

$$\Rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } U = j_r \vec{e}_r \quad j_r = \sigma \frac{U_1 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$j = \int \vec{j} d\vec{f} \quad \text{Integrieren über beliebige Halbkugeloberfläche } r=R_0 \quad (R_1 \leq R_0 \leq R_2)$$

$$= \int_{r=R_0} j_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 2\pi \sigma \frac{R_1 R_2 U_1}{R_2 - R_1}$$

$$\Rightarrow \underline{R} = \frac{U}{j} = \frac{U_1 - U_2}{j} = \frac{U_1}{j} = \frac{R_2 - R_1}{2\pi \sigma R_1 R_2}$$

3.3 Das Magnetfeld stationärer Ströme

3.3.1 Aufgabenstellung

- Stromverteilung (stationär) vorgegeben (in Leitern oder auch stationäre Bewegung geladener Körper, z.B. rotierende geladene Kugel)
[konvektive Stromdichte: $\vec{j} = \rho \vec{v}$]

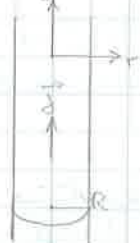
$$\text{Gln.: } \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \iff \oint \vec{H} d\vec{r} = \int \vec{j} d\vec{f}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \iff \oint \vec{B} d\vec{f} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{meist } \mu = \text{const.} \approx \mu_0) \quad [\text{Law allg. } \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}]$$

Bei hoher Symmetrie führt die integrale Form $\oint \vec{H} d\vec{r} = \int \vec{j} d\vec{f}$ direkt zum Ziel.

Beispiel: gerader zylindrischer Leiter (unendl. lang), $\mu = \mu_0 = \text{const.}$



Zylinderkoordin. r, φ, z

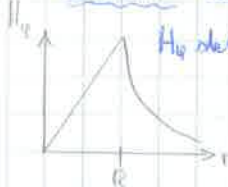
$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix} = \text{const. (innen)}$$

Ansatz: $\vec{H} = (0, H_\varphi(r), 0)$; Gesamtstrom: $j = \int \vec{j} d\vec{f} = j \pi R^2$

\Rightarrow Außen: $\oint \vec{H} d\vec{r} = \int \vec{j} d\vec{f} = j$ wählen Kreis von Radius r ($r > R$) in Ebene $z = \text{const.}$, Mittelpkt. $r = 0$.

$$\Rightarrow 2\pi r H_\varphi = j \Rightarrow H_\varphi = j \frac{R^2}{2r}$$

Innen: $2\pi r H_\varphi = \pi r^2 j \Rightarrow H_\varphi = j \frac{r}{2}$



Da die Lösung auch $\text{div } \vec{B} = 0$ sowie $\vec{H} \rightarrow \vec{B}$ für $r \rightarrow \infty$ erfüllt, war unser Ansatz richtig!

3.3.2 Das Vektorpotential

zur Erinnerung Elektrostatik $\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \iff \vec{E} = -\text{grad } U$

(beruht auf Identität $\text{rot grad } f = \vec{0}$ für bel. skalare Funktion f)

gibt $\text{div } \vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ (beruht auf Identität $\text{div rot } \vec{F} = 0$ für bel. Vektorfeld \vec{F})

• $\text{div } \vec{B} = 0$ ist Integrabilitätsbed. der Gl. $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ als Bestimmungsgl. für \vec{A} (System part. DGLN)

Eindeutigkeit des Vektorpotentials?

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \vec{A}' \rightarrow \text{rot } (\vec{A}' - \vec{A}) = \vec{0} \leftrightarrow \vec{A}' - \vec{A} = \text{grad } \varphi$$

Das Vektorpotential ist nur bis auf einen Gradienten eines bel. Fkt. φ bestimmt

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi \quad \text{"Eichtransformation"}$$

• \vec{B} wird durch Eichtransformation nicht geändert.

Einsetzen in $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ mit $\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \text{rot } (\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}) = \vec{j}$

Dgl. 2. Ordnung zur Bestimmung von \vec{A}

oft: $\mu = \text{const} (\approx \mu_0)$, setzen $\mu = \mu_0 \Rightarrow \text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$

In kart. Koord. gilt: $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$
mit $(\Delta \vec{A})_x = \Delta A_x$ usw. $\Rightarrow \Delta \vec{A} - \text{grad div } \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

Ausnutzung der Eichfreiheit: Sei $\text{div } \vec{A} = 0$
 $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \varphi \Rightarrow \text{div } \vec{A}' = 0 + \Delta \varphi$

Indem wir die Poissongl. $\Delta \varphi = -f$ lösen, finden wir ein \vec{A}' mit $\text{div } \vec{A}' = 0$

Wir können also als Nebenbed. die Eichung $\text{div } \vec{A} = 0$ nutzen
 $\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$ (3 Poissonglm. für A_x, A_y, A_z)

Lösung: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ (Vor. Ströme im Endlichen)
vgl. quellennähege Darst. von \vec{U} in der Elektrostatik ("Poisson-Integral")

Bem. • Multipolentwicklung ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$)

Führender Term $\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$ mit $\vec{m} = \frac{\mu_0}{2} \int (\vec{r}' \times \vec{j}) d^3r'$
"magnetisches Moment der Stromverteilung"

Noch zu prüfen $\text{div } \vec{A} = 0$?

• Für konstante Stromdichte ($\vec{j} = j \vec{v}$)
mit konstanter spezifischer Ladung $\frac{q}{m_0}$, d.h. $j = \frac{q}{m_0} S_m$ (S_m : Massendichte)
 $\Rightarrow \vec{m} = \frac{\mu_0 q}{2m_0} \int (\vec{r}' \times S_m \vec{v}) d^3r' \Rightarrow \vec{m} = \frac{\mu_0 q}{2m_0} \vec{P}$ (\vec{P} : Drehimpuls)

12.12.14

div $\vec{A} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int (\text{div}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}) d^3r' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\text{div}' \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \\ &= 0 \quad (\text{Gaußscher Satz...}) \quad = 0 \quad (\text{wegen } \text{div}' \vec{j} = 0) \end{aligned}$$

Bem.: In diesem Kapitel haben wir eine Realisierung der physik. Analogie:

el.	magn.
\vec{E}	\vec{B}
\vec{D}	\vec{H}
ρ	\vec{j}
ϵ	$\frac{1}{\mu}$
und U	\vec{A}

später: Zusammenfassung von \vec{j}, \vec{j} sowie U, \vec{A} zu Vierervektoren!
 $\vec{E}, \vec{B} \rightarrow \text{Feldstärketensor}$

3.3.3 Beispiele (in allen Bsp.: $\text{div } \vec{A} = 0$)

Beispiel 1) Vektorpotential eines homogenen Feldes $\vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const}$
 $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{r}$

2) Vektorpotential eines magnetischen Dipols (math.)
 $\vec{H} = -\text{grad } \psi, \psi = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi\mu_0 r^3}, \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (vgl. $\vec{E} = -\text{grad } U, U = \frac{q \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$)
 $\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$

3) Vektorpotential eines geraden Leiters $\vec{j} = (0, 0, j) = \text{const.}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

nicht anwendbar, da Strom bis ins Unendliche geht

Aber: $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$; $A_z = A_z(r)$ wegen Symmetrie [div $\vec{A} = 0$]

Verwenden Zylinderkoordin. (r, φ, z) : $\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$
 $\text{rot } \vec{A} = (0, -\frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr}, 0)$; $\text{rot rot } \vec{A} = (0, 0, -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr})$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr} = -\mu_0 j$$

$$\text{Innen: } \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr} = -\mu_0 j r \Rightarrow r \frac{dA_z}{dr} = -\frac{1}{2} \mu_0 j r^2 + C$$

$$\Rightarrow \frac{dA_z}{dr} = -\frac{1}{2} \mu_0 j r + \frac{C}{r} \Rightarrow A_z = -\frac{1}{4} \mu_0 j r^2 + C \ln r + D$$

$$\text{Regulärkeit bei } r=0 \rightarrow C=0 \Rightarrow A_z = -\frac{1}{4} \mu_0 j r^2 + D$$

Außen: $j=0 \Rightarrow A_z = C' \ln r + D'$, H_z stetig $\rightarrow C' = -\frac{1}{2} j R^2 \mu_0$
 (L: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, \vec{j} endlich)

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{\mu_0} \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j r & \text{innen} \\ -\frac{C'}{r} & \text{außen} \end{cases}$$

Ergebnis für \vec{H} stimmt mit dem in Kap. 3.3.1 überein!

$$\text{a.B. d.A. } A_z = 0 \text{ für } r=R \rightarrow D = \frac{1}{4} \mu_0 j R^2, D' = \frac{1}{2} j R^2 \mu_0 \ln R$$

$$\Rightarrow A_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{4} j (r^2 - R^2) & \text{innen} \\ \frac{\mu_0}{2} j R^2 \ln \frac{R}{r} & \text{außen} \end{cases} \quad \vec{A} = A_z \vec{e}_z$$

$\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ $\xrightarrow{\text{Bündel}}$ Stetigkeit von A_z ($\rightarrow B_n$ stetig)
 [div $\vec{A} = 0 \rightarrow A_n$ stetig]

4) rotierende geladene Kugel (\rightarrow Ü. A.20)

3.3.4 Das Biot-Savart'sche Gesetz

zunächst: Berechnung von \vec{H} aus \vec{j} : $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \text{rot } \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\text{rot}(f \vec{A}) = f \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } f$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \text{grad } \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

jetzt: Strom durch einen dünnen Draht (geschlossen) [Durchmesser des Leiters sei blinngg. Einfl. d. Aufpleb. vom Leiter]



$$\vec{j}(\vec{r}') d^3r' \rightarrow j ds$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \quad (\text{Biot-Savart'sches Gesetz})$$

Bem. 1) Falls mehrere Leiter: $\vec{H}(\vec{r}) = \sum_k \frac{I_k}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}_k \times (\vec{r} - \vec{s}_k)}{|\vec{r} - \vec{s}_k|^3}$

2) Die Formel (*) ist nicht an die Bedingung $\mu = \mu_0$ (im Leiter) geknüpft. Da der Leiterdurchmesser vernachlässigt wird, sind die magnetischen Eigenschaften der Leiterbahn (für das Außenfeld!) unwesentlich (Leiter kann sogar ferromagnetisch sein). Falls im Außenraum ein Medium mit $\mu = \text{const} \neq \mu_0$ vorliegt, bleibt (*) auch gültig, aber $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Beispiel: Kreisstrom



Feld im Mittelpunkt ($\vec{r} = \vec{0}$):

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (-\vec{s})}{R^3} = \frac{I}{4\pi R^2} \vec{e}_z \oint ds$$

$$= \frac{I}{4\pi R^2} 2\pi R^2 \vec{e}_z \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2R} \vec{e}_z$$

3.3.5 Magnetisches Moment eines Ringstroms

17.12.14

$$\vec{m} = \frac{\mu_0}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) d^3\vec{r}, \quad \vec{j} d^3\vec{r} \rightarrow I d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{\mu_0 I}{2} \oint \vec{s} \times d\vec{s} = \mu_0 I \oint d\vec{f}$$



$\frac{1}{2} |\vec{s} \times d\vec{s}|$: Fläche des schraffierten Dreiecks
Richtung von $\vec{s} \times d\vec{s}$: Normalenvektor

Bem. $\oint d\vec{f} = \text{const.}$ V von einer geschlossenen Kurve berandeten Flächen.

[Folgt aus Gaußschem Integralsatz: $\vec{c} = \text{const}$
 $\oint \vec{c} d\vec{f} = \int \text{div } \vec{c} d^3\vec{r} = 0$; z.B. $\vec{c} = \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$]

Für ebenen Ringstrom gilt somit: $\vec{m} = \mu_0 I F \vec{n}$

F : von Ringstrom eingeschlossene Fläche der Ebene
 \vec{n} : Normaleinheitsvektor (Rechtsschraubenregel)

$$\text{Kreisstrom: } \vec{m} = \mu_0 I \pi R^2 \vec{n}$$

\Rightarrow Realisierung eines magnetischen Dipols durch kleinen Kreisstrom
math. Dipol: $I \rightarrow \infty, R \rightarrow 0$ ($IR^2 = \text{const.}$)

Bem. \rightarrow mikroskopische Erklärung für Ferromagnetismus (Amperé, Heisenberg)
 \rightarrow Quantenmechanik (Spin)

3.3.6 Vektorpotential eines beliebigen Magnetfeldes (im stationären Fall)

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \text{rot } \vec{A}; \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}; \quad \text{div } \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow -\text{rot rot } \vec{A} = \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} - \text{rot } \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \vec{M}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (*)$$

Bem. $\text{div } \vec{A} = 0$ erfüllt! (vgl. Kap. 3.3.2)

$$\frac{\text{rot}' \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \text{rot}' \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] + \vec{M}(\vec{r}') \times \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$(\text{rot}(f\vec{a}) = f \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \text{grad} f)$$

• Das Integral über die Rotation verschwindet:

$$\vec{e}_x \cdot \text{rot}' \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] = \text{div}' \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{e}_x}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] \quad \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$$

Gaußscher Satz: \vec{M} verschwindet auf unendlich ferner Oberfläche.
 \vec{e}_y, \vec{e}_z analog!

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r' \quad \text{vgl. Dipol } \vec{A} = \frac{\vec{m} \times (\vec{r}-\vec{r}_0)}{4\pi |\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

- geeignete Formel, falls stationäre Ströme und Permanentmagnete geg. sind
 \vec{M} : magnet. Dipolmomentdichte

[vgl. Formel für $U(\vec{r})$ in Kap. 1.3.1; physik. Analogie:

$$U \leftrightarrow \vec{A}, \rho \leftrightarrow \vec{J}; \epsilon \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}, \vec{P} \leftrightarrow -\frac{1}{\mu_0} \vec{M}]$$

Bem.: Formel (*) zeigt auch: Eine Magnetisierung \vec{M} erzeugt dasselbe \vec{B} -Feld wie eine „äquivalente“ Stromverteilung $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{M}$ in einem Medium mit $\mu = \mu_0$.
 Man beachte: \vec{H} unterschiedlich ($\frac{\vec{B}-\vec{M}}{\mu_0}$ bzw. $\frac{\vec{B}}{\mu}$)

Beispiel: Feld einer Spule aus Feld des permanenten Stabmagneten

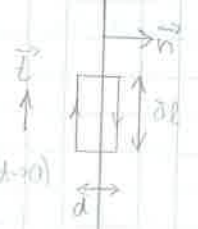


$$\vec{M} = M \vec{e}_z = \text{const.}$$

$\text{rot} \vec{M} = \vec{0}$ innen und außen, aber \vec{M} springt auf Oberfläche!

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{M} \rightarrow \text{Oberflächenstrom}$$

$$\vec{M} \neq 0 \quad \vec{M} = 0$$



$$\text{Stokes'scher Satz: } \oint \vec{J} d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{M} d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \delta I = \frac{1}{\mu_0} M_t \delta l$$

↑
 Strom durch die kleine Fläche
 $\delta f = \delta l \cdot \delta$ (im Grenzfalle:
 Linie δl)

$$\Rightarrow \frac{\delta I}{\delta l} = \frac{1}{\mu_0} M_t$$

$$\text{[altg. } \vec{J}_F = \frac{1}{\mu_0} \vec{M} \times \vec{n} \quad [\frac{A}{m}] \quad \text{[vgl. später!]}]$$

hier also: Oberflächenstrom in φ -Richtung

Realisierbar durch Spule mit sehr dünnem Draht mit sehr kleiner Ganghöhe



$$\frac{\delta I}{\delta l} = \frac{N}{l} I_0 \quad N \text{ Zahl der Windungen auf Abschnitt der Länge } l$$

$\Rightarrow \vec{B}$ -Feld einer solchen Spule gleich \vec{B} -Feld eines Stabmagneten gleicher Länge + gleicher Radius mit $M = \mu_0 \frac{NI}{l}$

Bem.: Spule: $\text{rot } \vec{H} = 0$ überall ($\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$)
 Stabmagnet: $\text{rot } \vec{H} = 0$ überall ($\vec{B} = 0$)

"Ursachen" von \vec{H} : Spule: Oberflächenstrom auf Mantelfläche (flächhaft verteilt)
 Stabmagnet: Oberflächenpolarisationsladungen auf Stirnflächen (flächenhafte Quellen)

Lange Stabmagnet $\vec{H}_{\text{innen}} \approx 0 \rightarrow \vec{B}_{\text{innen}} \approx \vec{\mu}$; $\vec{B}_{\text{außen}} \approx 0$ (nicht in Nähe der Enden)
 \rightarrow Für lange Spule gilt näherungsweise: innen $\vec{B} = \mu_0 \frac{N I_0}{l} \vec{e}_z = \text{const.}$,
 außen $\vec{B} = 0$
 $\Rightarrow \vec{H}_{\text{innen}} = \frac{N I_0}{l} \vec{e}_z$; $\vec{H}_{\text{außen}} = 0$ (nicht in der Nähe der Spulenden)

Bem.: Für Medium mit $\mu = \text{const} \neq \mu_0$ folgt für die Spule
 $\vec{B}_{\text{innen}} = \mu \frac{N I_0}{l} \vec{e}_z$ (vgl. Bem. 2) in Kap. 3.3.4.1)

3.4 Energie und Kräfte

a) Energie

Für $\vec{B} = \mu(\vec{r}) \vec{H}$ gilt $W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} d^3\vec{r}$ (vgl. Kap. 1.3.4; Bew. später!)
 ("Feldenergie")

Umformungen: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} d^3\vec{r}$$

$\int \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) d^3\vec{r} = 0$ (üblicher Schluss mit Gaußschem Satz, vgl. Stromverteilung im Endlichen!)

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} d^3\vec{r} \quad (\text{Analogon: } W = \frac{1}{2} \int U q d^3\vec{r})$$

("Energie der Stromverteilung im eigenen Feld")

weitere Umformung für $\mu = \mu_0$ (Bew. $\mu = \text{const.}$):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow W = \frac{\mu_0}{8\pi} \iint \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}'$$

"wechselseitige Energie der Ströme"

Bem.

Für ein System von Ringströmen \vec{j}_i (nicht notwendigerweise dünner Leiter) folgt: $\vec{j} = \sum_i \vec{j}_i$; \vec{j}_i : Stromdichteverteilung im i-ten Ringleiter

$$W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} \iint \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}'$$

$$\Rightarrow W = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,k} J_i J_k \iint \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k$$

$$\text{mit } L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \quad \text{"Induktionskoeffizienten"}$$

$L_{ik} = L_{ki}$ (auch: "Induktivitätskoeff.")

L_{ik} abh. von Geometrie der Stromkreise und Verteilung der Stromdichte über Leiterquerschnitt (folgt aus Leitergeometrie und $\vec{j}(\vec{r})$, vgl. Kap. 3.2)

$$i=k: L_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}_i(\vec{r}) \cdot \vec{j}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \quad \text{"Selbstinduktionskoeffizient"}$$

nicht summieren
auch: "Induktivität des i-ten Stromkreises"

Für dünne Leiter und $i \neq k$ folgt $L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{s}_i - \vec{s}_k|}$ (abh. nur von Form + gegenseitige Lage d. Leiter)
 $(\vec{s}_i, d\vec{s}_i \leftrightarrow \vec{s}_k, d\vec{s}_k)$



(Für $i=k$ ist die Vor. $|\vec{r}| \gg \text{Leiterdurchmesser}$ nicht erfüllbar!)

Bem. Magnetischer Fluss durch eine Fläche

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{F} = \int \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Randkurve})$$

Magn. Fluss durch die k -te Leiterschleife aufgrund des von der i -ten Leiterschleife erzeugten Feldes \vec{B}_i ($i \neq k$):

$$\begin{aligned} \Phi_k^{(i)} &= \int \vec{B}_i \cdot d\vec{F}_k = \oint \vec{A}_i \cdot d\vec{s}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{s}_i - \vec{s}_k|} \cdot I_i \\ &= L_{ik} \cdot I_i \quad (\text{nicht summieren!}) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{j}(\vec{r}') d\vec{s}' &\rightarrow I d\vec{s}' \\ \vec{A}_i &= \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}_i}{|\vec{r} - \vec{s}_i|} \end{aligned} \right.$$

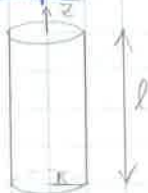
(andere Möglichkeit der Def. von L_{ik} für dünne Leiter)

Bem. 1) Man nennt L_{ik} für $i \neq k$ auch „Gegeneindukthet“

2) Die Formel $\Phi_k^{(i)} = L_{ik} \cdot I_i$ gilt (näherungsweise) auch für $i=k$.

$$\Rightarrow \Phi_k = \sum_i L_{ik} I_i; \quad W = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k I_k$$

Beispiel: Energie einer langen Spule (Länge l , Radius R , Windungszahl n)



$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} d\vec{r} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Bei Vernachlässigung von Randeffekten gilt näherungsweise innen: $\vec{H} = \frac{n I}{l} \vec{e}_z$, außen: $\vec{H} = 0$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{n^2 I^2}{l^2} \mu_0 \pi R^2 l \Rightarrow W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{mit } L = \mu_0 \frac{n^2 \pi R^2}{l}$$

(für $\mu = \text{const.} \neq \mu_0 \Rightarrow L = \mu \frac{n^2 \pi R^2}{l}$) „Induktivität der Spule“

b) Kräfte

Zugang über Energie hier nicht so einfach (vgl. später!)
 einfacher Ausgangspunkt: Kraft auf bewegte Ladung in Magnetfeld

$$\vec{K} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Komplette Stromdichte: $\vec{j} = q \vec{v} \Rightarrow$ Kraft auf Volumenelement ($dq = \rho d\vec{s}$)
 $d\vec{K} = (\vec{j} \times \vec{B}) d\vec{s}$

$$\Rightarrow \text{Kraftdichte: } \vec{k} = \vec{j} \times \vec{B}$$

• gilt auch für Kraftdichte in einem Leiter ($\mu = \text{const.}$)

$$\text{Bem.: } k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}; \quad T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} H_k B_k \quad (\text{UA 22})$$

07.01.15

Kraft auf dünnen Leiter im äußeren Feld:

$$d\vec{K} = (\vec{j} \times \vec{B}) d\vec{s} = I d\vec{s} \times \vec{B} \quad |\vec{j} d\vec{s}| \rightarrow I d\vec{s}$$

\Rightarrow Gesamtkraft auf (starr) Ringleiter:

$$\vec{K} = I \oint d\vec{s} \times \vec{B}$$

\hookrightarrow bel. geschlossene Kurve

Drehmoment: $\vec{M}_D = I \oint \vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B})$ $\vec{m} = \mu_0 I \oint d\vec{s}$, vgl. Kap. 3.3.5

Im homogenen Feld ($\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \text{const.}$) folgt: $\vec{K} = \vec{0}$, $\vec{M}_D = \vec{m} \times \vec{H}$

• Erklärung: $\oint d\vec{s} = \vec{0}$ [$\oint \vec{e}_x d\vec{s} = \oint \vec{e}_x \cdot d\vec{s} = \oint \text{rot } \vec{e}_x \cdot d\vec{r} = 0$]

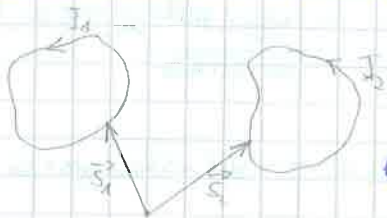
Für $\vec{B} = \text{const.}$ gilt: $\vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} (\vec{s} \times d\vec{s}) \times \vec{B} + \frac{1}{2} d[\vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{B})]$
 $(= \frac{1}{2} (\vec{s} \times d\vec{s}) \times \vec{B} + \frac{1}{2} d\vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{B}) + \frac{1}{2} \vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}))$

$$\vec{s} \times (d\vec{s} \times \vec{B}) + d\vec{s} \times (\vec{B} \times \vec{s}) + \vec{B} \times (\vec{s} \times d\vec{s}) = \vec{0}$$

(Vekt. Id.: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$)

$$\Rightarrow \vec{M}_D = I \cdot \frac{1}{2} \oint (\vec{s} \times d\vec{s}) \times \vec{B}$$

Kraft zwischen zwei Leiterschleifen:



\vec{K}_{12} : Kraft auf Schleife 1, ausgeübt von Schleife 2

Vorbemerkungen:

1) Das von I_1 erzeugte Feld übt keine Gesamtkraft auf die Schleife 1 aus (folgt aus $k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$)

2) $\vec{K}_{12} = -\vec{K}_{21}$ (actio = reactio)

(folgt aus $k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$)

$$\vec{K}_{12} = I_1 \oint d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2; \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}_2 \times (\vec{r} - \vec{s}_2)}{|\vec{r} - \vec{s}_2|^3} \quad \text{mit } \vec{r} = \vec{s}_1$$

$$\Rightarrow \vec{K}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \frac{\vec{s}_1 - \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \quad \text{NR: } d\vec{s}_1 \times [d\vec{s}_2 \times (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)]$$

$$= -(d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) + d\vec{s}_1 [d\vec{s}_2 \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)]$$

$$d\vec{s}_1 \cdot \frac{\vec{s}_1 - \vec{s}_2}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|^3} = d_{s_1} \left(\frac{1}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|} \right)$$

\rightarrow fällt weg bei $\oint d\vec{s}_1$

Integral über $d\vec{s}_1$ ist $\oint d\vec{s}_1 = \vec{0}$
 vollst. diff. da $\oint d\vec{s}_1 = \vec{0}$
 rot $\vec{s}_1 = \vec{0}$

Bem: 1) actio = reactio offensichtlich

2) Die Wechselwirkungsenergie $W_{12} = L_{12} I_1 I_2$ ändert sich bei Bewegung von Leiterschleife 1 um $\delta \vec{s}$ um $\delta W = + \vec{K}_{12} \delta \vec{s}$

↑
 "magnet. Paradoxon", vgl. später! (Kap. 5.5.2)
 (Wkt.: I_1, I_2 konstant!)

Grenzfall: Zwei lange parallele Drähte



$$d\vec{K} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$$d\vec{K}_{12} = I_1 dz \vec{e}_z \times \vec{B}_2$$

Bem: Leiter 1 übt aus Symmetriegründen keine Kraft auf $d\vec{s}_1$ aus!

$$\vec{B}_2 = (0, -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}, 0) \quad (\text{für } x=0, y=0, \text{ also auf } z\text{-Achse})$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{K}_{12}}{dz} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \vec{e}_x$$

\Rightarrow Kraft auf einen Abschnitt l des Leiters 1: $\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l \vec{e}_x$
 anziehend für $I_1 I_2 > 0$
 abstoßend für $I_1 I_2 < 0$

4 Langsam veränderliche Felder

4.1 Grundgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= \rho & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \quad (\text{Näherung}) \\ \text{rot } \vec{E} &= -\vec{B} & \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{jetzt fehlt nur noch die Form } \vec{D}, \vec{j})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

(Also Materialgln. für ruhende Körper; für bew. Körper ($|\vec{v}| \ll c$) gilt z.B. $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, vgl. später)

bisher: $\vec{E} \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{B}$, jetzt auch: $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$

Voraussetzungen: Vernachlässigung von \vec{D} in $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{D}$

① im Leiter: \vec{D} gegenüber \vec{j} vernachlässigbar, falls $\sigma \gg \epsilon \omega$
 ω : charakt. Frequenz (\approx char. Zeitkila)
 $\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$

② Im Außenraum des leitenden Körpers gilt näherungsweise $\text{rot } \vec{H} = 0$, falls $\omega \ll \frac{c_{ph}}{l}$
 l : char. Dimension (Ausdehnung) des Körpers (char. Längskila)
 $c_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ Phasengeschw. des Lichts (für Entfernungen $\ll \frac{c_{ph}}{\omega}$)

Begründung: $\text{rot } \vec{E} = -\vec{B} \sim$ grobe Abschätzung: $\frac{E}{l} \approx \omega B \rightarrow E \approx \mu \omega l H$
 $\Rightarrow |\vec{D}| \approx \epsilon \omega E \approx \epsilon \mu \omega^2 l H$

$\Rightarrow \vec{D}$ vernachlässigbar im Gl. z. $\frac{H}{l}$, falls $\epsilon \mu \omega^2 l^2 \ll 1$,
 also $\omega \ll \frac{c_{ph}}{l}$ (Vakuum $c_{ph} = c$, vgl. später)

(rot \vec{H} wird aus Termen dieser Größenordnung gebildet,
 z.B. $\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}$)

Folgerung Die Ergebnisse von Kap. 3.3 und 3.4 bleiben näherungsweise bestehen (Größen werden zeitabhängig). z.B.:
 Biot-Savart'sches Gesetz: $\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{I(t)}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}$

Bem: Vernachlässigung elektromagn. Wellen! (Vernachlässigung von Effekten, die mit der endlichen Ausbreitungsgeschw. elektromagn. Strömungen zusammenhängen)

03.01.15

4.2 Das Induktionsgesetz

(raumfeste Fläche)
 integrale Formulierung von $\text{rot } \vec{E} = -\vec{B}$: $\oint \vec{E} d\vec{r} = -\int \vec{B} d\vec{F} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{F}$
 $\Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \Phi, \quad \Phi = \int \vec{B} d\vec{F}$
 magn. Fluss

nennen $\oint \vec{E} d\vec{r}$ (Integration über raumfeste Kurve) induzierte Spannung (auch „Umlangsspannung“)
 \vec{E} ist nicht mehr wirbelfrei!

U_{ind} = $\oint \vec{E} d\vec{r}$, d.h. U_{ind} = $-\frac{d}{dt} \Phi$



Anwendung auf Leiterschleife (ruhend) \rightarrow es fließt ein Strom (Induktionsstrom) $\vec{j} = \sigma \vec{E} \rightarrow U_{\text{ind}} = \oint \frac{1}{\sigma} d\vec{r} = R \mathcal{I}$
 • Effekt so, als ob eine Spannungsquelle (EMK) im Stromkreis vorhanden wäre! Man nennt die induzierte Spannung deshalb auch: induzierte EMK (elektro-motorische Kraft)

dünner Draht: in guter Näherung zeigt \vec{j} (wie \vec{E}) in Richtung der Drahtachse und ist konstant über dem Drahtquerschnitt (Fläche F) $\rightarrow \vec{j} d\vec{r} = \vec{j} F d\vec{r} \frac{1}{F} = \vec{j} \vec{of} ds \cdot \frac{1}{F}$ ($|d\vec{r}| = ds$)
 $= \vec{j} \cdot \frac{ds}{F}$
 $\rightarrow \oint \frac{1}{\sigma} d\vec{r} = \mathcal{I} \oint \frac{ds}{\sigma F} = R \mathcal{I} \rightarrow R = \oint \frac{ds}{\sigma F}$


Jetzt: bewegte Leiterschleife:

- \vec{v} : Geschw. eines Leitelementes (der Leiter darf auch deformiert werden)
- Die Materialgl. $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (Ohmsches Gesetz) muss im „lokal mitbewegtem System“ formuliert werden: $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$
- Für $|\vec{v}| \ll c$ gilt: $\vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{v}$, $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ (vgl. später) $\vec{B}' = \vec{B} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{H}) = \epsilon \vec{E}'$
 $\Rightarrow \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \rho \vec{v}$
 $\xrightarrow{\text{vernachlässigen: } |\rho \vec{v}| \approx \frac{\rho}{L} v}$
 $\sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\sigma}{L} (\vec{B} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{H}))$
 $\rho \vec{v}$ vernögl. für $\frac{\sigma}{L} \gg \frac{\rho}{L} \approx \frac{1}{\text{char. Zeitkonst.}}$
 (bekannt voraus: vgl. $\sigma \gg \epsilon \omega$)

Somit definieren wir: $U_{\text{ind}} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r}$ (wieder gilt dann $U_{\text{ind}} = R \mathcal{I}$)

Plausibilitätsbetrachtung: 1) $\vec{K} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \vec{E} = \vec{K}$
 2) $\vec{j}' = \vec{0} \iff \vec{j} = \rho \vec{v}$

Frage: $U_{\text{ind}} = -\frac{d}{dt} \Phi$?

$$d\Phi = d \int \vec{B} d\vec{F} = \int d\vec{B} d\vec{F} + \int \vec{B} d\vec{F}$$


$$\Delta d\vec{F} = \vec{v} dt \times d\vec{r}$$

$$d\vec{B} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt$$

$$d\Phi = \Phi(t+dt) - \Phi(t)$$

$$= \Phi[\Gamma(t+dt), \vec{B}(t+dt)] - \Phi[\Gamma(t), \vec{B}(t)]$$

$$= \Phi[\Gamma(t), \vec{B}(t+dt)] - \Phi[\Gamma(t), \vec{B}(t)] + \underbrace{\Phi[\Gamma(t+dt), \vec{B}(t+dt)] - \Phi[\Gamma(t), \vec{B}(t+dt)]}_{\Phi[L, \text{Mantelfläche}]}$$

$$\left[\int \vec{B}(t+dt) d\vec{F} = \int \vec{B}(t) d\vec{F} + \mathcal{O}(dt^2) \right]$$

$$\leadsto \frac{d\Phi}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{F} + \oint \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{r}) \quad \left| \begin{array}{l} \vec{B} = -\text{rot } \vec{E} \\ \vec{B} (\vec{v} \times d\vec{r}) = d\vec{r} (\vec{B} \times \vec{v}) \end{array} \right.$$

$$\leadsto \frac{d\Phi}{dt} = - \oint \vec{E} d\vec{r} - \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r} \leadsto U_{\text{ind}} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Die Aussage, dass die induzierte Spannung in einer Leiterschleife gleich der negativen Zeitableitung des magn. Flusses ist, durch die von der Leiterschleife umrandete Fläche ist, gilt somit auch für bewegte Leiterschleifen!

(Induktionsgesetz von Faraday)