$$\nabla f = v_x \vec{e_x} + v_y \vec{e_y} + v_z \vec{e_z}$$

$$v^\rho = v^x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v^y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v^z \frac{\partial \rho}{\partial z} = v^x \cos\varphi + v^y \sin\varphi$$

$$v^\varphi = v^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v^y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v^z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -v^x \frac{1}{\rho} \sin\varphi + v^y \frac{1}{\rho} \cos\varphi$$

Man beachte: $\vec{v} = v^\rho \vec{b_\rho} + v^\varphi \vec{b_\varphi} + v^{z'} \vec{b_{z'}}$
$= v^\rho \vec{e_\rho} + \underbrace{v^\varphi \rho}\vec{e_\varphi} + v^{z'} \vec{e_{z'}}$

$$\tilde{v}_\varphi = v^\varphi \rho = -v^x \sin\varphi + v^y \cos\varphi$$

Brauchen außerdem die Umrechnung der Ableitungen:

$$v^x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\cancel{\frac{\partial z'}{\partial x}} = \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$v^\rho = \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\sin\varphi + \cos\varphi\left(\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \rho}$$

30.10.14

$$v^\varphi = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi\, v^x + \frac{1}{\rho}\cos\varphi\, v^y = -\frac{1}{\rho}\sin\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v^\varphi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \tilde{v}^\varphi = \rho\, v^\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}}$$

Jetzt: Berechnung der Divergenz in Zylinderkoord.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y + \frac{\partial}{\partial z}F_z$$

$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$ $\qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x = \rho\cos\varphi$ $\quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \ldots$$

$$F_x = F_\rho \cos\varphi - F_\varphi \rho \sin\varphi = F_\rho \cos\varphi - \tilde{F}_\varphi \sin\varphi$$

$$F_y = F_\rho \sin\varphi + F_\varphi \rho \cos\varphi = F_\rho \cos\varphi + \tilde{F}_\varphi \cos\varphi$$

$$F_z = F_{z'}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(F_\rho \cos\varphi - \tilde{F}_\varphi \sin\varphi)$$
$$+ \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)(F_\rho \sin\varphi + \tilde{F}_\varphi \cos\varphi) + \frac{\partial}{\partial z'}F_{z'}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial \rho}F_\rho + \frac{1}{\rho}F_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\tilde{F}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z'}F_{z'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}F_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}F_z}$$

Bemerkung: Umbenennung $\tilde{F}_\varphi \to F_\varphi$ *)

*) Beziehen uns immer auf die normierten Basen hier $\{\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}\}$

Berechnen nun $\operatorname{rot}\vec{F}$ in Zylinderkoord.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

leicht modifizierter Weg:

$$\vec{e_\varrho} = \cos\varphi\,\vec{e_x} + \sin\varphi\,\vec{e_y}$$
$$\vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e_x} + \cos\varphi\,\vec{e_y}$$

$$\vec{e_x} = \cos\varphi\,\vec{e_\varrho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$$
$$\vec{e_y} = \sin\varphi\,\vec{e_\varrho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = R_x\vec{e_x} + R_y e_y + R_z\vec{e_z}$$
$$= (R_x\cos\varphi + R_y\sin\varphi)\vec{e_\varrho} + (R_y\cos\varphi - R_x\sin\varphi)\vec{e_\varphi} + R_z\vec{e_z}$$

allg.: $\vec{F} = F_x\vec{e_x} + F_y\vec{e_y} + F_z\vec{e_z} = F_\varrho\vec{e_\varrho} + F_\varphi\vec{e_\varphi} + F_z\vec{e_z}$

$\to \vec{e_\varrho}, \vec{e_\varphi}$ einsetzen $\to F_x, F_y$ ablesen

$$\underbrace{(F_\varrho\cos\varphi - F_\varphi\sin\varphi)}_{F_x}\vec{e_x} + \underbrace{(F_\varrho\sin\varphi + F_\varphi\cos\varphi)}_{F_y}\vec{e_y}$$

$$R_x = \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)F_z - \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(F_\varrho\sin\varphi + F_\varphi\cos\varphi)}_{F_y}$$

R_y analog

also $$R_\varrho = \left(\sin\varphi\frac{\partial F_z}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\cos\varphi\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varrho}{\partial z}\sin\varphi - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\cos\varphi\right)\cos\varphi$$
$$+ \left(\cos\varphi\frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \sin\varphi\frac{\partial F_\varphi}{\partial z} - \cos\varphi\frac{\partial F_z}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\sin\varphi\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}\right)\sin\varphi$$
$$= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}$$

andere Komponenten analog

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{F} = \left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right]\vec{e_\varrho} + \left[\frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\varrho}\right]\vec{e_\varphi} + \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho\cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial\varphi}\right]\vec{e_z}}$$

Determinanten Hilfsformel

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{\varrho}\vec{e_\varrho} & \vec{e_\varphi} & \frac{1}{\varrho}\vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\varrho & \varrho F_\varphi & F_z \end{matrix}\right| \begin{matrix} \frac{1}{\varrho}\vec{e_\varrho} & \vec{e_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial\varrho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_\varrho & \varrho F_\varphi \end{matrix}$$

Distributionen

- strenge Einführung möglich

Distribution: Jedes stetig lineare Funktional $T(\varphi)$ auf dem Grundraum K heißt Distribution.

- Grundraum K (Raum der Grundfunktionen): Gesamtheit aller finiten, unendlich oft diffbaren Funktionen auf der reellen Achse (finit: f verschwindet außerhalb eines gewissen endlichen Intervalls)

- Jede lokale integrierbare Fkt. f definiert durch
$$T_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
ein stetiges lineares Funktional auf K, d.h. eine Distribution.

- Distributionen, die sich so darstellen lassen, heißen reguläre Distributionen.
- Alle anderen heißen singulär.

Bsp.: singuläre Dist.:

1) δ-Funktion

$T(\varphi) = \varphi(0)$ stetiges, lineares Funktional auf K

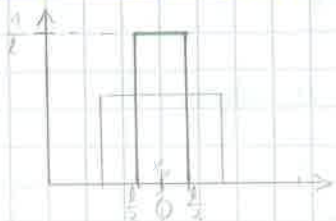
Schreibweise: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,dx$

$\delta(x)$ „Funktion", die für $x \neq 0$ verschwindet und im Punkt $x = 0$ unendlich wird und zwar so, dass
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

2) verschobene Deltafunktion:

$T(\varphi) = \varphi(a)$, Schreibweise: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx$

Jetzt: anschaulicher Zugang



$$d_\ell(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ell} : -\frac{\ell}{2} \leq 0 \leq \frac{\ell}{2} \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$$

$f(x)$ sei stetig

$$\lim_{\ell \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_\ell(x-x_0) f(x) = \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{\ell} \underbrace{\int_{x_0-\frac{\ell}{2}}^{x_0+\frac{\ell}{2}} dx\, f(x)}_{} \overset{MWS}{=} \lim f(x_0) \cdot \int \delta(x-x_0)\,dx$$

$$\overset{MWS}{=} \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{\ell}\, \overline{\ell \cdot f(\bar{x})} = f(x_0)$$

3) „glattes" Beispiel

$$d_\ell(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{2\ell^2}\right)$$

abkürzende Schreibweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) f(x) := \lim_{\ell \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, d_\ell(x-x_0) f(x)$$

„$\delta(x) = \lim d_\ell(x)$"

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$ Wichtig: Limes erst nach der Integration!

Rechenregeln für $\delta(x)$:

·) $\delta'(x) = \frac{d}{dx}\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x-x_0) f(x) \overset{P.I.}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0) f'(x) = \underline{-f'(x_0)}$$

Distribution $\delta'(x-x_0)$

.11.14 Diracs Idee:

- $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$, $\delta(x) = \infty$ für $x = 0$ in solcher Weise, dass die Fläche unter δ gleich 1 ist

also: $\boxed{\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \quad \int_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x) = 1}$ mit $\eta_1, \eta_2 > 0$

also auch: $\int_{-\eta_1}^{-\eta_2} dx\, \delta(x) = 0 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x)$

und $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$

und $\int_{\eta_2}^{-\eta_1} dx\, \delta(x) = -\int_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x) = -1$

alternative Def.:

$f(x)$ stetig diffbar, ...
$f(x)$ Testfunktionen

$$\int_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x) f(x) = f(0) \int_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x) = f(0)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, \delta(x) f(x) = 0 \quad \text{falls } 0 \notin [x_1, x_2]$$

Problem: bisher keine Def. falls $\eta_1 = 0$ oder $\eta_2 = 0$

$\int_L \equiv \int_{-\eta_1}^{0} dx\, \delta(x)$, $\int_R \equiv \int_{0}^{\eta_2} dx\, \delta(x)$

verschiedene Def. möglich!

Forderung: $\int_L + \int_R = 1$

obige Def.:

· mit $\int_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, \delta(x)$ schwache Def. (W)

· mit Def $\int_L, \int_R$ starke Def

Eigenschaften von $\delta(x)$:

(1) Dimension:

· Dimension einer dimensionslosen Größe, einer reinen Zahl: [1]

· $[\delta(x)][dx] = [1] \rightsquigarrow [\delta(x)] = [x]^{-1}$

(2) $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$

(3) $\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)\delta(x-y) = \begin{cases} f(y), & \text{falls } x_1 < y < x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(4) $\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \qquad a>0$

(5) $\delta(-ax) \overset{(w)}{=} \frac{1}{a}\delta(x) \qquad a>0$

(6) $\delta(ax) \overset{(w)}{=} \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(7) Spiegelungseigenschaften:
$\delta(-x) \overset{(w)}{=} \delta(x), \quad \delta(x-y) \overset{(w)}{=} \delta(y-x)$

(8) Die Funktion $g(x)$ habe reelle Nullstellen x_n (einfache): $g(x_n)=0$
$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|}$

(9) $\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left(\delta(x-a)+\delta(x+a)\right)$

(10) Integral von $\delta(x)$: Stufenfkt. $\Theta(x)$ „Heaviside-Funktion"
$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$

(w-Def.: kein Wert für $x=0$)

· $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$

$\Theta(x) + \Theta(-x) = 1$
$\Theta(x) - \Theta(-x) = \text{sign}(x)$

· $\Theta(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx'\,\delta(x')$

· $\text{sign}(x) = -1 + 2\int\limits_{-\infty}^{x} dx'\,\delta(x')$

· $\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\text{sign}(x)$

(11) Ableitung von $\delta(x)$:
$\delta'(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$

$\int\limits_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, f(x)\delta'(x) \overset{\text{p.I.}}{=} f(x)\delta(x)\Big|_{-\eta_1}^{\eta_2} - \int\limits_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, f'(x)\delta(x)$

$\rightsquigarrow \boxed{\int\limits_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, f(x)\delta'(x) = -f'(0)}$

$\rightsquigarrow x\delta'(x) = -\delta(x)$

(12) w-Def
$\Rightarrow \delta(x)$ gerade
$\delta'(x)$ ungerade

(13) n-te Ableitung $\delta^{(n)}(x)$
$\delta^{(n)}(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0 \qquad \int\limits_{-\eta_1}^{\eta_2} dx\, f(x)\delta^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(0)$

Delta-Funktion: mehrdimensional

· 3-dim: (w-Def) (3D)

$\delta(\vec r)=0$ für $\vec r\neq\vec 0$

$\int_V d^3\vec r\,\delta(\vec r)=1$ falls V den Ursprung enthält

Dimension: $[\delta(\vec r)]=[\text{Volumen}]^{-1}$

in n Dim. $[L]^{-n}$

kartesisch: $\vec r=(x,y,z)$. $\delta(\vec r)=\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$

Kugelkoord.: (r,ϑ,φ)

$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z=r\cos\vartheta$

$0\le r,\ 0\le\vartheta\le\pi\ (-1\le\cos\vartheta\le 1),\ 0\le\varphi\le 2\pi$

$\rightsquigarrow dV=dr\,r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=dr\,r^2\,d\cos\vartheta\,d\varphi\equiv dr\,r^2 d\Omega$

$\Omega=(\vartheta,\varphi),\ \int d\Omega=\iint d\cos\vartheta\,d\varphi$

$\int d\Omega$ Integration über Raumwinkel $\int d\Omega=4\pi$

Konvention: $\Omega=0$: $\vartheta=0,\varphi=0$. d.h. $\hat r=\hat z$ $(\vec e_r=\vec e_z)$

nützliche Formel: Winkel zwischen $\vec r$ und $\vec r\,'$

$\cos\chi=\hat r\cdot\hat r'=\vec e_r\cdot\vec e_{r'}$

$=\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$

Starten mit der Betrachtung von $\delta(\vec r-\vec r\,')$ ~~mit~~
(mit $\vec r\,'\neq\vec 0$)

$\delta(\vec r-\vec r\,')=0 \quad \vec r\neq\vec r\,'$

$\int_0^\infty dr\,r^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta\,\delta(\vec r-\vec r\,')=\int_0^\infty dr\,r^2\int d\Omega\,\delta(\vec r-\vec r\,')=1$

$\rightsquigarrow\delta(\vec r-\vec r\,')=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta')$

$=\frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\Omega-\Omega')$

im allgemeinen auch möglich: $\frac{1}{r^2}\to\frac{1}{r'^2}$ oder $\frac{1}{r^2}\to\frac{1}{rr'}$ damit $\delta(\ldots)$

strenge Def. von $\delta(\vec r)$:

$\delta(\vec r-\vec r\,')$, $\vec r\,'=0$ wichtiger Fall

→ strenge Def notwendig: $\vec r\,'\to 0$

radiale Deltafunktion $\delta(r)$ am Endpunkt des Bereiches $0\le r$

strenge Def.: $\boxed{\begin{array}{l}\delta(r)=0 \text{ für } r\neq 0\\ \int_0^{a} dr\,\delta(r)=1\end{array}}$

Nullvektor $\vec r\,'=0$ hat keine eindeutige Richtung

$\rightsquigarrow\Omega'$ undefiniert

$\rightsquigarrow\delta(\Omega-\Omega')$ scheinbar notwendig

Aber: kein Einfluss auf das Integral
$\int d^3\vec{r}\, f(\vec{r})\delta(\vec{r})$ für Testfktn. $f(\vec{r})$, die bei $\vec{r}=\vec{0}$
wohldefiniert sind:
$\lim_{r\to 0} f(r,\Omega) - f(0)$ unabh. von der Richtung Ω in der $\vec{r}$ den Nullpunkt erreicht

(Bsp.: $\frac{xy}{x^2+y^2+z^2+a^2}$, Gegenbsp.: $\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{z}{r}$)

→ fordern Wohldefiniertheit im obigen Sinn!

Dann gilt: $\boxed{\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}}$

Satz: Bei Integration $\int_0 dr\, r^2 \ldots$ gilt $\frac{\delta(r)}{r} = -\delta'(r)$

Bew.: betrachten Testfunktionen $f(r) = \frac{g(r)}{r}$, $g(r)$ wohldef. bei $r=0$
(d.h. $f(r)$ kann sich für ~~1~~ $r\to 0$ so „schlecht" verhalten wie $\frac{1}{r}$ (muss aber nicht))

LHS: $\int_0 dr\, r^2 \frac{\delta(r)}{r}\frac{g(r)}{r} = \int_0 dr\, \delta(r)\, g(r) = g(0)$

RHS: $\int_0 dr\, r^2 (-\delta'(r))\frac{g(r)}{r} = -\int_0 dr\, \delta'(r)[r g(r)]$

$= \int_0 dr\, \delta(r)\frac{d}{dr}[r g(r)] = \int_0 dr\, \delta(r)[r g'(r) + g(r)]$

$= [r g'(r) + g(r)]_{r=0} = g(0)$ □

Satz: Sei r die radiale Variable in Kugelkoord., Zylinderkoord. oder ebenen Polarkoord. (d.h. $r \geq 0$):
$\to \delta(r^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\delta(r - |a|)$

13.11.14

Blatt 4:

Aufgabe 1: Alternative

$$\phi = U(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec r}{r^3}$$

$\vec E$-Feld: verwenden $\operatorname{grad}(\varphi\cdot\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi$

$$\vec E = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\operatorname{grad}(\vec p\cdot\vec r) + (\vec p\cdot\vec r)\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r^3}\vec p + \vec p\cdot\vec r\left(-\frac{3}{r^4}\frac{\vec r}{r}\right)\right] \qquad \operatorname{grad} f(r) = f'(r)\operatorname{grad} r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec p\cdot\vec r)}{r^5}\vec r - \frac{\vec p}{r^3}\right]$$

Aufgabe 2 s. Übungsseiten

Struktur des Dipolfeldes: $\vec D = \varepsilon_0 \vec E$

$$\vec D = \frac{3(\vec a\cdot\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec a}{r^3} \qquad \text{(Struktur)}$$

$$\operatorname{div}\vec D = \varrho$$

$$Q = \int \varrho\, d^3\vec r = \int \operatorname{div}\vec D\, d^3\vec r = \oint \vec D\, d\vec f$$

Berechnung von $Q = \oint_{K_R} \vec D\, d\vec f$

$$d\vec f = R^2 \cdot \frac{\vec r}{r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \qquad (d\vec f \parallel \vec r)$$

$$|d\vec f| = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

(K_R Kugel um den Ursprung mit Radius R)

$$\oint_{K_R}\vec D\, d\vec f = R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\left[\frac{3(\vec a\cdot\vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec a}{r^3}\right]\frac{\vec r}{r}}_{\frac{2\,\vec a\cdot\vec r}{r^4}} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \qquad (r = R)$$

Koord.system so dass

$$\vec a = a\vec e_z \quad \rightsquigarrow \vec a\cdot\vec r = az = ar\cos\vartheta$$

$$\oint_{K_R}\vec D\, d\vec f = \frac{2a}{R}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \qquad \left[-\frac{1}{4}\cos 2\vartheta\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{4}(\cos 2\pi - \cos 0)$$

$$= \frac{4\pi a}{R}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\, d\vartheta}_{=0} = 0 \quad ✓$$

$$\vec D = \frac{3az}{r^5}\vec r - \frac{a}{r^3}\vec e_z \qquad \vec D = \left(\frac{3az}{r^5}x,\ \frac{3az}{r^5}y,\ \frac{3az^2}{r^5} - \frac{a}{r^3}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\vec r \neq 0$, wollen zeigen $\operatorname{div}\vec D = 0$

$$\operatorname{div}\vec D = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3az}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3az}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\,x\right)$$

PR

$$= \frac{3az}{r^5} - 5\,\frac{3az}{r^6}\,\frac{x^2}{r}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = \frac{3az}{r^5} - 5\,\frac{3az}{r^6}\,\frac{y^2}{r}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = \frac{6az}{r^5} - 5\,\frac{3az}{r^6}\,\frac{z^2}{r} + 3\,\frac{a}{r^4}\,\frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{D} = \frac{12az}{r^5} - 15\frac{az}{r^5} + 3\frac{az}{r^5} \neq 0 \checkmark$$

$$\operatorname{rot}\vec{D} = \left(\frac{\partial D_z}{\partial y} - \frac{\partial D_y}{\partial z}, \dots, \dots\right)$$

x-Komponente:

$$\frac{\partial D_z}{\partial y} = -\frac{15a}{r^7} y z^2 + 3\frac{ay}{r}$$

nützliche Rechenregeln:

$$\operatorname{grad}(U \cdot V) = U \operatorname{grad} V + V \operatorname{grad} U \qquad (1)$$
$$\operatorname{div}(U\vec{a}) = U \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad} U \qquad (2)$$
$$\operatorname{rot}(U\vec{a})$$

$$\vec{D} = \frac{3(\vec{a}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{a}}{r^3}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \underbrace{3\operatorname{div}\left(\frac{(\vec{a}\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)}_{\text{I}} - \underbrace{\operatorname{div}\frac{\vec{a}}{r^3}}_{\text{II}}$$

II $\operatorname{div}\frac{\vec{a}}{r^3} \overset{(2)}{=} \frac{1}{r^3}\underbrace{\operatorname{div}\vec{a}}_{=0} + \vec{a}\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{div}\left(\frac{\vec{a}}{r^3}\right) = -\frac{3\vec{a}\vec{r}}{r^5}$$

I $\operatorname{div}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} = \operatorname{div}[f(\vec{r})\vec{r}]$ $\qquad f(\vec{r}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$, $g(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r}$, $h(r) = \frac{1}{r^5}$

$$\overset{(2)}{=} f(\vec{r})\underbrace{\operatorname{div}\vec{r}}_{3} + \vec{r}\operatorname{grad} f(\vec{r})$$

$$= 3f(\vec{r}) + \vec{r}\operatorname{grad}[g(\vec{r})h(r)]$$

$$\overset{(1)}{=} 3f(\vec{r}) + \vec{r}\,[g(\vec{r})\operatorname{grad}(h(r)) + h(r)\operatorname{grad} g(\vec{r})]$$

$$\operatorname{grad} h(r) = -5\frac{\vec{r}}{r^7}, \quad \operatorname{grad} g(\vec{r}) = \vec{a}$$

$$= \frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^5} + \vec{r}\left((\vec{a}\cdot\vec{r})\left(-5\frac{\vec{r}}{r^7}\right) + \frac{\vec{a}}{r^5}\right) = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$$

$$\rightsquigarrow \text{I} - \text{II} = 0 \checkmark$$

Nachtrag zu Dipol und 3-dim. Delta-Funktion 20.11.14

3D Verallgemeinerung $\delta'(x)$ ist $\nabla\delta(\vec{r})$

- $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ gerade
- $\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ ungerade

$$\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \nabla\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}\,') = -\nabla'(\vec{r}-\vec{r}\,') = \underline{-\nabla'(\vec{r}\,'-\vec{r})}$$

Wirkung auf Testfunktion:

- $\int d^3\vec{r}\, f(\vec{r})\,\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\int d^3\vec{r}\,(\nabla f(\vec{r}))\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -(\nabla f)_{\vec{r}=\vec{r}\,'} = -\nabla' f(\vec{r}\,')$
- $\int d^3\vec{r}\, f(\vec{r})\,(-\nabla'\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')) = -\nabla'\int d^3\vec{r}\, f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\nabla' f(\vec{r}\,')$

Ladungsdichte zweier Punktladungen der Stärke $\pm\frac{p}{a}$ an den Orten $\vec{r} \pm \vec{a}$

$$\rho_{(\vec{r},\vec{a})}(\vec{r}\,') = \frac{p}{a}\left\{\delta\left(\vec{r}\,'-(\vec{r}+\tfrac{1}{2}\vec{a})\right) - \delta\left(\vec{r}\,'-(\vec{r}-\tfrac{1}{2}\vec{a})\right)\right\}$$

Jetzt: $\vec a = a\cdot\vec n$, $\vec n$ Einheitsvektor   Limes $a\to 0$ bei fixiertem p und $\vec n$

⇝ Ladungsdichte eines Punktdipols:

$$\vec p = \frac{\rho}{a}\vec a = \frac{\rho}{a}a\vec n = p\vec n \quad \text{am Ort } \vec r$$

$$\rho_{(\vec r,\vec p)}(\vec r') = -\vec p\cdot\nabla'\delta(\vec r'-\vec r) = \vec p\cdot\nabla\delta(\vec r'-\vec r)$$

jetzt: $\vec r = 0$

$$\rho_{\vec p}(\vec r') = -\vec p\cdot\nabla'\delta(\vec r') = \vec p\,\nabla\delta(\vec r')$$

$$U(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_p(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\vec p\cdot\nabla\delta(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$\overset{P.I.}{=} +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\delta(\vec r')\left[(\vec p\cdot\nabla')\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(p\cdot\nabla)\frac{1}{|\vec r|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec p\cdot\vec r}{|\vec r|^3}$$

27.11.14 Bestimmung des Potentials einer homogen geladenen Kugel mittels Poisson-Integral

$$U(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{K_R}\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\,d^3r' \qquad \vec r(r,\vartheta,\varphi) \quad \vec r'(r',\vartheta',\varphi') \qquad \vec r = r\vec e_r \quad \vec r' = r'\vec e_{r'}$$

$$U(r,\cancel{\vartheta},\cancel{\varphi}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{K_R}\frac{\rho(\vec r')\,d^3r'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'[\sin\vartheta\sin\vartheta'(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi')+\cos\vartheta\cos\vartheta']}}$$

aufgrund Symmetrie: Wahl von $\vartheta=0$, $\varphi=0$ möglich!

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{K_R}\frac{\rho(\vec r')\,d^3r'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\rho(\vec r')\,r'^2\sin\vartheta'\,d\varphi'\,d\vartheta'\,dr'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,2\pi\int_0^R\rho(r')\left[\frac{r'}{r}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}\right]_0^\pi dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R 2\pi\rho(r')\left(\frac{r'}{r}\sqrt{r^2+r'^2+2rr'}-\frac{r'}{r}\sqrt{r^2+r'^2-2rr'}\right)dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R 2\pi\rho(r')\frac{r'}{r}\left(|r+r'|-|r-r'|\right)dr'$$

1.Fall: $r > R\ (\geq r')$

$$⇝ (|r+r'|-|r-r'|) = r+r'-(r-r') = 2r'$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R 2\pi\rho_0\frac{r'}{r}2r'\,dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r}$$

04.12.14 2.Fall: $r < R$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^r 2\pi\rho_0\frac{r'}{r}2r'\,dr' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^R 2\pi\rho_0\frac{r'}{r}2r\,dr'$$

(vgl. Fall 1: $r > R$)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\pi\rho_0R^2-\frac{2\pi}{3}\rho_0r^2\right]$$

$$⇝ U(r) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2) \qquad \rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$U(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0R^3}(3R^2-r^2)$$