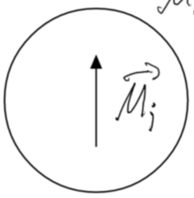
Elektrodynamik – Übung 06

Markus Pawellek – 144645 Übung: Do 12–14

Aufgabe 16

$$\vec{M}_a = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{M}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r > R \\ M\vec{e}_z & r \leq R \end{cases}$$



$$\Rightarrow \vec{j} = 0, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\Psi \quad \text{und allgemein} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{H} + \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = -\mu_0 \Delta\Psi + \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\Psi = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \Psi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \, d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

weiterhin gilt:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{\text{Integral darüber wird Null, da } \vec{M} = 0 \text{ im Unendlichen}} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

es gilt also:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, d^3 r'$$

Fall $r > R$:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{\vec{M}}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, d^3 r'$$

hierbei entspricht V nur dem Volumen der Kugel

das Integral ist bereits bekannt aus der Analogie zum elektrostatischen Potential:

$$\int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3 r' = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = V \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}) = \frac{R^3}{3\mu_0} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Fall $r \leq R$:

$$\int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, d^3 r' = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{4}{3}\pi \vec{r}$$

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}) = \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{3\mu_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{3\mu_0} & r \leq R \\ \frac{R^3}{3\mu_0}\cdot\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{r^3} & r > R \end{cases}}$$

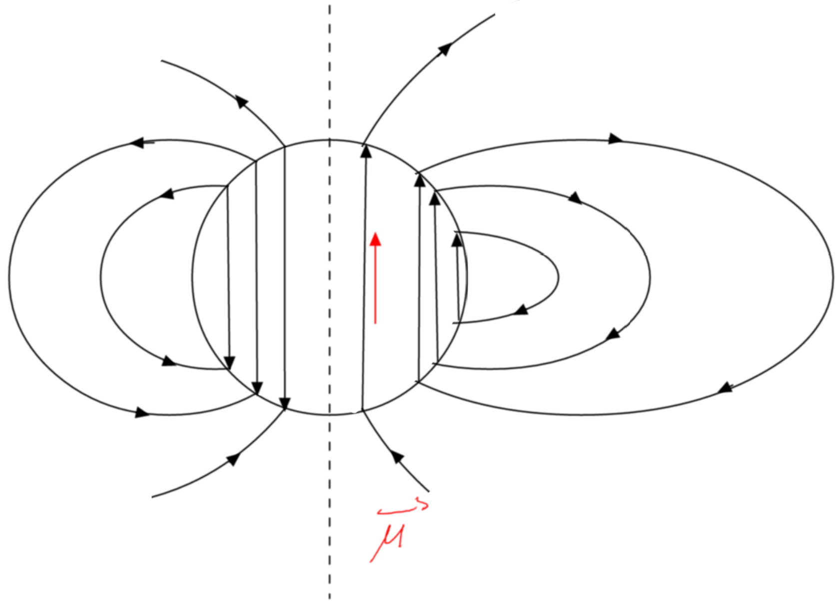
$\Rightarrow$ wegen $\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi$ entsprechen $\vec{H}$-Feldlinien einem homogenen Feld innerhalb des Magneten und denen eines Dipolfeldes außerhalb

$\Rightarrow$ innen: homogenes $\vec{H}$-Feld zeigt in Richtung $-\vec{\mu}$
außen: Dipolmoment im Ursprung zeigt in Richtung $\vec{\mu}$

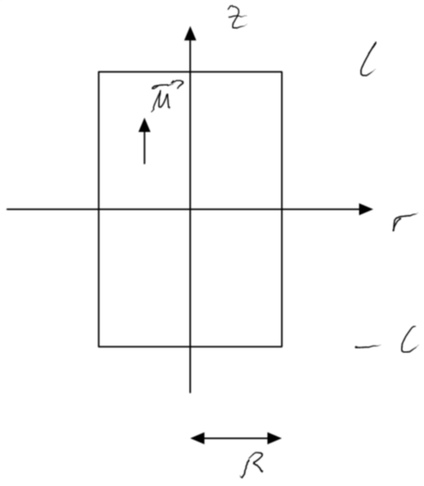
$\Rightarrow$ außen: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ $\Rightarrow$ außen unterscheiden sich Feldlinien nicht
$\Rightarrow$ innen: $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{\mu}$ $\Rightarrow$ $\vec{B} = -\frac{\vec{\mu}}{3} + \vec{\mu} = \frac{2}{3}\vec{\mu}$

$\Rightarrow$ $\vec{B}$ ist innen ebenfalls homogen und zeigt in Richtung $\vec{\mu}$

links $\vec{H}$-Feld | rechts $\vec{B}$-Feld



Aufgabe 17



- Betrachtung durch Zylinderkoordinaten

es gilt wieder:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, d^3\vec{r}'$$

$\vec{r}' \in \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid r = 0,\ z \in [-l, l]\}$

und $\vec{M} = M\vec{e}_z$ innerhalb des Magneten

$$\Rightarrow \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{M \cdot (z-z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, d^3 r'$$

$$= \frac{M}{4\pi\mu_0} \cdot \int_{-l}^{l} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(z-z')\, r \, d\varphi \, dr}{[r^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \, dz' = \frac{M}{2\mu_0} \cdot \int_{-l}^{l} (z-z') \int_0^R \frac{r \, dr}{[r^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \, dz'$$

$$= \frac{M}{2\mu_0} \int_{-l}^{l} (z-z') \cdot \left(\frac{-1}{[r^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}} \right)_0^R dz' = \frac{M}{2\mu_0} \left[\int_{-l}^{l} dz' - \underbrace{\int_{-l}^{l} \frac{(z-z')\, dz'}{[R^2 + (z-z')^2]^{\frac{1}{2}}}}_{\text{Subst. mit } \varphi = z-z'} \right]$$

$$= \frac{M}{2\mu_0} \left[2l - \int_{z-l}^{z+l} \frac{\varphi \, d\varphi}{\sqrt{R^2 + \varphi^2}} \right.$$

$$= \frac{Ml}{\mu_0} - \frac{M}{2\mu_0} \sqrt{R^2 + \varphi^2} \Big|_{z-l}^{z+l}$$

$$= \frac{Ml}{\mu_0} - \frac{M}{2\mu_0} \sqrt{R^2 + (z+l)^2} + \frac{M}{2\mu_0} \sqrt{R^2 + (z-l)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} \Psi = H \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad H = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

$$\Rightarrow H = \frac{M}{2\mu_0} \cdot \frac{z+l}{\sqrt{R^2 + (z+l)^2}} - \frac{M}{2\mu_0} \frac{z-l}{\sqrt{R^2 + (z-l)^2}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = B \vec{e}_z \quad \text{mit} \quad B = \mu_0 H + M$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{M}{2} \left[\frac{z+l}{\sqrt{R^2 + (z+l)^2}} - \frac{z-l}{\sqrt{R^2 + (z-l)^2}} \right] + M}$$