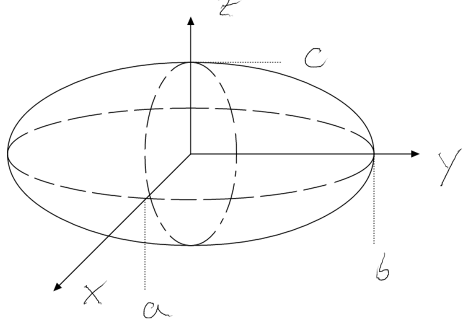
Elektrodynamik – Übung 3

Markus Pawellek – 144645   Übung: Do 12–14

Aufgabe 6



$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \text{konst. im Bereich des Ellipsoidens}$$

$$\Longrightarrow \text{Ellipsoid:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

per Definition gilt für Quadrupolmoment:

$$D_{ik} = \int_V \left(3x_i x_k - \delta_{ik} r^2 \right) \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

$$= \int_V 3x_i x_k \, \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r} - \delta_{ik} \int_V r^2 \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

es gilt nun: $\int_V r^2 \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \rho \int_{-a}^{a} \int_{-b(1-\frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}}^{b(1-\frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}} \int_{-c(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}}^{c(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{1}{2}}} (x^2+y^2+z^2) \, dz\,dy\,dx$

$\Longrightarrow$ Substitution: $x' = \frac{x}{a} \quad y' = \frac{y}{b} \quad z' = \frac{z}{c} \quad \Longrightarrow \quad dx = a\,dx' \quad dy = b\,dy' \quad dz = c\,dz'$

$$\Longrightarrow \int_V r^2 \rho \, d^3\vec{r} \overset{(*)}{=} \rho abc \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \, dz\,dy\,dx$$

(*) Variablen x', y' und z' wurden aufgrund vorhandener Grenzen gleich wieder in x, y und z umbenannt

$\Longrightarrow$ Integral entspricht jetzt in den Grenzen der Integration über eine Kugel mit Radius 1

$$\Longrightarrow \int_V r^2 \rho \, d^3\vec{r} = \rho abc \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \, r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

dabei gilt: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$$= \rho abc \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 r^4 \sin^3\vartheta \cos^2\varphi + b^2 r^4 \sin^3\vartheta \sin^2\varphi + c^2 r^4 \cos^2\vartheta \sin\vartheta \right) d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

$$= \rho abc \int_0^1 r^4 \, dr \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) \, d\varphi + 2\pi c^2 \int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \right]$$

$$= \rho abc \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \left(\pi a^2 + \pi b^2 \right) + 2\pi c^2 \cdot \frac{2}{3} \right] = \underline{\frac{4\pi \rho abc}{15} \left(a^2 + b^2 + c^2 \right)}$$

Sei nun $i = k$: $\Rightarrow \int_V 3 x_i^2 \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$ entspricht gerade dem Integral von vorher über einen der 3 Summanden

$$\Rightarrow \int_V 3 x_i^2 \rho \, d^3\vec{r} = 3 \cdot \frac{4\pi \rho abc}{15} a_i^2 \quad \text{sofern} \quad a_1 = a \quad a_2 = b \quad a_3 = c$$

Sei nun $i \neq k$: $\Rightarrow \int_V 3 x_i x_k \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 3\rho abc\, a_i a_k \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} x_i x_k r^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$

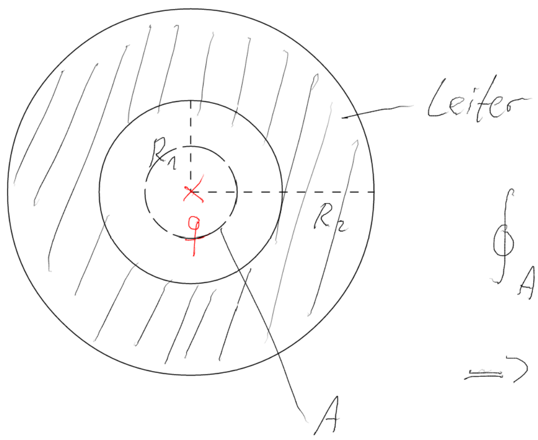
$\Rightarrow$ da Integrationsvariablen unabhängig voneinander sind, muss als Ergebnis Null folgen, aufgrund Integration über φ

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \int_V 3 x_i x_k \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k$$

$$\Rightarrow \boxed{ D_{ik} = \frac{4\pi \rho abc}{15} \begin{pmatrix} 2a^2 - b^2 - c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2b^2 - a^2 - c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix} }$$

Aufgabe 7



Leiter ist neutral und isoliert.

$\Rightarrow$ im Inneren gilt erste Maxwellsche Gleichung:

$$\oint_A \vec{E}\, d\vec{f} \overset{(\vec{E} \parallel d\vec{f})}{=} |\vec{E}|\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow$ für $r < R_1$ gilt:

$$U(r) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

$\Rightarrow$ im Leiter ist Potential konstant, außerdem steht $\vec{E}$ bereits senkrecht auf der Oberfläche.

$\Rightarrow$ (da U stetig) $U(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$ für $R_1 \leq r < R_2$

$\Rightarrow$ Oberflächenladung der inneren Schaale (R_1) muss gerade $-q$ sein, damit im Inneren des Leiters das Potential konstant ist

$\Rightarrow$ um Neutralität des Leiters zu erhalten, muss Gesamtladung der zweiten Schaale wieder $+q$ sein

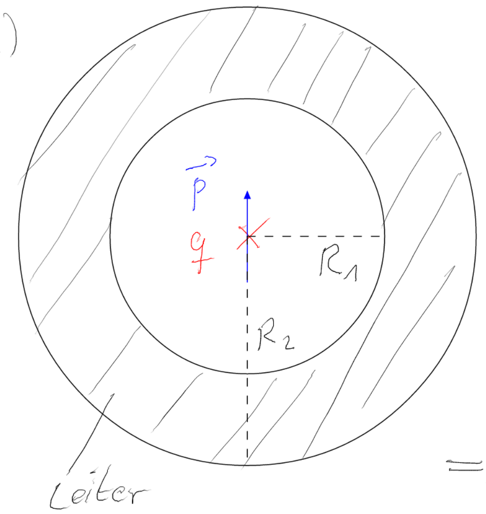
$\Rightarrow$ $U(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$ wobei $U(R_2) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$\Rightarrow$ $U(R_2) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C \Rightarrow C = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r < R_1 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & R_1 \leq r < R_2 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right) & R_2 \leq r \end{cases}}$$

Aufgabe 8

a)



– zusätzlicher Dipol $\vec{p}$ im Zentrum

$\Rightarrow$ o.E. $\vec{p} = p\vec{k} = p\vec{e}_z$

$\Rightarrow$ Potential des Dipols im Ursprung:

$$U_p(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$\Rightarrow$ Gesamtpotential der inneren Anordnung:

$$U_{pq}(\vec{r}) = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$\Rightarrow$ innere Kugelschaale bildet Äquipotentialfläche $\Rightarrow$ Ladungen auf innerer Kugelschaale ordnen sich so an, dass Feld abgeschirmt wird, da sonst im Inneren des Leiters nicht $E = 0$ gelten würde.

$\Rightarrow$ gesucht ist Potential U_1, sodass $U_{pq} + U_1 = \text{konst}$ für alle $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| = R_1$

$$\Rightarrow U_{pq}(\vec{r}) = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad \text{für } |\vec{r}| = R_1$$

$$\Rightarrow U_i(\vec{r}) = \frac{-pz}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \quad \text{(Potential für homogenes Magnetfeld)}$$

$$\Rightarrow U = U_{pq} + U_i = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 R_1^3} \quad \text{ist konstant für } |\vec{r}| = R_1$$

im Leiter herrscht wieder ein konstantes Potential, welches $U(R_1)$ ist
Der Dipol an sich ist neutral. $\Rightarrow$ Durch ihn wird auf innerer Kugelschaale eine inhomogene Ladungsverteilung verursacht, welche aber insgesamt neutral sein muss. Nur durch die Ladung q wird die inhomogene Verteilung nicht neutral. $\Rightarrow$ Gesamtladung auf innerer Schaale ist immer noch $-q$.
$\Rightarrow$ äußere Schaale bildet Ladung von $+q$ auf
$\Rightarrow$ da $\vec{E}$ senkrecht stehen muss wie vorher, ändert sich das Potential für $r > R_2$ nicht

$$\Rightarrow \boxed{U(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[pz\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) + \frac{q}{r}\right] & r \leq R_1 \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} & R_1 < r \leq R_2 \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & R_2 < r \end{cases}}$$

Bemerkung: Lösung U_i kann auch als Lösung der Spiegelung an der Kugeloberfläche verstanden werden.
Betrachtet man endlichen Dipol in Kugel, so spiegeln sich zwei umgekehrte Ladungen nach außen. Lässt man das ganze nun gegen den mathematischen Dipol konvergieren, so bewegen sich die gespiegelten Ladungen ins Unendliche und ein homogenes E-Feld

b) Wird eine beliebige Ladungsverteilung mit Gesamtladung Q in den Hohlraum getan, so bildet sich auf der inneren Kugelschaale gerade so eine Ladungsverteilung aus, dass das Feld im Inneren des Leiters Null wird.
$\Rightarrow$ die Gesamtladung auf der inneren Kugelschaale muss gerade $-Q$ sein
$\Rightarrow$ aufgrund der Ladungserhaltung muss sich also eine Gesamtladung $+Q$ auf der äußeren Schaale aufhalten
$\Rightarrow$ da im Leiter kein Feld herrscht, muss sich diese Ladung also gleichmäßig auf Oberfläche verteilen (damit bleibt Inneres des Leiters feldfrei)
$\Rightarrow$ außerhalb wirkt Feld einer geladenen Hohlkugel mit Ladung Q dies entspricht gerade Feld einer Punktladung Q im Mittelpunkt der Hohlkugel $\Rightarrow U(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ für $r > R_2$