(vgl. konvektive Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$)
$\rightarrow$ Photonenvorstellung

(4) Polarisation

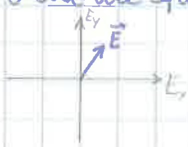
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \hat{\vec{E}}_0\, e^{i\phi} \qquad \phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t \quad \text{(Phase)}$$

mit $\vec{k}\,\hat{\vec{E}}_0 = 0$

Wahl des Koordinatensystems: $\vec{k} = (0,0,k) \rightsquigarrow \hat{\vec{E}}_0 = (Ae^{i\alpha}, Be^{i\beta}, 0)$ (4 reelle Parameter)

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}} \rightsquigarrow E_x = A\cos(\phi+\alpha),\ E_y = B\cos(\phi+\beta),\ E_z = 0$$

An einem festen Ort variiert ϕ linear in t. Welche Kurve beschreibt dabei die Spitze des $\vec{E}$-Vektors?



Es gilt: $\underline{\left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 - 2\,\frac{E_x}{A}\,\frac{E_y}{B}\cos(\beta-\alpha) = \sin^2(\beta-\alpha)}$ nachrechnen?

Gleichung einer Ellipse? ($\vec{E}^2$ endlich?)

„elliptische Polarisation"

Spezialfälle: Kreis: „zirkulare Polarisation"
Gerade: „lineare Polarisation"

Bem: Man kann den allgemeinen Fall zum Beispiel durch Linearkomb. zweier linear polarisierter Wellen ($\perp$ aufeinander) darstellen:

$$\hat{\vec{E}} = (\hat{\vec{E}}_{0(1)} + \hat{\vec{E}}_{0(2)})\, e^{i\phi} \quad \text{mit } \hat{\vec{E}}_{0(1)} = (Ae^{i\alpha}, 0, 0);\ \hat{\vec{E}}_{0(2)} = (0, Be^{i\beta}, 0)$$

(5) Allgemeines Wellenfeld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\gamma=1,2} \int \hat{\vec{E}}_{0(\gamma)}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-kct)}\, d^3\vec{k} \qquad (d^3\vec{k} = dk_x\, dk_y\, dk_z)$$

11.02.15

6. Viererschreibweise und Lorentzinvarianz der ED

6.1 Viererstromdichte und Viererpotential

$$j^\mu = (\vec{j}, \rho c) = (j_x, j_y, j_z, \rho c) \qquad \mu = 1,2,3,4 \qquad x^\mu = (\vec{r}, ct) = (x, y, z, ct)$$
$$A^\mu = \left(\vec{A}, \frac{U}{c}\right) = \left(A_x, A_y, A_z, \frac{U}{c}\right)$$

Kontinuitätsgl.: $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = j^\mu{}_{,\mu} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = {}_{,\mu}$

Lorenzeichung: $A^\mu{}_{,\mu} = 0$

Inhomogene Wellengl.: $\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$

Erläuterung:

- Vierervektoren transformieren sich bei Lorentztransformationen $[x'^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu;\ L^\alpha{}_\beta = \text{const},\ \eta_{\alpha\beta} L^\alpha{}_\gamma L^\beta{}_\delta = \eta_{\gamma\delta},\ \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}]$
  gemäß $a'^\nu = L^\nu{}_\mu a^\mu$, $\underline{a} = (\vec{a}, a^4) = (a^1, a^2, a^3, a^4) = a^\mu$, also wie der Ortsvektor $x^\mu = (x, y, z, ct)$.
- Skalarprodukt zweier Vierervektoren: $\underline{a} \cdot \underline{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - a^4 b^4 = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$
  Skalarprodukte sind bei Lorentztransformation invariant!
  z.B. $\underline{dx} = (dx, dy, dz, cdt) \qquad \underline{ds}^2 = \underline{dx} \cdot \underline{dx} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$
  abkürzende Schreibweise: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu$ mit $b_\mu = \eta_{\mu\nu} b^\nu$
  analog: $b^\mu = \eta^{\mu\nu} b_\nu \qquad \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ($\eta^{\mu\nu}$: inverse Matrix zu $\eta_{\mu\nu}$; $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} = \eta^\mu{}_\alpha = \delta^\mu{}_\alpha$)

  So werden Indizes „hoch- und runtergezogen". Ebenso für Tensoren:
  z.B. $a_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} a^{\alpha\nu}$, $a_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} a^{\alpha\beta}$ usw.

Bem.: Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ „erzeugt" einen unteren Index.
Bew: $\varphi_{,\mu} dx^\mu = d\varphi$ [φ: Skalar] invariant bei LT.

$\Rightarrow j_\mu = (\vec{j}, -\rho c),\ A_\mu = \left(\vec{A}, -\frac{U}{c}\right)$

6.2 Der Feldstärketensor

$\vec{E} = -\text{grad}\, U - \dot{\vec{A}},\ \vec{B} = \text{rot}\, \vec{A} \rightarrow$ Die 6 Komp. von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ entstehen durch Ableitungen von $\underline{A}$!

Idee: Tensor $A_{\nu,\mu}$: 16 Komponenten
symmetrischer Anteil: 10 Komponenten
antisym. Anteil: 6 Komponenten

$\Rightarrow F_{\mu\nu} := A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ Feldstärketensor (Feldtensor)
antisym. Tensor: ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & \frac{1}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{1}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{1}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{1}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$F_{a4} = A_{4,a} - A_{a,4} = -\frac{U_{,a}}{c} - \frac{1}{c}\dot{A}_a \qquad$ [also: $\vec{E} = -\text{grad}\, U - \dot{\vec{A}}$]
mit $a = 1, 2, 3$ (lat. Buchst. / griech. Buchst.)

$F_{12} = A_{2,1} - A_{1,2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$ usw. [also $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$]

6.3 Die Maxwellgleichungen

(a) $\operatorname{div}\vec{B}=0$, $\operatorname{rot}\vec{E}=-\dot{\vec{B}}$

$$F_{\alpha\beta,\gamma}+F_{\beta\gamma,\alpha}+F_{\gamma\alpha,\beta}=0 \quad \text{kurz: } F_{<\alpha\beta,\gamma>}=0$$

(folgt aus $F_{\alpha\beta}=A_{\beta,\alpha}-A_{\alpha,\beta}$?)

$$F_{12,3}+F_{23,1}+F_{31,2}=\frac{\partial B_z}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0 \quad (\Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{B}=0)$$

$$F_{12,4}+F_{24,1}+F_{41,2}=\frac{1}{c}\dot{B}_z+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=0 \text{ usw. } (\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{E}=-\dot{\vec{B}})$$

(b) $\operatorname{div}\vec{D}=\rho$, $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{j}+\dot{\vec{D}}$

Definieren:

$$H_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & H_z & -H_y & cD_x\\ -H_z & 0 & H_x & cD_y\\ H_y & -H_x & 0 & cD_z\\ -cD_x & -cD_y & -cD_z & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow H^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & H_z & -H_y & -cD_x\\ -H_z & 0 & H_x & -cD_y\\ H_y & -H_x & 0 & -cD_z\\ cD_x & cD_y & cD_z & 0\end{pmatrix}$$

$$H^{\mu\nu}{}_{,\nu}=j^\mu$$

$$\mu=4:\ \frac{\partial H^{41}}{\partial x}+\frac{\partial H^{42}}{\partial y}+\frac{\partial H^{43}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H^{44}}{\partial t}=j^4 \rightsquigarrow c\left(\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\right)=\rho c$$

also $\operatorname{div}\vec{D}=\rho$

$$\mu=3:\ \frac{\partial H^{31}}{\partial x}+\frac{\partial H^{32}}{\partial y}+\frac{\partial H^{33}}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H^{34}}{\partial t}=j^3 \rightsquigarrow \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial D_z}{\partial t}=j_z \text{ usw.}$$

also: $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{j}+\dot{\vec{D}}$

Bem: Im Vakuum gilt: $F_{\mu\nu}=\mu_0 H_{\mu\nu}$, also $F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=\mu_0 j^\mu$

Mit $A^\mu{}_{,\mu}=0$ folgt $\Box A^\mu=-\mu_0 j^\mu$

6.4 Transformationsverhalten

Lorentztransformation: $x'^\nu=L^\nu{}_\mu x^\mu$, Vierervektoren: $a'^\nu=L^\nu{}_\mu a^\mu$

Vierertensoren: $a'^{\mu\nu}=L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta a^{\alpha\beta}$ usw.

Die Maxwellgln. sind kovariant ! (forminvariant bei Lorentztransf.)

spezielle Lorentztransformation: System Σ' bewegt sich gegen System Σ mit Geschw. v in positive x-Richtung.

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y'=y,\ z'=z,\ ct'=\frac{ct-\frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Gamma=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$L^\nu{}_\mu=\begin{pmatrix}\frac{1}{\Gamma} & 0 & 0 & -\frac{v}{c\Gamma}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\frac{v}{c\Gamma} & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma}\end{pmatrix}$$

Viererstromdichte: $j^\mu=(j_x,j_y,j_z,\rho c)$

$$j_x'=\frac{j_x-\rho v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ j_y'=j_y,\ j_z'=j_z,\ c\rho'=\frac{c\rho-\frac{v}{c}j_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Wellenzahlvierervektor: $k^\mu=(k_x,k_y,k_z,\frac{\omega}{c})$ ebene monochr. Welle

$$k_1'=\frac{k_x-\frac{v\omega}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ k_2'=k_y,\ k_3'=k_z,\ \frac{\omega'}{c}=\frac{\frac{\omega}{c}-\frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

In diesen Formeln steckt der Doppler-Effekt und die Aberration !

Bem: 1) Die Phase $\phi=\vec{k}\vec{r}-\omega t$ ist Invariante ! $\phi=k_\mu x^\mu$

2) Im Vakuum gilt: $k^\mu k_\mu=0$ $(k^2=\frac{\omega^2}{c^2})$.

Feldstärketensor: $F'^{\mu\nu}=L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$

$$E_x'=E_x \quad E_y'=\frac{E_y-vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad E_z'=\frac{E_z+vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$B_x'=B_x \quad B_y'=\frac{B_y+\frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad B_z'=\frac{B_z-\frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

13.02.15

analog ergibt sich aus $H'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta H^{\alpha\beta}$:

$$D_x' = D_x, \quad D_y' = \frac{D_y - \frac{v}{c^2}H_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad D_z' = \frac{D_z + \frac{v}{c^2}H_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$H_x' = H_x, \quad H_y' = \frac{H_y + vD_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad H_z' = \frac{H_z - vD_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Bem.: E_x' bedeutet eigentlich E'_x, usw.

- Die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ transformieren sich nicht wie die räumlichen Komp. von Vierervektoren!!
- Die Aufteilung in el. und magn. Feld ist abhängig vom Bezugssystem!

6.5 Vierkraftdichte und Energie-Impuls-Tensor

(Ladungen und Ströme im Vakuum!)

$$f^\mu := F^{\mu\nu} j_\nu \; ; \quad f_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu \qquad j^\nu = (\vec{j}, \rho c) \; ; \; j_\nu = (\vec{j}, -\rho c)$$

$$\leadsto f^\mu = (\vec{k}, \tfrac{1}{c}\vec{j}\vec{E}) \qquad \vec{k} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}, \quad f_\mu = (\vec{k}, -\tfrac{1}{c}\vec{j}\vec{E})$$

Wir hatten ① $\vec{k} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{S}}{c^2}\right) + \operatorname{Div}\overleftrightarrow{T}$, Maxw. Span. tensor $T_{ab} = E_a D_b + H_a B_b - \frac{1}{2}\delta_{ab}(E_c D_c + H_c B_c)$

② Poyntingscher Satz: $\operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E}$ $\qquad F^{\alpha\beta} = \mu_0 H^{\alpha\beta}$

Vierdim. Zusammenfassung: $f^\mu = T^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ mit $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha}H_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$

„Energie-Impuls-Tensor"

(Vierkraftdichte = Vierdivergenz des Energie-Impuls-Tensors)

Bem.: 1) $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ (symmetrisch)
$T^\mu{}_\mu = 0$ (spurfrei)

2) Oft wird auch $-T^{\mu\nu}$ als Energie-Impuls-Tensor bezeichnet.

3) $$T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{mn} & \frac{\vec{S}}{c} \\ \hline \frac{1}{c}\vec{S} & -w \end{array}\right) ; \quad T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} T_{mn} & -\frac{\vec{S}}{c} \\ \hline -\frac{1}{c}\vec{S} & -w \end{array}\right)$$

; Maxw. Sp. tensor T_{mn} = − Impulsstromdichte (vgl. Kap. 5.5.3)

$$T_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \text{-Impuls-stromdichte} & \text{c. Impulsdichte} \\ \hline \frac{1}{c}\text{ Energiestromdichte} & \text{-Energiedichte} \end{array}\right)$$

$\vec{S}$: Energiestromdichte
$\frac{1}{c^2}\vec{S}$: Impulsdichte
w: Energiedichte

4) Die Gln. $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = F^{\mu\nu} j_\nu$ enthalten die Impulsbilanz ($\mu = 1,2,3$) und die Energiebilanz ($\mu = 4$).

6.6 Bewegung von geladenen Testteilchen

$m_0 \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$ Vierkraft $\qquad d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \; \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \; v = |\vec{v}|$

$$F^\mu = \left(\frac{\vec{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \quad \vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$F^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu$ (Vierer-)Lorentzkraft (vgl. $f^\mu = F^{\mu\nu}j_\nu$)

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ Vierergeschwindigkeit $\quad u^\mu = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

$m_0 u^\mu = p^\mu$ Viererimpuls

Bem.: 1) Im lokalen Ruhsystem des Teilchens gilt $F^\mu = qF^{\mu\nu}u_\nu = (q\vec{E}, 0)$!!

2) Mit $u^\mu = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{\;}}, \frac{c}{\sqrt{\;}}\right)$, $F^\mu = \left(\frac{\vec{K}}{\sqrt{\;}}, \frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{\;}}\right)$; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ folgen die Gln.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{K} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \\ \text{und } &\frac{d}{dt}(mc^2) = \vec{K}\,\vec{v} = q\,\vec{v}\,\vec{E} \end{aligned}\right\} (*)$$

$E = mc^2 = m_0c^2 + T$

$p^\mu = \left(\vec{p}, \frac{E}{c}\right)$

$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$p^\mu p_\mu = -m_0^2c^2$

Photonen: $(p^\mu = \hbar k^\mu)$ $p^\mu p_\mu = 0 \Rightarrow m_0 = 0$

7. Variationsprinzipien

a) Bewegung eines geladenen Testteilchens

Wirkung W $W = \int \hat{L}\, d\tau = \int L\, dt$ ($\hat{L}$: lorentzinvariant!)

$\hat{L} = -m_0 c^2 + q A_\mu u^\mu$, d.h. $L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\vec{v}\vec{A} - qU$, $A_\mu = (\vec{A}, -\frac{U}{c})$

$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$ $\delta W = 0 \leadsto \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \to (*)$

$i = 1,2,3$ $v_i = \dot{x}_i$, $v^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i$
$\vec{A} = \vec{A}(x_i, t)$; $U = U(x_i, t)$ Vor. $\delta x_i = 0$ f. t_1, t_2

Bem. 1) Für $v \ll c$ folgt $L = \frac{m_0}{2}v^2 + q\vec{v}\vec{A} - qU$ (Konstante $-m_0 c^2$ weggelassen).
2) Bei einer Eichtransformation $A'_\mu = A_\mu + \varphi_{,\mu}$ ändert sich die Wirkung nur um eine Konstante: ($\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\varphi$, $U' = U - \dot{\varphi}$; $A_\mu = (\vec{A}, -\frac{U}{c})$)

b) Maxwell-Gln.

$W = \int L\, dt = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}\, d^4\underline{x} = \int \mathcal{L}\, dx\,dy\,dz\,dt$ L: Lagrangefkt. $d^4\underline{x}$ invariant
$\mathcal{L}$ Lagrangedichte (Invariante!)

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + A_\mu j^\mu$ homogene MWG $\leadsto$ W invariant!

mit $F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$ ($\to F_{<\alpha\beta,\gamma>} = 0$ automatisch erfüllt)

Betrachten j^μ als gegeben und fassen $\mathcal{L}$ als Funktion von A_α und $A_{\alpha,\beta}$ auf.

$\delta W = 0 \leadsto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\beta}}\right)_{,\beta} = 0$ (vgl. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$)

Vor.: $\delta A_\alpha = 0$ auf Oberfläche des vierdim. Integrationsvolumens.

Bem. 1) Eichinvarianz des Wirkungsprinzips $\leftrightarrow$ Kontinuitätsgl.!
2) $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 2(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2)$
$\leadsto F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mu_0 j^\alpha$!

c) Wechselwirkung

Quellenfreies Maxwellfeld: $W_M = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_M\, d^4\underline{x}$ mit $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

Kräftefreies Teilchen: $W_T = \int \hat{L}_T\, d\tau$ mit $\hat{L}_T = -m_0 c^2$

Wechselwirkungsterm: $W_W = \frac{1}{c}\int \mathcal{L}_W\, d^4\underline{x} = \int \hat{L}_W\, d\tau$
mit $\mathcal{L}_W = A_\mu j^\mu$, $\hat{L}_W = q A_\mu u^\mu$

$\to$ Für ein System von n Teilchen + Feld:

$$W = \underbrace{\frac{1}{c}\int \mathcal{L}_M\, d^4\underline{x} + \sum_{i=1}^{n} \hat{L}_W^{(i)}\, d\tau_{(i)}}_{\text{Teilchen als Quellen des Feldes}} + \sum_{i=1}^{n}\int \hat{L}_T^{(i)}\, d\tau_{(i)}$$

Teilchen bewegen sich im Feld

Konvektionsstrom $j^\mu = \varrho_0 u^\mu = \left(\frac{\varrho_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\varrho_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = (\varrho\vec{v}, \varrho c)$

formal: $\varrho = q\delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)]$

$\to j^\mu = \underbrace{\left(\frac{q\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{qc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}_{q u^\mu} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, \delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)]$

invariante Schreibweise: $j^\mu = qc\int u^\mu(\tau)\, \delta[\underline{x} - \underline{x}_0(\tau)]\, d\tau$