(jeder einzelne Summand ist spezielle Lösung der Potentialgl.)

$r > r'$ $(\forall r')$ (eigentliche Multipolentw.)

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \; ; \quad U_n = \frac{1}{r^{n+1}} \left[c_n P_n(\cos\vartheta) + \sum_{m=1}^{n} (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin\varphi) \cdot P_n^m(\cos\vartheta) \right]$$

$\rightarrow U_0 = \frac{c_0}{r}$, d.h. $Q = 4\pi\varepsilon_0 c_0$

$\rightarrow U_1 = \frac{1}{r^2}(c_1 \cos\vartheta + a_{11}\cos\varphi \sin\vartheta + b_{11}\sin\varphi\sin\vartheta)$,

d.h. $\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 (a_{11}, b_{11}, c_1)$

$\rightarrow U_2$: $c_2, a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22} \Leftrightarrow D_{ik}$ (eine sym., spurfreie 3×3-Matrix hat 5 unabh. Elemente!)

usw.

Vgl. mit ... Ergebn.:

$U_0 = \frac{Q}{r}$

$U_1 = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}$

$\vec{r} = (x, y, z) = r \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{pmatrix}$$

1.1.5 Kräfte zwischen Ladungen, Energie einer Ladungsverteilung

Kraft auf Testteilchen: $\vec{K} = q\vec{E}$

Kraft zwischen 2 Punktladungen: $\vec{K}_{12} = -\vec{K}_{21}$; $\vec{K}_{21}$: Kraft auf Teilchen 2, ausgeübt von Teilchen 1

$$\vec{K}_{21} = Q_2 \vec{E}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

abstoßend, falls $Q_1 Q_2 > 0$

Energie des Systems 2er Pktladgn.:

= Arbeit, die man aufbringen muss, um die Ladungen Q_2 aus dem Unendlichen an den Ort P $(\vec{r} = \vec{r}_2)$ zu bringen (gegen die Kraft $\vec{K}_{21} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$)

$\rightarrow$ aufzuwendende Kraft: $-\vec{K}_{21}$

Diese Arbeit ist wegunabhängig (wegen $\operatorname{rot} \vec{E}_1 = \vec{0}$)!

$dA = -\vec{K}_{21}\, d\vec{r} = -\vec{K}_{21}\, d(\vec{r} - \vec{r}_1)$ (Die Ladung Q_1 sei am Ort $\vec{r}_1$ fixiert, also $d\vec{r}_1 = \vec{0}$)

$$W = \int_{\infty}^{P} dA = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{P} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)\cdot d(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} = -\frac{Q_1 Q_2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{P} \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_1)^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$\cdot\, (\vec{r} - \vec{r}_1)^2 = |\vec{r} - \vec{r}_1|^2$; Subst.: $|\vec{r} - \vec{r}_1| = u$, $d(u^2) = 2u\,du$

$$= -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{u=\infty}^{u=|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \frac{du}{u^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{u}\Big|_{\infty}^{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \rightsquigarrow W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$W > 0$ für $Q_1 Q_2 > 0$

$W < 0$ für $Q_1 Q_2 < 0$

Bem.: W ist Potential (= potent. Energie) für das 2-Teilchen-System im Sinne der Mechanik:

$$\vec{K}_{12} = -\operatorname{grad}_1 W \qquad \vec{K}_{21} = -\operatorname{grad}_2 W; \quad \operatorname{grad}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i}\right), \; i = 1, 2$$

(W ist hierfür als Funktion von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ aufzufassen)

Bei infinitesimalen Verschiebungen von Q_1 und Q_2 gilt:

$$dW = \text{grad}_1 W \, d\vec{r}_1 + \text{grad}_2 W \, d\vec{r}_2 = -\vec{K}_{12} d\vec{r}_1 - \vec{K}_{21} d\vec{r}_2 = -\vec{K}_{21}(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1)$$
$$= -\vec{K}_{21} \, d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Es war also nicht wesentlich, die Ladung Q_1 zu fixieren.

Energie einer bel. Ladungsverteilung:

- System von Punktldgn.:

$$W = \sum_{\substack{\text{alle Paare} \\ (i,j)}} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} {\sum_{i,j}}' \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad {\sum_{i,j}}' : \text{keine Summanden mit } i=j$$

[Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen (nacheinander) aus dem Unendlichen an ihre Positionen zu bringen.]

kontinuierliche Ladungsverteilung: $Q_i \to \varrho(\vec{r})d^3\vec{r}$,
$Q_j \to \varrho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'$
$\vec{r}_i - \vec{r}_j \to \vec{r} - \vec{r}\,'$

$$\to W = \frac{1}{2} \iint \frac{\varrho(\vec{r})\varrho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad (1)$$

Umformungen: mit $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ folgt

$$W = \frac{1}{2} \int \varrho(\vec{r}) U(\vec{r}) \, d^3\vec{r} \qquad (2)$$

12.11.14 [Achtung: Bei Anwendung von (1) auf ein System von Punktladungen, $\varrho(\vec{r}) = \sum_i Q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, entsteht $W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$, also ein Ausdruck inklusive der unendlichen „Selbstenergie"-Terme $i=j$!]

Mit $\text{div}\,\vec{D} = \varrho$ folgt aus (2) $W = \frac{1}{2}\int U \,\text{div}\,\vec{D}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int \text{div}(U\vec{D})d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int \vec{D}\, \underbrace{\text{grad}\, U}_{-\vec{E}}\, d^3\vec{r}$

$\int \text{div}(U\vec{D}) d^3\vec{r} = \oint U\vec{D}\, d\vec{f}$ Integral über Kugel mit Radius $r \to \infty$

$U \propto \frac{1}{r}$, $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2}$, $df \propto r^2$
$\to \int \text{div}(U\vec{D})d^3\vec{r} = 0$

$$\to W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\vec{D}\, d^3\vec{r} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}^2 d^3\vec{r} \qquad (3)$$

3 äquivalente Formeln: (1): wechselseitige pot. Energie der Ladungen
(2): Energie als „pot. Energie der Ladungen in ihrem eigenen Feld" (Selbstenergie d. Ladungsverteilung)
(3): Energie als Feldenergie
[$\frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$ kann als Energiedichte interpretiert werden! vgl. später]

Bem.: 1) In den Formeln (1) und (2) kommen Beiträge nur dort, wo Ladgn. sitzen. Bei (3): Beiträge überall, wo ein Feld vorhanden ist.
2) Die Formel (3) wird sich als verallgemeinerungsfähig erweisen!
3) Formel (3) zeigt, dass immer $W > 0$ ist [gilt nicht für Systeme mit Punktldgn., wenn man die Selbstenergieterme weglässt!]

Beispiel: Energie einer homogenen Ladungskugel

$$\rho = \rho_0 \text{ für } r \le R, \quad U = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) \text{ für } r \le R$$

$$\text{Formel (2)} \rightarrow W = \frac{1}{2}\frac{\rho_0^2}{6\varepsilon_0}\int (3R^2 - r^2)\underbrace{r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi}_{d^3\vec{r}}$$

$$= \frac{4\pi\rho_0^2}{12\varepsilon_0}\left(R^2 r^3 - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^R$$

$$= \frac{\pi\rho_0^2}{3\varepsilon_0}\,\frac{4}{5}R^5 = \frac{4\pi\rho_0^2}{15\varepsilon_0}R^5, \quad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\rightarrow W = \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{R}$$

Bem.: 1) Punktladung (Q endlich, $R \to 0$): $W \to \infty$

hingegen: ρ_0 endlich, $R \to 0$: $\frac{W}{\frac{4}{3}\pi R^3} \to 0$ Energiedichte

2) Elektron: $W \approx mc^2$

$m \approx 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$, $Q \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$ $[C = As]$

$4\pi\varepsilon_0 c^2 = 10^7 \frac{Am}{Vs}$ $\quad [V = \frac{Nm}{As}]$ $\quad [N = \frac{kg \cdot m}{s^2}]$

$\rightarrow R \approx \frac{3}{20\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{mc^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$ „klass. Elektronenradius"

Energie einer (Test-)Ladungsverteilung im äußeren Feld:

$$W = \int \rho(\vec{r})\,U(\vec{r})\,d^3\vec{r} \qquad \text{Punktladung im äußeren Feld: } W = qU$$

mögl. Herleitung: Ladungsverteilung ρ (Potential U_L); Potential des äußeren Feldes U (erzeugt von Ladungsverteilung ρ_F)

Gesamtenergie:
$$W_{ges} = \frac{1}{2}\int (\rho + \rho_F)(U_L + U)\,d^3\vec{r}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho\, U_L \, d^3\vec{r}}_{\text{Selbstenergie der Ladungsverteilung}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \rho_F\, U \, d^3\vec{r}}_{\text{Energie des äußeren Feldes}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int (\rho U + \rho_F U_L)\,d^3\vec{r}}_{\text{Wechselwirkungsenergie}}$$

$$W = 2 \cdot \frac{1}{2}\int \rho U \, d^3\vec{r}$$

$\left(\frac{1}{2}\int \rho U \, d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int \rho_F U_L \, d^3\vec{r}\right.$, quellenmäßige Darstellung von U und U_L ! $\left.\right)$

Für eine Ladungsverteilung mit geringer Ausdehnung [Ausdehnung klein gegenüber der char. Längenskala für Veränderung von $U(\vec{r})$] ist eine Taylorentwicklung des Potentials sinnvoll:

$$U(\vec{r}) = U(\vec{0}) + \operatorname{grad} U\big|_{\vec{0}} \cdot \vec{r} + \ldots \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} U$$

$$\Rightarrow W = U(\vec{0})\int \rho(\vec{r})\,d^3\vec{r} - \vec{E}(\vec{0})\int \vec{r}\rho(\vec{r})\,d^3r + \ldots$$

Also: $W = QU - \vec{p}\vec{E} + \ldots$ $\qquad$ $+\ldots$: Terme mit höheren Multipolmomenten

[Koord.ursprung ($\vec{r} = \vec{0}$) innerhalb bzw. nahe der Ladungsverteilung]

Dipol: $Q = 0$; höhere Multipolmomente als Dipolmoment

- verschwinden (math. Dipol) [Bezugspunkt = Ort d. Dipols!]
- vernachlässigbar (phys. Dipol) [Bezugspunkt nahe Ladungsverteilung]

$\rightarrow$ Energie eines Dipols im äußeren Feld: $W = -\vec{p}\vec{E}$

Minimum für $\vec{p} \parallel \vec{E}$ (gleiche Richtung!)

stabile Lage (für fixierten, aber drehbaren Dipol)

Kraft und Drehmoment:

$$\vec{K} = \int \vec{k}\,d^3\vec{r}, \quad \vec{M} = \int (\vec{r} \times \vec{k})\,d^3\vec{r}$$

mit der Kraftdichte $\vec{k} = \rho\vec{E}$

$\vec{E}$ bei $\vec{r}=\vec{0}$ in Taylorreihe entwickeln:

$\rightarrow \vec{K} = Q\vec{E} + (\vec{p}\,\mathrm{grad})\vec{E} + \dots$

$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \dots$

Kraft auf Dipol: $\vec{K} = (\vec{p}\,\mathrm{grad})\vec{E}$

Drehmom. auf Dipol: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$

Bem.: Drehmoment abhängig von der Wahl des Bezugspunktes
- Homogenes Feld: $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ exakt gültig für bel. Ladungsverteilung; für $Q=0$ ist $\vec{p}$ und $\vec{M}$ unabh. von der Wahl des Bezugspunktes ($\vec{K}=Q\vec{E}=\vec{0}$)

14.11.14

1.2 Felder und Ladungsverteilung bei Anwesenheit von Leitern
(Elektrostatik von Leitern)

1.2.1 Grundlagen

- Feldgleichungen unverändert ($\mathrm{div}\,\vec{D} = \varrho$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$)
- Im Inneren der Leiter gilt: $\vec{E}=\vec{0}$, $\vec{D}=\vec{0}$ (sonst würden Ströme fließen und wir hätten keine statische Situation!)

Folgerungen:
1) $\varrho = 0$ im Leiter, Ladungen können sich nur auf der Oberfläche befinden (Idealisierung Flächenladungsdichte η)
2) $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,U \rightarrow U = \mathrm{const}$ im Leiter $\rightarrow$ Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche!
$\rightarrow \vec{E} \perp$ zur Leiteroberfläche; Feldlinien enden (bzw. starten) auf der Oberfläche, d.h. dort, wo die Ladungen sitzen!

außen (Vakuum) gilt: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

$\oint \vec{D}\,d\vec{f} = Q$, $d\vec{f} = \vec{n}\,df$, $\vec{n}$: Normaleneinheitsvektor, nach außen gerichtet

angewandt auf kleine „Schuhkremdose"

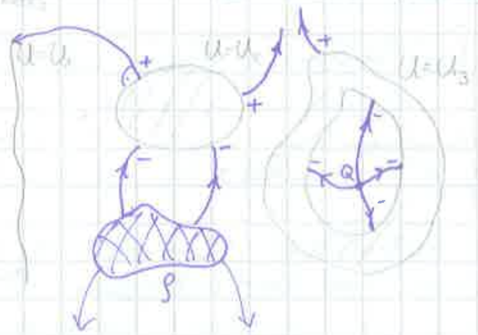
$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,U \rightarrow \vec{D} = -\varepsilon_0\,\mathrm{grad}\,U$

$D_n = \vec{D}\cdot\vec{n} = -\varepsilon_0 (\mathrm{grad}\,U \cdot \vec{n}) = \frac{\partial U}{\partial n}$ „Normalable"

Innen: kein Beitrag, Mantelfläche kein Beitrag ($\vec{n} \perp \vec{D}$)

Außen: $\int \vec{D}\vec{n}\,df = \int \eta\,df \rightsquigarrow D_n = \eta = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$

Struktur des Feldes:



im Vakuum: $\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}$

im Leiter: $U = U_i = \mathrm{const.}$

Grundaufgaben:

1) Geg.: Feld (Potential) Ges.: Ladungsverteilung
2) Geg.: Raumladungen, Potentiale U_i der Leiter Ges.: Feld + Oberflächenladungen

3) Geg.: Raumladungen, Gesamtladungen Q_i der Leiter
Ges.: Feld und Verteilung der Oberflächenladungen

1.2.2 Berechnung der Ladungsverteilung aus dem Feld

$U(\vec{r})$ gegeben $\rightarrow \rho = -\varepsilon_0 \Delta U, \; \eta = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$

Beispiel: Außenfeld einer leitenden Kugel: $U = \frac{A}{r}, \; r \geq R$
$\Rightarrow$ innen: $U = \frac{A}{R} = \text{const.}$

$\underset{(\text{außen})}{\Delta U = 0} \rightarrow \rho = 0; \; \eta = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{\underset{\text{Kugelrand}}{r=R}} = \frac{\varepsilon_0 A}{R^2} = \text{const}$

$\Rightarrow$ Gesamtladung $Q = \oint \eta \, df = 4\pi R^2 \eta = 4\pi\varepsilon_0 A$

(also $U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ wie Potential einer Punktladung)

1.2.3 _ _ _ _ _ _ _ _

vorgegeben: Raumladungen, Geometrie der Leiter + Potentiale U_i oder Gesamtladungen der Leiter

a) Potentiale vorgegeben

ges.: $U(\vec{r})$ mit $\Delta U = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ außerhalb der Leiter,
$U \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$
$U = U_i = \text{const.}$ auf Leitern L_i

Algorithmus:

(1) Man löse $\Delta \bar{U} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ durch $\bar{U} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')\, d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$
(erfüllt nicht die Bed. $U = U_i$ auf den Oberflächen der L_i)

(2) Man suche eine Lösung V der Potentialgl. ($\Delta V = 0$) mit den Randwerten
$V = V_i(\vec{r}) = U_i - \bar{U}(\vec{r})$ auf ∂L_i — ∂L_i: Rand (Oberfläche) von L_i
$\Delta V = 0$ außerhalb der Leiter, $V = 0$ für $r \rightarrow \infty$

(3) Lösung: $U = \bar{U} + V$ (außerhalb der Leiter) $\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \; U = U_i$ auf ∂L_i
$\eta = D_n = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$ berechenbar

Schritt (2): Randwertaufgabe der Potentialtheorie (Lsg. ex. und ist eindeutig)
– oft mit Tricks elegant lösbar

Struktur der Lösung: $U(\vec{r}) = \sum_i U_i G_i(\vec{r}) + F(\vec{r})$ mit $F(\vec{r}) = 0$ auf ∂L_i;
$G_i(\vec{r}) = \delta_{ij}$ auf ∂L_j

F: Lösung des Problems für den Fall, dass alle Leiter geerdet sind. $\Delta F = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \; F = 0$ auf ∂L_i

G_i: Lösung von $\Delta G_i = 0$ mit RB $G_i(\vec{r}) = \delta_{ij}$ auf ∂L_j

Die Funktionen $G_i(\vec{r})$ hängen dabei nur von der Geometrie der Leiteranordnung ab („Greensche Funktionen").

b) Gesamtladungen Q_i der Leiter vorgegeben

ges.: $U(\vec{r})$ mit $\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \; U = 0$ für $r \rightarrow \infty$,
$Q_i = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} \frac{\partial U}{\partial n} \, df$ vorgegeben, $U = U_i = \text{const}$ auf ∂L_i (aber U_i unbekannt)

Algorithmus:

(1) Man gebe beliebige Werte U_i vor und löse die RWA gemäß (a), ohne auf die Q_i Rücksicht zu nehmen.

(2) Man bestimme die so entstehenden Werte Q_i:

$$Q_i = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} \frac{\partial}{\partial n}\left[\sum_j U_j G_j(\vec{r}) + F(\vec{r})\right] df = \sum_j K_{ij} U_j + K_i;$$

K_{ij}, K_i: Konstanten
(Für $\rho = 0$ folgt $F = 0$ und somit $K_i = 0$)

K_{ij}: „Kapazitätskoeffizienten"

(3) Man löse dieses System nach den U_i auf und bestimme die U_i aus den vorgegebenen Werten Q_j.

Bem: Besonderheit bei einem „inneren Problem":

Die innere Gesamtoberflächenladung Q_1 des Leiters L_1 muss gleich minus der gesamten im Hohlraum enthaltenen Ladung (Raumladung, Oberflächenladung von L_2) sein.
[folgt aus $\oint \vec{D}\,d\vec{f} = Q$ mit $\vec{D} = \vec{0}$ in L_1]

- Lösung wird eindeutig, wenn man U_1 vorgibt

19.11.14

1.2.4 Beispiele

a) Punktladung vor leitender geerdeter Ebene

(Man kann den gesamten rechten Halbraum als Leiter betrachten)

(1) Lösung der Poissongl. ohne Rücksicht auf Randwerte: $\bar{U} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(2) Lösung der Potentialgl. $\Delta V = 0$ (im linken Halbraum) mit $V = -\bar{U}(\vec{r})$ auf der Ebene.

Trick: Spiegelungsmethode: Setzen in den „Spiegelpunkt" die „Spiegelladung" $-Q$,

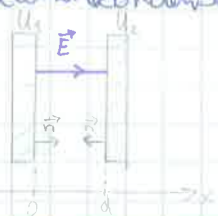
$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}''|}, \quad \Delta V = 0 \text{ im linken Halbraum!}$$

Auf der Ebene gilt $|\vec{r}-\vec{r}'| = |\vec{r}-\vec{r}''|$, also $V = -\bar{U}$

$\Rightarrow$ Lösung $U = \bar{U} + V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}''|}\right)$ im linken Halbraum
(rechter Halbr.: $U = 0$)

$\eta = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n}$, $\int \eta\, df = -Q$ „Influenz"

b) Plattenkondensator



Potentiale U_1, U_2 vorgegeben, keine Raumladungen
(Sei $U_1 > U_2$. Wir fragen nur nach dem Potential zwischen den Platten.)

Idealisierung: eindimensionales Problem

$$\Delta U = 0 \rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} = 0$$

$$\rightarrow U = Ax + B, \quad U(0) = U_1, \; U(d) = U_2 \rightarrow B = U_1$$
$$Ad + U_1 = U_2$$
$$\rightarrow A = \frac{U_2 - U_1}{d}$$

$$\rightarrow U = \frac{U_2 - U_1}{d} x + U_1 = \underbrace{U_1(1 - \tfrac{x}{d})}_{G_1} + U_2 \frac{x}{d}$$

G_1 G_2

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\frac{U_2 - U_1}{d} \vec{e}_x$$

$$\eta_1 = -\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{U_2 - U_1}{d} = -\eta_2$$

$\rightarrow Q_1 = \eta_1 F = -Q_2 = Q$, F: Plattenfläche

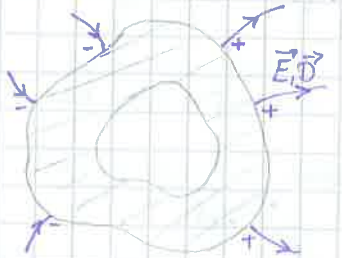
Kapazität: $C = \frac{Q}{U_1 - U_2} = \varepsilon_0 \frac{F}{d}$, „$\frac{\text{Ladung}}{\text{Spannung}}$" $C = \frac{Q}{\tilde{U}}$ $\tilde{U} = U_1 - U_2$

[vgl.: $Q_i = \sum_j K_{ij} U_j$ hier $K_{11} = K_{22} = C$, $K_{12} = K_{21} = -C$]

Vorgabe der Ladungen: $Q_1 = -Q_2$ → Potentiale nicht eindeutig bestimmt, aber Differenz $U_1 - U_2$ (Spannung) und natürlich das el. Feld

(vgl. Bem. in Kap. 1.2.3 zu „inneren Problemen")

c) Hohlraum in einem Leiter



(1) Innen keine Raumladungen

→ $\Delta U = 0$ innen, $U = const$ im Leiter

⇒ $U = const.$ im Inneren (Hohlraum)

⇒ $\vec{E} = \vec{0}$ ⇒ $\eta = 0$ auf innerer Oberfläche

(Abschirmwirkung nach innen!)

(2) Ladungen im Inneren, außen keine Ladungen, Leiter geerdet

$\Delta U = 0$ außen, $U = 0$ auf Oberfläche, $U = 0$ im Unendlichen

⇒ $U \equiv 0$ außen ⇒ $\vec{E} = \vec{0}$ ⇒ $\eta = 0$ auf äußerer Oberfläche

(Abschirmwirkung eines geerdeten Leiters nach außen!)

1.2.5 Kräfte und Energie

Die Formeln aus Kap. 1.1.5 behalten ihre Gültigkeit, wenn man die Oberflächenladungen auf den Leitern mit berücksichtigt, die ja auch zum Potential beitragen:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r}\,')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \int_{\partial L_i} \frac{\eta(\vec{r}\,')\,df}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Bem.: Diese Formel (Darstellung des Potentials) gilt außerhalb und innerhalb der Leiter!

$$W=\frac{1}{2}\int \vec{E}\vec{D}\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int \varrho U\,d^3\vec{r} + \frac{1}{2}\sum_i \int_{\partial L_i} \eta U\,df_i$$

Mit $U=U_i=\text{const.}$ auf ∂L_i folgt:

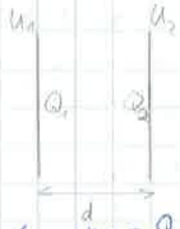
$$W=\frac{1}{2}\int \vec{E}\vec{D}\,d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int \varrho U\,d^3\vec{r} + \frac{1}{2}\sum_i Q_i U_i \qquad \left(\int_{\partial L_i}\eta\,df_i = Q_i\right)$$

System von Leitern ohne Raumladungen:

$Q_i = \sum_j K_{ij} U_j$ (vgl. Kap. 1.2.3) $\to W = \frac{1}{2}\sum_i Q_i U_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} K_{ij} U_i U_j$

- K_{ij}: Kapazitätskoeffizienten, hängen nur von Geometrie der Leiteranordnung ab
- K_{ii}: „Kapazität" des i-ten Leiters ($Q_i = K_{ii} U_i$ falls $U_j = 0$ für $j \neq i$)
  nicht summieren

Beispiel: Plattenkondensator



$Q_1 = -Q_2 = Q$

$\to W = \frac{1}{2}(Q_1 U_1 + Q_2 U_2)$

$\to W = \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) \qquad U := U_1 - U_2$ Spannung, Kapazität $C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 F}{d}$

$\to W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Kraft zwischen den Platten:

a) „isolierter" Kondensator ($Q=\text{const.}$)

$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 F} \to \delta W = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 F}\,\delta d$

⇒ Die Platten ziehen sich mit einer Kraft vom Betrag
$K = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 F}$ an.

b) Spannung $U=\text{const}$

Die Kraft muss offensichtlich dieselbe sein.

Aber: $W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{U^2\varepsilon_0 F}{2d} \to \delta W = -\underbrace{\frac{U^2\varepsilon_0 F}{2d^2}}_{}\,\delta d$

$= -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 F}$ falsches Vorzeichen?

Aufklärung s. Übung!

Beispiel: Punktladung vor leitender Ebene

$W = \frac{1}{2}\int \varrho U\,d^3\vec{r} + \frac{1}{2}\sum_i Q_i U_i$

entfällt da $U=0$ auf Leiter

$\varrho = Q\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_Q)$

$\varrho U = \varrho(U_{+Q} + U_\eta)$; $U_\eta = U_{-Q}$ im link. Halbr.

[Bem.: $U_{+Q} + U_\eta = 0$]

→ unendl. Selbstenergie der Ptldg.: lassen wir weg!

$\to W^* = W -$ Selbstenergie von Q_+

$W^* = \frac{1}{2}\frac{Q(-Q)}{4\pi\varepsilon_0\, 2a} = -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a}$

21.11.14 → Kraft auf Ptldg.: $dW^* = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\,da$, „Bildkraft" Kraft vom Betrag $K = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$ (anziehend)

Also: Wird eine Ladung vor eine geerdete Metallfläche gebracht, influenziert sie Oberflächenladungen und wird angezogen!

[Die Selbstenergie der Punktladung, die wir weggelassen haben, ändert sich bei Verschiebung der Punktladung nicht: $dW = dW^*$]

1.3 Elektrostatik der Dielektrika

Dielektrikum – Isolator Nichtleiter

1.3.1 Die elektrische Polarisation (auch: „dielektrische Polarisation")

In einem Isolator gibt es, wenn er elektrisch neutral ist, gleich viele positive und negative Ladungen, die – im Unterschied zum Leiter – beide nicht frei beweglich sind.

~~Aber~~ Aber: Unter der Einwirkung eines el. Feldes verschieben sie sich ein wenig; es entstehen lauter kleine Dipole (bzw. vorhandene permanente Dipole werden ausgerichtet).

Definition der Polarisation $\vec{P}$:

$\vec{P}\, d^3\vec{r}$ = Gesamtdipolmoment im Volumenelement $d^3\vec{r}$

$\vec{P}$: Dipolmomentdichte, hier geht eine Mittelung ein (Volumenelement groß im Vgl. zu molekularen Dimensionen, enthält große Anzahl von Molekülen!)

Für nicht zu große Feldstärke und für isotrope Medien (und Ausschluss von Ferroelektrika) gilt in guter Näherung:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e: elektr. Suszeptibilität (kann ortsabh. sein)

$\Rightarrow$ Vom makroskopischen Standpkt. aus gesehen, setzt sich das elektr. Feld aus 2 Anteilen zusammen:

(1) Anteil, erzeugt von zusätzlichen Ladungen ϱ („wahre Ladungen") – wie bisher – und

(2) Anteil von den kleinen Dipolen (gemittelt)

Bem.: $\vec{E}$ ist das makroskopische (gemittelte) elektr. Feld!

Potential eines Dipols bei $\vec{r}_0$:

$$U = \frac{\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

$\rightsquigarrow$ Potential: $$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Bem.: Diese Darstellungsformel für $U(\vec{r})$ ist für praktische Zwecke wenig geeignet, z.B.: Für $\varrho(\vec{r})$ vorgegeben, sucht man $\vec{E}$ und $\vec{P}$!

Andere Interpretation durch Umformung: $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \operatorname{grad}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

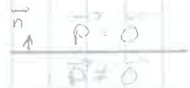
$$\rightsquigarrow \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \vec{P}(\vec{r}\,')\operatorname{grad}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$
$$= \operatorname{div}'\left[\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right] - \frac{\operatorname{div}'\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Der Divergenzanteil im Integral verschwindet (Gaußscher Satz $\to$ Oberflächenintegral über große Kugel, $\vec{P}$ verschwindet im Unendlichen, da dort kein Medium mehr)

$$\Rightarrow U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\varrho(\vec{r}\,')+\varrho_P(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'$$ mit $\varrho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$ „Polarisationsladungsdichte"

Bem.: • Effekt verständlich: Bei inhomogener Polarisation kann durch Ladungsverschiebungen in einem Volumenelement eine Netto-Ladung entstehen:

$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_P \, d^3\vec{r} = 0$ natürlich, sagt auch der Gaußsche Satz

• Grenzfläche zum Vakuum: 

$\rightarrow$ Oberflächenpolarisationsladg.: $\eta_P = P_n$
(vgl. Herleitung von $\eta = D_n$ auf Leiteroberfläche?)

$\Rightarrow \Delta U = -\frac{\rho+\rho_P}{\varepsilon_0} \Rightarrow \text{div grad } U = -\text{div}\,\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \text{div}\,\vec{P})$

mit $\underline{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$ folgt also $\underline{\text{div}\,\vec{D} = \rho}$ und (im einfachsten Fall)

$\underline{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$ mit $\underline{\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e)}$ „Dielektrizitätskonstante", kann ortsabh. sein

$1+\chi_e = \varepsilon_r$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ε_r – „relative Dielektrizitätskonst."

Bem.: Jetzt also prinzipieller Unterschied zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$!
Quellen von $\vec{D}$: ρ („wahre Ladungen")
Quellen von $\vec{E}$: $\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P)$

Im allgemeinen Fall: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E},\vec{r}) \rightarrow \vec{D} = \vec{D}(\vec{E},\vec{r})$

Die Grundgleichungen der Elektrostatik der Dielektrika sind damit:

$\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$, $\text{div}\,\vec{D} = \rho$, $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}$ (im einfachsten Fall)

oft: ε stückweise konstant $\rightarrow$ wichtig: Übergangsbed. an der Grenzfläche zweier Medien

($\text{div}(\varepsilon\vec{E}) = \varepsilon\,\text{div}\,\vec{E} + \vec{E}\,\text{grad}\,\varepsilon$
↳ nicht def., wenn ε unstetig)

1.3.2 Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zweier Medien

integrale Form der Maxwell-Gln.: $\oint \vec{D}\, d\vec{f} = Q$, $\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$
Vor.: $\vec{E}, \vec{D}$ endlich

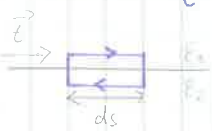
flache Dose $\rightarrow$ Mantelbeiträge vernachlässigbar

$\rightarrow \int \vec{D}^{(1)} d\vec{f}_1 + \int \vec{D}^{(2)} d\vec{f}_2 = \int \eta\, df$ $\quad d\vec{f}_1 = \vec{n}\, df_1$, $d\vec{f}_2 = -\vec{n}\, df_2$
$D_n = \vec{D}\cdot\vec{n}$

$\rightarrow D_n^{(1)} df - D_n^{(2)} df = \eta\, df$

$\rightarrow \underline{D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = \eta}$ $\quad$ vgl. Leiter: dort war $\vec{D}^{(2)} = \vec{0} \rightarrow D_n^{(1)} = \eta$

meist: $\eta = 0 \Rightarrow D_n$ stetig $\leftrightarrow \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \varepsilon_2 E_n^{(2)}$



$\oint \vec{E}\, d\vec{r} = 0$

$\rightarrow E_t^{(1)} ds - E_t^{(2)} ds = 0 \rightarrow \underline{E_t^{(1)} = E_t^{(2)}}$

E_t stetig $\leftrightarrow \frac{D_t^{(1)}}{\varepsilon_1} = \frac{D_t^{(2)}}{\varepsilon_2}$

$\vec{t}$ bel. tangentialer Einheitsvektor $E_t = \vec{E}\cdot\vec{t}$