nichtlineares Medium: $D_i = \varepsilon_{ik}^{(1)} E_k + \varepsilon_{ikl}^{(2)} E_k E_l + \dots$

· homogenes Medium: ε bzw. ε_{ik} ortsunabh.

(Wenn man von einem homogenen Medium spricht (z.B. $\varepsilon = const$), setzt man meist auch die zeitl. Konstanz voraus → räuml. und zeitlich homogen)

· Diese Relationen gelten nur für zeitunabh. (bzw. langsam veränderl.) Felder.

· Bei bel. Zeitabhgkt.

Fourierzerlegung $\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r},\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

$\vec{D}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{r},\omega) e^{-i\omega t} d\omega$

Umkehrung: $\vec{E}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r},t) e^{i\omega t} dt$

$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{r},t) e^{i\omega t} dt$

$\vec{E}(\vec{r},-\omega) = \vec{E}^*(\vec{r},\omega)$

$\vec{D}(\vec{r},-\omega) = \vec{D}^*(\vec{r},\omega)$

[hinreichende Vor.: quadratintegrable Fktn.]

In einem linearen, homogenen (auch zeitlich) und isotropen Medium gilt dann: $\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega)$

⟹ nichtlokaler Zusammenhang $\vec{D}(\vec{r},t) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r},t)$

$\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r},t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau)\, d\tau\right]$ mit $G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega$

$\chi_e(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1$

$G(\tau)$: „Suszeptibilitätskern" (reell)

Kausalität: $G(\tau) \overset{!}{=} 0$ für $\tau < 0$

also: $\vec{D}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r},t) + \int_0^{\infty} G(\tau)\vec{E}(\vec{r},t-\tau)\, d\tau\right]$

Bem. 1) → Kramers-Kronig-Relationen für $\varepsilon(\omega)$ — 21.01.15

2) Gilt für alle $t < t_0$ $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t_0)$, so folgt $\vec{D}(\vec{r},t_0) =$

$\vec{D}(\vec{r},t_0) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t_0)\left[1 + \int_0^{\infty} G(\tau)\, d\tau\right]$

$= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t_0)\left[1 + \frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon_0} - 1\right]$

$= \varepsilon(0)\vec{E}(\vec{r},t_0)$ ✓

$\chi_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$

$= \int_0^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$

$\chi_e(0) = \int_0^{\infty} G(\tau)\, d\tau$

3) räumliche Nichtlokalität kommt noch dazu (oft vernachlässigbar)

→ $\varepsilon_{ij}(\vec{k},\omega)$ $\vec{k}$: Wellenzahlvektor

$D_i(\vec{k},\omega) = \varepsilon_{ij}(\vec{k},\omega) E_j(\vec{k},\omega)$

$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \vec{E}(\vec{k},\omega) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} d^3\vec{k}\, d\omega$

$(\vec{D})$ $(\vec{D})$

b) Stromdichte $\vec{j}$

Leitungsstrom (isotroper Leiter): $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ (Ohmsches Gesetz)

Leitungsstrom in Kristallen: $j_i = \sigma_{ij} E_j$ σ_{ij}: Leitfähigkeitstensor

Hall-Effekt: $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \alpha(\vec{E}\times\vec{B})$

... (vgl. a)) bei bel. Zeitabh.

In Leitern wird die räumliche Nichtlokalität i. U. wichtig!

c) Magnetische Feldstärke $\vec{H}$

Lineares isotropes Medium: $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ (oft $\mu \approx \mu_0$)

Permanentmagnete: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} - \vec{M})$ ↳ vorgegeben

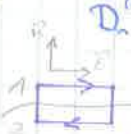
... (vgl. a))

5.4 Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

Ausgangspunkt: Integrale Form der Maxwellgln.

(1) $\oint \vec{B}\, d\vec{f} = 0$ $\qquad B_n^{(1)} - B_n^{(2)} = 0$ oder $\vec{n}(\vec{B}^{(1)} - \vec{B}^{(2)}) = 0$

$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = Q$ $\qquad D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta$ oder $\vec{n}(\vec{D}^{(1)} - \vec{D}^{(2)}) = \eta$



(2) $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = -\int \dot{\vec{B}}\, d\vec{f}$ $\qquad \dot{\vec{B}}$ endlich $\rightsquigarrow E_t^{(1)} - E_t^{(2)} = 0$ oder $\vec{n} \times (\vec{E}^{(1)} - \vec{E}^{(2)}) = \vec{0}$

$\oint \vec{H}\, d\vec{r} = \int (\vec{j} + \dot{\vec{D}})\, d\vec{f}$ $\qquad \dot{\vec{D}}$ endlich $\rightsquigarrow H_t^{(1)} - H_t^{(2)} = j_F^{\perp}$ oder $\vec{n} \times (\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}) = \vec{j}_F$; $j_F^{\perp}$ Komp. von $\vec{j}_F$ in Ri. $\vec{n} \times \vec{t}$

5.5 Der Poyntingsche Satz; Impulsbilanz

5.5.1 Der Poyntingsche Satz für Ladungen und Ströme im Vakuum

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \qquad | \cdot (-\vec{E})$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \qquad | \cdot \vec{H}$

$| \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$\rightsquigarrow \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j}\vec{E} - \vec{E}\dot{\vec{D}} - \vec{H}\dot{\vec{B}}$

$\rightsquigarrow \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{j}\vec{E} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2)$

$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{j}\vec{E}$ „Poyntingscher Satz"

Interpretation: $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = w_{el}$ elektr. Feldenergiedichte

$\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = w_{magn}$ magn. — " —

$w = w_{el} + w_{magn} = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})$ Energiedichte des elektromagn. Feldes

Der Poyntingsche Satz ist die Energiebilanzgleichung der Elektrodynamik.

Vgl. mit Kontinuitätsgl. (Ladungsbilanzgl.): $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

$\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$ Poynting-Vektor = el.magn. Energiestromdichte

Also: $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j}\vec{E}$

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}\int w\, d^3r + \oint \vec{S}\, d\vec{f} = -\int \vec{j}\vec{E}\, d^3r$

$\rightsquigarrow \frac{dW}{dt} + \oint \vec{S}\, d\vec{f} = -\int \vec{j}\vec{E}\, d^3r \qquad W = \int w\, d^3r$ el.magn. Feld-Energie im Volumen

Bedeutung von $\int \vec{j}\vec{E}\, d^3r$: Leistung an den Quellen (Quellen: sich bew. gelad. Teilchen)

Erläuterung: Mechanik (MP) $\frac{dT}{dt} = \vec{K}\vec{v}$ Leistung (Mit $T = E - m_0c^2$ gilt diese Formel auch in der SRT)

Änderung der gesamten kin. Energie der geladenen Teilchen im betrachteten Volumen (wir setzen voraus, dass keine Teilchen die Oberfläche des Volumens passieren).

$\frac{dT}{dt} = \sum_i \vec{K}_i \vec{v}_i = \sum_i q_i(\vec{E}(i) + \vec{v}_i \times \vec{B}(i))\vec{v}_i$ $\qquad \vec{E}(i), \vec{B}(i)$: el. Feldstärke, magn. Ind. ohne Einfluss am Ort des i-ten Teilchens

$= \sum_i q_i \vec{v}_i \vec{E}(i) = \int \vec{j}\vec{E}\, d^3r$

[formal: $\vec{j} = \sum q_i \vec{v}_i$, $\varrho = q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$]

$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}(T + W) = -\oint \vec{S}\, d\vec{f}$ Energiebilanz für ein Volumen

Also: Die el.magn. Feldenergie in einem Volumen kann sich nur dadurch ändern, dass Energie hinein- oder herausströmt oder in eine andere Energieformen umgewandelt wird. (kin. Energie der Teilchen, falls keine anderen Kräfte)

5.5.2 Der Poyntingsche Satz für Medien

23.01.15

Ausgangspunkt: $\vec{E}\cdot\dot{\vec{D}} + \vec{H}\dot{\vec{B}} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\vec{E}$ $\qquad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

(a) einfachster Fall: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ $\qquad \varepsilon, \mu, \sigma$ bel. Fkt. von $\vec{r}$

$\rightarrow \vec{E}\dot{\vec{D}} + \vec{H}\dot{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) \rightarrow$ Interpretation von $\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$ als el. und $\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$ als magn. Energiedichte weiter sinnvoll, d.h. $w = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})$ Energiedichte des el. m. Feldes
(Diese Formel ist für Medien nicht allgemein gültig!)

und $\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = -\underbrace{\frac{\vec{j}^2}{\sigma}}_{\text{joulesche Wärmeleistungsdichte}} < 0$ $\qquad \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \sigma\vec{E}^2 \begin{pmatrix} =0 \text{ f. } \sigma=0 \text{ \& } \vec{E} \text{ endlich} \\ =0 \text{ f. } \sigma=\infty \text{ \& } \vec{j} \text{ endlich} \end{pmatrix}$

(b) Quasistationäre Näherung (vgl. Kap. 4), bewegte Leiter

$\dot{\vec{D}}$ vernachlässigbar; $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$; $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

$\rightarrow \vec{H}\dot{\vec{B}} + \operatorname{div}\vec{S} = -\vec{j}\left(\frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{v}\times\vec{B}\right)$

$\vec{j}(\vec{v}\times\vec{B}) = \vec{v}(\vec{B}\times\vec{j}) = -(\vec{j}\times\vec{B})\vec{v}$ $\quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) + \operatorname{div}\vec{S} = -\frac{\vec{j}^2}{\sigma} - (\vec{j}\times\vec{B})\vec{v}$
(rechte Seite $=0$ außerhalb des Leiters!)

Integration über gesamten Raum
[$\vec{E} \propto \frac{1}{r^2}$, $\vec{H} \propto \frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$; S_n stetig (kein Oberflächenstrom wg. $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$)]

$\rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\int \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\, d^3r}_{W_{magn}} = -\underbrace{\int \frac{\vec{j}^2}{\sigma} d^3r}_{\text{joulesche Wär.}} - \underbrace{\int (\vec{j}\times\vec{B})\vec{v}\, d^3r}_{\text{Leistung der Lorentzkr.}}$ $\quad$ (el. Energiedichte offensichtlich vernachlässigbar)
[$\dot{\vec{S}}\vec{E}$ vernachlässigbar]

$\hookrightarrow$ Vor.: $0 < \sigma < \infty$

$\vec{v} = \vec{0}$ $\rightarrow$ freier Zerfall von Magnetfeldern
$\vec{v} \neq \vec{0}$: Umwandlung magn. $\leftrightarrow$ mech. Energie

Beispiel: 2 starre Leiterschleifen mit Relativbew. $[d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{s}]$, z.B. Bew. der Leiterschleife 1 (vgl. Kap. 3.4)

$$\vec{K}_{12}\cdot d\vec{s} = J_1 J_2\, dL_{12}$$

Energiebilanz: $\frac{dW_{magn}}{dt} = -R_1 J_1^2 - R_2 J_2^2 - J_1 J_2 \dot{L}_{12}$

Andererseits: $W_{magn} = \frac{1}{2}(L_{11}J_1^2 + L_{22}J_2^2) + L_{12}J_1J_2$
$\xrightarrow{\text{f. konst. Ströme}}$ $dW_{magn} = +J_1J_2\, dL_{12}$ $\quad$ („magn. Paradoxon")

Auflösung: Die Ströme bleiben nicht konstant, sondern sie ändern sich gemäß (auch für $R_1 = R_2 = 0$):

$$R_1J_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{11}J_1 + L_{12}J_2)$$
$$R_2J_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{22}J_2 + L_{12}J_1)$$

einfachster Fall: $R_1 = R_2 = 0$, $L_{11} = L_{22} = 0$

$\rightarrow dW_{magn} = J_1J_2\, dL_{12} + \underbrace{L_{12}\, d(J_1J_2)}_{(!)\ -2J_1J_2\, dL_{12}} = -J_1J_2\, dL_{12}$ ✓

(!) $L_{12}\, d(J_1J_2) = L_{12}(J_1\, dJ_2 + J_2\, dJ_1)$ $\qquad d(L_{12}J_2) = 0 \rightarrow L_{12}\, dJ_2 = -J_2\, dL_{12}$
$\qquad d(L_{12}J_1) = 0 \rightarrow L_{12}\, dJ_1 = -J_1\, dL_{12}$

5.5.3 Impulsbilanz

(für Ladungen und Ströme im Vakuum)

$\vec{k} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}$, $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$

Maxwell-Gl.: $\frac{\partial}{\partial x_i} = {}_{,i}$

$D_{i,i} = \rho$

$B_{m,m} = 0$

$\varepsilon_{npq} H_{q,p} = j_n + \dot{D}_n$

$\varepsilon_{npq} E_{q,p} = -\dot{B}_n$

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{irs} = \delta_{jr}\delta_{ks} - \delta_{js}\delta_{kr}$

Indexschreibweise: $k_a = \rho E_a + \varepsilon_{anm} j_n B_m$

$\rightarrow k_a = E_a D_{i,i} + \varepsilon_{anm}(-\dot{D}_n + \varepsilon_{npq} H_{q,p}) B_m$

$= E_a D_{i,i} - \varepsilon_{anm}(\dot{D}_n B_m + D_n \dot{B}_m) - \varepsilon_{anm}\varepsilon_{mpq} D_n E_{q,p} + (\delta_{aq}\delta_{mp} - \delta_{ap}\delta_{mq}) H_{q,p} B_m$

$= E_a D_{i,i} - \varepsilon_{anm}(D_n B_m)^{\cdot} - (\delta_{ap}\delta_{nq} - \delta_{aq}\delta_{np}) D_n E_{q,p} + H_{a,m} B_m - H_{m,a} B_m$

$= E_a D_{i,i} - \varepsilon_{anm}(D_n B_m)^{\cdot} - D_n E_{n,a} + D_n E_{a,n} + H_{a,m} B_m - H_{m,a} B_m$

$= -\varepsilon_{anm}(D_n B_m)^{\cdot} - \frac{\varepsilon_0}{2}(E_n E_n)_{,a} + (E_a D_n)_{,n} - \frac{\mu_0}{2}(H_m H_m)_{,a} + (H_a B_n)_{,n}$

$\rightarrow k_a = -\varepsilon_0\mu_0(\varepsilon_{anm} E_n H_m)^{\cdot} + T_{an,n}$ mit $T_{an} = E_a D_n + H_a B_n - \frac{1}{2}\delta_{an}(E_i D_i + H_i B_i)$

Maxwellscher Spannungstensor

$\varepsilon_{anm} E_n H_m = S_a = (\vec{E}\times\vec{H})_a$ Poyntingvektor

mit $\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$: $\underline{\vec{k} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\vec{S}\right) = \mathrm{Div}\,\overleftrightarrow{T}}$ (*) $\quad k_i + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}S_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$

28.01.15

Interpretation: 2. Newton'sches Axiom: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K}$ (in dieser Form auch in SRT gültig!)

$\vec{k}$: Kraftdichte auf Quellen

$\frac{d\vec{p}_{\text{Quellen}}}{dt} = \int \vec{k}\, d^3\vec{r}$ $\quad \vec{p}_{\text{Quellen}}$: Gesamtimpuls der im Volumen befindlichen Quellen

Voraussetzung hier: Quellen frei beweglich, keine anderen Kräfte & keine Passage von Quellen durch das Volumens ∂ (vgl. Kap. 5.5.1)

$\rightarrow$ Interpretieren $\frac{1}{c^2}S = \varepsilon_0\mu_0 S$ als Impulsdichte des elektromagnet. Feldes

$\rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\text{Quellen}} + \vec{p}_{\text{Feld}}) = \oint \overleftrightarrow{T}\vec{n}\, df$ $\quad \vec{p}_{\text{Feld}} = \frac{1}{c^2}\int \vec{S}\, d^3\vec{r}$ $\quad (\vec{n}\,df = d\vec{f})$

Impulsbilanz

vgl. Energiebilanz (Kap. 5.5.1): $\frac{d}{dt}(\underset{(T)}{W_{\text{Quellen}}} + \underset{(W)}{W_{\text{Feld}}}) = -\oint \vec{S}\vec{n}\, df$

$-T_{ik}$: „Impulsstromdichte-Tensor"

$\oint \overleftrightarrow{T}\vec{n}\, df$: in das Volumen <u>hineinfließender</u> (el. m.) „Impulsstrom"

(in Komponenten: $\frac{d}{dt}(p_i^{\text{Quellen}} + p_i^{\text{Feld}}) = \oint T_{ik}\, n_k\, df$

<u>Bem.</u>: 1) $E = mc^2$, Impulsdichte = Massenstromdichte

2) später: vierdimensionale Zusammenfassung von (*) und Poyntingschem Satz!

3) Impulsbilanz für Medien sehr kompliziert (Thermodynamik...)

<u>elektromagnetische Impulsdichte</u>: Kontroverse:

$\vec{D}\times\vec{B}$ (Minkowski 1908)

oder $\frac{1}{c^2}(\vec{E}\times\vec{H})$ (Abraham 1910)

(im Vakuum sind beide Ausdrücke gleich!)

5.6 Die elektromagnetischen Potentiale

5.6.1 Einführung der Potentiale

$\text{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ $\qquad$ $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$

$\text{div}\,\vec{B} = 0$ $\qquad$ $\text{div}\,\vec{D} = \rho$

Zur Erinnerung: a) Elektrostatik: $\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad}\,U$
b) stationäre Magnetfelder: $\text{div}\,\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$

Verallgemeinerung: • Vektorpotential $\vec{A}$: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ $\qquad$ $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

Eichtransformation: $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\varphi$ $\qquad$ $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

• Skalares Potential U:

$\text{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{E} = -\text{rot}\,\dot{\vec{A}} \Leftrightarrow \text{rot}\,(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad}\,U - \dot{\vec{A}}$ $\qquad$ $U = U(\vec{r}, t)$

Bei einer Eichtransformation $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\varphi$ darf sich $\vec{E}$ nicht ändern.

$\Rightarrow U' = U - \dot{\varphi}$ $\qquad$ Also: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$, $\vec{E} = -\text{grad}\,U - \dot{\vec{A}}$

Eichtransform.: $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\varphi$

$U' = U - \dot{\varphi}$

$(\vec{B}' = \vec{B},\ \vec{E}' = \vec{E})$

Die Maxwellgln. $\text{div}\,\vec{B} = 0$ und $\text{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ sind durch Einführung der Potentiale automatisch erfüllt.

5.6.2 Die inhomogenen Wellengleichungen

jetzt: Ladungen und Ströme im Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

verbleibende Maxwellgln.: $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$, $\text{div}\,\vec{D} = \rho$

Einsetzen von $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ & $\vec{E} = -\text{grad}\,U - \dot{\vec{A}}$ liefert:

(1) $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 (\text{grad}\,\dot{U} + \ddot{\vec{A}})$

(2) $-\varepsilon_0 \Delta U - \varepsilon_0\, \text{div}\,\dot{\vec{A}} = \rho$

gekoppelte Gln. für $\vec{A}$ und U. Entkopplung durch geschickte Wahl der Eichfunktion φ:

„Lorenzeichung" $\qquad$ (auch: „Lorenzkonvention")
Ludwig Lorenz 1867 (däni. Phys.)

$\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} = 0$ $\qquad$ $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ (vgl. später)

immer erreichbar?: Falls $\vec{A}$, U die Lorenzeichung nicht erfüllen, Eichtransformation $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\,\varphi$, $U' = U - \dot{\varphi}$

$\Rightarrow \text{div}\,\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{U}' = \text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} + \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}$

Bestimmen φ als Lsg. der Gl. $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\text{div}\,\vec{A} - \frac{1}{c^2}\dot{U}$,

also: $\Box\varphi = -\text{div}\,\vec{A} - \frac{1}{c^2}\dot{U}$ $\qquad$ $\Box$: d'Alembert-Operator

$\left(\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$

geht immer, φ nicht mal eindeutig bestimmt (bis auf Lösungen von $\Box\varphi = 0$)

$\Rightarrow \text{div}\,\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{U}' = 0$ $\qquad$ (lassen jetzt Striche wieder weg)

In Lorenzeichung folgt:

(1) $\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \text{grad}\,\text{div}\,\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}}$

(2) $-\varepsilon_0 \Delta U + \frac{\varepsilon_0}{c^2}\ddot{U} = \rho$

In kartes. Koord.: rot rot = grad div − Δ

$$\rightarrow \quad \Box\vec{A} = \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{A}} = -\mu_0\vec{j}, \qquad \Box U = \Delta U - \frac{1}{c^2}\ddot{U} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

dazu: $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} = 0$

Die Gln. $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, $\Box U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ nennt man „inhomogene Wellengln."

Bem.: 1) Bei Spezialisierung auf den zeitunabhängigen Fall kennen wir diese Gl. schon! ($\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, $\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$)

2) Andere Eichung: „Coulomb-Eichung" $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ (i. QED gern benutzt)

$\Rightarrow \Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ (wie in Elektrostatik)

und $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\operatorname{grad}\dot{U}$

3) Lorenzeichung ist lorentzinvariant! (vgl. später)
Hendrik Lorentz (Holländ. Physiker)

4) Die Gln. $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} U - \dot{\vec{A}}$, $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$, $\Box U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$, $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} = 0$ sind den Materialgln. für Ladungen und Ströme im Vakuum äquivalent.

5) $\Box(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U}) = 0 \rightarrow$ Kontinuitätsgl. $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$

6) $A^\mu = (\vec{A}, \frac{U}{c})$; $j^\mu = (\vec{j}, \varrho c)$ $\quad \mu = 1,2,3,4$

$\rightarrow \Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu$; $\quad A^\mu{}_{,\mu} = 0 \qquad x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = ct$

(vgl. später)

30.01.15

5.6.3 Die retardierten Potentiale

Lösungen von $\Box U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ und $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ mit $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} = 0$:

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r', \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3r'$$

Bem.: 1) $\Box U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$ & $\Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ erfüllt ✓

2) $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\dot{U} = 0$, falls $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ ✓

Diskussion: 1) Die retardierten Potentiale stellen spezielle Lösungen der inhomogenen Wellengln. dar.
Allg. Lösung: Hinzufügen der allg. Lsg. der homog. Gln. $\Box U = 0$, $\Box\vec{A} = \vec{0}$ (Beachtung der Lorenz-Eichung)
– wichtig bei Lösung von Anfangswertproblemen

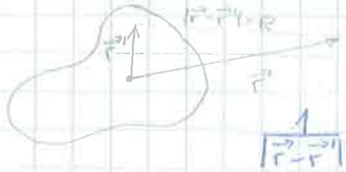
2) Oft ist die Situation die, dass das Feld (die Potentiale) ausschließlich als von den Quellen (bewegte geladene Teilchen) verursacht angesehen werden kann. Dann stellen die retardierten Potentiale die richtige Lösung dar!
- Ausstrahlungsbedingung!
- Kausalitätsprinzip!
- Auszeichnung einer Zeitrichtung

3) Avancierte Potentiale $t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \rightarrow t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$ ebenfalls Lsg.

(unterscheiden sich von retardierten Potentialen also um Lösungen der homogenen Gln.)

5.7 Die Ausstrahlung eines Systems von Ladungen und Strömen

5.7.1 Multipolentwicklung der retardierten Potentiale



$r=|\vec r|$

$|\vec r| \gg |\vec r'|$

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}=\frac{1}{r}+\frac{x_i x_i'}{r^3}+\dots$$

$$|\vec r-\vec r'|=r-\frac{x_i x_i'}{r}+\dots$$

$$R-r\approx-\frac{x_i x_i'}{r}$$

$$A_n=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{j_n(\vec r',t-\frac{R}{c})}{R}\,d^3\vec r'$$

Entwicklung von $j_n(\vec r',t-\frac{R}{c})$ in eine Taylorreihe in R bei $R=r$:

$$j_n(\vec r',t-\tfrac{R}{c})=j_n(\vec r',t-\tfrac{r}{c})+\frac{\partial j_n}{\partial R}\Big|_{R=r}(R-r)+\frac12\frac{\partial^2 j_n}{\partial R^2}\Big|_{R=r}(R-r)^2+\dots$$

$$\frac{\partial j_n}{\partial R}=\dot j_n\left(-\frac1c\right)$$

$$\frac{\partial^2 j_n}{\partial R^2}=\frac{1}{c^2}\ddot j_n\,,\ \dots$$

$$\frac{j_n(\vec r',t-\frac{R}{c})}{R}=\left[j_n(\vec r',t-\tfrac{r}{c})-\frac1c\dot j_n(\vec r',t-\tfrac{r}{c})\cdot(R-r)+\frac12\ddot j_n\frac{(R-r)^2}{c^2}+\dots\right]\left[\frac1r+\frac{x_i x_i'}{r^3}+\dots\right]$$

Sei ω eine char. Frequenz für Zeitabhängigkeit der Ladungs- und Stromverteilung, L die Ausdehnung

$\Rightarrow$ Die Terme j_n, $\dot j_n\frac{R-r}{c}$, $\ddot j_n\frac{(R-r)^2}{c^2}$, … werden jeweils um einen Faktor der Größenordnung $\frac{\omega L}{c}$ kleiner.

Setzen voraus: $\frac{c}{\omega}\gg L$ (Bem.: D.h. $\lambda\gg L$, vgl. später)

Vernachlässigen alle Terme ab $\ddot j_n$. Beim $\dot j_n$-Term gehen wir nur bis $\frac1r$ (bei j_n bis $\frac{1}{r^2}$):

$$\Rightarrow \frac{j_n(\vec r',t-\frac{R}{c})}{R}\approx\frac{j_n(\vec r',t-\frac{r}{c})}{r}+\frac{x_i x_i'\,j_n(\vec r',t-\frac{r}{c})}{r^3}+\frac{x_i x_i'\,\dot j_n(\vec r',t-\frac{r}{c})}{c r^2}$$

Einsetzen in Integral:

$$\Rightarrow A_n\approx\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac1r a_n(t-\tfrac{r}{c})+\frac{x_i}{r^3}a_{ni}(t-\tfrac{r}{c})+\frac{x_i}{cr^2}\dot a_{ni}(t-\tfrac{r}{c})\right]$$

mit $a_n(t-\frac{r}{c})=\int j_n(\vec r',t-\frac{r}{c})\,d^3\vec r'$, $a_{ni}(t-\frac{r}{c})=\int x_i' j_n(\vec r',t-\frac{r}{c})\,d^3\vec r'$

2 Voraussetzungen: ① $r\gg L$
② $\frac{c}{\omega}\gg L$

Analog Entwicklung von U:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[\varrho(\vec r',t-\tfrac{r}{c})-\dot\varrho(\vec r',t-\tfrac{r}{c})\frac{R-r}{c}+\dots\right]\left[\frac1r+\frac{x_i x_i'}{r^3}+\dots\right]d^3\vec r'$$

$$\Rightarrow U\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}+\frac{x_i p_i}{r^3}+\frac{x_i\dot p_i}{cr^2}\right]$$

mit $Q=\int\varrho(\vec r',t-\frac{r}{c})\,d^3\vec r'$

$p_i(t-\frac{r}{c})=\int x_i'\varrho(\vec r',t-\frac{r}{c})\,d^3\vec r'$

Kontinuitätsgl. $\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec j=0\ \rightarrow\ \dot Q=0$ und $a_n=\dot p_n$

5.7.2 Physikalische Interpretation der Terme

Q: el. Ladung (konstant!) Monopolterm

(i) $U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, $\vec A=0$ Dieser Term ist der einzige mit Kugelsymmetrie

$\Rightarrow$ Das Außenfeld einer bel. kugelsymmetrischen Ladungsvert. und Stromverteilung ist statisch (gleich dem elektrostatischen Feld einer Punktladung).

$\vec p$: el. Dipol

(ii) $U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec p\,\vec r}{r^3}+\frac{\dot{\vec p}\,\vec r}{cr^2}\right)$, $\vec A=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec p}}{r}$ $\vec p=\vec p(t-\frac{r}{c})$!

Bem. 1) Die Terme (i) und (ii) sind jeweils exakte Lösungen von $\Box U=0$, $\Box\vec A=\vec 0$, $\operatorname{div}\vec A+\frac{1}{c^2}\dot U=0$ (für $r\neq 0$!)

2) Im allg. zeitabhängigen Fall ist $\vec p$ auch für $Q\neq 0$ nicht wegtrans-

formierbar? (Ladungsschwerpunkt zeitabhängig?)

a_{ni}: antisymm. Anteil → magn. Dipol [Bezug gilt auch noch höhere Terme
symmetr. Anteil → el. Quadrupol (zeitabh.) in U?]
genauer Kap. 5.7.4?

5.7.3 Das Feld eines zeitabh. Dipols

04.02.15

$\vec H = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec A = \frac{\dot{\vec p}\times\vec r}{4\pi r^3} + \frac{\ddot{\vec p}\times\vec r}{4\pi c r^2}$

$\vec E = -\operatorname{grad} U - \dot{\vec A} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\operatorname{grad}\frac{\vec p\vec r}{r^3} + \operatorname{grad}\frac{\dot{\vec p}\vec r}{cr^2} + \frac{\ddot{\vec p}}{c^2 r}\right)$

$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec p\vec r}{r^3}+\frac{\dot{\vec p}\vec r}{cr^2}\right)$, $\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec p}}{r}$, $\vec p = \vec p(t-\frac{r}{c})$

$\left(\operatorname{rot}\frac{\dot{\vec p}(t-\frac rc)}{r}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\dot p_k(t-\frac rc)}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}$

$\rightsquigarrow \vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\ddot{\vec p}}{c^2 r}+\frac{(\ddot{\vec p}\vec r)\vec r}{c^2r^3} - \frac{\dot{\vec p}}{cr^2}+\frac{3(\dot{\vec p}\vec r)\vec r}{cr^4}-\frac{\vec p}{r^3}+\frac{3(\vec p\vec r)\vec r}{r^5}\right]$

Nahfeld ($r\to 0$): Terme mit $\frac{1}{r^3}$ dominieren $\vec E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\vec p}{r^3}+\frac{3(\vec p\vec r)\vec r}{r^5}\right]$, $\vec H\approx\vec 0$

- wie Feld eines Dipols in Elektrostatik, $\vec p(t-\frac rc)\approx\vec p(t)$ Retardierung vernachlässigbar!

[Im Sinne der Multipolentwicklung ist das „Nahfeld" durch $L \le r \ll \frac{c}{\omega}$ charakterisiert? (analog Fernfeld: $r\gg\frac c\omega$)
Vor waren $r\gg L$ und $\frac c\omega \gg L$]

Fernfeld ($r\to\infty$): Terme mit $\frac1r$ dominieren $\vec H\approx\frac{\ddot{\vec p}\times\vec r}{4\pi c r^2}$

$\vec E\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\ddot{\vec p}}{c^2r}+\frac{(\ddot{\vec p}\vec r)\vec r}{c^2r^3}\right] = \frac{(\ddot{\vec p}\times\vec r)\times\vec r}{4\pi\varepsilon_0c^2r^3}$ $\rightsquigarrow \vec E = \vec H\times\frac{\vec r}{\varepsilon_0 c r}$

$\rightsquigarrow$ Poyntingvektor $\vec S=\vec E\times\vec H\approx\frac{1}{\varepsilon_0 cr}(\vec H\times\vec r)\times\vec H = \frac{1}{\varepsilon_0 cr}\left[\vec H^2\vec r - \underbrace{(\vec H\vec r)}_{=0}\vec H\right]$

$\rightsquigarrow \vec S\approx\frac{(\ddot{\vec p}\times\vec r)^2\vec r}{16\pi^2c^3\varepsilon_0 r^5}$ $\parallel \vec r$

- $\vec E$, $\vec H$ und $\vec r$ stehen paarweise ⊥ aufeinander.
- Energiestromdichte zeigt in (positive?) $\vec r$-Richtung.

also $\vec S\approx S_r\cdot\frac{\vec r}{r}$ mit $S_r\approx\frac{(\ddot{\vec p}\times\vec r)^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0 r^4}$

In Richtung von $\ddot{\vec p}(t-\frac rc)$ verschwindet die Energiestromdichte ($\ddot{\vec p}\times\vec r=\vec 0$)

Abgestrahlte Energie: Energiefluss durch Oberfläche einer großen Kugel

$\frac{dW_{ges}}{dt} = -\oint\vec S\, d\vec f = -\iint S_r r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ (wähle z-Achse in Ri. von $\ddot{\vec p}(t-\frac rc)$)

$S_r = \frac{\ddot{\vec p}^2 r^2\sin^2\vartheta}{16\pi^2c^3\varepsilon_0 r^4}+\dots$ (+ sind Terme, die stärker als $\frac{1}{r^2}$ abfallen → tragen nichts bei? [$r\to\infty$])

$\rightsquigarrow \frac{dW_{ges}}{dt} = -\frac{\ddot{\vec p}^2}{16\pi^2c^3\varepsilon_0}\, 2\pi\int_0^\pi\sin^3\vartheta\, d\vartheta$ $\int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac43$

$\rightsquigarrow \frac{dW_{ges}}{dt} = -\frac{\ddot{\vec p}^2(t-\frac rc)}{6\pi\varepsilon_0c^3}<0$

Bem.: 1) Bewegte Punktladung: $\vec p = Q\vec r$ $\rightsquigarrow \ddot{\vec p}=Q\ddot{\vec r}$, d.h. beschleunigte Ladungen strahlen Energie ab? [Atommodell ??]

2) Sei $\vec p(t) = \vec p_0\sin\omega t$

$\rightsquigarrow \vec p(t-\frac rc) = \vec p_0\sin(\omega t - kr)$ mit $k=\frac\omega c = \frac{2\pi}\lambda$ λ Wellenlänge

(Man nennt das Fernfeld auch „Wellenzone"!)

$\ddot{\vec p} = -\omega^2\vec p$ $\rightsquigarrow \underbrace{\left\langle\frac{dW_{ges}}{dt}\right\rangle}_{\text{Zeitmittel (Faktor }\frac12)} = -\frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0c^3}$

3) In kleinen Raumbereichen kann das Feld in der Wellenzone als ebene Welle betrachtet werden (für $\vec{p}(t) - \vec{p}_0 \sin\omega t$ als ebene monochromat. Welle?), vgl. Kap. 5.8!

5.7.4 Multipolstrahlung

Für die Berechnung von $\frac{dW_{es}}{dt} = -\oint \vec{S}\, d\vec{f}$ kommt es bei der Integration über eine große Kugeloberfläche $(r \to \infty)$ nur auf den $\frac{1}{r^2}$-Anteil von $\vec{S}$ an!

$\rightarrow$ nur $\frac{1}{r}$-Anteile von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ $\rightarrow$ nur $\frac{1}{r}$-Anteile von $\vec{A}$ und U (ohne Monopol) entscheidend

$$A_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}\left[a_n\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{x_m}{cr}\, \dot{a}_{nm}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \dots\right]$$

vgl. Kap. 5.7.1, $a_n = \dot{p}_n$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{1}{r}\left[\frac{x_n}{cr}\, a_n\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{x_n x_m}{c^2 r^2}\, \dot{a}_{nm}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \dots\right]$$

(bei U ist hier noch ein Term dabei, der von ϱ herrührt)

[Für $\frac{1}{r}$-Anteile der Felder gilt $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\, \dot{\vec{A}} \times \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\, \vec{H} \times \frac{\vec{r}}{r}$

$U = c\, \frac{x_n}{r} A_n$ (ohne Monopol) $\rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 c}\, \vec{H}^2\, \frac{\vec{r}}{r}$]

$\rightarrow$ (nach längerer Rechnung)

$$\frac{dW_{es}}{dt} = -\underbrace{\frac{\ddot{\vec{p}}^{\,2}}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}_{\text{el. Dipolstrahl.}} - \underbrace{\frac{\ddot{\vec{m}}^{\,2}}{6\pi\mu_0 c^3}}_{\text{magn. Dipolstrahl.}} - \underbrace{\frac{\dddot{D}_{nm}\dddot{D}_{nm}}{720\pi\varepsilon_0 c^5}}_{\text{el. Quadrupolstrahl.}} - \dots$$

$\ddot{\vec{p}}^{\,2} = \ddot{p}_i \ddot{p}_i$, $\ddot{\vec{m}}^{\,2} = \ddot{m}_i \ddot{m}_i$

$\frac{1}{2}(a_{ni} - a_{in}) = \frac{1}{\mu_0}\, \varepsilon_{ink}\, m_k$

$\frac{1}{2}(a_{ni} + a_{in}) - \frac{1}{3} a_{ll}\, \delta_{ni} = \frac{1}{6}\dot{D}_{ni}$

Bem.: 1) Für ein abgeschlossenes System aus Teilchen mit einheitlicher spezifischer Ladung $\frac{q}{m_0}$ verschwindet die el. und die magn. Dipolstrahlung (folgt aus Schwerpunkts- und Drehimpulssatz)

a) Kap. 3.3.3 $\vec{m} = \frac{\mu_0 q}{2m_0}\vec{P}$ $\quad\vec{P}$ - Drehimpuls

b) Ladungsschwerpunkt = Massenschwerpunkt

In diesem Fall ist die el. Quadrupolstrahlung der führende Term!

2) Gravitation: Einsteinsche Quadrupolformel! (Ladung $\rightarrow$ Masse?)

5.8 Elektromagnetische Wellen

06.02.15

Für freie Felder ($\varrho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) im Vakuum folgt aus den homogenen Wellengln. $\Box \vec{A} = \vec{0}$, $\Box U = 0$ sofort (mit $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad} U - \dot{\vec{A}}$)

$$\Box \vec{E} = \vec{0}, \quad \Box \vec{H} = \vec{0} \quad (*) \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Bem.: $(*)$ folgen auch direkt aus den quellenfreien Maxwell-Gln., aber nicht umgekehrt! Gesucht sind also nur reelle Lösungen von $(*)$, die den Maxwellgln. genügen

$\operatorname{rot}\vec{H} = \dot{\vec{D}}$, $\operatorname{div}\vec{D} = 0$
$\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Einfachster Fall: $\vec{E} = E_z(x,t)\,\vec{e}_z$ $\quad \Box\vec{E} = \vec{0} \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$

Allg. Lösung: $E_z = f(x-ct) + g(x+ct)$ $\quad$ ($\operatorname{div}\vec{D} = 0$ erfüllt) Übung: $\vec{H}$?

gestaltstreue Ausbreitung (keine Dispersion) mit Lichtgeschw. c in pos. bzw. neg. x-Richtung

Begriffsbildung: **Welle**: jede (zeitabhängige) Lösung der Wellengl.

ebene Welle: $\vec{E}, \vec{H}$ auf Ebenen konstant

Ebenengl.: $\vec{k}\vec{r} = $ const.

$\vec{E}, \vec{H}$ Funktionen von $\vec{k}\vec{r} - \omega t$ (Das einfachste Bsp. ist für $\vec{k} = k\vec{e}_x$ enthalten.)

ebene monochromat. Welle: harmonische Abhängigkeit von der Zeit ($\propto e^{-i\omega t}$)

$\rightarrow$ Ansatz: $\vec{E} = \hat{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$, $\hat{\vec{H}} = \hat{\vec{H}}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ $\quad$ o. B. d. A. $\omega > 0$

Bem.: Die homogenen Wellenglg. sind für bel. Funktionen von $\vec{k}\vec{r}-\omega t$ erfüllt, falls $k^2 \overset{?}{=} \frac{\omega^2}{c^2}$ $(k=|\vec{k}|)$

Physikal. Größen: $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}}$, $\vec{H} = \mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}}$ (Maxwellglg. linear, reelle Koeff.)

Auswertung der Maxwell-Glg.: $\frac{\partial}{\partial x} \to i k_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

$\rightsquigarrow \mathrm{div} \to i\vec{k}\,\cdot$, $\mathrm{rot} \to i\vec{k}\times$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \to \vec{k}\cdot\hat{\vec{E}} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \to \vec{k}\cdot\hat{\vec{H}} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \to \vec{k}\times\hat{\vec{E}} = \mu_0\omega\hat{\vec{H}}$,
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \dot{\vec{D}} \to \vec{k}\times\hat{\vec{H}} = -\varepsilon_0\omega\hat{\vec{E}}$

· Diese Beziehungen gelten auch für die Realteile? ($\vec{k}$ reell?)

$\rightsquigarrow \vec{k}\times(\vec{k}\times\hat{\vec{H}}) = -\varepsilon_0\omega\vec{k}\times\hat{\vec{E}} = -\varepsilon_0\mu_0\omega^2\hat{\vec{H}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\vec{H}}$

$\rightsquigarrow \underbrace{\vec{k}(\vec{k}\hat{\vec{H}})}_{=0\ (\vec{H}\perp\vec{k})} - \hat{\vec{H}}k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\vec{H}} \rightsquigarrow k^2\hat{\vec{H}} = \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\vec{H}} \rightsquigarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Ergebnis: Für vorgegebenes ω kann man einen bel. Vektor $\vec{k}$ wählen, der diese Beziehung erfüllt, sowie einen auf $\vec{k}$ senkrecht stehenden komplexen Vektor $\hat{\vec{E}}_0$: $\vec{k}\hat{\vec{E}}_0 = 0$
Damit ist $\vec{E}$ und über $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{k}\times\vec{E}$ auch $\vec{H}$ bestimmt.

$\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\hat{\vec{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right]$

D.h. die Richtung von $\vec{k}$ ist frei bei vorgeg. ω. Oder $\vec{k}$ vollkommen bel. vorgeben $\to \omega = kc$

Man prüft leicht nach, dass dann alle Maxwellglgn. erfüllt sind.

Diskussion:

(1) Flächen gleicher Phase $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \mathrm{const}$ sind Ebenen $\perp$ zu $\vec{k}$; diese Flächen wandern mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung von $\vec{k}$: Wahl des Koordinatensystems: $\vec{k} = (k,0,0) \rightsquigarrow \vec{k}\vec{r} - \omega t = kx - \omega t = k(x - \frac{\omega}{k}t)$
$= k(x - ct)$

räumliche und zeitl. Periodizität: $e^{i(kx-\omega t)}$ bleibt gleich, wenn sich die Phase um 2π ändert

$\to$ a) $x \to x + \frac{2\pi}{k}$ (t fest) $\quad \frac{2\pi}{k} = \lambda$ Wellenlänge

b) $t \to t + \frac{2\pi}{\omega}$ (x fest) $\quad \frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{\nu}$ $\quad \nu$: Frequenz

Aus $k = \frac{\omega}{c}$ folgt also $\lambda\nu = c$

$\vec{k}$: „Wellenzahlvektor": Richtung: Ausbreitungsrichtung der Welle
Betrag: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

(2) $\vec{k}\vec{E} = 0$, $\vec{k}\vec{H} = 0$ $\rightsquigarrow \vec{E}, \vec{H} \perp$ zur Ausbreitungsrichtung, d.h. elmagn. Wellen sind transversal. Außerdem: $\vec{E}\perp\vec{H}$

(3) Poyntingscher Satz

$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{S} = 0 \qquad w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(\mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}})^2 + \frac{1}{2}\mu_0(\mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}})^2$

$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = (\mathrm{Re}\,\hat{\vec{E}})\times(\mathrm{Re}\,\hat{\vec{H}})$ erst Realteile bilden!

Es ist $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{k}\times\vec{E}$ und $\vec{k}\perp\vec{E} \rightsquigarrow |\vec{H}| = \frac{k}{\mu_0\omega}|\vec{E}|$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2 = \frac{1}{2}\mu_0\frac{k^2}{\mu_0^2\omega^2}\vec{E}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$ $\quad (\omega = kc,\ c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0})$

$\rightsquigarrow$ el. u. magn. Energiedichte sind gleich groß !!

$\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{E}\times(\vec{k}\times\vec{E}) = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0\omega}\vec{k} \rightsquigarrow |\vec{S}| = \frac{k}{\mu_0\omega}\vec{E}^2 = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E}^2 = c\varepsilon_0\vec{E}^2 = cw$

also: $\vec{S} = wc\cdot\frac{\vec{k}}{k}$!! $\vec{S}$ zeigt in Richtung von $\vec{k}$ und die gesamte Energie strömt mit Lichtgeschw.!! „reines Strahlungsfeld"