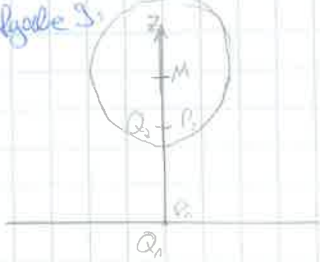
Blatt 4:

Alternativen:

Aufgabe 9:



$$x^2+y^2+\left(z-\frac{d}{1-v^2}\right)^2=R^2$$

$$R=v\,\frac{d}{1-v^2}\ ,\ v=\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|$$

Bsp.: $d=3,\quad v=\frac{1}{2}$

$$M=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

$$R=\frac{1}{2}M=2$$

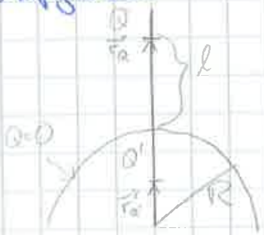
$$\overline{P_1M}=\frac{d}{1-v^2}$$

$$\overline{P_2M}=\frac{d}{1-v^2}-d=\frac{dv^2}{1-v^2}$$

$$\overline{P_1M}\ \overline{P_2M}=R^2$$

$$\frac{\overline{P_1M}}{\overline{P_2M}}=\frac{1}{v^2}=\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^2$$

Aufgabe 10:



$$|\vec{r}_Q|=R+\ell$$

Betrachten fiktive Ladung Q', sodass die vorgegebene Kugeloberfläche zur Äquipotentialfläche mit $U=0$ wird.

verwenden die Beziehungen von Aufg. 9:

$$r_{Q'}=\frac{R^2}{r_Q}=\frac{R^2}{R+\ell}\ ,\quad Q'^2=\frac{r_{Q'}}{r_Q}Q^2=\frac{R^2}{(R+\ell)^2}Q^2$$

Das Potential dieser Konfiguration ist:

$$U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|}-\frac{R}{R+\ell}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q'}|}\right]$$

$$\eta=-\varepsilon_0\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{r=R}=-\varepsilon_0\,\mathrm{grad}\,U\cdot\vec{n}\Big|_{r=R}$$

$$\mathrm{grad}\,U=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}_Q}{|\vec{r}-\vec{r}_Q|^3}-\frac{R}{R+\ell}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_{Q'}}{|\vec{r}-\vec{r}_{Q'}|^3}\right]$$

Es ist: $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}\ ,\ \vec{r}\cdot\vec{r}=r^2\ ,\quad \vec{r}\cdot\vec{r}_Q=r\cdot r_Q\cos\vartheta$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vec{r}\cdot\vec{r}_{Q'}=r\cdot r_{Q'}\cos\vartheta$

$$\eta(\vartheta)=\frac{Q}{4\pi R}\left[\frac{R^2-R(R+\ell)\cos\vartheta}{(R^2+(R+\ell)^2-2R(R+\ell)\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{R}{R+\ell}\,\frac{R^2-\frac{R^3}{R+\ell}\cos\vartheta}{\left(R^2+\frac{R^4}{(R+\ell)^2}-\frac{2R^3}{R+\ell}\cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\text{2. Term}:\ \to\frac{R}{R+\ell}\left(\frac{R+\ell}{R}\right)^3\frac{R^2-\frac{R^3}{R+\ell}\cos\vartheta}{(R^2+(R+\ell)^2-2R(R+\ell)\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-(R+\ell)^2+R(R+\ell)\cos\vartheta}{(R^2+(R+\ell)^2-2R(R+\ell)\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\eta(\vartheta)=\frac{Q}{4\pi R}\left[\frac{R^2-(R+\ell)^2}{(\qquad\qquad)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=-\frac{Q}{4\pi R}\,\frac{\ell^2+2\ell R}{(\qquad\qquad)^{\frac{3}{2}}}$$

Berechnung der Kraft:

$$r^2=R^2+(R+\ell)^2-2R(R+\ell)\cos\vartheta$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{BC}}{r}\qquad\cos\vartheta=\frac{\overline{MC}}{R}\ \leadsto\overline{MC}=R\cos\vartheta$$

$$\overline{BC}=\overline{MB}-\overline{MC}=R+\ell-R\cos\vartheta\qquad\leadsto\cos\alpha=\frac{R+\ell-R\cos\vartheta}{r}$$

Oberfläche einer infinitesimalen Kugelschale

$$df = (2\pi R \sin\vartheta) R\, d\vartheta = 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

Ladung dieser Oberfläche $dq = \eta\, df$

$$\leadsto dq = -\frac{Q}{4\pi R} \cdot \frac{l^2+2lR}{r^3}\, 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$$

z-Komponente der Kraft:

$$dK_z = \frac{Q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{Q\,dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{R+l-R\cos\vartheta}{r^3}$$

$$\leadsto dK_z = -\frac{Q^2(l^2+2lR)\,2\pi R^2 \sin\vartheta\,(R+l-R\cos\vartheta)\,d\vartheta}{16\pi^2\varepsilon_0 R\, r^6}$$

Gesamtkraft folgt durch Integration:

$$K_z = -\frac{Q^2(l^2+2lR)R}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta\,(R+l+R\cos\vartheta)}{(R^2+(R+l)^2-2R(R+l)\cos\vartheta)^3}$$

Es gilt: $\displaystyle\int_0^\pi d\vartheta\,\frac{\sin\vartheta\,(R+l-R\cos\vartheta)}{(\quad)^3} = \frac{2(l+R)}{l^3(l+2R)^3}$

$$K_z = -\frac{Q^2 R (R+l)}{4\pi\varepsilon_0 l^2 (l+2R)^2}$$

Aufgabe 11:

a) $V = u + \bar{u}$ mit $\Delta\bar{u} = 0$, $\bar{u}(r=R) = U_0$

$$\bar{u}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \bar{u}(r=R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = U_0$$

$$\bar{u}(r) = \frac{U_0 R}{r}$$

$$\eta = \eta_{10} - \varepsilon_0\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} = \eta_{10} + \frac{U_0 R\varepsilon_0}{R^2} = \eta_g + \frac{U_0\varepsilon_0}{R}$$

$$\vec{K} = \vec{K}_g + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(R+l)^2}\vec{e}_z$$

$$= \vec{K}_{10} + \frac{Q U_0 R}{(R+l)^2}\vec{e}_z$$

b) ~~Ursprung bei r~~

$$Q_0 = Q' + q = -\frac{RQ}{R+l} + q$$

$$q = Q_0 + \frac{R}{R+l}Q$$

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(Q_0 + \frac{R}{R+l}Q\right)$$

$$\eta = \eta_{10} - \varepsilon_0\frac{\partial\bar{u}}{\partial n} = \eta_{10} + \frac{1}{4\pi R^2}\left(Q_0 + \frac{R}{R+l}Q\right)$$

$$\vec{K} = \vec{K}_{10} + \frac{Q\left(Q_0 + \frac{R}{R+l}Q\right)}{4\pi\varepsilon_0 (R+l)^2}\vec{e}_z$$

11.12.14 zu Aufgabe 12:

(I) Potentiale U_i vorgegeben

gesucht $U(\vec{r})$ im Außenraum (außerhalb der Leiter)

Poissongleichung: $\Delta U = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

Algorithmus:

(1) $\bar{U}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\,d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ Poissonintegral

Manko: Poissonintegraldarstellung erfüllt nicht die RB $U|_{\partial L_i} = U_i$ auf den Leiteroberflächen!

② Korrektur dieser Lösung durch Addition einer Lösung V der Laplacegleichung

$$\Delta V = 0 \text{ außen}, \quad V = 0, \; r \to \infty$$

$$V = V_i(\vec{r}) = U_i - \bar{U}(\vec{r}) \text{ auf } \partial L_i$$

$$U = \bar{U} + V \text{ außen} \rightsquigarrow \vec{E} \text{ außen}$$

$$\eta = D_n = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} \rightsquigarrow Q_i = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_i} \frac{\partial U}{\partial n} df$$

$$\cdot \Delta U = \Delta \bar{U} + \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\cdot U|_{\partial L_i} = \bar{U}|_{\partial L_i} + V|_{\partial L_i} = \bar{U}|_{\partial L_i} + U_i - \bar{U}|_{\partial L_i} = U_i$$

1.2) Problem: $U(\vec{r})$: $\Delta U = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$

$$\underbrace{Q_i = -\varepsilon_0 \int_{\partial L_i} \frac{\partial U}{\partial n} df}_{} \quad \text{vorgeben}$$

wissen: $U|_{\partial L_i} = U_i = \text{const.}$ auf ∂L_i jetzt: U_i unbekannt

Struktur der Lsg:

$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i G_i(\vec{r}) + F(\vec{r}) \quad \text{mit}$$

- $F(\vec{r}) = 0$ auf ∂L_i, $\Delta F = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ F Lsg. für alle Leiter geerdet
- $G_i(\vec{r}) = \delta_{ij}$ auf ∂L_j, $\Delta G_i = 0$

dazugehörige Ladung auf ∂L_j

$$Q_j = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial n} \left[\sum_i U_i G_i(\vec{r}) + F(\vec{r})\right] df$$

$$= -\varepsilon_0 \sum_i U_i \underbrace{\oint_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial n} G_i(\vec{r})\, df}_{-K_{ij}} \underbrace{- \varepsilon_0 \oint_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial n} F(\vec{r})\, df}_{K_j}$$

d.h. $$K_{ij} = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_j} \frac{\partial}{\partial n} G_i(\vec{r})\, df$$

Lösung: 2. Greenscher Satz

$$\int_{\text{Volumen}} d^3\vec{r}\, (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \oint_{\partial \text{Volumen}} d\vec{f}\, (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi)$$

anwenden auf: $\varphi = G_i$ und $\psi = G_j$; Volumen umschließt alle Leiter und ρ

$$\int d^3\vec{r}\, [G_i \underbrace{\Delta G_j}_{0} - G_j \underbrace{\Delta G_i}_{0}] = 0 = \oint d\vec{f}\, (G_i \nabla G_j - G_j \nabla G_i)$$

$$\left(d\vec{f} = df\, \vec{n}, \; \frac{\partial G_j}{\partial n} = \nabla G_j \cdot \vec{n}\right)$$

$$\rightsquigarrow 0 = \oint_{\text{Gesamtoberfläche}} df \left(G_i \frac{\partial}{\partial n} G_j - G_j \frac{\partial}{\partial n} G_i\right)$$

$$= \oint_{\partial L_i} df \frac{\partial}{\partial n} G_j - \oint_{\partial L_j} df \frac{\partial}{\partial n} G_i \quad \rightsquigarrow \boxed{K_{ij} = K_{ji}}$$

alternativ:

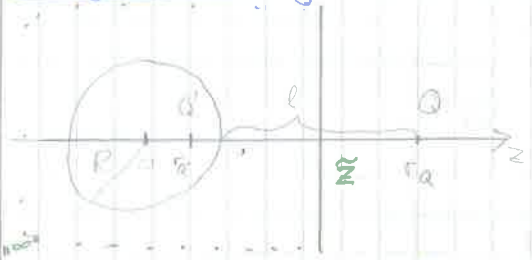
$$K_{ij} = -\varepsilon_0 \oint_{\partial_j} \frac{\partial}{\partial n} G_i(\vec r)\, df = -\oint_{\partial_j} \nabla G_i \, d\vec f$$

$$= -\varepsilon_0 \oint_{\partial_j} G_j \nabla G_i \, d\vec f = -\varepsilon_0 \oint_{\text{Gesamtoberfläche}} G_j \nabla G_i \, d\vec f \qquad (G_j(\vec r)|_{\partial_i} = \delta_{ji})$$

(Gauß oder 1. Green. Satz)

$$= -\varepsilon_0 \int_{V_{\text{außen}}} d^3\vec r \, (\nabla G_j \nabla G_i + G_j \underbrace{\Delta G_i}_{0})$$

18.12.14 **Aufgabe 15:** (vgl. 10))



$$r_Q = R + l, \quad r_Q' = \frac{R^2}{r_Q} = \frac{R^2}{R+l}$$

$$Q'^2 = \frac{r_{Q'}}{r_Q} Q^2 = \frac{R^2}{(R+l)^2} Q^2$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec r - \vec r_Q|} - \frac{R}{R+l}\frac{1}{|\vec r - \vec r_{Q'}|}\right]$$

$$\vec r = (x, y, z) \quad \vec r_Q = (0, 0, R+l), \quad \vec r_{Q'} = \left(0, 0, \frac{R^2}{R+l}\right)$$

$$|\vec r - \vec r_Q| = (x, y, z - R - l)$$

$$|\vec r - \vec r_{Q'}| = \left(x, y, z - \frac{R^2}{R+l}\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+(z-R-l)^2)^{\frac32}} - \frac{R}{R+l}\frac{x}{(x^2+y^2+(z-\frac{R^2}{R+l})^2)^{\frac32}}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{(\quad)^{\frac32}} - \frac{R}{R+l}\frac{y}{(\quad)^{\frac32}}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-R-l}{(\quad)^{\frac32}} - \frac{R}{R+l}\frac{z-\frac{R^2}{R+l}}{(\quad)^{\frac32}}\right]$$

$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, zweckmäßige Wahl von $\tilde z$, sodass die Nenner gleich werden

$$\rightsquigarrow \tilde z = \frac12 (r_Q + r_{Q'}) = \frac12 \left(R + l + \frac{R^2}{R+l}\right)$$

$$\rightsquigarrow E_z(z = \tilde z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac12\left(\frac{R^2}{R+l} - R - l\right)\left(1 + \frac{R}{R+l}\right)}{\left(x^2+y^2+\left[\frac12\left(\frac{R^2}{R+l} - R - l\right)\right]^2\right)^{\frac32}}$$

Mit $c := \frac12\left(\frac{R^2}{R+l} - R - l\right)$ hat man

$$E_z(z=\tilde z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{c\left(1 + \frac{R}{R+l}\right)}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac32}}$$

$$E_x(z=\tilde z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{R+l}\right)\frac{x}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac32}}$$

$$E_y(z=\tilde z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R}{R+l}\right)\frac{y}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac32}}$$

jetzt: $K_i = \oint T_{ij} n_j \, df$

hier: $K_i = \oint_{z=\tilde z} T_{iz} \, df_z$, $\quad df_z = dx\,dy$

$$K_x = \oint T_{xz}\, df_z, \quad T_{xz} = E_x D_z = \varepsilon_0 E_x E_z$$

$$K_y = \oint T_{yz}\, df_z, \quad T_{yz} = E_y D_z = \varepsilon_0 E_y E_z$$

$$K_z = \oint T_{zz}\, df_z, \quad T_{zz} = E_z D_z - \frac12 \vec E \vec D$$

$$= \frac12 (E_z D_z - E_x D_x - E_y D_y)$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2)$$

$\rightsquigarrow K_x = \oint T_{xz}\, dx\,dy$
$= \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(1+\frac{R}{R+l}\right)\left(1-\frac{R}{R+l}\right) c \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^3}}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$

also: $K_x = 0$, analog $K_y = 0$

$K_z = \oint T_{zz}\, dx\,dy$
$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left[\left(1+\frac{R}{R+l}\right)^2 \iint \frac{c^2\, dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^3} - \left(1-\frac{R}{R+l}\right)^2 \iint \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^3}\right]$

Subst.: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$

- $\iint \frac{c^2 dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^3} = 2\pi c^2 \int \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+c^2)^3} = 2\pi c^2 \left[-\frac{1}{4(\rho^2+c^2)^2}\right]_0^\infty$
$= 2\pi c^2 \frac{1}{4c^4} = \frac{\pi}{2c^2}$
- $\iint \frac{(x^2+y^2)\,dx\,dy}{(x^2+y^2+c^2)^3} = 2\pi \int \frac{\rho^3 d\rho}{(\rho^2+c^2)^3} = 2\pi \left[-\frac{(c^2+2\rho^2)}{4(c^2+\rho^2)^2}\right]_0^\infty$
$= 2\pi \frac{c^2}{4c^4} = \frac{\pi}{2c^2}$

$c^2 = \frac{l^2(2R+l)^2}{4(R+l)^2}$ und die Integrale oben einsetzen

$\rightsquigarrow K_z = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R(R+l)}{l^2(l+2R)^2}$

$\nabla(f_g \vec{j}) = f_g \nabla\vec{j} + \vec{j}\nabla f_g$

Übungsserie 7 — 08.01.15

Aufgabe 19:

Multipolentwicklung des Vektorpotentials für eine stationäre, inselartige Stromverteilung
$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,\vec{r}\,'}{r^3} + \dots$

$\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi r}\underbrace{\int d^3\vec{r}\,' \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\mathrm{I}} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underbrace{\int d^3\vec{r}\,' \vec{r}\,'\cdot\vec{r}\; \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\mathrm{II}} + \dots$

Plan: a) zeigen I = 0
b) berechnen II

verwenden folgendes Lemma:

Für beliebige, stetig diffbare Funktionen $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ und $\vec{j}(\vec{r})$ mit $\operatorname{div}\vec{j} = 0$
gilt: $I := \int d^3\vec{r}\, [f(\vec{r})\,\vec{j}\,\nabla g + g(\vec{r})\,\vec{j}\,\nabla f] = 0$

Bew.: $\operatorname{div}(gf\vec{j}) = (gf)\underbrace{\operatorname{div}\vec{j}}_{=0} + \vec{j}\operatorname{grad}(gf) = f(\vec{j}\nabla g) + g(\vec{j}\nabla f)$
$\rightsquigarrow I = \int d^3\vec{r}\, \operatorname{div}(gf\vec{j}) \stackrel{\text{Gauß}}{=} \oint d\vec{f}\,(gf\vec{j}) \underset{\uparrow}{=} 0$ □
inselartige Stromverteilung

a) Setzen $f = 1$, $g = x$ $\Big\}$ analog y- und z-Komp.
$\stackrel{\text{Lemma}}{\rightsquigarrow} \int d^3\vec{r}\, \vec{j}\,\vec{e}_x = 0$
$\rightsquigarrow \int d^3\vec{r}\, \vec{j}(\vec{r}) = 0$ Monopolterm verschwindet

b) Berechnung des Dipolterms $\quad f\,\vec{j}\,\nabla g$

$f = x_i,\ g = x_k \qquad x_i, x_k \in \{x, y, z\} \qquad x_i\,\vec{j}\,\vec{e}_k = x_i j_k$

$\overset{\text{Lemma}}{\rightsquigarrow} 0 = \int d^3\vec{r}\,(x_i j_k + x_k j_i)$

also: $\int d^3\vec{r}\, x_i j_k = -\int d^3\vec{r}\, x_k j_i \quad (*)$

Sei $\vec{a}$ ein bel. Vektor:

$$\vec{a}\int d^3\vec{r}\,'\,\vec{r}\,'\,j_i(\vec{r}\,') = \sum_k a_k \int d^3\vec{r}\,'\,x_k'\,j_i(\vec{r}\,')$$
$$\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\sum_k a_k \int d^3\vec{r}\,'\,(x_i' j_k - x_k' j_i)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k,l} \epsilon_{ikl}\, a_k \int d^3\vec{r}\,'\,(\vec{r}\,'\times\vec{j})_l$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\vec{a}\times\int d^3\vec{r}\,'\,(\vec{r}\,'\times\vec{j})\right]_i$$

$\rightsquigarrow \int d^3\vec{r}\,(\vec{a}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}(\vec{r}\,') = -\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\int d^3\vec{r}\,'(\vec{r}\,'\times\vec{j})\right)$

jetzt: $\vec{a} = \vec{r}$ und $\vec{m} := \frac{\mu_0}{2}\int d^3\vec{r}\,(\vec{r}\times\vec{j})$

$\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3} + \ldots$

15.01.15 Nachtrag zu 19.:

$\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3\vec{r}\,'\,\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\,\vec{j}(\vec{r}\,')$

$\vec{r}\times(\vec{r}\,'\times\vec{j}\,') \overset{(bac-cab)}{=} \vec{r}\,'(\vec{r}\cdot\vec{j}) - \vec{j}(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')$

$\rightsquigarrow (\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{j}\,' = \vec{r}\,'(\vec{r}\cdot\vec{j}) - \vec{r}\times(\vec{r}\,'\times\vec{j}\,')$

hatten gezeigt: $\int d^3\vec{r}\,'\,x_i' j_k' = -\int d^3\vec{r}\,'\,x_k' j_i' \quad (*)$

$\vec{r}\cdot\vec{j}\,' = x j_x' + y j_y' + z j_z'$

$$[(\vec{r}\cdot\vec{j}\,')\vec{r}\,']_x = (x j_x' + y j_y' + z j_z')\cdot x'$$
$$= x(j_x' x') + y(j_y' x') + z(j_z' x')$$
$$\xrightarrow[(*)]{\text{Integration}} -x\underbrace{(j_x' x')}_{(=0)} - y(j_x' y') - z(j_x' z')$$
$$\longrightarrow -j_x'(xx' + yy' + zz')$$
$$-j_x'(\vec{r}\cdot\vec{r}\,') = -(\vec{r}\cdot\vec{r}\,')\,[\vec{j}(\vec{r}\,')]_x$$

Aufgabe 20 (Alternative)

Magnetfeld einer starr ~~rotierenden~~ gleichm. rotierenden Kugel im Außenraum (Radius R, Gesamtladung Q, Winkelgeschw. Ω)

a) Ladung glm. auf der Oberfläche verteilt

$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad \vec{v} = \vec{\Omega}\times\vec{r}$

$\vec{j} = \rho\vec{v} = \eta\,\delta(r-R)\,\vec{v} = \eta\,\delta(r-R)\,(\vec{\Omega}\times\vec{r})$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,' = \frac{\mu_0\eta}{4\pi}\,\vec{\Omega}\times\int d^3\vec{r}\,'\,\delta(r-R)\frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

jetzt: Polarkoord. für $\vec{r}\,'$ so einführen, dass $\vec{r}$ in Richtung der Polarachse ($\vartheta' = 0$)

$\vec{r}' \to (\vartheta', \varphi', r')$ $\qquad \vec{e}_z = \vec{e}_r$

Kart. Koord.

$\rightsquigarrow \vec{r} = r(0,0,1) \rightarrow \vec{r}$ auf z-Achse

$\vec{r}' = r'(\sin\vartheta'\cos\varphi', \sin\vartheta'\sin\varphi', \cos\vartheta')$ $\qquad \vartheta' \in [0,\pi]$, $\varphi' \in [0,2\pi]$

ergibt bei der φ'-Integr. Null!

$\vec{r}\cdot\vec{r}' = r r' \cos\vartheta'$

$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\eta}{4\pi} \oint \vec{\Omega} \times \int_0^\infty dr'\, r'^3\, \delta(r'-R)\, 2\pi \int_0^\pi \frac{d\vartheta' \sin\vartheta' (0,0,\cos\vartheta')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}}$$

Subst. $x = \cos\vartheta'$, $dx = -\sin\vartheta' d\vartheta'$

$$= \frac{\mu_0\eta R^3}{4\pi} 2\pi (\vec{\Omega} \times \underbrace{\vec{e}_z}_{=\vec{e}_r}) \int_{-1}^{1} \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2+R^2-2rRx}}$$

Setzen: $J := \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{r^2+R^2-2rRx}}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\eta R^3}{2} \frac{1}{r} (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot J$$

Berechnung von J ergibt:

$$J_R(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{r}{R^2}, & r \le R \\ \frac{2}{3}\frac{R}{r^2}, & r \ge R \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\eta R^3}{3} \vec{\Omega}\times\vec{r} \begin{cases} R & \text{für } r \le R \\ \frac{R^4}{r^3} & \text{für } r \ge R \end{cases}$$

$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$$\text{oder } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 Q}{12\pi} \vec{\Omega}\times\vec{r} \begin{cases} \frac{1}{R} & r \le R \\ \frac{R^2}{r^3} & r \ge R \end{cases}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 Q}{12\pi R} \vec{\Omega}\times\vec{r} & ; r \le R \\ \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{4\pi r^3} \text{ mit } \vec{m} = \frac{\mu_0 Q R^2}{3}\vec{\Omega} & ; r \ge R \end{cases}$$

elegante Berechnung von J für $r < R$ mit Legendre-Polynomen

$$J = \frac{1}{R}\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+(\frac{r}{R})^2 - 2(\frac{r}{R})x}} \qquad t := \frac{r}{R} < 1$$

$$= \frac{1}{R}\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+t^2-2tx}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

$$\rightsquigarrow J = \frac{1}{R}\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{=P_1(x)} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l\, dx$$

(Orthogonalität)

$$= \frac{1}{R}\int_{-1}^{1} [P_1(x)]^2 t\, dx = \frac{t}{R}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{r}{R^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\frac{r}{R^2}$$

$$\int_{-1}^{1} P_j(x) P_k(x)\, dx = 0 \quad \text{für } j \ne k$$

22.01.15

20 b) Vollkugel

$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$

$Q_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \varrho$

$\frac{Q_s}{Q} = \frac{R_s^3}{R^3} \leadsto Q_s = \frac{Q}{R^3} R_s^3 \leadsto dQ_s = \frac{3Q}{R^3} R_s^2 \, dR_s \quad (I)$

$\vec{A}_V = \int d\vec{A}_s$

Vektorpotential der Vollkugel — Vektorpotential einer Kugelschale (siehe a))

$\underline{r > R}$: $\vec{A}_V = \int \frac{d\vec{m}_s \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \underbrace{\int d\vec{m}_s}_{\vec{m}_V} \times \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$

$\vec{m}_V = \int d\vec{m}_s = \int_R \frac{\mu_0 \, dQ_s R_s^2}{3} \vec{\Omega}$

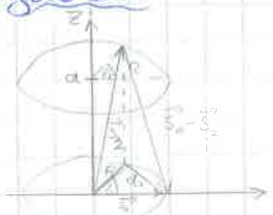
$\overset{(I)}{=} \frac{\mu_0 Q}{R^3} \vec{\Omega} \int R_s^4 \, dR_s$

$= \frac{\mu_0 Q}{R^3} \vec{\Omega} \frac{1}{5} R_s^5 \Big|_0^R$

$\leadsto \vec{m}_V = \frac{\mu_0 Q R^2}{5} \vec{\Omega}$

$\vec{A}_V = \frac{\vec{m}_V \times \vec{r}}{4\pi r^3}$

Aufgabe 23:



$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_1 \, d\vec{s}_2}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|}$

$a = |z_1 - z_2|, \quad d = |\vec{s}_1 - \vec{s}_2|$

$\vec{s}_1 = R \, \vec{e}_\varrho(\varphi_1) = R(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$

$\vec{s}_2 = \vec{a} + R \, \vec{e}_\varrho(\varphi_2) = \vec{a} + R(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$

$d\vec{s}_1 = R \, d\varphi_1 (-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1)$

$d\vec{s}_2 = R \, d\varphi_2 (-\sin\varphi_2, \cos\varphi_2)$

wählen (zunächst): $\varphi_1 = 0$ d.h. $(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) = (1,0) \rightarrow d\vec{s}_1 = R\,d\varphi_1 (0,1)$

$d_1^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\varphi_2 = 2R^2(1-\cos\varphi_2)$

$d^2 = d_1^2 + a^2 = 2R^2(1-\cos\varphi_2) + a^2$

$\rightarrow d\vec{s}_1 \, d\vec{s}_2 = R^2 \cos\varphi_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$

$\leadsto L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos\varphi_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2}{\sqrt{a^2 + 2R^2(1-\cos\varphi_2)}}$

$= \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{a^2 + 2R^2 + 2R^2\cos\alpha}}$

$L_{12} = \frac{\mu_0 R}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{\frac{a^2+2R^2}{2R^2} + \cos\alpha}}$

Bem. Das ist bereits das richtige Ergebnis, da aus Symmetriegründen für jedes feste φ_1 dasselbe herauskommt!
bleibt zu berechnen:

$J := \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha \, d\alpha}{\sqrt{\frac{a^2+2R^2}{2R^2} + \cos\alpha}}$

Einschub — — — — — — — — — — — —

Elliptische Integrale:

$\int_0^{y} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = F(\varphi, k)$ $(\sin\varphi = y)$ Ellipt. Integral 1. Gattung

k: Modul

$k' = \sqrt{1-k^2}$ komplementäre Modul

$$E(\varphi,k) := \int_0^{Y} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta$$

Ellipt. Int. 2. Gattung

$K(k) := F(\frac{\pi}{2},k)$ vollst. Int 1. Gattung

$E(k) = E(\frac{\pi}{2},k)$ — " — 2. — " —

Subst. : $\alpha = \pi - 2\beta$

$$\cos\alpha = \cos(\pi-2\beta) = \cos\pi\cos2\beta + \sin\pi\sin2\beta = -\cos2\beta$$
$$= -(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = -\cos^2\beta + \sin^2\beta$$
$$= 2\sin^2\beta - 1$$

$\alpha \in [0,2\pi] \rightsquigarrow \beta \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

$$\rightsquigarrow J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2\beta-1)(-2d\beta)}{\sqrt{\frac{a^2+2R^2}{2R^2} - (2\sin^2\beta - 1)}}$$

$$\sqrt{} = \sqrt{\frac{a^2+4R^2}{2R^2} - 2\sin^2\beta} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+4R^2}{4R^2} - \sin^2\beta}$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+4R^2}{4R^2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\beta} \qquad \text{mit } k = \sqrt{\frac{4R^2}{a^2+4R^2}}$$

$\rightsquigarrow$ also: $$J = \frac{k\,2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\sin^2\beta-1)\,d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$

Jetzt: Umformung des Integranden

$$\frac{2\sin^2\beta - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = \frac{1}{k^2}\frac{2k^2\sin^2\beta - k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} = \frac{1}{k^2}\frac{[2-2k^2\sin^2\beta]-2-k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$
$$= \frac{1}{k^2}\left[-\frac{2(1-k^2\sin^2\beta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} + \frac{2-k^2}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}\right]$$

$$\rightsquigarrow J = \frac{\sqrt{2}\,k}{k^2}\,2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2-k^2)\,d\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\,d\beta\right]$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 R}{2\sqrt{2}} J$$

$$\rightsquigarrow \boxed{L_{12} = \mu_0 R\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right]}$$

mit $k = \sqrt{\frac{4R^2}{4R^2+a^2}} = k(R,a)$

$L_{12} = L_{12}(R,a)$

---

b) für den Fall $a \gg R$ kann das Ausgangsintegral verwendet werden:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 R^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2+2R^2(1-\cos\alpha)}} = \frac{\mu_0 R^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1+2(\frac{R}{a})^2(1-\cos\alpha)}}$$

für $\varepsilon \ll 1$: $\sqrt{1+\varepsilon^2} \approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\frac{1}{1+\frac{\varepsilon^2}{2}} \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$

$$\approx \frac{\mu_0 R^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos\alpha\left(1 - \left(\frac{R}{a}\right)^2(1-\cos\alpha)\right)d\alpha$$
$$= \frac{\mu_0 R^4}{2a^3}\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\,d\alpha = \frac{\mu_0 R^4\pi}{2a^3}$$

a) $a \ll R$: $\quad k^2 = \frac{4R^2}{4R^2+a^2} \approx 1$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 1$$

Transformation für $K(k)$ $\quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\rightsquigarrow \sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma, \qquad d\varphi = -d\gamma$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightsquigarrow \gamma \in [\frac{\pi}{2}, 0]$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos^2\gamma}}$$

$$= \underbrace{\int_0^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos^2\gamma}}}_{①} + \underbrace{\int_{\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos^2\gamma}}}_{②}$$

Es sei $\frac{a}{R} \leq \gamma_0 \ll 1$

$$② \int_{\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos^2\gamma}} = \int_{\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sin\gamma} = \ln\left(\tan\frac{\gamma}{2}\right)\Big|_{\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\tan\frac{\gamma_0}{2} \approx \ln\frac{\gamma_0}{2}$$

$$① \int_0^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2\cos^2\gamma}} \approx \int_0^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2+k^2\gamma^2}} = \frac{1}{k}\int_0^{\gamma_0} \frac{d\gamma}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{k^2}-1}_{\left(\frac{a}{2R}\right)^2}+\gamma^2}}$$

NR.: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$ $\quad \cos^2 x = 1 - x^2 \dots$

$$= \frac{1}{k}\ln\left(\gamma + \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \gamma^2}\right)\Big|_0^{\gamma_0}$$

$$\underset{k=1}{\approx} \ln\left(\gamma_0 + \sqrt{\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \gamma_0^2}\right) - \ln\left(\frac{a}{2R}\right)$$

$$\approx \ln\frac{2\gamma_0}{\frac{a}{2R}} \underset{\gamma_0 = \frac{a}{R}}{\approx} \underline{\ln 4}$$

insgesamt für $K(k)$:

$$K(k\approx 1) \approx -\ln\frac{\gamma_0}{2} + \ln 4 \approx -\ln\frac{a}{2R} + \ln 4 \approx \ln\frac{4}{k'}$$

$$k' = 1 - k^2 = \frac{a^2}{4R^2+a^2} \underset{a \ll R}{\approx} \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \quad \text{kompl. Modul}$$

$$K(k\approx 1) \approx \ln\frac{4}{\frac{a}{2R}} = \ln\frac{8R}{a}$$

29.01.15 **Berechnung der Kraft**

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint \frac{d\vec{s}_1\, d\vec{s}_2}{|\vec{s}_1 - \vec{s}_2|}$$

$$\vec{K}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} J_1 J_2 \oint\oint \frac{\vec{s}_1 - \vec{s}_2}{|\quad|^3}\, d\vec{s}_1\, d\vec{s}_2$$

Kraft auf Schleife 1, ausgeübt von Schleife 2

Feststellung: $\vec{K}_{12} = J_1 J_2 \,\mathrm{grad}_1 L_{12}$

Symmetrie $\rightsquigarrow$ nur z-Komp. der Kraft

$$\mathrm{grad}_1 L_{12} \to \frac{\partial}{\partial s_{1z}} L_{12}$$

Es ist: $\underbrace{(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)\vec{e}_z}_{} = -a\vec{e}_z$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial s_{z_1}} = -\frac{\partial}{\partial a}$$

a) $L_{12} = \mu_0 R \ln\frac{8R}{a} \qquad (a \ll R)$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial a} = -\mu_0 R \frac{1}{a}$$

$$\rightsquigarrow \vec{K}_{12} = \mu_0 R \frac{J_1 J_2}{a}\vec{e}_z = \underline{\underline{\mu_0 J_1 J_2 \frac{R}{a}\vec{e}_z}}$$

b) $L_{12} = \frac{\mu_0 R^4 \pi}{2a^3} \qquad (a \gg R)$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial L_{12}}{\partial a} = -\frac{3}{2}\mu_0 R^4 \pi \frac{1}{a^4} \qquad \rightsquigarrow \vec{K} = \frac{3}{2}\pi\mu_0 J_1 J_2 \left(\frac{R}{a}\right)^4 \vec{e}_z$$