

Bem.: • Effekt verständlich: Bei inhomogener Polarisation kann durch Ladungsverteilungen in einem Volumenelement eine Netto-Ladung entstehen:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_p d^3\vec{r} = 0 \text{ natürlich, sagt auch der Gaußsche Satz}$$

• Grenzfläche zum Vakuum: $\vec{n} \uparrow \frac{\vec{P} \cdot \vec{O}}{\vec{O} \neq 0}$

→ Oberflächenpolarisationsldg: $\eta_p = \vec{P}_n$
(vgl. Ableitung von $\eta = D_n$ auf Leiteroberfläche?)

$$\Rightarrow \Delta U = -\frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \Rightarrow \text{div grad } U = -\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div } \vec{P})$$

mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ folgt also $\text{div } \vec{D} = \rho$ und (im einfachsten Fall)

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ mit $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ „Dielektrizitätskonstante“, kann
unabh. sein
 $1 + \chi_e = \epsilon_r$, $\epsilon_0 = \epsilon_0 \epsilon_r$, ϵ_r „relative Dielektrizitätskonst.“

Bem.: Jetzt also prinzipieller Unterschied zwischen \vec{E} und \vec{D} !

Quellen von \vec{D} : ρ („wahre Ladungen“)

Quellen von \vec{E} : $\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p)$

Im allgemeinen Fall: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{r}) \Rightarrow \vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{r})$

Die Grundgleichungen der Elektrostatik der Dielektrika sind damit:

$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$, $\text{div } \vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}$ (im einfachsten Fall)

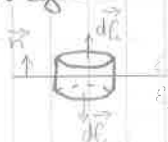
oft: ϵ stückweise konstant → wichtig: Übergangsbed. an der Grenzfläche zweier Medien

$(\text{div } (\epsilon \vec{E})) = \epsilon \text{div } \vec{E} + \vec{E} \text{ grad } \epsilon$
(→ nicht def., wenn ϵ unstetig)

1.3.2 Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

integrale Form der Maxwell-Gln.: $\oint \vec{D} d\vec{r} = Q$, $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$

vor: \vec{E}, \vec{D} endlich



flache Dose → Mantelfläche vernachlässigbar

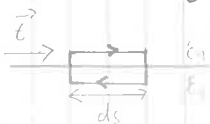
$$\Rightarrow \int \vec{D}^{(1)} d\vec{r}_1 + \int \vec{D}^{(2)} d\vec{r}_2 = \int \eta d\vec{r} \quad d\vec{r}_1 = \vec{n} d\vec{r}_1, d\vec{r}_2 = -\vec{n} d\vec{r}_2$$

$$D_n = \vec{D} \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow D_n^{(1)} d\vec{r} - D_n^{(2)} d\vec{r} = \eta d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \underline{D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta} \quad \text{vgl. linker dort war } \vec{D}^{(2)} = \vec{0} \Rightarrow D_n^{(1)} = \eta$$

meist: $\eta = 0 \Rightarrow D_n$ stetig $\leftrightarrow \epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_2 E_n^{(2)}$



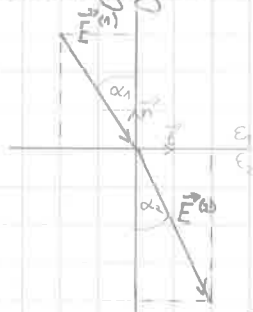
$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow E_t^{(1)} ds - E_t^{(2)} ds = 0 \Rightarrow E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

$$E_t \text{ stetig} \leftrightarrow \frac{D_t^{(1)}}{\epsilon_1} = \frac{D_t^{(2)}}{\epsilon_2}$$

\vec{e} bel. tangentialer Einheitsvektor $E_t = \vec{E} \cdot \vec{e}$

Bruchgesetz der Feldlinien:



$$\vec{D} \parallel \vec{E}$$

Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponenten von \vec{E} liegen beide Vektoren in einer Ebene mit \vec{n} und es gilt:

$$E^{(1)} \sin \alpha_1 = E^{(2)} \sin \alpha_2$$

$$D^{(1)} \cos \alpha_1 = D^{(2)} \cos \alpha_2$$

$$E = |\vec{E}|$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow D = \epsilon E$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Bild gilt für $\epsilon_1 > \epsilon_2$

Feldlinien werden beim Übergang in ein Medium mit kleinerem ϵ zum Lot hin gebrochen.

1.3.3 Bestimmung der Felder bei Vorgabe von ρ , ϵ und Leiteranordnungen (inkl. U, bzw. Q_i)

26.11.14

geg: $\rho(\vec{r})$, $\epsilon(\vec{r})$, Leiter mit U, bzw. Q_i

ges: \vec{E} , \vec{D} als Lösungen von rot $\vec{E} = \vec{0}$, div $\vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

mit $\vec{E} = -\text{grad } U$ folgt (äquivalent)

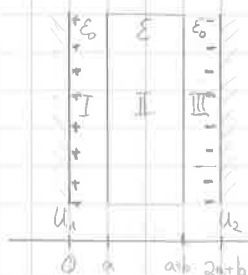
$$\text{div}(\epsilon \text{grad } U) = -\rho$$

OK: ϵ stückweise konstant $\Rightarrow \Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon}$ in jedem Teilbereich

Übergangsbed. an Grenzflächen: (1) U stetig ($\Leftrightarrow E_{\perp}$ stetig, ρ)

$$(2) D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta, \text{ also } \epsilon_2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n} = \eta$$

Beispiel: Plattenkondensator (Sei $U_1 > U_2$)



$$2a+b=d \quad \rho=0, \eta=0 \text{ bei } x=a \text{ und } x=a+b$$

$$\Rightarrow \Delta U = 0 \text{ in I, II, III}$$

$$\text{I: } U = a_1 x + b_1$$

$$\text{II: } U = a_2 x + b_2$$

$$\text{III: } U = a_3 x + b_3$$

4 Übergangsbed. (U und $\epsilon \frac{\partial U}{\partial x}$ stetig bei $x=a, x=a+b$)
& 2 Vorgaben ($U(0)=U_1, U(2a+b)=U_2$)

$$\Rightarrow \epsilon_0 a_1 = \epsilon_0 a_2 = \epsilon_0 a_3 \Rightarrow a_3 = a_1, a_2 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} a_1$$

$$b_1 = U_1, b_2 = U_1 + a_1 a (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}), b_3 = U_1 - a_1 b (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \text{ und}$$

$$U_1(2a+b) + b_3 = U_2$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{U_2 - U_1}{d - b(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } U, \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow E_x^I = -a_1$$

$$D_x^I = D_x^{II} = D_x^{III} = \epsilon_0 E_x^I = \epsilon E_x^{II} = \epsilon_0 E_x^{III} = \frac{\epsilon_0 (U_1 - U_2)}{d - b(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$P_x^{II} = D_x^{II} - \epsilon_0 E_x^{II} = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \frac{\epsilon_0 (U_1 - U_2)}{d - b(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})}$$





$$\eta_P = P_n$$

$$\rightarrow -\eta_P^{(1)} = \eta_P^{(2)} = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \eta_1$$

$$x=0: \eta_1 = D_x^I \quad x=d: \eta_2 = -D_x^{III} = -\eta_1$$

Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_2} = \frac{\epsilon_0 F}{d - b(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})}$$

$$Q_1 = \eta_1 F = -Q_2 = Q$$

Diskussion:

1) Kapazität wird größer mit wachsendem b und wachsendem ϵ

2) Grenzfälle: (a) $b \rightarrow 0$ (oder $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$): $C = \frac{\epsilon_0 F}{d}$

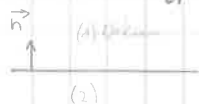
(b) $a \rightarrow 0$: $C = \frac{\epsilon F}{d}$ (\rightarrow Messvorschrift für ϵ)

(c) $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \rightarrow \infty$: $C = \frac{\epsilon F}{2a}$

Für $\epsilon_r \rightarrow \infty$ verhält sich ein Dielektrikum in der Elektrostatik, wenn man nur nach dem elektr. Feld (E -Feld) fragt, wie ein Leiter:

innen: $\vec{E} = \vec{0}$, $U = \text{const.}$

Unterschied: Im Leiter gilt auch $\vec{D} = \vec{0}$ im Dielektrikum ($\epsilon_r \rightarrow \infty$). $\vec{D} = \vec{P}$ Oberfläche: Falls das Dielektrikum keine wahre Oberflächenladung trägt, übernimmt die Polarisationsoberflächenladung η_P vollständig die Rolle von η .



$$\text{allg.: } D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta$$

Falls (2) Leiter: $D_n^{(1)} = \eta$

Falls (2) Dielektrikum ($\epsilon_r \rightarrow \infty$): $D_n^{(1)} = D_n^{(2)} = P_n = \eta_P$

Beispiel: Dielektrische Kugel im homogenen Feld



Kugelkoordin. $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$



$$\vec{E} = -\text{grad } U$$

$\epsilon \rightarrow \infty$ homogenes Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z = \vec{E}_0$

$$U = -E_0 z = -E_0 r \cos \vartheta$$

(Normierung: $U=0$ für $z=0$)

\rightarrow Ansatz: $U^{(a)} = -E_0 r \cos \vartheta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \vartheta)$ vgl. Kap. 1.1.4

($\Delta U = 0$ innen & außen)

Axialsymmetrie $\rightarrow \varphi$ -unabh.

$$U^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n P_n(\cos \vartheta)$$

$$r=R: U^{(i)} = U^{(a)}, \quad \epsilon_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial r} = \epsilon_1 \frac{\partial U^{(a)}}{\partial r}$$

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$$

Diese Gln. müssen $\forall \vartheta$ erfüllt sein! Die $P_n(\cos \vartheta)$ sind linear unabh. \rightarrow Koeffizientenvergleich.

$$n \neq 1: b_n R^n = \frac{a_n}{R^{n+1}}, \quad \epsilon_2 n b_n R^{n-1} = \epsilon_1 (n+1) \frac{a_n}{R^{n+2}} \rightarrow a_n = b_n = 0$$

$$n=1: b_1 R = -E_0 R + \frac{a_1}{R^2}, \quad \epsilon_2 b_1 = \epsilon_1 (-E_0 - 2 \frac{a_1}{R^3})$$

$$\Rightarrow b_1 = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0, \quad a_1 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} R^3 E_0$$

$$\Rightarrow U = \begin{cases} -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 z, & r \leq R \\ -E_0 z + \frac{p z}{4\pi\epsilon_1 r^3}, & r \geq R \end{cases} \quad \text{mit } p = 4\pi\epsilon_1 a_1 = 4\pi\epsilon_1 R^3 \epsilon_0 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Discussion: - innen: homogenes Feld in z-Richtung, Beträge:
 $E^{(1)} = \frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0, D^{(1)} = \epsilon_2 E^{(1)}, P^{(1)} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E^{(1)}$

28.11.14

Bem.: Werden Körper beliebiger Gestalt in ein homogenes Feld gebracht, ist das Innenfeld i. A. nicht homogen!
 Ausnahme: Ellipsoide (Kugel ist Spezialfall)

$$\begin{aligned} - \epsilon_1 = \epsilon_2 &: E^{(1)} = E_0 \\ \epsilon_2 > \epsilon_1 &: E^{(1)} < E_0 \quad (\text{z.B. } \epsilon_1 = \epsilon_0) \\ \epsilon_2 < \epsilon_1 &: E^{(1)} > E_0 \quad (\text{z.B. } \epsilon_2 = \epsilon_0) \end{aligned}$$

- außen: homogenes Feld überlagert von Dipolfeld
 bei $\epsilon_1 = \epsilon_0$:

$$\vec{P}^{(1)} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 \vec{e}_z$$

$$\int \vec{P} d^3\vec{r} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 \vec{e}_z = p \vec{e}_z$$

$$- \epsilon_1 = \epsilon_0, \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \rightarrow \infty: \quad b_1 = 0 \Rightarrow U^{(1)} = 0 \Rightarrow \vec{E}^{(1)} = \vec{0}$$

\vec{E} -Feld wie bei leitender Kugel ($Q=0$)
 im homogenen Feld!

Beispiel: Punktladung vor dielektrischem Halbraum



$$\text{Ansatz: } U^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{Q'}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right) \quad (\text{Bereich (1): } \Delta U = -\frac{1}{\epsilon_1} Q \delta(\vec{r} - \vec{r}_1))$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q'}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \quad (\text{Bereich (2): } \Delta U = 0)$$

Q' und a' so bestimmen, dass auf der Grenzfläche gilt:
 $U^{(1)} = U^{(2)}; \quad \epsilon_1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial n}$

13.4 Energie und Kraftdichte

Für $\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}$ gilt $W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3\vec{r}$ (Bew. später)

Bem. Mit div $\vec{D} = \rho$ und $\vec{E} = -\text{grad } U$ kommt man auch wieder zur Formel $W = \frac{1}{2} \int \rho U d^3\vec{r}$.

Kraftdichte: \vec{k} Kraft auf Volumenelement $= \vec{k} d^3\vec{r}$
 Man könnte denken: $\vec{k} = (\rho + \rho_p) \vec{E}$ oder $\vec{k} = \rho \vec{E} + (\vec{P} \cdot \text{grad}) \vec{E}$

Aber gesucht ist die mittlere Kraftdichte; ρ, ρ_p und \vec{E}, \vec{P} sind auch gemittelte Größen; für Produkt zweier Größen A, B und ihre Mittelwerte $\langle A \rangle, \langle B \rangle$ gilt: $\langle AB \rangle \neq \langle A \rangle \langle B \rangle$

Bestimmung von \vec{k} aus Energie

Arbeit bei kleiner Verschiebung der Volumenelemente infolge der Kraft $\vec{k} d^3\vec{r}$:
 $\delta A = \int \vec{k} \cdot \delta \vec{s} d^3\vec{r}$ gibt auf Kosten der Feldenergie, also

$$\delta W = - \int \vec{k} \cdot \vec{s} d^3 \vec{r}$$

$\vec{s}(\vec{r})$ Verschiebungsfeld (infinitesimal) beliebig, differenzierbar

[andere Lesart: Arbeit gegen die Kraft $\vec{k} d^3 \vec{r}$ führt zu einer Erhöhung der Feldenergie]

$$\delta W = \delta \left(\frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} d^3 \vec{r} \right)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) = \delta \left(\frac{\vec{D}^2}{2\epsilon} \right) = \frac{\vec{D} \cdot \delta \vec{D}}{\epsilon} + \frac{\vec{D}^2}{2\epsilon} \delta \epsilon$$

$$= \vec{E} \cdot \delta \vec{D} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta \epsilon$$

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = -\text{grad } U \cdot \delta \vec{D} = -\text{div} (U \delta \vec{D}) + U \text{div} \delta \vec{D} = -\text{div} (U \delta \vec{D}) + U \delta \rho$$

$$\Rightarrow \delta W = \int (U \delta \rho - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta \epsilon) d^3 \vec{r}$$

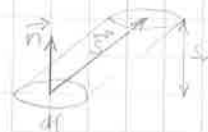
Anteil mit $\text{div} (U \delta \vec{D})$
 \rightarrow Integral über unendlich große Fläche
 \rightarrow erfüllt ($U \propto \frac{1}{r}, \vec{D} \propto \frac{1}{r^2}, d\vec{r} \propto r^2$)

ist Bestimmung von $\delta \rho$ und $\delta \epsilon$ für ein raumfestes Volumenelement $d^3 \vec{r}$ aus dem Verschiebungsfeld $\vec{s}(\vec{r})$:

Durch ein raumfestes Flächenelement $d\vec{f}$ schiebt sich infolge der Bewegung die Ladung $\oint \vec{s} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{s}_n \cdot d\vec{f}$
 $d\vec{f} = d\vec{f} \cdot \vec{n}$

Aber gilt für ein raumfestes Volumen

$$\oint \vec{s} \cdot d\vec{f} = - \oint \vec{s} \cdot d\vec{f} = - \int \text{div} (\vec{s}) d^3 \vec{r}$$



Für ein Volumenelement gilt also $\delta \rho = -\text{div} (\vec{s})$
 (vgl. später Kontinuitätsgln.)

Änderung von ϵ in einem raumfesten Volumenelement:

(1) durch Dichteänderung (\Rightarrow „Elektrostriktion“), diesen Effekt vernachlässigen wir hier

(2) an einem Punkt \vec{r} kommt das Material, was vorher bei $\vec{r} - \vec{s}$ war, also $\delta \epsilon = \epsilon(\vec{r} - \vec{s}) - \epsilon(\vec{r}) = -\vec{s} \cdot \text{grad } \epsilon$

$$\Rightarrow \delta W = \int \left[U \text{div} (\vec{s}) + \frac{1}{2} \vec{E}^2 \vec{s} \cdot \text{grad } \epsilon \right] d^3 \vec{r}$$

$$\sim \delta W = \int \left(\vec{s} \cdot \text{grad } U + \frac{1}{2} \vec{E}^2 \vec{s} \cdot \text{grad } \epsilon \right) d^3 \vec{r} = - \int \vec{k} \cdot \vec{s} d^3 \vec{r}$$

$$\vec{s} \text{ beliebig} \Rightarrow \vec{k} = \vec{s} \cdot \text{grad } U + \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{grad } \epsilon \quad (\text{ohne Elektrostriktion})$$

03.12.14

- Bem.
- 1) vollständige Beschreibung \rightarrow Thermodynamik + Hydrodynamik bzw. Elastomechanik zu hier allein betrachteten elektrischen Kraftdichte kommt eine mechanische Kraftdichte (in Gasen bzw. Flüssigkeiten: $\vec{k}_{\text{mech}} = -\text{grad } p$), sodass ein Gleichgewichtzustand möglich ist.
 - 2) Kraft auf ein endliches Volumen: $\vec{K} = \int \vec{k} d^3 \vec{r}$
 - 3) Bei Unstetigkeiten von ϵ führt der 2. Term $(-\frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{grad } \epsilon)$ zu einer Flächenkraft.



Dielektrikum wird dorthin gezogen, wo das Feld am stärksten ist.

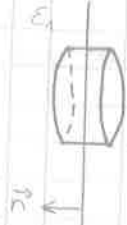
$$\vec{K}_1 = \vec{K}_2$$

(in homogenem Feld wo E rechts größer)

$$\text{Wirkungswert } k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad (\text{Summenkonv., kartes. Koordin.})$$

$$\rightarrow K_i = \int k_i d^3 \vec{r} = \int \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} d^3 \vec{r} = \oint T_{ij} n_j d\vec{f} \quad \begin{matrix} \text{Gaußscher Satz} \\ d\vec{f} = \vec{n} d\vec{f} \end{matrix}$$

da die Flächenkraft ergibt sich dann:



$$\delta K_i = (T_{ij}^{(1)} - T_{ij}^{(2)}) n_j dF, \text{ also } \frac{\delta K_i}{\delta F} = (T_{ij}^{(1)} - T_{ij}^{(2)}) n_j$$

δK_i : Kraft auf kleine Dose (Grundfläche δF)

$\frac{\delta K_i}{\delta F}$: Flächenkraftdichte

$$\text{vgl.: } \frac{\partial Q}{\partial F} = n = (D_j^{(1)} - D_j^{(2)}) n_j = D_n^{(1)} - D_n^{(2)} \quad \rho = \frac{\partial}{\partial x_j} D_j$$

1.3.5 Der Maxwell'sche Spannungstensor

Ziel: $k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}$ (kart. Koord.)

$$\vec{k} = \rho \vec{E} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{ grad } \epsilon, \text{ d.h. } k_i = \rho E_i - \frac{1}{2} E_j E_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \quad \text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = \rho$$

$$\Rightarrow k_i = E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j} - \frac{1}{2} E_j E_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i D_j) - \underbrace{D_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j}}_{\substack{\cdot \epsilon E_j = D_j, \text{ mit } \vec{E} = \vec{D} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \epsilon E_j E_j \right) + \epsilon E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i D_j) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} E_j D_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k \right)$$

$$\text{also } k_i = \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}; \quad T_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E_k D_k \quad (\text{Maxwell'scher Spannungstensor})$$

Kraftdichte als Divergenz eines Tensors: $\vec{k} = \text{div } \vec{T}$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} E_x D_x - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} T_{ij} \text{ symmetrisch: } T_{ij} = T_{ji} \\ \text{Spur: } T_{ii} = -\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \\ \quad \quad \quad (- \text{Energiedichte}) \end{array}$$

$$E D_z = \frac{D_z}{\epsilon} = D_z E_z$$

$$\cdot \text{Gesamtkraft auf einen Körper (ein Volumen): } K_i = \int k_i d^3r = \int \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) d^3r = \oint T_{ij} df_j = \oint T_{ij} n_j dF$$

$$(\text{also } \vec{K} = \oint \vec{T} \vec{n} dF) \quad (\text{besonders nützlich bei Unstetigkeiten und Singularitäten})$$

- zeitunabh. Magnetfelder erzeugt von Permanentmagneten oder stationären Strömen
- Grundgleichungen: $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, $\text{div } \vec{B} = 0$
 Für zunächst: $\vec{j} = 0$ ($\vec{B} \neq 0 \rightarrow$ Kap. 3)

Bem: Wir vermeiden den Begriff "Magnetostatik":

- statisch: alles ruht, zeitunabh. + Invarianz gegenüber $t \rightarrow -t$
- stationär: zeitunabh., aber Geradenumkehr mancher Größen bei $t \rightarrow -t$ ($\vec{j}, \vec{H}, \vec{B}$)

Materialgleichung: Vakuum $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

\vec{H} : magnetische Feldstärke $[\frac{A}{m}]$; \vec{B} : magn. Induktion $[\frac{Vs}{m}]$

Medium: • einfachster Fall: $\vec{B} = \mu \vec{H}$

In diesem Sinne: μ_0 = "Permeabilität des Vakuums", Zahlenwert nur eine Frage des Einheitensystems, vgl. ϵ_0 , SI: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

• allg.: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$ \vec{M} : Magnetisierung
 Bem: Oft wird auch $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, $\mu_0 \vec{M} = \vec{B}$

Klassifizierung der Medien: $0 < \mu < \mu_0$ diamagn.

$\mu > \mu_0$ paramagn.

$\mu \gg \mu_0$: tritt nur bei ferromagn. Materialien auf
 Aber: für ferromagnetische gilt $\vec{B} = \mu \vec{H}$
 ist nicht, kompliz. Zshg. zw. \vec{B} und \vec{H} , der sogar von Vorgeschichte abhängt: Hysterese

$\vec{B} = \mu \vec{H}$ gute Näherung für isotrope dia- und paramagn. Materialien bei nicht zu großen Feldstärken (μ_0 sehr nahe bei 1)

magn. Suszeptibilität χ_m : $\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$, d.h. $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$

Für $\vec{j} = 0$ haben wir damit eine vollst. formale Analogie zur Elektrostatik mit $\vec{j} = 0$.

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \text{ div } \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

formale Analogie:

el.	magn.
\vec{E}	\vec{H}
\vec{D}	\vec{B}
\vec{P}	\vec{M}
ϵ_0	μ_0

→ deshalb die (historisch entstandene) Bez. von \vec{H} als magn. Feldstärke

keine (wahren) magn. Ladungen, \vec{H} def. durch Drehmoment auf magn. Dipol
 $\vec{m} \neq \vec{m} \times \vec{H}$ (vgl. Drehmoment auf el. Dipol: $\vec{p} \times \vec{E}$)

physik. Analogie:

el.	magn.
\vec{E}	\vec{B}
\vec{D}	\vec{H}
\vec{P}	\vec{M}
ϵ	$\frac{1}{\mu}$

Kraft auf bewegte Ladung:
 $\vec{K} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

• hier sieht man, dass die diamagn. Fkt ($\mu < \mu_0$) den dielektr. Fall ($\epsilon > \epsilon_0$) entspricht (physikal.)

• zweit. zur formalen Analogie: Übergangsgl. an Grenzfläche: $H_{\parallel}, B_{\parallel}$ stetig

→ skalares magn. Potential ψ : $\text{rot } \vec{H} = 0 \Leftrightarrow \vec{H} = -\text{grad } \psi$

$$\text{div } \vec{H} = -\text{div grad } \psi = -\Delta \psi = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } (\vec{B} - \vec{M}) = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \vec{M}$$

→ $\Delta \psi = \frac{1}{\mu_0} \text{div } \vec{M}$ (Analogie: $\text{div } \vec{M} \Leftrightarrow -\text{div } \vec{P}$) magn. bzw. el. Polar. dichte

→ Darstellungsfornel: $\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{d\vec{r}' \cdot \vec{M}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

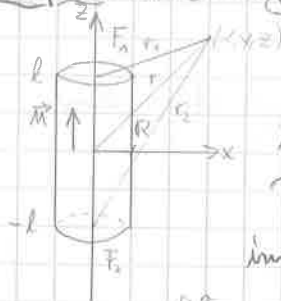
(Umform. wie in 1.3.1 (\vec{r}') in umgekehrter Richtung)

→ $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (*)$

\vec{M} als magn. Dipolmomentendichte; auch "magnet. Polarisation"
Für Permanentmagnete (harte Ferromagnetika) ist \vec{M} feldunabh.
→ Formel geeignet zur Berechnung des von Permanentmagneten (\vec{M} vorgegeben) erzeugten Feldes.

05.12.14

Beispiel: Stabmagnet



$\vec{M} = M \vec{e}_z, M = \text{const.}$

magn. Polarisationsdichteschichte: - div \vec{M}
→ magn. Oberflächendichteschichte M_n

innen: $\vec{M} \neq 0$ div $\vec{M} = 0$, Stirnflächen F_1, F_2 : $M_n = \pm M$

→ $\psi = \frac{M}{4\pi\mu_0} \left(\int_{F_1} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_{F_2} \frac{d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$

Übung 5

Für große r gilt: $F_1: |\vec{r} - \vec{r}'| \approx r_1, F_2: |\vec{r} - \vec{r}'| \approx r_2$

→ $\psi \approx \frac{M \pi R^2}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}, r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+l)^2}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow r_1 \approx r \left[1 + \frac{1}{2r^2} (-2zl + l^2) \right], r_2 \approx r \left[1 + \frac{1}{2r^2} (2zl + l^2) \right]$

→ $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(\frac{zl}{r^2} + \frac{zl}{r^2} \right) = \frac{2lz}{r^3}$

→ $\psi \approx \frac{M \pi R^2 2lz}{4\pi\mu_0 r^3} = \frac{mz}{4\pi\mu_0 r^3}$ mit $m = M \pi R^2 \cdot 2l = M \cdot \vec{V}$

m = magn. Dipolmoment
 $\vec{m} = m \vec{e}_z$ ($\vec{m} = \vec{r} \times \vec{p}$)

Bem.: Die Näherungsformel für ψ für große r erhält man auch direkt aus (*)

im großen Abstand also: Dipolfeld
Qualitativer Verlauf der Feldlinien

außer: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

innen: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$

\vec{H} -Linien werden herausgedrängt

\vec{B} -Linien werden hineingezogen

\vec{H} -Feld wird "entmagnetisiert"

(Gegensinnig)

in der Mitte H sehr klein

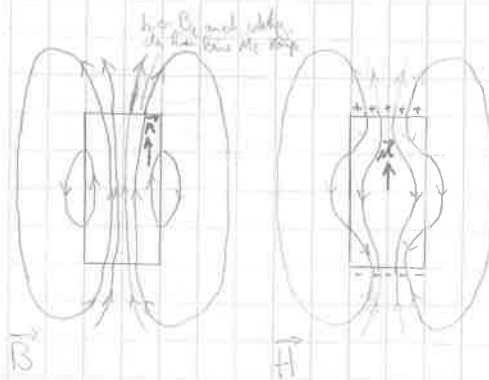
überall: div $\vec{B} = 0$, hingegen div $\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \vec{M}$

Quellen von $\mu_0 \vec{H}$: (-mag.) "Polarisationsoberflächenladungen" an den Stirnflächen
($M_n = \pm M$)

B_n, H_z stetig
rot $(\vec{B} - \vec{M}) = 0$
div $(\mu_0 \vec{H} + \vec{M}) = 0$

$B_n^{(1)} - B_n^{(2)} = -M_n$
 $\mu [H_n^{(1)} - H_n^{(2)}] = M_n$

- (1): Vakuum
- (2): Magnet



3 Stationäre Ströme und ihre Felder

3.1 Grundgleichungen

erstmalig Kopplung el. und magn. Felder:

el. Feld \rightarrow Strom \rightarrow magn. Feld

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= \vec{0} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{H} &= \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}\end{aligned}$$

\vec{j} Stromdichte $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

σ : el. Leitfähigkeit
 $\left[\frac{A}{Vm} = \frac{A}{Vm}\right]$
 $\Omega \cdot m$

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ "Ohmsches Gesetz"
einfachste Form der Verknüpfungrelation, kann komplizierter sein (\rightarrow Hall-Effekt)

Strom I durch eine Fläche $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{F}$

3.2 Stationäre Ströme in Leitern

(wir fragen jetzt noch nicht nach dem Magnetfeld)

(A) Die Kontinuitätsgleichung:

$\text{div } \vec{j} = 0$

$$\vec{j} = \text{rot } \vec{H} \Rightarrow \underline{\text{div } \vec{j} = 0} \iff \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0$$

Das Stromdichtefeld ist quellenfrei, in ein Volumen strömt soviel hinein wie heraus.

\Rightarrow Grenzflächen: j_n stetig (vgl. früher: $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow B_n$ stetig)

\Rightarrow Leiteroberfläche $j_n = 0$ (Grenzfläche zum Vakuum bzw. Isolator ($\sigma = 0$))

(B) Allgemeine Aussagen über die Felder, Ladungen, Ströme:

(1) $\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow$ Leiterinneres nicht mehr feldfrei

(2) $\text{rot } \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = -\text{grad } U$ wie bisher

$$\text{div } \vec{j} = \text{div } \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \vec{D} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon} \text{div } \vec{D} + \vec{D} \cdot \text{grad } \frac{\sigma}{\epsilon} = 0$$

$$\Rightarrow j = \text{div } \vec{D} = -\frac{\epsilon}{\sigma} \vec{D} \cdot \text{grad } \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \underline{j = -\frac{\epsilon}{\sigma} \vec{j} \cdot \text{grad } \frac{\sigma}{\epsilon}}$$

D.h. genau dann, wenn sich $\frac{\sigma}{\epsilon}$ in Stromrichtung ändert, treten Raumladungen auf!

Bei Unstetigkeit von $\frac{\sigma}{\epsilon}$: Flächenladungen

(3) \Rightarrow im homogenen Leiter (σ, ϵ konstant) gilt weiterhin $j = 0$ (Leiterinneres)

$$\Rightarrow \text{es gilt: } \text{div } \vec{E} = \text{div } \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \text{div } \vec{D} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta U = 0} \text{ im homogenen Leiter}$$

Bem: wegen $\text{div } \vec{E} = \text{div } \left(\frac{\vec{D}}{\epsilon} \right)$ ist $\sigma = \text{const.}$ hinreichend für $\Delta U = 0$

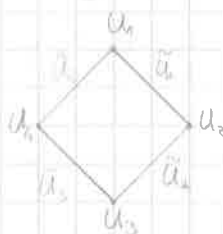
[Die Gln. $\text{div } \vec{D} = j, \vec{D} = \epsilon \vec{E}$ werden nur benötigt, wenn man sich für j interessiert]

(4) Kirchhoffsche Gesetze für Stromkreise

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 = \sum \tilde{U}_i$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad } U$$

$$U = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}' \text{ wegunabh.}$$



$$(U_1 - U_2) + (U_2 - U_3) + (U_3 - U_4) + (U_4 - U_1) = 0$$

Summe aller Sprünge gleich Null („Maschen“)

geschlossener Kreis:

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{f} = 0 = \sum j_i$$



Summe aller Ströme gleich Null („Knotensatz“)

Verzweigung:

(5) Definition des Widerstandes:

10.12.14

$$R := \frac{\tilde{U}}{j}$$



$\tilde{U} = U_1 - U_2$ Spannung zw. den Leitenden (Pot. U_1, U_2)

$$U = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$j = \int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \quad \tilde{U} = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(wegen $\text{div } \vec{j} = 0$ liefert die Integration über eine beliebige Querschnittsfläche den einheitlichen Wert j .)

Aus dem linearen Zusammenhang $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ und der Linearität der Grundgleichungen und Randbed. folgt, dass R nur von der Leitengeometrie und $\sigma(r)$ abhängt, also $R = \text{const.}$
(Ohmsches Gesetz; $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ist die lokale Form des Ohmschen Gesetzes)

homogener Leiter: $R \propto \frac{1}{\sigma}$

Beispiel: gerader homogener Leiter mit konstantem Querschnitt (Zylinder), konstantes Potential an Stirnflächen, F : Querschnittsfläche



$$\Delta U = 0, \quad E = \text{const.}, \quad j = \text{const.}$$

$$U = -Ez + \text{const.}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$$

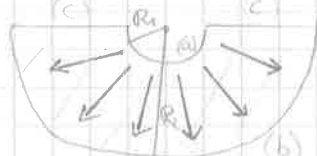
$$\tilde{U} = U_1 - U_2 = El, \quad j = \int \vec{j} \cdot d\vec{f} = jF = \sigma EF = \sigma \frac{F}{l} \tilde{U}$$

$$\Rightarrow R = \frac{l}{\sigma F}$$

Beispiel: Halbkugelschale (homogen)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } U$$

$$j_n = -\sigma \frac{\partial U}{\partial n}$$



- (a) $U = U_1$
- (b) $U = U_2 = 0$
- (c) $j_n = 0 = \frac{\partial U}{\partial n}$

$$\Delta U = 0$$

Ansatz: kugelsymmetrische Lösung $U = \frac{A}{r} + B$
(damit ist $U = \text{const.}$ bei (a) und (b) sowie $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ bei (c) gesichert)

$$\Rightarrow \frac{A}{R_1} + B = U_1, \quad \frac{A}{R_2} + B = 0 \Rightarrow U = \frac{U_1 R_1}{R_2 - R_1} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right)$$