrostatik. GRAY (1666-1736) gelang es, den elektrischen Zustand einige hundert Meter weit zu leiten. DUFAY (1698-1739) hat zum erstenmal zwei Sorten von Elektrizität, die Glaselektrizität (positive Ladung) und die Harzelektrizität (negative Ladung), unterschieden. Die Erfindung der Leidener Flasche¹ durch VON KLEIST (1700-1748) und etwas später VAN MUSSCHENBROEK (1692-1761) hat den Versuchen zur Elektrizität neuen Auftrieb gegeben. Als erfolgreichster Forscher dieser Epoche muß FRANKLIN (1706-1790) angesehen

¹Eine Leidener Flasche ist ein zylindrischer Kondensator aus Glas.

werden. Er zeigte, daß die atmosphärische Elektrizität ebenso in der Lage ist, die Leidener Flasche aufzuladen, wie die Reibungselektrizität. Er hat mit Hilfe einer Metallspitze auf einen Körper Ladung gebracht und sie wieder entnommen. FRANKLIN glaubte bereits, daß es nur eine Art von Ladung gibt. AEPIUS (1724-1802) versuchte die bekannten elektrischen Erscheinungen durch die Annahme zu erklären, daß sich die der Elektrizität entblößten Stoffteilchen genauso abstoßen wie die Stoffteilchen, die Elektrizität tragen.

Im letzten Quartal des 18. Jahrhundert war die Zeit zur Aufstellung quantitativer Gesetzmäßigkeiten herangereift. Mit NEWTON hat man die Existenz von *Fernwirkungskräften* zwischen geladenen Körpern vorausgesetzt und nach deren Gesetzmäßigkeiten gesucht. Zu dem gesuchten Gesetz sind PRIESTLEY (1733-1804), CAVENDISH (1731-1810), ROBISON (1739-1805) und COULOMB (1736-1806) unabhängig voneinander gelangt. PRIESTLEY hat bereits in seinem 1767 erschienenen Buch das Gesetz genau formuliert und begründet. Die Arbeiten von GALVANI (1737-1798) benutzend gelang es VOLTA (1745-1827) zur Jahrhundertwende Elektrizität chemisch zu erzeugen. Vor seiner Entdeckung kannten die Wissenschaftler im Grunde nur eine Möglichkeit zur Herstellung von Elektrizität: Sie mußten Bernstein, Glas oder Metall reiben. Die Metallscheibenapparate² von VOLTA waren leicht herzustellen. Deshalb wurden mit diesen *Batterien* schon bald in ganz Europa elektrische Experimente angestellt. OHM (1789-1854) hat in zwei Abhandlungen aus den Jahren 1826 und 1827 den linearen Zusammenhang zwischen Stromstärke und „eingepprägter Kraft“ oder elektromotorischer Kraft hergestellt. Das einfache *Ohmsche Gesetz* wurde von KIRCHHOFF (1824-1887) auf kompliziertere Netzwerke erweitert.

Nach VOLTAs Entdeckung konnten die Experimentatoren konstante Ströme mit ausreichender Stärke erzeugen um Leiter zum Glühen zu bringen und elektrochemische Versuche auszuführen. Trotzdem bemerkte erst 1820 OERSTED (1777-1851), daß ein elektrischer Strom eine Kompassnadel ablenkt. Noch im selben Jahr gaben BIOT (1774-1862) und SAVART (1791-1841) eine quantitative Beschreibung für die magnetische Wirkung, die von einem durch einen Leiter fließenden Strom in einem beliebigen Raumpunkt erzeugt wird. LAPLACE (1749-1827) hat sie bei der genauen Formulierung des Gesetzes unterstützt. Ebenfalls noch im Jahr 1820 hat AMPERE (1775-1836) die Wechselwirkung von Strömen experimentell untersucht. Auf ihn geht auch eine mikroskopische Deutung der magnetischen Eigenschaften der Stoffe zurück.

FARADAY³ (1791-1867), nicht zu Unrecht als bedeutendster Experimentalphysiker angesehen, las von OERSTEDs Experiment und stellte sich die scheinbar einfache Frage: Wenn elektrischer Strom Magnetismus erzeugen kann, ist es dann vielleicht nicht umgekehrt genauso? Kann ein Magnet vielleicht elektrischen Strom erzeugen? 1831 zeigte er,

²Scheiben aus Kupfer und Zinn, getrennt durch Pappscheiben, zu einem hohen Stapel übereinandergelegt und in einer Glasröhre mit Salzwasser übergossen.

³Er wurde am 22.9.1791 in Newington Butts in Surrey, am Rande von London, als Sohn eines Hufschmieds geboren.

daß ein bewegter Magnet in einem Draht elektrischen Strom erzeugen kann. Er hat für diese *Induktion* auch eine quantitative Formulierung angegeben, die durch die Verwendung des *Kraftlinienbegriffs* anschaulich wurde. FARADAY hat angenommen, daß sich in der Umgebung von stromdurchflossenen Leitern ein magnetisches Feld mit entsprechenden Kraftlinien herausbildet. Diese Vorstellung bedeutete eine Loslösung von der damals gängigen Fernwirkungstheorien. Das Induktionsgesetz liefert die theoretischen Grundlagen für das Funktionieren von Generatoren, Transformatoren und anderer Maschinen.

Im Gegensatz zu den meisten führenden Physikern seiner Zeit machte sich MAXWELL (1831-1879) das Kraftlinienbild von FARADAY zu eigen. Er wollte dessen Ideen in eine mathematische Form kleiden. Auf diese Weise gelang es ihm, einen engen Zusammenhang zwischen der räumlichen Änderung des Magnetfeldes und dem elektrischen Strom herzustellen. Der wesentliche Schritt vorwärts im Vergleich zu den Gesetzen von OERSTED, AMPERE und FARADAY ist in der folgenden Figur gezeigt.

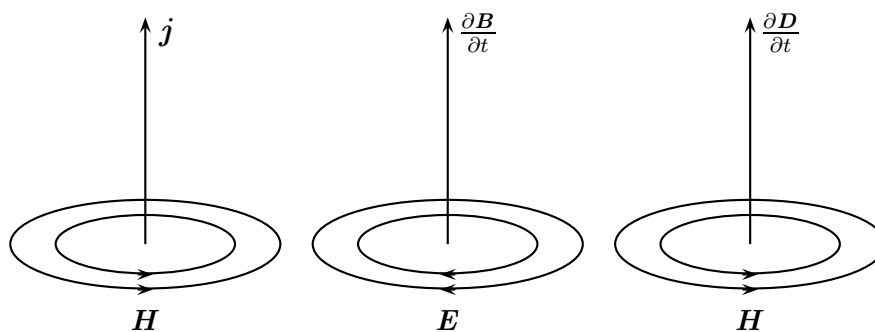


Abbildung 1.1: Faradays Induktion und Maxwells Verschiebungsstrom.

- Ein elektrischer Strom erzeugt ein Magnetfeld.
- Jede zeitliche Änderung des Magnetfeldes erzeugt ein elektrisches Feld (Induktion).
- Jedes sich zeitlich ändernde elektrische Feld (Verschiebung) erzeugt ein Magnetfeld.

Die letzten beiden Aussagen bedeuten, daß sich elektrische und magnetische Felder wechselseitig hervorbringen können. Ein elektrisches Feld entsteht, wo ein magnetisches Feld sich zeitlich ändert, und ein Magnetfeld wird erzeugt, wo ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld vorhanden ist. Aus diesem Wechselspiel ergeben sich gerade die elektromagnetischen Wellen. In der 1873 erschienenen Treatise ist diese Wellentheorie, die eine Vereinheitlichung von Optik und Elektrodynamik erlaubte, enthalten. Die Treatise enthält das gesamte Maxwellsche Gleichungssystem, die Grundgleichungen dieser Vorlesung. Ich möchte hier MAXWELL zitieren:

- „FARADAY sah im Geiste die den ganzen Raum durchdringenden Kraftlinien, wo die Mathematiker⁴ Anziehungszentren von Fernkräften sahen; FARADAY sah ein Zwischenmittel, wo sie nichts als Abstände sahen; FARADAY suchte nach dem Sitz der Erscheinungen, die in diesem Mittel wirklich vorgingen, jene begnügten sich, das Potenzgesetz der Kräfte zu finden, die auf die elektrischen Flüssigkeiten wirkten. Als ich die Faradayschen Ideen, wie ich sie verstand, in eine mathematische Form übersetzte, fand ich, daß beide Methoden im allgemeinen zu denselben Resultaten führten, daß aber manche von den Mathematikern entdeckten Methoden viel besser in Faradayscher Weise ausgedrückt werden können.“

Als MAXWELL 1879 im Alter von nur achtundvierzig Jahren starb, gab es noch keine Instrumente, um die elektromagnetischen Wellen aufzufangen. Dies gelang 1885 HERTZ (1857-1894). Er arbeitete mit zwei einige Meter voneinander entfernt liegenden Leitungen, wobei jede Leitung durch einen kleinen Zwischenraum unterbrochen war. Als HERTZ durch die eine Leitung einen starken Stromstoß jagte, flog ein Funke von der einen Leitungshälfte zur anderen. Im selben Moment konnte HERTZ in der zweiten Leitung einen Funken beobachten. Er hatte die Radiowellen entdeckt. Er wies die Wesensgleichheit der elektromagnetischen Wellen mit den Lichtwellen nach und hatte so gezeigt, daß die Maxwellsche Theorie richtig ist. Sein Buch „Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper“ hat der Maxwellschen Theorie auf dem europäischen Kontinent zum Durchbruch verholfen.

Ich habe hier einige wichtige Beiträge von FARADAY, MAXWELL, HERTZ u.a. zum Verständnis der elektromagnetischen Erscheinungen skizziert. Wichtige Beiträge dieser herausragenden Forscher zu anderen Gebieten der Physik blieben dabei unerwähnt.

1.3 Einleitung

In der klassischen Mechanik stehen die Bahnkurven $\mathbf{r}(t)$ von Punktteilchen und ihre Bewegungsgleichungen im Vordergrund. In der Elektrodynamik (ED) sind Felder die grundlegenden Größen. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ werden durch die Kraft \mathbf{F} definiert, die sie auf ein geladenes Punktteilchen⁵ der elektrischen Ladung q ausüben:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) + q\frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}(t, \mathbf{r}).$$

⁴Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Wilhelm Weber (1804-1891), Georg Riemann (1826-1866), Franz Neumann (1798-1895) der das elektrische Potential A einführte und sein Sohn Carl Neumann (1832-1925).

⁵Nach dem heutigen Kenntnisstand können in der klassischen Physik Elektronen als Punktteilchen behandelt werden.

Hier sind \mathbf{r} und \mathbf{v} der Ort und die Geschwindigkeit der Punktladung und

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

ist die *Lichtgeschwindigkeit*. Wir haben das Gaußsche Maßsystem verwandt⁶.

Zu einer beliebigen Zeit erfüllen die elektromagnetischen Felder die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.1)$$

Die Ladungsdichte $\rho(t, \mathbf{r})$ ist die Quelle für das elektrische Feld. Die Bewegungsgleichungen für die Felder,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.2)$$

bestimmen deren zeitliche Änderung. Hier ist $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ die elektrische Stromdichte. Die Grundgleichungen (1.1) und (1.2) sind die im Zentrum dieser Vorlesung stehenden *Maxwellgleichungen*. Es sind partielle Differentialgleichungen, die das raumzeitliche Verhalten des elektromagnetischen Feldes (\mathbf{E}, \mathbf{B}) bestimmen.

Diese Gleichungen sind nicht ableitbar. Deshalb möchte ich in dieser Vorlesung induktiv vorgehen. Wir werden sehen, daß die Phänomene der Elektrostatik und Magnetostatik durch die Maxwellgleichungen für zeitunabhängige Felder,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \wedge \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

richtig beschrieben werden. Im statischen Grenzfall zerfallen die Maxwellgleichungen in zwei unabhängige Gleichungspaare. Die ersten beiden Gleichungen sind die Feldgleichungen der *Elektrostatik*, die letzten beiden diejenigen der *Magnetostatik*.

Gegen Ende dieser Vorlesung werden wir sehen, daß \mathbf{E} und \mathbf{B} die Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ sind. Daraus ergibt sich, daß das elektrische und das magnetische Feld ineinander transformieren, wenn wir unser Bezugssystem wechseln. Die Aufspaltung des elektromagnetischen Feldes in den elektrischen und den magnetischen Anteil ist vom Beobachter abhängig, der diese Aufspaltung vornimmt.

Nach den statischen Situationen werden wir *zeitabhängige Prozesse* studieren. Für zeitabhängige Felder sind \mathbf{E} und \mathbf{B} gekoppelt. Dies wird uns auf das Faradaysche Induktionsgesetz und den Maxwellschen Verschiebungsstrom führen. Am Ende des entsprechenden Abschnitts werden wir bei den *Maxwellschen Gleichungen* angelangt sein. Da-

⁶Im nächsten Kapitel werden wir die Maßsysteme besprechen.

nach werden wir zuerst die grundlegenden Eigenschaften der Lösungen untersuchen. Hier werden wir die Energie und den Impuls des elektromagnetischen Feldes einführen und studieren und die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen für lokalisierte Ladungs- und Stromdichten konstruieren. Im folgenden Teil werden spezielle, aber wichtige Lösungen der Feldgleichungen behandelt. Dies sind die *elektromagnetischen Wellenlösungen*. Je nach Wellenlänge sprechen wir von Gamma-Strahlung, Röntgenstrahlung, ultraviolettem, sichtbarem oder infrarotem Licht, Mikrowellen oder Radiowellen. Wir werden die aus der Optik wohlbekannten Wellenphänomene wie Streuung und Beugung von elektromagnetischen Wellen behandeln. Danach werden wir die Dipolstrahlung und etwas allgemeiner die Abstrahlung von beschleunigten Ladungen⁷ untersuchen.

Ein wichtiger Bestandteil dieser Vorlesung wird die Elektrodynamik in Medien sein. Durch geeignete Mittelungen über mikroskopische Freiheitsgrade werden wir die makroskopischen Maxwellgleichungen aus den mikroskopischen ableiten. Hier werden die dielektrische Funktion und die Permeabilitätskonstante auftreten.

Gegen Ende des Semesters werden wir die Invarianzeigenschaften der Maxwellgleichungen untersuchen. Dies führt uns auf die *Lorentztransformationen* und das Transformationsverhalten des elektromagnetischen Feldes beim Übergang in ein anderes Inertialsystem. Wir werden die kovarianten Maxwellgleichungen aufstellen, die an Eleganz kaum noch zu überbieten sind.

Die klassische Elektrodynamik und die Quantenelektrodynamik gehören zu den erfolgreichsten physikalischen Theorien, die wir kennen. Die der modernen Teilchenphysik zugrundeliegenden Feldtheorien, die sogenannten nicht-Abelschen Eichtheorien, sind natürliche Verallgemeinerungen der Theorie des Elektromagnetismus.

⁷und die damit zusammenhängenden Probleme.

Kapitel 2

Einführung in die Elektrostatik

Eine altbewährte Methode zur Erzeugung elektrischer Ladungen ist z.B. das Reiben eines Körpers aus Glas mit einem Seidentuch. Ein so geriebener Körper zieht ein Kügelchen aus Holundermark an, was vor dem Reiben nicht der Fall war. Diese Erscheinung erklären wir folgendermassen: Die Atome, aus denen die Elemente aufgebaut sind, bestehen aus einem kleinen Atomkern¹, der positive elektrische Ladung trägt, und einer um den Kern herum angeordneten Hülle aus negativ geladenen Elektronen. Positive und negative Ladung von Kern bzw. Hülle sind normalerweise² gleich groß, so daß Atome insgesamt keine Ladung tragen. Bei manchen Substanzen lassen sich Elektronen der Hülle relativ leicht entfernen. Das geschieht zum Beispiel durch Reiben des Glases mit Seide. Dabei gehen Elektronen vom Glas auf die Seide über, so daß nach dem Reiben das Glas positiv, das Seidentuch aber negativ geladen ist. Reibt man dagegen einen Gummistab mit Katzenfell, so gehen Elektronen vom Fell zum Stab über. Durch Streichen des Glas- und Gummistabes aneinander kann man für einen Ausgleich der Ladungen zwischen beiden Stäben sorgen.

Wir haben hier schon von einem fundamentalen Naturgesetz Gebrauch gemacht, nämlich vom *Erhaltungssatz für die elektrische Ladung*. Nach diesem Gesetz ist die Summe aller elektrischen Ladungen zeitlich konstant. Man kann elektrische Ladungen nicht erzeugen. Erzeugt man durch Ladungstrennung und Ladungstransport eine positive Ladung an einem Ort, dann entsteht eine negative Ladung an einem anderen Ort. Wir sehen die Existenz elektrischer Ladungen als gegebene Tatsache an. Die beobachteten Anziehungs-, Abstoßungs- und Wärmewirkungen sind die Folgen der Wechselwirkungen zwischen Ladungen.

¹Der Durchmesser des Atomkerns beträgt etwa 10^{-13} cm.

²Für Ionen fehlen einige Elektronen in der Hülle.

2.1 Das Coulombsche Gesetz und Maßsysteme

Zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte, die vom Ladungszustand abhängen. Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ziehen sich an, Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab. Für zwei kugelförmige Körper, deren Durchmesser viel kleiner als ihr Abstand ist, ist das Kraftgesetz besonders einfach. Diese Kraft kann man zum Beispiel auf eine Art messen, die in Abb. 2.1 dargestellt ist: Aus den Ablenkungen im Gleichgewicht φ_1

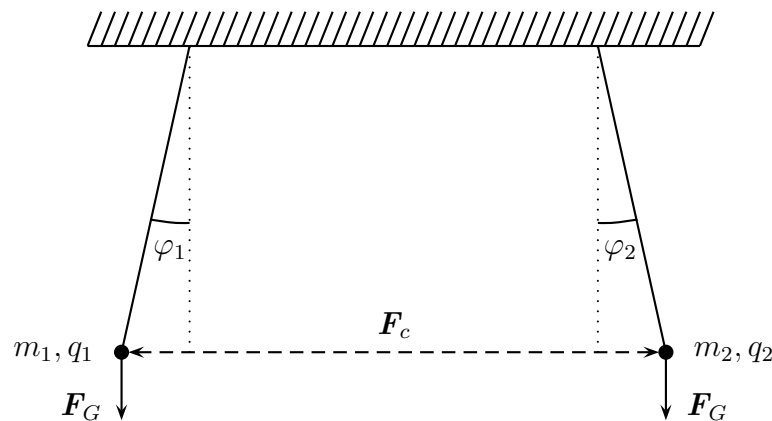


Abbildung 2.1: Eine Methode zur Bestimmung der Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen.

und φ_2 und den Massen der die elektrischen Ladungen tragenden Kügelchen kann man die wirkende Kraft \mathbf{F}_C berechnen³. Die Experimente zeigen, daß die Kraft proportional zu den elektrischen Ladungen q_i und invers proportional zum Quadrat des Abstands $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ der beiden Ladungen ist. Diese *Coulombkraft* wirkt in Richtung der Verbindungsline der beiden Ladungen. Damit ergibt sich das folgende Kraftgesetz für zwei Punktladungen

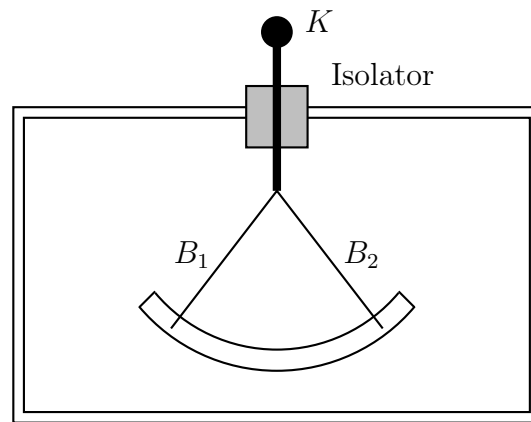
$$\mathbf{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (2.1)$$

Die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums ϵ_0 bestimmt die Stärke der Wechselwirkung; ihr numerischer Wert hängt von der gewählten Maßeinheit für die Ladungen q_1 und q_2 ab.

2.1.1 Messung und Einheit der Ladung

Die Ladung kann man zum Beispiel mit dem sogenannten *Blättchenelektroskop*, dargestellt in Abb. 2.2, messen. Die beiden dünnen Aluminium- oder Goldfolienblättchen B_1 und B_2

³Die elektrische Kraft hält der von der Gravitation herrührenden Rückstellkraft $m_i g \sin \varphi_i$ das Gleichgewicht.

Abbildung 2.2: *Blättchen Elektroskop.*

sind mit dem metallischen Kopf K leitend verbunden, aber gegen das Gehäuse isoliert. Bringt man elektrische Ladung auf K , so verteilt sie sich auf die beiden Blättchen. Diese stoßen sich gegenseitig ab und spreizen auseinander. Die Abstoßung wird umso größer, je größer die auf K aufgebrachte Ladung ist. Nach einer Eichung der Skala kann man über den Ausschlag der Blättchen die Größe der Ladung messen.

Für die Coulombkräfte gilt das *Superpositionsprinzip*: die resultierende Kraft, die mehrere Ladungen auf eine Ladung ausüben, ergibt sich als Summe der Coulombkräfte zwischen dieser Ladung mit den anderen Ladungen. Wie wir schon erwähnt hatten, gilt für die Ladungen der *Erhaltungssatz*: Die Summe der Ladungen eines abgeschlossenen Systems ist erhalten. Des weiteren treten in der Natur nur quantisierte Ladungen auf. Die Ladung des Protons wird mit $q = e$ und diejenige des Elektrons mit $q = -e$ bezeichnet. Die Ladungen aller Elementarteilchen⁴ sind quantisiert. Allerdings spielt die Quantisierung der elektrischen Ladung für makroskopische Körper mit $q \gg e$ keine Rolle.

Das Coulombgesetz (2.1) ist die Grundlage der *Elektrostatik*, wobei man ruhende oder stationäre Ladungsverteilungen betrachtet. Die $1/r^2$ -Abhängigkeit der Coulombkraft ist über viele Längenbereiche experimentell bestätigt. Im Zentimeter- bis Meterbereich kann man das Coulombgesetz durch Laborexperimente an makroskopischen geladenen Körpern prüfen. Für mikroskopische Distanzen kann man die Resultate von Streuexperimenten (zum Beispiel ionisierte Heliumkerne an Goldkernen oder Elektronen an Positronen) mit den Vorhersagen der Theorie, welche auf dem Coulombgesetz beruhen, vergleichen⁵. Für

⁴Die fundamentalen geladenen Elementarteilchen sind die Leptonen e, μ, τ , die Quarks u, d, c, s, t, b und die Eichbosonen W^\pm . Das Proton besteht aus zwei up-Quarks und einem down-Quark.

⁵Kommt man einem „Punktteilchen“ näher als seine Comptonwellenlänge, dann hängt seine Ladung vom Abstand ab, $e = e(r)$.

astronomische Skalen kann man die planetaren Magnetfelder „ausmessen“, deren Form eng mit dem Coulombgesetz verknüpft sind. Bisher wurde im Längenbereich von 10^{-16}cm bis einige astronomische Einheiten keine Abweichung vom Coulombgesetz gefunden.

Erst nach Einführung einer Ladungseinheit oder gleichbedeutend nach Festlegung der Konstanten ϵ_0 in (2.1) wird die Ladung zur Meßgröße. Es wäre am natürlichsten, das Ladungsquant, also die Ladung des Protons, als Ladung 1 LE zu definieren. Danach wäre die Konstante ϵ_0 eine bestimmbare Größe der Dimension

$$[\epsilon_0] = \frac{(\text{LE})^2}{\text{Nm}^2}, \quad \text{N=Newton, m=Meter.}$$

International eingeführt ist allerdings die Ladungseinheit

$$1 \text{ Coulomb} = 1\text{C},$$

für die Elektrizitätsmenge. Sie wird mit Hilfe des durch einen Leiter in einer gewissen Zeit fließenden elektrischen Stromes definiert,

$$1 \text{ A} = 1 \text{ Ampere} = 1\text{C/s.} \quad (2.2)$$

Diese Definition führt zur Festlegung

$$\epsilon_0 = 8.854\,187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}. \quad (2.3)$$

Ein Coulomb ist eine sehr große Ladung. Zwei Körper im Abstand von 1m, die je ein Coulomb Ladung tragen, üben eine Kraft von

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} \sim 9 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (2.4)$$

aufeinander aus.

Es fehlt noch die Festlegung der Stromeinheit. Diese kann über die Kraft zwischen zwei parallelen, unendlich langen und stromdurchflossenen (idealisierten) Drähten im Abstand d bestimmt werden. Fließt durch jeden Draht der Strom $I = \Delta q / \Delta t$, so wirkt auf jedes Drahtstück der Länge Δl die Kraft (siehe später)

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2I^2}{c^2 d},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Zwei Drähte im Abstand von $d = 1\text{m}$, durch die jeweils 1 *Ampere* fließt, erfahren eine Kraft pro Länge von $2 \cdot 10^{-7}\text{N/m}$.

Die universelle Elementarladung (z.B. Betrag der Ladung des Elektrons) ist dann

$$e = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{C}, \quad \text{Unsicherheit} \quad 0.30 \text{ ppm}. \quad (2.5)$$

Neben der Ladungseinheit benutzen wir als mechanische Einheiten für die Länge, Masse und Zeit den Meter (m), das Kilogramm (kg) und die Sekunde (s). Die Arbeits- und Leistungseinheiten sind

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 10^7 \frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2} = 10^7 \text{erg}, \quad 1 \text{ Watt} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{s}}. \quad (2.6)$$

Das Maßsystem mit der Einheit Ampere als vierter Grundeinheit heißt MKSA-System oder SI-System. MKSA steht für Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere und SI für Systeme International d'Unites.

Das Coulombsche Gesetz (2.1) legt es andererseits nahe, die Ladung so zu wählen, daß $4\pi\epsilon_0 = 1$ ist. Als Ladungseinheit wählt man diejenige Ladung, die zwei gleich geladene „Punktteilchen“ tragen müssen, um sich im Abstand von 1 cm mit $1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm/s}^2 = 10^{-5} \text{N}$ abzustößen. Diese Ladungseinheit wird als 1 esu⁶ bezeichnet:

$$1 \text{ dyn} = \frac{(1 \text{ esu})^2}{\text{cm}^2} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ esu} = 1 \frac{\text{cm}^{3/2} \text{g}^{1/2}}{\text{s}}. \quad (2.7)$$

Der Vergleich von (2.7) mit dem Coulombgesetz in SI-Einheiten ergibt

$$1 \text{ C} = 2.997\,924\,58 \cdot 10^9 \text{esu}, \quad (2.8)$$

oder für die Elementarladung

$$e = 4.803\,206\,8(15) \cdot 10^{-10} \text{esu}, \quad \text{Unsicherheit} \quad 0.30 \text{ ppm}. \quad (2.9)$$

Das soeben diskutierte System ist das *Gaußsche Maßsystem*. In diesem System werden die elektrischen und magnetischen Felder in gleichen Einheiten gemessen. Es eignet sich besonders für eine relativistische Formulierung der Elektrodynamik. Obwohl das MKSA- oder SI-System das gesetzlich festgelegte und in Anwendungen benutzte System ist, wird von Theoretikern deshalb gerne das Gaußsche System verwandt. Wir werden es in dieser Vorlesung ebenfalls verwenden. Nur an einigen Stellen, wo die Anwendungen im Vordergrund stehen, werden wir MKSA-Einheiten benutzen.

⁶esu für electrostatic unit, auch ESE für Elektrostatische Einheit.

2.2 Das elektrische Feld

Zum Begriff des elektrischen Feldes gelangt man, wenn man nach der *Übertragung der elektrischen Kräfte* von einer Ladung q_1 auf eine andere Ladung q_2 fragt. In der Elektrostatik muß man diese Frage nicht unbedingt stellen. Man kann sich damit begnügen, daß eine Kraft zwischen elektrischen Ladungen wirkt; die Ausbreitung der Kraft ist in der Statik unwesentlich. Geht man allerdings zu zeitlich rasch veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen über⁷, so stellt sich die Frage nach der Ausbreitung von Kraft und Energie erneut. Nun kann sie nicht mehr umgangen werden, da sich elektromagnetische Wirkungen mit der endlichen Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Daher ist es angebracht, schon in der Elektrostatik nach der Art der Kraftübertragung zwischen Ladungen zu fragen. Dies führt uns auf den Begriff der elektrischen Feldstärke, oft nur elektrisches Feld genannt. Vom Feldwirkungs-Standpunkt aus müssen wir uns eine von den Ladungszentren ausgehende Erregung des umgebenden Raumes vorstellen.

Wir definieren das elektrische Feld \mathbf{E} über die auf einen (möglichst kleinen) geladenen Probekörper ausgeübte Kraft, geteilt durch die Ladung des Probekörpers,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Das elektrische Feld variiert von Ort zu Ort nach Richtung und Größe. Durch den Grenzfall $q \rightarrow 0$ wird erreicht, daß die Probeladung die vorhandenen Ladungen nicht stört, z.B. in diesen keine Polarisierung der elektrischen Ladung hervorruft.

Die Dimension des elektrischen Feldes ist

$$[\mathbf{E}] = \begin{cases} \text{dyn/esu} = \text{esu/cm}^2 = \text{g}^{1/2}/\text{cm}^{1/2}\text{s} & \text{Gauß-Einheiten} \\ \text{N/C} = 3.33356 \cdot 10^{-5} \text{ dyn/esu} & \text{SI-Einheiten.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Wenn wir der Richtung von \mathbf{E} folgen, durchlaufen wir eine *elektrische Kraftlinie* bzw. *Feldlinie*. Man kann das Feldlinienbild festlegen, indem man von jeder positiven Ladungseinheit eine Feldlinie ausgehen läßt. Entsprechend endet an jeder negativen Ladungseinheit eine Feldlinie. Dann ist die Dichte der Feldlinien proportional zur elektrischen Feldstärke.

Nun bewegen wir eine Probeladung q längs eines Weges von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 . Die auf dem kleinen Wegstück $d\mathbf{r}$ vom Feld an der Probeladung verrichtete Arbeit ist gleich dem Weg $d\mathbf{r}$ multipliziert mit der Kraft $q\mathbf{E}$ in Richtung des Weges, also gleich $q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$. Der Ausdruck ist positiv, wenn eine positive Ladung in der Richtung von \mathbf{E} bewegt wird, wobei also Arbeit nach außen gewonnen wird. Im allgemeinen wird \mathbf{E} von Stelle zu Stelle veränderlich sein. Dann ist die *gewonnene Arbeit* bei der Bewegung einer Einheitsladung

⁷Siehe Kapitel 5

durch das Linienintegral

$$V \equiv \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) ds \quad (2.12)$$

gegeben. Hier durchläuft $\mathbf{r}(s)$ die Kurve C , welche den Anfangspunkt \mathbf{r}_1 mit dem End-

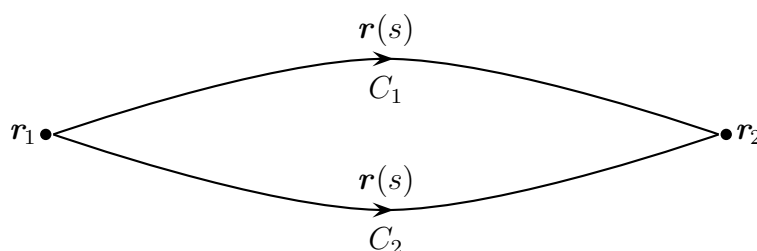


Abbildung 2.3: Die Spannung hängt vom Weg ab.

punkt \mathbf{r}_2 der Bewegung verbindet, also $\mathbf{r}(s_1) = \mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}(s_2) = \mathbf{r}_2$. Wir nennen dieses Linienintegral *Spannung*. Zur Definition der Spannung muß außer den Endpunkten auch der Weg zwischen ihnen vorgeschrieben werden. Nur in wirbelfreien Feldern, $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$, ist nach dem Stokesschen Satz das Linienintegral und damit die Arbeit im elektrischen Feld unabhängig vom Weg. Dann sagen wir statt Spannung auch *Potentialdifferenz* zwischen den Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Die Spannung hat die Dimension

$$[V_{\text{Gauss}}] = (\text{g cm})^{1/2}/s \quad \text{und} \quad [V_{\text{SI}}] = \text{J/C}. \quad (2.13)$$

Nun betrachten wir N Punktladungen q_1, \dots, q_N , die an den Orten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ ruhen. Nach dem Superpositionsprinzip⁸ ist eine Punktladung q am Orte \mathbf{r} der Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

ausgesetzt. Entsprechend ist das elektrische Feld von N Punktladungen gleich

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (2.14)$$

⁸Für Punktladungen treten keine Polarisierungseffekte auf.

Das Feld einer positiv geladenen Punktladung und dasjenige zweier Punktladungen ist in der Abb. 2.4 dargestellt.

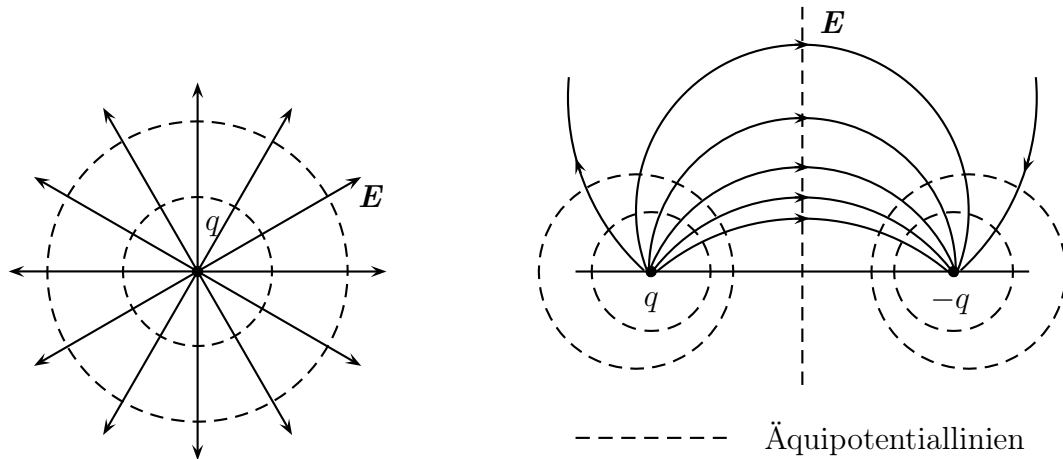


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung des elektrischen Feldes um eine Punktladung und um zwei Punktladungen.

Das elektrische Feld (2.14) ist der Gradient einer Funktion Φ und ist damit wirbelfrei. Weiterhin sind die Quellen des Feldes an den Orten der Ladungen lokalisiert. Um dies einzusehen benutzen wir

$$\begin{aligned}\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} &= -\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Da der Gradient, die Divergenz und Rotation lineare Operationen sind, folgt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei und mit der vorherigen Formel gilt dann

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.16)$$

Damit ist die Spannung zwischen zwei Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 ,

$$V \equiv \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2), \quad (2.17)$$

unabhängig von dem die Orte verbindenden Weg C und wird zu einer Potentialdifferenz. Die *zu leistende Arbeit* bei der Bewegung einer Probeladung

$$A = -q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q (\Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1)) \quad (2.18)$$

hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung ab. Bei der Bewegung einer Probeladung längs einer geschlossenen Kurve verschwindet die Arbeit. Entsprechend verschwindet die *elektrische Ringspannung*, auch *elektromotorische Kraft* oder EMK genannt,

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.19)$$

Bewegt sich eine Ladung allein unter der Kraftwirkung des Feldes, gilt also für den Probekörper mit der Masse m die Bewegungsgleichung⁹

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}, \quad (2.20)$$

so wird die dem Feld entnommene Arbeit wegen des Energiesatzes gleich der Zunahme der kinetischen Energie des Körpers:

$$\frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} = q (\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)). \quad (2.21)$$

Hier bezeichnen \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Probekörpers. Deshalb gibt man die kinetische Energie, die ein geladenes und anfangs ruhendes Teilchen beim Durchlaufen einer bestimmten Strecke erhält, meist unmittelbar durch das Produkt aus Ladung und durchlaufener Spannung an. Ein Proton hat die kinetische Energie von 1 KeV, wenn die Spannungsdifferenz zwischen Anfangs- und Endort 1000 Volt beträgt.

Die Feldlinien schneiden die *Äquipotentialflächen*, auf welchen das elektrostatische Potential Φ konstant ist, orthogonal. Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Kurve $\mathbf{r}(s)$

⁹Bezüglich der Verhältnisse bei hohen Geschwindigkeiten verweise ich auf das Kapitel über die relativistische Mechanik.

in einer solchen Fläche. Dann ist $\Phi(\mathbf{r}(s))$ konstant und entsprechend gilt

$$\frac{d}{ds}\Phi(\mathbf{r}(s)) = \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(s) = 0.$$

Also ist das elektrische Feld orthogonal zu allen Tangentialvektoren an die Fläche, d.h. orthogonal zur Äquipotentialfläche. Zur Bewegung einer Probeladung auf einer festen

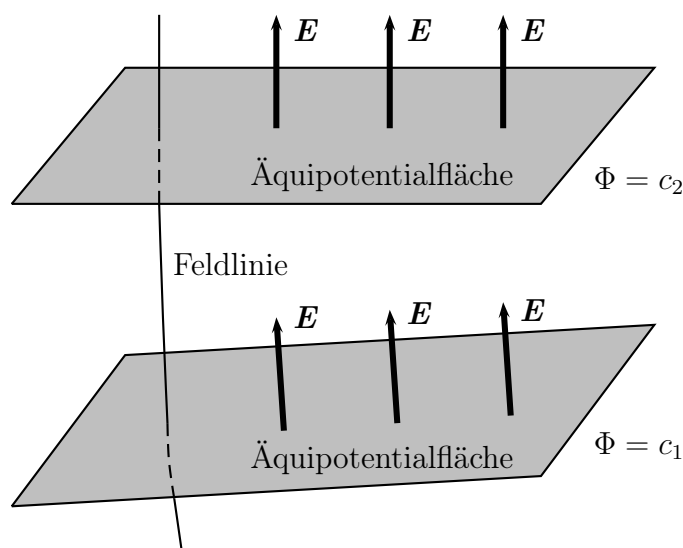


Abbildung 2.5: Die Flußlinien schneiden die Äquipotentialflächen orthogonal.

Äquipotentialfläche braucht man keine Arbeit zu verrichten.

Wir benutzen nun die Gaußsche Integralformel, um den Fluß des elektrischen Feldes durch die Oberfläche ∂V eines beliebig gewählten Raumgebiets V mit der in V enthaltenen Ladung in Verbindung zu bringen. Sei also \mathbf{n} das nach außen gerichtete Einheitsfeld orthogonal zu ∂V und $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ das gerichtete Oberflächenelement,

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} df = E_n df, \quad E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}.$$

Dann ist nach dem Gaußschen Satz

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = 4\pi \sum_i q_i \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d^3r.$$

Nach Definition der Dirac'schen Delta-Distribution ist das letzte Integral gleich 1 wenn die Ladung q_i in V liegt und es verschwindet, wenn sie außerhalb liegt. Deshalb erhalten

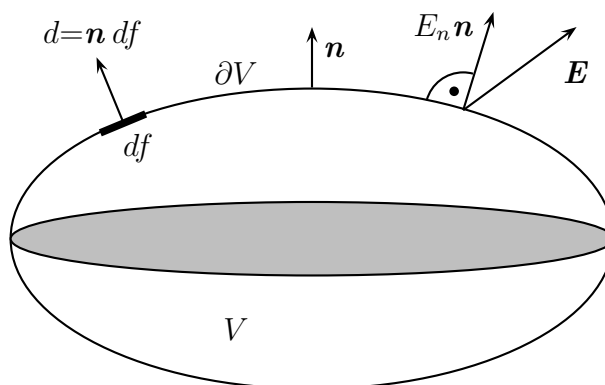


Abbildung 2.6: Der Fluß des elektrischen Feldes durch ∂V mißt die Ladung in V .

wir

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \sum_{i: \mathbf{r}_i \in V} q_i = 4\pi q(V), \quad (2.22)$$

wobei $q(V)$ die gesamte in V enthaltene elektrische Ladung bezeichnet. Der gesamte durch ∂V strömende Fluß der elektrischen Feldstärke, oft als *elektrischer Kraftfluß* bezeichnet, ist demnach proportional zur Ladung in V .

Wie sieht nun das elektrische Feld einer beliebigen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ aus? Die elektrische Ladungsdichte ist so definiert, daß für jedes Raumgebiet V

$$q(V) = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (2.23)$$

die in V enthaltene Ladung ist. Wir zerlegen V in kleine Teilgebiete,

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$

und schreiben die Ladung $q(V)$ als Summe der Ladungen in den Teilgebieten

$$q(V) = \sum_i q(V_i) = \sum_i \int_{V_i} \rho(\mathbf{r}) d^3r.$$

Wir wählen die Volumen der Teilgebiete V_i so klein, daß die in ihnen enthaltenen Ladungen $q(V_i)$ als Punktladungen betrachtet werden können. Dies setzt voraus, daß der Ort \mathbf{r} , wo das elektrische Feld gemessen wird, weit weg von V_i ist. Etwas genauer: Ist $\mathbf{r}_i \in V_i$ und d_i

der „Durchmesser“ von V_i , dann muß $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \gg d_i$ gelten.

Nach dem Superpositionsprinzip ist das elektrische Feld aller „Punktladungen“ $q(V_i)$ gleich der Summe der elektrischen Felder der einzelnen „Punktladungen“,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \Phi(\mathbf{r}) \sim \sum_{i=1}^N \frac{q(V_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} = \sum_i \int_{V_i} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} d^3r' \quad \text{für } d_i \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|.$$

Nun machen wir den Grenzübergang $|V_i| \rightarrow 0$, wobei die $q(V_i)$ in der Tat zu Punktladungen werden und erinnern uns daran, daß \mathbf{r}_i in V_i liegt. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung konvergiert die Riemannsche Summe gegen das entsprechende Integral und wir erhalten

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.24)$$

Die obige Bedingung $d_i \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ bedeutet nun, daß $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ gelten muß. Wir wollen noch einsehen, daß wir für stetige Ladungsdichten diese Einschränkung fallenlassen können. Dazu bestimmen wir den Beitrag der Ladungen in der Umgebung des Ortes \mathbf{r} zum Integral (2.24). Wir dürfen $\mathbf{r} = 0$ annehmen und als Umgebung V_ϵ eine Kugel mit Radius ϵ um $\mathbf{r} = 0$ wählen. Für stetige ρ können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und finden

$$\int_{V_\epsilon} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'} d^3r' = \rho(\bar{\mathbf{r}}) \int_{V_\epsilon} \frac{1}{r'} d^3r' = 4\pi\rho(\bar{\mathbf{r}}) \int_0^\epsilon dr' r'^2 = 2\pi\rho(\bar{\mathbf{r}})\epsilon^2,$$

wobei $\bar{\mathbf{r}} \in V_\epsilon$ ist und r' die Länge von \mathbf{r}' bezeichnet. Verkleinern wir die Umgebung, d.h. lassen wir $\epsilon \rightarrow 0$ streben, dann erhalten wir keinen Beitrag dieser Umgebung zum Integral für $\Phi(0)$. Also dürfen wir die Einschränkung $\mathbf{r} \notin V$ im Integral (2.24) für Φ oder im entsprechenden Integral für \mathbf{E} aufgeben,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.25)$$

Die Ladungsdichte von N Punktladungen an den Orten \mathbf{r}_i ist offensichtlich

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.26)$$

Für diese unstetige Verteilung liefert das Integral (2.24)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \int_V d^3r' q_i \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (2.27)$$

das korrekte elektrische Coulomb-Potential für Punktladungen. Deshalb sind (2.24,2.25) die Verallgemeinerung des Coulombgesetzes für Punktladungen auf beliebige Ladungsverteilungen. Für beliebige Ladungsverteilungen ist das elektrische Feld ein Gradientenfeld und damit verschwinden alle elektrischen Ringspannungen,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Wege.} \quad (2.28)$$

Dies bedeutet insbesondere, daß es in der Elektrostatik *keine geschlossenen Feldlinien* gibt. Gäbe es nämlich nur eine geschlossene Feldlinie, so wäre bei der Führung einer Testladung entlang dieser Linie die Arbeit ungleich Null.

2.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

Das elektrische Feld \mathbf{E} ist durch sein Wirbelfeld $\nabla \wedge \mathbf{E}$ und sein Quellenfeld $\nabla \cdot \mathbf{E}$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Für Punktladungen ist es wirbelfrei mit Quellen an den Positionen der Punktladungen. Wegen des Superpositionsprinzipes gelten diese Aussagen auch für beliebige Ladungsverteilungen $\rho(\mathbf{r})$. Davon wollen wir uns aber noch direkt überzeugen. Für beliebige Ladungsdichten ist das elektrische Feld durch das Integral (2.25) eindeutig bestimmt und wir wählen diese Integraldarstellung als Ausgangspunkt. Wegen $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ist \mathbf{E} wirbelfrei,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (2.29)$$

Für das Quellenfeld finden wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= 4\pi \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 4\pi\rho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Damit finden wir als zweite Bestimmungsgleichung für \mathbf{E} die partielle Differentialgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (2.30)$$

Die Gleichungen (2.29, 2.30) sind die wichtigen *Feldgleichungen der Elektrostatik*. Die erste Gleichung (2.29) heißt auch homogene Gleichung, die zweite Gleichung (2.30) wegen des Quellterms auf der rechten Seite inhomogene Gleichung. Diese Feldgleichungen sind partielle Differentialgleichungen, die das Feld lokal bestimmen¹⁰. Das Grundproblem der Elektrostatik ist es, aus einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ zu berechnen.

In einigen Darstellungen der Elektrostatik werden diese beiden Grundgleichungen in den Vordergrund gestellt. Aus ihnen kann man natürlich wieder die allgemeine Lösung konstruieren:

Jedes wirbelfreie Vektorfeld ist ein Gradientenfeld. Deshalb gibt es ein Potential Φ , so daß $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ist. Damit wäre die homogene Feldgleichung bereits gelöst. Setzen wir diese Lösung der homogenen Gleichung in die inhomogene Gleichung (2.30) ein, so erhalten wir die wichtige *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (2.31)$$

Um diese inhomogene elliptische partielle Differentialgleichung zu lösen, beschafft man sich zuerst eine Greenfunktion von $-\Delta$, d.h. eine Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, welche

$$-\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.32)$$

erfüllt. Eine Greenfunktion ist also eine Lösung von (2.31) für eine Punktquelle der Ladung 1. Vermittels der Greenfunktion kann man nun eine Lösung von (2.31) konstruieren,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'). \quad (2.33)$$

Dies ist leicht zu beweisen,

$$-\Delta\Phi(\mathbf{r}) = - \int d^3r' \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = 4\pi \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') = 4\pi\rho(\mathbf{r}).$$

Von unseren obigen Resultaten über das Potential wissen wir natürlich bereits, daß

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.34)$$

das Potential für eine Punktladung, und damit eine Greenfunktion ist. Deshalb ist eine

¹⁰für eine eindeutige Festlegung der Lösung benötigt man noch die Randbedingungen, siehe unten.

Lösung von (2.31)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.35)$$

Dies ist allerdings noch nicht die allgemeine Lösung von (2.31). Um eine solche zu finden, müssen wir eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta\Phi_h = 0$ zu Φ addieren. Damit lautet die allgemeine Lösung von (2.31)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \Phi_h(\mathbf{r}), \quad \Delta\Phi_h = 0. \quad (2.36)$$

Die harmonische Funktion Φ_h wird durch die physikalischen Randbedingungen eindeutig bestimmt.

Wir fassen zusammen: Die differentiellen *Grundgleichungen der Elektrostatik* lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (2.37)$$

Diese sind äquivalent zu den Integralformen

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{f} = 4\pi q(V) \quad \text{und} \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0. \quad (2.38)$$

Die homogene Gleichung in (2.37) wird durch Einführung des Potentials Φ gelöst. Die verbleibende inhomogene Gleichung für Φ ist die Poisson-Gleichung mit der Lösung (2.36).

2.3.1 Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Wir wollen hier das Potential und das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) \implies q = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad (2.39)$$

bestimmen. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{e}_r$, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$. Die erste Gleichung in (2.38) vereinfacht sich zu

$$4\pi r^2 E_r(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' d\Omega = (4\pi)^2 \int_0^r \rho(r') r'^2 dr',$$

so daß man für das elektrische Feld die Bestimmungsgleichung

$$r^2 E_r(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.40)$$

erhält. Das Potential Φ hängt aus Symmetriegründen ebenfalls nur vom Radius ab und

$$E_r(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (2.41)$$

Insbesondere eine homogen geladene Kugel mit Ladungsdichte

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r = |\mathbf{r}| < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

trägt die Ladung $q = \rho_0 4\pi R^3/3$ und hat ein Feld

$$E_r(r) = \begin{cases} 4\pi r \rho_0/3 = qr/R^3 & r < R \\ q/r^2 & r > R. \end{cases} \quad (2.42)$$

Um das Potential zu finden, benutzen wir (2.41). Die Lösung außerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r > R) = \frac{q}{r}, \quad (2.43)$$

wobei die Integrationskonstante wegen unserer Normierungsbedingung $\Phi(\infty) = 0$ wegfällt. Außerhalb der Kugel ändert sich das Feld nicht, wenn wir bei gleichbleibender Ladung die Kugel verkleinern. Das Feld ist *identisch zum Feld einer Punktladung im Kugelzentrum*. Innerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r < R) = -\frac{2\pi}{3} \rho_0 r^2 + c = -\frac{q}{2} \frac{r^2}{R^3} + c. \quad (2.44)$$

Da $E_r(r)$ stetig ist, muss $\Phi(r)$ differenzierbar sein. Dies legt die Integrationskonstante c fest und wir erhalten

$$\Phi(r < R) = \frac{q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right). \quad (2.45)$$

Die Ladungsverteilung, das elektrische Feld und Potential einer homogen geladenen Kugel sind in der Abbildung 2.7 gezeigt.

Ist dagegen die Ladung gleichmäßig auf einer *Kugelschale* vom Radius R verteilt, wie es bei idealen Leitern der Fall ist, dann findet man mit der ersten Gleichung in (2.38) ein

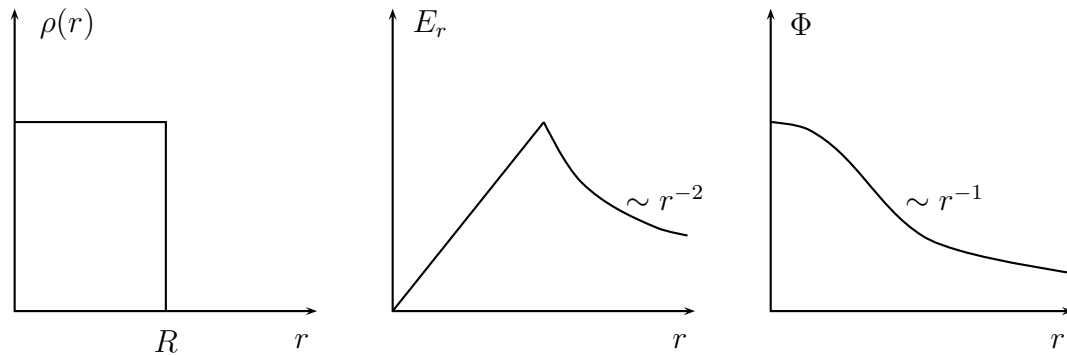


Abbildung 2.7: Ladungsverteilung $\rho(r)$, Feldstärke $E_r(r)$ und Potential $\Phi(r)$ einer homogen geladenen Kugel.

verschwindendes Innenfeld,

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ q/r^2 & r > R. \end{cases} \quad (2.46)$$

Mit Messungen ausserhalb der Kugel kann man nicht entscheiden, ob die Ladungen in der Kugel homogen verteilt sind oder gleichmäßig auf der Kugeloberfläche sitzen.

2.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Wir wollen zuerst die Frage beantworten, was die Energie eines geladenen Testteilchens in einem gegebenen elektrischen Feld ist. Wir nehmen an, das elektrische Feld sei lokalisiert. Dann dürfen wir das elektrostatische Potential im Unendlichen auf Null normieren, $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$. Wir bringen eine Testladung aus dem Unendlichen an den Ort \mathbf{r} . Dabei müssen wir die Arbeit

$$A = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (2.47)$$

verrichten. Hier ist C irgendein Weg, der aus dem Unendlichen nach \mathbf{r} führt. Nun bewegen wir N Testladungen¹¹ aus dem Unendliche an die Orte $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. Die verrichtete Arbeit

¹¹Die Ladungen der Teilchen seien so klein, daß sie weder das gegebene elektrische Feld ändern noch gegenseitig wechselwirken.

ist

$$A = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \sum_i q(V_i) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) = \sum_i \int_{V_i} d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i).$$

Hier ist V_i ein kleines Volumen, das genau die Ladung am Ort \mathbf{r}_i enthält. Da \mathbf{r}_i in V_i liegt, erhalten wir im Grenzfall einer Ladungsverteilung für die Energie dieser Ladungsverteilung in einem *äußeren elektrischen Feld*

$$U = A = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (2.48)$$

Für eine Punktladung ist dieses Resultat identisch mit (2.47).

Nun wollen wir uns von der Testteilchenapproximation lösen und bestimmen die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld. Dazu bringen wir zuerst

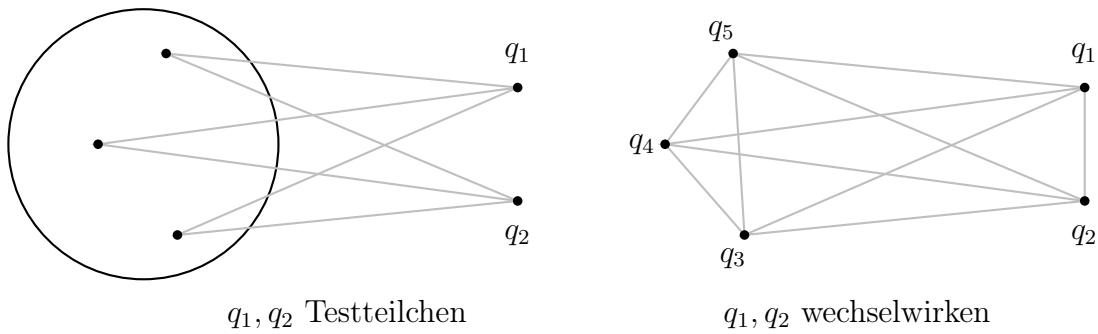


Abbildung 2.8: *Energie von Testteilchen im äußeren Feld und Gesamtenergie von geladenen Teilchen.*

die Ladung q_2 aus dem Unendlichen in die Nähe von q_1 , danach q_3 aus dem Unendlichen in die Nähe von q_1 und q_2 usw. Es sei $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ die Energie von N Punktladungen die an den Orten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ ruhen. Nun transportieren wir eine weitere Punktladung q_{N+1} aus dem Unendlichen in die Nähe der vorhandenen N Punktladungen. Die Energie des aus $N + 1$ Teilchen bestehenden Systems ist dann

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N+1}) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) + q_{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{N+1}|}.$$

Mit $U_1 = 0$ können wir diese Induktionsformel lösen und finden

$$U = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (2.49)$$

Um die Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ρ zu finden, teilen wir das Gebiet V , welches die Ladungen enthält, in kleine Teilgebiete V_i auf. Wie früher sei $q(V_i)$ die in V_i enthaltene Ladung. Wir dürfen $q(V_i)$ als Punktladung behandeln und obiges Resultat anwenden. Dies führt auf

$$\begin{aligned} U &\approx \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q(V_i) q(V_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\int_{V_i} d^3 r \rho(\mathbf{r}) \int_{V_j} d^3 r' \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &\approx \frac{1}{2} \int d^3 r \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Lassen wir die Volumen der Teilgebiete gegen Null streben, dann wird das Resultat exakt, solange die Ladungsverteilungen stetig sind.

Mit (2.35) wird (2.50) zu

$$U = \frac{1}{2} \int d^3 r \Phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}). \quad (2.51)$$

Im Gegensatz zu (2.48) ist hier Φ das durch ρ erzeugte Potential und nicht ein externes Potential; dieser Unterschied führt zu dem relativen Faktor 1/2 verglichen mit (2.48).

Zur weiteren Umformung der Energie benutzen wir die Poisson Gleichung $\Delta \Phi = -4\pi\rho$:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int d^3 r \Phi \Delta \Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.52)$$

Hier haben wir die bei der partiellen Integration auftretenden Randterme vernachlässigt. Dies ist für lokalisierte Ladungsverteilungen erlaubt. Die Form (2.52) legt nahe,

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \quad (2.53)$$

als *Energiedichte* des elektrischen Feldes zu interpretieren.

2.4.1 Probleme mit der Selbstenergie

Für unstetige Verteilungen macht (2.50) im Allgemeinen keinen Sinn. Zum Beispiel folgt für Punktladungen aus (2.50) die Formel (2.49), aber ohne die Einschränkung $i \neq j$ in der

Summe. Damit ist die Energie *einer* Punktladung in ihrem eigenen Feld schon unendlich. Um eine Punktladung zu erzeugen, braucht es in der klassischen Elektrodynamik unendlich viel Energie. Dieses Problem der *unendlichen Selbstenergie* taucht im modifizierten Gewand in der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes wieder auf.

Das Problem kann anhand der homogen geladenen *Kugel* studiert werden. Die Energiedichte des Feldes (2.42) ist

$$u(r) = \begin{cases} q^2 r^2 / 8\pi R^6 & r < R \\ q^2 / 8\pi r^4 & r > R \end{cases}$$

und entsprechend ist die Feldenergie

$$U = 4\pi \int u(r) r^2 dr = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}. \quad (2.54)$$

Für eine punktförmige Kugel $R \rightarrow 0$ divergiert die Selbstenergie der geladenen Kugel.

Für eine homogen geladene *Kugelschale* ist die Feldenergie

$$U = \frac{4\pi}{8\pi} \int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} r^2 dr = \frac{q^2}{2R}. \quad (2.55)$$

Wie für die homogen geladene Kugel divergiert die Feldenergie für $R \rightarrow 0$. Sie stimmt mit der Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons überein, falls

$$\frac{e^2}{2R} = m_e c^2 \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{e^2}{2m_e c^2} = 1.4 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (2.56)$$

ist. Diesen Radius bezeichnet man als *klassischen Elektronenradius*.

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

Ein elektrisches Feld wird beim Hereinbringen eines Körpers verändert, und zwar deshalb, weil sich durch Einwirkung des Feldes in bzw. auf dem Körper Ladungsverteilungen bilden (Influenz), die ihrerseits ein Feld erzeugen, welches sich dem vorher schon vorhandenen \mathbf{E} -Feld überlagert.

3.1 Ideale Leiter im elektrischen Feld

Metalle sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen stets eine sehr große Anzahl von Elektronen nahezu ungehindert durch das gesamte Metall wandern können. Diese sogenannten *Leitungselektronen* verursachen die elektrische Leitfähigkeit. Wenn im Metall anfangs ein elektrisches Feld vorhanden ist, dann werden die Leitungselektronen von diesem beschleunigt. Ihre Verteilung wird sich unter dem Einfluß von \mathbf{E} so lange ändern, bis \mathbf{E} selbst Null geworden ist. Die beweglichen Ladungen ordnen sich nach kurzer Zeit so an, daß das von ihnen erzeugte Feld das von außen ins Metall eindringende Feld kompensiert. Deshalb ist im statischen Fall das elektrische Feld in einem *idealen Leiter* stets Null und wegen $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ das Potential konstant.

Wir denken an die einfachsten elektrostatischen Versuche: ein metallischer Leiter beliebiger Gestalt, ursprünglich isoliert aufgestellt, werde

1. an eine bekannte Spannung V (gegen Erde) gelegt oder
2. mit einer bekannten Ladung q geladen.

Gesucht wird das Feld außerhalb des idealen Leiters. Wir beschreiben es durch das zur Feldstärke gehörende Potential Φ , das im Unendlichen auf Null normiert sei. Außerhalb des Leiters gilt $\Delta\Phi = 0$. Auf der Oberfläche und im Innern ist $\mathbf{E} = 0$ oder $\Phi = V = \text{const.}$ Für den Sonderfall einer Kugel vom Radius R hat die hier in Betracht kommende Lösung

der Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ die Form

$$\Phi = \frac{RV}{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \frac{RV}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{für} \quad r > R. \quad (3.1)$$

Sei S eine die geladene Kugel umschließende Sphäre. Dann ist

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = RV,$$

welches

$$V = \frac{q}{R} \quad \text{und} \quad E_r = \frac{q}{r^2}, \quad r > R \quad (3.2)$$

für eine ideal leitende Kugel der Ladung q liefert. Das äußere Feld ist identisch zum Feld einer Punktladung im Zentrum der Kugel mit derselben Ladung. Wegen

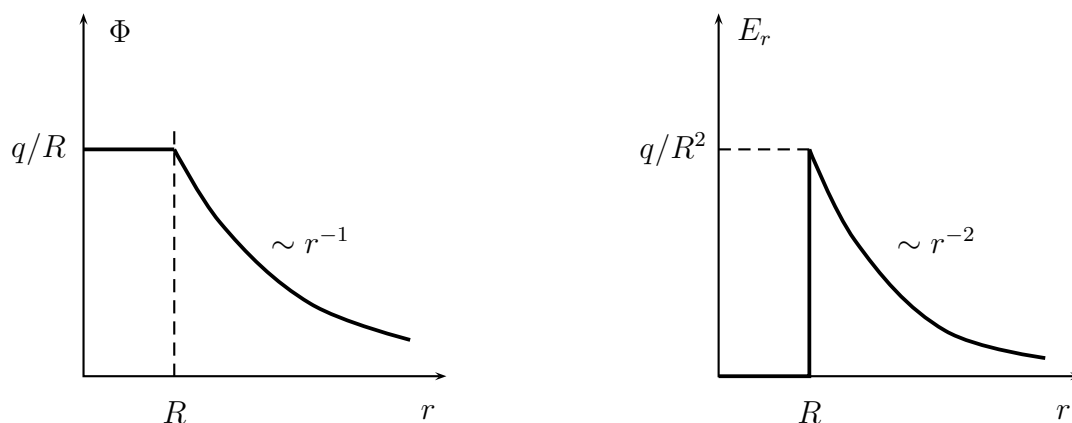


Abbildung 3.1: Das Potential einer ideal leitenden geladenen Kugel.

$$4\pi\rho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (q\theta(r - R)) = \frac{q}{R^2} \delta(r - R) \quad (3.3)$$

sitzt die gesamte Ladung eines idealen Leiters auf der Leiteroberfläche. Deshalb führt man die *Flächenladungsdichte* ein: $\sigma \Delta f$ ist die im Oberflächenelement Δf enthaltene Ladung. Die Kugeloberfläche hat den Flächeninhalt $4\pi R^2$ und entsprechend ist $\sigma = q/4\pi R^2$. Beachte, daß die Normalenkomponente E_r des elektrischen Feldes auf der Kugeloberfläche proportional zur Flächenladungsdichte ist, $E_r = 4\pi\sigma$. Dies ist auch für beliebige Leiteroberflächen der Fall, wie wir gleich sehen werden.

3.1.1 Randbedingungen für Metalle

In einem Metall verschwindet das elektrische Feld und Φ ist konstant. Deshalb ist die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche die von den elektrischen Feldlinien senkrecht geschnitten wird. Dies kann man auch mit Hilfe der homogenen Gleichung (2.37) direkt beweisen: Dazu bewege man eine Einheitsladung entlang eines Weges wie in Abb. 3.2. Da

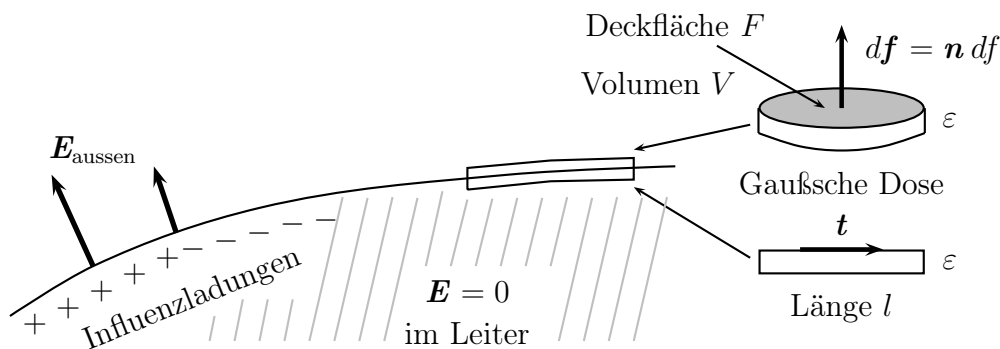


Abbildung 3.2: Ein Vakuumbereich durch Metall begrenzt.

die Ringspannung verschwindet und im Leiter $\mathbf{E} = 0$ ist, ergibt sich

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \sim lt \cdot \mathbf{E}_{\text{aussen}},$$

wobei wir die Wegstücke senkrecht zur Oberfläche beliebig kurz wählten damit sie keinen Beitrag zur Ringspannung geben. Da dies für beliebige Wege gilt, verschwindet die tangentielle Komponente des Außenfeldes,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{\text{aussen}} = 0 \quad \text{auf der Leiteroberfläche,} \quad (3.4)$$

d.h. das \mathbf{E} -Feld ist senkrecht zur Leiteroberfläche

Bei der leitenden Kugel sprang die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang vom Leiter ins Vakuum. Der Sprung kann mit der auf der Leiteroberfläche induzierten Ladung in Verbindung gebracht werden. Zum Beweis führt man eine „Gaußsche Dose“ ein, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt im Vakuum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im Metall verläuft, siehe Abb. 3.2. Die elektrische Ladung in der Dose ist gleich der Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ multipliziert mit der Dosendeckfläche. Mit der inhomogenen Grundgleichung (2.38) finden

wir

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_F \mathbf{E}_{\text{ausßen}} \cdot \mathbf{n} df = 4\pi \int_F \sigma df.$$

Es folgt unmittelbar, daß

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\text{ausßen}} = 4\pi\sigma(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \text{Metalloberfläche.} \quad (3.5)$$

Die Randbedingungen (3.4,3.5) sind äquivalent zu

$$\Phi = \text{const.} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -4\pi\sigma(\mathbf{r}) \quad \text{auf der Leiteroberfläche.} \quad (3.6)$$

In den Anwendungen¹ sind meistens die Potentialwerte auf den einzelnen Metallkörpern bekannt. Dann stellt sich das folgende mathematische Problem:

Gegeben seien N Metallkörper, welche die durchschnittsfremden Gebiete V_i ausfüllen und Oberflächen ∂V_i haben, siehe Abb. 3.3. Auf den Oberflächen aller Leiter ist das

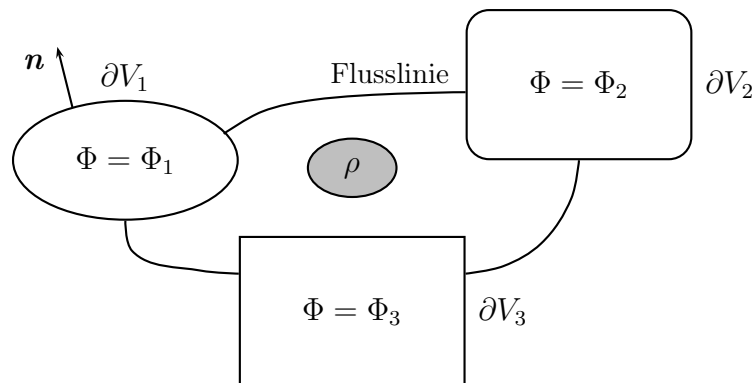


Abbildung 3.3: Das Dirichletproblem in Anwesenheit von idealen Leitern und Ladungen.

Potential konstant und damit ergibt sich ein *Potentialproblem mit Randbedingungen*, auch Randwertproblem genannt:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{r}) &= -4\pi\rho(\mathbf{r}) && \text{außerhalb der Leiter} \\ \Phi(\mathbf{r})|_{\partial V_i} &= \Phi_i = \text{const.} && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Man denke nur an Kondensatoren.

Die Bestimmung der Lösung einer (elliptischen) Differentialgleichung bei vorgegebenen Werten der Lösungen auf Rändern heißt *Dirichlet-Problem*. Wir werden zeigen, daß das vorliegende Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung hat. Aus dem eindeutigen Φ kann man dann mit der Formel (3.6) die Oberflächenladungen berechnen.

3.1.2 Eindeutigkeit der Lösung

Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen des Randwertproblems (3.7) und V das Raumgebiet *außerhalb der Leiter*. Für die Differenz $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ folgt dann

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{in} \quad V \quad \text{und} \quad \Psi|_{\partial V} = 0. \quad (3.8)$$

Im Integral

$$\int_V d^3r (\Psi \Delta\Psi + \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi) = \int_V d^3r \nabla \cdot (\Psi \nabla\Psi) = - \sum_i \oint_{\partial V_i} df \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} \quad (3.9)$$

verschwindet die rechte Seite, da Ψ auf allen Leiteroberflächen ∂V_i Null ist. Das negative Vorzeichen in der letzten Gleichung berücksichtigt, daß die Normalenvektoren \mathbf{n} in das Gebiet V hineinzeigen. Wegen $\Delta\Psi = 0$ im Gebiet V außerhalb der Leiter, ist

$$\int_V d^3r \nabla\Psi \nabla\Psi = 0.$$

Also verschwindet $\nabla\Psi$ in V , das heißt Ψ ist konstant. Die Konstante muß Null sein wegen der Randbedingungen für Ψ . Damit wäre die Eindeutigkeit bewiesen.

Sind anstelle der Potentialwerte die Ladungsdichten auf den Leiteroberflächen vorgegeben, dann muss man das folgende Randwertproblem lösen

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= -4\pi\rho(\mathbf{r}) && \text{außerhalb der Leiter} \\ \frac{\partial}{\partial n}\Phi(\mathbf{r})|_{\partial V_i} &= -4\pi\sigma_i(\mathbf{r}) && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die σ_i sind die auf den Rändern der Leiter sitzenden Flächenladungsdichten. Ähnlich wie das Dirichlet-Problem hat dieses sogenannte *Neumann-Problem* eine eindeutige Lösung: Für gegebene ρ und σ_i ist das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

3.2 Die Methode der Spiegelladungen

Mit dieser Methode kann man für symmetrische Anordnungen das Potential von Punktladungen in Gegenwart von idealen Leitern oft auf einfache Art zu bestimmen.

3.2.1 Punktladung in der Nähe einer ebenen Metallplatte

Zur Illustration betrachten wir eine Punktladung in der Nähe einer geerdeten Metallplatte, siehe Abb. 3.4. Die Metallplatte teile den Raum in zwei Hälften, $x > 0$ und $x < 0$. Wir

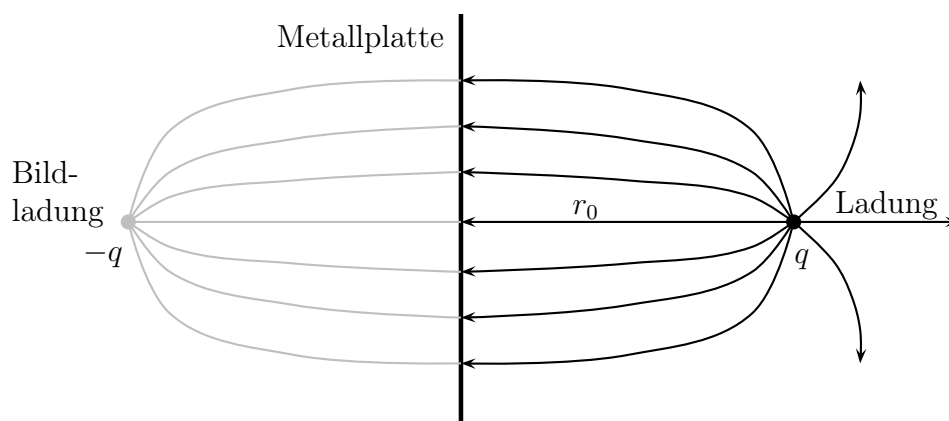


Abbildung 3.4: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung und geerdeten Metallplatte kann die Platte durch eine geeignet gewählte Spiegelladung (auch Bild- oder Scheinladung genannt) ersetzt werden.

setzen eine punktförmig gedachte Ladung an die Stelle $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$, d.h. rechts von der Platte im Abstand r_0 , und suchen das Potential im rechten Halbraum. Gesucht ist also eine Lösung von

$$\Delta \Phi = -4\pi q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{für } x > 0, \quad \Phi(0, y, z) = 0. \quad (3.11)$$

Wir wissen bereits, daß die Lösung im rechten Halbraum die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h(\mathbf{r}), \quad \Delta \Phi_h = 0, \quad (3.12)$$

haben muß. Wir suchen also eine in *diesem Gebiet* harmonische Funktion Φ_h , so daß Φ bei $x = 0$ verschwindet. Um diese zu finden, nehmen wir die Platte weg und setzen dafür eine Spiegelladung an den an der Plattenebene gespiegelten Ort $-\mathbf{r}_0$. Diese soll die Ladung $-q$ tragen. Aus Symmetriegründen muß das Potential von Ladung und Spiegelladung bei $x = 0$ verschwinden, genauso wie das Potential von Ladung und Platte. Das Feld der Spiegelladung hat seine Quelle im linken Halbraum und deshalb erfüllt das Potential von Ladung und Spiegelladung,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|}, \quad (3.13)$$

im *rechten Halbraum* die Potentialgleichung (3.11) und verschwindet bei $x = 0$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist Φ dann auch das Potential des ursprünglichen Problems für eine Ladung q bei $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$ und eine Metallwand bei $x = 0$. Die Feldstärke, die die Oberflächenladung im rechten Halbraum und somit auch am Ort der Ladung q erzeugt, ist identisch mit derjenigen, die von der Spiegelladung $-q$ hervorgerufen wird. Auf q wirkt somit die auf die Leiteroberfläche hin gerichtete Kraft

$$F = \frac{q^2}{4r_0^2}. \quad (3.14)$$

Die Erscheinung, daß ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als *elektrische Influenz*.

Unsere Betrachtung versagt bei kleinen Entfernungen r_0 der Probeladung von der Grenzfläche: die Kraft divergiert für $r_0 \rightarrow 0$. Der Grund ist in der atomistischen Struktur der Materie und der Ladungsträger zu suchen. Einem der Oberfläche näher als 10 – 100 Ångström kommenden Teilchen erscheint diese nicht mehr glatt. Das herannahende geladene Teilchen verschiebt die freien Ladungsträger des Leiters. Dieser Verschiebungseffekt erstreckt sich bei starker Annäherung des Teilchens nicht nur auf eine dünne Oberflächenschicht, sondern auch in die Tiefe des Metalls. Die Spiegelkraft bleibt selbst bei einem auftreffenden Teilchen endlich.

3.2.2 Punktladung in der Nähe einer leitenden Kugel

Als weitere Anwendung der Spiegelladungsmethode betrachten wir eine Punktladung q am Ort \mathbf{r}_0 außerhalb einer um den Koordinatenursprung zentrierten leitenden Kugel mit Radius R . Wir suchen das Potential Φ mit $\Phi(r = R) = 0$. Falls eine einzige Spiegelladung q' genügt, dann muß deren Position \mathbf{r}_1 aus Symmetriegründen auf dem Strahl vom Ursprung zur Ladung q liegen. Wir setzen also

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{n} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{n}.$$

Die Anordnung von Ladung und Spiegelladung ist in der Abbildung 3.5 gezeigt. Nun müssen wir q' und r_1 so wählen, daß das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|r \mathbf{e}_r - r_0 \mathbf{n}|} + \frac{q'}{|r \mathbf{e}_r - r_1 \mathbf{n}|} \quad (3.15)$$

auf der Kugeloberfläche verschwindet. Die Bestimmungsgleichung lautet

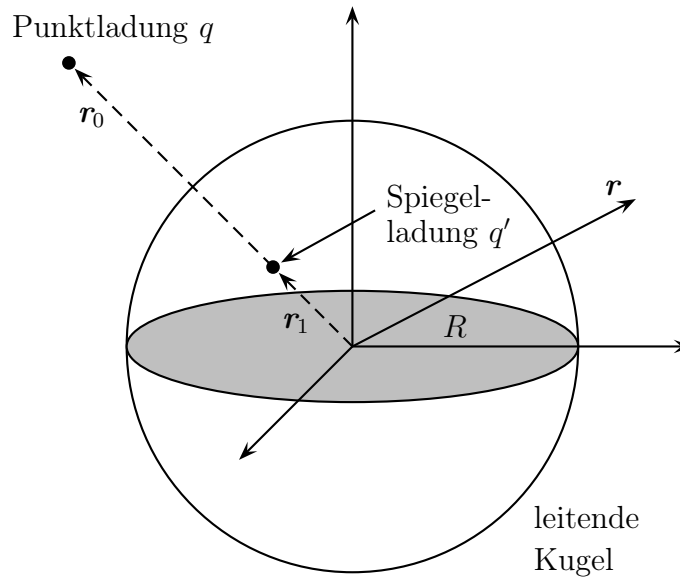


Abbildung 3.5: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung und geerdeten Metallkugel kann die Kugel durch eine Spiegelladung am Ort \mathbf{r}_1 ersetzt werden.

$$0 = \frac{q}{R|\mathbf{e}_r - \mathbf{r}_0\mathbf{n}/R|} + \frac{q'}{r_1|\mathbf{n} - R\mathbf{e}_r/r_1|},$$

und ist erfüllt für alle Werte von $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}$ für

$$\frac{q}{R} = -\frac{q'}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{r_0}{R} = \frac{R}{r_1}.$$

Damit ist die Spiegelladung und ihr Abstand vom Ursprung gleich

$$q' = -\frac{R}{r_0}q \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{R^2}{r_0}. \quad (3.16)$$

Das elektrostatische Potential hat die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\xi q}{|\mathbf{r} - \xi^2 \mathbf{r}_0|}, \quad \xi = \frac{R}{r_0} < 1. \quad (3.17)$$

Bewegen wir die Ladung ins Unendliche, $r_0 \rightarrow \infty$, dann wandert die abnehmende Spiegelladung ins Zentrum der Kugel. Bewegen wir sie dagegen nahe an die Kugel heran, dann nimmt die Spiegelladung zu und wandert vom Zentrum weg in Richtung der Ladung. Ist

q nahe der Kugel, dann ist die Spiegelladung $-q$ und sitzt an dem an der Kugeloberfläche gespiegelten Ort. Die durch die Ladung auf der Metalloberfläche induzierte *Flächenladungsdichte* ist

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2-2\xi\cos\theta_0)^{3/2}}, \quad \xi = \frac{R}{r_0}, \quad (3.18)$$

wobei θ_0 der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 ist. In Abb. 3.6 ist die Ladungsdichte in Einheiten von $-q/4\pi R^2$ geplottet. Die Influenzladungen auf der Kugeloberfläche sind in Richtung

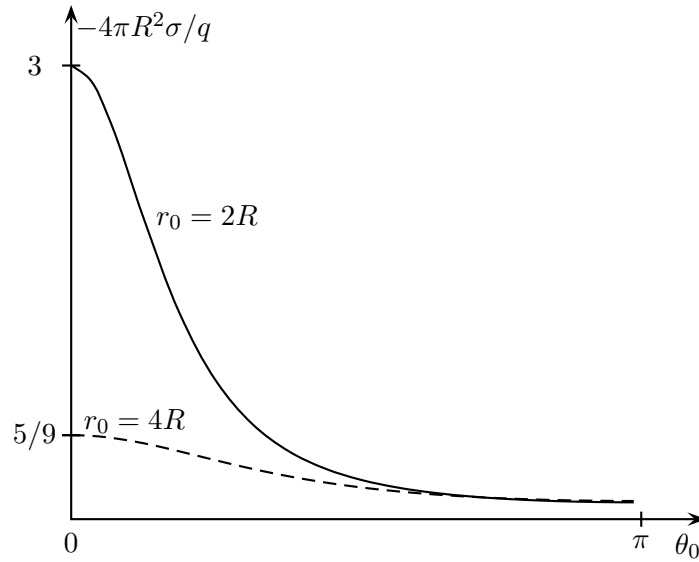


Abbildung 3.6: Oberflächenladungsdichte σ einer geerdeten Metallkugel induziert durch eine Punktladung q im Abstand r_0 vom Zentrum der Kugel. θ_0 ist der Winkelabstand zwischen Punktladung und Ort auf der Kugeloberfläche.

der Punktladung konzentriert. Je näher die Ladung der Kugel kommt, desto akzentuierter ist diese Konzentration.

Die Kraft auf die Punktladung ist gleich der Kraft zwischen Ladung und Spiegelladung. Der Abstand der Ladungen ist $r_0 - r_1 = r_0(1 - R^2/r_0^2)$. Gemäß Coulombs Kraftgesetz ist diese *anziehende Kraft*

$$|\mathbf{F}| = -\frac{qq'}{|r_0 - r_1|^2} = \frac{q^2}{R^2} \frac{\xi^3}{(1-\xi^2)^2}, \quad \xi = \frac{R}{r_0}. \quad (3.19)$$

Weit weg von der Kugel ist die Kraft invers proportional zu r_0^3 und nahe der Kugel invers proportional zum quadrierten Abstand von der Kugeloberfläche.

3.2.3 Leitende Kugel im homogenen Feld

Wir betrachten nun eine *leitende Kugel* im homogenen Feld, dessen asymptotische Kraftlinien parallel zur x -Achse verlaufen. In Abwesenheit der Kugel sind Potential und homogenes Feld gleich

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = -E_0 x \implies \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x. \quad (3.20)$$

Wir denken es uns entstanden durch die Superposition zweier Felder, dem einer fernen Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$, $r_0 \rightarrow \infty$, und dem einer Ladung q an der Stelle $-\mathbf{r}_0$. Für

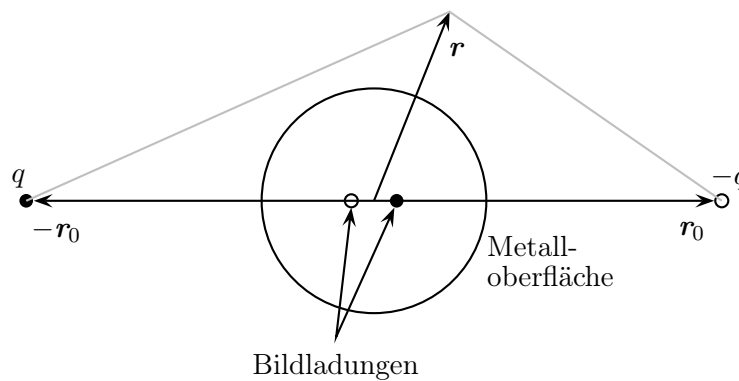


Abbildung 3.7: Zwei ins Unendliche rückende Ladungen $\pm q$ und ihre Spiegelladungen in Bezug auf eine leitende Kugel vom Radius R erzeugen ein homogenes elektrisches Feld und einen elektrischen Dipol im Mittelpunkt der Kugel.

große r_0 ist das Potential der beiden Ladungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{q}{\sqrt{(x + r_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x - r_0)^2 + y^2 + z^2}} \\ &\rightarrow \frac{q}{r_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2x/r_0}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x/r_0}} \right) \rightarrow -\frac{2qx}{r_0^2} \quad \text{für } r_0 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um Übereinstimmung mit (3.20) herzustellen muss mit r_0 auch q anwachsen, so daß

$$\frac{2q}{r_0^2} = E_0 \quad (3.22)$$

konstant ist. Nun berücksichtigen wir die leitende Kugel im zweiten Schritt. Auf ihrer Oberfläche muss das Potential verschwinden. Wie oben ersetzen wir die leitende Kugel durch zwei Spiegelladungen auf der Verbindungslinie zwischen den bereits vorhandenen

Ladungen bei \mathbf{r}_0 und $-\mathbf{r}_0$,

$$q' = \frac{R}{r_0}q = \frac{Rr_0}{2}E_0 \quad \text{bei} \quad \mathbf{r}_1 = \frac{R^2}{r_0}\mathbf{e}_x \quad \text{und} \quad -q' \quad \text{bei} \quad -\mathbf{r}_1.$$

Die Spiegelladungen $\pm q'$ rücken zusammen, wenn die Ladungen $\mp q$ auseinanderrücken und bilden im Grenzfall $r_0 \rightarrow \infty$ einen elektrischen Dipol mit Moment

$$\mathbf{p} = 2\mathbf{r}_1q' = R^3\mathbf{E}_0. \quad (3.23)$$

Das von den Spiegelladungen erzeugte Dipolfeld ist

$$\begin{aligned} \Phi_D &= \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{q'}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1|} \\ &= \frac{Rr_0E_0}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+r_1)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &\rightarrow \frac{Rr_0E_0}{2r} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2xr_1/r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+2xr_1/r^2}} \right) \rightarrow E_0R^3 \frac{x}{r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wir schließen, daß im homogenen Feld die Randwertaufgabe dadurch gelöst wird, daß wir im Mittelpunkt der Kugel einen virtuellen elektrischen Dipol mit endlichem Moment anbringen. Aus dem ursprünglich homogenen Feld entsteht dann das durch den Dipol gestörte inhomogene Feld mit Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = E_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) x. \quad (3.25)$$

Das entsprechende elektrische Feld hat die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (3.26)$$

Wie gefordert nimmt Φ auf der Kugeloberfläche $r = R$ den konstanten Wert 0 an. Die Influenzladung auf der Oberfläche ist

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3}{4\pi} \frac{E_x}{R}. \quad (3.27)$$

Das Oberflächenintegral dieser Ladungsdichte verschwindet und es gibt keinen Unterschied zwischen einer geerdeten und einer ungeladenen isolierten Kugel. Die Feldlinien der leitenden Kugel im ursprünglich homogenen Feld ist in Abbildung (3.8) skizziert.

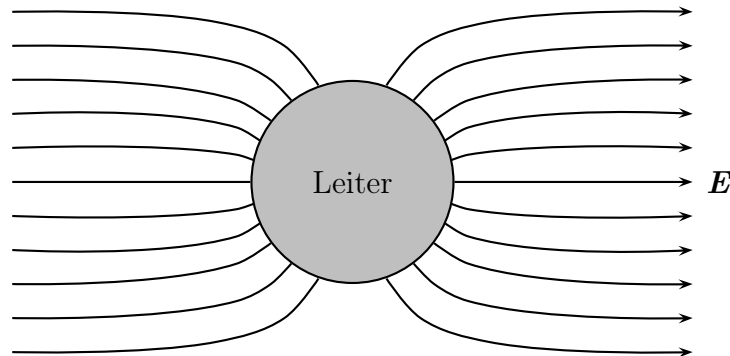


Abbildung 3.8: Eine leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld.

3.3 Die Methode der Greenschen Funktionen

Bisher haben wir das Dirichlet Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad \Phi(\mathbf{r})|_{\partial V} = 0 \quad (3.28)$$

für Punktladungen untersucht und für einige Fälle gelöst. Die spezielle Lösung für eine Einheitsladung mit Ladungsdichte $\rho = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ heisst *Greensche Funktion* $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,

$$\Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0. \quad (3.29)$$

Die Greensche Funktion G_D für den Halbraum (3.13) und den Außenraum einer Kugel (3.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode berechnet. Weitere Beispiele werden Sie in den Übungen kennenlernen. Aus der Greenschen Funktion läßt sich nun leicht die allgemeine Lösung von (3.28) gewinnen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'). \quad (3.30)$$

Wie man sofort sieht, löst dieses Φ das Dirichlet Randwertproblem (3.28). Im Allgemeinen verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen allerdings nicht und wir haben es nicht mit einem Dirichlet-Problem zu tun. Zum Beispiel könnten anstelle der Potentialwerte auf den Oberflächen die Oberflächenladungsdichten vorgegeben sein. In jedem Falle hat im interessierenden Raumbereich V die Greenfunktion die Form

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \Delta G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.31)$$

mit einer harmonischen und symmetrischen Funktion $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Die Freiheit bei der Wahl dieser Funktion nutzt man aus, um die Randbedingungen zu realisieren. Dabei wird folgende *Greensche Identität* gebraucht

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' (\Phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= \int_V d^3 r' (\Phi(\mathbf{r}') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= -4\pi \int_V d^3 r' \Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + 4\pi \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

um das Potential Φ am Orte $\mathbf{r} \in V$ durch die Ladungsverteilung innerhalb von V und seinen Werten auf dem Rand ∂V von V auszudrücken:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right). \quad (3.32)$$

Bei der Herleitung dieser Formel wurde nirgendwo angenommen, dass Φ auf ∂V konstant ist. Deshalb ist sie nicht nur für die Behandlung von idealen Leitern nützlich.

3.3.1 Dirichlet-Problem

Ist das Potential auf dem Rande ∂V bekannt, dann wählt man die auf dem Rande verschwindende Dirichlet-Greenfunktion G_D in (3.29). Dann gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}'). \quad (3.33)$$

Verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen, dann vereinfacht sich diese Formel auf das frühere Resultat (3.30).

Feld einer Ladungsverteilung in der Nähe einer leitenden Kugel

In (3.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode die Greenfunktion G_D für das Außengebiet einer Kugel vom Radius R bestimmt,

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - R^2 \mathbf{r}'/r'^2|}. \quad (3.34)$$

Die Normalenableitung auf der Kugeloberfläche ist

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'}|_{r'=R} = -\frac{\partial G_D}{\partial r'}|_{r'=R} = \frac{\xi}{R^2} \frac{\xi^2 - 1}{(1 + \xi^2 - 2\xi \cos \theta')^{3/2}},$$

wobei $\xi = R/r$ und θ' den Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' bezeichnet. Mit Hilfe von (3.33) können wir nun das Feld einer Ladungsverteilung außerhalb der Kugel berechnen, wenn wir das Potential auf der Kugeloberfläche kennen. Für eine leitende Kugel ist $\Phi = V$ konstant auf der Oberfläche und wegen

$$\oint df' \frac{\partial G_D}{\partial r'}|_{r'=R} = 2\pi R^2 \oint d\theta' \sin \theta' \frac{\partial G_D}{\partial r'}|_{r'=R} = -\frac{4\pi R}{r}$$

ist das elektrostatische Potential außerhalb der Kugel

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{RV}{r}. \quad (3.35)$$

Es ist äquivalent zum Potential erzeugt von der Ladungsdichte ρ , seiner Spiegelladungsdichte innerhalb der Kugel und einer Punktladung $R\Phi_L$ im Ursprung.

3.3.2 Neumann-Problem

Ist die Normalenableitung des Potentials auf ∂V vorgegeben, dann wird man die Neumann-Greenfunktion G_N wählen, für die der zweitletzte Term in (3.32) konstant ist. Wegen des Gaußschen Satzes ist

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_N}{\partial n'} = \int_V d^3r' \Delta' G_N = -4\pi \int_V d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -4\pi$$

falls \mathbf{r} in V liegt, und wir können nicht verlangen, daß die Normalableitung von G_N am Rand des Gebietes verschwindet. Aber wir können fordern, daß

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} = -\frac{4\pi}{|\partial V|}, \quad |\partial V| = \text{Volumen von } \partial V, \quad (3.36)$$

gilt. Dann vereinfacht sich (3.32) zu

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}, \quad (3.37)$$

wobei Φ_0 den *Mittelwert* des Potentials auf der Oberfläche ∂V bezeichnet,

$$\Phi_0 = \frac{1}{|\partial V|} \oint_{\partial V} df \Phi(\mathbf{r}). \quad (3.38)$$

Für ideale Leiter gilt (3.6) und das Außenpotential ist durch die Ladungsverteilung ρ außerhalb der Leiter und die Oberflächenladungsdichte bestimmt,

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}'). \quad (3.39)$$

Für Dielektrika muss man allerdings die allgemeinere Formel (3.37) benutzen.

3.4 Kapazitäten

Wie früher betrachten wir mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten. Die elektrischen Potentiale $\Phi_{L,i}$ auf den Leitern $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Grundgleichungen linear sind, können wir das Potential als Superposition von Lösungen $\Phi_i(\mathbf{r})$ schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_{L,i} \Phi_i(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Dabei ist Φ_i die Lösung, die auf dem i 'ten Leiter den Wert 1 hat und auf den anderen verschwindet,

$$\Phi_i(\mathbf{r})|_{\partial V_j} = \delta_{ij}. \quad (3.41)$$

Die Ladung auf dem i 'ten Leiter ist dann gegeben durch

$$q_i = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_i} df \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\text{aussen}} = \sum_j C_{ij} \Phi_{L,j} \quad (3.42)$$

mit den *Kapazitätskoeffizienten*

$$C_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_i} df \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \Big|_{\text{aussen}}. \quad (3.43)$$

In diesen Formeln sind die Normalableitungen in Richtung des Raumbereichs V , d.h. weg von den Leitern, zu wählen. Der Koeffizient C_{ij} mißt die auf dem i 'ten Leiter induzierte Ladung, wenn alle Leiter, mit Ausnahme des j 'ten, geerdet sind. Im Gaußschen Maßsystem

hat die Kapazität die Dimension Ladung/Spannung = Länge. Die Umrechnung in das SI-System geschieht mit dem Faktor $4\pi\epsilon_0$, so daß $1\text{cm} \equiv 1/9 \cdot 10^{-11} \text{C/V} = 10/9 \text{ pF}$ (Picofarad) ist. Wäre die Spannung des j 'ten Leiters 1V und die auf dem i 'ten Leiter induzierte Ladung 1C , dann wäre C_{ij} gleich 1C/V .

Die elektrostatische Energie der Kapazitäten ergibt sich aus

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3r \nabla(\Phi \nabla\Phi) = -\frac{1}{8\pi} \sum_i \oint_{\partial V_i} df \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{\text{aussen}}$$

und nimmt eine einfache Form an,

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{L,i} q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{L,i} C_{ij} \Phi_{j,L}. \quad (3.44)$$

Als Anwendung berechnen wir nun die Kapazität von Kugel- und Plattenkondensatoren.

3.4.1 Kugelkondensator

Der Kugelkondensator besteht aus einer inneren Kugel vom Radius R_1 und einer äußeren Kugelschale mit Innenradius R_2 . Die Kugel trage die Ladung q und die Kugelschale die entgegengesetzte Ladung $-q$. Im Außenraum und in der Kugelschale verschwindet das Potential, $\Phi_{L,2} = 0$. Im Raum zwischen Kugel und Kugelschale ist

$$\Phi(r) = q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (3.45)$$

In der leitenden Kugel ist das Potential konstant

$$\Phi(r) = \Phi_{L,1} = q \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad r \leq R_1. \quad (3.46)$$

Man kann die Ladung q durch die Potentialdifferenz zwischen den Leitern ausdrücken, $q = C(\Phi_{L,1} - \Phi_{L,2})$, wobei C die oben eingeführte *Kapazität* C_{12} ist. Wegen $\Phi_{L,1} - \Phi_{L,2} = q(1/R_1 - 1/R_2)$ ist diese

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.47)$$

Zur Bestimmung der Kapazität einer isolierten Kugel lassen wir den Radius R_2 der Schale gegen ∞ streben und finden $C_{\text{Kugel}} = R_1$. In SI-Einheiten ist die Kapazität einer Kugel

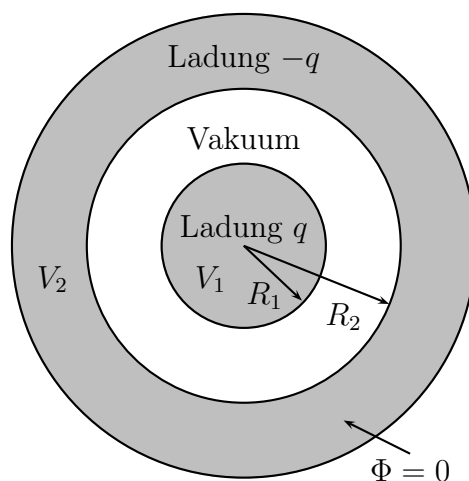


Abbildung 3.9: Zur Kapazität eines Kugelkondensators.

vom Radius R gleich

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad 4\pi\epsilon_0 = 1.11 \cdot 10^{-11} \text{ Amperesek/Voltmeter.} \quad (3.48)$$

Die Kapazität einer Kugel ist also proportional zu ihrem Radius. Zur Illustration berechnen wir die Kapazität der Erde, die von einem elektrischen Feld umgeben ist. Es ist in ebenem Gelände senkrecht von oben nach unten gerichtet und hat im zeitlichen Mittel den Wert (in SI-Einheiten)

$$|\mathbf{E}| \approx 130 \text{ Volt/m.}$$

Diese rührt von einer negativen Ladung

$$q = 4\pi\epsilon_0 R^2 |\mathbf{E}| \approx 5.9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

auf der Erde, wobei wir für die Erdoberfläche $4\pi R^2$ den Wert $5.1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ benutzten. Gegenüber dem Fixsternsystem hat unsere Erde mit dem Radius $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ die Kapazität von etwa 700 pF.

Lassen wir in (3.47) die Radien von Kugel und Kugelschale bei festgehaltener Differenz $R_2 - R_1 = d$ gegen Unendlich streben, dann finden wir die Kapazität

$$C = \frac{R_1^2 + R_1 d}{d} = \frac{4\pi R_1^2}{d} \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{d}{4\pi R_1} \right). \quad (3.49)$$

Für große Radien erhält man zwei leitende ebene Platten im Abstand d , d.h. einen *Plat-*

tenkondensator mit Kapazität (in Gauß'schen Einheiten)

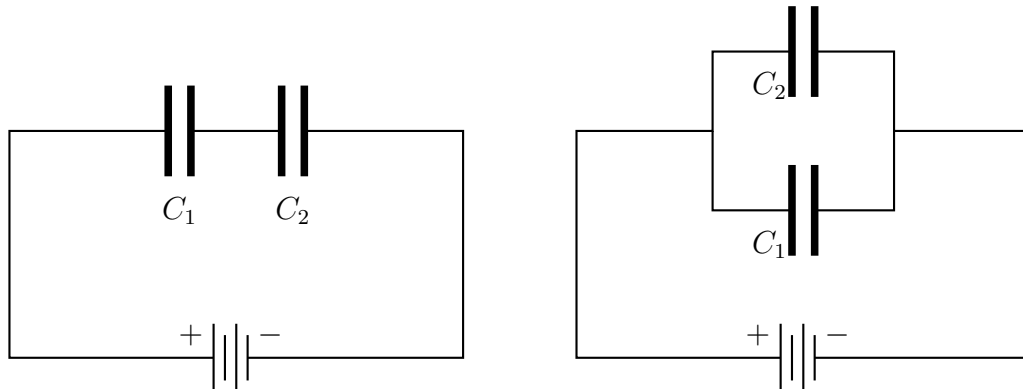
$$C = \frac{F}{4\pi d}, \quad F = \text{Fläche des Plattenkondensators.} \quad (3.50)$$

Die Zunahme der Kapazität mit der Plattenfläche wird bei Mehrplattenkondensatoren ausgenutzt. Eine Abart ist der abstimmbare Drehkondensator.

Wir notieren noch die Kapazität von zwei langen coaxialen Zylindern mit Radien R_1, R_2 und Länge L ,

$$C = \frac{1}{2} \frac{L}{\log(R_2/R_1)}. \quad (3.51)$$

Generell nimmt die Kapazität mit der Größe der Leiter zu. Kommen sich die Leiter näher, dann nimmt bei konstantem Feld ihre Potentialdifferenz ab und die Kapazität des Systems nimmt ebenfalls zu. Wir erwarten, dass das Einbringen eines Materials zwischen zwei Platten aufgrund der Influenz ebenfalls die Kapazität des Kondensators erhöht. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.



Abschliessend notieren wir noch die Kapazität mehrerer Kondensatoren. Sind zwei Kondensatoren wie in der linken Abbildung in Reihe geschaltet, dann tragen beide die gleiche Ladung. Da die Gesamtspannung die Summe der Teilspannungen ist, gilt

$$\frac{1}{C_{\text{Reihe}}} = \frac{V}{q} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (3.52)$$

Sind sie parallel geschaltet wie auf der rechten Seite der Abbildung, dann sind ihre Spannungen gleich und ihre Ladungen addieren zur Ladung des Systems, also

$$C_{\text{parallel}} = \frac{q_1 + q_2}{V} = C_1 + C_2. \quad (3.53)$$

Kapitel 4

Multipole und spezielle Funktionen

Wir betrachten statische und lokalisierte Ladungsverteilungen. Die Ladungsdichte sei beliebig innerhalb einer Kugel vom Radius R um den Ursprung. Außerhalb der Kugel sei $\rho(\mathbf{r}) = 0$. Für $r > R$ kann das Potential Φ nach Potenzen von R/r entwickelt werden. Diese Entwicklung wird im Folgenden abgeleitet.

Das Potential der Ladungsverteilung ist

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (4.1)$$

wobei nur \mathbf{r}' mit $r' < R$ zum Integral beitragen. Für $r > R$ ist $r > r'$ und wir dürfen das Coulombpotential in eine Taylor-Reihe nach r'/r entwickeln. Für $0 \leq \xi < 1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi}} = 1 + \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{8}\xi^2 + \frac{5}{16}\xi^3 + \dots \quad (4.2)$$

und wir erhalten nach Ordnung der Reihenglieder in Potenzen von r'/r folgende Reihendarstellung für das Coulombpotential,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \frac{5(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^3 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')r^2 r'^2}{2r^7} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Den Zähler im dritten Term können wir noch umformen:

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ij} \right) (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2),$$

wobei wir $\delta_{ij}(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) = 0$ benutzten. Hier und auch im Folgenden verwenden wir

die Summationskonvention: Über alle Indizes, die zweimal in einem Produkt auftreten, wird summiert, in der obigen Formel also über i und j .

Wir führen folgende zur lokalisierten Ladungsverteilung gehörenden Größen ein:

$$q = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Ladung} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Dipolmoment} \quad (4.5)$$

$$Q_{ij} = \int d^3r \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) \rho(\mathbf{r}) \quad \text{Quadrupolmomente.} \quad (4.6)$$

Eingesetzt in (4.1) erhalten wir die Entwicklung für das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r}, \mathbf{Q}\mathbf{r}) - r^2 \text{tr } \mathbf{Q}}{2r^5} + O(r^{-4}), \quad (4.7)$$

wobei $\mathbf{Q} = (Q_{ij})$ den symmetrischen und spurlosen Quadrupoltensor bezeichnet. Das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ hat weit weg von der Quelle die Entwicklung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5} + O(r^{-4}). \quad (4.8)$$

In großer Entfernung wirkt eine in einer Umgebung des Ursprungs lokalisierte Ladungsverteilung so, als ob sie aus einer im Ursprung befindlichen Punktladung der Stärke q besteht. Verschwindet die Gesamtladung q der Verteilung, dann beschreibt der führende Term einen elektrischen Dipol mit dem Moment \mathbf{p} .

4.1 Dipole und Quadrupole

Das Dipolfeld: Der zweite Term auf den rechten Seiten in (4.7) beschreibt das Dipolfeld. Es fällt für große Abstände mit einer Potenz von r schneller ab als das Coulombfeld. Der Name rührt daher, daß man 2 Punktladungen braucht, um einen Dipol zu erzeugen. In der Tat, für die leitende Kugel im konstanten elektrischen Feld erzeugten die nahe beieinander liegenden Spiegelladungen ein Dipolfeld. Sei also

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= q(\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}) - \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \\ &\rightarrow -q\mathbf{a} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(a^2) \end{aligned}$$

die Ladungsdichte zweier entgegengesetzt geladener Punktteilchen im Abstand $a = |\mathbf{a}|$. Nun führen wir den Limes $a \rightarrow 0$ durch, wobei wir das Produkt $q\mathbf{a} = \mathbf{p}$ festhalten. Dann

bleibt die Ladungsverteilung eines Dipols \mathbf{p} am Ort \mathbf{r}_0 :

$$\rho(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.9)$$

Das Potential des Dipols ist (siehe früher)

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{p} \cdot \int d^3r' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (4.10)$$

Das Quadrupolfeld: Ein reines Quadrupolfeld kann, wie in der Abbildung (4.1) gezeigt, mit 4 Punktladungen erzeugt werden,

$$\rho(\mathbf{r}) = q (\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_1) + \delta(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_1) - \delta(\mathbf{r} - b\mathbf{e}_2) - \delta(\mathbf{r} + b\mathbf{e}_2)). \quad (4.11)$$

Das Coulomb- und Dipolfeld dieser vier Ladungen verschwindet und für den symmetrischen und spurlosen *Quadrupoltensor* finden wir

$$\mathbf{Q} = \frac{2q}{3} \text{diag} (2a^2 + b^2, -2b^2 - a^2, b^2 - a^2). \quad (4.12)$$

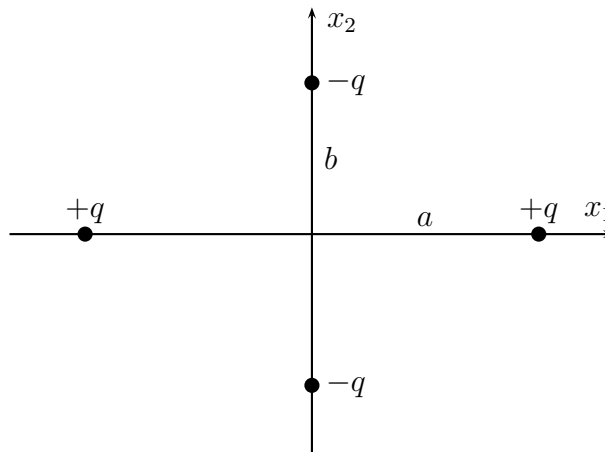


Abbildung 4.1: Vier Punktladungen erzeugen ein Quadrupolfeld.

Man kann sich kompliziertere Ladungsverteilungen ohne Gesamtladung, Dipol- und Quadrupolmoment beschaffen. Diese werden dann durch höhere Multipolmomente beschrieben. Sie werden einige Beispiele im Seminar besprechen.

4.2 Energie und Drehmoment von Multipolen

Die Ladungsdichte ρ sei wieder in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert. Ihre Energie im äußeren Feld beträgt

$$U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (4.13)$$

Wir entwickeln das äußere Potential für kleine Argumente und erhalten

$$\begin{aligned} U &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \Phi_{\text{ext}}(0) + \mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} \left(Q_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \int d^3r \rho(\mathbf{r}) r^2 \right) \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots \end{aligned}$$

Der letzte Term proportional zum Integral über ρr^2 verschwindet, da $\Delta \Phi_{\text{ext}}$ am Ursprung, wo keine Quellen von Φ_{ext} sitzen, Null ist. Damit bleibt für das Wechselwirkungspotential

$$U = q \Phi_{\text{ext}}(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i \partial_j \Phi_{\text{ext}}|_0 + \dots \quad (4.14)$$

Wir können daraus zum Beispiel die potentielle Energie zweier Dipole bestimmen. Der Dipol \mathbf{p}_1 am Ort \mathbf{r}_1 erzeugt am Aufpunkt \mathbf{r}_2 das Feld

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{r}_{12} - \mathbf{p}_1 (r_{12})^2}{(r_{12})^5}, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Die Wechselwirkungsenergie dieses Dipols mit einem zweiten Dipol \mathbf{p}_2 am Ort \mathbf{r}_2 ist

$$U_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(r_{12})^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{(r_{12})^5}. \quad (4.15)$$

Die Kraft auf eine um den Ursprung konzentrierte Ladungsverteilung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \left(\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \right) \\ &= q \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \frac{1}{2} (Q_{ij} \partial_i \partial_j) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.16)$$

Insbesondere wirken auf elektrische Dipole und Quadrupole in einem räumlich konstanten

Feld keine Kräfte. Das *Drehmoment* einer Ladungsverteilung im Ursprung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\text{mech}} &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} \wedge (\mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (x_l \partial_l) \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots) \\ &= \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}(0) + (\mathbf{Q} \cdot \nabla) \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}|_0 + \dots,\end{aligned}\quad (4.17)$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausnutzten, daß \mathbf{E}_{ext} wirbelfrei ist. Das elektrische Feld wirkt auf den Dipol mit einem Drehmoment und stellt, sofern der Dipol nicht an einer Drehung gehindert wird, die Dipolrichtung parallel zur Feldrichtung.

4.3 Differentialoperatoren und spezielle Funktionen

Die bekanntesten krummlinigen Koordinaten sind die Kugelkoordinaten,

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \equiv r \mathbf{e}_r. \quad (4.18)$$

für die sich die Koordinatenlinien senkrecht schneiden. Andere Beispiele von rechtwinkligen Koordinaten sind kartesische oder Zylinderkoordinaten. Die Einheitsvektoren \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_ϕ in

$$d\mathbf{r} = g_r \mathbf{e}_r dr + g_\theta \mathbf{e}_\theta d\theta + g_\phi \mathbf{e}_\phi d\phi \quad (4.19)$$

bilden eine orthonormierte ortsabhängige Basis des \mathbb{R}^3 und ein Vektor ist eine Linearkombination dieser Vektoren,

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad A_r = (\mathbf{A}, \mathbf{e}_r) \quad \text{usw.}$$

Mit (4.18) berechnen sich die Koeffizienten zu

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r \quad \text{und} \quad g_\phi = r \sin \theta. \quad (4.20)$$

Im Folgenden betrachten wir beliebige rechtwinklige Koordinatensysteme mit im Allgemeinen von (4.20) verschiedenen metrischen Koeffizienten. Das Quadrat des Abstands zweier infinitesimal benachbarter Punkte \mathbf{r} und $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ ist dann

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_r^2 dr^2 + g_\theta^2 d\theta^2 + g_\phi^2 d\phi^2. \quad (4.21)$$

Entsprechend ist ein durch $dr, d\theta$ und $d\phi$ gekennzeichnetes *Volumenelement*

$$dV = g_r g_\theta g_\phi dr d\theta d\phi. \quad (4.22)$$

Die gerichteten Flächenelemente der Koordinatenflächen sind:

$$\begin{aligned} r = \text{const} : & \quad \mathbf{e}_r g_\theta g_\phi d\theta d\phi \\ \theta = \text{const} : & \quad \mathbf{e}_\theta g_r g_\phi dr d\phi \\ \phi = \text{const} : & \quad \mathbf{e}_\phi g_r g_\theta dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.3.1 Differentialoperatoren in rechtwinkligen Koordinaten

Im Folgenden werden wir die wichtigsten in der Elektrostatik auftretenden Differentialoperatoren für rechtwinklig krummlinige Koordinatensysteme bestimmen.

Der Gradient: Aus

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} d\phi = \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= (\nabla \Phi, \mathbf{e}_r) g_r dr + (\nabla \Phi, \mathbf{e}_\theta) g_\theta d\theta + (\nabla \Phi, \mathbf{e}_\phi) g_\phi d\phi \end{aligned} \quad (4.24)$$

lesen wir die Komponenten des Gradienten $\nabla \Phi = (\nabla \Phi)_r \mathbf{e}_r + (\nabla \Phi)_\theta \mathbf{e}_\theta + (\nabla \Phi)_\phi \mathbf{e}_\phi$ ab:

$$(\nabla \Phi)_r = \frac{1}{g_r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (\nabla \Phi)_\theta = \frac{1}{g_\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (\nabla \Phi)_\phi = \frac{1}{g_\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}. \quad (4.25)$$

Die Divergenz: Die Divergenz ist der Grenzwert eines Oberflächenintegrals

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f}, \quad (4.26)$$

und mit Hilfe von (4.23) ergibt sich

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{1}{dV} \left(E_r g_\theta g_\phi \Big|_r^{r+dr} d\theta d\phi + E_\theta g_r g_\phi \Big|_\theta^{\theta+d\theta} dr d\phi + E_\phi g_r g_\theta \Big|_\phi^{\phi+d\phi} dr d\theta \right).$$

Für infinitesimale Volumen ergeben sich auf der rechten Seite die Ableitungen und wir finden folgenden Ausdruck für die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (E_r g_\theta g_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta g_r g_\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} (E_\phi g_r g_\theta) \right). \quad (4.27)$$

Der Laplace-Operator: Mit $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$ erhalten wir für rechtwinklige Koordinaten den Laplace-Operator

$$\Delta\Phi = \frac{1}{g_r g_\theta g_\phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{g_\theta g_\phi}{g_r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{g_r g_\phi}{g_\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{g_r g_\theta}{g_\phi} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \right) \right). \quad (4.28)$$

Diese Formeln gelten für beliebige orthogonale krummlinige Koordinaten (wenn wir diese mit r, θ, ϕ bezeichnen).

Für im Unendlichen genügend schnell abfallende Funktionen Ψ, Φ oder falls das Gebiet V keinen Rand hat, folgt auch

$$\int_V dV \Psi \Delta\Phi = - \int_V dV \nabla\Psi \cdot \nabla\Phi = \int_V dV \Phi \Delta\Psi, \quad \forall \Psi, \Phi.$$

Angewandt auf $\Psi = \Phi$ finden wir, daß Δ in folgenden Sinne negativ ist,

$$\int_V \Phi \Delta\Phi \leq 0. \quad (4.29)$$

Setzen wir für die metrischen Koeffizienten (4.23) ein, dann folgt für Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi \\ \Delta_\Omega \Phi &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Der Operator Δ_Ω wirkt nur auf die Winkelvariablen¹, aber nicht auf die radiale Variable r . Außerhalb der Quellen ist das Potential harmonisch, $\Delta\Phi = 0$, und wir wollen nun einen vollständigen Satz von harmonischen Funktionen einführen.

4.4 Legendre-Polynome und Kugelfunktionen

Beim Aufsuchen von *harmonischen Funktionen* in Kugelkoordinaten machen wir den Separationsansatz

$$\Phi = f(r)Y(\theta, \phi). \quad (4.31)$$

¹In der Quantenmechanik wird er eine sehr wichtige Rolle spielen: Er ist proportional zum quadrierten Drehimpuls.

Eingesetzt in $\Delta\Phi = 0$ führt dies auf die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{1}{r}(rf)''Y + \frac{1}{r^2}f\Delta_\Omega Y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{f}(rf)'' + \frac{\Delta_\Omega Y}{Y} = 0, \quad (4.32)$$

wobei Strich die Ableitung nach dem Radius bedeutet. Die Summe einer nur von r abhängenden und einer nur von θ, ϕ abhängenden Funktion kann nur verschwinden, wenn beide Summanden konstant sind und die beiden Konstanten zu Null addieren. Also ist insbesondere $\Delta_\Omega Y = \lambda Y$ mit konstantem λ . Aber wegen

$$\int_{S^2} d\Omega \bar{Y} \Delta_\Omega Y = \lambda \int_{S^2} d\Omega \bar{Y} \cdot Y = - \int_{S^2} d\Omega \nabla \bar{Y} \cdot \nabla Y \leq 0, \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi,$$

kann λ nicht positiv sein. Deshalb können wir $\lambda = -\ell(\ell+1)$ mit $\ell \geq 0$ setzen. Weiter unten werden wir sehen, daß ℓ eine natürliche Zahl sein muß. Mit dieser Parametrisierung von λ gilt

$$\Delta_\Omega Y_\ell(\theta, \phi) = -\ell(\ell+1)Y_\ell(\theta, \phi) \quad \text{und} \quad r(rf_\ell)'' = \ell(\ell+1)f_\ell. \quad (4.33)$$

Die zweite Gleichung hat die Lösungen

$$f_\ell = a \cdot r^\ell \quad \text{und} \quad f_\ell = a \cdot r^{-\ell-1}. \quad (4.34)$$

Die erste Lösung divergiert für große Radien und wird zumindest für die Multipolentwicklung unbrauchbar sein.

Die Lösung der ersten Gleichung in (4.33) führt auf die Kugelfunktionen. Wir machen wiederum einen Separationsansatz $Y_\ell(\theta, \phi) = P_\ell(\theta)Q(\phi)$ (wir werden gleich sehen, daß Q nicht von ℓ abhängt) mit dem Resultat

$$\Delta_\Omega Y_\ell = Q(\phi) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P_\ell(\theta)}{\partial\theta} \right) + \frac{P_\ell(\theta)}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial\phi^2} = -\ell(\ell+1)Q(\phi)P_\ell(\theta).$$

Wir dividieren durch $P_\ell Q$ und multiplizieren mit $\sin^2\theta$:

$$\sin\theta \frac{1}{P_\ell(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial P_\ell(\theta)}{\partial\theta} \right) + \ell(\ell+1) \sin^2\theta + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{\partial^2 Q(\phi)}{\partial\phi^2} = 0.$$

Offensichtlich muß die Summe der ersten beiden Terme und der letzte Term jeweils konstant sein:

$$0 = Q_m''(\phi) + m^2 Q_m(\phi) \quad (4.35)$$

$$0 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_\ell^m(\theta)}{\partial \theta} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_\ell^m(\theta). \quad (4.36)$$

Die erste Gleichung (4.35) hat die Lösungen

$$Q_m(\phi) = e^{\pm im\phi}. \quad (4.37)$$

Die Raumpunkte (r, θ, ϕ) und $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ sind identisch und Φ muß an beiden Orten denselben Wert annehmen, also

$$Q_m(\phi + 2\pi) = Q_m(\phi) \implies m \in \mathbb{Z}. \quad (4.38)$$

Damit haben die Lösungen die Form

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_\ell^m(\theta). \quad (4.39)$$

Zur Lösung der Gleichung (4.36) setzen wir

$$z = \cos \theta \in [0, 1], \quad \frac{d}{dz} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}. \quad (4.40)$$

Damit lautet diese Gleichung

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{dP_\ell^m}{dz} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right) P_\ell^m = 0. \quad (4.41)$$

Zylindersymmetrische Lösungen hängen nicht von ϕ ab wenn Symmetrieachse und 3-Achse zusammenfallen. Daher verschwindet m für zylindersymmetrische Lösungen und (4.41) wird zur *Legendresche Differentialgleichung*:

$$(1-z^2)P_\ell'' - 2zP_\ell' + \ell(\ell+1)P_\ell = 0. \quad (4.42)$$

Zur Konstruktion der Kugelflächenfunktionen $\mathcal{Y}_{\ell m}$ entwickeln wir das Coulombpotential

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'z}}, \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'.$$

Für $r < r'$ können wir nach Potenzen von r/r' und für $r > r'$ nach Potenzen von r'/r entwickeln. Dabei ist es nützlich

$$r_{<} = \min\{r, r'\} \quad , \quad r_{>} = \max\{r, r'\} \quad (4.43)$$

und das Skalarprodukt zwischen den Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{r}}'$ einzuführen,

$$z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'. \quad (4.44)$$

Damit schreibt sich das Coulombpotential gemäß

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tz}} \quad t = \frac{r_{<}}{r_{>}}. \quad (4.45)$$

Nun entwickeln wir nach Potenzen von t und finden folgende, für $r \neq r'$ *konvergente Potenzreihe* für G :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} t^{\ell} P_{\ell}(z), \quad z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'. \quad (4.46)$$

Die $P_{\ell}(z)$ sind offensichtlich Polynome vom Grade ℓ . Zeigt \mathbf{r} in die Richtung von \mathbf{r}' dann ist $z = 1$, und wegen

$$\frac{1}{r_{>}} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2t}} = \frac{1}{r_{>}} \frac{1}{1 - t} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell} t^{\ell},$$

erfüllen die Polynome die Normierungsbedingung

$$P_{\ell}(z = 1) = 1. \quad (4.47)$$

Da G für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ harmonisch ist, muß jeder Term in der konvergenten Entwicklung (4.46) harmonisch sein,

$$\Delta \left(\frac{t^{\ell}}{r_{>}} P_{\ell}(z) \right) = 0 \implies \Delta_{\Omega} P_{\ell}(z) = -\ell(\ell + 1) P_{\ell}(z). \quad (4.48)$$

Wir machten davon Gebrauch, daß $t^{\ell}/r_{>}$ eine Lösung der radialen Differentialgleichung (4.33) ist.

Um zylindersymmetrische Lösungen zu konstruieren legen wir die 3-Achse in Richtung von \mathbf{r}' . Dann ist $z = \cos \theta$ und $P_{\ell}(z) = P_{\ell}(\cos \theta)$ zylindersymmetrisch. Deshalb erfüllen die sogenannten *Legendre-Polynome* $P_{\ell}(z)$ die Legendresche Differentialgleichung (4.42). Die Polynome können mit (4.45) und (4.46) leicht bestimmt werden:

$$P_{\ell}(z) = \frac{1}{\ell!} \frac{d^{\ell}}{dt^{\ell}} \Big|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 - 2tz}}. \quad (4.49)$$

Die tiefsten Legendre-Polynome sind $P_0 = 1$ und

$$P_1 = z, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad P_4 = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3) \dots \quad (4.50)$$

Wir werden einige wichtige Eigenschaften dieser Polynome ableiten. Dazu benutzen wir die Greenfunktion mit Dirichlet-Randbedingungen auf der Kugeloberfläche mit Radius R ,

$$G_D = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R}{r'} \frac{1}{|\mathbf{r} - R^2 \mathbf{r}'/r'^2|}, \quad (4.51)$$

die wir früher mit der Spiegelladungsmethode bestimmt hatten. Wir entwickeln G_D nach Potenzen von r'/r beziehungsweise r/r' :

$$\begin{aligned} G_D(r > r' > R) &= \frac{1}{r} \sum_{\ell} \left(\left(\frac{r'}{r} \right)^{\ell} - \frac{r'_s}{R} \left(\frac{r'_s}{r} \right)^{\ell} \right) P_{\ell}(z) \\ G_D(r < r' < R) &= \frac{1}{r'} \sum_{\ell} \left(\left(\frac{r}{r'} \right)^{\ell} - \frac{R}{r'_s} \left(\frac{r}{r'_s} \right)^{\ell} \right) P_{\ell}(z), \end{aligned}$$

wobei $r'_s = R^2/r'$ der Abstand der Spiegelladung vom Ursprung ist. Die erste Reihendarstellung konvergiert außerhalb der Kugel, die zweite innerhalb. Die Normalenableitung von G_D ist

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} = \mp \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R},$$

wobei das obere Vorzeichen für $r > r'$ und das untere für $r < r'$ gilt². Setzen wir die Reihenentwicklungen für G_D ein, so finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_D}{\partial n'}(r > R) &= - \sum (2\ell + 1) \frac{1}{rR} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell} P_{\ell}(z) \\ \frac{\partial G_D}{\partial n'}(r < R) &= - \sum (2\ell + 1) \frac{1}{R^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{\ell} P_{\ell}(z). \end{aligned}$$

Mit (3.33) hat *jede harmonische Funktion* die Darstellung

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_D}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}')$$

²Benutzt man G_D in (4.51) so findet man

$$\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{R^2 - r^2}{R} \frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rRz)^{3/2}}$$

Hier setzen wir obige Reihenentwicklungen ein und finden

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{R}{4\pi r} \sum (2\ell + 1) \left(\frac{R}{r}\right)^\ell \oint d\Omega' P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r > R \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum (2\ell + 1) \left(\frac{r}{R}\right)^\ell \oint d\Omega' P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'), \quad r < R.\end{aligned}\quad (4.52)$$

Aus der Reihenentwicklung für kleine r folgt insbesondere

$$\Phi(0) = \frac{1}{4\pi} \oint d\Omega' \Phi(R\hat{\mathbf{r}}'). \quad (4.53)$$

Der Wert einer harmonischen Funktion im Zentrum einer Kugel ist gleich ihrem Mittelwert auf der Kugeloberfläche. Für $r = R$ fallen die beiden Entwicklungen in (4.52) zusammen und ergeben

$$\Phi(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell + 1) \oint d\Omega' P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \Phi(\mathbf{e}_{r'}), \quad (4.54)$$

wobei wir $R = 1$ gewählt haben. Diese wichtige Relation heißt *Vollständigkeitsrelation*: Eine „beliebige“ Funktion Φ auf der Sphäre S^2 kann als Linearkombination der Legendre-Polynome geschrieben werden. Diese Beziehung ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell + 1) P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') &= \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ &= \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta').\end{aligned}\quad (4.55)$$

Wir wollen die ϕ -Abhängigkeit der Legendre-Polynome $P_\ell(z)$ mit z in (4.44) genauer untersuchen und dabei eine Beziehung zwischen den P_ℓ und Kugelflächenfunktionen herstellen. Nach (4.48) sind die P_ℓ Eigenfunktionen von Δ_Ω . Früher haben wir gezeigt, daß Eigenfunktionen von Δ_Ω eine einfache exponentielle ϕ -Abhängigkeit haben können. Deshalb entwickeln wir das Argument $z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$ von P_ℓ nach Potenzen von $\exp[i(\phi - \phi')]$,

$$z = \frac{1}{2} \sin \theta \sin \theta' e^{i(\phi - \phi')} + \cos \theta \cos \theta' + \frac{1}{2} \sin \theta \sin \theta' e^{-i(\phi - \phi')}, \quad (4.56)$$

und erhalten eine entsprechende Entwicklung des Polynoms P_ℓ vom Grade ℓ ,

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} e^{im(\phi - \phi')} F_{\ell m}(\cos \theta, \cos \theta'), \quad F_{\ell m} \in \mathbb{R}.$$

Als Funktion von (ϕ, θ) oder auch als Funktion von (ϕ', θ') erfüllt P_ℓ die Differentialglei-

chung (4.48). Entsprechend gilt

$$\frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{dF_{\ell m}}{dz} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) F_{\ell m} = 0, \quad z = \cos \theta \text{ bzw. } \cos \theta'.$$

Also erfüllen die $F_{\ell m}$ dieselbe Differentialgleichung wie die P_ℓ^m in (4.41). Die (regulären) Lösungen dieser Differentialgleichung sind bis auf Multiplikation mit einer Zahl eindeutig, und wir schließen

$$F_{\ell m}(\theta, \theta') \sim P_\ell^m(\theta) P_\ell^{-m}(\theta').$$

Nun führen wir schlußendlich die Kugelfunktionen $\mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \sim \exp(im\phi) P_\ell^m(\theta)$ ein und wählen die Normierung dieser Funktionen so, daß

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\theta', \phi') \quad (4.57)$$

gilt. Mit dieser Normierung schreibt sich die Vollständigkeitsrelation (4.55) gemäß

$$\sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (4.58)$$

Mit $P_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \left(e^{i(\phi - \phi')} \sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \right) + c.c. \\ P_2 &= \frac{3}{8} \left(e^{2i(\phi - \phi')} \sin^2 \theta \sin^2 \theta' + 4e^{i(\phi - \phi')} \sin \theta \cos \theta \sin \theta' \cos \theta' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (3 \cos^2 \theta - 1)(3 \cos^2 \theta' - 1) \right) + c.c. \end{aligned}$$

folgen dann die expliziten Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & \mathcal{Y}_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, & \mathcal{Y}_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ \mathcal{Y}_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}, & \mathcal{Y}_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}, & \mathcal{Y}_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned}$$

$\mathcal{Y}_{\ell, -m}$ ist bis auf eine Phase gleich $\mathcal{Y}_{\ell m}^*$. Es ist üblich, die Phasen so zu wählen, daß

$$\mathcal{Y}_{\ell, -m} = (-)^m \mathcal{Y}_{\ell m}^* \quad (4.59)$$

gilt. Wegen der speziellen θ, ϕ -Abhängigkeit des Argumentes z ist

$$\mathcal{Y}_{\ell m} \sim \sum_{p-q=m} a_{\ell,p,q} \cdot (\sin \theta)^{p+q} e^{i(p-q)\phi}, \quad (p, q \geq 0)$$

und deshalb verschwinden die Kugelfunktionen mit $m \neq 0$ an den Polen,

$$\mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\theta = 0, \phi) = \mathcal{Y}_{\ell, m \neq 0}(\theta = \pi, \phi) = 0. \quad (4.60)$$

Zeigen \mathbf{r} und \mathbf{r}' in die gleiche Richtung dann ist $z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = 1$ und mit der Normierungsbedingung (4.47) gilt

$$1 = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |\mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 \Rightarrow \mathcal{Y}_{\ell 0}(0) = \sqrt{\frac{\ell+1}{4\pi}}, \quad (4.61)$$

wobei wir $\mathcal{Y}_{\ell 0}(0) > 0$ benutzten. Mit (4.57) folgt dann für $\theta' = 0$

$$P_{\ell}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(\theta). \quad (4.62)$$

Integrieren wir (4.58) über ϕ , dann ergibt sich

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=0,1,\dots} (2\ell+1) P_{\ell}(z') P_{\ell}(z) = \delta(z - z') \quad (z = \cos \theta). \quad (4.63)$$

Diese Vollständigkeitsrelation für die Legendre-Polynome folgt schon aus (4.54) für ϕ -unabhängige Potentiale. Ausgedrückt durch die Kugelfunktionen lautet die Vollständigkeitsrelation (4.54) nun folgendermaßen

$$\Phi(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0,1,\dots} \sum_{m=-\ell}^{\ell} c_{\ell m} \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi), \quad c_{\ell m} = (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi). \quad (4.64)$$

Wir haben das *Skalarprodukt* von zwei komplexwertigen Funktionen $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ eingeführt,

$$(\Psi, \Phi) = \oint_{S^2} d\Omega \Psi^*(\theta, \phi) \Phi(\theta, \phi). \quad (4.65)$$

Also kann *jede* (quadratintegrierbare) Funktion auf S^2 als Linearkombination der linear unabhängigen Kugelfunktionen geschrieben werden. Der Koeffizient der Kugelfunktion $\mathcal{Y}_{\ell m}$ in der Entwicklung ist gleich dem Skalarprodukt von $\mathcal{Y}_{\ell m}$ mit der dargestellten Funk-

tion. Mit (4.52) hat dann eine harmonische Funktion Φ die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi), \quad r > R \\ &= \sum_{\ell,m} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} (\mathcal{Y}_{\ell m}, \Phi_R) \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi), \quad r < R,\end{aligned}\quad (4.66)$$

wobei $\Phi_R(\theta, \phi) = \Phi(R, \theta, \phi)$ die Restriktion von Φ auf die Kugeloberfläche mit Radius R ist. Wählen wir $\Phi = \mathcal{Y}_{\ell m}$ in (4.64), so folgt unmittelbar, daß

$$(\mathcal{Y}_{\ell m}, \mathcal{Y}_{\ell' m'}) = \oint d\Omega \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (4.67)$$

Die Kugelfunktionen sind also orthogonal bezüglich des Skalarprodukts (\cdot, \cdot) und normiert. Sie bilden ein *vollständiges Orthonormalsystem* von Funktionen auf S^2 .

4.4.1 Potenzreihen und erzeugende Funktionen

Man kann auch versuchen, die Legendresche Differentialgleichung (4.42) mit einer Potenzreihe in z zu lösen

$$P_\ell = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.68)$$

Wir nehmen an, die Reihe konvergiere und kann gliedweise differenziert werden. Einsetzen von (4.68) in (4.42) führt auf Rekursionsrelationen, welche a_n mit a_{n-2} verbinden. Aus diesen Relationen folgt $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$. Für $\alpha = 0$ kann man a_0 und a_1 beliebig vorgeben³. Der Koeffizientenvergleich liefert

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \ell(\ell+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.69)$$

Wegen

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} \longrightarrow 1 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

ist der Konvergenzradius der Reihe (4.68) gleich eins, und diese definiert eine analytische Funktion innerhalb des Einheitskreises. Diese Funktion muß auf dem Einheitskreis eine

³Für $\alpha = 0$ gewinnt man schon die allgemeine Lösung der Legendreschen DG.

Singularität haben, es sei denn, die Reihe bricht ab und wird zu einem Polynom. Sie bricht aber genau dann ab, wenn ℓ eine ganze Zahl ist. Da wir aber $\ell \geq 0$ annehmen, muß $\ell \in \{0, 1, 2, \dots\}$ sein. Die Rekursionsrelation (4.69) zeigt, daß für diese erlaubten Werte für ℓ der Koeffizient $a_{\ell+2}$ verschwindet und daher P_ℓ ein Polynom vom Grade ℓ sein muß⁴. Für $a_1 = 0$ ist das Polynom gerade und für $a_0 = 0$ ungerade.

Für *gerades* ℓ erhalten wir

$$P_\ell = a_0 \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{2!} z^2 + \dots + (-1)^{\frac{\ell}{2}} \frac{\ell(\ell-2) \cdots 2 \cdot (\ell+1) \cdots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right), \quad (4.70)$$

und für *ungerades* ℓ

$$P_\ell = a_1 \left(z - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{3!} z^3 + \dots + (-1)^{\frac{\ell-1}{2}} \frac{(\ell-1)(\ell-3) \cdots 2 \cdot (\ell+2) \cdots (2\ell-1)}{\ell!} z^\ell \right). \quad (4.71)$$

Normiert man die Legendre-Polynome P_ℓ gemäß (4.47), dann findet man wieder die Lösungen (4.49).

Erzeugende Funktion: Die Legendre-Polynome können durch Ableiten von einfachen Polynomen erzeugt werden:

$$P_0(z) = 1, \quad P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell. \quad (4.72)$$

Beweis: Wir differenzieren die Gleichung

$$(z^2 - 1)u' = 2\ell zu \quad (4.73)$$

$(\ell + 1)$ -mal nach z . Unter Benutzung von

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v^{(2)} + \dots$$

ergibt sich

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2z(\ell + 1)u^{(\ell+1)} + \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 2\ell zu^{(\ell+1)} + 2\ell(\ell + 1)u^{(\ell)}$$

⁴ a_ℓ bestimmt $a_{\ell+2}$!

beziehungsweise die Legendresche Differentialgleichung für $u^{(\ell)}$:

$$(z^2 - 1)u^{(\ell+2)} + 2zu^{(\ell+1)} - \ell(\ell + 1)u^{(\ell)} = 0.$$

Nun erfüllt aber gerade $u = (z^2 - 1)^\ell$ die Gleichung (4.73). Setzen wir noch $P_\ell = u^{(\ell)}/2^\ell \ell!$, dann löst P_ℓ die Legendresche Differentialgleichung.

Kugelfunktionen

Wir kehren zur allgemeinen Gleichung (4.41) mit ganzzahligen ℓ und m zurück. Löst P_ℓ die Legendresche Differentialgleichung (4.42), dann löst die *Helmholtz'sche Funktion*

$$P_{\ell m} = \frac{d^m}{dz^m} P_\ell \quad (4.74)$$

die Differentialgleichung

$$\left((1z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2(m+1)z \frac{d}{dz} + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) \right) P_{\ell m} = 0.$$

Man braucht nur die Legendresche DG m -mal zu differenzieren. Wir schreiben nun

$$P_{\ell m}(z) = (-)^m (1 - z^2)^{-m/2} P_\ell^m(z).$$

und bestimmen durch Einsetzen die Differentialgleichung, der die *zugeordneten Legendre-polynome* P_ℓ^m dann genügen. Man findet die Differentialgleichung (4.41) und damit lösen die

$$P_\ell^m(z) = (-)^m (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_\ell(z) = \frac{(-)^m}{2^\ell \ell!} (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2 - 1)^\ell \quad (4.75)$$

die DG (4.41). Die Helmholtz-Funktion $P_{\ell m}$ ist ein Polynom vom Grad $\ell - m$. Das zugeordnete Legendre-Polynom P_ℓ^m ist dann vom Grade ℓ . Um zu den Kugelfunktionen zu gelangen, müssen wir die zugeordneten Legendre-Polynome mit $\exp(im\phi)$ und einem konventionellen Normierungsfaktor multiplizieren,

$$\mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad \ell \in \mathbb{N}_0, -\ell \leq m \leq \ell. \quad (4.76)$$

4.4.2 Punktladung in einem geerdeten „Faradaykäfig“

Im Innern einer Kugel mit Radius R befinde sich am Ort \mathbf{r}_0 eine Punktladung q . Auf der Kugeloberfläche soll das Potential verschwinden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß sich die Ladung auf der z -Achse ($\theta_0 = 0$) befindet. Dann ist Φ unabhängig von ϕ . Das Potential in der Kugel schreiben wir als Summe des Coulombpotentials der Punktladung plus einer harmonischen Funktion,

$$\begin{aligned}\Phi(r < R, \theta) &= \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h \\ &= \frac{q}{r_{>}} \sum_{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) + \sum_{\ell} a_{\ell} \left(\frac{r}{R} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta),\end{aligned}\quad (4.77)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$r_{<} = \min(r, r_0) \quad \text{und} \quad r_{>} = \max(r, r_0), \quad r_0 = |z_0| \quad (4.78)$$

einführten. Auf der Kugeloberfläche verschwindet das Potential genau dann, wenn

$$a_{\ell} = -\frac{q}{R} \left(\frac{r_0}{R} \right)^{\ell}$$

gilt. Also ist das Potential einer auf der z -Achse liegenden Punktladung im geerdeten sphärischen Faradaykäfig

$$\Phi(r \leq R, \theta) = q \sum_{\ell} \left(\frac{1}{r_{>}} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} - \frac{1}{R} \left(\frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} \right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (4.79)$$

Der harmonische Anteil ist gerade das Potential der Spiegelladung außerhalb der Kugel,

$$-\frac{q}{R} \sum_{\ell} \left(\frac{r_0 r}{R^2} \right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -\frac{Rq/r_0}{\sqrt{|\mathbf{r} - R^2 \mathbf{r}_0 / r_0^2|}}. \quad (4.80)$$

4.4.3 Zylindersymmetrische Probleme

In einem zylindersymmetrischen Problem hängt das Potential Φ nicht von ϕ ab, wenn wir die 3-Achse als Symmetrieachse wählen. Die allgemeine zylindersymmetrische Lösung der Laplacegleichung lautet also

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_{\ell} r^{\ell} + \frac{b_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta), \quad P_{\ell}(z) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \mathcal{Y}_{\ell 0}(z). \quad (4.81)$$

Mit der Orthogonalitätsrelationen ($z = \cos \theta$)

$$(P_\ell, P_{\ell'}) = 2\pi \int_{-1}^1 dz P_\ell(z) P_{\ell'}(z) = \frac{4\pi}{2\ell+1} (\mathcal{Y}_{\ell 0}, \mathcal{Y}_{\ell' 0}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (4.82)$$

können wir den r -abhängigen Faktor leicht bestimmen:

$$(\Phi, P_\ell) = \int_{-1}^1 d\cos \theta \Phi(r, \theta) P_\ell(\cos \theta) = \frac{2}{2\ell+1} \left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} \right). \quad (4.83)$$

In fast allen Anwendungen verschwinden entweder alle a_ℓ oder alle b_ℓ . Dann bestimmt diese Gleichung die Lösung (4.81) eindeutig.

Homogen geladener Ring

Wir berechnen das Feld eines geladenen Kreistrings mit Radius R wie in der folgenden Abbildung 4.2 gezeigt. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Kreis in der $x - y$ -Ebene liegt und sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Die Ladung sei gleichmäßig auf den Kreis $2\pi R$ verteilt. Dann ist die Ladungsdichte des als unendlich dünn idealisierten geladenen Kreises gleich

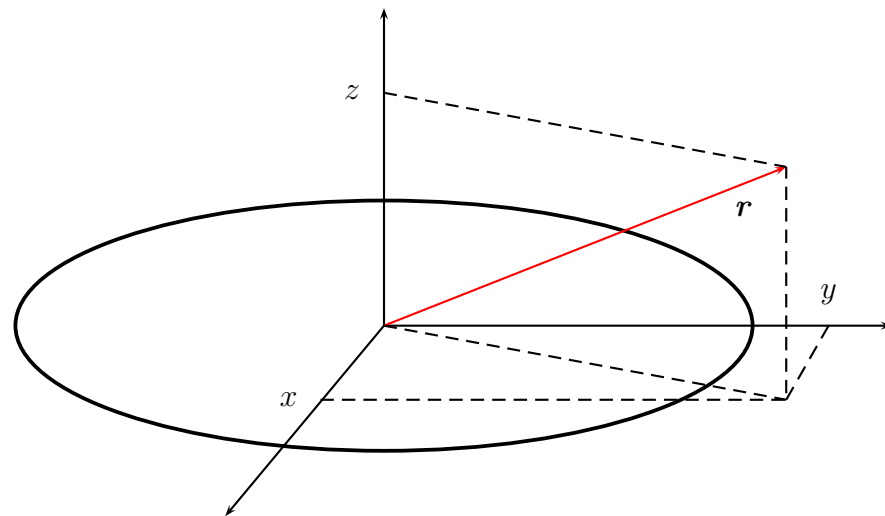


Abbildung 4.2: Zur Berechnung des Potentials eines homogen geladenen Kreistrings.

Die xy -Ebene liegt und sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Die Ladung sei gleichmäßig auf den Kreis $2\pi R$ verteilt. Dann ist die Ladungsdichte des als unendlich dünn idealisierten geladenen Kreises gleich

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi R} \delta(\rho - R) \delta(z), \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (4.84)$$

Wir berechnen zunächst das Potential auf der z -Achse. Ein Punkt $(0, 0, z)$ auf dieser Achse hat denselben Abstand $\sqrt{z^2 + R^2}$ zu jedem Punkt auf dem Ring, und entsprechend ist

$$\Phi(0, 0, z) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{z^2 + R^2}} \rho' d\rho' dz' d\phi' = \frac{q}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (4.85)$$

Auf der Symmetrieachse ist das Feld identisch mit demjenigen einer Punktladung auf der Achse im Abstand $\sqrt{z^2 + R^2}$. Das Potential ist für $r \neq R$ harmonisch und hat die Darstellung (4.81). Es ist nur regulär, falls die b_ℓ für $r < R$ verschwinden und falls die a_ℓ für $r > R$ verschwinden. Nun können wir die Entwicklungen

$$\Phi(r < R) = \sum a_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad \text{und} \quad \Phi(r > R) = \sum \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta) \quad (4.86)$$

mit dem Resultat (4.85) vergleichen. Auf der z -Achse ist $r = |z|$. Mit

$$\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}, \quad t = \frac{|z|}{R} = \frac{r}{R},$$

und mit $P_\ell(1) = 1$ finden wir für das Potential innerhalb des Kreises⁵

$$\begin{aligned} \Phi(r < R) &= \frac{q}{R} \sum_{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{\ell} \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \theta) \\ &= \frac{q}{R} \left(1 - \frac{r^2}{4R^2}(3 \cos^2 \theta - 1) + O((r/R)^4)\right), \end{aligned} \quad (4.87)$$

und außerhalb des Kreises

$$\begin{aligned} \Phi(r > R) &= \frac{q}{r} \sum_{\ell} \binom{-\frac{1}{2}}{\ell} \left(\frac{R}{r}\right)^{2\ell} P_{2\ell}(\cos \theta) \\ &= \frac{q}{r} \left(1 - \frac{R^2}{4r^2}(3 \cos^2 \theta - 1) + O((R/r)^4)\right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Weit weg vom Ring ist der führende Term, wie erwartet, das Coulombfeld. Der Dipolterm verschwindet und die erste Korrektur zum Monopolanteil ist das Quadrupolfeld.

⁵Die Binomialkoeffizienten sind definiert durch $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}$.

4.5 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wie früher betrachten wir eine statische und innerhalb einer Kugel vom Radius R lokalisierte Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$. Mit Hilfe der Kugelfunktionen können wir nun relativ schnell die Multipolentwicklung des Potentials Φ nach Potenzen von R/r ableiten. Wir erinnern uns an

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} P_{\ell}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') \\ &= \frac{1}{r_{>}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\theta', \phi') \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Verschwundet $\rho(\mathbf{r}')$ für $r' > R$, dann folgt für $r > R$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \sum_{\ell m} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} q_{\ell m} \frac{\mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}}, \quad (4.90)$$

mit den *Multipolmomenten*

$$q_{\ell m} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int d^3r r^{\ell} \mathcal{Y}_{\ell m}^*(\theta, \phi) \rho(\mathbf{r}). \quad (4.91)$$

Für $\ell = 0$ erhalten wir das „Monopolmoment“ Ladung, für $\ell = 1$ die Komponenten des Dipol-Momentes und für $\ell = 2$ die Komponenten des Quadrupolmoments. Speziell für $m = 0$ findet man

$$\begin{aligned} q_{00} &= \sqrt{4\pi} \int d^3r \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \rho(\mathbf{r}) \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \int d^3r \sqrt{\frac{3}{4\pi}} r \cos \theta \rho(\mathbf{r}) = \int d^3r z \rho(\mathbf{r}) \\ q_{20} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \int d^3r \sqrt{\frac{5}{4\pi}} r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} \int d^3r \left(z^2 - \frac{r^2}{3} \right) \rho(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Der Vergleich mit (4.4-4.6) zeigt

$$q_{00} = q, \quad q_{10} = p_3, \quad q_{20} = \frac{3}{2} Q_{33}. \quad (4.93)$$

Für festes ℓ gibt es $2\ell + 1$ Komponenten $q_{\ell m}$. In kartesischen Koordinaten ist die Anzahl unabhängiger Komponenten in der Multipolentwicklung nicht so offensichtlich. Wegen der

Symmetrie und Spurfreiheit hat zum Beispiel der Quadrupoltensor $9-3-1 = (2 \cdot 2 + 1) = 5$ unabhängige Komponenten. Von den $3^3 = 27$ Komponenten des Oktupolmoments Q_{ijk} sind tatsächlich nur $(2 \cdot 3 + 1) = 7$ unabhängig. Für höhere Multipole ist die sphärische Multipolentwicklung wesentlich einfacher und eleganter.

4.6 Vollständige Funktionensysteme

Abschliessend wollen wir die Eigenschaften der Legendre-Polynome und Kugelfunktionen geometrisch interpretieren. Wir werden dann besser verstehen, warum die P_ℓ ein vollständiges Orthogonalsystem auf dem Raum der Funktionen $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ und die $\mathcal{Y}_{\ell m}$ ein vollständiges Orthonormalsystem auf dem Raum der Funktionen $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ bilden. Diese Funktionen bilden jeweils einen *linearen Raum*. Als inneres Produkt wählen wir

$$(f, g) = \int_M \rho(z) \bar{f}(z) g(z) d^n z, \quad \rho(z) > 0, \quad (4.94)$$

wobei in der Elektrostatik folgende Räume und Dichten ρ auftreten:

$$\begin{aligned} M &= [-1, 1], & \rho dz &= dz & \text{für Legendre-Polynome,} \\ M &= S^2, & \rho(z) d^n z &= \sin \theta d\theta d\phi & \text{für Kugelfunktionen.} \end{aligned}$$

Die Bilinearform (\cdot, \cdot) ist ein *Skalarprodukt*:

Es ist *linear* im zweiten Argument und *antilinear* im ersten Argument,

$$(f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 (f, g_1) + \alpha_2 (f, g_2) \quad \text{und} \quad (f, g) = \overline{(g, f)}, \quad (4.95)$$

und es ist *positiv*

$$(f, f) \geq 0 \quad \text{und} \quad (f, f) = 0 \quad \text{nur, falls} \quad f = 0. \quad (4.96)$$

Zwei Funktionen f, g (Vektoren in diesem unendlich dimensionalen Funktionenraum) sind orthogonal, falls $(f, g) = 0$ ist. Die Länge oder Norm einer Funktion ist

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}. \quad (4.97)$$

Also ist der Raum der stetigen Funktionen $M \rightarrow \mathbb{C}$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, versehen mit einer Norm, ein sogenannter *normierter Raum*. Der Abstand zwischen zwei Funktionen ist

$$d(f, g) = \|f - g\|. \quad (4.98)$$

Ist der Raum bezüglich dieser Metrik vollständig, so heißt er *Hilbertraum*: Ein Hilbertraum ist ein linearer Raum, der bezüglich der durch das innere Produkt induzierten Metrik vollständig ist. In einem Hilbertraum konvergieren zum Beispiel alle Cauchy-Folgen gegen ein Element des Raumes. Es gilt der folgende

Satz: *Es gelten die Schwartzsche und Dreiecksungleichung*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad \text{und} \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (4.99)$$

Weiterhin ist

$$\|g\| \leq \|\lambda f + g\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.100)$$

genau dann, wenn $(f, g) = 0$ ist.

Beweis: Sei $\alpha = (f, g)$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = |\lambda|^2 \|f\|^2 + 2\Re(\bar{\alpha}\lambda) + \|g\|^2. \quad (4.101)$$

Damit gilt die letzte Aussage im Satz für $\alpha = 0$. Ist $f = 0$, dann sind die erste und letzte Behauptung trivial erfüllt. Sei nun $f \neq 0$. Wir setzen $\lambda = -\alpha/\|f\|^2$. Mit diesem λ wird (4.101) zu

$$0 \leq \|\lambda f + g\|^2 = \|g\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|f\|^2}.$$

Dies beweist die erste Ungleichung und zeigt, daß die dritte Behauptung nur für $\alpha = 0$ gelten kann. Die zweite Ungleichung im Satz folgt aus der ersten (man quadriert die zweite Ungleichung).

Der Raum der stetigen Funktionen auf M ist bezüglich der durch (4.94) induzierten Norm nicht vollständig. Man kann ihn aber vervollständigen. Der etwas größere Raum wird mit

$$L_2(M, \rho) \quad (4.102)$$

bezeichnet.

Die Legendre-Polynome sind orthogonal in $L_2([0, 1])$ und die Kugelfunktionen orthogonal in $L_2(S^2, \sin \theta d\theta d\phi)$. Dies ist einfach zu beweisen. Dazu schreiben wir die entsprechenden Differentialgleichungen als Eigenwertgleichungen:

$$Af_\ell = \ell(\ell + 1)f_\ell, \quad A = -\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} \quad \text{bzw.} \quad A = -\Delta_\Omega. \quad (4.103)$$

Der Differentialoperator A ist linear. Nach Wahl einer Basis im Funktionenraum ist er eine unendlich-dimensionale Matrix. Der zu A adjungierte Operator A^\dagger wird durch

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g) \quad (4.104)$$

definiert. Für einen *symmetrischen Operator* ist $A = A^\dagger$. Der Laplaceoperator Δ_Ω auf S^2 ist offensichtlich symmetrisch, siehe (4.29). Der erste Differentialoperator A in (4.103) ist es ebenfalls:

$$(f, Ag) = \int_{-1}^1 dz \bar{f} Ag = -(1 - z^2) (\bar{f} g' - \bar{f}' g) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 dz \overline{A f} g = (A f, g). \quad (4.105)$$

Wir setzen hier voraus, daß f und g bei $z = \pm 1$ regulär sind, so daß keine Oberflächen-terme auftreten.

Es seien nun f_ℓ und $f_{\ell'}$ Eigenfunktionen des symmetrischen Operators A mit Eigenwerten $\ell(\ell + 1)$ bzw. $\ell'(\ell' + 1)$. Dann ist

$$(A f_\ell, f_{\ell'}) = \ell(\ell + 1)(f_\ell, f_{\ell'}) = (f_\ell, A f_{\ell'}) = \ell'(\ell' + 1)(f_\ell, f_{\ell'}).$$

Für $\ell \neq \ell'$ muß also $(f_\ell, f_{\ell'}) = 0$ gelten. Deshalb sind die Legendre-Polynome bzw. Kugelfunktionen orthogonal zueinander. Die Kugelfunktionen sind normiert. Es verbleibt noch, die Norm der Legendre-Polynome zu bestimmen. Mit

$$\int_{-1}^1 dz \left(\frac{d^\ell}{dz^\ell} (1 - z^2)^\ell \right)^2 = \frac{2}{2\ell + 1} 4^\ell (\ell!)^2 \quad (4.106)$$

findet man, daß

$$(P_\ell, P_\ell) = \frac{2}{2\ell + 1} \quad \text{und damit} \quad (P_\ell, P_{\ell'}) = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}. \quad (4.107)$$

In der Funktionalanalysis zeigt man, daß die Eigenfunktionen jedes selbstadjungierten Operators A ein vollständiges Funktionensystem bilden. Jede Funktion $f \in L_2[M, \rho]$ ist eine Linearkombination der Eigenfunktionen von A .

Kapitel 5

Elektrisches Feld in Materie

Bisher untersuchten wir von Ladungen erzeugte elektrische Vakuumfelder, beschrieben durch die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = 0.$$

Nun sollen die entsprechenden Gleichungen in Isolatoren besprochen werden. Ein materieller Körper enthält positive und negative Ladungen, und zwar von jeder Sorte gleich viele, wenn er elektrisch neutral ist. Während nun beim *Leiter* eine der beiden Sorten frei beweglich ist (Elektronen beim Metall, Ionen beim Elektrolyten), sind beim *Isolator* beide Sorten quasielastisch an feste Orte gebunden. In einem Dielektrikum gibt es keine frei beweglichen Ladungen und die geladenen Teilchen können kaum aus ihrer Gleichgewichtsposition verschoben werden. Unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes verschieben sich die positiven Ladungen ein wenig in Richtung des Feldes und die negativen entgegengesetzt dazu, und zwar um eine der Stärke des Feldes proportionale Strecke. Diese gegenseitige Verschiebung der Ladungen nennen wir *Polarisation* und beschreiben sie durch einen Vektor \mathbf{P} . Die Polarisation induziert Zusatzfelder, die sich dem äußeren Feld überlagern.

5.1 Polarisation und dielektrische Verschiebung

Wir nehmen an, daß die Maxwell-Gleichungen des Vakuums mikroskopisch gültig sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = 4\pi\rho_m \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{E}_m = 0, \tag{5.1}$$

wobei \mathbf{E}_m das *mikroskopische elektrische Feld* und ρ_m die *mikroskopische Ladungsdichte* bedeuten. Das mikroskopische Feld von etwa 10^{23} Ladungsträgern je Kubikzentimeter ist aber derart kompliziert, daß seine exakte Bestimmung in makroskopischen Dielektrika

praktisch unmöglich ist. In einer Elementarzelle eines Festkörpers oder in einem Atom ist es von der Größe $E_m \sim e/(1A)^2 \sim 10^9 \text{V/cm}$, dabei ist e die Elementarladung und $1A = 10^{-8} \text{cm}$ ein Ångström. Noch schwerer wiegt unsere Unkenntnis über die Physik auf atomaren Skalen. Atomare Modelle lassen sich korrekt nur im Rahmen der Quantenmechanik entwickeln.

Messen wir allerdings nur Felder und Ladungsverteilungen auf makroskopischen Skalen, so mitteln wir automatisch über einen gewissen Raumbereich und ein Zeitintervall. Dabei werden die kurzwelligen und kurzzeitigen Fluktuationen des mikroskopischen Feldes geglättet. Die klassische Elektrodynamik ist deshalb nur für gemittelte Größen sinnvoll anwendbar.

Wir ordnen einem mikroskopischen Feld $A_m(t, \mathbf{r})$ sein geglättetes mittleres Feld

$$\langle A \rangle(t, \mathbf{r}) = \int d^3r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A(t, \mathbf{r}') = \int d^3r' f(\mathbf{r}') A(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.2)$$

zu. Die Funktion $f(\mathbf{r})$ sei bei $r = 0$ lokalisiert, nichtnegativ und $\int d^3r f(\mathbf{r}) = 1$. Mögliche Glättungsfunktionen sind

$$f(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi b^3} \theta(b - r) \quad \text{oder} \quad f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right). \quad (5.3)$$

Mit der ersten Wahl mitteln wir über Kugeln vom Radius b , zentriert um \mathbf{r} . Die Gauß-

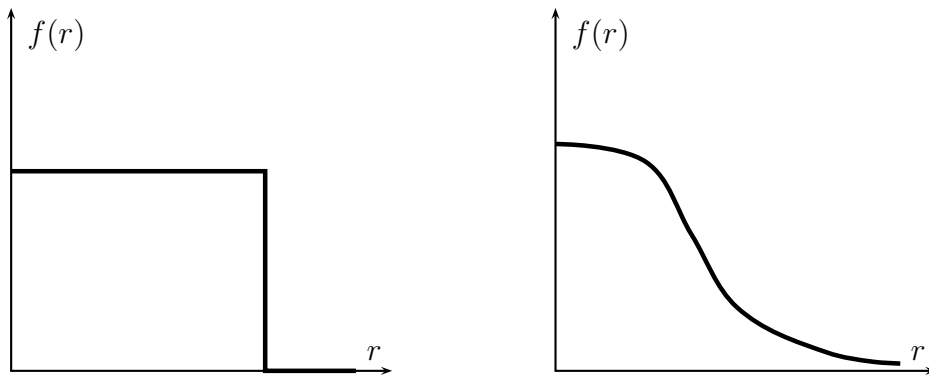


Abbildung 5.1: Zwei mögliche Glättungsfunktionen.

funktion leistet im Wesentlichen das Gleiche, aber mit einer analytischen Glättung. Die Mittelung geschieht über eine Länge b , die viel größer als der typische Atomabstand von etwa $a \sim 10^{-8} \text{cm}$ sein soll. Auf der anderen Seite soll b klein sein gegenüber der Skala, auf der die zu studierenden Phänomene variieren. Für eine Welle ist diese Skala durch die

Wellenlänge λ bestimmt, also fordern wir

$$a \ll b \ll \lambda. \quad (5.4)$$

Typische Mittelungslängen sind $\mu\text{m} \rightarrow \text{mm}$. Für $b \sim 10^{-2}\text{cm}$ sind etwa 10^{17} Teilchen in einem Mittelungsvolumen enthalten. Wegen der großen Zahl von Teilchen im Mittelungsvolumen werden durch die räumliche Mittelung auch die raschen zeitlichen Fluktuationen geglättet.

Man kann auch andere Mittelungen als in (5.2) benutzen. Die Resultate sollten aber von der Art der Mittelung unabhängig sein. Wir brauchen für die folgenden Betrachtungen die Annahme

$$\nabla \langle A \rangle = \langle \nabla A \rangle, \quad (5.5)$$

die auf die Mittelung (5.2) zutrifft,

$$\begin{aligned} \nabla \langle A \rangle(t, \mathbf{r}) &= \int d^3 r' \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A(t, \mathbf{r}') = - \int d^3 r' \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A(t, \mathbf{r}') \\ &= \int d^3 r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla A(t, \mathbf{r}') = \langle \nabla A \rangle(t, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Wir definieren nun das *makroskopische elektrostatische Feld*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}). \quad (5.6)$$

Da Mittelung und Ableitung vertauschen, erhalten wir aus den mikroskopischen Grundgleichungen (5.1) die makroskopischen Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \langle \rho_m \rangle(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = 0. \quad (5.7)$$

Wegen

$$\langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}) = -\langle \nabla \Phi_m \rangle(\mathbf{r}) = -\nabla \langle \Phi_m \rangle(\mathbf{r}), \quad (5.8)$$

wobei Φ_m das mikroskopische Potential ist, können wir das makroskopische elektrische Feld als Gradient des gemittelten skalaren Potentials $\Phi = \langle \Phi_m \rangle$ schreiben.

Wir berechnen Φ nun näherungsweise. Das Material bestehe aus N Atomen (Ionen, Moleküle). Die Ladung q_n des n 'ten Atoms (Ions, Moleküls) ist die Summe der Ladungen der Kerne und Elektronen, aus denen das Atom zusammengesetzt ist¹. Die Atome sind einige Ångström groß und damit ist der Abstand der Elektronen und des Kerns im n 'ten

¹In der klassischen Elektrodynamik dürfen wir die Kerne und Elektronen als Punktteilchen ansehen.

Atom zum Schwerpunkt \mathbf{r}_n des Atoms sehr viel kleiner als der Abstand zwischen dem Aufpunkt \mathbf{r} (wo Φ gemessen wird) und \mathbf{r}_n . In der Multipolentwicklung für das vom n 'ten Atom am Orte \mathbf{r} erzeugte Potential dürfen wir damit die Dipolnäherung machen,

$$\Phi_n = \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^{-3} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3}\right), \quad (5.9)$$

wobei q_n und \mathbf{p}_n die Ladung und das Dipolmoment des als klein angesehenen n 'ten Atomes (Ions) ist. In dieser Näherung ist das von allen Atomen im Material erzeugte Potential durch die Summe der Monopol- und Dipolfelder der einzelnen Atome (Ionen) gegeben,

$$\begin{aligned} \Phi_m(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \frac{\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei wir die Ladungsdichte der elektrischen Monopole und die Dipoldichte einföhrten,

$$\rho_{m,f} = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.11)$$

Statt über das Potential hätten wir direkt über die Näherung für die mikroskopische Ladungsdichte argumentieren können. In der Dipolnäherung ist die Ladungsdichte der Atome die Summe aus dem Monopol- und Dipolterm, siehe (4.9),

$$\rho_m(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N (q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)) = \rho_{m,f} + \rho_{m,P}, \quad (5.12)$$

und (5.10) ist dann äquivalent zu

$$\Phi_m = \int d^3r' \left(\frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\rho_{m,P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (5.13)$$

Nun mitteln wir (5.10), um vom mikroskopischen Potential zum mittleren Potential zu gelangen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3u f(u) \int d^3r' \left(\frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3} \right).$$

Wir setzen $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$, so daß

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r'' \int d^3u f(\mathbf{u}) \left(\frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}'' - \mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).\end{aligned}$$

Im zweitletzten Schritt haben wir die Integrationsvariable \mathbf{r}'' wieder mit \mathbf{r}' bezeichnet und die *makroskopische Ladungsdichte* der freien Ladungsträger (Ionen)

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \rho_{m,f}(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n q_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (5.14)$$

und die *makroskopische Polarisation*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \mathbf{P}_m(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n \mathbf{p}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (5.15)$$

eingeführt. Für die erste Wahl für f in (5.3) ist

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{p}_n, \quad (5.16)$$

wobei V die Kugel mit Radius b und \mathbf{r} als Zentrum ist. Die makroskopische Ladungsdichte entsteht durch Mittelung über alle Ladungen in V . Die gebundenen Ladungen werden sich in der Regel kompensieren, so daß ρ_f aus freien Überschußladungen resultiert. Die Polarisation \mathbf{P} ist das Dipolmoment je Volumeneinheit. Verschwindet das Dipolmoment der „Teilchen“, wie zum Beispiel das Dipolfeld der Elementarzelle eines Siliziumkristalls, dann muß man unter Umständen die Entwicklung (5.10) zu höheren Multipolmomenten fortsetzen. Für die Maxwellgleichungen benötigen wir die Quellen des elektrischen Feldes,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\Delta\Phi = 4\pi \left(\rho_f(\mathbf{r}) + \int d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \\ &= 4\pi(\rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})).\end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Ladungsdichte ρ setzt sich zusammen aus einer freibeweglichen Ladungsdichte ρ_f (zum Beispiel die Ladungsdichte, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird) und der *Polarisations-Ladungsdichte*

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.18)$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir betrachten einen Festkörper auf Skalen groß gegen den Atomabstand, so daß sich die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren, siehe Abb. 5.2a. Legt man ein elektrisches Feld an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen wie in Abb. 5.2b. Im Inneren des Festkörpers hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation in Feldrichtung eingezeichnet. In der Abb. 5.2d ist die Polarisationsladung $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ aufgetragen. Dieses Bild stimmt mit dem zweiten überein. Damit setzt sich

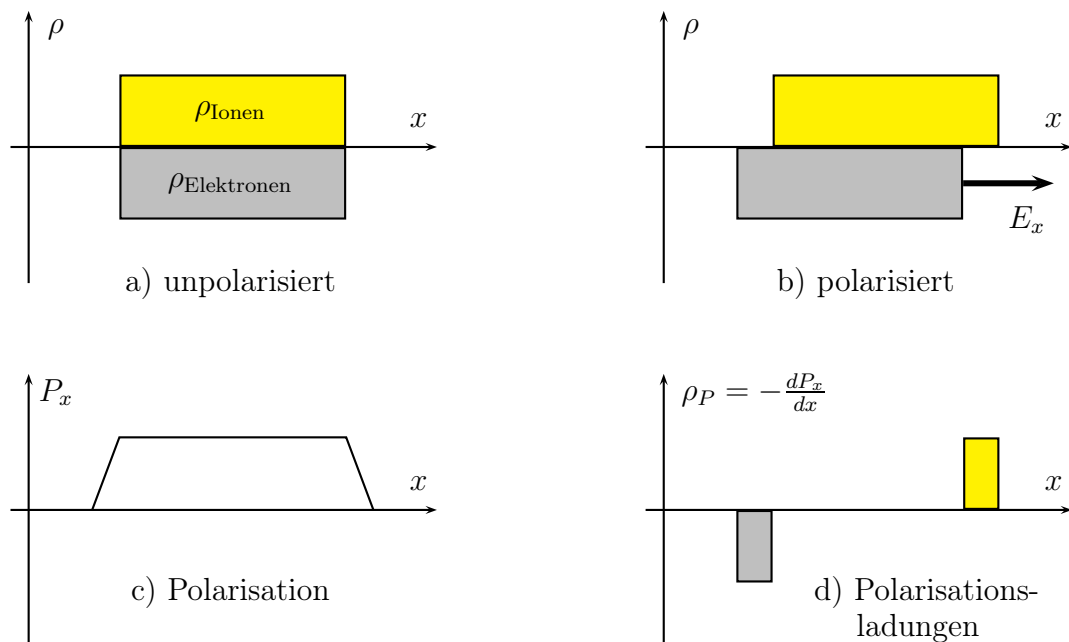


Abbildung 5.2: Zur Veranschaulichung der Polarisationsladungen.

die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer freibeweglichen Dichte ρ_f und der Polarisations-Ladungsdichte ρ_P ,

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.19)$$

Nun führt man in der Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho = 4\pi\rho_f - 4\pi\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (5.20)$$

die *dielektrische Verschiebung* (elektrische Erregung) \mathbf{D} ein

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (5.21)$$

so daß $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f$ ist. Deshalb lauten die Grundgleichungen der Elektrostatik für die gemittelten Felder in Medien

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f. \quad (5.22)$$

Für den Fluß der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens erhält man dann die freibewegliche Ladung $q_f(V)$ innerhalb des Volumens

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi q_f(V). \quad (5.23)$$

Die Polarisationsladungsdichte resultiert aus induzierten Dipolen, d.h. aus Ladungsverschiebungen. Dabei wird Ladung weder zu- noch abgeführt. Die gesamte Polarisationsladung muß also verschwinden:

$$Q_P = \int_V d^3r \rho_P = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (5.24)$$

Hier ist V ein das Dielektrikum umschließendes Gebiet. Im Gaußschen System haben \mathbf{D} , \mathbf{E} und \mathbf{P} die gleiche Dimension $\text{dyn}^{1/2} \text{cm}^{-1}$. Im SI-System wird aber \mathbf{E} in V/m, \mathbf{D} und \mathbf{P} in As/m² gemessen.

Man unterscheidet die Dielektrika nach den verschiedenen Typen von Polarisierungen, die auftreten können:

- **Eigentliche Dielektrika:** Hier verschieben sich die in einem Teilchen gebundenen positiven und negativen elektrischen Ladungen relativ zueinander, wobei elektrische Dipole erzeugt werden. Man spricht von *Deformationspolarisation*. Die Dielektrizitätskonstante ist von der Größe des elektrischen Feldes und (bei konstanter Dichte) der Temperatur unabhängig. Helium, Luft oder Kohlendioxid bei Raumtemperaturen sind eigentliche Dielektrika mit ϵ sehr nahe bei Eins. Zum Beispiel hat Luft mit 1 atm und 18°C eine Dielektrizitätskonstante $\epsilon = 1.00055$
- **Paraelektrikum:** Hier besteht die Materie aus permanenten Dipolen. Wasser, dessen H₂O Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, ist ein Paraelektrikum. In einem äußeren elektrischen Feld haben diese Momente die Energie $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$. Diese wird durch Ausrichtung der Momente in Feldrichtung erniedrigt. Die thermischen Fluktuationen verhindern eine vollständigen Ausrichtung. Je tiefer die Temperatur,

desto größer ist diese sogenannte *Orientierungspolarisation*. Methylalkohol, Glycerin oder Wasser bei Raumtemperatur sind paraelektrische Stoffe. Bei 18°C haben sie Dielektrizitätskonstanten 31.2, 56.2 und 81.1.

- **Ferroelektrikum:** Hier können sich die permanenten Dipolmomente unterhalb einer kritischen Temperatur T_C spontan, d.h. ohne äußeres Feld, ausrichten. Dies ist ein ähnlicher Effekt, wie die spontane Ausrichtung von permanenten magnetischen Dipolen in Ferromagneten, z.B. Eisen. Vertreter dieser Gruppe sind Bariumtitanat oder Kaliumdiwasserstoffphosphat. Ferromagnetische Stoffe sind durch die außerordentliche Größe der erreichbaren Dielektrizitätskonstanten gekennzeichnet. Man kann Werte von etlichen 10^4 beobachten. Diese sind aber nicht konstant und hängen von der angelegten Feldstärke und der Vorgeschichte des Stoffes ab. Ferroelektrika zeigen im Feld ein kompliziertes Verhalten und werden im Folgenden nicht mehr betrachtet.

Für viele dielektrische und paraelektrische Substanzen, man nennt sie *lineare Medien*, sind bei nicht zu großer Feldstärke \mathbf{P} und \mathbf{E} in guter Näherung proportional

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad , \quad \chi_e \text{ elektrische Suszeptibilität} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad , \quad \varepsilon \text{ relative Dielektrizitätskonstante}\end{aligned}\quad (5.25)$$

mit der Beziehung

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e. \quad (5.26)$$

Für anisotrope lineare Stoffe sind χ_e und ε Tensoren und entsprechend \mathbf{E} und \mathbf{P} nicht parallel. Für isotrope lineare Medien sind Feld und Polarisation parallel und ε ein Skalar. Die Materialgrößen ε und χ_e hängen von den äußeren Bedingungen wie Druck (bei Quarz) oder Temperatur ab. Ferroelektrika sind allerdings nichtlinear, da bei tiefen Temperaturen \mathbf{P} bereits für $\mathbf{E} = 0$ von Null verschieden sein kann.

Für lineare Medien setzen wir $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ in die Gleichung für \mathbf{D} ein und finden

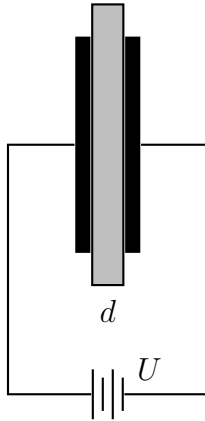
$$4\pi\rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi). \quad (5.27)$$

Ist das Medium zusätzlich isotrop, dann folgt die Poissongleichung für das gemittelte Potential,

$$\Delta\phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_f. \quad (5.28)$$

In Isolatoren existieren in guter Näherung keine freien Ladungsträger und das gemittelte

Potential ist harmonisch.



Bringen wir ein isotropes Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators, so erhöht sich dessen Kapazität. Ist die x -Achse senkrecht zu den (als unendlich groß angenommenen) Platten mit Abstand d , dann ist das Potential des homogenen Feldes gleich

$$\phi = \frac{U}{d} x.$$

Bei festgehaltener Spannung U ist die Verschiebungsdichte D_m mit Materie proportional zur Dielektrizitätskonstante des Mediums zwischen den Kondensatorplatten,

$$\epsilon = \frac{|D_m|}{|D_0|}. \quad (5.29)$$

Bei fester Spannung ist das elektrische Feld zwischen den Platten mit und ohne Medium gleich, $E_m = E_0$. Deshalb muss beim Einbringen des Dielektrikums die Ladung auf den Platten um eine Faktor ϵ erhöht werden um die Abschirmung durch die Polarisationsladungen an den Oberflächen des Dielektrikums zu kompensieren. Dies führt zu einer Zunahme der Kapazität,

$$\epsilon = \frac{\text{Kapazität des mit Materie gefüllten Kondensators}}{\text{Kapazität des leeren Kondensators}}. \quad (5.30)$$

Umgekehrt ist bei abgenommener Spannungsquelle die Ladung Q auf den Platten konstant und das elektrische Feld auf direkt an den Kondensatorplatten ändert nicht. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponente von D_n beim Übergang ins Medium ist die dielektrische Verschiebung dann mit und ohne Medium gleich, $D_m = D_0$, und es gilt

$$\epsilon = \frac{|E_0|}{|E_m|}. \quad (5.31)$$

Die Eigenschaft (5.30) ergibt eine Vorschrift zur Messung von Dielektrizitätskonstanten.

5.2 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Unsere früheren Resultate über die Randbedingungen für Metalle können beinahe

unverändert übernommen werden.

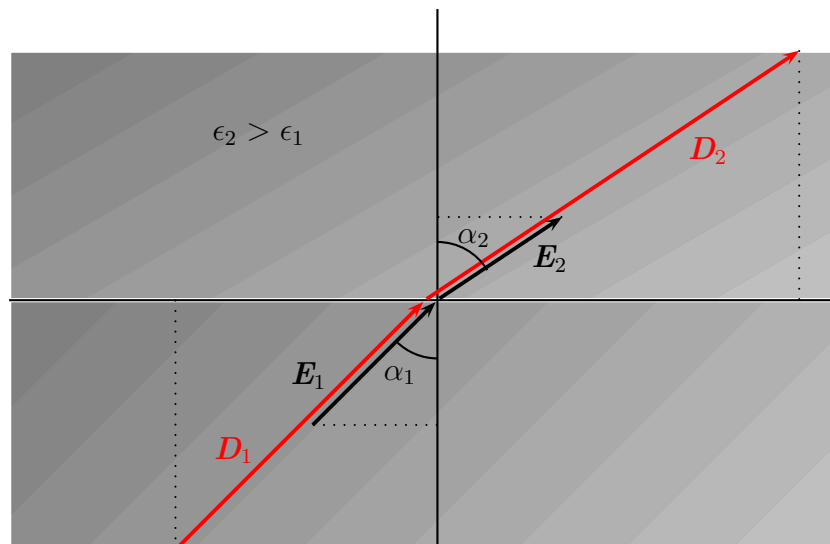
Wegen $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ verschwindet auch in Materialien die Ringspannung und

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{an der Grenzfläche,} \quad (5.32)$$

d.h. die *Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig*. Anstelle von (3.5) finden wir die Übergangsbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma_f. \quad (5.33)$$

Sind auf der Grenzfläche keine freibeweglichen Ladungen, so ist die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} stetig. Schließt das elektrische Feld in isotropen Medien ohne freibewegliche Ladungen mit der Grenzflächennormalen \mathbf{n} die Winkel α_1 und α_2 ein,



so gilt, wie man aus obiger Abbildung leicht abliest, die Relationen

$$|\mathbf{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathbf{E}_2| \sin \alpha_2, \quad |\mathbf{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathbf{D}_2| \cos \alpha_2. \quad (5.34)$$

Der „Einfallswinkel“ und „Brechungswinkel“ der Feldlinien stehen zueinander in der Beziehung

$$\frac{\tan \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\varepsilon_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (5.35)$$

Dieses Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien weicht von dem optischen Brechungsgesetz auf zwei Arten ab: Es tritt die Tangens- statt der Sinusfunktion auf und die elek-

trische Kraftlinie wird beim Eintritt in das elektrisch dichtere Medium von der Einfallsnormale fortgebrochen. Elektrisch dichter wird das Material mit der größeren Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Ist Medium 2 elektrisch dichter, so folgt aus Gl. (5.35) in der Tat

$$\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1.$$

Der Grenzfall Leiter ($\varepsilon_2 \rightarrow \infty$) ist enthalten. Hier wird $\alpha_1 = 0$ und die Kraftlinien verlaufen senkrecht zur Leiteroberfläche.

5.2.1 Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ε_i , eingebettet in einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε_a . Feld und Potential innerhalb der Kugel tragen den Index i und ausserhalb der Kugel den Index a . In beiden Dielektrika gilt

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla\Phi. \quad (5.36)$$

Die Stetigkeit von $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ und $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$ implizieren für das harmonische Potential Φ die Übergangsbedingungen

$$\varepsilon_a \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} \Big|_R = \varepsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_R \quad \text{und} \quad \Phi_a|_R = \Phi_i|_R. \quad (5.37)$$

Gilt die letzte Gleichung an einem Punkt der Kugeloberfläche, dann gilt sie wegen der Stetigkeit von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$ an allen Punkten auf der Kugeloberfläche. Aber an einem Punkte können wir immer $\Phi_a = \Phi_i$ erreichen. Weit weg von der Kugel ist das Feld homogen,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \gg R. \quad (5.38)$$

Die lineare Funktion $\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r}$ ist eine harmonische Funktion mit $\ell = 1$. Deshalb erwarten wir für die Außenlösung eine harmonische Funktion mit $\ell = 1$, also eine Linearkombination des homogenen Feldes und eines Dipolfeldes,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \left(-\mathbf{E}_\infty + \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r}, \quad r > R. \quad (5.39)$$

Da am Ursprung kein (makroskopischer) Dipol sitzt, können wir ein konstantes elektrisches Innenfeld mit Potential

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{r}, \quad r < R, \quad (5.40)$$

ansetzen. Die Anschlußbedingungen (5.37) führen auf

$$\mathbf{E}_\infty - \frac{\mathbf{p}}{R^3} = \mathbf{E}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_\infty + \frac{2\mathbf{p}}{R^3} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} \mathbf{E}_i. \quad (5.41)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man das konstante Innenfeld und das induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel als Funktionen des angelegten Feldes:

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} R^3 \mathbf{E}_\infty. \quad (5.42)$$

Speziell für eine Kugel mit dielektrischer Konstante ε im Vakuum ist

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_\infty, \quad \mathbf{D}_i = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \mathbf{E}_\infty. \quad (5.43)$$

Durch die Polarisierung wird das elektrische Kraftfeld in einer dielektrische Kugel schwächer als das primäre Außenfeld. Dies nennt man *Entelektrisierung*. Die Kraftlinien dringen in das Kugellinnere ein. Außen werden sie durch die Wirkung des (virtuellen) Dipolmomentes gekrümmt während sie innerhalb der Kugel parallel zur z -Achse verlaufen, siehe 5.3. Die Feldlinien zu \mathbf{D} , die sogenannten *Erregungslinien*, sind überall quellenfrei; das

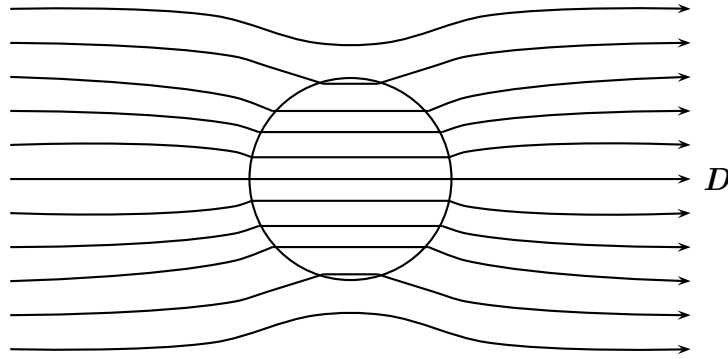


Abbildung 5.3: Eine dielektrische Kugel im Vakuum; Darstellung der Erregungslinien, d.h. der Feldlinien von \mathbf{D} . Ein Teil der (nicht eingezeichneten) Kraftlinien, d.h. der Feldlinien von \mathbf{E} , enden an der Oberfläche der Kugel.

gilt nicht für die *Kraftlinien*, d.h. den Feldlinien zum elektrischen Feld \mathbf{E} . Der Grenzfall $\varepsilon \rightarrow \infty$ beschreibt die ideal leitende Kugel im Vakuum. Dabei ist zu beachten, daß $\mathbf{D}_i = \varepsilon \mathbf{E}_i$ beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow \infty$ endlich bleibt, was mit $\mathbf{E}_i \rightarrow 0$ verträglich ist. Ist die Dipoldichte in der Kugel annähernd konstant, dann ist die Polarisierung in der Kugel

gleich

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{p}. \quad (5.44)$$

Die Felder \mathbf{E}_∞ , \mathbf{E}_i und \mathbf{P} sind parallel und wegen (5.41) ist der Unterschied von Innenfeld und asymptotischen Feld proportional zur Polarisierung,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad (5.45)$$

Die Polarisierung im Innern der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Feldes in der Kugel.

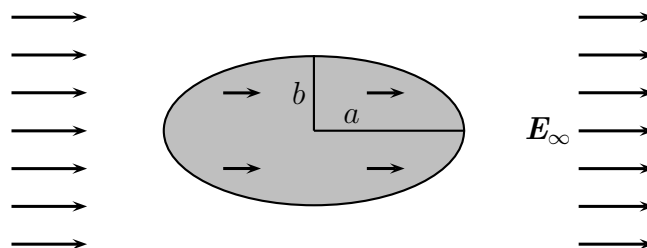
Vertauscht man die dielektrische Materie und den leeren Raum, dann ergibt sich ein kugelförmiger Hohlraum umgeben von einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε . Man findet im Hohlraum ein größeres Feld als im Außenraum,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{D}_i = \frac{3\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} \mathbf{E}_\infty. \quad (5.46)$$

Die Entelektrifizierung in einem Dielektrikum hängt von dessen Geometrie ab. In einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse parallel zum äußeren Feld liegt, ist das Innenfeld ebenfalls homogen und parallel zum asymptotischen Außenfeld,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - 4\pi N \mathbf{P}. \quad (5.47)$$

Die Zahl N ist geometrieabhängig und heisst *Entelektrifizierungsfaktor*.

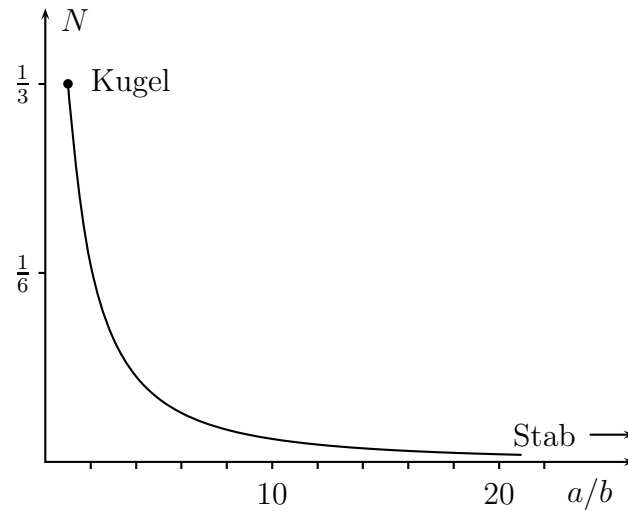


Sind $2a$ und $2b$ die Länge und der Durchmesser des Ellipsoids, dann lautet die Formel für den Entelektrifizierungsfaktor² als Funktion der Exzentrizität $\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

$$N = \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} - \epsilon \right). \quad (5.48)$$

²Siehe z.B. A. Sommerfeld „Elektrodynamik“ §13

Für die Kugel ist der Faktor $1/3$ und er verschwindet für einen langen Stab in Richtung des äußeren Feldes. Das Resultat (5.48) ist in der folgenden Abbildung geplottet.



Bei einem langen Stab in Feldrichtung sind die weit voneinander entfernten Polarisationsladungen nicht mehr in der Lage das Dielektrikum merklich zu entelektrifizieren. Dagegen ist für eine dünne Platte mit $a/b = 0$ der Entmagnetisierungsfaktor maximal, $N = 1$.

5.3 Clausius-Mosottische Formel

Wir verlassen vorübergehend den phänomenologischen Standpunkt und versuchen, ein molekulares Modell des Dielektrikums zu konstruieren. Für ein unpolares Molekül werden die Ladungen erst nach Anlegen eines elektrischen Feldes getrennt und bildet dann einen Dipol. Sein dem äußeren Feld proportionales elektrisches Moment \mathbf{p} ist charakteristisch für das Molekül. In der Beziehung

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (5.49)$$

ist \mathbf{E} das angelegte, makroskopisch messbare Feld, das auch bei Abwesenheit der Moleküle vorhanden wäre; der zweite Term ist die Polarisation. Wir wollen \mathbf{P} aus dem Verhalten der Moleküle im elektrischen Feld bestimmen.

Das Feld \mathbf{E}_{eff} am Ort des Moleküles ist verschieden vom makroskopischen Feld \mathbf{E} . Im Feld \mathbf{E}_{eff} ist das mittlere Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad (5.50)$$

wobei α eine in der Quantenmechanik berechenbare atomare Konstante ist. Bei einer Dichte der Dipole (Atome, Moleküle) n ergibt sich die Polarisierung

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha\mathbf{E}_{\text{eff}}. \quad (5.51)$$

Wir müssen daher das effektive Feld \mathbf{E}_{eff} bestimmen, das auf den Dipol wirkt. Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir gerade gesehen haben, ein mittleres Feld

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_\infty = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P},$$

und dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. In Abwesenheit der Kugel ist das Feld $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{E}_i + 4\pi\mathbf{P}/3$. Dafür ist das mikroskopische, schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole in der Kugel zu addieren,

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{\text{m,p}}, \quad \mathbf{E}_{\text{m,p}} = \sum_n \frac{3(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}_n)\mathbf{r}_n - r_n^2\mathbf{p}_n}{r_n^5}. \quad (5.52)$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole, d.h. von der Kristallstruktur ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe³. Um dies einzusehen setzen wir

$$\mathbf{r}_n = a\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3,$$

wobei a die Gitterkonstante ist. Die Summe über die Positionen \mathbf{r}_n der Teilchen wird zu einer Summe über das ganzzahlige Gitter,

$$\mathbf{E}_{\text{m,p}} = \frac{1}{a^3} \sum_n \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}^2\mathbf{p}}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}} \quad (5.53)$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\sum \frac{n_i n_j}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}} = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

³Der Beweis stammt von H.A. Lorentz. Für andere Symmetrien ist das Verschwinden der Summe unbewiesen.

da sich die Beiträge der Dipole bei (n_i, n_j) und $(n_i, -n_j)$ wegheben, und weiterhin ist

$$\sum \frac{n_i^2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}}$$

unabhängig von i . Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} \right) = n\alpha \left(1 + \frac{4\pi}{3} \chi_e \right) \mathbf{E}, \quad (5.54)$$

woraus wir ablesen

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - 4\pi n\alpha/3} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\alpha. \quad (5.55)$$

Wir haben $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ benutzt. Die letzte Beziehung in (5.55) heisst *Clausius-Mosottische Formel*. Ins Optische übertragen, wobei ε das Quadrat des Brechungsindex bedeutet, heißt sie *Lorenz-Lorentzsche Formel*. Erweitern wir die rechte Seite dieser Formel mit m , der Masse der einzelnen Moleküle, so entsteht

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha}{m} \rho. \quad (5.56)$$

Die linke Seite ist demnach proportional zur Dichte ρ des Mediums und der Atomkonstanten α/m . Für stark *verdünnte Gase* ist $\varepsilon \sim 1$ und entsprechend gilt

$$\varepsilon - 1 = 4\pi \frac{\alpha}{m} \rho. \quad (5.57)$$

5.4 Feldenergie im Dielektrikum

Im Vakuum hatten wir in (2.51) für die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \quad (5.58)$$

gefunden. Wir hatten uns die endgültige Ladungsanordnung dadurch entstanden gedacht, daß die einzelnen Ladungselemente nacheinander aus dem Unendlichen in das betrachtete Gebiet gebracht werden. Bei Anwesenheit von Dielektrika muß nicht nur Arbeit verrichtet werden, um die makroskopische Ladung an den gewünschten Ort zu bringen, sondern auch, um im Medium einen bestimmten Polarisationsgrad zu erzeugen. Deshalb kann der

Ausdruck (2.51) nicht ohne Weiteres übernommen werden. Bei Verschiebung der Ladungsdichte $\delta\rho = \delta\rho_f + \delta\rho_P$ wird die elektrostatische Energie

$$\int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P \Phi \quad (5.59)$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie innere Potentiale Φ_i vorhanden, so daß die Polarisation ins Gleichgewicht kommt, das heißt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P (\Phi + \Phi_i).$$

Die Potentialkräfte müssen so beschaffen sein, daß für eine sehr langsame (adiabatische) Verschiebung der Polarisationsladungen $\delta U = 0$ gilt, damit die Polarisation im Gleichgewicht ist, $\Phi + \Phi_i = 0$. Damit folgt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \Phi = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi$$

beziehungsweise

$$\delta U = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (5.60)$$

Für lineare Medien ist $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und die gesamte elektrostatische Energie ist

$$U = \int d^3r u(\mathbf{r}'), \quad u(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (5.61)$$

Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist $\varepsilon = 1$ und (5.60) vereinfacht auf das frühere Resultat (2.53) für die elektrostatische Energie. Während (5.60) allgemeine Gültigkeit hat, gilt (5.61) nur für lineare Medien mit *konstantem* ε .

Kapitel 6

Magnetostatik

In diesem Kapitel behandeln wir zeitlich konstante Magnetfelder, sogenannte magnetische Gleichfelder. Es wird die räumliche Verteilung von Magnetfeldern in der Umgebung von Dauermagneten und von stationären Strömen untersucht. Umgekehrt üben magnetische Felder eine Kraftwirkung auf Magnete und Ströme aus. Die Grundbegriffe der Magnetostatik sind denen der Elektrostatik analog. Der positiven und negativen elektrischen Ladung entspricht Nordpol und Südpol eines Magneten. Im Gegensatz zur Elektrostatik können magnetische Polstärken allerdings nicht isoliert werden, sondern treten in einem Körper immer zusammen auf. Es gibt keine magnetischen Monopole.

6.1 Strom und Stromdichte

Legen wir eine Spannung zwischen den Enden eines metallischen Drahtes an, dann bewegen sich die freien Ladungsträger durch den Draht - es fließt ein elektrischer Strom. Die Ladungsmenge, die pro Zeit einen Querschnitt des Drahtes passiert, definiert den Strom

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (6.1)$$

Sind q und v die Ladung und mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger und n ihre (homogene und zeitlich konstante) Dichte, dann ist $Fvdt nq$ die in der Zeit dt durch den Leiterquerschnitt F fließende Ladung. Die Stromstärke ist dann

$$I = nFvq. \quad (6.2)$$

Die *Stromdichte* \mathbf{j} an einem Ort ist ein Vektor, der in die Bewegungsrichtung der elektrischen Ladungsträger zeigt und dessen Betrag die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurchtretende Elektrizitätsmenge mißt. Bezeichnet $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ das gerichtete Oberflä-

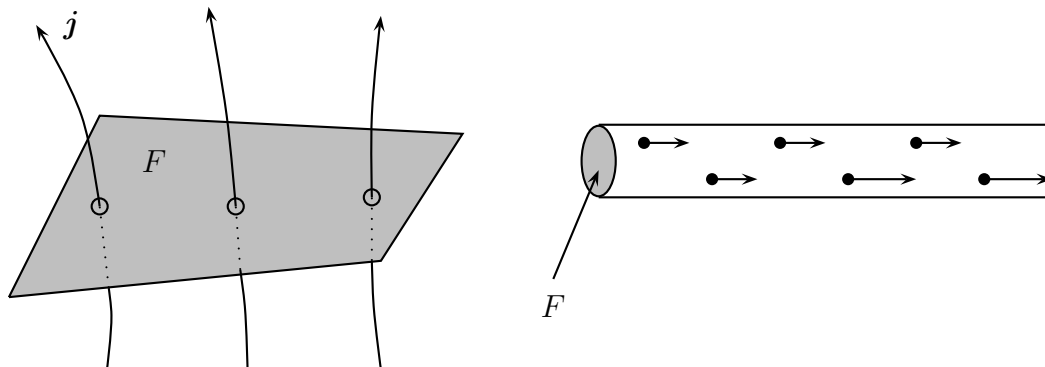


Abbildung 6.1: Der Fluß von \mathbf{j} durch die Fläche F ist gleich der Stromstärke.

chenelement, dann ist der elektrische Strom durch die Fläche F gleich

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.3)$$

In der *Magnetostatik* beschränken wir uns auf zeitunabhängige Stromdichten, $\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Sind die Ladungsträger Punktteilchen an den Orten $\mathbf{r}_n(t)$ mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_n(t)$, dann ist ihre Ladungs- und Stromdichte

$$\rho_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (6.4)$$

Mitteln wir über mikroskopisch große und makroskopisch kleine Raumbereiche¹ V , dann erhalten wir die gemittelte Ladungs- und Stromdichte,

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \mathbf{v}_n(t). \quad (6.5)$$

Diese Dichten sind für bewegte Ladungsträger zeitabhängig, da sich deren Orte \mathbf{r}_n und Geschwindigkeiten \mathbf{v}_n mit der Zeit ändern. Haben alle Teilchen die gleiche Ladung q , was bei genügend kleinen Mittelungsvolumen der Fall sein wird, dann gilt

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{V} \sum \mathbf{v}_n = \frac{Nq}{V} \frac{1}{N} \sum \mathbf{v}_n = \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}).$$

¹Wir bezeichnen die Raumgebiete und ihre Volumen beide mit V .

Hier ist N die Anzahl Teilchen in V und Nq deren Gesamtladung. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} ist die *mittlere* Geschwindigkeit der Teilchen im betrachteten Raumgebiet.

6.1.1 Stromerhaltung

Die elektrische Ladung ist eine Erhaltungsgröße, d.h. in einem *abgeschlossenen System* ändert sie sich nicht. In *offenen Systemen* ist die zeitliche Änderung der Ladung $q(V)$ in einem Raumbereich V gleich dem Strom durch die Oberfläche ∂V des Bereichs,

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(t, \mathbf{r}) + \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (6.6)$$

Wenn die Stromdichte im Mittel aus dem Gebiet herauszeigt, dann fließt Strom ab und die Ladung in V nimmt mit der Zeit ab. Für ein festgehaltenes Raumgebiet können wir die Zeitableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$\int_V d^3r \left(\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \right) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige V gilt, muß der Integrand verschwinden,

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (6.7)$$

Diese Gleichung ist die wichtige *Kontinuitätsgleichung* der Elektrodynamik.

In der Magnetostatik interessiert nur der stationäre Fall von zeitunabhängigen Ladungs- und Stromdichten, der wegen (6.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.8)$$

nach sich zieht. In der Magnetostatik ist die Stromdichte quellenfrei. Daraus folgt unmittelbar die *Kirchhoffsche Knotenregel*: An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einem elektrischen Schaltkreis muß ebensoviel Ladung zu- wie abfließen.

6.2 Das magnetische Feld und das Biot-Savart-Gesetz

Ähnlich wie das \mathbf{E} -Feld definieren wir das magnetische Feld \mathbf{B} über seine meßbare Kraftwirkung auf Ströme. Zu deren Bestimmung betrachten wir einen stromdurchflossenen ruhenden dünnen Draht, durch den ein Strom I fließe. Auf ein kleines Wegelement $d\mathbf{r}$ des

Drahts wirkt eine Kraft $d\mathbf{F}$, für die gilt

$$d|\mathbf{F}| \propto I, \quad d|\mathbf{F}| \propto d|\mathbf{r}| \quad \text{und} \quad d\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}. \quad (6.9)$$

Die Kraft kann daher in der Form

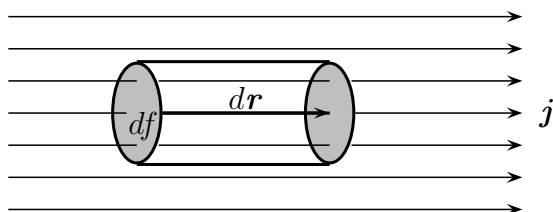
$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (6.10)$$

geschrieben werden. Durch diese Relation wird das Vektorfeld \mathbf{B} als Meßgröße definiert. Das so definierte Feld wird *magnetische Induktion*, oder auch *magnetische Flußdichte*, genannt. In Analogie zu \mathbf{E} , das ja auch über seine Kraftwirkung auf geladene Probekörper eingeführt wurde, wäre die Bezeichnung magnetische Feldstärke angebrachter. Aber dieser Name ist schon für das weiter unten eingeführte Feld \mathbf{H} belegt. Oft werden wir \mathbf{B} einfach magnetisches Feld nennen.

Damit ist die von der magnetischen Induktion auf eine *linienförmige* Stromverteilung ausgeübte Kraft gleich

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \int d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.11)$$

Um die *Kraftdichte* \mathbf{f} zu berechnen, betrachten wir einen kleinen Zylinder mit Volumen dV



im stromdurchflossenen Gebiet. Die Zylinderachse zeige in Richtung der Stromdichte. Dann zeigt $d\mathbf{r} = \mathbf{n}ds$ in Richtung von \mathbf{j} und für die Kraft auf den Strom in dV ergibt sich der einfache Ausdruck

$$\mathbf{f}dV = \frac{1}{c} \mathbf{j} d\mathbf{f} ds \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} dV$$

Hier hebt sich das Volumenelement weg und wir verbleiben mit

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}. \quad (6.12)$$

Ein Punktteilchen mit Geschwindigkeit \mathbf{v} am Ort \mathbf{r} erfährt im Magnetfeld die *Lorentzkraft*

$$\mathbf{F} = \int d^3r' \mathbf{f}(\mathbf{r}') = \frac{q}{c} \int d^3r' \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{q}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.13)$$

Dies vergleiche man mit der Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, die ein elektrisches Feld auf eine Probela-

dung ausübt. Im Magnetfeld erfährt ein geladenes Teilchen eine Kraft proportional zu seiner Ladung q und dem Betrag seiner Geschwindigkeit. Die Kraft wirkt senkrecht zur Feldrichtung und Geschwindigkeit. Im Gaußschen Maßsystem haben das elektrische und magnetische Feld dieselbe Dimension esu/cm^2 . Im MKSA-System lautet das Lorentzsche Kraftgesetz

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (6.14)$$

und die Dimensionen von \mathbf{E} und $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ sind gleich. Damit hat in diesem Einheitensystem das Magnetfeld die Dimension Vs/m^2 . Die Umrechnung ist

$$1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \sim 10^4 \frac{\text{esu}}{\text{cm}^2} = 10^4 \sqrt{\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}} = 10^4 \text{ Gauß}. \quad (6.15)$$

Die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektrischen und magnetischen Feld ist also bestimmt durch die Anfangsbedingungen und die Lorentzsche Bewegungsgleichung²

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (6.16)$$

Das Gesetz (6.16) läßt sich durch Ablenkungsversuche an Elektronen- und Ionenstrahlen überprüfen. Ein Magnetfeld hat keinen Einfluß auf den Betrag der Geschwindigkeit,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Wir betrachten nun die Bewegung eines geladenen Teilchens im konstanten und in die z -Richtung zeigenden Magnetfelds. Die Komponenten der Bewegungsgleichung (6.16) lauten

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\omega v_1, \quad \frac{dv_3}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{qB}{mc}. \quad (6.17)$$

Die Bewegung in Richtung des Feldes wird durch das magnetische Feld nicht beeinflusst und wir brauchen uns nur um die Bewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld zu kümmern. Die Lösung der beiden ersten Gleichungen in (6.17) ist

$$v_1 = v_0 \cos \omega(t - t_0), \quad v_2 = -v_0 \sin \omega(t - t_0).$$

Nochmalige Integration nach der Zeit ergibt

$$x - x_0 = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0), \quad y - y_0 = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega(t - t_0). \quad (6.18)$$

²Wir setzen hier $v \ll c$ voraus.

Die Projektion der Bahnkurve auf die Ebene senkrecht zu \mathbf{B} ist also ein Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius

$$R = \frac{v_0}{\omega}. \quad (6.19)$$

Berücksichtigen wir noch die Bewegung in Feldrichtung, so finden wir als allgemeine Bewegung im homogenen Magnetfeld eine *Schraubenlinie* mit Ganghöhe

$$h = \frac{2\pi v_3}{\omega}. \quad (6.20)$$

Nachdem die magnetische Induktion \mathbf{B} messbar ist, kann experimentell bestimmt werden, welches Magnetfeld ein stromdurchflossener Leiter erzeugt. Am Ort \mathbf{r}' sei ein stromleitendes Drahtstück $d\mathbf{r}'$. Dieses ruft am Aufpunkt \mathbf{r} einen Beitrag $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ zum magnetischen Feld mit den Eigenschaften

$$d|\mathbf{B}| \propto I|d\mathbf{r}'|, \quad |d\mathbf{B}| \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad d\mathbf{B} \perp d\mathbf{r}' \quad \text{und} \quad d\mathbf{B} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.21)$$

hervor. Demnach gibt jedes einzelne Stromelement $I d\mathbf{r}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV$ am Orte \mathbf{r}' im Auf-

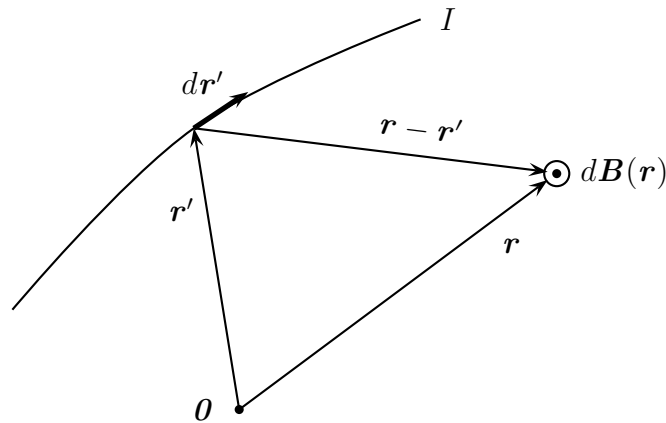


Abbildung 6.2: Ein Drahtstück $d\mathbf{r}'$ am Ort \mathbf{r}' induziert ein Magnetfeld $d\mathbf{B}$ bei \mathbf{r} .

punkt \mathbf{r} einen Feldbeitrag, der jeweils senkrecht zur Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ und dem Verbindungsvektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ vom Quellpunkt zum Aufpunkt steht und mit dem inversen Quadrat des Abstandes abnimmt. Diese Eigenschaften können in

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} d\mathbf{r}' \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.22)$$

zusammengefaßt werden. Wie oben summieren wir über alle Beiträge und finden

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (6.23)$$

Diese Integraldarstellung für das Magnetfeld legt dieses bei bekannter Stromverteilung und bekannten Randbedingungen eindeutig fest. Sie ist das Gegenstück zur Integraldarstellung des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

und spielt eine zentrale Rolle in der Magnetostatik. Die weiter unten diskutierten Grundgleichungen der Magnetostatik folgen aus (6.23).

Speziell für eine *linienförmige Stromverteilung* müssen wir $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV$ in (6.23) durch $I d\mathbf{r}$ ersetzen und dann geht diese Formel über in

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{d\mathbf{r}' \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.24)$$

Für einen *unendlich langen Draht* entlang der z -Achse³ ist $d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z dz'$ und $\mathbf{r}' = z' \mathbf{e}_z$. Entsprechend ist das vom Draht erzeugte Magnetfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{c} \int dz' \mathbf{e}_z \wedge \frac{\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z|^3} = \frac{I}{c} \mathbf{e}_\phi \int dz' \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

oder nach Auswertung des Integrals ergibt sich das *Biot-Savart-Gesetz*

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{2I}{c} \frac{\mathbf{e}_\phi}{\rho}. \quad (6.25)$$

In der Literatur wird auch die allgemeinere Formel (6.24) für die magnetische Induktion einer beliebigen Stromverteilung als Biot-Savart-Gesetz bezeichnet.

Ähnlich wie in der Elektrostatik führen wir die Feldlinien des magnetischen Feldes ein. Das \mathbf{B} -Feld ist tangential zu diesen Feldlinien und die Dichte der Linien ist proportional zur Stärke des Feldes. Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz sind die Feldlinien des durchströmten geraden Drahtes die Kreise um den Draht, siehe Abb. 6.3.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Feld eines von einem Strom I durchflossenen *Kreisrings* mit Radius R auf der durch den Kreismittelpunkt gehenden Symmetrieachse.

³Zeige: Die Stromdichte ist $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z \delta(\rho)$.

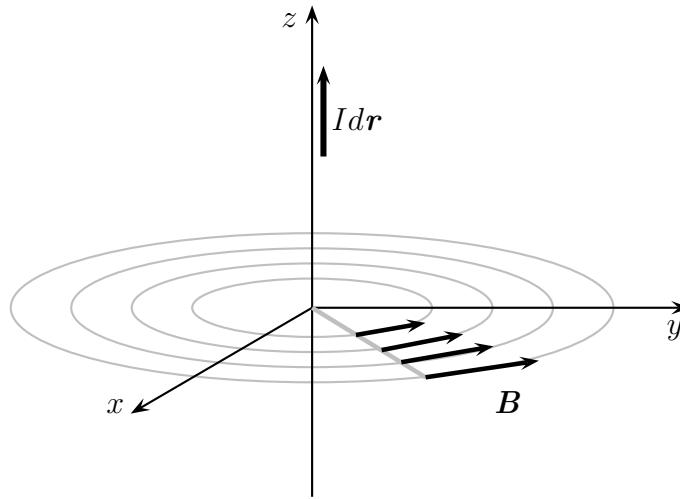


Abbildung 6.3: Die magnetischen Feldlinien sind Kreise um den stromführenden Draht.

Wir wählen die z -Achse als Symmetrieachse, so dass der Ring in der $x - y$ -Ebene liegt. Das Magnetfeld auf der Achse ist

$$\mathbf{B}(z) = \frac{I}{c} \int R d\phi' \mathbf{e}_{\phi'} \wedge \frac{z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}_{\rho'}}{|z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}_{\rho'}|^3} = \frac{2\pi IR^2}{c} \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Wie erwartet, hat das Feld auf der Symmetrieachse nur eine z -Komponente. Im Zentrum des Rings ist das Magnetfeld maximal,

$$B_z(z = 0) = \frac{2\pi I}{cR}. \quad (6.26)$$

Die Berechnung des Magnetfeldes weg von der Symmetrieachse ist aufwendiger und geschieht am einfachsten mit dem weiter unten eingeführten magnetischen Potential.

Kräfte zwischen zwei Strömen: Mit Hilfe von (6.11) und (6.22) findet man für die Kraft zwischen zwei von den Strömen I_1 und I_2 durchflossenen Leitern C und C' die explizite Formel,

$$\mathbf{F} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_C \int_{C'} d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (6.27)$$

wobei über die beiden Leiterkurven zu integrieren ist. Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Kräfte zwischen zwei geraden und parallelen Strömen der Länge ℓ im Abstand r . Das Resultat wird benötigt um die Ladungseinheit Coulomb=As über eine Kraftmessung

zu messen. Der Leiter C liege in der z -Achse und Leiter C' parallel dazu,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_x.$$

Es ergibt sich das Integral

$$F = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int dz dz' \frac{r}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{2I_1 I_2}{c^2} \frac{\ell}{r}, \quad (6.28)$$

wobei wir $\ell \gg r$ bei den Integrationen annahmen. Es ergibt sich eine Anziehung bei gleicher Stromrichtung und eine Abstoßung bei einander entgegengesetzter Stromrichtung.

6.3 Die Grundgleichungen der Magnetostatik

Wir wollen hier die differentielle Form der wichtigen Gleichung (6.23) ableiten. Wie in der Elektrostatik müssen wir dazu die Quellen und Wirbel des magnetischen Feldes berechnen. Zuerst werden wir sehen, daß das Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (6.29)$$

keine Quellen hat. Wegen

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ist nämlich

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \wedge \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla \lambda(\mathbf{r}). \quad (6.30)$$

Berücksichtigen wir die Identität $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0$ so folgt sofort, dass das magnetische Feld in der Tat quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.31)$$

Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, ist das *Vektorpotential* \mathbf{A} nur bis auf die Addition eines Gradientenfeldes bestimmt. Das Gradientenfeld $\nabla \lambda$ in (6.30) tritt als „Integrationskonstante“ auf. Wählen wir $\lambda = 0$, dann ist das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.32)$$

selbst quellenfrei,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{c} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 r' (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0,\end{aligned}$$

da die Stromdichte in der Magnetostatik quellenfrei ist. Das magnetische Feld ist von der *Eichfunktion* λ unabhängig. Die Wahl für λ , für die das Vektorpotential quellenfrei ist, heißt die *Coulombeichung*. Wir werden weiter unten auf die möglichen Eichungen für das elektromagnetische Potential zurückkommen.

Nun müssen wir noch die Wirbel des magnetischen Feldes bestimmen. Wir wählen die Darstellung (6.30) mit dem quellenfreien Vektorpotential (6.32):

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Der Wirbel des Magnetfeldes ist also proportional zur elektrischen Stromdichte \mathbf{j} . Mit (6.31) finden wir die folgenden differentiellen *Grundgleichungen der Magnetostatik*

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.33)$$

Die erste Gleichung ist eine homogene, die zweite eine inhomogene Feldgleichung. Die erste Gleichung besagt, daß es in der Natur keine magnetischen Monopolladungen gibt⁴. Für eine lokalisierte Stromverteilung ist die Lösung dieser beiden Grundgleichungen durch (6.23) gegeben. Wir diskutieren nun einige einfache Konsequenzen dieser Gleichungen.

6.3.1 Integrale Form der Grundgleichungen

Wir definieren den *magnetischen Fluß* durch eine Fläche F ,

$$\Phi(F) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.34)$$

Für das quellenfreie \mathbf{B} verschwindet der Fluß durch jede geschlossene Fläche,

⁴Uns Theoretikern wären magnetische Monopole aus mehreren Gründen sehr willkommen. Gäbe es z.B. im ganzen Universum nur einen einzigen magnetischen Monopol, so wäre die elektrische Ladung automatisch quantisiert.

$$\Phi(\partial V) = 0. \quad (6.35)$$

Dieses Gesetz ist die integrale Form der homogenen Grundgleichung der Magnetostatik. In einem beliebig herausgegriffenen Volumen V verschwinden oder entstehen keine magnetischen Feldlinien – sie sind immer geschlossen.

Da das magnetische Feld Wirbel hat, verschwindet das Linienintegral von \mathbf{B} längs Schleifen im Allgemeinen nicht. Sei F eine beliebige Fläche mit Randkurve ∂F . Wegen

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = \frac{4\pi}{c} I(F) \quad (6.36)$$

ist das Linienintegral von \mathbf{B} längs ∂F proportional zu dem durch die Fläche F fließenden Strom. Dieses *Ampere-Gesetz* ist die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung der Magnetostatik.

6.3.2 Das Magnetostatische Potential

Es sei V ein stromfreies Raumgebiet. Dann ist in V die magnetische Induktion wirbelfrei, $\nabla \wedge \mathbf{B} = 0$, und damit ein Gradientenfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \Psi(\mathbf{r}). \quad (6.37)$$

Da \mathbf{B} immer quellenfrei ist, ist das magnetostatische Potential Ψ harmonisch,

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in } V. \quad (6.38)$$

Die Funktion Ψ besitzt gegenüber dem elektrostatischen Potential Φ eine Besonderheit. Für das Magnetfeld (6.25) eines stromführenden Drahtes ist wegen $\nabla = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\phi \partial_\phi + \mathbf{e}_z \partial_z$ das Potential

$$\Psi = -\frac{2I}{c} \phi, \quad \rho > 0, \quad (6.39)$$

und damit nicht eindeutig. Bei jedem vollen Umlauf um den Draht ändert es sich um $4\pi I/c$. Allgemeiner ist diese *Zirkulation* beim Umlaufen einer Schleife C proportional zum elektrischen Strom durch F , wobei F irgend eine Fläche mit Rand $\partial F = C$ ist. Gemäß (6.35) ist der Strom für alle Flächen mit derselben Randkurve gleich. Die Zirkulation verschwindet nur, wenn man die Schleife in einem stromfreien Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Um das Potential im stromfreien Raum zu bestimmen, braucht man die Anschlußbedingungen an Gebiete, wo Strom fließt, typisch sind dies Leiter oder magnetische Materialien. Weiter unten werden wir die makroskopische Magnetostatik diskutieren und physikalische Randbedingungen aufstellen.

6.3.3 Das magnetische Feld einer unendlich langen Spule

Wir betrachten eine Spule mit n Windungen pro Längeneinheit. Die Spulenachse sei die z -Achse. In guter Näherung sind die einzelnen Drahtwindungen Kreise mit konstantem

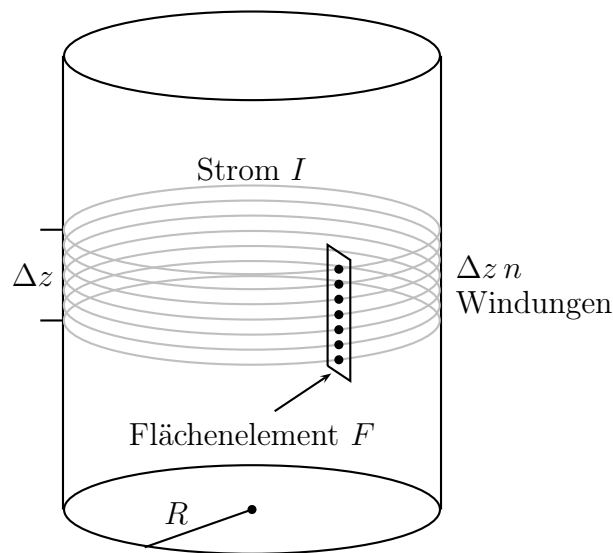


Abbildung 6.4: Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Spule.

Radius R und $z=\text{const.}$ Damit ist die Stromdichte gleich der Dichte eines rotierenden geladenen Zylindermantels,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = nI\delta(\rho - R)\mathbf{e}_\phi \implies \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r})d\rho dz = nI\mathbf{e}_\phi \cdot \Delta z.$$

Bei einer sehr langen und geraden Spule weiß man, daß ein Feld im Wesentlichen nur im Inneren besteht und daß es dort parallel zur Spulenachse orientiert ist. Wir wählen die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung, um das Feld in der Spule zu berechnen. Als Integrationsweg wählen wir ein schmales Rechteck wie in der Abb. 6.4. Speziell sollen von den zur Spulenachse parallelen Seiten des Rechtecks der Länge Δz eine innerhalb, die

andere außerhalb der Spule liegen. Für das Rechteck gilt

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = B_z \Delta z = \frac{4\pi}{c} n I \Delta z, \quad \text{so daß} \quad B_z = \frac{4\pi}{c} n I. \quad (6.40)$$

In den Übungen werden Sie das gleiche Resultat aus Symmetrieüberlegungen und den Grundgleichungen der Magnetostatik ableiten.

6.4 Selbstinduktion

Wir betrachten ein System von N Stromschleifen, in denen die Ströme I_1, \dots, I_N fließen. Wir beschränken uns auf quasistationäre Ströme, so daß wir die bisher gewonnenen Gesetze anwenden dürfen. Das Magnetfeld ist eindeutig durch die Ströme in den Schleifen bestimmt. Die Beiträge der einzelnen Ströme zum resultierenden Magnetfeld sind den betreffenden Stromstärken direkt proportional und überlagern sich linear. Daher wird auch der Induktionsfluß

$$\Phi(F_i) = \int_{F_i} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}, \quad \partial F_i = C_i, \quad (6.41)$$

durch den i 'ten Stromkreis⁵ eine lineare Funktion der individuellen Stromstärken sein,

$$\Phi(F_i) = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j. \quad (6.42)$$

Die Faktoren L_{ij} sind die *Induktivitätskoeffizienten*: bei L_{ii} spricht man von *Selbstinduktivität* des i 'ten Stromkreises und bei $L_{i \neq j}$ von *wechselseitiger Induktivität*. Bei einem einzelnen Stromkreis vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\Phi = LI, \quad (6.43)$$

mit Selbstinduktivität L . Relativ einfach ist die Berechnung der Selbstinduktivität für eine lange gerade Spule vom Querschnitt F und der Länge l . Im Innern der Spule besteht das Feld $B_z = 4\pi n I / c = 4\pi N I / l c$ und daher ist der Induktionsfluß durch N Spulenschleifen

$$\Phi = 4\pi N^2 \frac{F}{l c} I.$$

⁵Man erinnere sich daran, daß der Fluß für alle Flächen mit demselben Rand ∂F_i gleich ist.

Damit wird die Selbstinduktivität der Spule

$$L = 4\pi N^2 \frac{F}{lc}. \quad (6.44)$$

In Gaußschen Einheiten wird sie in s und in MKSA-Einheiten in Vs/A=Henry gemessen.

Auch die Koeffizienten der Wechselinduktion können leicht bestimmt werden. $L_{ij}I_j$ ist der Anteil des Induktionsflusses, der von dem im Leiter j fließenden Strom induzierten Magnetfeld B_j herrührt,

$$L_{ij}I_j = \int_{F_i} d\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{B}_j(\mathbf{r}_i) = \oint_{C_i} \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i.$$

Das vom Leiter C_j am Orte \mathbf{r} erzeugte Vektorpotential \mathbf{A}_j hat nach (6.32) die Darstellung

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{r}) = \frac{I_j}{c} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|},$$

und deshalb sind die Induktionskoeffizienten

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{1}{c} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (6.45)$$

Als Anwendung betrachten wir zwei parallele Kreisströme mit Radien R_1 und R_2 im senkrechten Abstand h , siehe Abb. 6.5. In Zylinderkoordinaten sind

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \cos \phi_1 \\ R_1 \sin \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \cos \phi_2 \\ R_2 \sin \phi_2 \\ h \end{pmatrix},$$

so daß die im Integral (6.45) auftretenden Größen folgende Form haben,

$$d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = R_1 R_2 \cos(\Delta\phi) d\phi_1 d\phi_2, \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\phi,$$

wobei wir den Differenzwinkel $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ einführen. Nach (6.45) ist die gegenseitige Induktion

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{1}{c} \int d\phi_1 d\phi_2 \frac{R_1 R_2 \cos \Delta\phi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\phi}} \\ &= \frac{2\pi}{c} \int d\phi \frac{R_1 R_2 \cos \phi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \phi}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

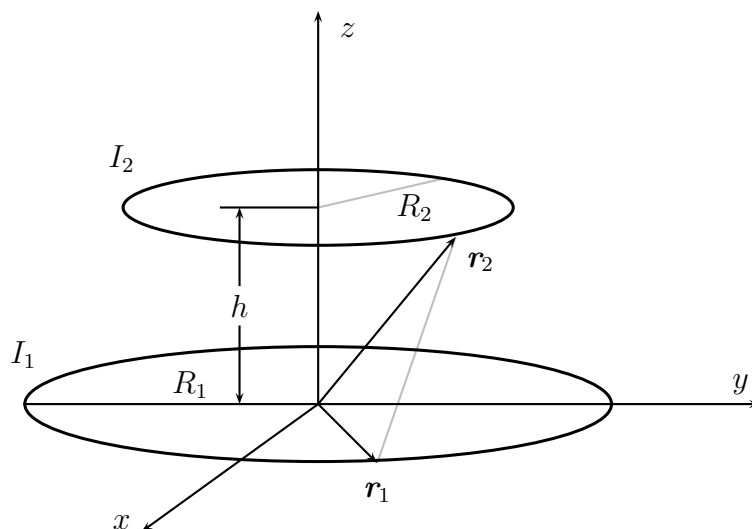


Abbildung 6.5: Zur Berechnung der wechselseitigen Induktion zweier Kreisströme.

Wir verbleiben mit einem elliptischen Integral. Statt die Tabellen (oder ein algebraisches Computerprogramm) zu bemühen, untersuchen wir die extremen Situationen zweier weit voneinander getrennten oder nahe beieinander liegenden Ringe. Im ersten Fall ist $h \gg R_1, R_2$ und wir können den Nenner in (6.46) nach fallenden Potenzen von h entwickeln. Der führende Term ist

$$L_{12} \approx \frac{2\pi^2}{c} \frac{R_1^2 R_2^2}{h^3}, \quad h \gg R_1, R_2. \quad (6.47)$$

Im zweiten Fall ist $h \ll R_1, R_2$ und der Nenner kann nach wachsenden Potenzen von h entwickelt werden. Eine nicht ganz so einfache Rechnung⁶ liefert,

$$L_{12} \approx \frac{1}{c} \sqrt{R_1 R_2} \left(\log \frac{8\sqrt{R_1 R_2}}{b} - 2 \right), \quad b^2 = h^2 + (R_2 - R_1)^2, \quad h \ll R_1, R_2. \quad (6.48)$$

6.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine Stromverteilung, die nur innerhalb einer Kugel vom Radius R von Null verschieden ist. Wir können das Vektorpotential \mathbf{A} in (6.32) ähnlich wie das elektro-

⁶Siehe z.B. Becker und Sauter, Seite 128.

statische Potential Φ entwickeln,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{cr} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{x_i}{cr^3} \int d^3r' x'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots \end{aligned} \quad (6.49)$$

Wir erwarten, daß der Monopolbeitrag, d.h. der erste Term auf der rechten Seite, verschwindet, da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt. Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt für jede Funktion g

$$\begin{aligned} 0 &= \oint d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \nabla \cdot [g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r})] \\ &= \int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (6.50)$$

In der Magnetostatik ist \mathbf{j} quellenfrei und es gilt

$$\int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.51)$$

Dieses Resultat verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (6.49) zu vereinfachen. Mit $g(\mathbf{r}) = x_i$ folgt

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.52)$$

und der erste Term in der Entwicklung ist wie erwartet Null. Mit $g(\mathbf{r}) = x_i x_j$ folgt

$$\int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) + x_j j_i(\mathbf{r})) = 0.$$

Damit ist

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) - x_j j_i(\mathbf{r}))$$

antisymmetrisch in i, j und hat die Form

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = c \epsilon_{ijk} m_k. \quad (6.53)$$

Wir lösen nach m_k auf und finden das *magnetische Dipolmoment*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r \, \mathbf{r} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.54)$$

Eingesetzt in obige Reihenentwicklung für das Potential ergibt sich

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{x_i}{r^3} \epsilon_{ijk} m_k + \dots \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (6.55)$$

Mit $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ hat die magnetische Induktion die Entwicklung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5} + \dots \quad (6.56)$$

Dies ist das magnetische Feld eines *magnetischen Dipols*. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{p}}{r^5}.$$

Das magnetische Dipolmoment einer Stromschleife ist

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}. \quad (6.57)$$

Zum Beispiel ist die dritte Komponente des magnetischen Dipolmomentes

$$m_3 = \frac{I}{2c} \oint (x dy - y dx) = \frac{I}{2c} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\phi = \frac{I}{c} f_3,$$

wobei f_3 die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die (x, y) -Ebene ist. Entsprechendes gilt für die restlichen Komponenten von \mathbf{m} und damit ist

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{f}. \quad (6.58)$$

Zur Berechnung des *Dipolmomentes von Punktteilchen* setzen wir $\mathbf{j} = \sum q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ in (6.54) ein mit dem Resultat

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i c} \mathbf{I}_i, \quad (6.59)$$

wobei m_i für die Masse und \mathbf{I}_i für den Drehimpuls des i 'ten Teilchens steht. Haben die

Teilchen gleiche Masse und Ladung, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}, \quad (6.60)$$

wobei \mathbf{L} der Gesamtdrehimpuls der Teilchen ist. Dieses Resultat gilt für Orbitalströme. Für einen Spin \mathbf{s} hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2mc} g \mathbf{s}. \quad (6.61)$$

Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor $g \sim 2$ und die Komponenten des Spins nehmen nur die Werte $\pm \hbar/2$ an.

6.5.1 Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im Magnetfeld

Ein äußeres Magnetfeld übt auf eine in der Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisierte Stromverteilung folgende Lorentzkraft aus:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (6.62)$$

Wir entwickeln das äußere Feld um den Ursprung und finden mit Hilfe von (6.52,6.53) die Entwicklung

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \wedge \int d^3r x_i \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \wedge \epsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j + \dots,$$

wobei die ersten Ableitungen des Magnetfelds am Ursprung auftreten. Benutzen wir noch $\epsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j = m_k \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_i$, dann erhalten wir folgenden Ausdruck für die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \wedge (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_i) = \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i - \left(\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{m}.$$

Der letzte Term verschwindet wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) = \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},j}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},i}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}},$$

wobei wir $\nabla \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$ verwendet haben. Damit ergibt sich für die Kraft auf den magnetischen Dipol die einfache Formel

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (6.63)$$

ähnlich zur Kraft $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}$ auf einen elektrischen Dipol im elektrischen Feld. Diese von einem inhomogenen Magnetfeld auf magnetische Dipole ausgeübte Kraft wird für die Bestimmung der Permeabilität von magnetischen Stoffen ausgenutzt.

Für das *mechanische Drehmoment* auf den magnetischen Dipol findet man

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \frac{1}{c} \int d^3r \, \mathbf{r} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B}_{\text{ext}} \int d^3r \, \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int d^3r \, (\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}.$$

Das erste Integral verschwindet⁷ und das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (6.64)$$

analog zum Drehmoment $\mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}$ auf einen elektrischen Dipol. Im mechanischen Gleichgewicht stellt sich ein magnetisches Moment \mathbf{m} parallel zu \mathbf{B}_{ext} . Das von einem Magnetfeld auf eine kleine Kompaßnadel ausgeübte Drehmoment kann man mit einer Schneckenfederwaage messen und auf diese Weise das Magnetfeld am Ort der Magnetenadel bestimmen (siehe z.B. Pohls „Einführung in die Physik“, Band 2).

6.6 Magnetismus in Materie

Wir berechnen das makroskopische Feld eines magnetisierbaren Körpers durch Mittelbildung. Die Mittelung soll, wie im letzten Kapitel ausführlich dargelegt wurde, mit den Ableitungen vertauschen.

6.6.1 Makroskopische Grundgleichungen

Das mikroskopische Feld \mathbf{B}_m ist quellenfrei und sein Wirbelfeld ist proportional zur mikroskopischen Stromdichte \mathbf{j}_m . Durch Mittelung gewinnen wir die Feldgleichungen für das *gemittelte Feld* $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_m \rangle$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.65)$$

Wie sieht die gemittelte Stromdichte $\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_m \rangle$ aus? Sie enthält drei Bestandteile: Die Stromdichte \mathbf{j}_f der frei beweglichen Ladungsträger, die Stromdichte \mathbf{j}_p der sich zeitlich

⁷Man wähle $g = r^2/2$ in (6.51).

ändernden Polarisationsladungen und die Magnetisierungsstromdichte \mathbf{j}_{mag} , die aus der Bewegung der Atomelektronen um ihre Kerne resultiert:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_{\text{mag}}. \quad (6.66)$$

Die Stromdichte \mathbf{j}_P und Ladungsdichte $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ der Polarisationsladungen genügen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + \mathbf{j}_P \right) = 0. \quad (6.67)$$

Die *Polarisationsstromdichte*

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$$

spielt in der Magnetostatik keine Rolle. Bei zeitabhängigen Phänomenen in der Elektrodynamik werden wir aber auf diese Relation zurückkommen müssen. Wir veranschaulichen

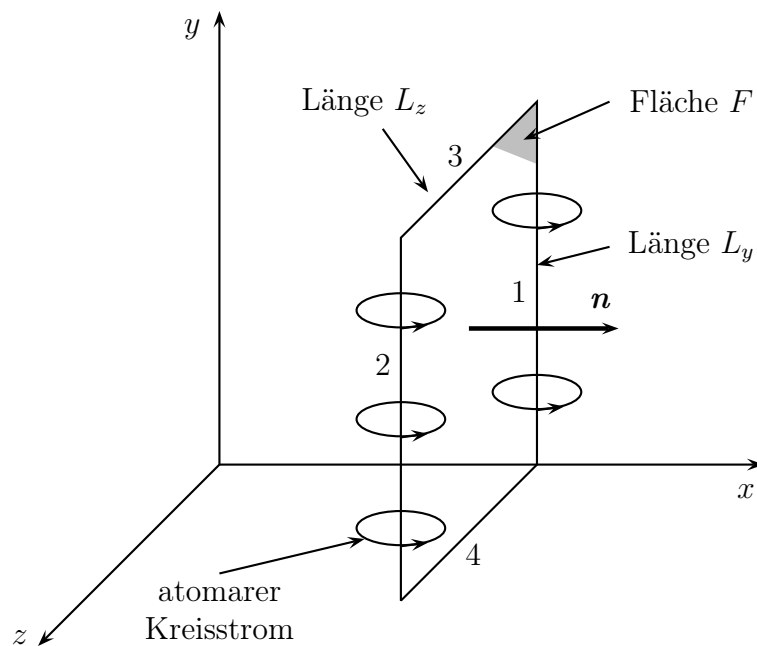


Abbildung 6.6: *Amperesche Molekularströme.*

nun die Magnetisierungsstromdichte anhand eines vereinfachten Materiemodells: Die magnetischen Dipolmomente der Atome seien ebene Ringströme mit Flächenvektor \mathbf{f} und Stromstärke i , vgl. (6.58). Die Atomdichte sei n . Wir wollen nun die Stromdichte I berech-

nen, die durch ein Rechteck F der Seitenlängen L_y und L_z hindurchtritt, siehe Abb. 6.6. Natürlich gibt der Strom der freien Ladungsträger einen Beitrag $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_f$. Aber auch die atomaren Kreisströme i können einen Beitrag liefern, allerdings nur von denjenigen Atomen, deren Fläche f von einer der vier Rechteckseiten von F durchbohrt wird; denn nur bei diesen Atomen tritt der atomare Ringstrom i gerade einmal durch die Fläche F hindurch. Es sei nun V ein mikroskopisch großes und makroskopisch kleines Mittelungsvolumen und N die Anzahl der darin enthaltenen atomaren Kreisströme. Dann sind

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = n\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n \quad (6.68)$$

das mittlere Dipolmoment und die *Magnetisierung*. Die Magnetisierung ist das mittlere magnetische Moment pro Volumen.

Der Beitrag zur x -Komponente des Stromes von allen Atomen, deren Fläche von der Rechteckseite 1 in Abb. 6.6 durchbohrt wird, ist

$$I_{\text{mag},x} = \bar{i} n \bar{f}_y L_y = c \bar{n}_y n L_y = c M_y L_y,$$

wobei wir (6.58) benutzten. In gleicher Weise finden wir als Beitrag der gegenüberliegenden Rechteckseite 2 in Abb. 6.6 den Wert $-c M_y L_y$, wobei aber der Wert von M_y and der Stelle $z = L_z$ einzusetzen ist. Damit liefern die beiden parallel zur y -Achse laufenden Rechteckseiten den Beitrag

$$c L_y M_y(z=0) - c L_y M_y(z=L_z) \sim -c L_y L_z \frac{\partial M_y}{\partial z}.$$

Ganz analog erhalten wir von den beiden anderen Rechteckseiten den Beitrag

$$-c L_z M_z(y=0) + c L_z M_z(y=L_y) \sim c L_y L_z \frac{\partial M_z}{\partial y}.$$

Damit ergibt sich für den von atomaren Kreisströmen herrührenden Magnetisierungsstrom in die x -Richtung

$$I_{\text{mag},x} = L_y L_z (\mathbf{j}_{\text{mag}})_x = c L_y L_z \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = c L_y L_z (\nabla \wedge \mathbf{M})_x.$$

Damit finden wir für die durch die Magnetisierung bedingte Stromdichte

$$\mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = c \nabla \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (6.69)$$

Dieses Resultat für \mathbf{j}_{mag} kann auch aus der Mittelung der Grundgleichungen in der Di-

polnherung abgeleitet werden. Das mikroskopische Feld eines Materials in der Dipolnäherung gewinnen wir durch Aufsummieren der Formel (6.55) ber alle Elementarmagnete in der Materie

$$\mathbf{A}_m = \sum \mathbf{m}_n \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} = \int d^3r' \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

wobei wir die mikroskopische Magnetisierung

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

eingeführt. Wie in der Elektrostatik mitteln wir mit einer Glättungsfunktion f über mikroskopisch große, aber makroskopisch kleine Gebiete, um ein mittleres, geglättetes Feld zu gewinnen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d^3u \int d^3r' f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Hier setzen wir $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$ mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int d^3r'' \int d^3u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \\ &= \int d^3r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Bei der letzten Umformung haben wir \mathbf{r}'' in \mathbf{r}' umbenannt und die *Magnetisierung*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \quad (6.71)$$

eingeführt. Für die erste Glättungsfunktion in (5.2) ist die Magnetisierung in (6.68) gegeben. Mit den magnetischen Momenten \mathbf{m}_n wird auch $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ durch innere und äußere Felder beeinfluft. Ähnlich der Polarisierung muß \mathbf{M} mit Hilfe von Materiemodellen berechnet werden.

Setzen wir nun $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = \nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, so können wir die Formel (6.70) umschreiben in

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \int d^3r' \nabla' \wedge \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Mit $\int \nabla \wedge \mathbf{V} d^3r = \oint \mathbf{n} \wedge \mathbf{V} df$ wird der erste Term auf der rechten Seite zu einem

Oberflächenintegral und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \oint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \wedge d\mathbf{f}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int d^3r' \frac{\nabla' \wedge \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.72)$$

mit dem nach außen gerichteten Flächenelement. Das zweite Glied rechts liefert, wie ein Vergleich mit (6.32) zeigt, genau den Feldbeitrag der Stromdichte \mathbf{j}_{mag} in (6.69). Das erste Glied liefert einen Beitrag der Dichte des Oberflächenstromes, nämlich

$$\mathbf{j}_{\text{mag}_O}(\mathbf{r}) = c\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}. \quad (6.73)$$

Vernachlässigen wir die Polarisationsstromdichte, so gelangen wir zu folgender gemittelten Gleichung in magnetisierbaren Medien,

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{mag}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f + 4\pi \nabla \wedge \mathbf{M}. \quad (6.74)$$

Das Auftreten der Magnetisierung \mathbf{M} legt nahe, die *magnetische Feldstärke*

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.75)$$

einzuführen. Die *gemittelten Grundgleichungen* der Magnetostatik sind dann

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (6.76)$$

Für para- und diamagnetische Substanzen besteht für nicht zu große Feldstärken ein linearer Zusammenhang

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m, \quad (6.77)$$

wobei χ_m als *magnetische Suszeptibilität* und μ als *relative Permeabilität* bezeichnet werden.

Diamagnetische Stoffe: Bei ihnen ist μ kleiner als 1 und im allgemeinen unabhängig von der Temperatur. Wasser hat zum Beispiel $\chi_m \sim -7.1 \cdot 10^{-7}$. Die Magnetisierung als auch das magnetische Moment der einzelnen Atome und Moleküle ist also dem magnetischen Feld entgegengerichtet. Beim Einschalten des äußeren Feldes werden in den Teilchen Ringströme induziert, deren magnetische Momente der Richtung von \mathbf{B} entgegengesetzt sind⁸. Wegen (6.63) werden diamagnetische Stoffe stets aus dem Gebiet hoher Feldstärke herausgedrängt. Ein vollständiger Diamagnetismus liegt beim *Supraleiter erster Art*

⁸Die Induktion eines elektrischen Feldes durch ein zeitabhängiges magnetisches Feld wird allerdings erst im nächsten Kapitel besprochen und wir können vorerst nur qualitative Aussagen machen.

vor. Dort wird durch Oberflächenströme die magnetische Induktion vollständig aus dem Material verdrängt, d.h. $\mathbf{B} = 0$ im Supraleiter.

Paramagnetische Stoffe: Bei ihnen ist μ größer als 1 und in der Regel umgekehrt proportional der absoluten Temperatur T . Zum Beispiel ist χ_m für Aluminium bei 20°C etwa $1.5 \cdot 10^{-6}$. In paramagnetischen Stoffen besitzen die Teilchen schon unabhängig vom angelegten Feld ein permanentes magnetisches Moment. Die zugehörigen Elementarmagnete werden durch das äußere Feld teilweise ausgerichtet. Je tiefer die Temperatur, desto leichter ist es, die Magnete gegen die thermische Unordnung auszurichten. Wegen (6.63) werden paramagnetische Stoffe im Gegensatz zu den diamagnetischen in das Gebiet hoher Feldstärke hineingezogen.

Ferromagnetische Stoffe: Bei ihnen wird unterhalb einer kritischen Temperatur, der sogenannten Curie-Temperatur, μ wesentlich größer als 1 und vor allem sehr stark feld- und temperaturabhängig. Die Magnetisierung ändert sich nicht mehr linear mit \mathbf{B} bzw. mit \mathbf{H} , sondern erreicht bei relativ niedrigen Feldstärken eine *Sättigung*. Für weiches Eisen ist der Sättigungswert für \mathbf{B} bei etwa 21 000 Gauß. Im Gegensatz zur Sättigungsmagnetisierung ist die Magnetisierungskurve von der Vorgeschichte der Materialprobe abhängig (Hysteresis).

6.6.2 Grenzflächen

Aus der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion folgt die Stetigkeit der Normalkomponente von \mathbf{B} an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (6.78)$$

Bei unterschiedlichen Permeabilitäten gilt das aber nicht mehr für die magnetische Feldstärke,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0. \quad (6.79)$$

Fließen an der Grenzfläche keine Oberflächenströme, so ist die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig,

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (6.80)$$

An der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen magnetischen Substanzen ist daher die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion unstetig,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_1. \quad (6.81)$$

Das Brechungsgesetz (5.9) der elektrischen Kraftlinien überträgt sich auf die magnetischen Erregungslinien; es lautet bei gleicher Bedeutung der Winkel α_1, α_2 wie dort

$$\frac{\tan \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\mu_2}. \quad (6.82)$$

Jede \mathbf{B} -Linie wird beim Eintritt in das permeablere Medium⁹ vom Einfallslot fortgebogen.

6.6.3 Kugel im homogenen Magnetfeld

Die in der Elektrostatik entwickelten Lösungsmethoden können unmittelbar in die Magnetostatik übertragen werden. Als Beispiel betrachten wir eine magnetische Kugel im homogenen Magnetfeld \mathbf{B}_∞ . Außerhalb der Kugel sei $\mu = 1$. Im Inneren derselben entsteht ein homogenes Feld, das äußere Feld wird inhomogen, weil zum ursprünglichen Feld das Feld eines im Kugelmittelpunkt zu denkenden virtuellen magnetischen Momentes \mathbf{M} hinzukommt, dessen Achse in der Feldrichtung liegt. Für die explizite Rechnung benutzen wir, daß wir in der Abwesenheit von freien Ladungsträgern

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (6.83)$$

setzen dürfen. Für lineare Medien ist dann $\mathbf{B} = -\mu\nabla\Psi$ und für homogene Materialien mit ortsunabhängigem μ gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu\Delta\Psi = 0, \quad \text{d.h.} \quad \Delta\Psi = 0. \quad (6.84)$$

Wir machen den Ansatz

$$\Psi(r > R) = \left(\frac{\mathbf{M}}{r^3} - \mathbf{B}_\infty \right) \cdot \mathbf{r}, \quad \Psi(r < R) = -\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_\infty - \frac{\mathbf{M}}{R^3} = \tilde{\mathbf{B}}.$$

Die letzte Bedingung folgt aus der Stetigkeit des magnetostatischen Potentials. Sie impliziert gleichzeitig die Stetigkeit der Tangentialkomponente der Feldstärke \mathbf{H} . Die Stetigkeit von $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$ an der Kugeloberfläche bedeutet

$$-\frac{\partial}{\partial r}\psi|_{\text{aussen}} = -\mu\frac{\partial}{\partial r}\psi|_{\text{innen}}. \quad (6.85)$$

⁹Je größer μ in einem Material, desto permeabler ist es.

Diese Bedingung legt die Stärke des virtuellen magnetischen Momentes am Ursprung fest,

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{B}_\infty R^3.$$

Damit finden wir die magnetische Induktion außerhalb und innerhalb der Kugel

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r > R) &= \mathbf{B}_\infty + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \frac{R^3}{r^3} (3(\mathbf{B}_\infty \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{B}_\infty) \\ \mathbf{B}(r < R) &= \frac{3\mu}{\mu + 2} \mathbf{B}_\infty, \end{aligned} \quad (6.86)$$

wobei $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ das Normalenvektorfeld an der Kugeloberfläche ist. Innerhalb der Kugel ist die magnetische Induktion \mathbf{B} für diamagnetische Medien schwächer als außerhalb. Für paramagnetische Medien wird sie in der Kugel verstärkt.

Nun werde ein magnetisierbares Rotationsellipsoid ($\mu > 1$) so in ein homogenes Feld $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0$ gebracht, dass seine Achse mit der Richtung von \mathbf{H}_0 zusammenfällt. Dann ist die Magnetisierung im Innern ebenfalls homogen und es gilt analog zur Gleichung (5.47)

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty - 4\pi N \mathbf{M}. \quad (6.87)$$

Der *Entmagnetisierungsfaktor* N variiert zwischen 0 und 1. Bis auf den Fall $N = 0$ ist das Magnetfeld im Inneren von magnetisierbaren Stoffen gegenüber dem von außen angelegten Feld abgeschwächt. Mit $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_i$ findet man für die Magnetisierung des Stoffes die Formel

$$4\pi \mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{H}_\infty. \quad (6.88)$$

Der Faktor N hängt von der Form des Rotationsellipsoids ab und diese Abhängigkeit ist in (5.48) gegeben. Für die magnetische Feldstärke und Induktion im Innern des Ellipsoids findet man

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{H}_\infty \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mu}{1 + N(\mu - 1)} \mathbf{B}_\infty. \quad (6.89)$$

Für einen langen, dünnen Stab ist $N = 0$ und daher $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty$. Wie bei einer mit Material voll ausgefüllten Spule tritt keine Entmagnetisierung auf und $\mathbf{B}_i = \mu \mathbf{B}_0$. Für eine Kugel ist $N = 1/3$ und man findet die magnetische Induktion (6.86) im Innern der Kugel. Für eine flache Scheibe ist $N = 1$ und entsprechend $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_\infty$.

Kapitel 7

Maxwellgleichungen

7.1 Induktionsgesetz

FARADAY beobachtete 1831, daß in einem geschlossenen Drahttring C ein elektrischer Strom entsteht, wenn ein in der Nähe befindlicher Magnet bewegt oder der Drahttring im Magnetfeld bewegt wird¹. In beiden Fällen gilt das *Induktionsgesetz*

$$V_{ind} = IR = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi(F), \quad \text{wobei} \quad \partial F = C \quad (7.1)$$

ist. Hier ist V_{ind} die induzierte Ringspannung und R der Drahtwiderstand². Wird der Drahttring C bewegt, dann ändert sich der magnetische Fluß durch die Fläche F mit Randkurve C aufgrund dieser Bewegung. Ruht der Drahttring, dann ändert sich der Fluß, falls das Magnetfeld zeitabhängig ist.

Die *erste Fassung des Induktionsgesetzes* für einen im Magnetfeld bewegten Drahttring können wir aus der Lorentzkraft $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c)$ auf ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld ableiten. Bewegen wir einen Metalldraht mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in einem Magnetfeld, so machen die Leitungselektronen im Draht diese Bewegung mit und erfahren dabei eine *eingeprägte Lorentzkraft*

$$q\mathbf{E}_{ind} = q \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B}. \quad (7.2)$$

Die längs der Leiterschleife C induzierte Spannung beträgt

$$V_{ind} = \frac{1}{c} \oint_C (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}.$$

¹Etwa gleichzeitig und unabhängig von FARADAY entdeckte auch HENRY die gleiche Erscheinung.

²Wir benutzen das Ohmsche Gesetz, nach dem die Stromstärke gleich der Spannung dividiert durch den Widerstand des Leiters ist.

Ist der Drahtwiderstand gleich R , so können wir für den induzierten Strom die Beziehung

$$IR = V_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \oint_C (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

angeben. Wir wollen nun einsehen, daß der letzte Term proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch Flächen mit veränderlicher Randkurve C ist. Dazu

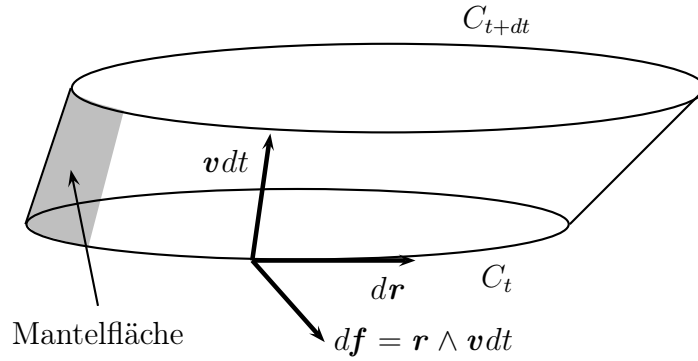


Abbildung 7.1: Änderung des magnetischen Flusses durch eine bewegte Fläche.

betrachten wir die Abb. 7.1, welche die Lagen des Draht rings zur Zeit t (C_t) und zur Zeit $t + dt$ (C_{t+dt}) darstellt. Das Vektorprodukt $d\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} dt$ hat den Betrag des von $d\mathbf{r}$ und $\mathbf{v} dt$ aufgespannten Flächenelements $d\mathbf{f}$ und die Richtung der nach außen zeigenden Normalen. Es gilt also

$$dt \oint_{C_t} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint (d\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} dt) \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = \Phi(\text{Mantelfläche}),$$

wobei das letzte Flächenintegral über die von C_t und C_{t+dt} berandete Mantelfläche zu erstrecken ist. Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion verschwindet der gesamte magnetische Fluß durch die Mantelfläche, Grundfläche und Deckfläche. Also ist

$$cdt \oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = -\Phi(\text{Deckfläche}) + \Phi(\text{Grundfläche}) = -\Phi(C_{t+dt}) + \Phi(C_t).$$

Dividieren wir durch das Zeitintervall dt so ergibt sich das *Induktionsgesetz für bewegte Leiter*

$$\oint_{C_t} \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{F_t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi(F_t), \quad \partial F_t = C_t. \quad (7.4)$$

Beim Induktionsgesetz sollte es nur auf die *Relativbewegung* zwischen dem das Magnetfeld erzeugenden Magneten und dem Drahring ankommen. Für die Ladungsträger im Drahring ruht der Draht und das Magnetfeld ändert sich mit der Zeit. In einem ruhenden Drahring, in dessen Nähe sich ein Magnet bewegt, sollte also ebenfalls ein Strom entstehen. Dies wird oft als die *zweite Fassung des Induktionsgesetzes* bezeichnet. Da eine ruhende Ladung in einem Magnetfeld keine Kraft erfährt, bleibt als Deutungsmöglichkeit nur die Annahme, daß durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes ein elektrisches Feld mit Wirbeln (da die Ringspannung nicht verschwindet) induziert wird,

$$IR = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Der Vergleich mit dem Faradayschen Induktionsgesetz zeigt, daß die elektrische Ringspannung proportional dem *magnetischen Schwund*³ ist

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (7.5)$$

Aus dieser Formel ist der materialabhängige Widerstand R verschwunden, und dies legt

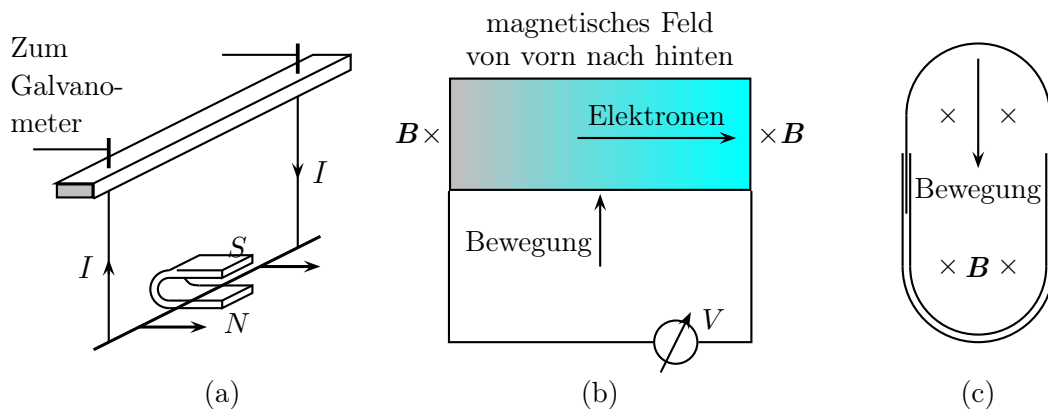


Abbildung 7.2: Induktion durch Bewegung eines Stromleiters im Magnetfeld (a), Induktionsspannung in einem Metall (b) und Induktionsstrom bei Änderung der Fläche (c).

die Verallgemeinerung der zunächst nur für den Drahring gültigen Beziehung (7.5) nahe. Wir nehmen nun an, daß das Vorhandensein des Drahtes unwesentlich ist und die Ringspannung für jede geschlossene Kurve C durch (7.5) wiedergegeben wird. Wenn diese Beziehung für jedes Flächenelement gilt, dann können wir mit $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int d\mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E})$

³Die zeitliche Abnahme des magnetischen Flusses, $-d\Phi/dt$, heißt magnetischer Schwund.

auf die differentielle Form des Induktionsgesetzes schließen:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (7.6)$$

Zeitabhängige Magnetfelder induzieren also elektrische Ringspannungen und entsprechend ist das elektrische Feld dann kein Gradientenfeld mehr wie in der Elektrostatik.

Bewegen wir zum Beispiel eine mit einem Galvanometer verbundenen Sekundärspule in der Nähe einer Primärspule (mit Eisenkern) so wird ein Strom in der Sekundärspule induziert. Sind die Windungen der Spulen parallel, so ist der Ausschlag des Galvanometers am größten. Die induzierte Spannung ist so gerichtet, daß der von ihr hervorgerufene Strom das angelegte Magnetfeld schwächt. Eine schöne Illustration dieses Effektes, der vom Minuszeichen im Induktionsgesetz (7.1) herrührt, ist der Versuch von ELIHU und THOMSON in Abb. 7.3: Fließt ein Strom im Erregerkreis, so erzeugt dieser in der Spule

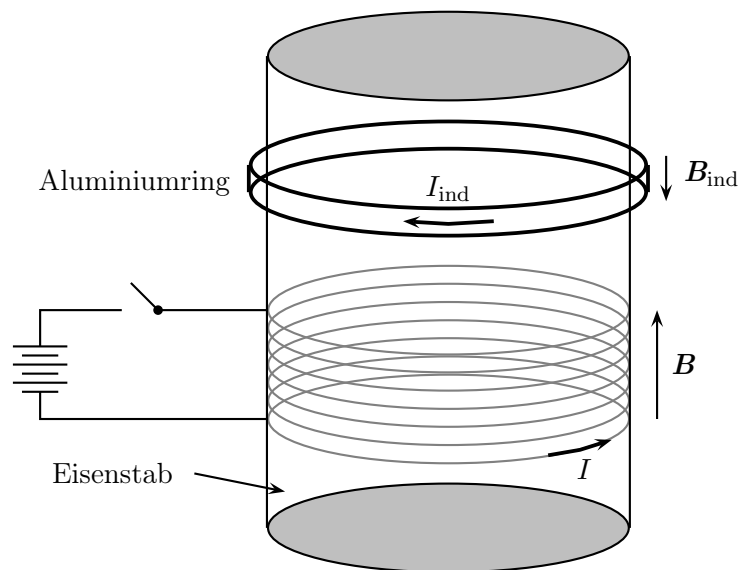


Abbildung 7.3: *Elihu-Thomson-Versuch zur Demonstration der Lenzschen Regel.*

um den Eisenstab ein Magnetfeld \mathbf{B} und beim Einschalten eine Änderung $\partial \mathbf{B} / \partial t$ und damit einen magnetischen Schwund $-\partial \Phi / \partial t$. Die Flußänderung induziert im daraufgestülpten Aluminiumring eine Spannung V_{ind} , die ihrerseits einen Strom I_{ind} erzeugt. Dieser induzierte Strom hat ein solches Vorzeichen, daß das Magnetfeld \mathbf{B}_{ind} , das er erzeugt, das entgegengesetzte Vorzeichen von \mathbf{B} hat. Die Felder \mathbf{B} und \mathbf{B}_{ind} üben daher eine absto-

ßende Wirkung aufeinander aus, was durch das Wegfliegen des Aluminiumringes beim Einschalten gezeigt wird.

Allgemeiner gilt, daß die induzierte Spannung einen Induktionsstrom erzeugt, der stets so gerichtet ist, daß er den ihn erzeugenden Vorgang zu hemmen versucht. Dies ist die *Lenzsche Regel*. Sie führt zu einer Erklärung des Diamagnetismus. Eine bekannte Anwendung der Induktion ist die *Wirbelstrombremse*.

7.2 Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

Der wichtigste Schritt auf dem Weg zur Vervollständigung der Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik nach dem Induktionsgesetz erfolgte 1864 durch MAXWELL. Er bemerkte, dass die inhomogene Grundgleichung der Magnetostatik, das *Oerstedsche Gesetz*,

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f \quad (\text{Oerstedt}) \quad (7.7)$$

zur Folge hat, daß die elektrische Stromdichte quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0.$$

Im Falle offener Stromkreise, wie z.B. beim Laden eines Kondensators, gilt aber

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad (7.8)$$

was nicht Null ist, da ein Teil der Ladung wegfließt. Die Gleichungen (7.7,7.8) sind inkonsistent falls die Ströme in beiden Formeln die gleiche Bedeutung haben. Maxwells Ausweg aus dieser Schwierigkeit benutzte, daß

$$4\pi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \left(\mathbf{j}_f + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

gilt. Wenn man postuliert, daß der Term $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$ einen Strom darstellt, der die gleichen Eigenschaften wie irgendein anderer Strom besitzt, dann erhält man

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (7.9)$$

Insbesondere erzeugt eine zeitabhängige dielektrische Verschiebung ein Magnetfeld. Die Einführung des *Verschiebungsstromes* $\sim \partial \mathbf{D} / \partial t$ in die elektromagnetischen Grundgleichungen bildet den Kernpunkt der Maxwellschen Theorie. Nach dem Induktionsgesetz

bedingt selbst im Vakuum ein zeitlich variierendes Magnetfeld ein elektrisches Feld. Nach Maxwells Modifikation des Oerstedtschen Gesetzes erzeugt aber auch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld ein Magnetfeld. Die modifizierte Gleichung (7.9) findet ihre glänzende Bestätigung bei der *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*. Diese wird erst durch das Maxwellsche Zusatzglied in (7.9) möglich.

7.3 Die Maxwell-Gleichungen

Nehmen wir zu dem erweiterten Oerstedtschen Gesetz noch das Induktionsgesetz, sowie die Resultate über die Quellen von \mathbf{D} und \mathbf{B} hinzu, so erhalten wir die vier (beinahe) symmetrisch gebauten Gleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f & , & \quad (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho_f \\ (c) \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & , & \quad (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

als die in der klassischen Elektrodynamik endgültigen *Maxwell-Gleichungen* für ruhende Medien.

Nach FARADAYS und MAXWELLS Arbeiten fiel es den Physikern nicht leicht, die entwickelten Konzepte auf konkrete Probleme anzuwenden, da eine im Sinne der Mechanik unmittelbar anschauliche Darstellung fehlte. Im Bestreben nach einer mechanischen Deutung der elektromagnetischen Erscheinungen wurden mit viel Scharfsinn eine Vielzahl von Modellen entwickelt. Noch zum Ende des 19. Jahrhundert hat es der bekannte Physiker LORD RAYLEIGH als notwendig erachtet, die Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe eines komplizierten Äthermodells zu stützen. Die Maxwellsche Theorie hat also nicht nur eine enorme praktische Bedeutung, da durch sie eine u.a. die gesamte Nachrichtentechnik revolutionierende Entwicklung eingeleitet worden ist, sie hat auch die Naturphilosophie nachhaltig beeinflusst. Durch diese Theorie sind die Physiker gezwungen worden, den in der abstrakten Beschreibung vorkommenden Größen eine reale Existenz auch dann zuzubilligen, wenn sie nicht so ohne weiteres anschaulich gemacht werden können. Diese Gleichungen stellen eine vereinheitlichte Theorie dar, weil sie die elektrischen, magnetischen und optischen Erscheinungen auf einer gemeinsamen Grundlage erklären. Es war und ist das bisher unerreichte Ziel der (theoretischen) Physiker, alle bekannten Wechselwirkungen⁴ im Rahmen *einer* vereinheitlichten Theorie zu beschreiben⁵.

Die Maxwellgleichungen führen nach Elimination der dielektrischen Verschiebung aus (a)

⁴Elektromagnetisch, schwach, stark und gravitativ.

⁵Die Superstringtheorien sind zur Zeit die erfolgversprechendsten Kandidaten für eine vereinheitlichte Theorie.

und (b) auf die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0. \quad (7.11)$$

Des weiteren sind die vier Feldgleichungen in (7.10) nicht ganz unabhängig. Aus (a) folgt durch Divergenzbildung bei Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D} - 4\pi \rho_f) = 0 \quad (7.12)$$

und aus (c) durch Divergenzbildung, daß

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (7.13)$$

Die Gleichungen (b) und (d) enthalten keine Zeitableitungen der Felder und sind Bedingungen zu fester Zeit. Haben wir diese (Zwangs)Bedingungen zu *einer Zeit* erfüllt, dann bleiben sie gemäß (7.12, 7.13) zu jeder anderen Zeit erfüllt.

Zwischen den vier Feldgrößen bestehen die Verknüpfungsgleichungen

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (7.14)$$

Dabei sind die Polarisierung \mathbf{P} und Magnetisierung \mathbf{M} abhängige Größen, die durch mikroskopische Betrachtungen ermittelt werden können. Möchte man die Einführung der nicht direkt bestimmbar und abgeleiteten Hilfsfelder \mathbf{D} und \mathbf{H} vermeiden, dann kommen wir zu den vier *Maxwellgleichungen im Medium*

$$\begin{aligned} a) \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \wedge \mathbf{M} \right), & b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \\ c) \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

Daß hier neben der im letzten Kapitel diskutierten Magnetisierungsstromdichte auch die Polarisationsstromdichte \mathbf{j}_P erscheint, ist eine unmittelbare Folge der Einführung des Verschiebungsstromes.

Zu den Maxwellgleichungen (7.10) tritt noch die *Lorentzkraft*

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (7.16)$$

Die Gleichungen (7.10) und (7.16) sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Aus ihnen werden alle relevanten Eigenschaften abgeleitet. Für zeitunabhängige Felder entkop-

peln die Maxwellgleichungen in die Grundgleichungen der Elektrostatik und die Grundgleichungen der Magnetostatik.

Die Dimensionen der in (7.15) auftretenden Größen sind im Gaußschen Einheitensystem

$$[\mathbf{E}] = [\mathbf{B}] = [\mathbf{P}] = [\mathbf{M}] = \frac{\text{esu}}{\text{cm}^2}, \quad [\rho] = \frac{\text{esu}}{\text{cm}^3}, \quad [\mathbf{j}] = \frac{\text{esu}}{\text{cm}^2 \text{ s}}. \quad (7.17)$$

7.3.1 Integralform der Maxwellgleichungen

Neben der Formulierung der Maxwellgleichungen als Differentialgleichungen kann man auch eine Integralform dieser Gleichungen angeben, die in vielen Fällen intuitiver ist. Dazu führen wir elektrische und/oder magnetische Spannungen, Flüsse, Ladungen und Ströme ein. Die meisten dieser Begriffe sind uns schon begegnet.

- Die *elektrische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve ist

$$V(C) = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.18)$$

Im allgemeinen hat \mathbf{E} Wirbel und die Spannung ist wegababhängig. Sie hängt nicht nur von Anfangs- und Endpunkt ab und es können Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Der *elektrische Fluss* durch ein orientiertes Flächenstück F ist

$$\Psi(F) = \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.19)$$

Da \mathbf{D} nicht quellenfrei zu sein braucht, hängt $\Psi(F)$ nicht nur von der Randkurve ∂F der Fläche F ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche braucht nicht Null zu sein.

- Der *magnetische Fluss* durch das orientierte Flächenstück F ist

$$\Phi(F) = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.20)$$

Die magnetische Induktion \mathbf{B} ist quellenfrei und $\Phi(F)$ hängt nur von der Randkurve ∂F der Fläche F ab. Der Fluss durch eine geschlossene Fläche verschwindet. Es gibt keine magnetischen Monopolladungen.

- Die *magnetische Spannung* zwischen den Endpunkten einer Kurve C ist

$$V_m(C) = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.21)$$

Da \mathbf{H} Wirbel haben kann, ist sie im allgemeinen wegababhängig. Es können magnetische Ringspannungen längs geschlossener Wege auftreten.

- Die *elektrische Ladung* im Gebiet V ist

$$q(V) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}). \quad (7.22)$$

- Der *elektrische Strom* durch ein orientiertes Flächenstück F ist

$$I(F) = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (7.23)$$

Die Stromdichte ist im allgemeinen nicht quellenfrei und der Strom hängt von der Fläche und nicht nur deren Rand ab.

Diese Größen treten in den integralen Maxwellgleichungen auf. Diese gewinnt man durch Integration der Maxwellgleichungen (7.10) über geschlossen Kurven beziehungsweise geschlossene Flächen.

Das *Faradaysche Induktionsgesetz*:

$$cV(\partial F) \equiv c \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \equiv -\frac{d}{dt} \Phi(F) \quad (7.24)$$

Die elektrische Ringspannung um den Rand eines Flächenstücks ist proportional zur zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche. Sie wurde in (7.4) diskutiert.

Das *Gaußsche Flußgesetz*:

$$\Psi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) \equiv 4\pi q(V) \quad (7.25)$$

Der elektrische Fluss durch ∂V ist gleich der Gesamtladung im Raumgebiet V . Das Gesetz ist äquivalent zu (7.8).

Das *Oerstedsche Flussgesetz*

$$\Phi(\partial V) \equiv \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (7.26)$$

Es existieren keine magnetischen Ladungen in der Natur.

Das *Maxwellsche Verschiebungsstromgesetz*:

$$\begin{aligned} cV_m(\partial F) \equiv c \oint_{\partial F} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} &= 4\pi \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{f} \\ &\equiv 4\pi I(F) + \frac{d}{dt} \Psi(F). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Die magnetische Ringspannung um den Rand eines Flächenstückes ist gleich der Summe aus elektrischem Strom und Verschiebungsstrom durch diese Fläche. Es folgt durch Integration von (7.9) über ein Flächestück.

Die *Kontinuitätsgleichung*

$$-\frac{d}{dt}q(V) \equiv -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho_f(\mathbf{r}) = \oint_{\partial V} \mathbf{j}_f \cdot d\mathbf{f} \equiv I(\partial V). \quad (7.28)$$

Die Änderung der elektrischen Ladung im Gebiet V ist proportional zur Strom durch seine Oberfläche. Die Kontinuitätsgleichung kodiert die Erhaltung der elektrischen Ladung.

7.3.2 Elektromagnetische Potentiale

Wie in der Statik gelingt es, die homogenen Maxwellgleichungen durch Einführung eines skalaren Potentials und eines Vektorpotentials zu lösen. Es gibt allerdings verschiedene Potentiale zu denselben elektromagnetischen Feldern. Diese Vieldeutigkeit, auch Eichfreiheit genannt, spielt in allen feldtheoretischen Beschreibungen der vier Wechselwirkungen eine ganz entscheidende Rolle.

Wie in der Magnetostatik ist die magnetische Induktion auch für zeitabhängige Felder quellenfrei und damit das Wirbelfeld eines Vektorpotentials \mathbf{A} ,

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}. \quad (7.29)$$

Aus der anderen homogenen Maxwellgleichung (7.10c) folgt dann

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

so dass ein skalares Potential Φ existiert mit

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (7.30)$$

Damit sind die beiden homogenen Maxwellgleichungen in (7.10) bzw. (7.15) automatisch erfüllt. Aus den beiden inhomogenen Maxwellgleichungen in (7.15) ergeben sich dann Wellengleichungen für die Potentiale:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \wedge \mathbf{M} \right) \\ -\frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \Delta \Phi &= 4\pi (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dabei haben wir folgende Identität benutzt:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \triangle \mathbf{A}. \quad (7.32)$$

Im Gaußschen Einheitensystem haben die Potentiale die Dimension

$$[\Phi] = [\mathbf{A}] = \frac{\text{esu}}{\text{cm}}. \quad (7.33)$$

7.3.3 Eichtransformationen

Wie bereits erwähnt sind die Potentiale durch die physikalischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} nicht eindeutig festgelegt. Die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda \quad (7.34)$$

ändert die magnetische Induktion \mathbf{B} nicht. Damit auch das elektrische Feld unverändert bleibt, muß gleichzeitig das skalare Potential Φ mittransformiert werden

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \lambda}{\partial t}. \quad (7.35)$$

Die Transformation (7.34) und (7.35) der Potentiale heißt *Eichtransformation*⁶. Die physikalischen Felder ändern nicht unter Eichtransformationen – sie sind eichinvariant. Deshalb sind eichäquivalenten Potentiale (Φ, \mathbf{A}) und (Φ', \mathbf{A}') physikalisch nicht unterscheidbar, sie beschreiben identische Systeme. Die Elektrodynamik hat eine sogenannte Eichtheorie. Wir können die Eichsymmetrie (7.34,7.35) ausnutzen, um eine Eichbedingung an die Potentiale zu stellen, die durch eine geeignete Wahl von λ erfüllbar sein muß. Zwei nützliche Eichungen sind die *Coulomb-* und *Lorenzeichung*, die im Folgenden etwas näher betrachtet werden.

Coulombeichung: Unter einer Eichtransformation geht die Divergenz von \mathbf{A} über in

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} + \triangle \lambda. \quad (7.36)$$

Für ein beliebiges $\nabla \cdot \mathbf{A}$ können wir immer eine Eichfunktion λ finden, so daß die rechte Seite verschwindet. Wir können die Potentiale also immer so wählen, daß

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.37)$$

⁶englisch: gauge transformation

gilt. Dies ist die *Coulombeichung*. Nach Wahl dieser Eichung vereinfachen sich die inhomogenen Maxwellgleichungen (7.31) zu

$$-\Delta\Phi = 4\pi(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \wedge \mathbf{M} \right), \quad (7.38)$$

wobei wir den *Wellenoperator*, auch *d'Alembert Operator* genannt, eingeführt,

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (7.39)$$

Die Coulombeichung zeichnet bestimmte Inertialsysteme aus, sie ist nicht kovariant.

Lorenzeichung: Unter einer Eichtransformation transformiert

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{in} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \square \lambda.$$

Nun können wir die Eichfunktion so wählen, daß die rechte Seite verschwindet. Mit dieser Wahl für λ erfüllen die Potentiale die kovariante *Lorenz-Eichbedingung*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (7.40)$$

In dieser Eichung lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen (7.31)

$$\square \Phi = 4\pi(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \wedge \mathbf{M} \right). \quad (7.41)$$

Dies sind Wellengleichungen und sie weisen unmittelbar auf die elektromagnetische Lichttheorie hin.

7.3.4 Maxwellgleichungen im Vakuum

Im Vakuum verschwinden Polarisierung und Magnetisierung und wir haben es allenfalls mit isolierten mikroskopischen Ladungen und Strömen zu tun. Dann ist (in Gaußschen Einheiten) $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, und die Feldgleichungen (7.10) vereinfachen sich zu

$$a) \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad , \quad b) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (7.42)$$

$$c) \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad , \quad d) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.43)$$

Dies ist die differentielle Form der *Maxwellgleichungen* im Vakuum. Hier sind ρ und \mathbf{j} die mikroskopischen Ladungs- und Stromdichte.

Dies sind die wichtigen Feldgleichungen der mikroskopischen Elektrodynamik. Bei bekannten Anfangsbedingungen und Ladungs- sowie Stromverteilungen bestimmen sie die Erzeugung und Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen im freien Raum. Aus ihnen folgt sofort die Erhaltung der elektrischen Ladung,

$$\frac{d}{dt}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (7.44)$$

Die homogenen Gleichungen (7.43) werden durch (7.29) und (7.30) gelöst und es bleiben (in der Lorenzgleichung) folgende einfache Wellengleichungen für die Potentiale übrig,

$$\square \Phi = 4\pi\rho \quad , \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (7.45)$$

Jede Komponente der zweiten Gleichung in (7.45) hat dieselbe Struktur wie die erste Gleichung. Wir können die Diskussion der Lösung daher auf die erste Gleichung beschränken. Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung hat die Darstellung

$$\Phi = \Phi_{\text{hom}} + \Phi_{\text{part}}. \quad (7.46)$$

Dabei ist Φ_{hom} die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\square \Phi_{\text{hom}} = 0, \quad (7.47)$$

und Φ_{part} eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die Wellengleichungen (7.45) sind der Ausgangspunkt bei der Behandlung der Erzeugung und Propagation von elektromagnetischen Wellen.

Im Vakuum nehmen auch die integralen Maxwellgleichungen eine einfachere Form an.

$$\text{Induktionsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.48)$$

$$\text{el. Flußgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) \quad (7.49)$$

$$\text{mag. Flußgesetz:} \quad \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (7.50)$$

$$\text{Verschiebungsgesetz:} \quad \oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_F \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.51)$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}) = - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \quad (7.52)$$

Kapitel 8

Ausbreitung von Wellen

Wir wollen zeitlich und räumlich veränderliche Felder, insbesondere elektromagnetische Wellen behandeln. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Wellenausbreitung in *homogenen und linearen* Medien ohne freie Ladungsträger, so daß wir die Maxwellgleichungen in der Form

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8.1)$$

zu lösen haben. Lösungen von (8.1) mit $\epsilon = \mu = 1$ werden zu Lösungen mit beliebigen konstanten ϵ und μ , wenn man folgende Ersetzungen vornimmt,

$$c \longrightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} \longrightarrow \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (8.2)$$

Aus den Vakuumlösungen können wir also leicht die Lösungen in homogenen und linearen Medien ohne freie Ladungsträger gewinnen. Deshalb dürfen wir im Folgenden $\mu = \epsilon = 1$ setzen und uns auf Vakuumlösungen beschränken.

Die Gleichungen (8.1) können wir entkoppeln, indem wir \mathbf{E} oder \mathbf{B} eliminieren. Dazu nehmen wir von den beiden Gleichungen mit der Rotation selbst die Rotation und benutzen z.B. $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}$ ist. Man erhält die Wellengleichungen für die elektromagnetischen Felder,

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \square \mathbf{B} = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (8.3)$$

Alle Komponenten von \mathbf{E} und \mathbf{B} erfüllen dieselbe Wellengleichung. Im Vakuum genügen

auch die Potentiale dieser Gleichung, sofern die *Lorenzgleichung* gewählt wird,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \implies \square \Phi = 0, \quad \square \mathbf{A} = 0. \quad (8.4)$$

Wegen der Transformation (8.2) ist

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (8.5)$$

die Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in linearen homogenen Medien, wenn c die Geschwindigkeit im Vakuum ist. In der Optik war seit etwa 1850 auf Grund der Messungen von FIZEAU der Zusammenhang

$$u = \frac{c}{n} \quad (8.6)$$

bekannt, wobei n der *Brechungsindex* des Mediums ist. Die Maxwellsche Theorie gibt also die Lichtgeschwindigkeit im Medium richtig wieder, wenn zwischen den elektromagnetischen Stoffkonstanten ϵ, μ und dem optischen Brechungsindex die *Maxwell-Beziehung*

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (8.7)$$

erfüllt ist. Für Wasser ist $n = 1.33$, $\mu = 1$ und $\epsilon = 80$ und die Beziehung scheint nicht erfüllt zu sein. Diese Schlußfolgerung ist aber nicht erlaubt, weil wir die Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten außer acht ließen. Wir müssen für ϵ, μ und n Werte einsetzen, die sich auf dieselbe Frequenz beziehen. Der Brechungsindex wird bei der Lichtfrequenz von etwa 10^{15}s^{-1} gemessen, die elektromagnetischen Stoffkonstanten aber im Gleichfeld, d.h. bei einer verschwindenden Frequenz. Die Lösung der Maxwellschen Gleichungen für frequenzabhängige Konstanten und die Theorie der Dispersion, welche die Frequenzabhängigkeit dieser Konstanten liefert, werden wir später behandeln. Wir werden sehen, daß die Maxwellsche Beziehung gültig ist. Diese und weitere Resultate zeigen, daß die Theorie des Lichts in der Maxwellschen Theorie enthalten ist. Licht ist elektromagnetische Strahlung in einem speziellen Frequenzband.

8.1 Ebene Wellen

Um die Anfangsbetrachtungen möglichst einfach zu halten, beginnen wir mit ebenen Wellen. Diese haben zu jedem Zeitpunkt auf jeder Ebene aus einer Schar von parallelen Ebenen einen konstanten Wert. Die Punkte auf der Ebene senkrecht zu einem konstanten Einheitsvektor erfüllen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = u$. Deshalb hängen ebene Wellen nur von ct und u ab,

$\Phi = \Phi(ct, u)$. Für diese Wellen ist $\nabla\Phi = \mathbf{n} \partial\Phi/\partial u$ und die Wellengleichung vereinfacht

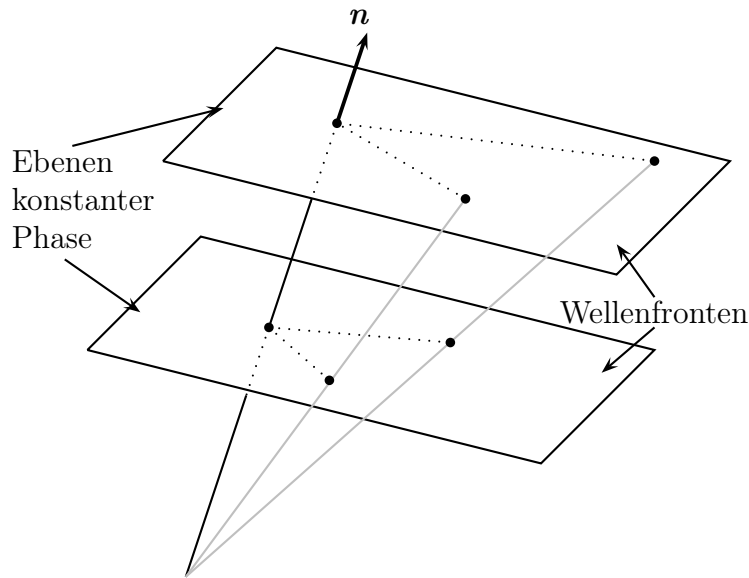


Abbildung 8.1: Ebene Wellen haben auf den Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} einen konstanten Wert.

sich zu

$$\square\Phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \Phi = 0. \quad (8.8)$$

Aus der zweiten Schreibweise erkennt man sofort, daß

$$\Phi = \Phi(ct - u) = \Phi(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \Phi = \Phi(ct + u) = \Phi(ct + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (8.9)$$

Lösungen der Wellengleichung sind. Die erste (zweite) beschreibt eine in $\mathbf{n}(-\mathbf{n})$ -Richtung fortschreitende Welle: Die Ebenen, auf denen Φ denselben konstanten Wert annimmt, bewegen sich mit der Geschwindigkeit c in die Richtung von $\pm\mathbf{n}$. Die Geschwindigkeit der Welle ist also die Lichtgeschwindigkeit. Wegen der Linearität der Wellengleichung ist mit Φ_1 und Φ_2 auch $a\Phi_1 + b\Phi_2$ eine Lösung. Dieses *Superpositionsprinzip* gilt allgemein für lineare Differentialgleichungen, und insbesondere für die Lösungen der Maxwellgleichungen im Vakuum¹. Das Superpositionsprinzip erlaubt die Zusammensetzung beliebiger Wellenformen aus einfachen Grundtypen.

Im Vakuum müssen die Potentiale Φ , \mathbf{A} und Felder \mathbf{E} , \mathbf{B} alle die Wellengleichung

¹In nichtlinearen Medien gilt das Superpositionsprinzip in dieser einfachen Form nicht mehr.

lösen und haben, falls sie in \mathbf{n} -Richtung propagierende ebene Wellen beschreiben, die Form (8.9). Insbesondere

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}). \quad (8.10)$$

Wegen $\partial_i \mathbf{E} = -n_i \mathbf{E}'$, wobei Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet, und der gleichen Formel für das magnetische Feld, folgt aus der Quellenfreiheit der beiden Felder

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})' = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})' = 0.$$

Damit sind die Projektionen der Felder in Ausbreitungsrichtung konstant. Konstante Feldanteile haben aber auf die Wellenausbreitung keinen Einfluß und deshalb gilt für ebenen Wellen

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8.11)$$

Dies bedeutet, daß beide Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle sind. Die restlichen Komponenten der Rotationsgleichungen lauten

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}' + \mathbf{E}' = 0, \quad \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}' - \mathbf{B}' = 0. \quad (8.12)$$

Für Wellenlösungen dürfen wir die konstanten Anteile wieder weglassen. Deshalb haben ebene Wellen die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) \quad (8.13)$$

wobei nach (8.11) die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} der Welle sind. Das elektrische und magnetische Feld haben denselben Betrag, $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$. Wir fassen die Eigenschaften von ebenen Wellen zusammen:

- *Transversalität und Phasengleichheit:*

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad \text{und} \quad |\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| \quad (8.14)$$

Die ersten zwei Eigenschaften bedeuten, daß ebene elektromagnetische Wellen *transversal* sind. Die letzte Gleichung besagt, daß die zueinander senkrechten Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu jeder Zeit und an jedem Ort denselben Betrag haben. Sie haben an jeweils denselben Stellen Maxima und Nullstellen; sie sind in Phase oder *phasengleich*.

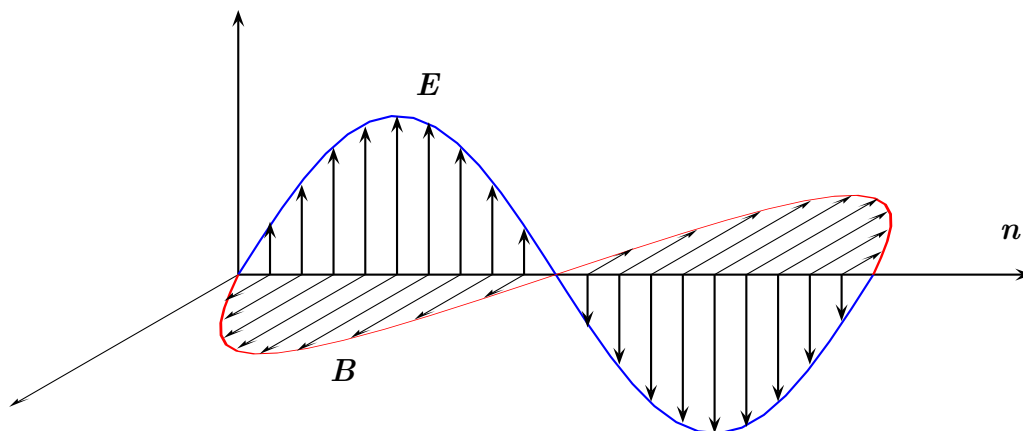


Abbildung 8.2: Für eine ebene Welle bilden \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{n} ein Orthogonalsystem.

- *Phasengeschwindigkeit*: Eine in die z -Richtung fortschreitende Welle hat eine feste Phase, falls $z = ct + a$ gilt mit einer beliebigen Konstante a . Die Maxima (Nullstellen, Minima) verschieben sich mit der Lichtgeschwindigkeit, d.h. die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist die *Lichtgeschwindigkeit*.

8.1.1 Monochromatische ebene Wellen

Wir betrachten zunächst harmonisch schwingende ebene Wellen, sogenannte *monochromatische ebene Wellen*, für welche

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) &= \Re(\mathbf{E}_0 e^{ik(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}) = \Re(\mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}), & \omega &= c|\mathbf{k}| \\ \mathbf{B}(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) &= \Re(\mathbf{B}_0 e^{ik(ct - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}) = \Re(\mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}), & \mathbf{k} &= |\mathbf{k}|\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (8.15)$$

mit konstanten Amplitudenvektoren $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$. Aus unseren vorherigen Überlegungen über ebene Wellen oder durch Einsetzen in die Wellengleichungen findet man folgende algebraischen Gleichungen für die reelle *Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi\nu$, den reellen *Wellenzahlvektor* \mathbf{k} und die konstanten Amplitudenvektoren:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0. \quad (8.16)$$

Wie erwartet sind \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 orthogonal, haben dieselbe Länge und sind senkrecht zum Wellenzahlvektor. Zur vollständigen Festlegung einer monochromatischen ebenen Welle braucht es einen Wellenzahlvektor \mathbf{k} und einen im allgemeinen komplexen Amplituden-

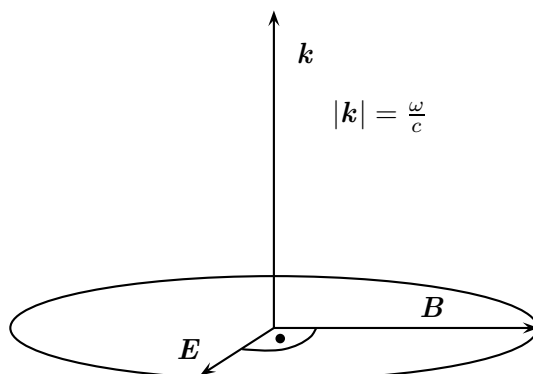


Abbildung 8.3: *Das elektrische und magnetische Feld sind transversal und haben dieselbe Amplitude.*

vektor \mathbf{E}_0 , senkrecht zu \mathbf{k} .

Bei der Untersuchung der Lösungen dürfen wir annehmen, daß der Wellenzahlvektor in die z -Richtung zeigt, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$. Monochromatische und in die z -Richtung propagierende ebene Wellen haben die Form

$$\mathbf{E} = \Re\left((E_{0x}\mathbf{e}_x + E_{0y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega t - kz)}\right), \quad \mathbf{B} = \Re\left((-E_{0y}\mathbf{e}_x + E_{0x}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega t - kz)}\right). \quad (8.17)$$

Zu einer festen Zeit gilt für den Abstand zweier benachbarten Maxima die Beziehung $k\Delta z = 2\pi$. Der entsprechende räumliche Abstand ist die *Wellenlänge*

$$\lambda = \Delta z = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}. \quad (8.18)$$

Da die Welle allein durch das \mathbf{E} -Feld (oder allein durch das \mathbf{B} -Feld) bestimmt ist, bezieht sich die folgende Diskussion auf das elektrische Feld. Wir schreiben die komplexen Koeffizienten gemäß

$$E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\phi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\phi+\delta)}.$$

Dann wird das elektrische Feld zu

$$\mathbf{E} = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \phi)\mathbf{e}_x + |E_{0y}| \cos(\omega t - kz + \phi + \delta)\mathbf{e}_y. \quad (8.19)$$

Je nach relativer Phase δ unterscheidet man nun drei Fälle:

- *Linear polarisierte Wellen:* Für $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$ ist

$$\mathbf{E} = (|E_{0x}| \mathbf{e}_x \pm |E_{0y}| \mathbf{e}_y) \cos(\omega t - kz + \phi). \quad (8.20)$$

Der Koeffizient ist ein orts- und zeitunabhängiger Vektor und damit liegt das elektrische Feld in einer *festen Schwingungsebene*. Eine linear polarisierte Welle lässt sich als Überlagerung von zwei linear unabhängigen, linear polarisierten Wellen schreiben. Die obige Welle ist eine Überlagerung von

$$\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_y \cos(\omega t - kz + \phi).$$

- *Zirkular polarisierte Wellen:* Für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$ ist

$$\mathbf{E} = E (\cos(\omega t - kz + \phi) \mathbf{e}_x \mp \sin(\omega t - kz + \phi) \mathbf{e}_y). \quad (8.21)$$

An einem festen Ort durchläuft der Vektor in den Klammern mit fortschreitender Zeit den Einheitskreis. Das elektrische Feld dreht einen Kreis vom Radius E mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für $\delta = \pi/2$ gilt das obere Vorzeichen in (8.21). Blickt man in die Ausbreitungsrichtung dreht der \mathbf{E} -Vektor nach links. Betrachten wir die Bewegung von \mathbf{E} in Raum und Zeit, dann beschreibt \mathbf{E} eine Kreisspirale. In diesem Sinn spricht man von einer *linkszirkular polarisierten* Welle. Für $\delta = -\pi/2$ ist die Welle rechtszirkular polarisiert.

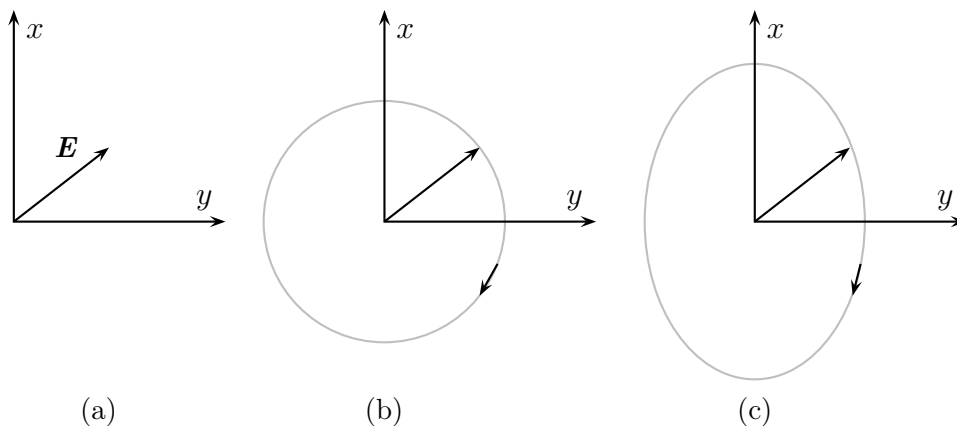


Abbildung 8.4: *Lineare Polarisation (a), rechts-zirkulare Polarisation (b) und links-zirkuläre Polarisation (c). Der \mathbf{k} -Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

- *Elliptisch polarisierte Wellen:* Für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$ ist

$$E_x = |E_{0x}| \cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad E_y = \mp |E_{0y}| \sin(\omega t - kz + \phi).$$

Die Komponenten des Feldes erfüllen die Ellipsengleichung mit den Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$:

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|} \right)^2 = 1.$$

An einem festen Ort durchläuft der \mathbf{E} -Vektor eine Ellipse und seine Amplitude ist nicht mehr konstant.

Die Abbildung 8.5 zeigt, wie sich bei stetiger Veränderung von δ die Schwingungsellipse ändert. Für $\delta = 0$ entartet sie in eine Gerade und es liegt lineare Polarisation vor. Ist $0 <$

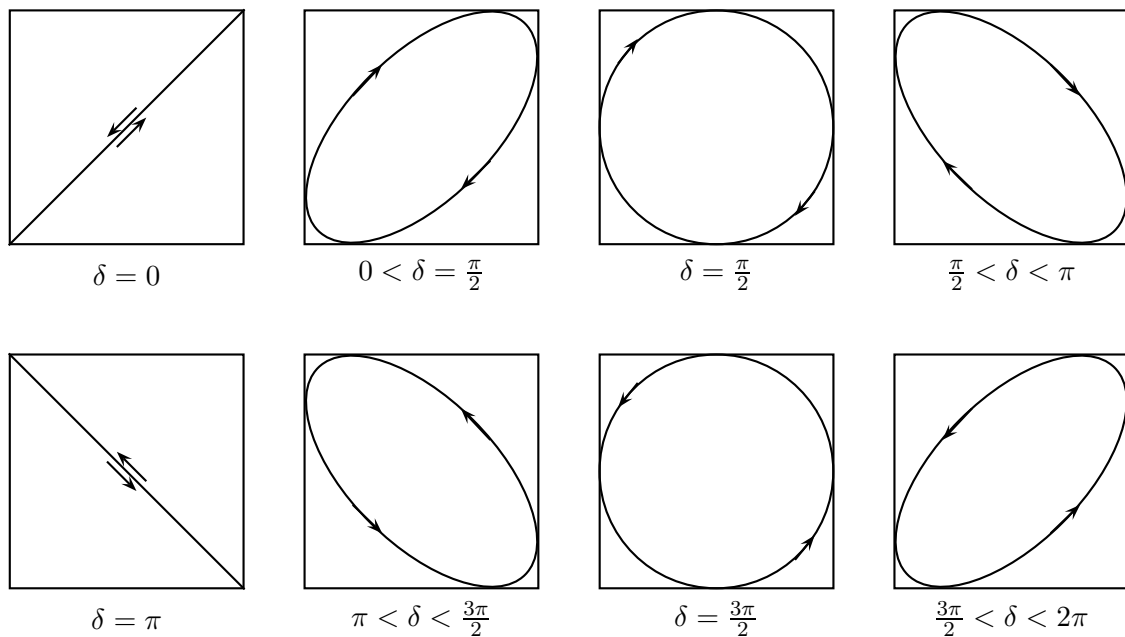


Abbildung 8.5: *Elliptisches Licht verschiedener Phasendifferenz der rechtwinkligen Komponenten. Der \mathbf{k} -Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

$\delta < \pi$, dann haben wir rechtsläufige Ellipsen, unter denen für $\delta = \pi/2$ ein Kreis ist. Für $\delta = \pi$ haben wir wieder lineare Polarisation und den Übergang von rechts- zu links- zu links- zu links-

ebenen Wellen. Für $\pi < \delta < 2\pi$ sind die Ellipsen linksläufig. Insbesondere für $\delta = 3\pi/2$ handelt es sich um linkshändig polarisierte Wellen.

8.2 Kugelwellen

Eine bei der Erzeugung von Wellen oft gebrauchte Wellenform ist die Kugelwelle. Um zu einer Darstellung von Kugelwellen zu kommen, schreibt man die Wellengleichung zweckmäßig in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) um:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega \Phi = 0. \quad (8.22)$$

In der Elektrostatik haben wir gezeigt, daß jede Funktion der Winkelvariablen eine Linearkombination der Kugelfunktionen ist. Daher ist es angezeigt, Lösungen der Form

$$\Phi = \frac{1}{r} F(t, r) \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (8.23)$$

zu suchen. Setzen wir diesen Ansatz ein und benutzen $\Delta_\Omega \mathcal{Y}_{\ell m} = -\ell(\ell + 1) \mathcal{Y}_{\ell m}$, dann reduziert sich (8.22) auf folgende 2-dimensionale Wellengleichung für F :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} F = 0. \quad (8.24)$$

Während ebene Wellen auf parallelen Ebenen konstant sind, sind Kugelwellen auf konzentrischen Kugelflächen konstant. Sie hängen deshalb nicht von den Winkelvariablen ab und haben $\ell = 0$. Dann vereinfacht sich die Wellengleichung (8.24) zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0. \quad (8.25)$$

Damit haben die Wellengleichungen (8.3) für die elektromagnetischen Felder die Lösungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{r} [\mathbf{E}_+(ct - r) + \mathbf{E}_-(ct + r)] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{r} [\mathbf{B}_+(ct - r) + \mathbf{B}_-(ct + r)]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

E_+ ist eine auslaufende Kugelwelle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Ursprung ausgehend nach außen ausbreitet, und E_- eine einlaufende Welle, da sie sich auf den Ursprung

zusammenzieht. Die Quellenfreiheit der Felder ist äquivalent zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) = 0,$$

und deshalb sind $r^2 E_r$ und $r^2 B_r$ konstant. Für am Ursprung reguläre Lösungen verschwinden die Konstanten und

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (8.27)$$

Es handelt sich also wieder um *transversale Wellen*, deren Amplitude mit wachsendem Abstand vom Ursprung gemäß $1/r$ abnimmt. Für die Polarisierung dieser Wellen gilt dasselbe wie bei den ebenen Wellen.

8.3 Besselwellen

Die Wellengleichung $\square \mathbf{E} = 0$ besitzt interessante Lösungen, die erst 1987 gefunden wurden, die Klasse der *beugungsfreien Wellen*². Beugungsfrei bedeutet, daß die Welle bei der Ausbreitung im freien Raum in z -Richtung ihre Intensitätsverteilung in der (x, y) -Ebene unabhängig von z beibehält (zur Definition der Intensität siehe später). Normalerweise würde man erwarten, daß ein im Querschnitt stark lokalisierter Lichtbündel bei der Ausbreitung seine Form nicht beibehalten kann. Genau solche Lösungen gibt es jedoch, und sie konnten auch annähernd realisiert werden³. Das einfachste Beispiel ist die *fundamentale Besselwelle*. Wir machen den Ansatz

$$\Phi = \Phi_0 J(\alpha \rho) e^{i(\omega t - k z)}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (8.28)$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (8.29)$$

so daß die Wellengleichung $\square \Phi = 0$ äquivalent zu folgender gewöhnlichen Differentialgleichung für J in (8.28) ist,

$$v^2 J'' + v J' + \left(\frac{\omega^2 - k^2 c^2}{\alpha^2 c^2} \right) v^2 J = 0, \quad v = \alpha \rho, \quad ' = \frac{d}{dv}.$$

²J. Durnin, J.J. Miceli Jr. und J.H. Eberly, Diffraction-free beams, Phys. Rev. Lett. 58, 1987, 1499.

³A. Vasara, J. Turunen und A.T. Friberg, Realisation of general nondiffracting beams with computer-generated holograms, J. Opt. Soc. Am. A6, 1989, 1748.

Wählen wir den freien Parameter α so, dass

$$\omega^2 = (\alpha^2 + k^2) c^2, \quad 0 < \alpha < \frac{\omega}{c} \quad (8.30)$$

gilt, dann erhalten wir die einfache Besselsche Differentialgleichung

$$v^2 J'' + v J' + v^2 J = 0, \quad (8.31)$$

deren am Ursprung reguläre Lösung die nullte Besselfunktion J_0 ist. Also löst

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, \quad (8.32)$$

die Wellengleichung. Die Lösung ist axialsymmetrisch und der Parameter α charakterisiert die Breite des zentralen Lichtbündels. Es erfolgt keine Ausweitung in den freien Raum.

In der Lorenzgleichung haben die Potentiale die Form

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (8.33)$$

Die Lorenzbedingung lautet

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = e^{i(\omega t - kz)} \left(i \left(\frac{\omega}{c} \Phi_0 - k A_{0z} \right) J_0 + \frac{\alpha}{\rho} (x A_{0x} + y A_{0y}) J'_0 \right) = 0.$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, falls

$$A_{0z} = \frac{\omega}{kc} \Phi_0 \quad \text{und} \quad A_{0x} = A_{0y} = 0$$

gelten. Die nichtverschwindenden Potentiale der fundamentalen Besselwelle lauten deshalb

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{und} \quad A_z = \frac{\omega}{kc} \Phi_0 J_0(\alpha \rho) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (8.34)$$

Aus diesen Potentialen in der Lorenzgleichung kann man nun das elektromagnetische Feld (\mathbf{E}, \mathbf{B}) gewinnen⁴.

⁴Übung: Berechne und diskutiere \mathbf{E} und \mathbf{B} für die fundamentale Besselwelle.

8.4 TE- und TM-Wellen

Diese Wellen spielen zum Beispiel im Zusammenhang mit Hohlleitern eine wichtige Rolle. Für ihre Konstruktion überlagern wir zwei monochromatische ebene Wellen mit *gleicher Frequenz* und gleichem elektrischen *oder* magnetischen Amplitudenvektor aber *unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung*. Bei TE-Wellen haben die beiden elektrischen Wellen gleiche Amplitude, und man überlagert die ebenen Wellen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{B}_1 = \frac{c}{\omega}(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}) \wedge \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{B}_2 = \frac{c}{\omega}(\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}) \wedge \mathbf{E}_2. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Die erste Welle propagiert in Richtung von $\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}$ und die zweite in Richtung von $\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}$. Damit diese Wellen die Maxwellgleichungen erfüllen, muss $\omega = c|\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k}| = c|\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}|$ gelten. Daraus folgen die Relationen

$$\mathbf{k} \perp \Delta\mathbf{k} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E}_0 \perp \Delta\mathbf{k}, \quad \omega = c\sqrt{\mathbf{k}^2 + (\Delta\mathbf{k})^2}. \quad (8.36)$$

Die Überlagerung ergibt das *transversale* elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cos(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (8.37)$$

wobei wir $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ benutzten. Diese Lösung beschreibt eine in \mathbf{k} -Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{|\mathbf{k}|} \sqrt{\mathbf{k}^2 + (\Delta\mathbf{k})^2} > c. \quad (8.38)$$

Die Phasengeschwindigkeit liegt über der Lichtgeschwindigkeit. Das ist möglich und nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie, nach der keine Signalgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit übertreffen darf. Als Signalgeschwindigkeit kommt die Gruppengeschwindigkeit, und nicht die Phasengeschwindigkeit, in Frage. Und diese ist kleiner als c .

Die Überlagerung der magnetischen Felder führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) + \frac{c}{\omega} \Delta\mathbf{k} \wedge (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \\ &= \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} + 2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{c}{\omega} \Delta\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Auch das \mathbf{B} -Feld breitet sich in \mathbf{k} -Richtung aus. Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist

\mathbf{B} nicht transversal,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \frac{2c}{\omega} (\mathbf{E}_0, \mathbf{k} \wedge \Delta \mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \neq 0.$$

Das Magnetfeld hat eine longitudinale Komponente, d.h. eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die konstruierte Lösung heisst *transversale elektrische Welle*, abgekürzt TE-Welle. Die Amplituden hängen von $\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ab.

Ganz ähnlich kann man zwei harmonische ebene Wellen mit gleicher Frequenz, gleichem *magnetischen* Amplitudenvektor aber verschiedenen Ausbreitungsrichtungen überlagern, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= B_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{c}{\omega} (\mathbf{k} + \Delta \mathbf{k}) \wedge \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 &= B_0 \cos(\omega t - (\mathbf{k} - \Delta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{c}{\omega} (\mathbf{k} - \Delta \mathbf{k}) \wedge \mathbf{B}_2. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Damit diese ebenen Wellen die Maxwellgleichungen lösen, müssen die Wellenzahlvektoren und Amplituden wieder die Relationen (8.36) erfüllen, wobei \mathbf{E}_0 durch \mathbf{B}_0 zu ersetzen ist. Die Überlagerung ergibt das *transversale magnetische* Feld

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = 2B_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cos(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (8.41)$$

Dies ist eine in \mathbf{k} -Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle. Die Überlagerung der elektrischen Felder führt auf

$$\mathbf{E} = -\frac{c}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B} - 2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{c}{\omega} \Delta \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0.$$

Nun ist das in \mathbf{k} -Richtung propagierende elektrische Feld *nicht transversal*,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = -\frac{2c}{\omega} (B_0, \mathbf{k} \wedge \Delta \mathbf{k}) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sin(\Delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \neq 0.$$

Man nennt eine derartige Welle deshalb *transversal magnetisch*, abgekürzt TM-Welle.

8.5 Überlagerung von ebenen Wellen

Die Wellengleichung ist linear und deshalb kann jede Lösung der Wellengleichung, zum Beispiel das elektrische oder magnetische Feld im ladungsfreien Raum, als Fourier-Integral geschrieben werden, zum Beispiel

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega d^3k \, \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (8.42)$$

Eine Welle ist eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen. Jede Komponente des Feldes ist also ein *Fourierintegral*. Fourierreihen und Fourierintegrale treten deshalb in der Wellentheorie immer wieder auf. Im Anhang zu diesem Kapitel habe ich die wesentlichen Tatsachen über Fourierintegrale zusammengetragen. Sie werden diese in der Quantenmechanik wieder brauchen.

Die Fourierkoeffizienten des elektrischen Feldes in (8.42) sind durch die inverse Fouriertransformation bestimmt,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dt d^3x \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (8.43)$$

Nun können wir die allgemeinste Lösung der Maxwellgleichungen im Vakuum (bzw. in linearen homogenen Medien) angeben. Dazu transformieren wir die entsprechenden Maxwellgleichungen in den (ω, \mathbf{k}) -Raum. Mit (8.58) finden wir die Maxwellgleichungen im (ω, \mathbf{k}) -Raum,

$$\mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{B}} + \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (8.44)$$

$$\mathbf{k} \wedge \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\omega}{c} \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad , \quad \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (8.45)$$

Nicht unerwartet sind dies die Bedingungen (8.16) für monochromatische ebene Wellen. Benutzen wir die Resultate über derartige Lösungen dann finden wir

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Re \int d^3k \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (8.46)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \Re \int d^3k \frac{\mathbf{k}}{k} \wedge \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (8.47)$$

wobei $\omega = |\mathbf{k}|c$ ist und $\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k})$ senkrecht auf dem Wellenzahlvektor \mathbf{k} steht.

8.6 Anhang: Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode L , $f(x+L) = f(x)$, lautet

$$f(x) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi i n x / L} \Leftrightarrow f = \mathcal{F}(\{f_n\}), \quad (8.48)$$

wobei a eine reelle Konstante ungleich Null ist. Die f_n sind die Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion f . Die Darstellung ist möglich für quadratintegrierbare Funktio-

nen, $f \in L_2[-L/2, L/2]$. Die Rücktransformation, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten, gewinnt man aus

$$f_n = \frac{1}{aL} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-2\pi i n x / L} f(x) \Leftrightarrow \{f_n\} = \mathcal{F}^{-1}(f) \quad (8.49)$$

wie man leicht durch Einsetzen von (8.48) und Vertauschen von Summation und Integration sehen kann:

$$\frac{1}{L} \int dx e^{-2\pi i n x / L} \sum_m f_m e^{2\pi i m x / L} = \frac{1}{L} \sum_m L \delta_{mn} f_m = f_n.$$

Für $a^2 = 1/L$ ist die invertierbare Abbildung $L_2 \ni f(x) \rightarrow \{f_n\} \in l_2$ vom Raum der quadratintegrierbaren Funktionen in den Raum der quadratsummierbaren Folgen längenhaltend:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_2}^2 &= \int dx \bar{f}(x) f(x) = a^2 \int dx \sum_{m,n} \bar{f}_m e^{-2\pi i (m-n)x} f_n \\ &= a^2 L \sum_n |f_n|^2 = a^2 L \|\{f_n\}\|_{l_2}^2. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Seien nun $f = \mathcal{F}(\{f_n\})$ und $g = \mathcal{F}(\{g_n\})$. Wir wollen berechnen, welche Funktion die Koeffizienten $\{f_n g_n\}$ hat:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\{f_n g_n\}) &= a \sum_n f_n g_n e^{2\pi i n x / L} = \frac{a}{L} \sum_{n,m} f_n g_m e^{2\pi i n x / L} \int dy e^{2\pi i y (m-n) / L} \\ &= \frac{1}{aL} \int dy f(x-y) g(y). \end{aligned}$$

Damit geht das Produkt in die Faltung über:

$$f = \mathcal{F}(\{f_n\}), g = \mathcal{F}(\{g_n\}) \Rightarrow \mathcal{F}(\{f_n g_n\}) = \frac{1}{aL} \int dy f(x-y) g(y). \quad (8.51)$$

Die Fouriertransformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte, nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ macht und

$$k := \frac{2\pi n}{L}, \quad f_n = \tilde{f}(k), \quad \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{und} \quad a = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \quad (8.52)$$

definiert. Dann geht (8.48) über in die Riemann-Summe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \Delta k \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

das für $L \rightarrow \infty$ in das Riemannsche Integral von $-\infty$ bis ∞ übergeht. Deshalb ist die Fouriertransformation auf der reellen Achse

$$\mathcal{F}(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (8.53)$$

un die Umkehrtransformation lautet

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (8.54)$$

Aus (8.50) und mit unserer Wahl für die Konstante a ergibt sich unmittelbar die *Parseval-Beziehung*, nach der f und \tilde{f} die gleiche L_2 -Norm haben,

$$\|f\|^2 = \int dx |f(x)|^2 = \int dk |\tilde{f}(k)|^2 = \|\tilde{f}\|^2. \quad (8.55)$$

Die Fouriertransformation ist eine lineare und längenerhaltende Abbildung. Lassen wir in (8.51) die Intervalllänge gegen Unendlich streben, dann schließen wir unmittelbar

$$f = \mathcal{F}(\tilde{f}), \quad g = \mathcal{F}(\tilde{g}) \implies \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y) g(y). \quad (8.56)$$

Dies bedeutet, das die Fouriertransformation des Produktes zweier Funktionen gleich der Faltung der Fouriertransformierten der Funktionen ist. Als Beispiel wählen wir die konstante Funktion $\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}$ und bestimmen ihre Fouriertransformierte f . Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y) g(y) = \mathcal{F}(\sqrt{2\pi} \tilde{g}) = \int dk \tilde{g}(k) e^{ikx} = \sqrt{2\pi} g(x)$$

für eine Testfunktion $g(x)$. Daraus folgt die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y). \quad (8.57)$$

Wir werden diese wichtige Formel in der Vorlesung noch oft brauchen. Ist $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$, dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ik \tilde{f}. \quad (8.58)$$

Ableitungen gehen bei der Fouriertransformation bis auf einen Faktor in die Multiplikation mit der dualen Variablen über.

Kapitel 9

Wellen in Medien

In diesem Kapitel untersuchen wir die Fortpflanzung und Dämpfung von elektromagnetischen Wellen in Leitern und Isolatoren. Insbesondere interessiert uns die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit. Als Anwendung wird die frequenzabhängige Eindringtiefe von Wellen in Metalle berechnet. Aus wenigen allgemeinen Prinzipien wie Lokalität und Linearität wird ein Zusammenhang zwischen dem absorptiven Imaginärteil von ϵ und dem dispersiven Realteil hergeleitet.

9.1 Wellen in homogenen Leitern

Ein elektromagnetisches Wechselfeld beschleunigt die freien Ladungsträger in einem Leiter und verliert dabei Feldenergie. Es wird gedämpft und seine Energie in *Joulsche Wärme* umgewandelt. Dies ist der Grund dafür, dass Metalle undurchsichtig sind. Wir wollen annehmen, das Material habe lineare Verknüpfungsgleichungen und sei ein *homogener Ohmscher Leiter*,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}, \quad (9.1)$$

mit räumlich konstanter Dielektrizitätskonstante ϵ , magnetischer Permeabilität μ und *elektrischer Leitfähigkeit* σ . Im Gaußschen Einheitensystem hat σ die Dimension s^{-1} . Die frequenzabhängigen Materialgrößen ϵ , μ und σ seien als gegeben vorausgesetzt.

9.1.1 Transversal-Schwingungen und Skin-Effekt

Die einfachen Verknüpfungsgleichungen (9.1) gelten nur für feste Frequenzen. Deshalb betrachten wir zeit-periodische Felder mit Kreisfrequenz ω , zum Beispiel $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{r})e^{i\omega t}$,

und entsprechend auch für die Dichten ρ_f und \mathbf{j}_f . Nach Elimination von \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{j}_f vereinfachen sich für feste Frequenzen die Maxwellgleichungen zu

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi \rho_{f,0} \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{B}_0 - \frac{i\epsilon\mu\omega}{c} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \mathbf{E}_0 \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{E}_0 + \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_0 = 0. \quad (9.3)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0$ folgt

$$i\omega \rho_{f,0} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = 0 \quad (9.4)$$

und damit können wir die erste Gleichung in (9.2) wie folgt schreiben

$$0 = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - 4\pi \rho_{f,0} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \frac{4\pi i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = \left(\epsilon + \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \right) \nabla \cdot \mathbf{E}_0. \quad (9.5)$$

wobei die räumlich Konstanz der Materialkonstanten ϵ und σ ausgenutzt wurde.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Vakuum gibt es jetzt *zwei Lösungstypen*, entsprechend den Lösungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \epsilon\omega = 4\pi i\sigma. \quad (9.6)$$

Lösungen mit $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$: Bei diesem Lösungstyp ist neben dem magnetischen auch das elektrische Feld quellenfrei. Nehmen wir die Rotation der Gleichungen mit einer Rotation in (9.2,9.3), wobei wir die Quellenfreiheit der Felder benutzen, dann ergeben sich die *Helmholtzgleichungen* für das elektromagnetische Feld

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 \quad , \quad \Delta \mathbf{B}_0 + k^2 \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{i\epsilon\omega} \right). \quad (9.7)$$

Für *Isolatoren* mit verschwindender Leitfähigkeit ist $k = \sqrt{\epsilon\mu}\omega/c$ reell¹, und die transversale Welle propagiert mit der Phasengeschwindigkeit $\omega/k = c/n$, wobei $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ der Brechungsindex ist, durch den Isolator. Dies sind die früher diskutierten monochromatischen transversalen Wellen in Isolatoren. Wir werden später sehen, daß außerhalb von Resonanzstellen $dn/d\omega$ positiv ist und *normale Dispersion* vorliegt.

Für *Metalle* ist $\sigma > 0$ und der Ausbreitungsvektor wird komplex. Es ist angebracht,

¹Wir sehen von Resonanzstellen, wo $\epsilon(\omega) = 0$ ist, ab.

mit einem komplexen Brechungsindex \tilde{n} zu rechnen, indem wir

$$\tilde{n} = \frac{c}{\omega} k = n - i\kappa = \sqrt{\epsilon\mu \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{i\epsilon\omega}\right)}. \quad (9.8)$$

eingeführen. κ heisst *Absorptionsindex*. Für eine in z -Richtung fortschreitende transversale ebene Welle finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re(\mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)}) e^{-\omega\kappa z/c}, \quad \mathbf{E}_0 = \text{konstant}, \\ \mathbf{B} &= \Re((n - i\kappa) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)}) e^{-\omega\kappa z/c}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Die Amplitude der exponentiell gedämpften Welle fällt auf der Strecke $d = c/\kappa\omega$ auf ein $1/e$ -tel ab. Wellen können nur bis zu dieser *Eindringtiefe* in den Leiter eindringen. Für kleine Frequenzen $\epsilon\omega \ll 4\pi\sigma$ dürfen wir folgendermassen nähern:

$$\tilde{n} \approx \sqrt{\frac{4\pi\mu\sigma}{i\omega}} = (1 - i) \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}} \quad \text{d.h.} \quad \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}}$$

Die entsprechende Eindringtiefe ist dann

$$d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}} \quad (\sigma/\omega \gg \epsilon). \quad (9.10)$$

Unsere Resultate gelten dann für gute Leiter im Gebiet der Wechselströme und technischen Hochfrequenzen. Für Kupfer ist

$$\mu \sim 1 \quad \text{und} \quad \sigma \sim 5.8 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1}$$

und eine Welle mit 50 Hertz hat die Eindringtiefe $d = 9$ mm. Ist d viel kleiner als die repräsentativen Längen, dann findet die Stromleitung in einer Haut(skin) statt. Man spricht vom *Skin-Effekt*. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen schneller ist. Man findet zum Beispiel die folgenden Eindringtiefen,

Material	50 Hz	1 MHz	3 GHz
Aluminium	$d = 1.1$ cm	$d = 0.085$ mm	$d = 1.6$ μm
Kupfer	$d = 0.9$ cm	$d = 0.066$ mm	$d = 1.2$ μm
Meereswasser	$d = 30$ m	$d = 20$ cm	kein guter Leiter

Diese d -Werte geben die zur Abschirmung der betreffenden Wellenlänge etwa erforderliche

Blechstärke an.

Lösungen mit $\epsilon\omega = 4\pi i\sigma$: Für diesen Lösungstyp braucht das elektrische Feld nicht quellenfrei zu sein. Wegen der zweiten Gleichung in (9.3) ist die magnetische Induktion \mathbf{B} nicht nur quellen- sondern auch wirbelfrei und verschwindet damit. Wir haben es mit *rein elektrischen Schwingungen* zu tun. Wegen der letzten Gleichung in (9.3) sind die Schwingungen des elektrischen Feldes *longitudinal*, $\nabla \wedge \mathbf{E}_0 = 0$, und führen daher wegen $\mathbf{j}_{f,0} = \sigma \mathbf{E}_0$ und wegen der Kontinuitätsgleichung zu Schwingungen der Ladungsdichte. Die Frequenz der Schwingungen ist durch $\epsilon \cdot \omega = 4\pi i\sigma$ gegeben. Später werden wir sehen, daß diese Wellen schwach gedämpft sind und mit der Plasmafrequenz schwingen.

9.1.2 Anwendung: Der Skineffekt im zylindrischen Leiter

Der Leiter sei ein Zylinder mit der z -Achse als Symmetrieachse. Entsprechend zeigt der Stromdichtevektor in die z Richtung. Wegen $\mathbf{j} \sim \mathbf{E}$ erfüllt die Stromdichte die gleiche Differentialgleichung wie das elektrische Feld, (9.7). Im Niederfrequenzbereich ist $\sigma/\omega \gg \epsilon$ und wir dürfen für κ die Näherung (9.10) machen. Für die Komponente j in $\mathbf{j}_{f,0} = j\mathbf{e}_z$ finden wir dann die Helmholtzgleichung

$$\Delta j + k^2 j = 0, \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}, \quad \tilde{n} \approx (1 - i) \sqrt{\frac{2\pi\mu\sigma}{\omega}}. \quad (9.11)$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) und nehmen an, daß j weder von ϕ noch von z abhängt. Dann wird aus (9.11) die Besselsche Differentialgleichung,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} j + k^2 j = 0, \quad (9.12)$$

die von der *Bessel-Funktion* nullter Ordnung gelöst wird,

$$j(\rho) = J_0(k\rho). \quad (9.13)$$

Man kann diese Resultate anwenden und den Widerstand eines zylindrischen Leiters mit Radius a berechnen. Für den Strom findet man

$$I = 2\pi \int_0^a \rho J_0(k\rho) d\rho = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{ka} x J_0(x) dx = \frac{2\pi a}{k} J_1(ka), \quad (9.14)$$

wobei wir das folgende Integral benutzten,

$$\int_0^y x J_0(x) dx = y J_1(y).$$

Die Spannung pro Längeneinheit ist gerade die z -Komponente des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche $\rho = a$, also

$$\Delta U / \Delta L = E_z(a) = \frac{j(a)}{\sigma} = \frac{J_0(ka)}{\sigma}. \quad (9.15)$$

Damit ist der Widerstand (pro Längeneinheit)

$$R = \frac{\Delta U / \Delta L}{I} = \frac{k}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \quad (9.16)$$

Allgemein ist

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \implies \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \sim \frac{2}{x} \left(1 - \frac{x^2}{8} + O(x^4)\right), \quad (9.17)$$

woraus sich folgende Entwicklung des Widerstandes nach Potenzen von ka ergibt:

$$R = \frac{1}{\pi\sigma a^2} \left(1 + i \frac{\pi\omega\mu\sigma}{2c^2} a^2 + \dots\right). \quad (9.18)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ liefert dies den richtigen *Gleichstromwiderstand* $R(0) = 1/\pi a^2 \sigma_0$.

9.1.3 Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Die Maxwellsche Beziehung

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \quad (9.19)$$

kann mit den statischen Werten für ϵ, μ für Licht wegen der bekannten Dispersion nicht gelten. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit und des Brechungsindex modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers aus,

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau} \dot{\mathbf{r}}. \quad (9.20)$$

Hier sind m_0 und e_0 die Masse und Ladung des Teilchens. Der letzte Term ist ein phänomenologischer Reibungsterm, der die Stöße mit den umgebenden Teilchen beschreibt. Dabei ist τ die *Relaxationszeit*, die angibt wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit

$$\mathbf{j}_f = \rho_f \dot{\mathbf{r}} = n_0 e_0 \dot{\mathbf{r}}, \quad (9.21)$$

wobei n_0 die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_0 e_0} \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{n_0 e_0 \tau} \mathbf{j}_f. \quad (9.22)$$

Im stationären Fall ist \mathbf{j}_f zeitunabhängig und wir finden das Ohmsche Gesetz $\mathbf{j}_f = \sigma_0 \mathbf{E}$ mit der *statischen* Leitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{n_0 e_0^2 \tau}{m_0} \quad (\text{statischer Fall}). \quad (9.23)$$

Mit der harmonischen Zeitabhängigkeit $\mathbf{j}_f = e^{i\omega t} \mathbf{j}_{f,0}$, $\mathbf{E} = e^{i\omega t} \mathbf{E}_0$ wird (9.22) zu

$$\mathbf{j}_{f,0} = \sigma(\omega) \mathbf{E}_0, \quad \text{mit} \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad (\text{Drude}). \quad (9.24)$$

Wegen (9.8) ist das Quadrat des frequenzabhängigen komplexen Brechungsindex gegeben durch

$$\tilde{n}^2(\omega) = \epsilon\mu \left(1 + \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega\epsilon(1 + i\omega\tau)} \right). \quad (9.25)$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$, folgt daraus

$$\tilde{n}^2(\omega) = \epsilon\mu \left(1 - \frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon\tau\omega^2} \right) = \epsilon\mu \left(1 - \frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0 \omega^2} \right) = \epsilon\mu \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right),$$

wobei wir die *Plasmafrequenz* einführen,

$$\omega_P = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e_0^2}{\epsilon m_0}}. \quad (9.26)$$

Sie beträgt beispielsweise für Kupfer $1.65 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$, wenn mit $\epsilon = 1$ gerechnet wird. Man beachte, daß die Relaxationszeit in diesem Resultat nicht mehr auftaucht. Der im allgemeinen komplexe Brechungsindex ist

$$\tilde{n} = n - i\kappa = \sqrt{\epsilon\mu \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)} \quad (\omega\tau \gg 1). \quad (9.27)$$

Unterhalb der Plasmafrequenz verschwindet n und der Index ist imaginär mit

$$\kappa = \sqrt{\epsilon\mu \left(\frac{\omega_P^2}{\omega^2} - 1 \right)} \sim \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega_P}{\omega}. \quad (9.28)$$

Die Wellen sind exponentiell gedämpft und die *Eindringtiefe*

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{c}{\omega_P}, \quad \omega \ll \omega_P \quad (9.29)$$

ist frequenzunabhängig, bei Kupfer etwa $0.02 \mu\text{m}$. Übersteigt die Frequenz aber die Plasmafrequenz, so wird \tilde{n} reell und

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon\mu \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)}, \quad \kappa = 0, \quad \omega \gg \omega_P. \quad (9.30)$$

Für derart hohe Frequenzen ist der Verschiebungsstrom erheblich stärker als der Leitungsstrom und Leiter verhalten sich optisch ähnlich wie Isolatoren. Für Kupfer ist

$$\frac{1}{\tau} \sim 3.7 \cdot 10^{13} \text{s}^{-1}, \quad \sigma_0 \sim 5.8 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1} \quad \text{und} \quad \omega_P \sim 1.6 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}.$$

Licht hat Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz von Kupfer, $\omega = (2.4 - 5.2) \cdot 10^{15} \text{s}^{-1} < \omega_P$, deshalb ist dieses für Licht undurchsichtig. Die Plasmafrequenz nimmt aber ab, wenn die Ladungsträgerdichte abnimmt oder die Masse der Teilchen zunimmt. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

Was bedeutet die Frequenzabhängigkeit (9.24) der Leitfähigkeit für den Zusammenhang zwischen $\mathbf{j}_f(t)$ und $\mathbf{E}(t)$? Wir wollen von der \mathbf{k} -Abhängigkeit der Leitfähigkeit absehen. Für eine feste Frequenz ist

$$\mathbf{j}_{f,0}(\omega) e^{i\omega t} = \sigma(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) e^{i\omega t}. \quad (9.31)$$

Um zum entsprechenden Zusammenhang bei fester Zeit zu gelangen, müssen wir eine Fouriertransformation vornehmen. Mit (9.24) finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \sigma(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} \mathbf{E}_0(\omega) \\ &= \frac{\sigma_0}{2\pi i\tau} \int dt' \mathbf{E}(t') \int d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Alle auftretenden Integrale sind von $-\infty$ bis ∞ zu berechnen. Das Integral über ω kann

mit den Methoden der komplexen Analysis leicht berechnet werden:

Für $t < t'$ ist die Exponentialfunktion in der Halbebene $\Im(\omega) < 0$ exponentiell unterdrückt. Der Nenner hat keine Nullstelle in dieser Halbebene. Damit verschwindet das

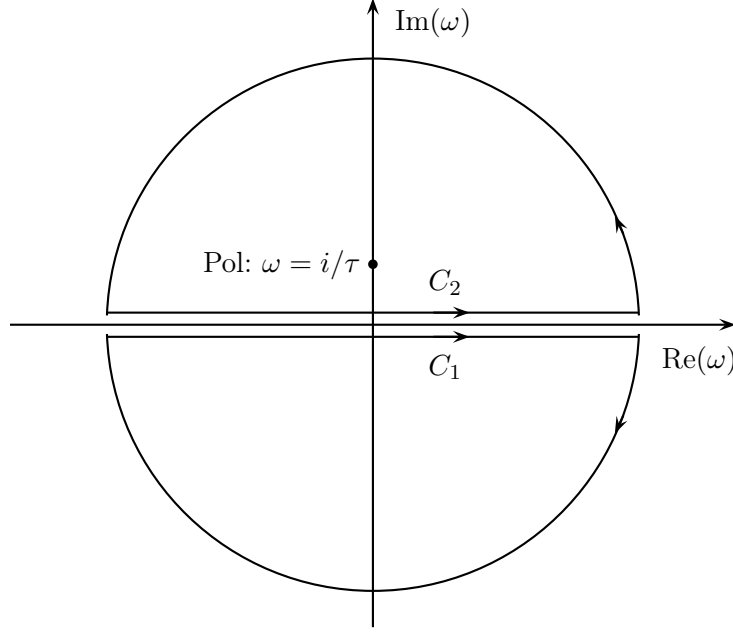


Abbildung 9.1: Zur Berechnung der Leitfähigkeit als Funktion der Zeit.

Schleifenintegral längs C_1 in der Abb. 9.1. Da der Halbkreis in der unteren Halbebene nicht beiträgt, verschwindet das ω -Integral in (9.32) für $t < t'$. Wir brauchen damit das t' -Integral nur von $-\infty$ nach t zu erstrecken. Für $t > t'$ ist die Exponentialfunktion für $\Im(\omega) > 0$ unterdrückt und der Halbkreis in der oberen Halbebene trägt nicht bei. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = e^{-(t-t')/\tau}. \quad (9.33)$$

Damit kommen wir zu der Lösung

$$\mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_0}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt' = \frac{n_0 e_0^2}{m_0} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'. \quad (9.34)$$

Anstelle des einfachen Ohmschen Gesetzes $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$ tritt also bei beliebigen $\mathbf{E}(t)$ ein Integralzusammenhang, bei dem die Stromdichte zur Zeit t durch die Werte der Feldstärke zu allen früheren Zeiten bedingt ist. Dies ist in Einklang mit der Kausalität: Die Ursache

geht der Wirkung zeitlich voraus. Praktisch hängt die Stromdichte zur Zeit t aber nur vom elektrischen Feld zu früheren Zeiten t' mit $t - t' < \tau$ ab.

9.2 Dispersion in Isolatoren

Jedes Atom besteht aus einem positiven Kern und einer Hülle von mehr oder wenig leicht beweglichen Elektronen. Die Trägheit der Elektronen wirkt sich im elektrischen Verhalten der Atome aus und führt zu einer Frequenzabhängigkeit der relativen Dielektrizitätskonstante. Auch wenn Atome erst mit der Quantenmechanik korrekt behandelt werden können, so läßt sich ihr optisches Verhalten doch schon in der klassischen Physik einigermaßen beschreiben. Nach J.J. THOMSON gehen wir von der Vorstellung aus, daß die Atomelektronen elastisch an den Kern gebunden sind. Wir nehmen also an, daß jedes Atomelektron der Bewegungsgleichung

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = e \mathbf{E} \quad (9.35)$$

genügt. Im Modell (9.20) für Leiter mit ungebundenen Leitungselektronen fehlte die rücktreibende Kraft proportional zu ω_0^2 . In Isolatoren dürfen wir die Bindung an die Atome aber nicht mehr vernachlässigen. Wie für die Leitungselektronen haben wir eine der Geschwindigkeit proportionale und ihr entgegen gerichtete Dämpfungskraft eingeführt. Sie tritt notwendig auf, da beschleunigte Ladungen strahlen, also Energie abgeben. Man kann streng beweisen, daß eine Dispersion ohne Absorption mit dem Kausalitätsprinzip - nach dem eine Wirkung in die Vergangenheit unmöglich ist - im Widerspruch steht.

Auf der rechten Seite in (9.35) steht die vom elektrischen Feld am Ort des Elektrons auf das geladenen Teilchen ausgeübte Kraft. Nun besitzt der atomare Dipol das Moment $\mathbf{p} = e \mathbf{r}$ und wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung für den atomaren Dipol,

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E} \quad (9.36)$$

Im *statischen Grenzfall* ergibt sich daraus die *Polarisierbarkeit* α , definiert durch $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$,

$$\alpha_0 = \frac{e^2}{m \omega_0^2}. \quad (9.37)$$

Im Wechselfeld mit der Zeitabhängigkeit $\sim e^{i\omega t}$ erhalten wir aber

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) \mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (9.38)$$

Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil heißt das

$$\Re(\alpha) = \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \quad , \quad \Im(\alpha) = -\frac{e^2}{m} \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (9.39)$$

Den Verlauf von Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit von ω zeigt Abb.(9.2). α ändert

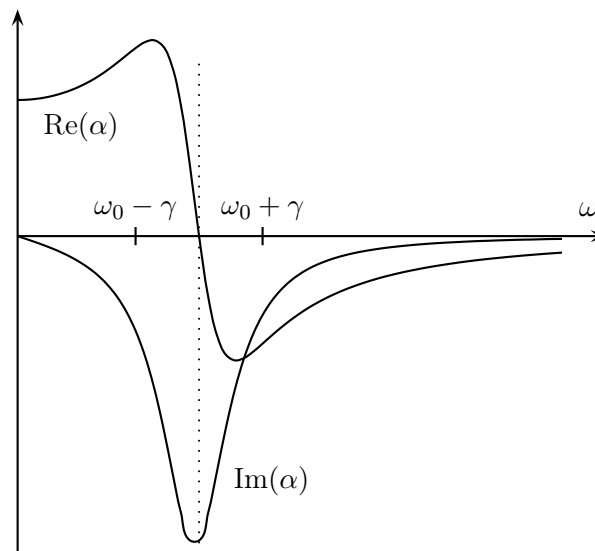


Abbildung 9.2: Qualitativer Verlauf der komplexen Polarisierbarkeit α über ω im Oszillatormodell.

sich innerhalb des schmalen Frequenzbandes $\omega_0 - \gamma < \omega < \omega_0 + \gamma$ sehr schnell, wobei der Imaginärteil ein ausgeprägtes Extremum durchläuft. Außerhalb dieser *Resonanzstelle* ist α beinahe reell. Links der Resonanz ist α positiv, rechts davon negativ. Wir erinnern uns an die *Clausius-Mosotti-Formel* (5.55), welche die Dielektrizitätskonstante mit der Polarisierbarkeit α verbindet,

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} n\alpha \quad \text{oder} \quad \epsilon = 1 + 4\pi n\alpha + O((n\alpha)^2), \quad (9.40)$$

wobei n die Teilchenzahldichte ist. Für nicht zu dichte Gase ist $n\alpha \ll 1$ und wir dürfen die höheren Ordnungen in $n\alpha$ vernachlässigen. Setzen wir hier unser obiges Resultat für α ein, so finden wir

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

oder aufgelöst nach ϵ

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} + O((n\alpha)^2). \quad (9.41)$$

Wobei wieder die letzte Näherung für verdünnte Gase gültig ist.

Nun verallgemeinern wir gleich auf Materialien deren Moleküle bzw. Atome jeweils Z schwingungsfähige Systeme (Elektronen) mit verschiedenen Eigenfrequenzen ω_j und Dämpfungskonstante γ_j tragen. Dann sind

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \\ \epsilon(\omega) &\sim 1 + \frac{4\pi e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

f_j ist die „Zahl der Elektronen“ mit der Frequenz ω_j und heißt *Oszillatorstärke*, $\sum f_j = Z$. Diese Gleichung (mit einer anderen Bedeutung von f_j) kann aus der Quantenmechanik hergeleitet werden. Die Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2\pi e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j}{a_j} \left(\frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 + a_j} - \frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 - a_j} \right) \quad (9.43)$$

mit $2a_j = \sqrt{4\omega_j^2 - \gamma_j^2}$ hat Pole an den Stellen

$$\omega_j^\pm = \frac{i\gamma_j}{2} \pm a_j$$

Die $2j$ Pole liegen alle in der oberen Halbebene $\Im(\omega) > 0$. Dies ist eine Konsequenz der *Kramers-Kronig-Relation*, wie wir bald zeigen werden. Es lohnt eine genauere Untersuchung dieser Formel in verschiedenen Frequenzbereichen.

Niederfrequenzverhalten:

Für *Isolatoren* gibt es keine freien Ladungsträger und die kleinste Eigenfrequenz ω_j ist verschieden von Null. Das hat zur Folge, daß $\lim_{\omega \rightarrow 0} \epsilon(\omega)$ existiert:

$$\epsilon(0) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}. \quad (9.44)$$

In *elektrischen Leitern* gibt es dagegen quasi-freie Leitungselektronen die nicht an Atome gebunden sind. Diese Elektronen haben eine verschwindende Eigenfrequenz und deshalb

ist für Leiter die niedrigste Eigenfrequenz gleich Null. Für $\omega \rightarrow 0$ sind also einige Glieder der Summe (9.42) divergent. Man zerlegt dann $\epsilon(\omega)$ in einen konvergenten Anteil ϵ_0 und einen divergenten Rest,

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{4\pi ne^2}{im\omega} \frac{f_0}{(\gamma_0 + i\omega)}. \quad (9.45)$$

Der Beitrag der gebundenen Ladungsträger wird durch die Polarisierung beschrieben und derjenige der Leitungselektronen durch die Leitfähigkeit. In der Tat, setzen wir in die Maxwellgleichung im Frequenzraum

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 + i\frac{\omega}{c} \mathbf{D}_0$$

die Beziehungen $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0$ und $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ ein, dann ergibt sich

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0 = \left(\frac{4\pi\sigma}{c} + \frac{\epsilon_0}{c} i\omega \right) \mathbf{E}_0 = \frac{i\omega}{c} \left(\frac{4\pi\sigma}{i\omega} + \epsilon_0 \right) \mathbf{E}_0.$$

Statt der elektrischen Stromdichte tritt im letzten Klammerausdruck eine komplexe, verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante auf. Identifiziert man diese mit (9.45), dann findet man für die Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{f_0}{\gamma_0 + i\omega} \quad (\text{Drude-Modell}) \quad (9.46)$$

Wir finden also wieder die früher in (9.24) abgeleitete Formel wenn wir γ_0 mit $1/\tau$ und n_0 mit $f_0 n$ identifizieren. Für tiefe Frequenzen $\omega \ll \gamma_0$ ist dieser Ausdruck annähernd reell. Damit sind Strom und elektrisches Feld nahezu in Phase und die Leitfähigkeit hängt kaum von ω ab.

Hochfrequenzlimes:

Bei sehr hohen Frequenzen $\omega \gg \omega_j$ dominiert in jedem Nenner in (9.42) der ω^2 -Term und

$$\epsilon(\omega) \sim 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{4\pi e^2 n}{m} \sum f_j \equiv 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}, \quad \omega_P = \sqrt{\frac{4\pi e^2 Z n}{m}}. \quad (9.47)$$

Bei diesen Frequenzen kann man die Elektronen als quasi-frei behandeln und deshalb finden wir wieder unser früheres Resultat für die Plasmafrequenz.

9.3 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen

Allgemeine Kausalitätsbetrachtungen liefern schon interessante Beziehungen zwischen dem Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante. Wir gehen von einer frequenzabhängigen, linearen und isotropen Relation zwischen der elektrischen Polarisation und der Feldstärke aus,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega). \quad (9.48)$$

Diese Gleichung gilt für alle drei Feldkomponenten. Nach Fouriertransformation geht diese Beziehung in eine Faltung für die entsprechenden zeitabhängigen Größen über

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{P}}(\omega)) = \mathcal{F}(\tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega)) = \int dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t') \quad (9.49)$$

wobei wir den *Suszeptibilitätskern*

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{\chi}(\omega) \quad (9.50)$$

eingeführt. Die Beziehung (9.49) beschreibt eine Nichtlokalität in der Zeit: Die Polarisation kann nicht augenblicklich der gerade herrschenden Feldstärke folgen. Sie hängt vom \mathbf{E} -Feld zu anderen Zeiten ab. Nach dem *Kausalitätsprinzip* kann sie aber nur von den Werten des \mathbf{E} -Feldes zu früheren Zeiten abhängen. Für χ bedeutet dies die Einschränkung

$$\chi(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0. \quad (9.51)$$

Linearität und Kausalität implizieren also

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t \chi(t-t') \mathbf{E}(t') dt' = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) d\tau \quad (9.52)$$

mit einem im Allgemeinen komplexen

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (9.53)$$

Drei Tatsachen sind jetzt hier Bedeutung:

- \mathbf{P} und \mathbf{E} und damit auch der Suszeptibilitätskern $\chi(t)$ sind reell. Aus (9.53) folgt daraus die *Realitätsbedingung*

$$\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}^*(-\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (9.54)$$

an die Fouriertransformierte der Suszeptibilität.

- Die Funktion $\chi(t)$ ist für alle Zeiten endlich. Aus (9.53) folgt dann, daß $\tilde{\chi}(\omega)$ in der unteren komplexen ω -Halbebene analytisch ist. Insbesondere fällt $\tilde{\chi}$ für $\Im(\omega) \rightarrow -\infty$ exponentiell schnell ab.
- Wir nehmen an, der Betrag von $\chi(t)$ sei integrierbar, $\chi \in L_1(\mathbb{R})$. Dann folgt, daß $\tilde{\chi}(\omega)$ auf der abgeschlossenen unteren Halbebene $\Im(\omega) \leq 0$ stetig und beschränkt ist, und daß sein Betrag für $|\omega| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, gleichmäßig in alle Richtungen mit $\Im(\omega) \leq 0$.

Nun dürfen den Satz aus der Theorie der analytischen Funktion bemühen, nach dem das Schleifenintegral einer holomorphen Funktion verschwindet, falls die Funktion im umschlossenen Gebiet keine Pole aufweist. Also ist

$$\oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \quad (9.55)$$

falls die Schleife C den Punkt ω nicht umschließt und im umschlossenen Gebiet holomorph ist. Nun wählen wir folgende Schleife, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird: Zunächst

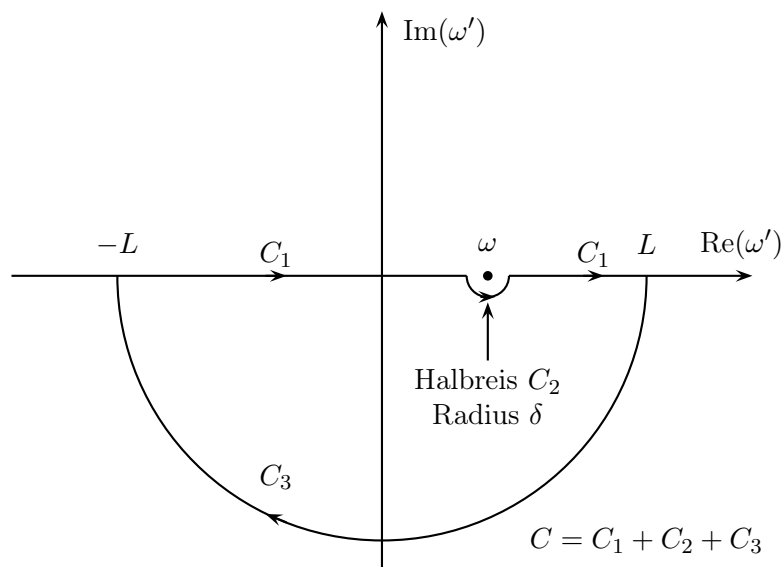


Abbildung 9.3: Zur Ableitung der Relation von Kramers und Kronig.

von $-L$ nach L entlang der reellen Achse und dann auf dem Halbkreis mit Radius L in der unteren Halbebene zurück nach $-L$. Für große L trägt das Integral längs des Halbkreises

²Dies schließt man aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma.

C_3 nicht bei. Wir möchten gerne $\tilde{\chi}$ für reelle ω wissen. Dann ist der Integrationsweg durch einen kleinen Halbkreis mit infinitesimalen Radius δ unterhalb der reellen Achse zu verbiegen, siehe Abb. 9.3. Unter Anwendung des Satzes gewinnt man die Gleichung

$$0 = \oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi\tilde{\chi}(\omega) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0, L \rightarrow \infty,$$

wobei \mathcal{P} das Hauptwert-Integral bezeichnet. Die Auflösung nach $\tilde{\chi}$ führt auf die Relation

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (9.56)$$

Nehmen wir davon Real- und Imaginärteile, so erhalten wir

$$\Re\tilde{\chi}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad , \quad \Im\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (9.57)$$

Wegen $\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + 4\pi\tilde{\chi}(\omega)$ folgen die analogen Relationen zwischen Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante,

$$\Re\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\tilde{\epsilon}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad , \quad \Im\tilde{\epsilon}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\tilde{\epsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}. \quad (9.58)$$

Die große Bedeutung dieser *Kramers-Kronig Relationen* liegt in der Tatsache, daß sie $\Re(\tilde{\epsilon})$ und $\Im(\tilde{\epsilon})$ eindeutig miteinander verknüpfen. Kennt man den dispersiven Realteil, dann kann man den absorptiven Imaginärteil berechnen und umgekehrt. Vorausgesetzt wurden dabei nur die lineare Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{P} und das Kausalitätsprinzip. Die Gleichungen können leicht auf inhomogene und anisotrope lineare Medien verallgemeinert werden. Dann ist $\tilde{\chi}$ eine Matrix und hängt neben der Frequenz noch von \mathbf{r} ab.

Kramers-Kronig artige Relationen gelten nicht nur für den speziellen Fall der elektrischen Polarisierung, sondern für alle physikalische Systeme mit linearer Antwort auf die Erregung (linear Response).

Kapitel 10

Relativistische Form der Elektrodynamik

Die Lorentz-Kovarianz der Feldgleichungen wurde von LORENTZ und POINCARÉ schon vor der Formulierung der speziellen Relativitätstheorie durch EINSTEIN gezeigt¹. Die Kovarianz tritt am deutlichsten zu Tage, wenn man die sogenannte Vierer-Notation benutzt. Diese wird im nächsten Abschnitt eingeführt und damit die Kovarianz der Maxwellgleichungen im Vakuum bewiesen. Die physikalische Bedeutung der Kovarianz werden wir weiter unten ausführlich diskutieren.

10.1 Poincare Transformationen

Im folgenden sei M die 4-dimensionale Minkowski-Raumzeit (MUNDIS, MINKOWSKI). Die Punkte im affinen Raum M sind *Ereignisse*. Unser Bezugssystem sei ein Inertialsystem I (durch Fixsterne gegeben). Ereignisse werden durch ihre Zeit, gemessen mit Uhren, welche relativ zum System ruhen und durch Lichtsignale synchronisiert sind, und ihre kartesischen Koordinaten charakterisiert.

In einem gewählten Koordinatensystem wird jedes Ereignis durch seine Zeit und seinen Ort, also durch die 4-Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (10.1)$$

¹Aufgabe der absoluten Zeit (W. Voigt 1887), Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion (1892), richtige Transformationen der Raumkoordinaten (Lorentz 1899), Synchronisation der Uhren (Poincaré 1904), Invarianz der Maxwellgleichungen (Lorentz 1904, Einstein 1905 und Poincaré 1906) und Spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905).

eindeutig charakterisiert. Hier haben wir die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit multipliziert, damit alle Komponenten von x die Dimension einer Länge haben. Oft schreiben wir auch $x = (x^\mu)$; $\mu = 0, 1, 2, 3$. Die Differenzen von Ereignissen definieren einen 4-dimensionalen Vektorraum V . In einem Inertialsystem haben Elemente aus V die Form

$$\xi^T = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu).$$

Wir führen eine Bilinearform ein,

$$(\xi, \chi) = \xi^0 \chi^0 - \xi^1 \chi^1 - \xi^2 \chi^2 - \xi^3 \chi^3, \quad (10.2)$$

welche mit Hilfe des *metrischen Tensors*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$(\xi, \chi) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \xi^\mu \chi^\nu = \xi^T \eta \chi. \quad (10.3)$$

Der *lorentzinvariante Abstand* zweier Ereignisse mit Raumzeit-Koordinaten x und y ist

$$d(x, y) = (\xi, \xi), \quad \text{wobei} \quad \xi = y - x \quad (10.4)$$

der Differenzvektor zwischen den Ereignissen ist. Indizes werden mit $\eta_{\mu\nu}$ und $\eta^{\mu\nu}$ hinunter- oder hinaufgezogen, zum Beispiel gelten

$$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = \eta^{\mu\nu} \xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi, \chi) = \xi^\mu \chi_\mu = \xi_\mu \chi^\mu.$$

Wir haben die *Einsteinsche Summenkonvention* benutzt, wonach über doppelt auftretende Indizes (wovon einer kovariant und einer kontravariant sein muß) summiert wird.

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem I' (das gestrichene System), welches relativ zum ursprünglichen ungestrichenen System in konstanter gleichförmiger Bewegung ist. Das *Äquivalenzprinzip der speziellen Relativitätstheorie* besagt nun, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich aussehen. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (Michelson-Morley-Experiment).

Ein Punktereignis werde nun im Inertialsystems I durch die Koordinaten x und im

Inertialsystems I' durch die Koordinaten x' beschrieben. Der Zusammenhang zwischen den Koordinaten hat die Form

$$x'^\mu = a^\mu + f^\mu(x), \quad \text{wobei} \quad f^\mu(0) = 0 \quad \text{und} \quad a^\mu = \text{konstant}$$

angenommen werden kann. Wegen der Homogenität des Raumes sind

$$x''^\mu = x'^\mu - a^\mu$$

ebenfalls Koordinaten in einem Inertialsystem I'' . Es gilt dann

$$x''^\mu = f^\mu(x) \quad \text{mit} \quad f^\mu(x=0) = 0.$$

Wir wollen nun einsehen, dass die f^μ lineare Funktionen sein müssen. Wir benutzen in den beiden Inertialsystemen I und I'' gleiche Längenmaßstäbe und gleiche Uhren. Ein Ereignis habe in I die Koordinaten x und in I'' die Koordinaten x'' . Nun messen wir in beiden Systemen in Millimeter statt Meter und in Millisekunden statt Sekunden. Dann hat das Ereignis in den beiden Inertialsystemen die Koordinaten $1000 \cdot x$ und $1000 \cdot x''$. Wäre dem nicht so, dann gäbe es eine physikalisch ausgezeichnete Längenskala. Also sind die Koordinaten in einem Inertialsystem lineare Funktionen der Koordinaten in einem anderen Inertialsystem: $x''^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, beziehungsweise

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \longleftrightarrow x' = \Lambda x + a. \quad (10.5)$$

Seien nun x die Koordinaten einer zur Zeit y^0 am Orte \mathbf{r}_0 ausgesandten Lichtwelle in I . Bezüglich I' wird dieselbe Lichtwelle zur Zeit y'^0 am Orte \mathbf{r}'_0 ausgesandt und hat die Koordinaten x' . In beiden Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit gleich, so dass gilt

$$0 = (x - y)^T \eta (x - y) = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y) \Lambda^T \eta \Lambda (x - y).$$

Eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür ist

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \kappa(\Lambda) \eta \quad \text{mit} \quad \kappa(\mathbb{1}) = 1 \quad \text{und} \quad \kappa(\Lambda) > 0.$$

Ist $\kappa \neq 1$, dann können wir durch eine Maßstabsänderung

$$x' \longrightarrow \sqrt{\kappa} x'$$

stets $\kappa = 1$ erreichen. Wir wollen also nur Matrizen Λ betrachten, welche die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (10.6)$$

erfüllen. Für solche Transformationen ist das relativistische Abstandsquadrat zweier Ereignisse x, y im Minkowski-Raum unabhängig vom Inertialsystem,

$$(x' - y')^2 = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \eta (x - y) = (x - y)^2. \quad (10.7)$$

Die Menge der Transformationen (10.5)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (10.8)$$

bilden die *Poincaregruppe* oder inhomogene Lorentzgruppe, die mit iL bezeichnet wird,

$$iL = \{(\Lambda, a) \mid a \in V, \Lambda \in \mathcal{L}(V), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \quad (10.9)$$

Die Gruppenmultiplikation ist durch die Komposition zweier Transformationen gegeben,

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (10.10)$$

Das Inertialsystem I' bewege sich relativ zum Inertialsystem I mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = c \cdot \boldsymbol{\beta}$. Wir führen die Projektoren P_\parallel und P_\perp in Richtung der Relativgeschwindigkeit und senkrecht dazu ein,

$$P_\parallel = \frac{1}{\beta^2} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^t \quad \text{und} \quad P_\perp = \mathbb{1} - P_\parallel \quad \text{mit} \quad \beta = |\boldsymbol{\beta}|. \quad (10.11)$$

Dann lautet der Lorentzboost

$$x' = \Lambda x + a, \quad \Lambda = (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^t \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & P_\perp + \gamma P_\parallel \end{pmatrix}, \quad (10.12)$$

mit dem relativistischen γ -Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \in [1, \infty). \quad (10.13)$$

Ein in I' ruhendes Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} im Inertialsystem I . Fallen die Koordinatenursprünge zur Zeit $t = 0$ zusammen und bewegt sich I' längs der ersten Koordinatenachse, dann gilt

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma (x^0 - \beta x^1) & , & \quad x'^2 = x^2 \\ x'^1 &= \gamma (x^1 - \beta x^0) & , & \quad x'^3 = x^3. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Wegen (10.6) haben die Matrizen Λ die Determinante ± 1 ,

$$\det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

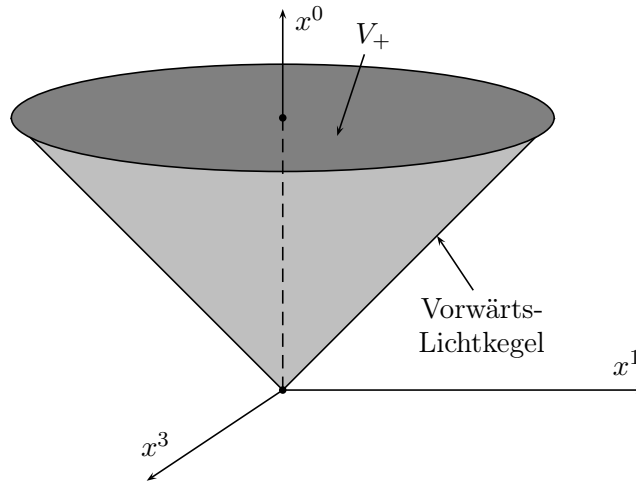
Ist ein Vektor ξ in einem Inertialsystem zeitartig, d.h. ist $(\xi, \xi) > 0$, dann ist er es auch in jedem anderen Inertialsystem. Deshalb bildet eine Lorentztransformation Λ den *Vorwärtslichtkegel*

$$V_+ = \{\xi^0 > 0, (\xi, \xi) > 0\} \quad (10.15)$$

entweder in sich, oder in den *Rückwärtslichtkegel*

$$V_- = \{\xi^0 < 0, (\xi, \xi) > 0\} \quad (10.16)$$

ab. Im zweiten Fall wird die Zeitrichtung umgekehrt.



In der Tat, das 00-Komponente der Matrixgleichung (10.6) lautet ausgeschrieben

$$\Lambda_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^\beta = 1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2,$$

und impliziert $(\Lambda_0^0)^2 \geq 1$. Für $\Lambda_0^0 \geq 1$ wird der Vorwärtslichtkegel in sich abgebildet und für $\Lambda_0^0 \leq -1$ in den Rückwärtslichtkegel.

10.2 Ströme, Potentiale und Feldstärke

Einsteins Weg bei der Entdeckung der *speziellen Relativitätstheorie* führte über eine sorgfältige Analyse des Zeit- und Raumbegriffes und einige geistreiche Gedankenexperimente.

Wir gehen hier den bequemen und formaleren Weg über die Invarianz der Maxwellgleichungen bezüglich Lorentztransformationen. Dabei werden das 4-er Potential A^μ und der 4-er Strom j^μ auftreten.

Eine ruhende Ladung hat eine Ladungsdichte aber keine Stromdichte. Bewegen wir uns aber relativ zu ihr (oder diese relativ zu uns), dann ordnen wir der jetzt bewegten Ladung neben einer Ladungs- auch eine Stromdichte zu. Beim Übergang zwischen Inertialsystemen transformieren Ladungsdichte und Stromdichte also ineinander. Die Dichten $c\rho$ und \mathbf{j} sind nicht so verschieden wie sie auf den ersten Blick scheinen. Sie haben die gleiche Dimension und wir können sie zu einer 4-er Stromdichte kombinieren,

$$j = (j^\mu) = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (10.17)$$

Die Notation zeigt an, daß j^μ ein Vektorfeld ist. Dies bedeutet, daß j bei einem Wechsel des Inertialsystem wie ein Vektor transformiert. Sind x und x' Koordinaten in den Inertialsystemen I und I' sowie j^μ und j'^μ die Komponenten der 4-er Stromdichte in den beiden Systemen, dann gilt

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu j^\nu(x) \quad \text{bzw.} \quad j'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\nu j_\nu(x), \quad \Lambda_\mu^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^\alpha_\beta. \quad (10.18)$$

Damit ist festgelegt, wie die Komponenten von j^μ bei einem Wechsel des Inertialsystems transformieren. Die *Kontinuitätsgleichung* (7.44) hat nun die elegante Form

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (10.19)$$

Gilt sie in einem Inertialsystem, dann gilt sie auch in jedem anderen Inertialsystem. Man sagt die Gleichung ist *kovariant*. Wäre eine Gleichung der Elektrodynamik nicht kovariant, dann würde diese bestimmte Inertialsysteme auszeichnen, im Widerspruch zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

Nach Einführung der 4-er Notation ist der Beweis der Kovarianz einfach. Aus (10.8) folgt, dass der 4-er Gradient ein Vektoroperator ist,

$$\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu. \quad (10.20)$$

Deshalb gilt

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = (\Lambda_\mu^\nu \partial_\nu) (\Lambda^\mu_\alpha j^\alpha(x)) \stackrel{(10.6)}{=} \partial_\nu j^\nu(x) = 0$$

und die Koninuitätsgleichung (10.19) gilt in allen Inertialsystemen. Der *Wellenoperator*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \Delta = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial^\mu \partial_\mu, \quad (10.21)$$

ist ein invarianter Differentialoperator,

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial'^\mu \partial'_\mu = \square'. \quad (10.22)$$

Eine ruhende Ladung ohne Magnetfeld wird nach (7.45) durch ein skalares Potential beschrieben, während eine bewegte Ladung ein nichtverschwindendes Vektorpotential hat. Die verschiedenen Potentiale gehen bei einem Wechsel des Inertialsystems ineinander über. Diese Tatsache und die Wellengleichungen (7.45) legen nahe, das skalare Potential Φ und das Vektorpotential \mathbf{A} , ähnlich wie die Ladungs- und Stromdichte, zu einem 4-er Potential zusammenzufassen,

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \implies A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x). \quad (10.23)$$

Dann nimmt die Lorenz-Eichbedingung (7.40) folgende einfache Form an,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.24)$$

Wie die Kontinuitätsgleichung ist dies eine kovariante Bedingung. Ist sie in einem Inertialsystem erfüllt, dann gilt sie in allen anderen Inertialsystemen. Für Potentiale, die die Lorenz-Eichbedingung erfüllen lauten die Wellengleichungen (7.45) für isolierte Ladungen und Ströme

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (\text{Lorenz-Eichung}). \quad (10.25)$$

Wie erwartet ist dies eine *kovariante* Wellengleichung wie es sofort aus (10.22) folgt. Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung werden wir im nächsten Kapitel konstruieren. Sie ist die Überlagerung von ebenen Wellen.

10.3 Relativistische Feldgleichungen

Wie lauten nun die Maxwellgleichungen für die elektromagnetischen Felder (\mathbf{E}, \mathbf{B}) in kovarianter Form? Wir beginnen mit der Umschreibung der Beziehungen zwischen den Feldern und Potentialen, (7.29) und (7.30),

$$\partial_0 A_i - \partial_i A_0 = E_i \quad \text{und} \quad \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (10.26)$$

Nun ist aber das in den Indizes antisymmetrische Feld

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (10.27)$$

ein Tensorfeld, wie man schnell beweist,

$$F'_{\mu\nu}(x') = \partial'_\mu A'_\nu(x') - \partial'_\nu A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\beta \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}(x). \quad (10.28)$$

Die 6 linear unabhängigen Komponenten dieses *Feldstärketensors* lauten nach (10.26)

$$F_{0i} = E_i \quad \text{und} \quad F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k \quad (10.29)$$

Augeschrieben hat der Feldstärketensor die Gestalt,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \implies (F^{\mu\nu}) = (-\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (10.30)$$

Zur relativistischen Formulierung der Maxwellgleichungen im freien Raum benutzt man die Umkehrtransformation zu (10.29),

$$E_i = F_{0i} \quad \text{und} \quad B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F_{jk}. \quad (10.31)$$

Wir werden zeigen nun, daß die homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad (10.32)$$

identisch zu den kovarianten Gleichungen

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu} = 0 \quad (10.33)$$

für den Feldstärketensor sind. Dies bedeutet, daß die 4-er Rotation des Feldstärketensors verschwindet. Beachte, daß die linke Seite vollständig antisymmetrisch in den Indizes ist. Vertauschen wir zum Beispiel die Indizes μ und ν und berücksichtigen die Antisymmetrie des Feldstärketensors, so ändert die linke Seite in (10.33) das Vorzeichen:

$$\text{LS}(\nu, \mu, \rho) = F_{\nu\mu,\rho} + F_{\rho\nu,\mu} + F_{\mu\rho,\nu} = -F_{\mu\nu,\rho} - F_{\nu\rho,\mu} - F_{\rho\mu,\nu} = -\text{LS}(\mu, \nu, \rho).$$

Um zu beweisen, daß (10.33) nur eine Umschreibung der homogenen Maxwellgleichungen ist, betrachten wir die verschiedenen möglichen Fälle:

μ, ν, ρ	$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\rho\mu,\nu} + F_{\nu\rho,\mu}$
$0, i, 0$	$F_{0i,0} + F_{00,i} + F_{i0,0} = 0$
$i, j, 0$	$F_{ij,0} + F_{0i,j} + F_{j0,i} = 0$
i, j, k	$F_{ij,k} + F_{ki,j} + F_{jk,i} = 0$

Die erste Zeile verschwindet identisch wegen der Antisymmetrie des Feldstärketensors. Die zweite Zeile ergibt die zweite Maxwell-Gleichung in (10.32):

$$\text{2. Zeile} = -\epsilon_{ijk}\partial_0 B_k + \partial_j E_i - \partial_i E_j = -\epsilon_{ijk}(\partial_0 B_k + \epsilon_{kpq}\partial_p E_q) = 0,$$

wobei wir die nützliche Identität

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$

benutzten. Die letzte Gleichung in der Tabelle ist identisch zur ersten Maxwellgleichung in (10.32). In der Tat, wegen der vollständigen Antisymmetrie der letzten Zeile in i, j, k genügt es, den Fall 1, 2, 3 zu untersuchen:

$$\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} = -(\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3 + \partial_2 B_2) = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Um die inhomogenen Gleichungen (vorerst im Vakuum mit isolierten Quellen)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{und} \quad \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (10.34)$$

umzuschreiben, berechnen wir die 4-er Divergenz des Feldstärketensors

$$(\partial_\mu F^{\mu\nu}) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = (\nabla \cdot \mathbf{E}, (-\partial_0 \mathbf{E} + (\nabla \wedge \mathbf{B}))^T)$$

und erinnern uns an die Definition des 4-er Stromes, $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})$. Damit ergeben sich für die *inhomogenen Maxwellgleichungen* die an Eleganz kaum mehr zu überbietende Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \quad (10.35)$$

Wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ ist die Kontinuitätsgleichung $\partial_\nu j^\nu$ offensichtlich. Schreibt man den Feldstärketensor wie in (10.27) als 4-er Rotation des Potentials, so sind die homogenen Maxwellgleichungen (10.33) automatisch erfüllt. Die Umkehrung gilt (in einfach zusammenhängenden Gebieten) ebenfalls: Jeder Feldstärketensor, welcher (10.33) erfüllt, hat die Form (10.27) mit einem Vektorfeld A_μ .

Unter einer Eichtransformation (7.34,7.35) transformiert das 4-er Potential gemäß

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda, \quad (10.36)$$

und der Feldstärketensor ist invariant. In der kovarianten Schreibweise ist diese Invarianz offensichtlich

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda) = F_{\mu\nu}.$$

In Materialien ändern sich die homogenen Gleichungen (10.33) nicht, die inhomogenen aber sehr wohl. Man führt neben dem Feldstärketensor den antisymmetrischen Tensor

$$(\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

ein. Die inhomogenen Gleichungen lauten dann

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_f^\nu. \quad (10.38)$$

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen $F_{\mu\nu}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. Für lineare Medien gehen in

diesen Zusammenhang die Materialkonstanten μ und ϵ und deren Verallgemeinerungen ein.

10.3.1 Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung

In Einklang mit dem Einsteinschen Äquivalenzprinzip führen Lorentztransformationen Lösungen der Maxwellgleichungen in Lösungen über. Es sei nun

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{q\mathbf{r}'}{r'^3} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (10.39)$$

das Feld einer im Ursprung des Inertialsystems I' ruhenden Punktladung. Wir wollen nun bestimmen, wie die Felder in einem relativ zu I' bewegten Inertialsystem I aussehen. Im System I bewegt sich das Punktteilchen gleichförmig mit konstanter Geschwindigkeit.

Es bezeichnen x und x' die Koordinaten der Inertialsysteme. Bewegt sich I' entlang der 1-Achse relativ zu I , dann lautet die Lorentztransformation

$$x = \Lambda x', \quad \Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.40)$$

Wir machen nun Gebrauch von der Transformationsformel (10.28) für das elektromagnetische Feld. Darin tritt $\Lambda_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\Lambda^\beta{}_\alpha$ auf, dass man aus $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ durch einen Vorzeichenumkehr von β erhält. Mit (10.30) ergeben sich dann die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} E_1(x) &= E'_1(x') & , \quad B_1(x) &= B'_1(x') \\ E_2(x) &= \gamma(E'_2(x') + \beta B'_3(x')) & , \quad B_2(x) &= \gamma(B'_2(x') - \beta E'_3(x')) \\ E_3(x) &= \gamma(E'_3(x') - \beta B'_2(x')) & , \quad B_3(x) &= \gamma(B'_3(x') + \beta E'_2(x')) \end{aligned} \quad (10.41)$$

Für eine in I' ruhende Punktladung verschwindet das Magnetfeld \mathbf{B}' und diese Formeln vereinfachen sich. Setzen wir noch

$$r'^2 = \gamma^2 (x^1 - \beta x^0)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (10.42)$$

dann hat das elektromagnetische Feld einer längs der x^1 -Achse mit konstanter Geschwindigkeit $v = \beta c$ bewegten Punktladung die Form

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q\gamma}{r'^{3/2}} \begin{pmatrix} x^1 - \beta x^0 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(x) = \frac{q\beta\gamma}{r'^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (10.43)$$

Des elektrische Feld steht senkrecht auf dem magnetischen Feld in Einklang mit der Tatsache, dass $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ eine lorentzinvariante Größe ist.

Für einen allgemeinen Lorentzboost zwischen Inertialsystemen mit Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} führen wir den Projektor P_{\parallel} auf die Relativgeschwindigkeit, gemessen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, ein, siehe (10.11). Die Felder können dann in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Relativgeschwindigkeit zerlegt werden, zum Beispiel

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} = P_{\parallel} \mathbf{E} + P_{\perp} \mathbf{E}, \quad P_{\perp} = \mathbb{1} - P_{\parallel}.$$

Dann lauten die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{E}'_{\perp}(x') - \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{B}'(x')) \\ \mathbf{B}(x) &= \mathbf{B}'_{\parallel}(x') + \gamma (\mathbf{B}'_{\perp}(x') + \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}'(x')). \end{aligned} \quad (10.44)$$

10.4 Erhaltungssätze

Jeder erhaltene Vierer-Strom $(j^{\mu}) = (j^0, \mathbf{j})$ definiert eine erhaltene Ladung,

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \implies \frac{d}{dx^0} \int d^3x j^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

Die Stromdichte soll im räumlich Unendlichen so schnell abfallen, dass bei der partiellen Integration keine Oberflächenterme auftreten. Dann gilt

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \implies \frac{d}{dt} Q = 0, \quad Q = \int d^3x j^0. \quad (10.45)$$

Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist ein wichtiges Beispiel, wurde aber schon hinreichend oft diskutiert. Wir wenden uns deshalb der Erhaltung von Energie und Impuls zu. Folgende Umformungen sind dabei hilfreich

$$\frac{4\pi}{c} F_{\mu\nu} j^{\nu} = F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}_{,\rho} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}_{,\rho} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\rho} \mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Wir benutzen die homogenen Maxwellgleichungen (10.33) in der Form

$$F_{\mu\nu,\rho} = -F_{\rho\mu,\nu} - F_{\nu\rho,\mu}$$

um den letzten Term umzuschreiben und erhalten

$$\frac{4\pi}{c} F_{\mu\nu} j^{\nu} = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu}_{,\rho} + \frac{1}{2} F_{\rho\mu,\nu} \mathcal{F}^{\rho\nu} + \frac{1}{2} F_{\nu\rho,\mu} \mathcal{F}^{\rho\nu}$$

Mit Hilfe der Identität

$$F_{\rho\mu,\nu}\mathcal{F}^{\rho\nu} = F_{\nu\mu,\rho}\mathcal{F}^{\nu\rho} = F_{\mu\nu,\rho}\mathcal{F}^{\rho\nu}$$

formen wir den zweitletzten Term um und finden

$$\frac{4\pi}{c}F_{\mu\nu}j^\nu = (F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\rho} - \frac{1}{2}F_{\rho\nu,\mu}\mathcal{F}^{\rho\nu}.$$

Falls nun F und \mathcal{F} linear und mit konstanten Koeffizienten verknüpft sind, dann kann der letzte Term in der vorletzten Gleichung folgendermassen geschrieben werden,

$$F_{\rho\nu,\mu}\mathcal{F}^{\rho\nu} = \frac{1}{2}(F_{\rho\nu}\mathcal{F}^{\rho\nu})_{,\mu}.$$

Damit gelten für *lineare homogene Medien* die 4 Bilanzgleichungen

$$\frac{1}{c}F_{\mu\nu}j^\nu + T_\mu{}^\nu{}_{,\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad T_\mu{}^\nu = -\frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\rho}\mathcal{F}^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\delta_\mu^\nu F_{\rho\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma} \right). \quad (10.46)$$

Diese vier Identitäten sind gerade der Erhaltungssatz für *Energie und Impuls*. Um dies einzusehen, spalten wir $F_{\mu\nu}j^\nu$ in Raum- und Zeitkomponenten auf,

$$F_{0\nu}j^\nu = F_{0i}j^i = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad , \quad F_{i\nu}j^\nu = F_{i0}c\rho + F_{ij}j^j = -cE_i\rho - (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})_i. \quad (10.47)$$

Die auf den rechten Seiten auftretenden Größen sind

- Die vom elektrischen Felde an der strömenden Elektrizität in der Raum- und Zeiteinheit geleistete Arbeit $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Sie wird im allgemeinen in Wärme verwandelt und heißt *Joulesche Wärme*.
- Die vom Magnetfeld \mathbf{B} auf eine Stromverteilung \mathbf{j} ausgeübte Kraftdichte $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}/c$. Man erinnere sich daran, daß die auf ein geladenes Teilchen wirkende Kraft im Magnetfeld $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}/c$ ist.
- Die vom elektrischen Feld \mathbf{E} auf eine Ladungsverteilung ausgeübte Kraftdichte $\rho\mathbf{E}$. Dies ist die Kontinuumsversion der Kraft $q\mathbf{E}$ auf ein geladenes Teilchen.

Ohne freie Ladungsträger ist $T_\mu{}^\nu$ kovariant erhalten, $\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0$. Mit Hilfe des Tensors $T^{\mu\nu}$ können wir im ladungsfreien Raum 4 zeitlich erhaltene Ladungen definieren,

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(x). \quad (10.48)$$

Der erhaltene 4-er Vektor P^μ enthält die Energie P^0 und den Impuls \mathbf{P} des elektromagnetischen Feldes. Deshalb heisst $T^{\mu\nu}$ Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Zur Begründung spalten wir T_μ^ν in Zeit- und Raumkomponenten auf. Dazu bemerken wir, daß

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\nu\rho} &= \begin{pmatrix} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})^t \\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{D} & \mathbf{E} \mathbf{D}^t + \mathbf{H} \mathbf{B}^t - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ F_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\nu\mu} &= 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \end{aligned}$$

ist. Es folgt, daß der Energie-Impuls-Tensor folgende Form hat

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} & (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})^t \\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{D} & \mathbf{E} \mathbf{D}^t + \mathbf{H} \mathbf{B}^t - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (10.49)$$

Die Erhaltungssätze (10.46) nehmen jetzt eine verständlichere Form an:

Die *zeitliche Komponente* von (10.46) lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, & u &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \\ \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (10.50)$$

In der Elektrostatik haben wir (für lineare Medien) gezeigt, daß $u_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/8\pi$ die Energiedichte des elektrischen Feldes ist. In den Übungen haben Sie sich davon überzeugt, daß $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}/8\pi$ die Energiedichte des magnetischen Feldes ist. Deshalb interpretieren wir u_t in der obigen Formel als zeitliche Änderung der Energiedichte des Feldes. Der *Poyntingsche Satz* (10.50) ist die Energiebilanz im elektromagnetischen Feld: Die linke Seite entspricht dem Energieaustausch zwischen dem betrachteten Volumenelement und seinen Nachbarelementen und die rechte Seite den Verlusten durch die Erzeugung von Joulescher Wärme.

Die Interpretation des Quellterms auf der linken Seite wird noch deutlicher, wenn wir (10.50) räumlich integrieren; dann haben wir bei Benutzung des Gaußschen Satzes

$$\frac{d}{dt} \int d^3x u + \oint d\mathbf{f} \cdot \mathbf{S} = - \int d^3r \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (10.51)$$

Die Bedeutung des nach POYNTING benannten Vektors \mathbf{S} als *Energieflußdichte* des elektromagnetischen Feldes ist daraus ersichtlich. \mathbf{S} zeigt in Richtung des Energieflusses und sein Betrag gibt an, wieviel Feldenergie pro Zeit durch ein Flächenelement (\perp zu \mathbf{S}) fließt.

Die *räumlichen Komponenten* von (10.46) lauten

$$\partial_j T_{ij} = \rho E_i + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B})_i + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B})_i \quad (10.52)$$

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i D_j + H_i B_j) - \delta_{ij} u. \quad (10.53)$$

Der Tensor² T_{ij} heißt *Maxwellscher Spannungstensor*. Bezeichnet man die Summe sämtlicher Impulse der Teilchen innerhalb V mit \mathbf{P}_{mech} , so ist nach dem 2. Newtonschen Gesetz die zeitliche Änderung ihres Gesamtimpulses gleich der über V integrierten Kraftdichte,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}_{\text{mech}} = \int_V \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right) d^3 r. \quad (10.54)$$

Zur Interpretation von (10.53) integrieren wir diese Bilanzgleichung über ein beliebiges Raumgebiet V mit dem Resultat

$$\frac{d}{dt} P_{\text{mech},i} + \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B})_i = \oint T_{ij} df_j. \quad (10.55)$$

Diese Gleichung legt nahe, das Volumenintegral auf der linken Seite als Gesamtimpuls \mathbf{P}_{feld} der in V vorhandenen elektromagnetischen Felder zu identifizieren,

$$\mathbf{P}_{\text{feld}} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}) d^3 r, \quad (10.56)$$

und den Integranden als *Impulsdichte des Feldes*. Damit ist die Variation des Gesamtimpulses von Materie und Feld gleich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} (\mathbf{P}_{\text{mech}} + \mathbf{P}_{\text{feld}}) = \oint T_{ij} df_j. \quad (10.57)$$

Deshalb ist $\sum_j T_{ij} n_j$, wobei \mathbf{n} die nach außen gerichtete Flächennormale an ∂V ist, als die i 'te Komponente des auf die Flächeneinheit bezogenen *Impulsstromes* zu interpretieren.

In Abwesenheit von materiellen Teilchen werden die 3 Gleichungen (10.52) zu Kontinuitätsgleichungen und besagen, daß die Änderung des Feldimpulses innerhalb V gleich dem Impulsfluß aus ∂V ist. Für einen räumlich schnell abfallenden Spannungstensor ist der gesamte Feldimpuls zeitlich erhalten. Diese Bilanzgleichungen und die entsprechende Bilanzgleichung für die Energie heißen *Minkowskische Gleichungen*.

Eigenschaften von $T_{\mu\nu}$:

²Tensor bezüglich der räumlichen Drehungen.

Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ des elektromagnetischen Feldes in (10.49) ist spurlos,

$$T_{\mu}^{\mu} = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (10.58)$$

Die Quanten des elektromagnetischen Feldes, die *Photonen*, sind masselos. Die Spurfreiheit von $T_{\mu\nu}$ ist eng mit dieser Eigenschaft der Lichtteilchen verknüpft.

Der Energie-Impuls-Tensor mit kontravarianten Indizes

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) & (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})^t \\ \mathbf{D} \wedge \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbb{1} - \mathbf{E}\mathbf{D}^t - \mathbf{H}\mathbf{B}^t \end{pmatrix} \quad (10.59)$$

ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Nur für verschwindende Polarisierung und Magnetisierung wird er symmetrisch,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^t \\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\mathbb{1} - \mathbf{E}\mathbf{E}^t - \mathbf{B}\mathbf{B}^t \end{pmatrix}. \quad (10.60)$$

Die fehlende Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors in makroskopischen Medien hat viele Physiker gestört. Für Modifikationen des Tensors in Medien verweise ich auf die Literatur³.

³siehe z.B. L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Elektrodynamik der Kontinua, Abschnitte 10,15 und 34; I. Brevik, Videns. Sels. Mat.-fys. Medd. 37 (1970) No. 11 und No. 13.

Kapitel 11

Erzeugung und Abstrahlung von Wellen

Bisher haben wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen diskutiert, ihre Erzeugung durch zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen dagegen noch ausgespart. Der letzte Aspekt soll im vorliegenden Kapitel untersucht werden. Dazu erinnern wir daran, dass in der Lorenzgleichung das elektromagnetische Potential die inhomogene Wellengleichung

$$\square A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x), \quad (11.1)$$

löst. Dabei werden die Ladungsdichte $j^0 = c\rho$ und Stromdichte \mathbf{j} als gegeben vorausgesetzt. Als Anwendung werden wir die Abstrahlung einer lokalisierten Quelle sowie die Felder und Strahlung bewegter Punktladungen behandeln.

11.1 Inhomogene Wellengleichung

Wir wollen das Feld von beliebig bewegten Ladungen im sonst leeren Raum untersuchen. Die Ladungs- und Stromdichte sind willkürlich vorgegebene Funktionen der Raumzeitkoordinaten und wir haben es in der Lorenzgleichung mit der Gleichung (11.1) zu tun. Die *formale Lösung* dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{\square} j^\mu. \quad (11.2)$$

Formal deshalb, weil die homogene Wellengleichung Lösungen hat und damit der Wellenoperator \square nicht invertierbar ist. Im folgenden wollen wir, unter Zuhilfenahme von physikalischen Bedingungen, das „Inverse des Wellenoperators“ bestimmen

Eine partikuläre Lösung wird mit der Methode der Greenschen Funktion unter Berücksichtigung von „physikalischen Randbedingungen“ bestimmt. Eine *Greensche Funktion* $G(x, x')$ der Wellengleichung löst die Wellengleichung für eine *instantane Punktquelle*

am Raumzeit-Punkt x' :

$$\square G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (11.3)$$

Hier steht auf der rechten Seite die 4-dimensionale Delta-Distribution in der Raumzeit

$$\delta^4(x - x') = \delta(ct - ct') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{c} \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (11.4)$$

Wegen der Homogenität der Raumzeit darf sich die Greensche Funktion bei gleichzeitiger Verschiebung von Aufpunkt x und Quellpunkt x' in der Raumzeit nicht ändern. Sie kann daher nur vom Differenzvektor $x - x'$ abhängen, $G(x, x') = G(x - x')$. Ist die Greensche Funktion bekannt, so folgt formal sofort eine partikuläre Lösung

$$A^\mu = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x'). \quad (11.5)$$

In der Tat, wendet man auf A^μ den d'Alembert-Operator an, so erhält man

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \square G(x - x') j^\mu(x') = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' \delta^4(x - x') j^\mu(x') = \frac{4\pi}{c} j^\mu(x).$$

Die Greensche Funktion beschreibt die Ausbreitung einer in der Raumzeit punktförmigen Störung.

Für ihre Berechnung lösen wir zuerst die Bestimmungsgleichung (11.3) im k -Raum, also für die Fouriertransformierte \tilde{G} in der Transformationsformel

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (11.6)$$

Frequenz und Wellenzahlvektor bilden die Komponenten eines 4-er Vektors,

$$k = (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (11.7)$$

und dieser 4-er Wellenzahlvektor tritt in der Form

$$(k, x) = k^\mu x_\mu = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (11.8)$$

in der Fouriertransformation (11.6) auf. Im k -Raum geht der d'Alembert-Operator bis auf das Vorzeichen in die Multiplikation mit k^2 über,

$$\square G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k k^2 e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (11.9)$$

Andererseits ist die Fouriertransformierte der Punktquelle

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx}. \quad (11.10)$$

Setzen wir diese beiden Fourierdarstellungen in die Bestimmungsgleichung für die Greensche Funktion ein, so finden wir folgende Fouriertransformierte von G ,

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\mu k^\mu} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}. \quad (11.11)$$

Damit ergibt sich folgende formale Lösung für die Greenfunktion in (11.6)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(k,x)}}{k^2} d^4k, \quad k^2 = k_\mu k^\mu. \quad (11.12)$$

Da \square nicht invertierbar ist, müssen wir bei der Auswertung der Integrale etwas vorsichtig sein. Zuerst berechnen wir das Integral über k^0 . Da wir die Ladungen und Ströme als *Ursachen* für die Potentiale betrachten, sollte die Greensche Funktion $G(x - x')$ nur ungleich Null sein, falls das Ereignis x später als das Ereignis x' ist, d.h. falls $x^0 \geq x'^0$ gilt. Diese Forderung ist erfüllt, falls

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{e^{i(k,x)}}{(k^0 - i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} d^4k, \quad (11.13)$$

ist. Hier bedeutet $\epsilon \rightarrow +0$, daß $\epsilon > 0$ gegen Null strebt. Dies ist mit Hilfe des Residuensatzes einfach zu beweisen: Für $x^0 < 0$ strebt der Integrand in der unteren Halbebene $\Im(k^0) < 0$ exponentiell gegen Null und ist dort analytisch, da seine Pole bei

$$k^0 = i\epsilon \pm |\mathbf{k}|,$$

also in der oberen Halbebene, liegen. Damit verschwindet das k^0 -Integral längs der Schleife $C_1 \cup C_2$ in der Abb. 11.1. Da C_2 nicht beiträgt, verschwindet das k^0 Integral längs C_1 für negative x^0 . Für positive x^0 fällt der Integrand nur in der oberen Halbebene $\Im(k^0)$ -Ebene ab und wir müssen das Schleifenintegral längs $C_1 \cup C_3$ nehmen. Da C_3 nicht beiträgt ist dies gleich dem Integral längs C_1 . Nach dem Residuensatz ist das Schleifenintegral proportional zur Summe der Residuen innerhalb $C_1 \cup C_3$. Also gilt

$$\int_{C_1} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\epsilon)^2 - \mathbf{k}^2} = \oint_{C_1 \cup C_3} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\epsilon - |\mathbf{k}|)(k^0 - i\epsilon + |\mathbf{k}|)} \longrightarrow -\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \sin |\mathbf{k}| x^0$$

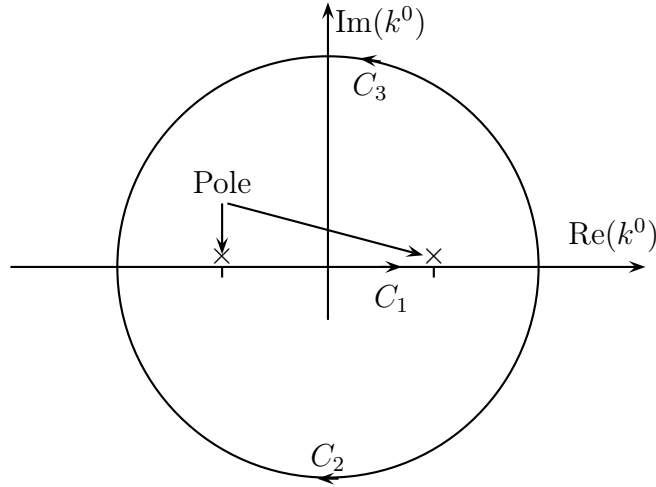


Abbildung 11.1: Zur Berechnung des retardierten Potentials.

im Grenzfall $\epsilon \rightarrow +0$. Dies setzen wir in (11.13) ein und finden

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(|\mathbf{k}|x^0)}{|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k.$$

Zur Berechnung des Integrals legen wir die 3-Achse im \mathbf{k} -Raum in Richtung von \mathbf{r} , so daß $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{k}||\mathbf{r}| \cos \theta$ ist, und integrieren über den Azimutalwinkel. Setzen wir noch $\cos \theta = z$ dann finden wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}|x^0) e^{-izr|\mathbf{k}|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{r}|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}|x^0) \sin(|\mathbf{k}|r). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion von $|\mathbf{k}|$ und das Integral von 0 nach ∞ ist gleich der Hälfte des Integrals von $-\infty$ nach ∞ . Schreiben wir die beiden Sinus-Funktionen als Differenz zweier Exponentialfunktionen und benutzen die Formel (8.57), dann finden wir unter Beachtung von $x^0 + r > 0$ die einfache Darstellung

$$G(x) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} \delta(x^0 - r). \quad (11.15)$$

Wie gefordert ist G nur ungleich Null, wenn x auf dem Vorwärtslichtkegel von 0 liegt,

$$\text{Träger}(G) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{r}^2 = 0, x^0 \geq 0\}. \quad (11.16)$$

In anderen Worten: Die Greenfunktion am Raumzeitpunkt x ist ungleich Null, falls eine zur Zeit 0 am Ursprung ausgesandte Kugelwelle zur Zeit $t = x^0/c$ den Ort \mathbf{r} erreicht. Die soeben konstruierte Greenfunktion nennt man *retardierte Greensche Funktion*

$$G_{\text{ret}}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]. \quad (11.17)$$

Da die Wellengleichung invariant unter einer Zeitspiegelung $Tx = (-x^0, \mathbf{r})$ ist, ist auch

$$G_{\text{av}}(x - x') = G_{\text{ret}}(T(x - x')) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \quad (11.18)$$

eine mögliche Greenfunktion. Lügen die Pole in (11.1) etwas unterhalb der reellen Achse,

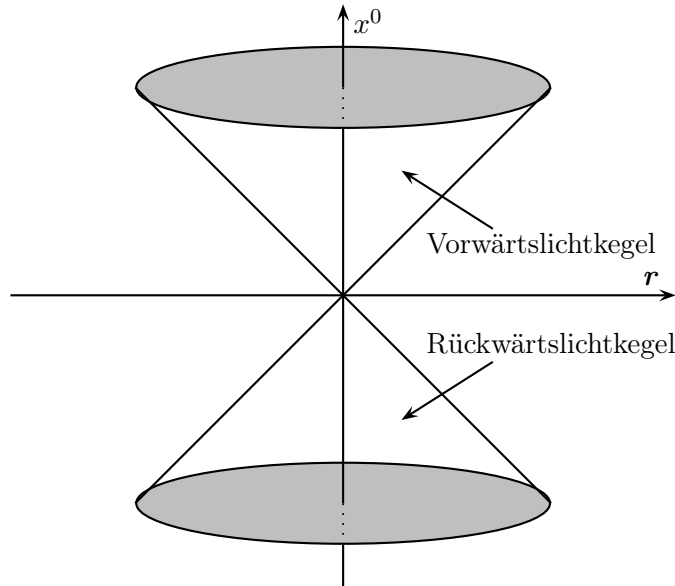


Abbildung 11.2: Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel als Träger von G_{ret} bzw. G_{av} .

dann hätte die Fouriertransformation diese unphysikalische *avancierte Greensche Funktion* geliefert. Unphysikalisch deshalb, weil ihr Träger der Rückwärtslichtkegel ist: $G_{\text{av}}(x, x')$ ist nur für $t \leq t'$ ungleich Null.

Nun setzen wir die retardierte Greenfunktion in (11.5) ein und finden

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^4x' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) j^\mu(ct', \mathbf{r}'). \quad (11.19)$$

Die Zeitintegration führt auf

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct_{\text{ret}}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (11.20)$$

Die elektromagnetischen Potentiale haben formal dieselbe Struktur wie in der Statik. Aber die Potentiale zur Zeit t hängen nun von den Stromdichten zu früheren retardierten Zeiten

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq ct \quad (11.21)$$

ab. Etwas genauer: sie hängen nur von den Werten der Stromdichte auf dem Rückwärtslichtkegel von x ab. Wegen $t' = t_{\text{ret}}$ ist

$$c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (x - x')^2 = 0,$$

was bedeutet, daß der Quellpunkt x' und der Aufpunkt x lichtartig getrennt sind. Das entsprechende Raumzeit-Diagramm ist in der Abbildung 11.3 gezeigt.

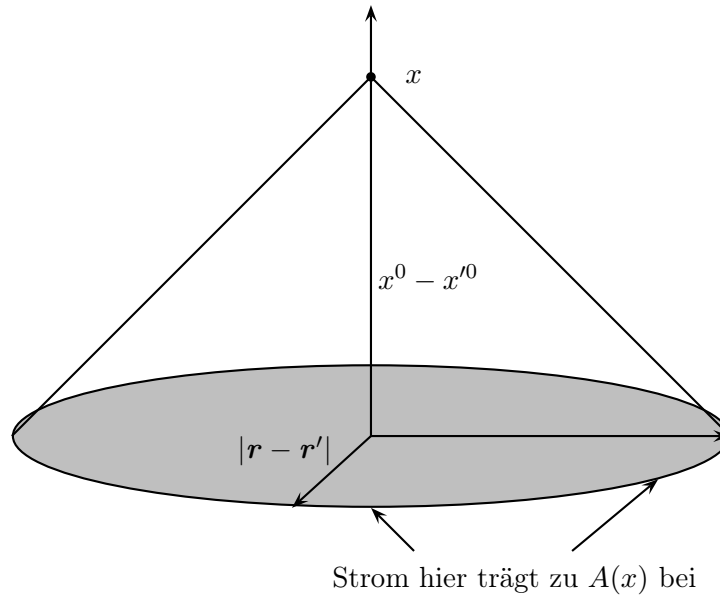


Abbildung 11.3: Die Werte des Stromes auf dem Rückwärtslichtkegel von x bestimmen das Potential am Raumzeitpunkt x .

Das Potential (11.20) erfüllt automatisch die *Lorenzgleichung*. Zum Beweis dieser Aussage machen wir von der Darstellung (11.5) gebrauch und benutzen die Kontinuitätsglei-

chung für die 4-er Stromdichte,

$$\begin{aligned} \frac{c}{4\pi} \partial_\mu A^\mu &= \int d^4x' \partial_\mu G(x - x') j^\mu(x') \\ &= - \int d^4x' \partial'_\mu G(x - x') j^\mu(x') = \int d^4x' G(x - x') \partial'_\mu j^\mu(x') = 0. \end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration haben wir Oberflächenterme vernachlässigt, was für lokalisierte Stromverteilungen gerechtfertigt ist.

11.2 Strahlungsfeld in der Fernzone

Wir betrachten eine auf ein endliches Gebiet mit linearer Ausdehnung d eingeschränkte Ladungs- und Stromverteilung und bestimmen die Abstrahlung dieses „Senders“. Dazu benötigen wir die elektromagnetischen Felder in großen Abständen von den Quellen. Der Koordinatenursprung liege räumlich und zeitlich innerhalb des Senders.

Für $r \gg d$, also weit weg vom Sender, ist $r \gg r'$ und wir entwickeln den räumlichen Abstand nach Potenzen von r'/r ,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + r'^2/r^2 - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/r} = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r), \quad (11.22)$$

wobei der Einheitsvektor \mathbf{n} in Richtung von \mathbf{r} zeigt, $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$. Die führenden Terme der Felder weit weg vom Sender klingen also wie $1/r$ ab. Um diese führenden Terme zu berechnen, dürfen wir den Nenner in (11.20) durch r ersetzen. Wir benutzen diese Näherung auch für die retardierte Zeit

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r). \quad (11.23)$$

Diese Näherung ist allerdings nur zulässig wenn die zeitliche Änderung der Quellen während des Zeitintervalls d^2/rc klein ist. Hierbei ist d/c die Zeit, die Licht zum durchqueren der Quelle braucht. Für eine harmonische Welle $\sim e^{i\omega t}$ bedeutet dies

$$\frac{d^2}{rc} \ll \frac{1}{\omega}. \quad (11.24)$$

In der sogenannten *Wellen-* oder *Fernzone*, charakterisiert durch die Bedingungen

$$r \gg d \quad \text{und} \quad r \gg \left(\frac{\omega d}{c} \right) d, \quad (11.25)$$

vereinfacht sich der Ausdruck (11.20) für das 4-er Potential dann zu

$$A^\mu = \frac{1}{rc} \int d^3r' j^\mu(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'), \quad (11.26)$$

das heißt für das skalare und Vektorpotential zu

$$\Phi = \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') \quad (11.27)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{rc} \int d^3r' \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \quad (11.28)$$

Wir bestimmen nun die entsprechenden $1/r$ -Terme der elektromagnetischen Felder. Die Ableitung von $1/r$ fällt wie $1/r^2$ ab und trägt zu den führenden $1/r$ -Termen nicht bei. Damit ist das magnetische Feld in der Wellenzone

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2 r} \mathbf{n} \wedge \int d^3r' \partial_t \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}').$$

Der Vergleich des Integranden mit (11.28) ergibt die Formel für das Fernfeld,

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}}, \quad (11.29)$$

wobei das Potential \mathbf{A} nach der Formel (11.28) berechnet wird. Mit Hilfe der Maxwellgleichung $\dot{\mathbf{E}} = c \nabla \wedge \mathbf{B}$ bestimmen wir den führenden Term von $\dot{\mathbf{E}}$,

$$\dot{\mathbf{E}} = -\nabla \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{A}}).$$

Daraus ergibt sich bis auf einen statischen Anteil das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}}) = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}. \quad (11.30)$$

Man hat also dieselben Verhältnisse wie bei ebenen Wellen; die Strahlungsfelder \mathbf{E} und \mathbf{B} sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} , haben die gleiche Amplitude und stehen senkrecht aufeinander.

In den Formeln für die Felder in der Fernzone geht das (genäherte) Vektorpotential A^μ in (11.26) ein. Zu dessen Berechnung schreiben wir die Stromdichte als Überlagerung von ebenen Wellen,

$$j^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(k,x)} j^\mu(k) d\omega d^3k, \quad k_\mu j^\mu(k) = 0. \quad (11.31)$$

Die letzte Bedingung ist die Kontinuitätsgleichung für die 4-er Stromdichte im k -Raum. Um die Stromdichte j^μ im Minkowskiraum von ihrer Fouriertransformierten im k -Raum zu unterscheiden, schreiben wir im Folgenden das Argument von j^μ explizit. Setzen wir die Fourierzerlegung in (11.26) ein, dann finden wir das Vektorpotential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int d\omega e^{i\omega(t-r/c)} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r' d^3k e^{i\mathbf{r}'(\mathbf{q}-\mathbf{k})} j^\mu(\omega, \mathbf{k}),$$

wobei $\mathbf{q} = \omega \mathbf{n}/c$ in Richtung von \mathbf{r} zeigt. Die d^3r' Integration kann nun ausgeführt werden und ergibt mit $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \omega r/c$ folgende Formel für das elektromagnetische Potential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \int d\omega e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\omega, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (11.32)$$

Im *monochromatischen Fall* ist

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) = \Re(e^{i\omega t} j^\mu(\mathbf{r})), \quad j^\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{k}) d^3k \quad (11.33)$$

und der Ausdruck für das Potential in der Fernzone vereinfacht sich zu

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{cr} \Re(e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\mathbf{q})) \quad (11.34)$$

Es ist proportional zur Fourier-Transformierten der Stromdichte für den Impuls $\mathbf{q} = \omega \hat{\mathbf{r}}/c$. Das entsprechende Magnetfeld hat die Form

$$\mathbf{B} = \frac{\omega}{c^2 r} \Im(\mathbf{B}(\mathbf{q}) e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{q}), \quad (11.35)$$

und das elektrische Feld ist $\mathbf{E} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}$. Die abgestrahlte Welle in der Wellenzone ist eine auslaufende Kugelwelle mit winkelabhängigen Koeffizienten.

11.3 Multipolentwicklung

Die Amplitude einer Welle ändert sich kaum über Distanzen, die viel kleiner als die Wellenlänge sind oder während Zeiten, die viel kürzer als die inverse Frequenz sind. Die Retardierung wird also vernachlässigbar sein, wenn sich die Stromdichte während der Zeitdauer d/c , die das Licht zur Durchquerung des Senders braucht, kaum ändert. Wir wollen jetzt *zusätzlich* zu (11.25) annehmen, daß dies der Fall sei, d.h. daß gelte

$$\lambda \gg d \quad (11.36)$$

Damit dürfen wir den Integranden in (11.28) entwickeln,

$$\mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') = \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots$$

und dies führt auf folgende Multipolentwicklung für das Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{rc} \int d^3 r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{1}{rc^2} \int d^3 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots \\ &= \mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(t, \mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (11.37)$$

Im folgenden werden wir sehen, daß \mathbf{A}_1 die elektrische Dipolstrahlung und \mathbf{A}_2 die magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung enthält.

Elektrische Dipolstrahlung:

Zur weiteren Umformung des Integrals verallgemeinern wir die Identität (6.51) in Kapitel 6 auf zeitabhängige Situationen. Für zeitabhängige Ladungsdichten ist die Stromdichte nicht mehr quellenfrei, und

$$0 = \oint d\mathbf{f} (g \mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla \cdot (g \mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla g \cdot \mathbf{j} + \int d^3 r g \nabla \cdot \mathbf{j},$$

wobei g eine beliebige Funktion ist und angenommen wurde, daß für ein genügend großes Integrationsgebiet $g \mathbf{j}$ auf dem Rande des Gebietes verschwindet. Mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\int d^3 r (\nabla g) \cdot \mathbf{j} = \int d^3 r g \dot{\rho}. \quad (11.38)$$

Wählen wir zunächst $g = x_i$, dann kann das erste Integral in (11.37) folgendermassen umgeformt werden,

$$\int d^3 r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') = \int d^3 r' \mathbf{r}' \dot{\rho}(ct - r, \mathbf{r}') = \dot{\mathbf{p}}(ct - r),$$

wobei $\mathbf{p}(t)$ das in (4.5) eingeführte *elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung ist. Ein zeitabhängiges Dipolmoment erzeugt also in der Wellenzone ein Vektorpotential, welches wie $1/r$ abfällt und proportional der zeitlichen Änderung des Dipols ist,

$$\mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{p}}(ct - r). \quad (11.39)$$

Dabei ist die Zeitableitung von \mathbf{p} zur Zeit $t - r/c$ zu nehmen, also zu der Zeit als (in unserer Approximation) die Welle im Sender erzeugt wurde.

Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung:

Die Zeitableitung im zweiten Integral in (11.37) ziehen wir vor das Integral und formen den auftretenden Term $x'_p j_q$ folgendermaßen um

$$x'_p j_q = \frac{1}{2} (x'_p j_q + x'_q j_p) + \frac{1}{2} (x'_p j_q - x'_q j_p) = \frac{1}{2} \nabla' (x'_p x'_q) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2} \epsilon_{pq s} (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{j})_s.$$

Bei der Integration des zweitletzten Terms über $d^3 r'$ dürfen wir (11.38) anwenden. Dann finden wir die Zeitableitung des elektrischen Quadrupolmoments (4.6). Die Integration des letzten Terms ergibt das magnetische Dipolmoment (6.54) in Kapitel 6. Es gilt

$$\int d^3 r' x'_p j_q = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \int d^3 r' r'^2 \dot{\rho} \right) + c \epsilon_{pqr} m_r$$

woraus ein Zwischenergebnis für \mathbf{A}_2 in (11.37) resultiert,

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} = \frac{1}{2rc^2} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} + \frac{1}{6c^2} (\nabla \log r) \int d^3 r' r'^2 \ddot{\rho} - \frac{1}{rc} \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{m}}.$$

Hierbei steht $\mathbf{Q} \mathbf{n}$ für den Vektor mit den Komponenten $\sum_j Q_{ij} n_j$. Der zweite Term auf der rechten Seite ist ein Gradient der nicht zum elektromagnetischen Feld beiträgt. Wir können das Potential umeichen, so daß er verschwindet. Damit finden wir folgenden Ausdruck für den Beitrag \mathbf{A}_2 zum Eichpotential in der Wellenzone:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{rc} \left(\dot{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r}. \quad (11.40)$$

Auch ein zeitabhängiges magnetisches Dipolmoment und zeitabhängiges elektrisches Quadrupolmoment tragen zum Vektorpotential in der Wellenzone bei.

Addieren wir die Beträge \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 dann finden wir mit den allgemeinen Formeln (11.29) und (11.30) das elektromagnetische Feld in der Wellenzone,

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{rc^2} \mathbf{n} \wedge \left(\ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E} \quad (11.41)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{rc^2} \mathbf{n} \wedge \left(\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{2c} \mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}. \quad (11.42)$$

In den führenden Ordnungen tragen zeitabhängige elektrische und magnetische Dipolmo-

mente und eine zeitabhängiges elektrisches Quadrupolmoment bei. Wir erinnern an die gemachten Annahmen:

$$r \gg d, \quad r \gg \left(\frac{d}{\lambda}\right) d, \quad \lambda \gg d \quad (11.43)$$

Nun werden wir die von der variablen Quelle abgestrahlte Leistung berechnen.

11.3.1 Abgestrahlte Leistung

Zur Berechnung der Dipol- und Quadrupolstrahlung eines Senders dürfen wir die elektromagnetischen Felder (11.41, 11.42) verwenden. In der Wellenzone bilden \mathbf{n} , \mathbf{E} und \mathbf{B} ein orthogonales Dreibein und

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} = |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n}. \quad (11.44)$$

Damit finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{cr^2}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = \frac{cr^2}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{cr^2}{4\pi} |\mathbf{B}|^2. \quad (11.45)$$

Wir betrachten zuerst ein System, für das die elektrischen Dipolfelder dominieren. Dann ist

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{el.Dipol}} = \frac{1}{4\pi c^3} |\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta, \quad (11.46)$$

wobei θ den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} und $\ddot{\mathbf{p}}$ bezeichnet. Der Dipol strahlt am stärksten senkrecht zum Dipolmoment. Längs der Dipolachse erfolgt keinerlei Abstrahlung. Die Abstrahlung erfolgt rotationssymmetrisch um die Dipolachse. Integrieren wir über alle Richtungen, so erhalten wir mit Hilfe von

$$\int \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

für die Leistung der abgestrahlten *elektrischen Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{el.Dipol}} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (11.47)$$

Analog erhält man für die *magnetische Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{magn.Dipol}} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2. \quad (11.48)$$

Für harmonisch schwingende Dipole, $\mathbf{p}, \mathbf{m} \sim e^{i\omega t}$ ist die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz und zum Quadrat des Dipolmomentes.

Nun betrachten wir die *elektrische Quadrupolstrahlung*. Für den Quadrupolanteil in (11.41, 11.42) ist die abgestrahlte Intensität

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} &= \frac{1}{16\pi c^5} \left(\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16\pi c^5} \left(\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{km} n_l n_m - \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{mp} n_k n_l n_m n_p \right). \end{aligned} \quad (11.49)$$

Für eine um die z -Achse drehinvariante Ladungsverteilung hat \mathbf{Q} die Form

$$\mathbf{Q} = \frac{Q_0}{2} \text{diag}(-1, -1, 2), \quad \text{so daß} \quad \mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} = \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_3 \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Benutzen wir noch

$$|\mathbf{n} \wedge \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}|^2 = \frac{9}{4} \ddot{Q}_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

dann findet man folgende Winkelverteilung für die Strahlung in der Wellenzone,

$$\frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} = \frac{9}{64\pi c^5} \ddot{Q}_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (11.50)$$

siehe Abb. 11.4. Die Strahlungsleistung ist rotationssymmetrisch zur z -Achse und *maximal* in den Richtungen $\theta = \pi/4$ und $3\pi/4$. Sie verschwindet für $\theta = 0, \pi/2$ und π . Um die gesamte abgestrahlte Leistung zu bestimmen, benötigen wir Integrale der Form $I(i, j, \dots) = \int d\Omega n_i n_j \dots$ mit $2p$ Faktoren $n_i n_j \dots$. Diese Integrale werden natürlich auch bei der Berechnung der höheren Multipolbeiträge zur Strahlung gebraucht. Zu ihrer Berechnung benutzen wir folgenden Trick: die linke Seite der Identität

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r e^{-r^2/2} x_i x_j \dots &= \int_0^\infty dr r^{2+2p} e^{-r^2/2} I(i, j, \dots) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2p+1)!! I(i, j, \dots) \end{aligned} \quad (11.51)$$

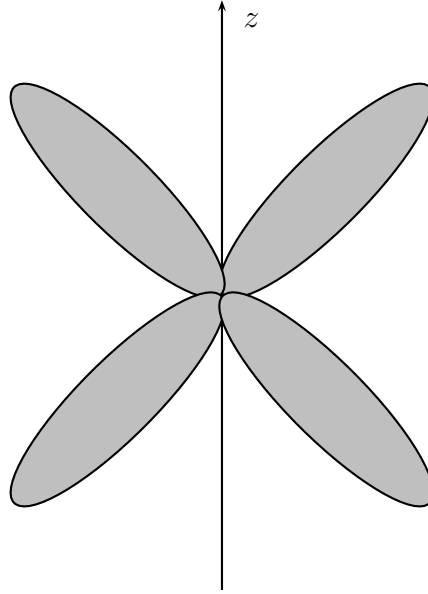


Abbildung 11.4: Winkelverteilung der elektrischen Quadrupolstrahlung.

kann durch mehrfaches Ableiten der *erzeugenden Funktion*

$$I(\mathbf{j}) = \int d^3r \exp\left(-\frac{r^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}\right) = (2\pi)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathbf{j}^2}{2}\right) \quad (11.52)$$

nach den Komponenten der Quelle \mathbf{j} berechnet werden. Zum Beispiel finden wir:

$$\begin{aligned} \int d^3r e^{-r^2/2} x_l x_m &= \frac{\partial^2}{\partial j_l \partial j_m} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} \delta_{lm}, \\ \int d^3r e^{-r^2/2} x_k x_l x_m x_p &= \frac{\partial^4}{\partial j_k \partial j_l \partial j_m \partial j_p} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}). \end{aligned}$$

Benutzen wir diese Resultate in (11.51), so finden wir für die gesuchten Integrale über die Winkel

$$I(l, m) = \frac{4\pi}{3} \delta_{lm} \quad \text{und} \quad I(k, l, m, p) = \frac{4\pi}{15} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}). \quad (11.53)$$

Nun können wir (11.49) über die Winkel integrieren. Berücksichtigen wir die Symmetrie und Spurfreiheit des Quadrupoltensors, dann ergibt sich

$$P|_{\text{el. Quad.}} = \frac{1}{12c^5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} - \frac{1}{60c^5} \left(\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} + \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{lk} \right) = \frac{1}{20c^5} \text{Sp } \ddot{\mathbf{Q}}^2. \quad (11.54)$$

Die Ausdrücke für die Beiträge höherer Multipole zur Abstrahlung werden immer komplizierter. Eine systematische Entwicklung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen ist möglich, mathematisch aber nicht ganz einfach.

11.4 Lienard-Wiechert-Potentiale

Wir wollen eine wichtige Anwendung der retardierten Potentiale diskutieren. Eine Punktladung q bewege sich längs einer Bahn $\mathbf{r}(t)$ mit der (momentanen) Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$. Diese bewegte Punktladung wird ein zeitlich veränderliches elektromagnetisches Feld erzeugen, welches wir nun bestimmen werden. Wir berechnen also die Potentiale zu den Dichten

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad (11.55)$$

oder in der 4-er Schreibweise

$$j^\mu(x) = qv^\mu(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \text{wobei} \quad (v^\mu) = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (11.56)$$

ist. Wir setzen diesen Strom in (11.19) ein und integrieren über d^3r' mit dem Resultat

$$A^\mu(x) = q \int dt' \frac{\delta(c(t-t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} v^\mu(t'). \quad (11.57)$$

Um die t' -Integration auszuführen brauchen wir die Formel

$$\delta(f(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\dot{f}(t_j)|} \delta(t - t_j), \quad (11.58)$$

wobei t_1, \dots, t_n die einfachen Nullstellen der Funktion f sind.

Beweis: Im Integral

$$\int dt \delta(f(t)) g(t)$$

tragen nur t -Werte bei, für die das Argument der δ -Distribution verschwindet. Sei t_1 die einzige einfache Nullstelle im Intervall Δ um t_1 und sei $\epsilon = t - t_1$. Dann ist $f(t) = \dot{f}(t_1)\epsilon + \dots$ und der Beitrag dieser Nullstelle ist

$$\int_{\Delta} \delta(\dot{f}(t_1)\epsilon) g(t_1 + \epsilon) d\epsilon = \frac{1}{|\dot{f}(t_1)|} \int \delta(x) g\left(t_1 + \frac{x}{\dot{f}(t_1)}\right) dx = \frac{g(t_1)}{|\dot{f}(t_1)|}.$$

Da dies für jede Nullstelle und für beliebige Testfunktionen g gilt, folgt sofort (11.58).

Es sei $f(t') = c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|$ das Argument der δ -Distribution in (11.57). Dann ist

$$\frac{df}{dt'} = -c + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} \cdot \mathbf{v}(t') = -c(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')), \quad (11.59)$$

wobei wir den Einheitsvektor

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{c} \quad (11.60)$$

eingeführt. Da die Geschwindigkeit \mathbf{v} jedes Teilchens mit Ruhemasse > 0 stets kleiner der Lichtgeschwindigkeit ist, ist die rechte Seite in (11.59) stets negativ. Deshalb kann f höchstens die Nullstelle $t' = t_{\text{ret}}$ haben. Diese Nullstelle ist Lösung von

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t_{\text{ret}})| \equiv ct - R(t_{\text{ret}}), \quad (11.61)$$

und diese wichtige Gleichung bestimmt $t_{\text{ret}}(t, \mathbf{r})$ bei vorgegebener Bahn $\mathbf{r}(t)$ des Punktteilchens. Damit können wir die t' -Integration in (11.57) ausführen,

$$A^\mu(x) = \frac{q}{c} \frac{v^\mu(t)}{R(t)[1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (11.62)$$

In Komponenten geschrieben, lauten die Potentiale

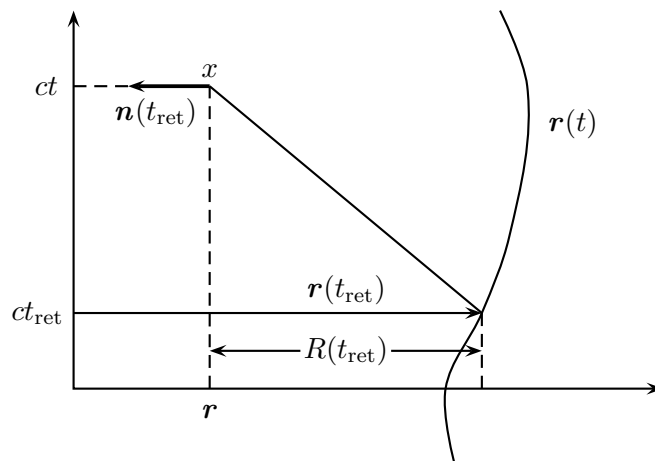


Abbildung 11.5: Zur Ableitung der Lienard-Wiechert-Potentiale.

$$\Phi(x) = \frac{q}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad (11.63)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{q\boldsymbol{\beta}(t)}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad (11.64)$$

Dies sind die nach Lienard und Wiechert benannten elektromagnetischen Potentiale einer beliebig bewegten Punktladung. Wegen der für allgemeine Teilchenbahnen komplizierten Bestimmungsgleichung (11.61) für die *retardierte Zeit* ist das Potential (11.62) in den meisten Fällen schwer berechenbar.

Zur Berechnung der Felder brauchen wir $\dot{\mathbf{A}}$ und damit die zeitliche Änderung von R , \mathbf{n} und der retardierten Zeit. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\dot{R} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \dot{t}_{\text{ret}}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{R} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v}) \dot{t}_{\text{ret}}, \quad c \dot{t}_{\text{ret}} = c - \dot{R} \dot{t}_{\text{ret}},$$

woraus sich für die zeitliche Ableitung der retardierten Zeit die Formel

$$\dot{t}_{\text{ret}} = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \Big|_{t_{\text{ret}}} \equiv \frac{1}{\kappa} \quad (11.65)$$

ergibt. Wir haben die im Folgenden oft auftauchende zeitliche Variation der retardierten Zeit mit κ^{-1} bezeichnet. In dieser und den folgenden Formeln ist das Zeitargument jeweils die retardierte Zeit! Es folgt, daß

$$\partial_t(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\kappa} \left(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} - \frac{c}{R} (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta})^2 \right).$$

Nun findet man relativ leicht die Zeitableitung des Potentials,

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{q}{R^2} \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2) + \frac{q}{Rc} \frac{1}{\kappa^3} \left(\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \wedge (\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right). \quad (11.66)$$

Für die räumlichen Ableitung des skalaren Potentials brauchen wir noch

$$\nabla R(t_{\text{ret}}) = \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \nabla t_{\text{ret}}, \quad c \nabla t_{\text{ret}} = -\nabla R(t_{\text{ret}}) \implies c \nabla t_{\text{ret}} = -\frac{\mathbf{n}}{\kappa},$$

woraus dann folgt

$$\nabla(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\kappa R} (\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \beta^2 \mathbf{n}) - \frac{1}{\kappa c} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n}.$$

Damit läßt sich der Gradient des skalaren Potentials berechnen. Man findet

$$\nabla \Phi = -\frac{q}{R^2 \kappa^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta})) - \frac{q}{Rc \kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n}. \quad (11.67)$$

Mit diesen Formeln für $\dot{\mathbf{A}}$ und $\nabla\Phi$ ergibt sich für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{\kappa^3} \left(\frac{1 - \beta^2}{R^2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (11.68)$$

Um $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ zu bestimmen, brauchen wir schlussendlich noch

$$\nabla \wedge \boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\kappa c} \mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

Damit lautet das magnetische Feld der Punktladung

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = -\frac{q}{\kappa^3} \left(\frac{1 - \beta^2}{R^2} \mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \wedge (\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \wedge (\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad (11.69)$$

wobei wir uns noch einmal an unsere Abkürzungen erinnern:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)}{R}, \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (11.70)$$

Damit wären die Felder (beinahe) explizit bestimmt. Der erste Term in (11.68) ist das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung; er fällt wie $1/R^2$ ab. Der zweite Term ist proportional zur Beschleunigung und fällt nur wie $1/R$ ab. Er ist verantwortlich für die elektromagnetische Abstrahlung von beschleunigten geladenen Teilchen.

Wir untersuchen nun zwei Spezialfälle. Dabei können wir uns wegen des einfachen Zusammenhangs

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (11.71)$$

zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B} -Feld auf das elektrische Feld beschränken.

Ruhendes Teilchen: Für unbewegtes Teilchen ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ zeitunabhängig und $\mathbf{v} = 0$. Entsprechend verschwindet das Vektorpotential und

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (11.72)$$

Wie nicht anders erwartet, finden wir das Coulombpotential.

Gleichförmig bewegtes Teilchen: Für eine Punktladung mit konstanter Geschwindigkeit ist

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t \quad \text{und} \quad (v^\mu) = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (11.73)$$

Das Quadrat von v ist

$$v^\mu v_\mu = c^2 (1 - \beta^2) = \frac{c^2}{\gamma^2}, \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

der relativistische γ -Faktor ist. Wir definieren den *normierten* Geschwindigkeitsvektor

$$u^\mu = \frac{\gamma}{c} v^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \implies (u, u) = 1. \quad (11.74)$$

Nun bestimmen wir zuerst die retardierte Zeit. Die Bedingung (11.61) lautet

$$c^2(t - t_{\text{ret}})^2 = r^2 + v^2 t_{\text{ret}}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} t_{\text{ret}}$$

und die Elimination der retardierten Zeit führt auf

$$ct_{\text{ret}} = \gamma \left((u, x) \pm \sqrt{(u, x)^2 - x^2} \right). \quad (11.75)$$

Da $t > t_{\text{ret}}$ sein muß, kann nur das negative Vorzeichen korrekt sein. Mit

$$\begin{aligned} R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} &= |\mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\text{ret}}| - (\mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\text{ret}})\boldsymbol{\beta} \\ &= c(t - t_{\text{ret}}) - (\mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\text{ret}})\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma}(u, x) - \frac{c}{\gamma^2}t_{\text{ret}} \end{aligned}$$

finden wir eine einfache Form für den Nenner in den Lienard-Wiechert Potentialen (11.62)

$$R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{(u, x)^2 - x^2}. \quad (11.76)$$

Das Potential (11.62) vereinfacht sich entsprechend zu

$$A^\mu(x) = \frac{qu^\mu}{\sqrt{(u, x)^2 - x^2}}. \quad (11.77)$$

Nun ist es einfach, die elektromagnetischen Felder zu bestimmen. Mit

$$R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\text{ret}} - c(t - t_{\text{ret}})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\beta}ct$$

findet man das folgende elektrische und magnetische Feld für ein gleichförmig bewegtes Punktteilchen,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= q\gamma \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{[(u, x)^2 - x^2]^{3/2}} \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= q\gamma \frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{r}}{[(u, x)^2 - x^2]^{3/2}}.\end{aligned}\quad (11.78)$$

Speziell für ein längs der z -Achse bewegtes Teilchen ist

$$A^\mu(x) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\gamma z - \gamma\beta ct)^2}} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \beta\gamma \end{pmatrix}, \quad (11.79)$$

und das elektrische Feldes hat die Form

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{q\gamma}{(\gamma^2(z - \beta ct)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - \beta ct \end{pmatrix} \\ &= \frac{q(1 - \beta^2)}{[(ct - \beta z)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - \beta ct \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (11.80)$$

In der ersten Form ist die Gleichheit mit unserem früheren Ergebnis (10.43) evident. Die zweite Form benötigen wir in der anschliessenden Diskussion des elektromagnetischen Feldes von schnell bewegten Punktladungen.

Es sei nun α der Winkel zwischen den Kraftlinien des elektrischen Feldes und dem Geschwindigkeitsvektor, siehe Abbildung 11.6,

$$\sin^2 \alpha = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + (z - vt)^2}. \quad (11.81)$$

Dann gilt offensichtlich

$$1 - \beta^2 \sin^2 \alpha = \frac{(\beta z - ct)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - c^2t^2)}{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2},$$

und wir können das elektrische Feld in folgende Form bringen

$$\mathbf{E} = q \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|^3}. \quad (11.82)$$

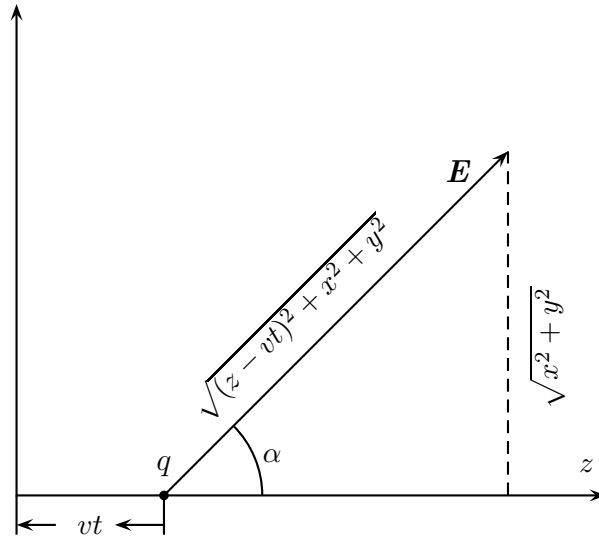


Abbildung 11.6: Zur Richtungsabhängigkeit der Felder einer gleichförmig bewegten Punktladung.

Man sieht hier deutlich, daß die Feldlinien geradlinig vom Ort vt der Ladung ausgehen. Der Betrag des elektrischen Feldes

$$|\mathbf{E}| = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad (11.83)$$

ist jedoch keineswegs kugelsymmetrisch. Er hängt vom Winkel zwischen Geschwindigkeit und Richtung der Kraftlinien ab. In Richtung der Geschwindigkeit ist er am kleinsten, senkrecht dazu am größten

$$E_{\min} = q \frac{1 - \beta^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2} \quad \text{und} \quad E_{\max} = \frac{q\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^2}. \quad (11.84)$$

Also ist

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \gamma^3 = \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3. \quad (11.85)$$

In dem Maß, wie die Geschwindigkeit des Teilchens sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, konzentriert sich also das ganze Feld auf eine flache, senkrecht zur Bahn orientierte Scheibe. Zum Beispiel für Elektronen mit 1 MeV ist $\beta \sim 0.94$ und entsprechend ist das

Verhältnis etwa 10. An dem vorgeschlagenen Elektronenbeschleuniger ELFE hätten die Elektronen etwa eine Energie $E \sim 15 - 30 \text{ GeV}$ und es wäre

$$\frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \left(\frac{(15 - 30) \cdot 10^3}{0.5} \right)^3 \sim (27 - 216) \cdot 10^{12}.$$

Im Grenzfall $v \rightarrow c$ wird die Feldstärke in der Scheibe unendlich.

11.5 Der Hertzsche Dipol

Als weiteres interessantes System werden wir nun ein um den Ursprung schwingendes Teilchen untersuchen. Ort und Geschwindigkeit der Ladung ändern sich harmonisch,

$$\mathbf{r}(t) = d \sin \omega t \mathbf{e}_3 = z(t) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}(t) = \dot{z}(t) \mathbf{e}_3 = \omega d \cos \omega t \mathbf{e}_3. \quad (11.86)$$

Wir wollen $d \ll r$ annehmen, so daß wir folgende Näherungen machen dürfen:

$$\begin{aligned} t_{\text{ret}} &\approx t - \frac{r}{c} & z_r &\equiv z(t_{\text{ret}}) \approx d \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \\ R(t_{\text{ret}}) &\approx r \left(1 - \frac{z z_r}{r^2} \right) & R \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ret}} &\approx (z - z_r) \frac{\dot{z}_r}{c}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die folgende Entwicklung für die Nenner der Potentiale

$$\left(\frac{1}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right)_{\text{ret}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z z_r}{r^2} + \frac{z \dot{z}_r}{c r} \right).$$

Eingesetzt in (11.63, 11.64) finden wir für die nichtverschwindenden Komponenten des elektromagnetischen Potentials

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \frac{q}{r} + \frac{q d}{r^2} \cos \theta \sin(\omega t - k r) + \frac{q d \omega}{r c} \cos \theta \cos(\omega t - k r) \\ A_3 &\approx \frac{\dot{z}_r}{c} \Phi \approx \frac{q d \omega}{r c} \cos(\omega t - k r), \quad k = \omega / c. \end{aligned}$$

Fügt man noch eine im Ursprung ruhende Ladung $-q$ hinzu, so findet man nach Einführung des elektrischen Dipolmomentes $p_0 = q d$ (das Dipolmoment bei der maximalen Auslenkung des Oszillators) die einfachen Formeln

$$\begin{aligned} \Phi &\approx p_0 \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \sin(\omega t - k r) + \frac{\omega}{r c} \cos(\omega t - k r) \right) \\ A_3 &\approx \frac{p_0 \omega}{r c} \cos(\omega t - k r), \quad k = \omega / c. \end{aligned} \quad (11.87)$$

Dies sind die retardierten Potentiale des *Hertzschen Dipols* in Kugelkoordinaten. Die ruhende Ladung und die darum schwingende positive Ladung stellen einen schwingenden Dipol dar. Das ruhende Teilchen trägt nicht zur Strahlung bei.

11.6 Abstrahlung von bewegten Ladungen

Nachdem wir die exakten Lienard-Wiechert-Felder von bewegten Punktladungen kennen und die Felder von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen in der Wellenzone (für $\lambda \gg d$) bestimmten, wollen wir nun die von diesen Sendern abgestrahlte Leistung berechnen. Diese ist durch den Poyntingvektor bestimmt.

Die ins Unendliche abgestrahlte Leistung P eines Senders ist durch den Poyntingvektor gegeben,

$$P = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \oint d\Omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}. \quad (11.88)$$

Nur Terme, die für große Abstände vom Sender wie $1/R^2$ abfallen, tragen zu dieser Strahlung bei. Deshalb brauchen wir bei der Berechnung der Strahlung einer beschleunigten Punktladung nur diejenigen Terme in (11.68, 11.69) berücksichtigen, die $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ enthalten, da nur diese zur Strahlung im Unendlichen beitragen. Wegen $\mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$ ist

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} \wedge (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) = \mathbf{E}^2 \mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}, \quad (11.89)$$

und für große Abstände vom Strahler steht das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\kappa^3} \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)_{t_{\text{ret}}} \quad (11.90)$$

senkrecht auf \mathbf{n} und deshalb ist

$$R^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{R^2 c}{4\pi} \mathbf{E}^2 = \frac{q^2}{4\pi c \kappa^6} \left| \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2. \quad (11.91)$$

Nichtrelativistische Teilchen: Wir betrachten zunächst Teilchen mit kleinen Geschwindigkeiten, $\beta \ll 1$. Dann ist die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel ($\kappa \sim 1$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \left| \mathbf{n} \wedge \left(\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2.$$

Ist θ der Winkel zwischen \mathbf{n} und dem Beschleunigungsvektor $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, so ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} (\dot{v}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2) = \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \theta. \quad (11.92)$$

Die *gesamte Strahlungsleistung* ist

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2. \quad (11.93)$$

Dies ist die bekannte *Larmorsche Formel* für die Strahlungsleistung von nichtrelativistisch beschleunigten Ladungen. Diese Strahlung tritt zum Beispiel auf, wenn Elektronen in Metallen gestreut und abgebremst werden und entsprechend heißt sie *Bremsstrahlung*¹.

Relativistische Teilchen: Wir untersuchen nun den allgemeinen Fall für beliebige Geschwindigkeiten $v < c$. Der allgemeine Ausdruck (11.91) gibt den Energiefluß pro Flächen- und Zeiteinheit beim Beobachtungspunkt zur Zeit t . Diese Strahlung wurde zur Zeit $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c$ ausgesandt. Interessanter ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro Zeiteinheit dt_{ret} abstrahlt. Wir wollen also die Strahlung berechnen, welche in der Zeit $T_1 \leq t_{\text{ret}} \leq T_2$ emittiert wurde. Die zugehörige Energie, welche der Beobachter empfängt, ist

$$\int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} dt_{\text{ret}}.$$

Die abgestrahlte Leistung je Raumwinkel ist demnach

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}}. \quad (11.94)$$

In (11.65) hatten wir bereits die hier auftretende Ableitung

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = \kappa(t_{\text{ret}})$$

definiert, so dass

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 \kappa (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \quad (11.95)$$

folgt. Setzen wir hier den obigen Ausdruck für $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ ein, dann finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \left| \mathbf{n} \wedge ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2. \quad (11.96)$$

¹Aus Kovarianzüberlegungen kann man (11.93) auf beliebige Teilchen, also nicht notwendigerweise langsame, verallgemeinern. Siehe die Diskussion in Kapitel 14 von Jackson.

Für kleine Geschwindigkeiten geht diese Formel in (11.92) über. Die etwas aufwendige Integration über alle Richtungen \mathbf{n} liefert die folgende abgestrahlte Leistung des geladenen Teilchens,

$$P = \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \left(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right). \quad (11.97)$$

Für eine lineare Bewegung sind $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ kollinear und

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left| (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (11.98)$$

Hier tritt der Winkel θ zwischen \mathbf{n} und $\dot{\mathbf{v}}$ auf. Der Winkel θ_{\max} bei dem die Strahlung maximal ist, erfüllt die Bestimmungsgleichung

$$\cos^2 \theta_{\max} + \frac{2}{3\beta} \cos \theta_{\max} - \frac{5}{3} = 0 \implies \cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right). \quad (11.99)$$

Für langsame Teilchen mit $v \ll c$ ist

$$\theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{2}, \quad (11.100)$$

und für schnelle Teilchen mit $\beta \sim 1 - 1/2\gamma^2 \rightarrow 1$ ist

$$\cos \theta \approx \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left(1 - \frac{5}{8\gamma^2} \right) \approx 1 - \frac{1}{8\gamma^2} \implies \theta_{\max} \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad \beta \approx 1. \quad (11.101)$$

Für ultrarelativistische Teilchen mit $\gamma \gg 1$ ist die Strahlung in einem engen Kegel in die Vorwärtsrichtung gebündelt. Die gesamte Abstrahlung erhält man leicht aus (11.97),

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \quad (\text{lineare Beschleunigung.}) \quad (11.102)$$

Ohne Beweis zitieren wir das entsprechende Resultat für eine *Kreisbewegung* mit dem Radius R und Kreisfrequenz ω :

$$P = \frac{2q^2}{3c} \omega^2 \beta^2 \gamma^4 \quad (\text{Kreisbeschleunigung.}) \quad (11.103)$$

Diese Formel wurden erstmalig von LIENARD im Jahre 1898 hergeleitet. Der relativistische Faktor γ^4 führt zu großen Strahlungsverlusten in Synchrotrons für hochenergetische Elektronen.

Index

- Äquipotentialfläche, 16
- Äquivalenzprinzip der SRT, 159
- Überlagerung von Wellen, 138
- elektrische Suszeptibilität, 77
- Absorptionsindex, 145
- Abstrahlung
 - von bewegten Ladungen, 196
- Ampere, 11
- Ampere-Gesetz, 97
- Besselsche Differentialgleichung, 146
- Besselwelle, 135
 - fundamentale, 135
- Bilanzgleichungen für Energie und Impuls, 170
- Biot-Savart-Gesetz, 89
- Brechungsindex, 85
- Bremsstrahlung, 197
- Coulomb, 11
- Coulombbeziehung, 96, 123
- Coulombkraft, 9
- Coulombsche Gesetz, 9
- d'Alembert Operator, 124
- Deformationspolarisation, 76
- Diamagnete, 109
- Dielektrika, 76
- Dipolfeld, 47
- Dipolmoment, 47
 - einer Stromschleife, 103
 - eines Punktteilchens, 103
- Dipolstrahlung
 - elektrische, 183, 185
 - magnetische, 184, 185
- Dipsersion
 - in Isolatoren, 151
- Dirichletproblem, 40
- Divergenz, 51
- Drehmoment
 - einer Ladungsverteilung, 50
- Drude-Modell, 154
- ebene Wellen, 127
- Eichtransformation, 123
- Eindringtiefe, 145, 149
- Einsteinsche Summenkonvention, 159
- elektrische Erregung, 76
- elektrische Fluss, 120
- elektrische Ladung, 121
- elektrische Multipole, 46
- elektrische Spannung, 120
- elektrische Strom, 121
- elektrischer Dipol, 47
- elektrischer Kraftfluss, 18
- elektrisches Feld, 13
- elektromagnetisches Potential, 122
- Elektronenradius
 - klassischer, 27
- Elektrostatik, 8
- elliptische Polarisation, 133
- Energie
 - des elektrischen Feldes, 24
- Energie-Impuls-Tensor

- des Feldes, 171
- Energie-Impuls-Vektor
 - des Feldes, 170
- Entelektrisierung, 81
- Entmagnetisierungsfaktor, 112
- Ereignis, 158
- Erregungslinien, 81
- Fernzone, 180
- Ferroelektrikum, 77
- Ferromagnete, 110
- Flächenelement, 51
- Flächenladungsdichte, 29
- Flussgesetz
 - von Gaus, 121
 - von Oersted, 121
- Formel von Clausius-Mosotti, 83
- Fourierintegrale, 139
- Fourierreihen, 139
- Funktionensysteme, 67
- Gaussches System, 12
- geladener Ring, 64
- Gleichstromwiderstand, 147
- Gradient, 51
- Greenfunktion
 - der Wellengleichung, 174
 - für Laplace-Operator, 21
- Greensche Funktion, 39
 - avancierte, 178
 - retardierte, 178
- Greensche Identität, 40
- grenzfektrische Verschiebung, 70, 76
- Grenzfläche
 - zwischen Dielektrika, 78
- Helmholtzfunktion, 62
- Helmholtzgleichung, 144
- Hertzscher Dipol, 195
- Hilbertraum, 68
- idealer Leiter, 28
- Induktionsgesetz, 113, 121
- Induktivitätskoeffizienten, 99
- Influenz
 - elektrische, 34
- inhomogene Wellengleichung, 174
- inneres Produkt, 67
- Isolator, 70
- Joule, 12
- Joulesche Wärme, 170
- Kapazitätskoeffizienten, 42
- Kapazität, 42, 43
- kapmultipole, 46
- Kirchhoffsche Knotenregel, 89
- Kontinuitätsgleichung, 89
 - in 4-er Schreibweise, 163
- kovariante Gleichung, 163
- Kraft
 - auf magnetischen Dipol, 104
- Kramers-Kronig Relation, 155
- Kramers-Kronig Relationen, 157
- Kreisfrequenz, 130
- Kugelfunktionen, 52, 58, 62
- Kugelsensator, 43
- Kugelkoordinaten, 50
- Kugelwelle, 134
- Ladung, 47
- Ladungserhaltung, 10
- Laplace-Operator, 50
- Larmorformel, 197
- Legendre Polynome, 52
- Legendre-Polynome, 55
- Legendresche Differentialgleichung, 54
- Leidener Flasche, 2
- Leitfähigkeit, 143
 - statische, 148
- Leitungselektronen, 28

- Lenzsche Regel, 117
- Lienard-Wiechert-Potentiale, 188
- lineare Medien, 77
- lineare Polarisierung, 132
- Lorentzkraft, 119
- Lorenzzeichnung, 124, 127

- magnetische Dipolmoment, 102
- magnetische Feldstärke, 109
- magnetische Fluss, 120
- magnetische Induktion, 90
- magnetische Spannung, 120
- magnetische Suszeptibilität, 109
- magnetischer Fluss, 96
- magnetischer Schwund, 115
- magnetisches Feld, 89, 90
- Magnetisierung, 107, 108
- makroskopische Ladungsdichte, 74
- makroskopische Polarisierung, 74
- Masssysteme, 9
- Maxwell-Beziehung, 127
- Maxwellgleichungen
 - im Medium, 119
 - im Vakuum, 124
- Maxwellsche Beziehung, 144
- Maxwellscher Spannungstensor, 172
- Metrik, 159
- mikroskopische Ladungsdichte, 70
- mikroskopisches Feld, 70
- Minkowskiraum, 158
- MKSA-System, 12
- monochromatische Wellen, 130
- Multipol
 - elektrisches, 46
 - im äußeren Feld, 49
- Multipolentwicklung, 66
 - in Wellenzone, 182
- Multipolmoment, 66

- Neumannproblem, 41
- Norm, 67

- Oerstedtsches Gesetz, 117
- Ohmscher Leiter, 143
- Operator
 - adjungierter, 69
- Orientierungspolarisierung, 77
- Oszillatorstärke, 153

- Paraelektrikum, 76
- Paramagnete, 110
- Parsevalgleichung, 141
- Phasengeschwindigkeit, 130
- Plasmafrequenz, 146, 148
- Plattenkondensator, 45
- Poincaré Transformationen, 158
- Poincaré-Gruppe, 161
- Poisson-Gleichung, 21
- Polarisierung, 70
- Polarisationsladungen, 106
- Polarisationsladungsdichte, 74
- Polarisierbarkeit, 151
- Potentiale, 122
- Potentialproblem, 31
- Poyntingvektor, 171

- Quadrupolfeld, 48
- Quadrupolmoment, 47
- Quadrupolstrahlung
 - elektrische, 184

- Rückwärtslichtkegel, 162
- Randbedingung
 - für Metalle, 30
- Randwertproblem, 28, 31
- relative Dielektrizitätskonstante, 77
- relative Permeabilität, 109
- Relaxationszeit, 147
- Ringspannung, 16

- Rückwärtslichtkegel, 178
- Schwingungsebene, 132
- Selbstenergie, 26
- Selbstinduktion, 99
- SI-System, 12
- Skalarprodukt, 67
- Skineffekt, 145, 146
- Spannung, 14
- Spiegelladung, 32
- Spin, 104
- Strahlungsfeld
 - in Fernzone, 180
- Strom
 - elektrische, 87
- Stromdichte, 87
- Stromerhaltung, 89
- Superpositionsprinzip, 10, 128
- Synchrotronstrahlung, 198
- TE-Wellen, 137
- TM-Wellen, 137
- Verknüpfungsgleichungen, 119
- Verschiebungsstromgesetz, 121
- Versuch
 - von Elihu und Thomson, 116
- Vierernotation, 162
- Viererstrom, 163
- vollständiges Funktionensystem, 60
- Vollständigkeitsrelation, 57
- Volumenelement, 51
- Vorwärtslichtkegel, 162
- Vorwärtslichtkegel, 178
- Watt, 12
- Wellenausbreitung, 126
- Wellengleichung
 - für \mathbf{E} und \mathbf{B} , 126
 - für Potentiale, 122
- Wellenlänge, 131
- Wellenoperator, 124, 164
- Wellenzahlvektor, 130
- Wellenzone, 180
- Wirbelstrombremse, 117
- zirkulare Polarisierung, 132