

Physik 2: Elektrodynamik

G. G. Paulus

Stand: 7. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

0 Aus der Geschichte	1
1 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld und Potential	3
1.1 Elektrische Ladungen – Coulomb-Gesetz	3
1.2 Das elektrische Feld	6
1.3 Das elektrische Potential	9
1.4 Allgemeine Definition des elektrischen Potentiales	11
2 Das Gaußsche Gesetz	12
2.1 Qualitative Diskussion	12
2.2 Definition des Raumwinkels	13
2.3 Definition des Oberflächenvektors	14
2.4 Der elektrische Fluss	14
2.5 Das Gaußsche Gesetz	15
2.6 Anwendungen des Gaußschen Gesetzes	18
2.6.1 Punktladung Q	18
2.6.2 Gleichmäßig geladene Vollkugel	19
2.6.3 Gleichmäßig geladener Draht	20
2.6.4 Gleichmäßig geladene Fläche	21
2.7 Elektrische Leiter	22
2.8 Influenz und eine wichtige Feinheit	23

3 Kondensatoren und Dielektrika	25
3.1 Definition der Kapazität	25
3.2 Beispiel: Zylinder-Kondensator	26
3.3 Reihenschaltung von Kondensatoren [$Q = \text{const.}$]	27
3.4 Parallelschaltung von Kondensatoren [$U = \text{const.}$]	27
3.5 Im Kondensator gespeicherte Energie E	28
3.6 Dielektrika im elektrische Feld	29
3.7 Der elektrische Dipol	30
3.8 Die dielektrische Polarisation	31
3.9 Gaußsches Gesetz mit Dielektrika	34
3.10 Feldenergie im Dielektrikum	35
3.11 Elektrostatik in Natur und Technik	37
3.12 Anhang: Woher kommt (31): $-\oint\oint_A \vec{P} d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \rho_{\text{pol}} dV$?	37
4 Elektrischer Strom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln	39
4.1 Das Ohmsche Gesetz	40
4.2 Strom und Potential	42
4.3 Stromdichte und Kontinuitätsgleichung	43
4.4 Mikroskopische Form des Ohmschen Gesetzes	44
4.5 Die Kirchhoffschen Regeln	45
4.6 Das Joulesche Gesetz	47
4.7 Driftgeschwindigkeit	49
4.8 Eine Feinheit	50
4.9 Reale Stromquellen	51
4.10 Galvanische Elemente und Batterien	52
5 Das Magnetfeld	53
5.1 Magnete	53
5.2 Experimentelle Fakten und das No-name-Gesetz	54
6 Magnetfeld, Ladungen und Ströme	56
6.1 Einige experimentelle Beobachtungen	56
6.2 Lorentzkraft	58

6.3	Bewegung im Magnetfeld	59
6.4	Gekreuzte $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Felder	60
6.5	Kraft auf Ströme	61
6.6	Das Ørsted-Experiment und das Ampèresche Gesetz	62
6.7	Anwendungen des Ampèreschen Gesetzes	63
6.7.1	Unendlich langer Draht	63
6.7.2	Lange Spule	65
6.8	Das Gesetz von Biot-Savart	66
7	Materie im Magnetfeld	68
7.1	Magnetische Dipole	68
7.2	Anwendung: Drehspulmessgeräte	69
7.3	Atomare magnetische Momente	70
7.4	Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität	71
7.5	Kräfte im inhomogenen Magnetfeld	73
7.6	Ferromagnetismus	74
7.7	Elektromagnete	75
8	Magnetfeld und Relativität	78
9	Das Induktionsgesetz	79
9.1	Experimentelle Evidenz	79
9.2	Das Problem	80
9.3	Faradays Erklärung	83
9.4	Die Lenzsche Regel	84
9.5	Die Lenzsche Regel am Beispiel einer bewegten Stromschleife	85
9.6	Selbstinduktion und Gegeninduktion	87
9.7	Generator	89
9.8	Transformator	90
10	Stromkreise mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen	91
10.1	Vorzeichen und Konventionen	91
10.2	Berechnung von Stromkreisen mit Induktivitäten	93

10.3 Der <i>RL</i> -Kreis	95
10.4 Wechselströme und -spannungen	97
10.5 Impedanz einer Induktivität (Spule)	98
10.6 Impedanz eines Kondensators	100
10.7 Impedanz eines ohmschen Widerstandes	101
10.8 Kirchhoffsche Regeln und Ersatzschaltungen	102
10.9 Blind- und Wirkleistung	103
10.10 Der <i>RLC</i> -Kreis – Schwingkreise	105
11 Maxwellsche Gleichungen und elektromagnetische Wellen	106
11.1 Ein Problem mit dem Ampèreschen Gesetz	106
11.2 Maxwells Lösung: Der Verschiebungsstrom	108
11.3 Die Maxwellschen Gleichungen	110
11.4 Wellengleichung	111
11.5 Eine Lösung der Wellengleichung	114
11.6 Elektromagnetische Wellen sind transversal	115
11.7 Eine andere Wellengleichung: die Schrödinger-Gleichung	116
11.8 Potentiale und Wellengleichung *	117
12 Erzeugung elektromagnetischer Wellen, Hertzsche Versuche	122
12.1 Hertzsche Versuche	122
12.2 Ein einfacher Fall eines sich ausbreitenden Feldes *	123
12.3 Die inhomogene Wellengleichung	128
12.4 Larmorformel und Rayleighstreuung	129
12.5 Erzeugung von Röntgenstrahlung	130
12.6 Der Poynting-Vektor	131
13 Beugung und Interferenz	132
13.1 Doppelspalt	132
13.2 Doppelspalt und Quanten	134
13.3 Abbesche Theorie der Bildentstehung	135
13.4 Der Einfachspalt, Methode der Phasoren	136

13.5 Huygenssches Prinzip und Beugungsintegral	138
14 Stehende Wellen, Gruppengeschwindigkeit und Lichtpulse	141
14.1 Stehende Wellen	141
14.2 Schwebung	143
14.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	144
14.4 Lichtpulse und Fouriertheorem, Unschärferelation	146
15 Elektromagnetische Optik I: Reflexion und Brechung	148
15.1 Stetigkeit der Normalkomponente des \vec{D} -Feldes	148
15.2 Stetigkeit der Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes	149
15.3 Reflexion- und Brechungsgesetz	150
15.4 Totalreflexion und evaneszente Wellen	153
15.5 Brewstersches Gesetz	156
16 Der Brechungsindex, Lorentz-Modell	157
16.1 Brechungsindex durchsichtiger Körper	157
16.2 Das Prisma	160
16.3 Der Regenbogen	160
16.4 Brechungsindex von Plasmen und Metallen	161
17 Resonatoren	163
17.1 Fabry-Pérot Interferometer	163
17.2 Finesse, Fringe-Kontrast, freier Spektralbereich	167
17.3 Der Plattenkondensator bei hohen Frequenzen	169
17.4 Der Plattenkondensator als Resonator	173

Vorwort

Enrico Fermi wurde mal gefragt, welche Gemeinsamkeiten Nobelpreisträger hätten. Seine Antwort war: "Nothing, not even intelligence". Ich denke, er hatte Recht. Trotzdem meine Frage: Was unterscheidet eine erfolgreiche Studentin oder einen erfolgreichen Studenten von weniger erfolgreichen? Die Intelligenz ist es nicht. Sie alle haben genug davon, sonst säßen Sie nicht hier. Meiner Beobachtung nach sind die Kriterien, die zwischen Erfolg, weniger Erfolg oder gar Scheitern entscheiden, in erster Linie folgende:

1. Das Selbstbewusstsein! Der erfolgreiche Student¹ weiß, dass der Kommilitone auch nur mit Wasser kocht. Wenn der immer alles sofort kapiert und ihm scheinbar alles leicht von der Hand geht, dann bedeutet das in der Regel nur, dass er über das Problem oder über ein ähnliches Problem schon mal intensiv nachgedacht hat. Ich garantiere Ihnen, daß Ihnen die kompliziertesten Dinge ganz leicht vorkommen und Sie mit der größten Selbstverständlichkeit darüber reden werden, gerade so wie der vermeintlich geniale Kommilitone, sobald Sie sich den Sachverhalt klar gemacht haben. Das erfordert Arbeit – schlicht ehrliche Arbeit.
2. Wichtiges von weniger Wichtigem unterscheiden! Es ist natürlich alles wichtig, was in meiner Vorlesung vorkommt, sonst käme es nicht vor. Ihr Tag hat aber nur 24 Stunden und Sie müssen ja auch noch Mathematik und Praktikum und was weiß ich noch alles machen, dazu noch die ein oder andere Party. Es kann also mal erforderlich werden, was nicht gleich hundertprozentig nachvollzogen zu haben.

Und dann ist es eben entscheidend zu unterscheiden, was wirklich wichtig und was auch wichtig ist. Manches ist so wichtig, dass Sie, wenn Sie es nicht verstehen, den Kern der Vorlesung verpasst haben und den Anschluss verlieren. Und das "auch" Wichtige? Das ist typischerweise in späteren Semestern von Bedeutung, evtl. sogar von überragender Bedeutung. Also können Sie das notfalls in den Semesterferien genauer anschauen.

Wir können hier gleich sagen, was in die erste Kategorie gehört: Ganz einfach, die Maxwell'schen Gleichungen, angefangen mit dem Gaußschen Gesetz und aufgehört mit dem Faradayschen Induktionsgesetz, dazu die Wellengleichung. Wenn

¹Erlauben Sie mir, auf die explizite Nennung beider Geschlechter zu verzichten. Es sind ganz selbstverständlich immer beide gemeint.

Sie das nicht lernen wollen, fallen Sie durch. Dabei müssen Sie sich klar machen, dass es beim besten Willen nur ganz wenige wirklich verschiedene Klausuraufgaben gibt, ein gutes Dutzend vielleicht, mit denen man testen kann, ob ein Student diese Gleichungen beherrscht oder nicht. Wenn Sie diese paar Aufgaben wirklich verstanden haben, brauchen Sie sich keine Sorgen machen.

3. Und wenn nicht? Dann brauchen Sie – jeder braucht das – dann brauchen Sie Hartnäckigkeit. Sie dürfen nicht locker lassen und nicht aufgeben. Wenn Sie das Gefühl haben, dass was wirklich Wichtiges nicht Ihren Kopf will, dann fragen Sie befreundete Kommilitonen, Übungsgruppenleiter oder mich.

Wie macht man das, wie führt man die Arbeit aus, etwas zu verstehen? Dazu machen Sie sich am besten klar, dass jeder von uns anders denkt. Wenn ich versuche, Ihnen was zu erklären, dann offenbart das, sarkastisch gesprochen, in erster Linie meine Denkstrukturen und in zweiter Linie die Physik. Anders ausgedrückt: Keiner lernt in dieser Vorlesung mehr als ich bei ihrer Vorbereitung gelernt habe. Noch anders ausgedrückt: Wenn Sie den optimalen Lernerfolg haben wollen, müssen Sie die Vorlesung selbst zu Papier bringen, als hätten Sie die Vorlesung selbst zu halten. Danach, als Nebenprodukt sozusagen, werden Ihnen die meisten unserer Übungsaufgaben sehr leicht fallen. Ein Skript für jede Vorlesungen selbst zu verfassen, dazu fehlt Ihnen voraussichtlich die Zeit. Aber für die wirklich wichtigen Dinge müssen Sie sich diese Zeit nehmen – coûte que coûte!

Noch ein Wort zu Büchern zur Vorlesung: Viele der üblichen Verdächtigen mag ich nicht weil sie zwar ungeheuer viele Dinge bringen, an den entscheidenden Stellen aber zu sehr an der Oberfläche bleiben. Ein wirklich gutes Buch, das die Maxwell'schen Gleichungen vom Experiment kommend mit dem unverzichtbaren mathematischen Apparat behandelt, ist mir nicht bekannt, am ehesten würde ich den Berkeley Physics Course nennen. Wenn man die Bedeutung des experimentellen Zugangs beseite lässt, sind die einschlägigen Kapitel aus den Feynman-Lectures unübertroffen. Beide Werke gibt es auch auf deutsch.

Ich freue mich auf diese Vorlesung und hoffe, dass ich Ihnen die Arbeit, die Elektrodynamik zu verstehen, erleichtern, aber auch die Schönheit der Physik vermitteln kann.

0 Aus der Geschichte

1. Die Menschheit hat von ihrem Anfang an mit elektromagnetischen Phänomenen Bekanntschaft gemacht. Es ist kein Wunder, dass Blitz und Donner auf unsere Vorfahren einen derart nachhaltigen Eindruck machten, dass man sie mit den Göttern in Verbindung brachte. Bei den Griechen ist der Blitz sogar die Epiphanie des Chef-Gottes Zeus. Die Abbildung zeigt eine Statue des Zeus mit Nike aus der St. Petersburger Eremitage.
2. Die Erfindung des Blitzableiters schreiben wir in der Regel Benjamin Franklin (1706 - 1790) zu. Tatsächlich wurden jedoch schon um 1170 v. Chr. unter Ramses III. am Tempel von Madinat Habu und am Chonstempel von Theben vergoldete Masten angebracht. Man nimmt an, dass sie die Funktion von Blitzableitern hatten.



Noch deutlich älter sollen Blitzableiter an Tempeln in Sri Lanka aus der Zeit des Anuradhapura-Königtums sein. In Deutschland wurde der erste Blitzableiter 1769 auf der Hamburger Hauptkirche St. Jacobi installiert.

3. Die Araber waren wohl die ersten, die die Natur des Blitzes zumindest erahnten: Das arabische Wort für Blitz (raad) wurde auf den Zitterrochen übertragen, der Stromschläge mit 50 bis 200 V bei 30 A verteilen kann.



Als wissenschaftlichen Namen der Gattung hat man „Torpedo“ gewählt. Anders als man vielleicht vermuten könnte, kommt das von torpére, betäubt sein. Entsprechend gab es auch medizinische Anwendungen: Schmerzlinderung bei der Geburt, Betäubung, Heilung von Geisteskrankheiten. Weniger überliefert ist zu Untersuchungen über Heilungsquoten ...

4. Die ersten überlieferten Beobachtungen zu elektrischen und magnetischen Phänomenen gehen auf Thales von Milet (ca. 624 - 547 v. Chr.) zurück. Besonders genau hat er aber nicht beobachtet: Er glaubte, dass Bernstein durch Reibung magnetisch würde, während das Mineral Magnetit von Hause aus magnetisch sei. Ihm scheint also der Unterschied zwischen elektrischen und magnetischen

Phänomenen nicht aufgefallen zu sein, obwohl beispielsweise die Ausrichtung von magnetischen Steinen im Erdmagnetfeld im Altertum durchaus bekannt war.

- Der eben genannte Bernstein lädt sich beim Reiben an Tierfellen so gut auf, dass ihm das einen prominenten Eintrag in unserem physikalischen Vokabular eingebracht hat. Auf Griechisch heißt Bernstein *ηλεκτρον*, Elektron.



- Ein Hinweis auf eine erstaunlich frühe Kenntnis elektrochemischer Phänomene wird bereits für vorchristliche Zeit vermutet: In der Nähe des heutigen Bagdad hat man Tonbehälter gefunden, der mit einem Asphalt-Stopfen verschlossen waren. Durch den Asphalt hindurch ging ein Eisenstab, der konzentrisch mit einem Kupferzylinder umgeben war. Wenn man in den Behälter Essig oder dergleichen füllen würde, hätte man eine Batterie mit ca. 1.1 Volt Spannung. Es ist jedoch vollkommen unklar, zu was die Alten Parther eine solche Batterie gebraucht haben könnten.



http://www.smith.edu/hs/museum/ancient_inventions/battery2.html

- In Europa gab es erste größere Fortschritte bei der Erforschung der Elektrizität im 17. Jhd. Es gelang Wissenschaftlern wie Otto v. Guerike (1602–1686) oder Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) auf Reibung beruhende Elektrisiermaschinen so zu verbessern, dass ernsthafter experimentiert werden konnte. Anwendungen fanden diese Entwicklungen zunächst nur als Kuriosa, etwa um Gäste bei Einladungen zu amüsieren. Maßgebliche Entwicklungen noch vor der im 19. Jhd. beginnenden mathematischen Beschreibung des Elektromagnetismus lieferte Alessandro Volta (1745–1827) mit der Erfindung des Elektrophors und v.a. der Voltaschen Säule.

1 Coulomb-Gesetz, elektrisches Feld und Potential

1.1 Elektrische Ladungen – Coulomb-Gesetz

1. Es gibt zwei verschiedene Arten von Ladungen. Wir nennen sie „positiv“ und „negativ“. Diese beiden Arten von Ladungen können durch ihre Kraftwirkungen aufeinander und durch ihre Ablenkung in elektrischen und magnetischen Feldern unterschieden werden. (Teilweise war dies bereits den Alten Griechen bekannt.)



Otto v. Guericke
1602–1686

- Exp.: Probekörper und verschieden geladene Körper
2. Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab, solche mit entgegen gesetztem Vorzeichen ziehen sich an. Man beachte den Gegensatz zur Gravitation! Die Anziehungs- bzw. Abstoßungskräfte können zur Messung von Ladungen benutzt werden (→ Coulomb-Gesetz, s.u.).
 3. Ein weiteres durchaus profundes experimentelles Faktum ist, dass Ladungen sind an massebehaftete Teilchen gebunden sind. Beispiele: Elektronen, Ionen, Positronen, Myon, etc.
 4. Das Elektron wurde 1897 von Thomson, Townsend und Wilson entdeckt.



Joseph John Thomson
1856 - 1940



John S. E. Townsend
1868 - 1957



Harold A. Wilson
1874 - 1964



Robert A. Millikan
1868 - 1953

5. Die Ladung ist gequantelt (Millikan 1929)

$$Q = n \cdot e \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

1

„Ausnahme“: Quarks.

6. Ladung wird „erzeugt“ durch räumliche Trennung. Hierfür bestehen eine Reihe von Möglichkeiten: Reibung, Licht, Wärme, Stöße.

→ Exp.: Gewitter-Modell, Fuchsschwanz mit 2 Elektrometern

7. Ladungstransport ist elektrischer Strom I

$$I = \frac{d}{dt} Q$$

2

Bem.: Als Korollar zu -3 ergibt sich, dass Ladungstransport (= Strom) stets mit Massentransport einher geht.

8. Coulomb-Gesetz: Die Kraft \vec{F} zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 mit Abstand r ist gegeben durch

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \hat{r} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3}.$$

3

Dabei ist \hat{r} der Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. (Es ist immer empfehlenswert, die Einheiten zu überprüfen, um eine erste Vertrautheit mit dem Naturgesetz zu gewinnen.)

9. Naturgesetze werden grundsätzlich experimentell etabliert.

Beim Coulomb-Gesetz geschah dies mit Hilfe der Coulomb-schen Torsionswaage. Die Ähnlichkeit und Gleichzeitigkeit mit dem Cavendish-Experiment ist bemerkenswert.



C.-A. de Coulomb
1736–1806

10. Das Coulomb-Gesetz hat dieselbe Form wie das Newtonsche Gravitationsgesetz. Diese Bemerkung ist insbes. deshalb wichtig, weil sie impliziert, dass alles was wir in Physik 1 über Lösungen des Newton-Problems gelernt haben, direkt wiederverwendet werden kann. (Wie Feynman sagte: „Gleiche Gleichungen haben gleiche Lösungen ...“)

11. Vergleich von Coulomb- und Gravitationskraft: Welcher Prozentsatz der Atome der Erde und des Mondes müsste geladen sein, um eine Coulomb-Kraft zu erhalten, die genauso groß ist wie die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond. $m_E = 5.977 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \text{Fe: } 55 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \quad \Rightarrow \quad 6.5 \cdot 10^{49} \text{ Atome.}$

$$m_M = 0.0123 m_E, G = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, r_{ME} = 384\,400 \text{ km} \implies F_G = 2.974 \cdot 10^{30} \text{ N}$$

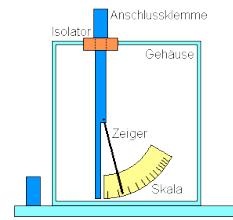
$$F_G \stackrel{!}{=} F_C \implies F_G = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{0.0123 q^2}{r_{ME}^2} \implies q = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 F_G r_{ME}^2}{0.0123}} = 6.3 \cdot 10^{19} \text{ C}$$

$$\text{Zahl der Ladungen} = \frac{q}{e} = 3.94 \cdot 10^{38} \text{ Elementarladungen}$$

\implies von den $6.5 \cdot 10^{49}$ Atomen wären $3.94 \cdot 10^{38}$ geladen. \implies Nur 1 von 10^{11} (100 Milliarden) Atome wäre geladen.

12. \implies Die Gravitation spielt keine Rolle in der mikroskopischen Physik. Selbst kleinste Ladungsverschiebungen in Atomen, Molekülen oder Festkörpern erzeugen viel größere Kräfte als die Gravitation. \implies Der Elektromagnetismus beherrscht den gesamten Mikrokosmos mit Ausnahme der chemischen Bindung, die ein quantenmechanischer Effekt ist. Abgesehen von der Gravitation sind alle Kräfte, die in der Physik 1 behandelt wurden (Seilspannung, Normalkraft, Reibung usw. usf.), elektromagnetischer Natur

13. Messungen von Ladungen: Bislang haben wir Ladungen eher qualitativ nachgewiesen (*detektiert*) und dazu meist ein Elektroskop verwendet \rightarrow **Exp.** Zum *Messen* müssen wir den Zeigerausschlag, der von einer neuen physikalischen Größe verursacht wurde, auf eine bekannte physikalische Größe zurückführen – natürlich mit Hilfe eines Naturgesetzes. Offensichtlich bieten sich dazu die Kraft und das Coulombsche Gesetz an.

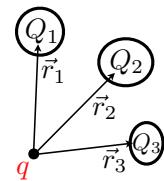


14. Nachdem die Ladung eine physikalische Größe ist, bedarf es auch einer Einheit. Je nachdem welche anderen Einheiten bereits bekannt sind und je nachdem wie genau man die entsprechenden Größen messen kann, sind verschiedene Definitionen denkbar bzw. zweckmäßig:

- Kraft zwischen zwei Punktladungen mit jeweils 1 C im Abstand 1 m:
 $\approx 8.988 \cdot 10^9 \text{ N}$ ($\hat{=}$ 900 000 t Gewicht!).
- Ladung, die bei einem Strom von 1 A in 1 s fließt.
- Kombination von Josephson- [Hz/V] und v. Klitzing-Konstante [Ω].

1.2 Das elektrische Feld

- Gegeben seien mehrere (i.allg. ausgedehnte) Ladungen, z.B. Q_1 , Q_2 und Q_3 . Wir interessieren uns für die Kraft all dieser Ladungen auf die punktförmige Ladung q . Nachdem wir Kräfte vektoriell addieren können gilt:



5

- Wir wenden das Distributivgesetz an,

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i,$$

6

und führen aus diese Weise das Konzept der Probeladung (hier q) ein. Tatsächlich wurde durch die unscheinbare Umformung in (6) die geometrisch konstante Ladungsverteilung von der Ladung *des Körpers* faktorisiert, von dem wir wissen wollen, welche Kräfte auf ihn wirken.

- Definition des elektrischen Feldes $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$:

Analog zur Mechanik: Feld = Kraft durch Probeladung.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i.$$

7

- Spezialfall: Eine punktförmige Ladung:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

8

- Kontinuierliche Ladungsverteilung:

$$\text{Volumen: } Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \implies \vec{\mathcal{E}}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) d^3r$$

9

$$\text{Oberfläche: } Q = \int_A \sigma(\vec{r}) dA$$

10

6. Beispiel 1: Unendlich ausgedehnte gleichförmig geladene Platte.

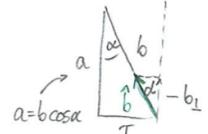
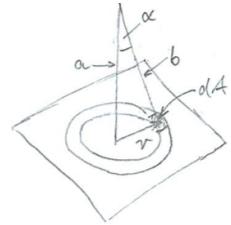
$$\vec{E} = f \int \frac{\sigma dA}{b^2} \hat{b}$$

\uparrow
 $:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
 Einheitsvektor
 in \hat{b} -Richtung

Symmetrie $\Rightarrow \vec{E}$ -Feld parallel zur Platte = 0

\Rightarrow es genügt, die senkrechte Komponente zu berechnen.

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= f\sigma \iint_A \frac{\hat{b}_{\perp}}{b^2} dA = \\ &\quad \left(\begin{array}{l} \cos \alpha \\ \hline a^2/\cos^2 \alpha \end{array} \right) \quad r = a \tan \alpha \Rightarrow \frac{dr}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2 \alpha} \\ &= f\sigma \iint_A \frac{\cos^3 \alpha}{a^2} r d\varphi dr = 2\pi f\sigma \int \frac{\cos^3 \alpha}{a^2} d\varphi \tan \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{unabhängig von } a! \end{aligned}$$



7. Beispiel 2: Bestimme das elektrische Feld im Zentrum eines mit Ladung Q geladenen Halbring mit Radius R . Strategie:

- plaziere Testladung q ins Zentrum
- berechne Kraft $d\vec{F}$ auf q_0 von einem kleinen Drahtstück
- integriere über alle $d\vec{F}$, teile durch q_0 .

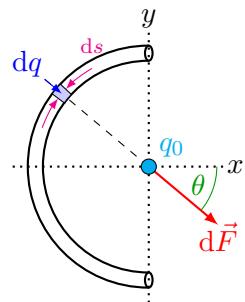
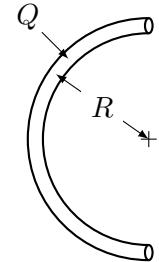
$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{R^2} [\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}]$$

Aus der Symmetrie folgt: $F_y = 0$ was $\int dF_y = 0$ bedeutet. Also ergibt die Integration über $d\vec{F}$:

$$\vec{F} = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\vec{F} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 dq}{R^2} \cos \theta \hat{x}$$

Wie erhalten wir einen Ausdruck für dq ? dq hat denselben Anteil an Q wie ds am Ringumfang πR \Rightarrow

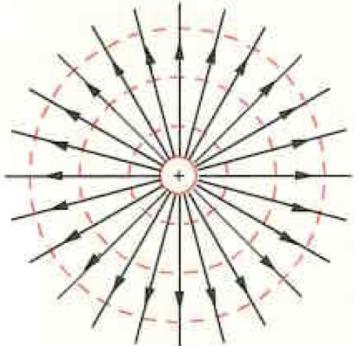
$$dq = \frac{Q}{\pi R} ds = \frac{Q}{\pi R} R d\theta = \frac{Q}{\pi} d\theta$$



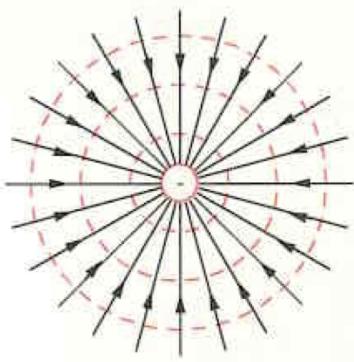
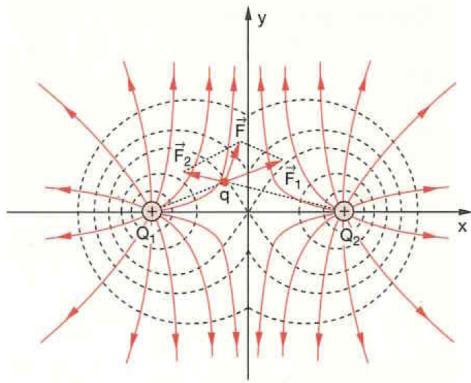
$$\Rightarrow \vec{F} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 Q}{R^2} \frac{1}{\pi} \cos \theta d\theta \hat{x} = \frac{q_0 Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} \hat{x} = \frac{q_0 Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2} \hat{x}$$

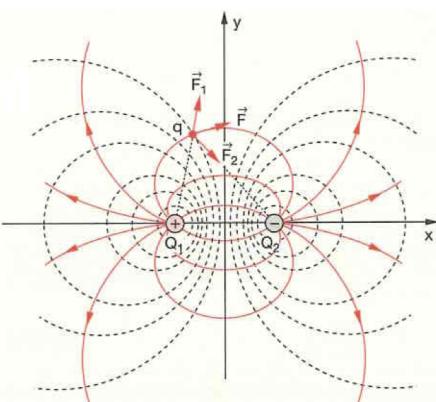
8. Veranschaulichung des elektrischen Feldes durch Feldlinien:



a)



b)



→ Exp.: Feldlinien

1.3 Das elektrische Potential

- Bereits die vergleichsweise einfachen Geometrien in den Beispielen aus Kap. 1.2 führten zu recht komplizierten Ausdrücken. Die naheliegende Frage ist, ob die Coulomb-Kraft konservativ ist. Wenn ja, dann gäbe es ein Potential und man könnte die stellenweise haarige Vektorrechnung beiseite lassen.
- Nachdem das Coulomb-Gesetz genauso aussieht wie Newtons Gravitationsgesetz, muss die Coulomb-Kraft konservativ sein (zumindest solange wir die Ladungen festnageln.)
- Erinnerung an die Mechanik:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -[E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1)] \quad 15$$

Was meinen wir damit? Egal auf welchem Weg von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 wir die Arbeit integrieren: Das Ergebnis dieses komplizierten Integrals ist einfach die Differenz der Potentialfunktion E_{pot} an den beiden Endpunkten. Ich bitte Sie zu würdigen, dass man ein so kompliziertes Integral so einfach ausrechnen kann – vorausgesetzt es gibt eine Potentialfunktion. Entsprechend begehrte sind sie, die Potentialfunktionen.

Beispiel: Konstantes elektrisches Feld

- Wir wollen sehen, ob ein konstantes elektrisches Feldes eine Potentialfunktion hat. Dazu sind idealerweise zwei Dinge zu tun: (i) es ist zu prüfen, ob $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ konservativ ist und (ii) die Potentialfunktion ist zu bestimmen. Wir beginnen mit (ii):
- Sei o.B.d.A. $\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_x, 0) \implies \vec{F} = q\mathcal{E}_x \hat{x} + 0 \hat{y}$

einerseits: $W_{\vec{r}_1, \vec{r}_2}^{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\mathcal{E}_x dx + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} 0 dy = q\mathcal{E}_x(x_2 - x_1)$

andererseits: $W_{\vec{r}_1, \vec{r}_2}^{\vec{F}} = - \underbrace{[E_{\text{pot}}(x_2, y_2) - E_{\text{pot}}(x_1, y_1)]}_{\text{von } \vec{F} \text{ verrichtet}} \underbrace{\text{diese Arbeit wird verrichtet}}$

Vergleiche beides $\implies E_{\text{pot}}(x) = -q\mathcal{E}_x x$ (+const.)

6. Teste also, ob die Kraft konservativ ist: Die angebliche Potentialfunktion muss dann beim Differenzieren die Kraft ergeben:

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} = q \mathcal{E}_x \quad \text{und} \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} = 0$$

Das ist genau die Kraft, die das konstante elektrische Feld auf q ausübt. $-\vec{\nabla}E_{\text{pot}}$ hat also \vec{F} reproduziert. Damit haben wir einen der drei äquivalenten Existenzbeweise für ein Potential geführt.

7. Die Rechnung oben sieht so trivial aus, dass man vielleicht nicht begreift, was da eigentlich gemeint ist. Es gibt durchaus Fälle, wo man eine Stammfunktion zu \vec{F} angeben kann, *ohne* dass dies eine Potentialfunktion ist. $-\vec{\nabla}E_{\text{pot}}$ muss nämlich \vec{F} in allen Einzelheiten reproduzieren.

Problematische Fälle:

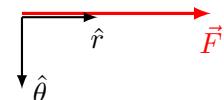
- Reibung: Dort hängt das Vorzeichen der Kraft von der Richtung der Geschwindigkeit ab. Davon „weiß“ die angebliche Potentialfunktion nichts \Rightarrow die Kraft kann durch $F = -\text{grad } U$ nicht unter allen Umständen reproduziert werden \Rightarrow nicht konservativ
- Zeitabhängiges \mathcal{E} -Feld: Das Potential hängt ja definitionsgemäß nur vom Anfangs- und Endpunkt des Wegintegrals ab, es weiß also nichts von der Zeitabhängigkeit $\Rightarrow \mathcal{E}$ -Feld i. allg. nicht konservativ.

Beispiel: Zentrale symmetrisches Feld

8. Coulomb-Kraft in Polarkoordinaten:

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} \hat{r} + 0 \cdot \hat{\theta}$$

$$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$$

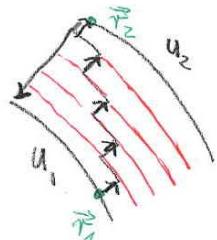


9. Berechne die verrichtete Arbeit:

$$W_{\vec{r}_1, \vec{r}_2}^{\vec{F}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F_r dr + 0 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r^2} dr = -\frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

10. Vergleich mit Definition der potentiellen Energie:

$$\Rightarrow E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r}$$



11. Test ob E_{pot} wirklich die Potentialfunktion ist:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$$

$$\implies F_r = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q_0 (-1) \frac{1}{r^2}$$

$$F_\theta = 0$$

✓

1.4 Allgemeine Definition des elektrischen Potentiales

1. Genauso wie wir das elektrische Feld als das (mechanische) Kraftfeld dividiert durch Probeladung definiert haben, definieren wir das elektrische Potential

$$\text{elektr. Potential} = \lim_{\text{Probelaadung } q_0 \rightarrow 0} \frac{1}{q_0} \text{ mech. Potential} \quad 20$$

Durch $q_0 \rightarrow 0$ stellen wir sicher, dass die Probelaadung selbst kein Feld produziert.

2. Einheiten

$$[U] = \frac{\text{J}}{\text{C}} =: \text{Volt} \quad 21$$

3. Beispiele:

- konstantes \mathcal{E} -Feld:

$$E_{\text{pot}}(x) = -q_0 \mathcal{E} x \implies U(x) = -\mathcal{E} x$$

- Punktladung:

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r} \implies U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

4. Bemerkungen:

- Die Beziehung $\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}$ überträgt sich auf elektrisches Feld und Potential.

$$F_x = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} \implies \mathcal{E}_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \implies \vec{\mathcal{E}} = -\text{grad } U \quad 22$$

$$F_y = -\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} \implies \mathcal{E}_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

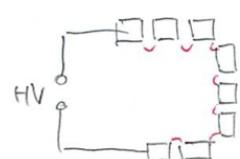
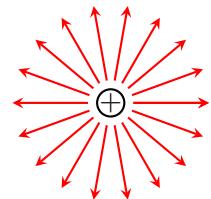
- \vec{F} konservativ $\iff \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \iff \oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = 0$

5. Potentiallinien

2 Das Gaußsche Gesetz

2.1 Qualitative Diskussion

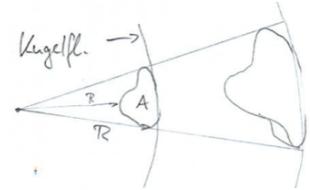
- Nachdem das elektrische Feld – abgesehen vom Faktor 1/Probeladung – identisch mit dem Kraftfeld ist und nachdem die elektrischen Kräfte, s. Coulomb-Gesetz, von den Ladungen ausgehen, liegt die Vermutung nahe, dass die Feldlinien des elektrischen Feldes an den Ladungen beginnen oder enden.
- Dichte der Feldlinien: Wenn wir nebenstehendes Beispiel einer einzelnen Punktladung im leeren Raum betrachten, dann sehen wir, dass es Regionen gibt, in der die Dichte der Feldlinien höher als anderswo ist. Hat die Dichte der Feldlinien vielleicht etwas mit der Feldstärke zu tun?
- Legen wir zur Klärung dieser Frage eine Kugel mit Radius R_1 konzentrisch um die Ladung. Die Oberfläche dieser Kugel ist dann $4\pi R_1^2$. Die Zahl der Feldlinien, die durch diese Kugelfläche treten sei N . Entsprechend ist dann die Dichte der Feldlinien auf der Kugelfläche $= N/4\pi R_1^2$.
- Wenn wir eine andere konzentrische Kugelschale (Radius sei nun R_2) nehmen, sind es immer noch N Feldlinien, die durch die Kugeloberfläche treten – zumindest wenn die Vermutung aus -1 zutrifft: Nachdem es in unserem Beispiel nur diese eine Punktladung gibt, können nirgends im Raum (außer eben bei der Punktladungs selbst) Feldlinien beginnen oder enden. Die Zahl der Feldlinien ist also im Raum zwischen den beiden betrachteten Kugelschalen erhalten. Folglich ist die Dichte der Feldlinien auf der Kugel mit Radius R_2 eben $= N/4\pi R_2^2$.
- Allgemein gilt also: Dichte der Feldlinien im Abstand r von der Ladung $= N/4\pi r^2$. Vergleichen wir das mit der Stärke des elektrischen Feldes einer Punktladung q , (1-9): $\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, so sehen wir: **Dichte der Feldlinien $\propto |\vec{\mathcal{E}}|$** .
- Teste diese Aussage experimentell: Wenn es zutrifft, dass kleine Radien große Feldstärken zur Folge haben, sollte man Funken zunächst an Spitzen sehen.
→ Exp.: Platine, Funkenrad, Kerze ausblasen



2.2 Definition des Raumwinkels

- Zur Vorbereitung des Gaußschen Satzes müssen wir den Raumwinkel einführen. Betrachte dazu eine Kugel mit Radius R um den Ursprung. Aus dieser Kugel ist eine Fläche mit Flächeninhalt A markiert.
- Die Menge der Linien vom Ursprung zur Umrandung der Fläche bildet einen verallgemeinerten Kegel, auch Konus genannt. Der Raumwinkel Ω des Konus' ist definiert als
- Bemerkung: Ω ist unabhängig vom Radius der Kugel: eine größere führt dazu, dass auch A im selben Maße wächst.
- Der Raumwinkel ist das dreidimensionale Analogon zum Winkel in der Ebene: Letzterer misst die Öffnung zweier sich schneidender Geraden. Auch der herkömmliche Winkel ist unabhängig vom Kreisbogen, mit dem er gemessen wird. Analog misst Ω die Öffnung des (verallg.) Kegels.
- Der maximale Wert des Raumwinkels ergibt sich aus der maximalen Fläche, die der Konus umschließen kann. Das ist natürlich die gesamte Kugeloberfläche, also $A_{\max} = 4\pi R^2$.

$$\Rightarrow \Omega_{\max} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$$



1

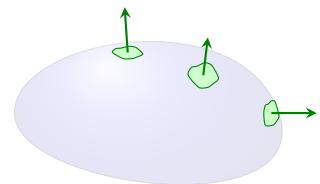
- Auch das entspricht ganz den Eigenschaften des herkömmlichen Winkels, der seinen Maximalwert mit 2π annimmt.
- Es überrascht sicher nicht, dass wir nun auch noch einen infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega$ einführen:

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2}$$

3

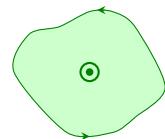
2.3 Definition des Oberflächenvektors

1. Betrachte eine *geschlossene* Fläche und davon ein Stückchen. Wir definieren den Oberflächenvektor \vec{A} als:



- Vektor, der *senkrecht* auf der Oberfläche steht und
- für $|\vec{A}| > 0$ nach *außen*, ansonsten nach innen, zeigt.
- Außerdem gelte $|\vec{A}| = \text{Flächeninhalt } A$ des Oberflächenstückchens.

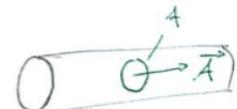
2. Wenn die Oberfläche nicht geschlossen ist, kann das Oberflächenstückchen dadurch orientiert werden, dass man für den Rand des Oberflächenstückchens eine Umlaufrichtung vorgibt. Die Richtung des Oberflächenstückchens ist dann durch die Rechte-Hand-Regel gegeben.



Beispielsweise könnte man sich vorstellen, dass das Oberflächenstückchen durch einen Draht eingefasst ist. Der Strom in diesem Draht könnte dann die Umlaufrichtung darstellen. Genau diese Situation werden wir später beim Ampèreschen Gesetz antreffen. Hier ist zunächst jedoch die erste Definition relevant.

2.4 Der elektrische Fluss

1. Betrachte ein Rohr, in dem Wasser fließt. Wir halten einen Ring in das Rohr und messen, wieviel Wasser durch den Ring fließt.



2. Spezialfälle:

- $\vec{A} \perp$ Wasserfluss \implies gemessener Fluss = 0
- $\vec{A} \parallel$ Wasserfluss \implies gemessener Fluss ist proportional zu $|\vec{A}|$ (und zur Flussstärke im Rohr).

3. Bemerkung: Es kann auch negativen Fluss geben und zwar dann, wenn \vec{A} anti-parallel zu den Feldlinien (hier dem Geschwindigkeitsvektor der Wasserteilchen) ist.

4. Definition des elektrischen Flusses Φ :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \\ \text{oder } \Phi_A &= \iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \end{aligned} \quad 5$$

↑
Fluss durch Oberfläche A

2.5 Das Gaußsche Gesetz

1. Wenn wir statt dem Ring eine geschlossene (gleichwohl wasserdurchlässige) Fläche in das eben diskutierte Wasserrohr halten, würden wir feststellen, dass der Gesamtfluss durch diese Oberfläche = 0 ist: Es fließt ebenso viel Wasser in das von der geschlossenen Oberfläche umgebene Volumen hinein wie hinaus. Der Nettofluss wird nur dann $\neq 0$ sein, wenn es eine Quelle in dieser geschlossenen Fläche gibt. Wenn das so ist, kann man aber gleich einen Schritt weiter gehen und sagen, dass der Nettofluss durch die geschlossene Fläche ein Maß für die Stärke der Quelle ist.
2. Eine Behauptung – sie ist das Gaußsche Gesetz – die kompatibel mit -1 ist, sagt, dass der elektrische Gesamtfluss durch eine geschlossene Oberfläche A gleich der von A eingeschlossenen Ladung q geteilt durch ε_0 ist:

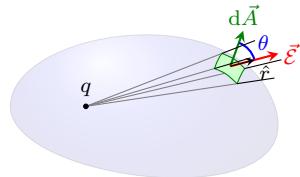
$$\iint_A d\Phi \stackrel{(5)}{=} \iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad 10$$

Diese Behauptung soll für alle denkbaren Ladungsverteilungen und geschlossenen Oberflächen, die man um sie herumlegen kann, gelten.

Beweis:

3. Für den Beweis genügt es, den Fluss des elektrischen Feldes einer im Ursprung sitzenden Punktladung q durch eine beliebige geschlossene Oberfläche A zu berechnen und zu prüfen, ob sich q/ε_0 ergibt. Der Rest folgt dann aus dem Superpositionsprinzip.

4. Wir legen eine beliebig geformte Oberfläche (also eine Kartoffel) um die Ladung q . Dann zerlegen wir die Kartoffeloberfläche (die Kartoffelschale) in lauter kleine $d\vec{A}$, berechnen den Fluss $d\Phi = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) d\vec{A}$ durch jedes $d\vec{A}$, summieren alle $d\Phi$ auf, und sehen, ob am Ende wirklich q/ε_0 raus kommt.



5. Obwohl das Integral unmöglich kompliziert aussieht, kann man es doch berechnen; v.a. weil wir dank Coulomb das Feld einer sich im Ursprung befindlichen Punktladung kennen:

$$\Phi = \iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \stackrel{(1-9)}{=} \iint_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \hat{r}}{r^2} d\vec{A}$$

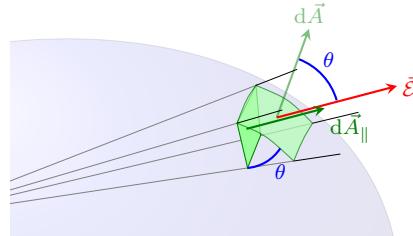
11

6. $\hat{r} d\vec{A} = \cos \theta dA$, wie der Skizze zu entnehmen ist. Allerdings hilft das noch nicht wirklich, denn θ ist von \vec{r} abhängig: $\theta = \theta(\vec{r})$! Man kann also, anders als man es gerne hätte, das θ nicht aus dem Integral herausziehen:

$$\Phi = \iint_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \cos \theta(\vec{r})}{r^2} dA$$

12

7. Bleiben wir aber mal bei genau dem in der Skizze gezeigten $d\vec{A}$. Weil die Kartoffel so geformt ist wie sie geformt ist, steht $d\vec{A}$ schräg auf $\vec{\mathcal{E}}$, was dann zum ortsabhängigen Winkel $\theta(\vec{r})$ in (12) führt.



Nun ersetzen wir dA durch ein dA' , das denselben Abstand von q hat,² aber senkrecht auf \vec{r} und damit $\vec{\mathcal{E}}$ steht. Folglich ist der Flächenvektor parallel zu \vec{r} und damit $\vec{\mathcal{E}}$ – deshalb auch die Bezeichnung $d\vec{A}' =: d\vec{A}_{\parallel}$. Die Fläche von $d\vec{A}_{\parallel}$ wählen wir so, dass $d\vec{A}_{\parallel}$ denselben Raumwinkel wie $d\vec{A}$ definiert. In gewissen Sinne nähern wir die Kartoffel lokal durch eine ursprungssymmetrische Kugel.

8. Der Skizze entnimmt man: $dA_{\parallel} = \cos \theta dA$. Damit wird

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dA_{\parallel}$$

13

²Sie sagen, derselbe Abstand geht nicht? Doch, das geht wenn dA infinitesimal klein ist!

9. Der Raumwinkel $d\Omega$ war definiert durch $d\Omega = \frac{dA_{\parallel}}{r^2}$, s. Kap. 2.2. Man beachte, dass die Definition genau auf unser Problem passt: Wir hatten den Raumwinkel mit Hilfe einer Kugel um den Ursprung definiert. Also gilt:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q d\Omega \quad 14$$

10. Jetzt müssen wir nur noch alle $d\Phi$ aufaddieren (oder -integrieren):

$$\iint_A d\Phi = \iint_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\iint_A d\Omega}_{=4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{q.e.d.} \quad 15$$

11. Bemerkung: Wenn die Ladung negativ ist, gehen die $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldpfeile von außen nach innen. $\implies d\Omega = \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} < 0 \implies \oint_A d\Phi < 0$. Das passt aber gerade, da $q < 0$!

12. Und was ist, wenn q außerhalb der Kartoffel liegt?

Wenn wir die Flüsse durch Flächenpaare wie skizziert bilanzieren, ist zunächst mal:

$\vec{\mathcal{E}}_1$ antiparallel $d\vec{A}_1 \implies d\Phi_1 < 0$ und

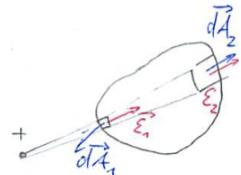
$\vec{\mathcal{E}}_2$ parallel $d\vec{A}_2 \implies d\Phi_2 > 0$.

Fragt sich, ob $d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$ ist.

Das ist tatsächlich der Fall da:

$|\vec{\mathcal{E}}_2| < |\vec{\mathcal{E}}_1|$, und zwar quadratisch mit r . Genauso ist aber:

$|d\vec{A}_{\parallel,2}| > |d\vec{A}_{\parallel,1}|$, und zwar ebenfalls quadratisch mit r . Insgesamt ist der Gesamtfluss durch alle Flächenpaare, mit denen man wie skizziert die Oberfläche bedecken kann, gleich Null.



2.6 Anwendungen des Gaußschen Gesetzes

2.6.1 Punktladung Q

- Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf eine Punktladung führt auf das Coulomb-Gesetz. Damit haben wir natürlich keine neuen Erkenntnisse gewonnen. Vielmehr ist das ein Zirkelschluss – schließlich haben wir ja das Coulomb-Gesetz verwendet, um das Gaußsche Gesetz zu beweisen.
- Trotzdem ist die Aufgabe eine nette Fingerübung, um sich mit der Anwendung des Gauß-Gesetzes vertraut zu machen. Zur Wiederholung: es lautet

$$(10): \iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

In Worten: Das Integral über den elektrischen Fluss durch eine beliebige geschlossene Oberfläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung durch ϵ_0 .

- Die Kunst in der Anwendung des Gaußschen Gesetzes besteht in der Wahl der geeigneten Oberfläche („Gaußschen Fläche“) unter Ausnutzung der evtl. vorhandenen Symmetrie des Problems. Für die Punktladung eignet sich offensichtlich eine Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Ort der Punktladung zusammenfällt, am besten.
- Bei dieser speziellen Wahl der Gaußschen Fläche gilt nämlich

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{A} = |\vec{\mathcal{E}}| |d\vec{A}| \cos 0^\circ = \mathcal{E} dA.$$

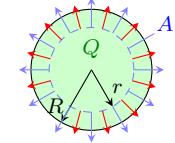
Durch die geschickte Wahl der Gaußschen Fläche haben wir zwei Dinge erreicht: (i) das Skalarprodukt ist weg und (ii) das $|\vec{\mathcal{E}}|$ unter dem Integral ist konstant als Folge dessen, dass ein radialsymmetrisches Feld überall auf einer konzentrisch gewählten Oberfläche denselben Betrag der Feldstärke hat.

- Die Auswertung des furchteinflößenden Oberflächenintegrals wird damit trivial:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= \iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \iint_A \mathcal{E} dA = \mathcal{E} \iint_A dA = \mathcal{E} 4\pi R^2. \\ \Rightarrow \quad \mathcal{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \text{Coulomb-Gesetz} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2.6.2 Gleichmäßig geladene Vollkugel

1. Gesucht ist das elektrische Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ sowohl im Inneren wie auch außerhalb der Kugel, die den Radius R habe und mit der Ladung Q gleichmäßig geladen sei. Die Ladung pro Volumen soll in der Kugel also konstant sein.
2. Zunächst wenden wir das Gauß-Gesetz auf das Innere der Kugel an. Als Gaußsche Fläche A drängt sich aus Symmetriegründen wiederum eine konzentrische Kugelfläche auf. Nachdem wir zunächst am Feld $\vec{\mathcal{E}}$ im Inneren der Kugel interessiert sind, wählen wir den Radius r der Gaußschen Fläche so, dass A im Innern der geladenen Kugel liegt.



3. Die von A eingeschlossene Ladung q kann man offensichtlich durch $q = Q \frac{r^3}{R^3}$ berechnen.
4. Das Gaußsche Gesetz lautet für die von uns gewählte Gaußsche Fläche also:

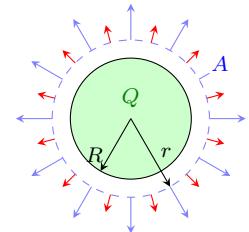
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^3} = \iint_A \vec{\mathcal{E}}(r) d\vec{A} = \iint_A \mathcal{E}(r) dA = \mathcal{E}(r) \iint_A dA = \mathcal{E}(r) 4\pi r^2.$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

20

5. Das elektrische Feld im Inneren der Kugel steigt also linear mit dem Abstand vom Kugelmittelpunkt an.
6. Außerhalb der Kugel wird A natürlich außerhalb der Kugel um dieselbe gelegt. Die Ladung im Inneren von A ist offensichtlich die Gesamtladung Q der Kugel – unabhängig von r . Damit haben wir die gleiche Gleichung wie im Falle der Punktladung von Kap. 2.6.1. Nachdem die gleichen Gleichungen die gleichen Lösungen haben, können wir $\mathcal{E}(r)$ für $r \geq R$ sofort hinschreiben:

$$\mathcal{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

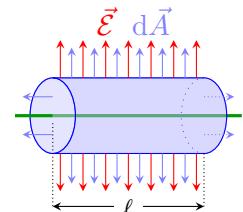


21

7. Selbstverständlich wissen wir nicht nur den Betrag von $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, sondern auch die Richtung. Tatsächlich stand diese sogar ganz am Anfang unserer Betrachtungen, als wir die Symmetrie des Problems ausgenutzt haben.

2.6.3 Gleichmäßig geladener Draht

- Die Kunst in der Anwendung des Gaußschen Gesetzes besteht in (i) der Ausnutzung der Symmetrie und (ii) der Wahl einer geeigneten Gaußschen Fläche, so dass das Oberflächenintegral mehr oder weniger trivial wird. Beim gleichmäßig geladenen Draht – die Ladung pro Länge sei λ – liegt offensichtlich Zylindersymmetrie vor.



Entsprechend wählen wir als Gaußsche Fläche einen konzentrisch um den Draht gelegten Zylinder der Länge ℓ . Der Vollständigkeit halber merken wir an, dass der Zylinder mit Deckeln geschlossen ist; schließlich spricht das Gaußsche Gesetz vom Fluss durch eine geschlossene Oberfläche.

- Gaußsches Gesetz:

$$\frac{\text{eingeschl. Ladung}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} = \iint_A \vec{E} d\vec{A} = \iint_{\text{Rohr}} \vec{E} d\vec{A} + \iint_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A}^0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} = \vec{E} \iint_{\text{Rohr}} d\vec{A} = \mathcal{E} \ell 2\pi r \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} \quad 22$$

- Wie nicht anders erwartet, nimmt die Feldstärke zu, wenn man sich dem Draht nähert. Mit einem sehr dünnen Draht können daher sehr hohe Feldstärken realisiert werden. → Exp.: Geiger-Zähler

2.6.4 Gleichmäßig geladene Fläche

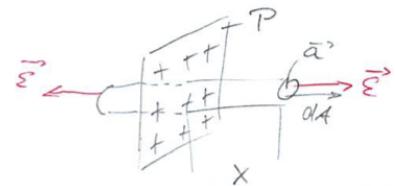
1. Die Flächenladungsdichte, also die Ladung pro Flächeneinheit, sei σ .

- Symmetrie $\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} \perp$ Platte P .
- Wahl geeigneter Gaußfläche: Ein Zylinder (oder auch ein Prisma) so, dass die Mantelfläche(n) parallel zu $\vec{\mathcal{E}}$ und die Deckflächen parallel zu P sind.

2. Aus der Skizze entnimmt man, dass die von der von uns gewählten Gaußfläche eingeschlossene Ladung $= \sigma \cdot a$ ist. Gaußgesetz \Rightarrow

$$\iint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \underbrace{\iint_{\text{Deckel links}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{= 0 \text{ da } \vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{A}} + \underbrace{\iint_{\text{Zylinder}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{=} + \underbrace{\iint_{\text{Deckel rechts}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}} \stackrel{!}{=} \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2\mathcal{E} a = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



2.7 Elektrische Leiter

1. In einem Leiter sind die Ladungsträger frei beweglich. \Rightarrow Das elektrische Feld im Innern eines Leiters = 0 (sonst würden sich die Ladungsträger beschleunigt bewegen und jede Menge Wärme erzeugen.)
2. Wenn das elektrische Feld im Innern eines Leiters = 0 $\stackrel{\text{Gauß}}{\Rightarrow}$ es existieren keine Ladung im Innern des Leiters. (Wäre da eine Ladung, könnten wir eine Kugelschale drum herum legen und erhielten einen Nettofluss, das Feld könnte also nicht = 0 sein.)
3. Auf der Oberfläche können sich dagegen durchaus Ladungen befinden: Jede Gaußsche Fläche, die ein Oberflächenstück einschließen will, muss innerhalb und außerhalb des Leiters verlaufen.
4. Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf der Oberfläche ist ebenfalls = 0, sonst würden sich die Ladungen auf der Oberfläche beschleunigt bewegen.

5. Bleibt die Normalkomponente des elektrischen Feldes auf der Oberfläche. Wir betrachten die abgebildete leitende Kartoffel. Die Ladung sitzt, s.o., auf der Oberfläche. Die Ladungsdichte sei σ



$$\begin{aligned}
 &= 0 \text{ weil } \vec{\mathcal{E}} = 0 & &= 0 \text{ weil } \vec{\mathcal{E}} = 0 & &= 0 \text{ weil } \vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{A} & &\frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0} \\
 &\underbrace{\iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{\substack{\text{Deckel} \\ \text{innen}}} + \underbrace{\iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{\substack{\text{Zylinder} \\ \text{innen}}} + \underbrace{\iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{\substack{\text{Zylinder} \\ \text{außen}}} && && && \iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} & \doteq \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \\
 &&&&&&&&
 \end{aligned}$$

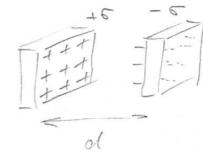
$$\Rightarrow \mathcal{E} \cancel{d} = \frac{\sigma \cancel{d}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

25

6. Beachte den Unterschied zu (23) in Kap. 2.6.4: Dort hatten wir stillschweigend einen Isolator angenommen. Mehr dazu im nächsten Kapitel.
7. Anwendungen: Abschirmung, Faradayischer Käfig, \rightarrow Exp.

2.8 Influenz und eine wichtige Feinheit

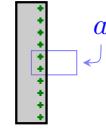
- Beginnen wir mit der Feinheit: Zwei parallele leitende Platten stehen sich mit entgegengesetzter Oberflächenladung gegenüber, $+\sigma$ und $-\sigma$.



- Berechne das Feld mit dem Gaußschen Gesetz:

$$\underbrace{\iint \vec{E} dA}_{\substack{\text{Deckel} \\ \text{innen}}} = 0 \quad \underbrace{\iint \vec{E} dA}_{\substack{\text{Zylinder} \\ \text{innen}}} = 0 \quad \underbrace{\iint \vec{E} dA}_{\substack{\text{Zylinder} \\ \text{außen}}} = 0 \quad \underbrace{\iint \vec{E} dA}_{\substack{\text{Deckel} \\ \text{außen}}} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



30

- Das entspricht (25) von Kap. 2.8, aber natürlich nach wie vor nicht (23) von Kap. 2.6.4. Wo ist der Unterschied?

Es ist *nicht* so, dass wir einen Fehler gemacht hätten, indem wir nur die linke Platte durch die Wahl unserer Gaußfläche berücksichtigt haben. Es gibt keine falschen Gaußflächen, nur dumme: Gerne können wir die Gaußfläche auch in die andere Platte dringen lassen. Das ist dann ein Beispiel dafür, bei dem das Gaußsche Gesetz eine (wie immer!) richtige, hier aber wenig hilfreiche Aussage macht.

- Der Unterschied zur geladenen einzelnen Platte ist, dass sich hier die Ladungen auf den beiden Platten gegenseitig beeinflussen (*Influenz*): Auf der rechten Platte werden die negativen Ladungsträger auf die Seite gezogen, die der linken Platte gegenüber liegt. Umgekehrt, und das macht den Unterschied zu Kap. 2.6.4, werden auf der linken Platte die positiven Ladungsträger auf die Innenseite verschoben, so dass die Rückseite dieser Platte neutral wird. Gegenüber Kap. 2.6.4 hat man also die doppelte Ladungsdichte, daher der Faktor 2.
- Tatsächlich ist es so, dass sich die Ladungsverteilung verändert, wenn wir die rechte Platte wegnehmen: Auf der linken Platte verteilt sich die Ladung gleichmäßig auf Vorder- und Rückseite und schon fehlt der Faktor 2 wieder.
- **Exp.:** Wenn man einen Ladungslöffel an ein Elektroskop bringt, *ohne* es zu berühren, schlägt es aus. Der Zeiger geht wieder auf Null wenn man den

Ladungslöffel wieder entfernt.

7. → **Exp.:** Mit zwei sich berührenden Ladungslöffeln, die man im Feld eines Plattenkondensator trennt, lassen sich die Ladungslöffel aufladen, ohne die geladenen Platten des Kondensators zu berühren. Dieser auf Gustav Mie (?) zurückgehende Versuch ist wohl der Paradeversuch für die Demonstration der Influenz.
8. → **Exp.:** Man nehme ein Elektroskop mit einer becherförmigen Elektrode. Wenn man mit dem Ladungslöffel die Ladung an die Außenseite des Bechers gibt, dann gelingt die Aufladung nur solange, wie Ladungslöffel noch höhere Spannung wie das Elektroskop aufweist: Die Ladungen auf dem Becher und dem Löffel stoßen sich so stark ab, dass der Ladungsübertrag unterbunden wird. Wenn man die Ladung jedoch auf die Innenseite des Bechers gibt, kann man (fast) beliebig viel Ladung auf das Elektroskop übertragen. Das ist natürlich eng verbunden mit der Feldfreiheit im Innern eines Leiters, die wir im vorigen Abschnitt diskutiert hatten. Verwirklich sieht man das Prinzip im Bandgenerator: Dort wird das geladene Band von unten in die charakteristische Kugel geführt und bekanntlich können mit dieser Maschine viele Kilovolt Spannung produziert werden.
9. Influenzmaschinen:
 - Lichtenberg und das Elektrophor
 - Pohlsche Influenzmaschine
 - Holtzsche od. Wimhurstsche Influenzmaschine
10. Influenz und Spiegelladungen

3 Kondensatoren und Dielektrika

3.1 Definition der Kapazität

- Der prototypische Kondensator sind zwei parallele Platten mit Fläche A und einem Abstand d – der Plattenkondensator. Wenn man auf die obere Platte die Ladung $+Q$ aufbringt, stellt sich auf der unteren durch Influenz $-Q$ ein.
- Wir werden in der Folge ein $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld mit Feldstärke $\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$ erhalten, vergl. (2-30). Entsprechend wird die Spannung (oder das elektrische Potential) $|U| = |\mathcal{E} \cdot d|$ betragen.
- Wir definieren die Kapazität C als

$$C = \frac{Q}{U}.$$

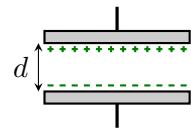
1

Für die Kapazität des Plattenkondensators erhalten wir also

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

2

- Die Einheit der Kapazität ist $[C] = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} =: 1 \text{ F}$. (Man beachte den Unterschied von C und $\text{C} = \text{Coulomb}$.) Die Einheit der Kapazität ist zu Ehren Michael Faradays, von dem noch zu sprechen sein wird, benannt: $1 \text{ F} = 1 \text{ "Farad"}$.
- Definieren kann man zwar alles, nützlich ist es aber nur, wenn die Definition Sinn macht. Mit der Kapazität wollen wir ein elektrischen Bauteil charakterisieren – später werden wir dasselbe für Widerstände und Induktivitäten machen. Wenn die Kapazität eine sinnvolle, das Bauteil charakterisierende Größe sein soll, muss sie von elektrischen Größen unabhängig sein. Tatsächlich hängt die Kapazität des Plattenkondensators nur von seiner Geometrie ab, vergl. (2).
- **Exp.:** Ladung auf einen Plattenkondensator bringen, Plattenabstand ändern, dabei Spannung messen.



3.2 Beispiel: Zylinder-Kondensator

- Wir wollen mal kurz überprüfen, ob die von uns so betonte Eigenschaft, dass die Kapazität des Plattenkondensators nur von seiner Geometrie abhängt, eine Spezialität dieser speziellen Anordnung ist, oder andere Aufbauten auch diese vorteilhafte Eigenschaft haben.

- Im Zylinderkondensator folgt das \vec{E} -Feld – vergl. (2-22) – der Gleichung

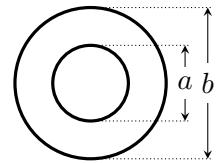
$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r \ell} \hat{r} \quad 5$$

$$\text{Mit } \mathcal{E}_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \implies -[U(b) - U(a)] = \int_a^b \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \ell} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \ell} \ln r \Big|_a^b$$

$$\implies C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \ell \varepsilon_0}{\ln b/a}. \quad 6$$

Dies ist in der Tat nur von der Geometrie des Zylinderkondensators abhängig.

- Bem.: Der Grenzübergang zum Plattenkondensator kann durch Verwendung von $\ln(1+x) \approx x$ behandelt werden.
- Wenn wir ein bisschen nachdenken, erkennen wir, dass es gar nicht so überraschend ist, dass auch die Kapazität des Zylinderkondensators, ja sogar jeden beliebigen Kondensators, nur von der Geometrie abhängt: Jeder Kondensator kann als Reihen- und Parallelschaltung notfalls infinitesimal kleiner Plattenkondensatoren verstanden werden. Allerdings müssen wir nun zeigen, dass die Gesamtkapazität solcher Schaltungen ebenfalls nicht von elektrischen Größen abhängt.



3.3 Reihenschaltung von Kondensatoren [$Q = \text{const.}$]

- Betrachte die nebenstehende Serienschaltung der Kondensatoren C_1 , C_2 und C_3 . Die Ladung auf den Kondensatoren sei zunächst = 0.
- Nun wird eine Spannung angelegt \Rightarrow Auf allen Platten wird danach Ladung zu finden sein, entweder weil sie direkt von der Stromquelle darauf gelangt sind oder durch Influenz. Das Vorhandensein von Ladung impliziert wg. $C = \frac{Q}{U}$, dass alle Platten unter Spannung stehen.
- Nun kommt die entscheidende Idee: Die rechte Platte von C_1 und die linke von C_2 sind gar nicht mit U verbunden $\Rightarrow -Q_1 + Q_2$ muss = 0 bleiben $\Rightarrow Q_1 = Q_2$. Ebenso: $Q_2 = Q_3$.
- Es gilt $U = U_1 + U_2 + U_3$, was wie notfalls anhand der Arbeit einer Probeladung, die durch den Stromkreis geführt wird, bewiesen werden kann.

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \stackrel{Q_1=Q_2=Q_3}{=} Q \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)}_{=: 1/C} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} \end{aligned}$$

7

3.4 Parallelschaltung von Kondensatoren [$U = \text{const.}$]

- Der nebenstehenden Skizze entnimmt man sofort:

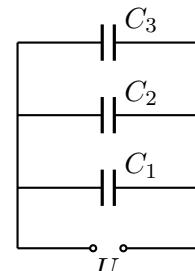
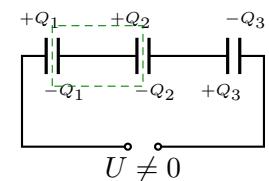
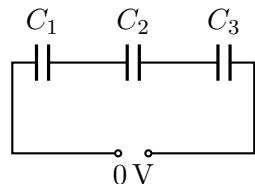
$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

- Betrachte die drei parallel geschalteten Kondensatoren als "black box". \Rightarrow Es muss nach wie vor gelten
Gesamtkap. = $\frac{\text{Gesamtladung } Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U}$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U C_1 + U C_2 + U C_3$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{U} = \underbrace{\left(C_1 + C_2 + C_3 \right)}_{=: C} \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$$

8



3. Die Formel $C = C_1 + C_2 + C_3$ ist genau das, was man wohl ohnehin erwartet hat: Bei drei gleichen Plattenkondensatoren könnte man sich ja vorstellen, die Platten der Kondensatoren zusammen zu schweißen. Dann hat der zusammengeschweißte Kondensator die Plattenfläche $3A$ und spätestens mit Blick auf (2) ist das obige Ergebnis reproduziert.

3.5 Im Kondensator gespeicherte Energie E

1. In einem Plattenkondensator ist das elektrische Feld konstant. D.h. wenn ich die infinitesimale Ladung dQ von der einen auf die andere Platte bringe, verrichte ich die Arbeit

$$dW = \underbrace{\mathcal{E} dQ}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{d}_{\text{Plattenabstand}}^{\text{konst.}}$$

2. Allerdings wird dabei die Ladung Q , die sich bereits auf der anderen Platte befindet, auf $Q + dQ$ erhöht. \Rightarrow Man muss integrieren:

$$E = \int_{Q=0}^{Q=Q_{\text{tot}}} dW = \int_0^{Q_{\text{tot}}} \underbrace{\mathcal{E} \cdot d}_{U} dQ = \int_0^{Q_{\text{tot}}} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q_{\text{tot}}^2$$

\uparrow
 $C = Q/U$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} C U^2$$

9

3. Leidener Flasche: Die Leidener Flasche ist eine frühe Form des Kondensators.
 \rightarrow Exp.: zerlegbare Leidener Flasche.

Bei diesem Experiment wird offensichtlich, dass der Isolator zwischen den beiden Platten einen erheblichen Einfluss hat. Dies wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

3.6 Dielektrika im elektrische Feld

1. Wenn man zwischen die Platten eines geladenen Plattenkondensators einen Isolator („Dielektrikum“) bringt, so sinkt die Spannung (\rightarrow Exp.) um einen gewissen Faktor ε_r .
2. Da der Plattenkondensator isoliert aufgestellt ist, ändert sich die Ladung Q auf den Platten beim Einfügen des Dielektrikums nicht. Deshalb muss sich wohl – $C = Q/U$ – die Kapazität geändert haben:

$$C = \varepsilon_r \cdot C_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad 10$$

3. $\varepsilon := \varepsilon_r \varepsilon_0$ hat im Laufe der Geschichte schon einige Namen bekommen. Derzeit ist **Permittivität** in Mode. Tatsächlich beschreibt $\varepsilon_r \varepsilon_0$ die Durchlässigkeit eines Materials für elektrische Felder. Entsprechend wird auch die deutsche Übersetzung **dielektrische Leitfähigkeit** verwendet. Das bereits im ersten Kapitel eingeführte ε_0 ist also die Permittivität des Vakuums und ε_r die auf das Vakuum normierte Permittivität des Dielektrikums. Aus diesem Grund wird ε_r *relative Permittivität* oder *Permittivitätszahl* genannt. Das Gleiche ist mit *Dielektrizitätszahl* gemeint.
4. ε_r ist eine Materialkonstante. Insbesondere ist sie in sehr guter Näherung unabhängig von $|\vec{\mathcal{E}}|$. Für anisotrope Medien genügt eine simple Zahl (Skalar) nicht, um die dielektrischen Eigenschaften etwa eines Kristalls zu beschreiben. ε_r ist dann ein Tensor.
5. Zurück zum Plattenkondensator: Der Betrag der elektrischen Feldstärke ist proportional zur Spannung \Rightarrow die Feldstärke im Kondensator sinkt beim Einführen des Dielektrikums ebenfalls.

- z.B. für eine Punktladung:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

- z.B. für einen Plattenkondensator:

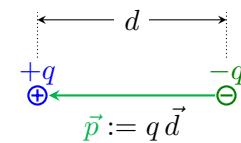
$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$$

3.7 Der elektrische Dipol

1. Das Dipolmoment zweier Ladungen $+q$ und $-q$ mit Abstand \vec{d} wird definiert durch

$$\vec{p} := q \vec{d}$$

11



2. Man beachte die Richtung von \vec{p} von der negativen zur positiven Ladung. Der Grund für diese Konvention wird klar, wenn wir das Drehmoment des Dipols im elektrischen Feld untersuchen.

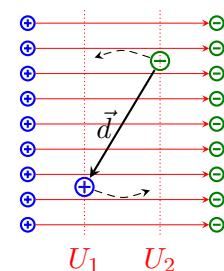
$$\vec{D} = \underbrace{2 \cdot \frac{\vec{d}}{2}}_{\vec{r}} \times q \vec{\mathcal{E}} = \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}}$$

3. Potentielle Energie: $\vec{\mathcal{E}} = -\text{grad } U$

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= q(U_2 - U_1) = \\ &= -q d_x \mathcal{E}_x = \\ &= -q \vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

12

$$\Rightarrow W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$



In Folge dessen ist W_{pot} minimal für $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{\mathcal{E}}$ und maximal für $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{\mathcal{E}}$.

→ Exp.: Dipol im Plattenkondensator

4. Im inhomogenen Feld ist $\vec{\mathcal{E}}$ vom Ort abhängig.

$\Rightarrow W_{\text{pot}} = -\vec{p} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ ist ortsabhängig.

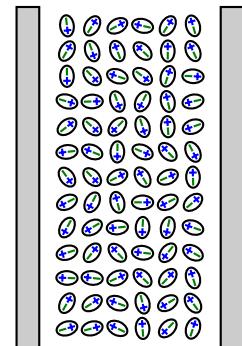
$\Rightarrow \text{grad } W_{\text{pot}} \neq 0$

\Rightarrow es existiert eine Kraft.

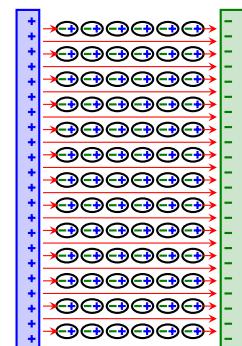
→ Exp.: Beim Plattenkondensator eine Platte durch einen Konus ersetzen und den Dipol diesem inhomogenen Feld aussetzen.

3.8 Die dielektrische Polarisation

1. Wir stellen uns vor, dass die Moleküle des Dielektrikums lauter kleine Dipole seien. Das ist zwar bei Weitem nicht bei allen Molekülen von Hause aus der Fall, allerdings würde ein äußeres elektrisches Feld auch Moleküle ohne permanentes Dipolmoment polarisieren, also in diesen Molekülen einen Dipol induzieren. Selbst wenn die Moleküle ein permanentes Dipolmoment haben, sind diese zufällig ausgerichtet solange kein äußeres elektrisches Feld anliegt. Entsprechend sind makroskopische Dielektrika in diesem Fall in aller Regel unpolarisiert.



2. Wenn nun ein Feld angelegt wird, richten sich die Dipole aus. Dies erzeugt im Dielektrikum ein Gegenfeld, so dass im Dielektrikum die Feldstärke herabgesetzt ist. Wir können das auch anders erklären: Wie in Kap. 1 diskutiert, beginnen Feldlinien an positiven und enden an negativen Ladungen. An der Zeichnung erkennt man, dass das tatsächlich zu einer Reduktion der Feldlinien und damit Verminderung der Feldstärke im Dielektrikum führen muss.



3. Wir nehmen an, in jedem Molekül seien Ladungen q vorhanden, die den Abstand d haben. Die Zahl der Atome pro Volumeneinheit wird mit N bezeichnet. Als Polarisation \vec{P} definiert man das Dipolmoment pro Volumeneinheit.

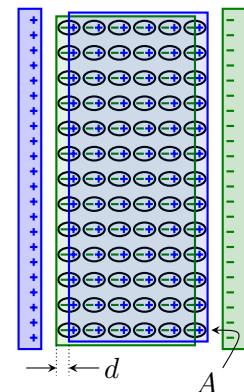
$$\Rightarrow \vec{P} = \underbrace{Nq d}_{\vec{p}} \quad \text{oder} \quad \vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$$

15

4. Im Inneren des Dielektrikums ist die Ladungsdichte im Mittel = 0; auch das erkennt man gut an der Skizze. (Das gilt zumindest solange \vec{P} homogen ist – wie im Kondensator.) An den Oberflächen des Dielektrikums gibt es hingegen eine Flächenladungsdichte σ_{pol} , da die positiven Ladungen gegenüber den negativen Ladungen um d verschoben werden (s.o.).

5. Wir können die Polarisation des Dielektrikums berechnen: Wie man an der Skizze erkennt, führt die Trennung der Ladungen in jedem einzelnen Molekül auf den Abstand d dazu, dass auf der Oberfläche des Dielektrikums Ladung „sichtbar“ wird. Das Volumen der entsprechenden Schicht ist durch $d \cdot A$ gegeben. Die „sichtbare“ Ladung Q_{pol} , also die Ladung dieses plattenförmigen Volumens, ist

$$Q_{\text{pol}} = d \cdot A \cdot \underbrace{N \cdot q}_{\text{Ladung pro Vol., s.o.}} \quad 16$$

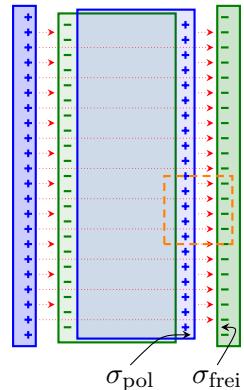


$$\Rightarrow \text{Flächenladungsdichte } \sigma_{\text{pol}} = Q_{\text{pol}}/A = N q d$$

$$\xrightarrow{(15)} P = \sigma_{\text{pol}} \quad 17$$

6. Mit dem Gaußschen Gesetz können wir die Feldstärke im Dielektrikum bestimmen: Der elektrische Fluss durch die Gaußfläche ist nur für den im Dielektrikum liegenden Deckel $\neq 0$. Die eingeschlossene Ladung ist die Oberflächenladung auf dem Dielektrikum und der Kondensatorplatte – was sonst! Damit:

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma_{\text{frei}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \quad 18$$



7. Mit (17) folgt

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma_{\text{frei}} - P}{\epsilon_0} \quad 19$$

8. Die Polarisation P wurde erst durch das \mathcal{E} -Feld hervorgerufen $\Rightarrow P = P(\mathcal{E})$. In erster Näherung ist es sicher vernünftig, einen linearen Zusammenhang anzunehmen:

$$P = \chi \epsilon_0 \mathcal{E} \quad 20$$

χ („chi“) wird **elektrische Suszeptibilität** des Dielektrikums genannt.

9. (20) in (19) einsetzen \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\sigma_{\text{frei}} - \chi \varepsilon_0 \mathcal{E}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \mathcal{E} + \chi \varepsilon_0 \mathcal{E} = \sigma_{\text{frei}} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathcal{E} &= \frac{\sigma_{\text{frei}}}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} \end{aligned}$$
21

10. Für den Kondensator gilt $U = \mathcal{E} d$. Wenn wir jetzt einen vollständig mit Dielektrikum gefüllten Kondensator annehmen, erhalten wir

$$U = \frac{\sigma_{\text{frei}} d}{\varepsilon_0 (1 + \chi)}$$
22

11. Die Gesamtladung auf dem Kondensator ist $Q = \sigma_{\text{frei}} \cdot A$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} \stackrel{(10)}{=} \frac{\varepsilon_0 (1 + \chi) A}{d}$$
23

12. Wenn wir das mit (20) vergleichen folgt:

$$\varepsilon_r = (1 + \chi)$$
24

3.9 Gaußsches Gesetz mit Dielektrika

- Wir stellen nun die eingeschlossenen Ladungen Q im Gaußschen Gesetz als Summe der eingeschlossenen freien (also auf Leitern befindlichen) Ladungen Q_{frei} und der durch Polarisation entstandenen Ladungen Q_{pol} dar:

$$\oint\limits_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{frei}}}{\varepsilon_0} + \frac{Q_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \quad 30$$

- Nachdem q_{frei} vor q_{pol} in keiner Weise ausgezeichnet ist, gibt es auch für q_{pol} ein Gaußsches Gesetz. Eine einfache Betrachtung (s. Anhang) zeigt:

$$-\oint\limits_A \vec{P} d\vec{A} = \iiint\limits_{V(A)} \rho_{\text{pol}} dV = Q_{\text{pol}} \quad 31$$

Dass das auch dimensionsmäßig stimmt, zeigt (17). Das Vorzeichen hat denselben Grund wie in (18).

- Wenn wir (30) und (31) kombinieren, erhalten wir:

$$\oint\limits_A (\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}) d\vec{A} = Q_{\text{frei}}$$

- Mit (20): $P = \chi \varepsilon_0 \mathcal{E}$ wird aus dem Integranden

$$\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \chi \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} = (1 + \chi) \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} \stackrel{(24)}{=} \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} =: \vec{D} \quad 32$$

$$\implies \oint\limits_A \vec{D} d\vec{A} = q_{\text{frei}} \quad 33$$

Auch beim \vec{D} -Feld gibt es zahlreiche Meinungen, auf welchen Namen es getauft werden sollte. Der eingängigste Begriff wird von den Elektrotechnikern verwendet: „Elektrische Flussdichte“. Da können wir aber nicht mitmachen, weil dann der elektrische Fluss als $\vec{D} \cdot d\vec{A}$ zu definieren wäre. Wir hatten jedoch in Kap. 2.4, S. 14, im Einklang mit der physikalischen Literatur, $\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{A}$ als elektrischen Fluss bezeichnet – auf guten Gründen. Weitere Namen sind „elektrische Erregung“, „dielektrische Verschiebung“ und „Verschiebungsdichte“. Ich kann mit keinem dieser Namen viel verbinden und schlage deshalb vor, dem \vec{D} -Feld den Namen „ \vec{D} -Feld“ zu geben.

5. Überhaupt deuten die Schwierigkeiten bei der Namensfindung darauf hin, dass man sich unter \vec{D} nicht wirklich was vorstellen kann, oder gar, dass die aufgeblasenen Namen einen gewissen Mangel an physikalischer Substanz verdecken (sollen).

Tatsächlich geht das Konzept der dielektrischen Verschiebung auf Zeiten zurück, in denen man den Mechanismus der Polarisation noch nicht vollständig verstanden hatte. Freie Ladungen hielt man für signifikanter als Polarisationsladungen. Das Gaußsche Gesetz widerspricht dem allerdings entschieden.³

6. Zur Verteidigung des Konzepts des \vec{D} -Feldes kann man anführen, dass die Maxwell'schen Gleichungen damit eine einfachere Form annehmen. Außerdem ist es natürlich schon so, dass sich freie Ladungen leichter als Polarisationsladungen messen lassen. Deshalb will kaum jemand auf das \vec{D} -Feld verzichten – aber vielleicht wird der prosaische Name \vec{D} -Feld seiner Funktion als Hilfsgröße genau gerecht.

3.10 Feldenergie im Dielektrikum

1. Wir hatten bereits (vergl. (9), S. 28)

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2.$$

Wenn wir die für den Plattenkondensator gültigen Beziehungen $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ und $U = \mathcal{E} d$ einsetzen, erhalten wir

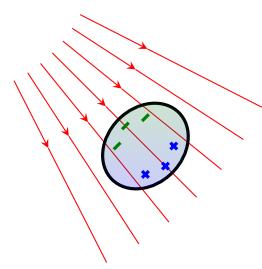
$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{d^2 A}{d} \mathcal{E}^2.$$

2. Nachdem $A \cdot d$ gerade das Volumen des Kondensators ist, bietet sich die Einführung der Energiedichte an:

$w_{\text{el}} = \frac{W_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{E} D.$

³s. Feynman S. 194

3. Ein dielektrischer Körper in einem inhomogenen Feld erfährt eine Kraft, die ihn in Bereiche mit höherer Feldstärke zieht. Letztlich ist dies die Konsequenz aus der Diskussion im Abschnitt 3.7-4, wo wir gesehen hatten, dass ein Dipol in einem inhomogenen Feld eine Kraft erfährt.



4. Bei kleinen Körpern ist die Kraft proportional zum Quadrat des \mathcal{E} -Feld-Gradienten. Warum eine quadratische Abhängigkeit von $\text{grad } \vec{\mathcal{E}}$ und damit auch quadratisch von $\vec{\mathcal{E}}$? Nun, ein stärkeres \mathcal{E} -Feld bedeutet nicht nur einen stärkeren Gradienten, sondern es polarisiert auch stärker.

5. Die Kraft auf das Dielektrikum ist besonders einfach zu berechnen beim isoliert aufgestellten Plattenkondensator. Isoliert aufgestellt $\Rightarrow Q = \text{const}$, aber $U \neq \text{const}$.

initial: Dielektrikum draußen \Rightarrow

$$W_{\text{el,i}} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

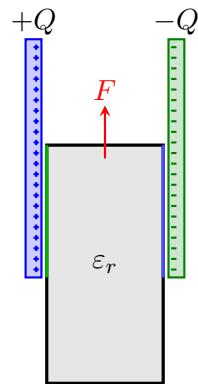
final: Dielektrikum im Kondensator \Rightarrow

$$W_{\text{el,f}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r C}$$

$$\Rightarrow \Delta W_{\text{el}} := W_{\text{el,f}} - W_{\text{el,i}} = \frac{Q^2}{2C} \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) < 0$$

Aus $W_{\text{el,f}} < W_{\text{el,i}}$ folgt, dass das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird.
 → Exp.: Flüssigkeit wird in den Kondensator gezogen.

6. Bem.: Die mikroskopische Erklärung des obigen Effektes beruht ebenfalls auf inhomogenen Feldern. Dazu muss man die Randeffekte am Plattenkondensator berücksichtigen.
7. Bem.: Räumlich verschiedene Energiedichten kann man als Druck bzw. Sog verstehen.
8. Wenn der Kondensator nicht isoliert aufgestellt ist, sondern mit der Spannungsquelle verbunden bleibt während das Dielektrikum in den Kondensator gezogen



wird, dann ist $U = \text{const}$. In diesem Fall können wir die Kraft aus $F = -\partial W_{\text{el}}/\partial x$ berechnen und erhalten

$$F \propto U^2$$

36

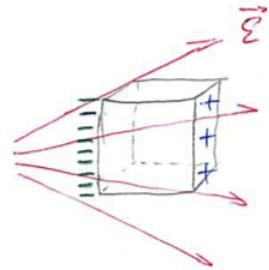
→ Exp.: Spannungswaage

3.11 Elektrostatisik in Natur und Technik

1. Gewitter: Ein Blitz transportiert im Mittel 10 C.
→ Exp.: Ladungstrennung mit Blei und Schwefel
2. Staubfilter
→ Keynote-Slide
3. Xerox-Kopie
→ Keynote-Slide
4. Farbauftag
5. Gefahren:
Reibungselektrizität beim Tanken, in Gebläsen, ...

3.12 Anhang: Woher kommt (31): $-\oint \vec{F} d\vec{A} = \iiint_V \rho_{\text{pol}} dV$?

1. Wir betrachten eine inhomogene Polarisation. Eine solche kann entweder durch eine räumlich verschiedene Suszeptibilität entstehen oder einfach durch ein inhomogenes Feld, das ja die Polarisation induziert. Wir haben, ohne den Anspruch auf Allgemeinheit aufzugeben, den zweiten Fall im Hinterkopf, s. Skizze
2. Nachdem das Feld auf der linken Seite wesentlich stärker als auf der rechten Seite des skizzierten Volumenelementes dV ist, werden durch eine gedachte Fläche dA , die mit der linken Würfelfläche identisch ist, mehr negative Ladungen gezogen, als positive Ladungen aus der gegenüber liegenden rechten Fläche herausgedrückt werden.
3. Nochmal: Links gehen in Folge der Inhomogenität mehr negative Ladungen aus dem Volumenelement dV raus, als rechts positive Ladungen raus gehen. ⇒



Im Innern des Würfels bleibt eine Raumladung – hier eine positive, um genau zu sein.

4. Die Ladung, die links raus gegangen ist, ist natürlich die Oberflächenladung $\sigma_{\text{pol}}^{\text{li}} < 0$ und die rechts entsprechend $\sigma_{\text{pol}}^{\text{re}} > 0$. (Zur Erinnerung: $|\sigma_{\text{pol}}^{\text{li}}| > |\sigma_{\text{pol}}^{\text{re}}|$).
5. Mit (17) hatten wir gesehen, dass die Oberflächenladung σ_{pol} betragsmäßig der Polarisation entspricht: $P = \sigma_{\text{pol}}$.
6. Wie wir damit umgehen, dass wir σ bisher immer als Skalar, \vec{P} aber als Vektor behandelt haben, wollen wir mal offen lassen und einfach behaupten, dass wir uns mit etwas Nachdenken (auch Oberflächen haben eine Richtung) eine konsistente Definition zutrauen.
7. Klar ist natürlich, dass nur die Feldkomponente \perp auf der Würfelwand Ladungen aus dem Würfel zieht. Also erwarten wir

$$d\sigma_{\text{pol}} = d\vec{P} \cdot \vec{n}, \quad 40$$

wobei \vec{n} der Einheitsvektor ist, der \perp auf der Fläche steht.

8. Nun integrieren wir (40) über eine geschlossene Fläche, zunächst lhs:

$$\oint\!\!\!\oint_A d\sigma_{\text{pol}} = - \iiint_V \rho_{\text{pol}} dV = q_{\text{pol}} \text{ in } V, \quad 41$$

entsprechend dem, was wir unter -3 gesagt hatten. Beachte auch das „-“-Zeichen und vergleiche auch dazu die Diskussion von -3.

9. Das Oberflächenintegral über die rhs von (40) ergibt natürlich $\oint\!\!\!\oint_A \vec{P} d\vec{A}$. Also haben wir (31) gezeigt:

$$-\oint\!\!\!\oint_A \vec{P} d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \rho_{\text{pol}} dV = \text{eingeschl. pol. Ladung}$$

10. (31) sieht dem Gaußschen Gesetz tatsächlich sehr ähnlich. Statt dem \vec{E} -Feld haben wir \vec{P} im Oberflächenintegral. Dafür teilen wir rechts nicht durch ϵ_0 .

4 Elektrischer Strom, Ohmsches Gesetz, Kirchhoffsche Regeln

1. Bisher waren Ladungen einfach da und – wichtig – festgenagelt. Wir haben uns für die entsprechenden *statischen* Felder und Potentiale interessiert – Elektrostatik eben.
2. Um, abgesehen von Staubfiltern und Xeroxkopierern, etwas Nützliches mit Ladungen anzufangen, brauchen wir bewegte Ladungen, Ströme. Die geradezu natürliche Definition ist:

$$I_{\text{av}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{oder:} \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad 1$$

→ Exp.: pendelnder Ball zwischen Plattenkondensator

3. Die Einheit dieser physikalischen Größe ehrt den französischen Physiker André-Marie Ampère, der uns in Kap. 6 noch intensiv begegnen wird.

$$[I] = \frac{\text{C}}{\text{s}} =: 1 \text{ A} = 1 \text{ Ampère.} \quad 2$$

Im internationalen Einheitensystem (SI-System) ist das Ampère eine Basiseinheit, während unsere Einführung eher das Coulomb als Basiseinheit nahelegen würde. Man kann die auf messtechnische Gründe zurückführen.

4. Ströme fließen „normalerweise“ in Metallen: Die Leitungselektronen kann man sich als ein frei bewegliches Elektronengas im Gitter positiv geladener Ionenrumpfe vorstellen. In Metallen bewegen sich also – fließen – Elektronen. Anders bei der Stromleitung in Gasen (z.B. Entladungslampen) oder Flüssigkeiten (z.B. Batterien): Dort bewegen sich auch oder sogar ausschließlich die Ionen. → Exp.: Strom durch Salzlösung, Lichtbogen
5. Als man im 19. Jhd. die Stromrichtung (bzw. die Vorzeichen der Ladungen) festzulegen hatte, war das Elektron und seine Rolle bei der Stromleitung in Metallen noch nicht entdeckt. Man hat sich mit 50% Gewinnchance dafür entschieden, dass sich die positiven Ladungsträger fließen – und verloren. Nachdem aber ein Strom negativer Ladungsträger (z.B. Elektronen) äquivalent zu einem Strom positiver Ladungsträger in Gegenrichtung (= technische Stromrichtung) ist, ergibt sich aus der unglücklichen Konvention kein Problem.

4.1 Das Ohmsche Gesetz

1. Ladungen bewegen sich – abgesehen vom Vakuum und von Supraleitern – nur, wenn das elektrische Feld nicht gleich Null ist. Es muss also beständig eine Kraft auf die Ladungen wirken, um sie in Bewegung zu halten. Offensichtlich gibt es in den Leitern so etwas wie Reibung, also etwas was die Ladungen bremst. Aber das ist im Augenblick nicht so wichtig. Wichtig ist das experimentelle Faktum, dass Strom nur bei $\vec{E} \neq 0$ fließt. Dies impliziert, dass eine Potentialdifferenz, kurz ein Potential vorhanden sein muss.
2. Eine elektrische Potentialdifferenz wird auch elektrische Spannung U genannt und – wer hätte es gedacht – von einer Spannungsquelle erzeugt. Beispiele: Influenzmaschine, Batterie, elektromagnetischer Generator (Dynamo). Jede Spannungsquelle hat (mindestens) zwei in der Regel metallische Anschlüsse, die sog. Pole, in denen sich die Elektronen frei bewegen können. Wir symbolisieren Spannungsquellen mit \textcircled{v} . Der entscheidende Punkt ist, dass die beiden Pole auf verschiedenem elektrischen Potential liegen.
3. Werden die beiden Pole der Spannungsquelle durch einen Leiter miteinander verbunden (z.B. durch einen Draht, einen Elektrolyten oder durch einen Funken), so fließt Ladung, also elektrischer Strom. Der Begriff „Stromkreis“ macht unmittelbar Sinn.
4. Charakteristisch für einen Stromkreis ist der fließende fließende Strom I und die angelegte Spannung U .
5. Das Verhältnis von Spannung U zu Strom I heißt (elektrischer) Widerstand R :

$$R := \frac{U}{I} \quad [R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} =: 1 \Omega =: 1 \text{ Ohm}$$

Die Einheit ist, wie in (5) bereits vorweggenommen, zu Ehren Georg Simon Ohms benannt. Ohm war zunächst Lehrer in Nürnberg und später Professor an der TH München.



Georg Simon Ohm
1789–1854

6. Die Definition macht Sinn, da sich herausgestellt hat (experimentelles Faktum), dass R in mehr oder weniger guter Approximation nicht von elektrischen Größen abhängt, sondern eine Material- und Geometrieeigenschaft des Stromkreises

bzw. seiner nicht-trivialen Bauteile sind. (Als trivial sind die idealisierten Drähte zu betrachten, für die wir einen verschwindenden Widerstand annehmen.) Tatsächlich charakterisiert man Widerstände mit ihrem Ohm-Wert.

→ Exp.: historische Widerstände, Bemerkungen zu Siemens

7. Widerstände sind zwar, wie gesagt, nicht von elektrischen Größen abhängig. Allerdings sind sie oft mehr oder weniger stark von nichtelektrischen Größen abhängig. Von besonderer grundsätzlicher wie auch praktischer Bedeutung ist die Abhängigkeit von der Temperatur.

→ Exp.: Supraleitung, heißes Glas, Pt100-Sensor, Halbleiter, NTC

8. Für einen Draht erwarten wir

$$R := \rho \frac{\ell}{A}. \quad 6$$

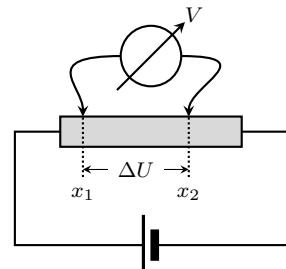
ρ wird spezifischer Widerstand genannt und ist eine Materialkonstante (die freilich von der Temperatur, Beleuchtung usw. abhängen kann). Wenn wir die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen bereits behandelt hätten, würde uns dieses Gesetz ganz natürlich vorkommen: Zwei gleiche Drähte der Länge ℓ hintereinander führen zum doppelten Widerstand und entsprechen einem Draht der Länge 2ℓ . Ebenso halbieren zwei gleiche, parallel geschaltete Drähte mit Querschnittsfläche A den Widerstand, was zum doppelten Gesamtquerschnitt $2A$ passt.

→ Exp.: verschiedene Drähte: 0.8mm Cu, 0.4mm Cu, CuSn, CrNi

9. Wir können (6) dazu nutzen, um den Begriff des **Spannungsabfalls** einzuführen: Dazu stellen wir uns ein Experiment wie skizziert vor. Wenn der Draht gleichförmig ist, wird die vom Messgerät angezeigte Spannung nur von der Differenz $(x_2 - x_1)$ abhängen können: $U = U(x_2 - x_1)$. Aus (6) folgt $R(x_2 - x_1) = \rho \cdot (x_2 - x_1) / A$.

$$U \stackrel{(5)}{=} R \cdot I = \rho \frac{x_2 - x_1}{A} I$$

Die Spannung verringert sich also („fällt ab“), je weiter man x_1 Richtung x_2 bewegt. Man soll das Wort aber auch so verstehen, dass zwischen x_1 und x_2 ein gewisser Anteil der Gesamtspannung abfällt (oder auch anfällt).



4.2 Strom und Potential

1. Vielleicht ist es Ihnen aufgefallen – wir sind schlampig geworden: In Kap. 1 bis 3 sind wir nicht müde geworden zu sagen, dass die Ladungen festgenagelt seien, dass die Ladungsverteilung statisch ist. Damit und mit der Ähnlichkeit des Couloomschen und des Newtonschen Gesetzes haben wir letztlich begründet, dass es ein Potential gibt. Jetzt reden wir plötzlich von Strömen, also bewegten Ladungen und immer noch von Potentialen. Zu klären ist, ob bei Strömen überhaupt ein Potential existiert.
2. Existenz eines Potentials \iff Linienintegral $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ ist unabhängig vom Weg.
 Bei bewegten Ladungen ist das im Allgemeinen *nicht* der Fall! Beispiel: Der Strom sei eine Punktladung, die sich auf der y -Achse bewegt. Die Probeladung wird auf der x -Achse von $\vec{r}_1 = x_1$ nach $\vec{r}_2 = x_2$ bewegt. Offensichtlich ist die Arbeit der Probeladung davon abhängig, wann die Probeladung bewegt wird. Wartet man z.B. bis die Ladung auf der y -Achse im Unendlichen verschwunden ist, dann ist die Arbeit bei der Bewegung der Probeladung = 0, während die Arbeit sicher nicht Null ist, wenn man z.B. die Ladung aus dem Unendlichen auf der y -Achse in den Ursprung schiebt kurz nachdem die Probeladung den Ursprung auf der x -Achse passiert hat.
3. Damit scheint festzustehen: Wenn Strom fließt, gibt es kein Potential. Mit einer wichtigen Ausnahme: Bei stationären Strömen ist die Ladungsverteilung zeitlich konstant und insofern von festgenagelten Ladungen nicht zu unterscheiden \implies es existiert doch ein Potential. Damit haben wir die Situation noch einmal retten können und ...
4. ... werden gleich übermütig: Stromkreise, die Kondensatoren enthalten, haben offensichtlich keine stationäre Ladungsverteilung. Wenn aber die Kapazität hinreichend groß ist oder wir nur kurz genug hinschauen, wird die Ladungsverteilung oft fast stationär sein und die Definition eines Potentials eventuell doch sinnvoll sein. Das geht in der Tat oft gut, z.B. bei Wechselstromkreisen. Wir werden aber sehen, dass die Dinge richtig interessant werden, wenn auch solche Näherungen zusammenbrechen.

4.3 Stromdichte und Kontinuitätsgleichung

- Die Stromdichte j kann man durch $j := I/A$ oder implizit durch

$$I = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \quad 10$$

definieren. Die implizite Definition ist die gescheitere: \vec{j} ist ein Vektor, I nicht. Wenn es nicht so undidaktisch (und in vielen praktischen Fällen überflüssig) wäre, hätte man gleich von \vec{j} statt von I ausgehen sollen

- Strom durch eine geschlossene Oberfläche: Ein Strom von Ladungen durch eine geschlossene Oberfläche hat eine Änderung der Ladung im eingeschlossenen Volumen zur Folge:

$$I = \iint_A \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV. \quad 11$$

- Woher das Vorzeichen? Wenn $\vec{j} \parallel \vec{A}$ fließen positive Ladungen aus A heraus
 \Rightarrow die eingeschlossene Ladung wird weniger. (11) ist die sog. Kontinuitätsgleichung. Sie sagt nicht mehr und nicht weniger als das, was wir schon wissen: Ladungserhaltung. Allerdings sagt sie das so elegant, dass der Laie keine Chance mehr hat, zu verstehen was gemeint ist.

- Differentielle Form: Aus dem Divergenzsatz $\iint \vec{j} d\vec{A} = \iiint \operatorname{div} \vec{j} dV$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) \quad 12$$

- Schließlich der Punkt, warum wir uns das Ganze zu diesem Zeitpunkt überhaupt ansehen: Es ist der Spezialfall, dass die Ladung im eingeschlossenen Volumen konstant bleibt: $d\rho/dt = 0$.

$$\Rightarrow \iint_A \vec{j} d\vec{A} = 0 \quad 13$$

Tatsächlich ist dieser Spezialfall gar nicht so speziell: Wenn wir einen Draht haben, oder auch mehrere zusammengelötete Drähte im Punkt P , können die Elektronen ja den Draht nicht verlassen, also $d\rho/dt = 0$.

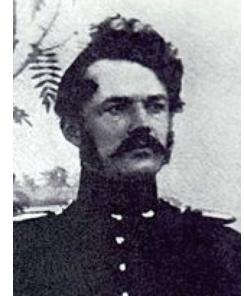
4.4 Mikroskopische Form des Ohmschen Gesetzes

1. Wir können die soeben neu eingeführte physikalische Größe Stromdichte zunächst dazu benutzen, das Ohmsche Gesetz Punkt für Punkt, sozusagen mikroskopisch, in einem mehr oder weniger gut leitfähigen Medium zu formulieren.
2. Die Herleitung geht wie folgt:

$$j = \frac{I}{A} = \frac{U}{RA} = \frac{\mathcal{E}\ell}{RA} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E} =: \sigma \mathcal{E}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $I=U/R \quad U=\mathcal{E}\cdot\ell \quad R=\rho \frac{\ell}{A}$

3. Wir haben damit σ als den Kehrwert des spezifischen Widerstandes eingeführt. Konsequenterweise bezeichnet man σ als spezifische Leitfähigkeit. Die Einheit der Leitfähigkeit selbst ist übrigens das „Siemens“, $1 \text{ Si} = 1/\Omega$, benannt nach Werner v. Siemens der u.a. die ersten Widerstandsnormale gebaut hat



Werner v. Siemens
1816–1892

4. Richtig mikroskopisch wird die Sache allerdings erst, wenn wir die obige Beziehung vektoriell schreiben:

$$\vec{j} = \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad \text{oder:} \quad \vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{j}$$

14

5. In anisotropen Medien sind \vec{j} und $\vec{\mathcal{E}}$ nicht notwendigerweise parallel. Das kann man dadurch handhaben, dass σ bzw. ρ keine skalaren Größen mehr sind, sondern Tensoren – verkürzt gesprochen Matrizen. Bei Matrizen ist der Kehrwert auch nicht mehr ganz so trivial wie bei einer reellen Zahl, was der Definition des Leitwerts als eigener physikalischer Größe etwas mehr Gewicht gibt.
6. Als kleine Fingerübung lässt sich obige Herleitung auch umdrehen:

$$\vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{j} \Big| \cdot \ell \implies \mathcal{E} \ell = \rho j \ell \implies U = \rho \frac{j A \ell}{A} = I \rho \frac{\ell}{A} \quad \text{q.e.d.}$$

4.5 Die Kirchhoffschen Regeln

1. Wir werden noch diskutieren, dass die Kirchhoffschen Regeln große praktische Bedeutung haben, aber geradezu triviale Folgen dessen sind, was wir bisher diskutiert haben. Mit dieser Bemerkung wollen wir dem Herrn Kirchhoff, der im Übrigen weit mehr als diese Regeln hinterlassen hat, nicht zu nahe treten. Fairerweise muss nämlich bemerkt werden, daß zu seiner Zeit die Elektrizitätslehre noch in den Kinderschuhen steckte, selbst die Energieerhaltung war noch eine ganz frische Errungenschaft und der Potentialbegriff dürfte sich wohl auch noch nicht so richtig durchgesetzt haben, zumindest nicht in diesem Feld.

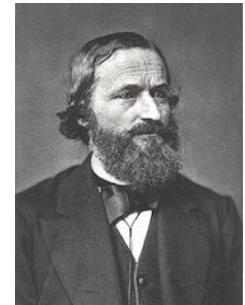
2. Wir betrachten n in einem Punkt („Knoten“) P zusammenlaufende Drähte mit Strömen I_k . Um den Punkt P legen wir eine Oberfläche A und wenden den Spezialfall der Kontinuitätsgleichung (13) an:

$$0 = \frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{V(A)} \rho dV = \iiint_{V(A)} \operatorname{div} \vec{j} dV = \iint_A \vec{j} dA = \sum_k I_k$$

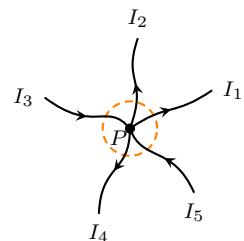
3. Der entscheidende Schritt ist natürlich, vom Oberflächenintegral auf die Summe der Ströme zu kommen. Auch hier sehen wir wieder ein Beispiel, wie ein kompliziert aussehendes Integral ganz trivial berechnet werden kann: Die Ströme können hier nur durch die Drähte fließen, d.h. nur den Drähten entlang können Ladungen in das eingeschlossene Volumen A kommen. Also braucht man die Stromdichten in den Drähten nur über die Schnittflächen der Drähte mit A integrieren. Und dabei kommen natürlich wegen $j_k = I_k/A_k$ je die in den Drähten fließenden Ströme heraus. Die Stromrichtung, ob in den Punkt P hinein oder aus ihm heraus, berücksichtigen wir durch entsprechende Vorzeichen der Ströme I_k .

4. Die Essenz der obigen Gleichung nochmal:

$$\boxed{\sum I_k = 0}$$



Gustav R. Kirchhoff
1824–1887



Das ist die **Kirchhoffsche Knotenregel**.

5. Die Herleitung der zweiten Kirchhoffschen Regel machen wir uns anhand nebenstehender Skizze klar. Nachdem wir davon ausgehen, dass ein elektrisches Potential existiert, muss $\oint \vec{E} d\vec{r} = 0$ gelten.

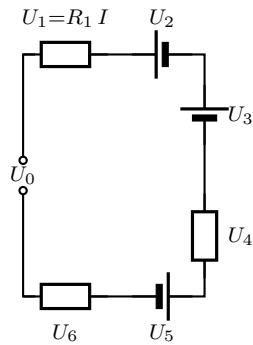
6. Auch hier ist es wieder ein Vergnügen, das kompliziert aussehende Wegintegral zu berechnen: Zuerst legen wir den Stromkreis entlang. Dann bemerken wir, dass die Drähte Leiter sind und das \vec{E} -Feld in ihnen deshalb = 0 ist. Das Wegintegral wird also zu einer Summe der Spannungen an den Bauelementen.

7. Den obigen Satz brauchen wir nur noch als Formel hinzuschreiben,

$$\sum U_k = 0$$

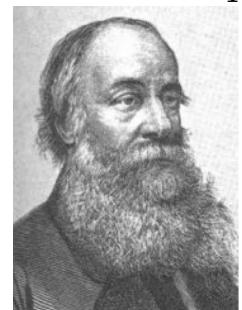
und schon haben wir die **Kirchhoffsche Maschenregel**.

8. So trivial die Kirchhoffschen Regeln uns nun auch anmuten mögen, muss doch betont werden, dass sie eine außerordentliche praktische Bedeutung haben. Stellen Sie sich ein richtig kompliziertes Netzwerk von elektronischen Bauelementen vor. Unter Umständen ist es ja wichtig, die Ströme und Spannungen an allen Punkten des Netzwerkes zu kennen. Haben wir eine Chance, das auszurechnen. Ja, haben wir! Durch die beiden Kirchhoffschen Regeln bekommt man gerade so viele Gleichungen wie man Unbekannte hat.



4.6 Das Joulesche Gesetz

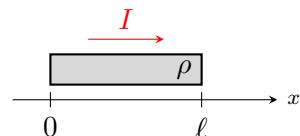
1. Herr Joule ist uns als Entdecker der Energieerhaltung wohlbekannt, obgleich jenes der Arzt Robert v. Mayer zuerst formulierte aber fast von eifersüchtigen Physikern um die Entdeckerehre gebracht worden wäre. Wirklich der Erste war Joule jedoch bei der Ausdehnung des Energieerhaltungssatzes auf die Elektrizität indem er das Wärmeäquivalent des Stromes durch einen Widerstand bestimmte.



James Prescott Joule
1818–1889

2. Die Herleitung der entsprechenden Beziehungen sollte keine Schwierigkeiten machen: Wir wissen ja, dass das elektrische Feld nichts anderes als die Kraft / Probeladung ist und entsprechend das elektrische Potential das mechanische Potential / Probeladung ist. Es ist also klar, wie die elektrische Energie auf die schon bekannten Energieformen Arbeit und Wärme zurückzuführen sind. Wir sollten nur keinen Fehler dabei machen und betrachten deshalb den Spannungsabfall nochmals.

3. Betrachte dazu den skizzierten Leiter:



$$\text{Ohm: } \vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{j} = \rho j \hat{x}$$

$$\text{mit } j = \frac{I}{A} \implies \vec{\mathcal{E}} = \rho \frac{I}{A} \hat{x}$$

Das Vorzeichen ist wichtig wie sich gleich zeigen wird. Es kommt daher, dass wir in der Mechanik das Potential so definiert haben, dass $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ konstant ist. Am schnellsten sehen wir das Vorzeichen ein, wenn wir uns an $\vec{F} = -\nabla E_{\text{pot}}$ erinnern.

4. elektisches Potential:

$$U(\ell) - U(0) = \int_0^\ell \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = - \int_0^\ell \rho \frac{I}{A} dx = - \rho \frac{I}{A} \ell \underset{=R}{\underbrace{\ell}} = -IR$$

$$\implies U(\ell) - U(0) = -IR$$

20

5. In Worten: Wenn Strom (d.h. positive Ladungen) von links nach rechts fließt (d.h. in positive Richtung) haben wir links das höhere Potential.

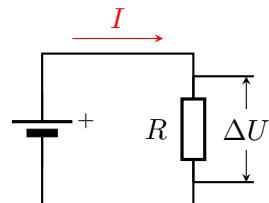
\implies In einem Widerstand fällt das elektrische Potential (also die Spannung) in Richtung des Stromflusses. \rightarrow **Exp.:** Demonstration mit einem Widerstandsdräht.

6. Wenn wir eine elektrische Schaltung zeichnen, gehen wir davon aus, dass die idealisierten Drähte 0Ω Widerstand haben und sich der Widerstand des Stromkreises auf die „Widerstände“ —  — beschränkt.

7. Betrachte die Arbeit bzw. die Energie in nebenstehender Schaltung:

$$\begin{aligned} I &= \frac{dq}{dt} \\ dE &\stackrel{\text{Def.}}{=} U \cdot dq = U \cdot I \cdot dt \quad | : dt \quad \Rightarrow \\ P &= \frac{dE}{dt} = U \cdot I \end{aligned}$$

21



8. Offensichtlich ist die Einheit der elektrischen Leistung 1 V A . Andererseits wissen wir aus der Mechanik, dass die Leistung die Einheit Joule pro Sekunde = Watt hat. Wir folgern also, dass $1\text{ W} = 1\text{ V A}$. Diese Beziehung sollte man sich gut merken: Wenn in einer Gleichung mit elektrischen Größen am Ende eine mechanische Größe herauskommen soll, braucht man sie in aller Regel beim Umrechnen der Einheiten.

9. Im eben behandelten Problem ist die Energie positiv, d.h. es wird Arbeit verrichtet. Nach dem Energie-Arbeit-Theorem ist diese Arbeit gleich der Veränderung der kinetischen Energie. Es bewegt sich hier aber nichts! Wo geht die Energie also hin? Natürlich in Wärme. Näheres dazu in Kap. 4.8.

→ Exp.: Widerstand wird warm, Schmelzsicherung

10. Aus (21) erhält man mit dem Ohmschen Gesetz sofort auch zwei weitere Beziehungen:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad \text{und} \quad P = I^2 R$$

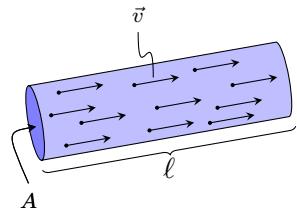
22

4.7 Driftgeschwindigkeit

1. Betrachte einen Leiter mit Querschnitt A und Länge ℓ . Er enthalte N Ladungen q . Damit können wir schreiben:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \text{Ladungsträgerdichte} \\ (\text{Zahl pro m}^3) \end{array}$$

$$Q = N q = n \cdot V \cdot q = n A \ell q$$



$$\Rightarrow I = \frac{n A \ell q}{\ell v} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{n A q} \quad 25$$

2. Da wir einen gleichförmigen Draht angenommen hatten, ist n und A überall gleich; q und I sowieso. $\Rightarrow v = \text{const.}$ Es ist ein durchaus bemerkenswertes Resultat, dass die Elektronenbewegung im Draht nicht beschleunigt, sondern vielmehr die Elektronengeschwindigkeit konstant ist. Es liegt nahe, diese Geschwindigkeit als Driftgeschwindigkeit v_{Drift} zu bezeichnen.

$$v_{\text{Drift}} = \frac{I}{n A q} = \frac{U}{n A q R} = \frac{U}{n q \ell \rho} \quad 26$$

3. Setze typische Größen ein:

$$v_{\text{Drift}} = \frac{1 \text{ V}}{10^{23} \text{ cm}^{-3} \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ m} \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}} = 6 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad 27$$

Das ist ebenfalls bemerkenswert: Die Elektronen schleichen durch den Draht! Der Vergleich mit einem freien Elektron ist noch frappierender: Wir nehmen dieselbe Spannung von $U = 1 \text{ V}$ und legen sie an einen Plattenkondensator, dessen Plattenabstand der Drahtlänge entspricht, also 1 m. Dann haben wir:

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U$$

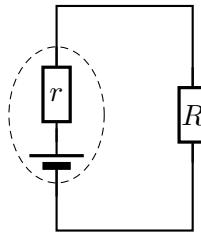
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V}}{0.911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}}} \approx 600 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 28$$

4.8 Eine Feinheit

1. Wir hatten stets betont, dass auch im elektrischen Stromkreis ein Potential existiert, d.h. wenn wir eine Probeladung einmal um den Stromkreis herumführen, ist die Gesamtarbeit = 0.
2. Das scheint sich mit der Tatsache zu beissen, dass die Stromquelle Energie „erzeugt“, genauer ausgedrückt durch z.B. chemische Prozesse Arbeit verrichtet, indem sie die positiven Ladungsträger von niedrigen auf hohes Potential bringt.
3. Weiter könnte man einwenden, dass die Elektronen ja diese kleine konstante Driftgeschwindigkeit haben. Dieser Effekt ist durch die dauernden Stöße mit dem Kristallgitter des Widerstandes verursacht. Es ist also klar, dass das Kristallgitter eine Kraft auf die Elektronen ausübt. Warum dann nicht auch umgekehrt? Warum bewegt sich der Widerstand nicht? Warum bleibt der Draht in der Wand?
4. Die Lösung ist folgende:
 - Nach dem Energie-Arbeit-Theorem ist die Arbeit *aller* Kräfte, die auf ein Teilchen wirken, gleich der Änderung seiner kinetischen Energie. Die ist aber = 0 weil $v_{\text{Drift}} = \text{const}$. Also ist die Gesamtarbeit = 0.
 - Nun teilen wir die Gesamtarbeit beim Durchlauf durch den Stromkreis (die = 0 ist) auf in die beiden Anteile an der Gesamtarbeit, die durch die elektrischen bzw. die nicht-elektrischen Kräfte verrichtet wurden.
 - Wir wissen – Existenz des elektrischen Potentials –, dass die Arbeit der elektrischen Kräfte entlang des Stromkreises (= geschlossener Weg) = 0 ist.
 - Nachdem die Gesamtarbeit und die Arbeit des elektrischen Kräfte = 0 ist, muss der Rest, also die Arbeit der nicht-elektrischen Kräfte ebenfalls = 0 sein.
 - Die nicht-elektrischen Kräfte haben wir schon identifiziert: Die chemische Kraft in der Batterie und die Kraft auf die Elektronen im Widerstand. In den idealisierten Drähten wirkt dagegen keine Kraft auf die Elektronen.
 - Nachdem auch die Arbeit der nicht-elektrischen Kräfte = 0 ist, ist damit klar, dass die Arbeit, die von der Batterie an den Elektronen verrichtet wurde, schließlich ins Kristallgitter des Widerstandes geht, dass also der Widerstand wie erwartet warm wird.

4.9 Reale Stromquellen

1. Definition: Die elektromotive Kraft EMK := die stromlos gemessene Klemmenspannung z.B. einer Batterie. (Versuchen Sie nicht, viel Sinn aus dem Begriff EMK zu machen: Unter Kraft hat man früher zuweilen was ganz anderes verstanden als heute.)
2. Eine reale Stromquelle kann man in guter Näherung als die bislang immer stillschweigend angenommene ideale Stromquelle in Reihe mit einem bauart-bedingten oder zustands-bedingten (z.B. Ladestand) Innenwiderstand r behandeln (= Ersatzschaltbild). Damit:



$$\text{EMK} = U_r + U_R = I \cdot r + I \cdot R \implies I = \frac{\text{EMK}}{r + R}$$

3. Wenn wir I im Stromkreis kennen, können wir mit $U_R = I \cdot R$ die Spannung die an R anliegt berechnen:

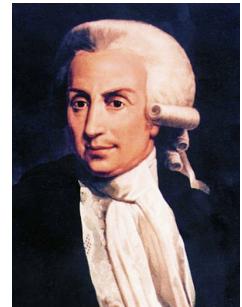
$$U_R = \text{EMK} \cdot \frac{R}{r + R} \quad 30$$

Falls Sie es nicht bemerkt haben: U_R hat eine große praktische Relevanz – es ist die Klemmenspannung der *realen* Stromquelle, also die Spannung, die wir für den Verbraucher zur Verfügung haben.

4. Diskussion: Auf der Batterie ist die EMK aufgedruckt. Allerdings kriegen wir wieder mal nicht, für was wir bezahlt haben: Die Spannung an einem Verbraucher R ist immer um den Faktor $R/(r+R)$ kleiner als die EMK. Nur für $R \rightarrow \infty$ (und damit $P \rightarrow 0$) ist $U_R = \text{EMK}$.
5. Wenn eine Stromquelle stark belastet wird (R sehr klein), ist die Spannung an R deutlich reduziert. Man sagt, die Spannung „bricht ein“. Analoges gilt, wenn sich der Innenwiderstand z.B. bei einer entladenen Batterie erhöht. → **Exp.**
6. Man kann zeigen, dass man einer Stromquelle dann die maximale Leistung entnimmt, wenn $R = r$. Dies ist wohl der einfachste Fall von **Impedanzanpassung**. (Impedanz ist sowas wie ein verallgemeinerter Widerstand.)

4.10 Galvanische Elemente und Batterien

1. text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text



Luigi Galvani
1737–1798

2. text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text
text text text text text text text text text text text text

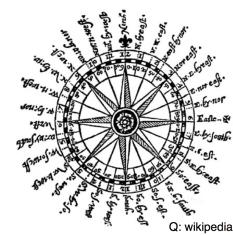


Alessandro Volta
1745–1827

5 Das Magnetfeld

5.1 Magnete

1. Magnete kommen natürlicherweise in Form magnetischer Mineralien vor. Besondere Erwähnung verdient dabei das Eisen(II,III)-oxid oder Magnetit (Fe_3O_4), das aufgrund seines hohen Eisenanteils einen starken Magnetismus zeigt. Der Name wurde erst 1845 von Wilhelm Haidinger geprägt, der Wortstamm kommt aber vermutlich von griechischen oder kleinasiatischen Städten ähnlichen Namens, in denen Eisenerzbrocken mit magnetischen Eigenschaften gefunden wurden.
2. Man lernt heute bereits in der Grundschule, dass Magnete einen Nord- und einen Südpol haben und dass sich Magnete an ihren gleichnamigen Polen abstoßen, während sie sich sonst anziehen. Beschrieben wurde diese Polarität jedoch erst durch Petrus Peregrinus de Maricourt im Jahre 1269.
3. Dass die Erde selbst ein Magnet ist – wobei dessen Natur immer noch nicht richtig verstanden ist – und deshalb mineralische Magnete beeinflusst, war bereits den Chinesen bekannt. Tatsächlich nutzten sie bereits im 11. Jhd. v. Chr. Kompassen indem sie Magnetnadeln schwimmend lagerten (nasser Kompass). Der trocken auf einem Stift gelagerte Kompass scheint eine europäische Erfindung des 13. Jhd. zu sein. Spätestens der italienische Seefahrer Amalfi hat eine solche Magnetnadel fest in ein Glasgehäuse eingebaut und mit einer Windrose versehen. Die Genauigkeit des Kompasses wurde damit viel besser. Von Leonardo da Vinci stammt die Idee, den Kompass in Schiffen kardanisch aufzuhängen. Neben der Schifffahrt erlangte der Kompass auch im Bergbau schnell große Bedeutung.
4. Die stärksten Permanentmagnet werden heute aus einer Legierung aus Neodym, Eisen und Bor hergestellt. Damit sind Feldstärken bis über ein Tesla möglich. Allerdings sind auch die herkömmlichen Eisenoxide noch wie vor von großer Bedeutung, nämlich zur Speicherung von Daten, insbesondere bei Festplatten. Eisenoxid speichern auch ganz andere Informationen: In Meeressedimenten findet man variierende Magnetisierungen die klar zeigen, dass sich das Magnetfeld der Erde im Laufe der Erdgeschichte vielfach umgepolt hat.



Kompassrose von 1607

5.2 Experimentelle Fakten und das No-name-Gesetz

1. Wenn ein Magnet geteilt wird, dann haben auch die zwei Hälften wieder jeweils einen Nord- und einen Südpol. Es gelingt also nicht, einen isolierten Nord- oder Südpol herzustellen. Man sagt dazu auch, es gibt keine magnetischen Monopole.
2. Das ist natürlich ein gravierender Unterschied zu elektrischen Ladungen, die wir auf die verschiedensten Weisen voneinander trennen konnten. Eine elektrische Ladung ist demzufolge ein elektrischer Monopol. Wir hatten auch elektrische Dipole kennengelernt und vermuten nun zurecht, dass Magnete Dipole sind.
3. Ein zusätzlicher Hinweis in diese Richtung ist die geringe Reichweite magnetischer Kräfte – auch dies ist eine Alltagserfahrung. Tatsächlich nehmen sie mit dem Abstand in gleicher Potenz ab, wie wir es von elektrischen Dipolen kennen.
4. Nun erinnern wir uns daran, dass die elektrischen Ladungen die Quellen der elektrischen Feldlinien sind. Die elektrischen Feldlinien beginnen stets an den positiven Ladungen und enden an den negativen. Wenn die elektrischen Ladungen ebenfalls nicht isoliert, sondern nur in Form von Dipolen vorkämen, dann würden von jedem Dipol genauso viele Feldlinien ausgehen wie an ihm enden. Die Feldlinien wären also stets geschlossene Kurven.
Genau das ist die Situation bei Magnetfeldern. Da es keine magnetischen Ladungen (= Monopole) gibt (jedenfalls wurden noch nie welche gesehen), sind die Magnetfeldlinien immer geschlossene Kurven.
5. Das hat sofort eine wichtige Konsequenz: Wir könnten eine Gaußsche Fläche um den Magneten stülpen. Das experimentelle Faktum, dass die Magnetfeldlinien stets geschlossene Kurven sind, bedeutet, dass in die Gaußsche Fläche genau soviele Magnetfeldlinien eintreten wie austreten. In anderen Worten: Der Fluss des Magnetfeldes durch eine beliebige geschlossene Fläche ist Null.
6. Mathematisch gesprochen heißt das,

$$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0.$$

1

Auch wenn das Integral für die nicht Eingeweihten sehr eindruckvoll aussieht, sagt es – wie oben ausgeführt – wirklich nicht mehr, als dass man keine isolierten

Nord- oder Südpole herstellen kann. Es ist also Ausdruck einer ganz alltäglichen und alten Beobachtung. Entsprechend hat auf die Entdeckung dieses Naturgesetzes auch niemand Anspruch erheben können – und so ist es, traurige Geschichte, namenlos geblieben ...

7. Das kann man so akzeptieren, muss aber nicht. Tatsächlich haben sich die Theoretiker lange Zeit am Mangel an Symmetrie zwischen Gaußschen und No-name-Gesetz gestört. Solche ästhetischen Erwägungen sollte man durchaus ernst, aber vielleicht auch nicht zu ernst nehmen. Es war erst eine Einsicht von Dirac, die die Physiker dazu brachte, nach magnetischen Monopolen intensiv zu suchen. Dirac wies nämlich darauf hin, dass die Existenz eines magnetischen Monopols sofort erklären würde, warum die Ladung gequantelt ist, warum es also eine Elementarladung gibt.

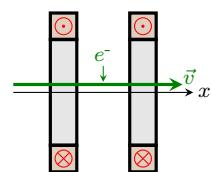
Das Argument beruht auf der Quantenmechanik: Ähnlich wie das Proton ein Elektron auf eine geschlossene Bahn zwingt, würde dies auch ein magnetischer Monopol tun. In beiden Fällen wird also der Drehimpuls verändert. Die Quantenmechanik fordert, dass eine Drehimpulsänderung immer nur in Vielfachen von \hbar erfolgt. Andererseits ist die Ablenkung proportional zur Ladung. Folglich muss auch die Ladung quantisiert sein.

8. So schön dieses Argument auch ist – gefunden hat man bisher nichts. Und so konnten die Festkörperphysiker vor ein paar Jahren ein paar schöne Schlagzeilen für sich verbuchen. Sie haben in sog. Spin-Eis-Festkörpern monopol-ähnliche Quasiteilchen gefunden. Letztendlich sind es aber auch nur die entgegengesetzt polarisierten Enden langer Ketten von Elektronenspins, die sich in mancherlei Hinsicht wie echte Monopole verhalten. Nachdem die beiden Enden aber immer paarweise auftreten, ist auch hier das Magnetfeld quellenfrei.

6 Magnetfeld, Ladungen und Ströme

6.1 Einige experimentelle Beobachtungen

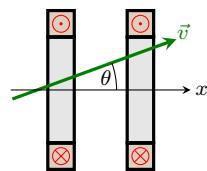
1. Wir wollen die Kraftwirkung von Magnetfeldern auf Ladungen untersuchen. Magnetfelder kennen wir natürlich von Magneten und es ist auch keine große Kunst, die Ablenkung von Elektronen durch einen Magneten zu demonstrieren, zumindest wenn man noch einen alten Fernsehapparat mit Elektronenstrahlröhre hat.
2. Mehr als eine extrem qualitative Demonstration wird das aber nicht. Für eine halbwegs quantitative Demonstration brauchen wir ein homogenes Feld, am besten so hergestellt, dass man gut in den Raum hineinschauen kann, wo das Feld homogen ist. Wie wir im weiteren Verlauf der Vorlesung noch sehen werden, eignet sich dazu ein Helmholtzspulenpaar. Das sind zwei gleiche kurze Spulen, die im Abstand ihres Radius' montiert sind. Wenn durch beide Spulen der gleiche Strom in gleicher Richtung fließt, ergibt sich im Raum zwischen den Spulen ein so gut wie homogenes Magnetfeld.
3. Mit einer Kompassnadel, einem Gilbertschen Vensorium, können wir die Richtung des Magnetfeldes feststellen. Im Prinzip könnten wir damit sogar die Homogenität des Magnetfeldes überprüfen. In dieses Magnetfeld bringen wir nun einen Elektronenstrahl, also Elektronen, die mit einer gewissen Geschwindigkeit \vec{v} durch den Raum fliegen. Dazu braucht man natürlich eine Elektronenröhre. Wenn diese mit etwas Gas gefüllt ist, können die schnellen Elektronen die Gasatome oder -moleküle anregen, so dass die Elektronenstrahl-Trajektorie durch der Fluoreszenz des Gases sichtbar wird. Das Vorzeichen der Ladung könnte man im Prinzip dadurch feststellen, dass man einen an einem Fell geriebenen Glasstab – der sich, wie wir wissen, positiv auflädt – in die Nähe der Elektronenstrahlröhre bringt. (Es gibt aber bessere Methoden.)
4. In unserem ersten Experiment sei der Elektronenstrahl parallel zur x -Achse, also $\vec{v} \parallel \hat{x}$, wie rechts skizziert. Wir beobachten, dass die Elektronen geradeaus weiter fliegen. Sie werden – was wir hier nicht ohne Weiteres sehen – auch nicht schneller.
 \Rightarrow es wirkt keine Kraft auf die Elektronen.



5. Nun drehen wir die Elektronenröhre so, dass $\vec{v} \nparallel \hat{x}$.

Die Elektronen beschreiben dann eine Spiralbahn oder sogar (wenn $\vec{v} \perp \hat{x}$) eine Kreisbahn. Ihr Geschwindigkeitsbetrag ändert sich jedoch nicht.

\Rightarrow es existiert eine Kraft auf die Elektronen und offensichtlich steht sie senkrecht auf \vec{v} .



6. Die Existenz der Kraft schreiben wir dem Magnetfeld \vec{B} zu. Ein Feld wird ja immer eingeführt, wenn es eine Kraftwirkung auf ein Objekt gibt, ohne dass zu sehen wäre, dass da irgendwas am Objekt direkt angreift, dass da also jemand auf die Elektronen drückt oder mit einem Seil daran zieht. Hier hatten wir ein Magnetfeld von Anfang an postuliert und seine Eigenschaften mit, wie kann anders sein, der *Kraftwirkung* auf die Magnetenadelpunkte erkundet.

7. Durch weitere trickreiche Experimente könnten wir weitere Eigenschaften dieser durch das Magnetfeld hervorgerufenen Kraft auf die Elektronen feststellen. Wir würden dabei die folgenden Beobachtungen machen:

- Die Kraft ist proportional zur Ladung q der Teilchen und
- die Kraft ist proportional zu $v_{\perp} := |\vec{v}| \sin \theta$.

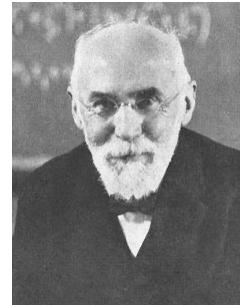
6.2 Lorentzkraft

- Die obigen Beobachtungen können mit folgender Formel beschrieben werden:

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}} \quad \text{oder} \quad |\vec{F}| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta \quad 1$$

Damit wird \vec{B} , das wir mehr oder weniger ad hoc eingeführt haben, auf eine bekannte Größe (Kraft) zurückgeführt.

- \vec{F} wird als Lorentzkraft bezeichnet. Nachdem Magnete schon in der Antike bekannt und sogar für die Navigation benutzt wurden, mögen uns die Lebensdaten von Herrn Lorentz wundern. In der Tat, die Lorentzkraft ist eine relativ junge "Erfindung". Andererseits sollte man berücksichtigen, dass die Vektorrechnung, insbes. auch das Kreuzprodukt auch nicht viel älter ist. Der Stettiner Gymnasiallehrer Hermann Graßmann erfand sie erst 1844, aber es dauerte fast bis 1870, bis die Mathematiker begriffen, dass es Sinn macht, zwischen den Strecken AB und BA zu unterscheiden.



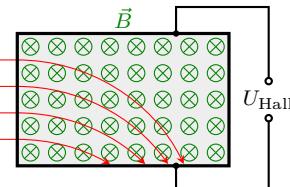
Hendrik Lorentz
1853–1928

- Einheiten: Aus (1) ergibt sich:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ C} \frac{1\text{m}}{1\text{s}} \cdot [B] \implies [B] = \frac{\text{N}}{\text{C m}} =: 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ T} = 10^4 \text{ Gauß} \quad 2$$

Das Erdmagnetfeld hat eine Feldstärke von 0.3 bis 0.6 Gauß entsprechend 30 bis 60 μT .

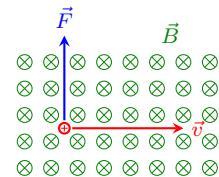
- Die Lorentzkraft ist die Grundlage des Hall-Effekts, und dieser wiederum Grundlage von Hall-Sonden, mit denen sich Magnetfelder nachweisen und auch messen lassen. Die Funktionsweise ist in der Figur skizziert:



Durch einen Leiter (angedeutet durch das Rechteck), der sich in einem Magnetfeld befindet, wird ein Strom geschickt. Die Lorentzkraft bewirkt eine Ablenkung der Ladungsträger senkrecht zur ursprünglichen Stromrichtung. Dadurch entsteht senkrecht zum Stromfluss ein elektrisches Feld, das an den Wänden des Leiters als Hallspannung abgegriffen werden kann. Hall-Sonden haben vielfältige Anwendungen in alltäglichen Produkten. Zur Messung schwacher Magnetfelder eignen sich jedoch andere Geräte besser (z.B. die Förster-Sonde).

6.3 Bewegung im Magnetfeld

- Eine positive Ladung bewege sich von links nach rechts in einem konstanten \vec{B} -Feld, dessen Richtung senkrecht auf der Zeichenebene steht. Aus (1) entnimmt man, dass \vec{F} stets senkrecht auf \vec{v} steht. Dies wiederum bedeutet, dass $|\vec{v}|$ konstant ist und dies wiederum, dass $|\vec{F}|$ konstant ist. Folglich beschreibt die Ladung eine Kreisbahn.



- Den Radius r der Kreisbahn können wir bestimmen, indem wir verlangen, dass die Lorentzkraft die Zentripedalkraft sein muss:

$$q v B = m r \omega^2 = m r \frac{v^2}{r^2} \quad 5$$

$$\Rightarrow r = \frac{m v}{q B} \quad 6$$

- Bem.: r ist zwar von v abhängig, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ jedoch nicht.

$$\omega = \frac{q B}{m} \quad \text{Zyklotron-Frequenz} \quad 7$$

- Wenn ω unabhängig von r ist, dann ist natürlich auch die Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$ des Elektrons auf der Kreisbahn unabhängig von r . Diese Einsicht, die zuerst Ernest Lawrence umsetzte, ist die Grundlage für die Funktion des Zyklotrons, eines kompakten (und damit halbwegs preiswerten) Teilchenbeschleunigers. Lawrence hat damit die Hochenergiephysik begründet.



Ernest O. Lawrence
1901–1958

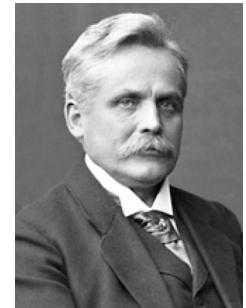
6.4 Gekreuzte $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Felder

- Aufgrund des Superposition-Prinzips, oder, anders ausgedrückt, der Vektoraddition der Kräfte, ist die Kraft, die überlagerte elektrische und magnetische Felder auf ein geladenes Teilchen haben, gegeben durch

$$\vec{F} = q (\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

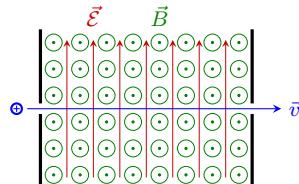
10

- Zwei gekreuzte Felder lassen sich natürlich in einer Reihe von Geometrien anordnen. Wir greifen nur eine der vielen Möglichkeiten heraus, nämlich das Wien-Filter. Es wird dazu verwendet, nur solche geladene Teilchen passieren zu lassen, die eine vorgegebene Geschwindigkeit \vec{v} haben. Erfunden wurde es von Wilhelm Wien, der auch die Wienschen Verschiebungs- und Strahlungsgesetze entdeckt hat und damit seinen Jenaer Vetter Max Wien, Pionier der Hochfrequenztechnik, doch etwas in den Schatten stellt.



Wilhelm Wien
1864–1928

- Wie in nebenstehender Figur skizziert, besteht das Wien-Filter aus zwei Blenden, durch die der Teilchenstrahl dann hindurch geht sofern die Teilchen die richtige Geschwindigkeit haben. Im Raum zwischen den Blenden herrscht ein homogenes elektrisches und magnetisches Feld, die paarweise aufeinander und auf dem Teilchenstrahl senkrecht stehen. Positive Teilchen mit zu langsamer Geschwindigkeit werden vom elektrischen Feld nach abgetrieben, sind sie zu schnell, treibt sie das magnetische Feld nach unten ab.



- Gerade werden die Teilchen nur dann durch das Filter fliegen, wenn sich die Coulomb- und die Lorentzkraft gerade zu Null addieren:

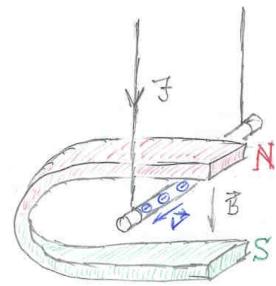
$$q\mathcal{E} - qvB \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \mathcal{E} = vB \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\mathcal{E}}{B}$$

11

Bemerkenswerter Weise hängt das Ergebnis weder von der Masse der Teilchen noch von ihrer Ladung ab! Obwohl natürlich bereits klar, sieht man an (11), dass das Verhältnis von \mathcal{E} und B eine Geschwindigkeit ist. Darauf werden wir noch zurück kommen.

6.5 Kraft auf Ströme

- Ein stromdurchflossener Draht befindet sich in einem Magnetfeld. Das entsprechende Experiment ist als Stromschaukel bekannt: Der Draht erfährt eine Kraft, so dass die Stromschaukel aus der Ruhelage ausgelenkt wird. Die prinzipielle Erklärung des Effektes ist offensichtlich:



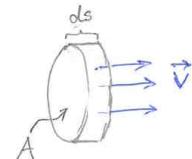
Im Draht bewegen sich die negativ geladenen Elektronen mit endlicher Geschwindigkeit, während das Metallgitter der positiven Ionenrumpfe Null Geschwindigkeit hat. Folglich gibt es auch eine endliche Lorentzkraft.

$$\vec{F} = -|e|\vec{v} \times \vec{B}$$

\nwarrow Driftgeschw.

15

- Berechne nun die Kraft $d\vec{F}$ auf alle Elektronen im Drahtstück ds : Sei n die Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit und dN die Anzahl der Elektronen im Drahtstück ds . Es gilt offenbar $dN = n dV = n A ds$



$$\Rightarrow d\vec{F} = -(n A ds) |e| \vec{v} \times \vec{B} \quad 16$$

- Die Driftgeschwindigkeit der Elektronen hatten wir bereits in Kap. 4.7 (S. 49) behandelt. Hier nochmals in Kürze:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{|e| n A ds}{dt} = |e| n A v \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \frac{I}{n A |e|} \quad 17$$

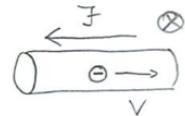
- Offensichtlich haben \vec{v} und \vec{j} ($|\vec{j}| = I/A$) entgegengesetzte Richtung; es sind ja die Elektronen, die sich bewegen. Nachdem $d\vec{s}$ vereinbarungsgemäß in Richtung der technischen Stromrichtung zeigt, gilt

$$ds \cdot \vec{v} = -d\vec{s} \cdot |\vec{v}| \quad 18$$

- Mit (18) erledigt sich das negative Vorzeichen in (16). Wenn man außerdem (17) verwendet, also $n A |e| |\vec{v}|$ durch I ersetzt, so erhält man

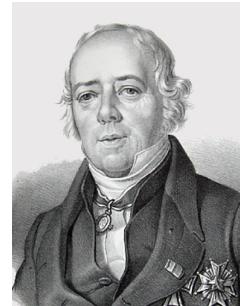
$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}. \quad 19$$

- Zum Abschluss testen wir mit der Rechte-Hand-Regel, ob die beiden Formeln (1): $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ und (19): $\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$, wobei \vec{l} in Richtung des technischen Stromes geht, dieselbe Richtung für die Kraft liefern.



6.6 Das Ørsted-Experiment und das Ampèresche Gesetz

1. Wissenschaftler und Philosophen hatten lange über gemeinsame Wurzeln elektrischer und magnetischer Kräfte spekuliert. Tatsächlich waren wir dem Gedanken bereits bei Thales v. Milet begegnet. Nach der Entdeckung positiver und negativer Ladungen wurde der Gedanke im Hinblick auf die beiden Pole von Magneten noch populärer. Erst die Erfindung von Stromquellen (insbes. die Voltasche Säule) machten jedoch die Entdeckung des tatsächlichen Zusammenhangs der beiden Kräfte möglich.



H. Ch. Ørsted
1777–1851

2. Ørsted beobachtete, dass ein stromführender Draht, den er mit beiden Händen über eine Magnetnadel spannte, diese beeinflusste. In weiteren Experimenten stellte er fest, dass das Magnetfeld den stromführenden Draht zirkular umgibt und damit eine wohl damals überraschende Symmetrie hat, die die Entdeckung möglicherweise verzögert hat.

→ Exp.: die zwei typischen Ørsted-Versuche

3. Nachdem F. Arago in der Französischen Akademie der Wissenschaften das Ørstedsche Experiment vorgeführt hatte, begann Ampère an diesem Problem zu experimentell wie theoretisch zu arbeiten. Er berücksichtigte bei seinen Messungen die Störungen durch das Erdmagnetfeld und betrachtete insbes. die gegenseitige Kraftwirkung zweier paralleler stromführender Drähte aufeinander. Damit hat er die Grundlage der Elektrodynamik, also der Erzeugung von Kraft aus elektrischen Strömen, geschaffen. Wir werden darauf zurück kommen.

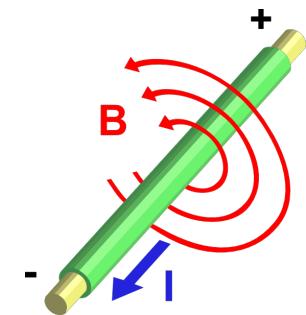


A.-M. Ampère
1777–1851

4. Die wichtigste Erkenntnis von Ampère war das nach ihm benannte Gesetz. Es besagt, dass das Integral über das Magnetfeld \vec{B} entlang eines geschlossenen Weges C gleich μ_0 mal dem elektrischen Strom $I_{\text{eing.}}$ ist, der durch diesen geschlossenen Weg führt:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{eing.}} = \mu_0 \iint_{A(C)} \vec{j} d\vec{A}$$

20



Ampère hat dieses Gesetz aus seinen sorgfältigen Messungen destilliert. Gleichzeitig hat er sich bei der Formulierung am Coulombschen Gesetz orientiert, wobei die damalige mathematische Ausdrucksweise heute für den Ungeübten wohl kaum verständlich wäre. Wir werden später sehen, dass das Ampèresche Gesetz eine Inkonsistenz aufweist. Trotzdem ist es in seiner Bedeutung mit dem Gaußschen Gesetz durchaus vergleichbar.

6.7 Anwendungen des Ampèreschen Gesetzes

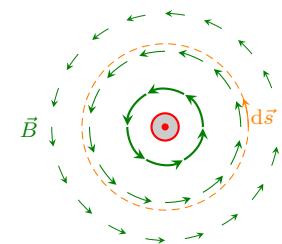
6.7.1 Unendlich langer Draht

- Genau wie beim Gaußschen Gesetz ist es auch beim Ampèreschen Gesetz entscheidend, die an und für sich beliebige geschlossene Kurve C so zu wählen, dass einerseits das Kurvenintegral in (20) mehr oder weniger trivial zu lösen ist, andererseits man aber ein nicht-triviales Ergebnis erhält. Regelmäßig ist dazu die Symmetrie des jeweiligen Problems auszunutzen. Im Folgenden führen wir das an den Standard-Beispielen für die Anwendung des Ampèreschen Gesetzes vor.

2. Magnetfeld eines unendlich langen Drahtes.

Skizziert ist ein unendlich langer Draht senkrecht auf der Zeichenfläche. Der Strom kommt aus der Zeichenebene heraus. Nachdem der Draht von jeder Richtung gleich aussieht, das Problem also Zylindersymmetrie aufweist, muss auch das Magnetfeld eine solche Symmetrie haben.

- Dazu gibt es zwei Möglichkeiten. Zunächst könnten wir vermuten, dass das magnetische Feld – anders wie skizziert, aber genau wie das elektrische Feld beim



geladenen Draht – radial nach außen oder auf den Draht zu zeigt. Wenn wir aber dann den Integrationsweg C so wählen, dass er einen konzentrischen Kreis um den Draht beschreibt, dann die \vec{B} - und $d\vec{s}$ -Vektoren überall entlang C aufeinander senkrecht. Entsprechend ist das Skalarprodukt überall entlang C gleich Null und damit ist das ganze Kurvenintegral gleich Null. Das darf aber nicht sein, da C einen Strom einschließt.

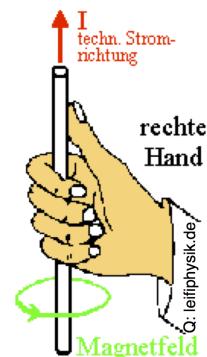
4. Bleibt also ein tangentiales Feld, so wie skizziert. Wir sehen sofort, dass \vec{B} und $d\vec{s}$ entlang der gesamten Kurve C parallel sind. Entsprechend können wir uns die Vektorpfeile sparen, im Integral steht jetzt der Betrag von \vec{B} . Außerdem ist uns natürlich klar, daß der Betrag des Magnetfeldes \vec{B} für einen festen Abstand vom Draht konstant sein muss. Fester Abstand vom Draht? Genau das haben wir auf einem konzentrischen Kreis um den Draht! Folglich können wir B vor das Integral ziehen. Wir haben also nur noch das Wegintegral von 1 über den Kreis – das ist natürlich der Umfang $2\pi r$.
5. Wir haben also, ohne wirklich integriert zu haben,

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = 2\pi r B.$$

Entsprechend dem Ampèreschen Gesetz (20) muss das gleich dem vom Integrationskreis C eingeschlossenen Strom I mal μ_0 sein \Rightarrow

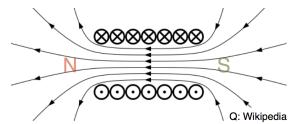
$$2\pi r B = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I. \quad 25$$

6. Die Richtung des \vec{B} -Feldes kann man mit der Rechte-Hand-Regel herausfinden.



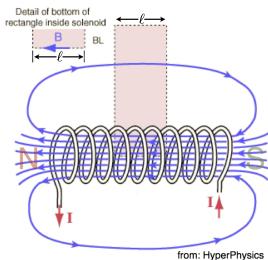
6.7.2 Lange Spule

1. Aber auch hier setzen wir uns zuerst mit der Symmetrie auseinander, die das Magnetfeld aufgrund der Form der Spule haben muss:



Es muss auf jeden Fall so sein, dass das Magnetfeld auf Linien parallel zur Spulenachse konstant ist. Dies ergibt sich aus der Translationssymmetrie. Wenn man die Spule im Schnitt betrachtet, kann man wie beim langen Draht mit der Rechte-Hand-Regel die Richtung des Magnetfeldes bestimmen. Daraus folgern wir, dass es erstens eine Magnetfeldkomponente in Spulenachse gibt. Zweitens heben sich die Komponenten in radialer Richtung auf, weil sich die Beiträge benachbarter Spulenwicklungen kompensieren. Also hat das Magnetfeld nur eine Komponente in axialer Richtung.

2. Es könnte aber immer noch so sein, dass das Magnetfeld von der Spulenachse zur Spulenwand hin, also in radialer Richtung, zu- oder abnimmt. Außerdem wäre es interessant zu wissen, wie stark das Magnetfeld ist. Das Ampèresche Gesetz hilft weiter.
3. Als Integrationsweg wählen wir den Rand des in der Skizze markierten Rechtecks. Es ist klar, dass die Integration über die langen Seiten keinen Nettobeitrag liefert: aus Symmetriegründen müssen das Integral über die rechte und linke Reckeckseite den gleichen Betrag und entgegengesetztes Vorzeichen haben.



Das Integrationsrechteck macht man so groß, dass das Magnetfeld an der oberen Kante des Rechtecks vernachlässigbar ist. Also liefert die Integration über diese Rechteckseite auch Null. Bleibt die Rechteckseite parallel zur Spulenachse. $d\vec{s}$ ist hier, je nach Stromrichtung in der Spule, parallel oder antiparallel zu \vec{B} .

4. Also können wir schreiben:

$$\oint_{\text{Rechteck}} \vec{B} d\vec{s} = B \cdot \ell.$$

Dies muss nach Ampère gleich dem vom Rechteck eingeschlossenen Strom $\cdot \mu_0$ sein.

5. Um den vom Rechteck eingeschlossenen Strom zu berechnen, brauchen wir noch eine Angabe, nämlich die Windungsdichte n , also wieviele Windungen pro Länge auf der Spule sind. Wenn die Spule N Windungen hat und L lang ist, dann ist $n = N/L$. Im der Ampèreschen Integrationsschleife befinden sich entsprechend $N\ell/L$ Windungen, d.h. der eingeschlossene Strom ist

$$I_{\text{eing.}} = I \cdot N\ell/L.$$

27

Der Vollständigkeit halber bemerken wir, dass der Strom in jeder Windung in derselben Richtung mit gleicher Stärke durch das Rechteck fließt.

6. (26) und (27) werden in Ampèresche Gesetz (20) eingesetzt

$$\implies B \cdot \ell = \mu_0 I \frac{N\ell}{L}$$

$$\implies B = \mu_0 I \frac{N}{L}$$

28

6.8 Das Gesetz von Biot-Savart

1. Bisher hatten wir für das Magnetfeld das Kraftgesetz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ als Analogon zum Kraftgesetz $\vec{F} = q \vec{\mathcal{E}}$ für elektrische Felder. Die Frage, die wir uns hier stellen ist, welches Gesetz man analog zum Coulomb-Gesetz $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}$ angeben kann. Das entsprechende Gesetz kann man aus dem Ampèreschen Gesetz ableiten, es ist aber nach den französischen Gelehrten Biot und Savart benannt.



Jean Baptiste Biot
1774–1862



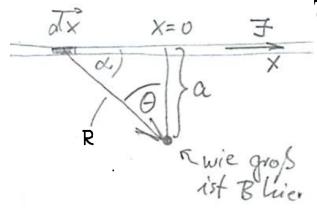
Félix Savart
1791–1841

2. Das Biot-Savartsche Gesetz besagt, dass ein Stromleiter der infinitesimalen Länge $d\vec{s}$, der sich am Ort \vec{r}' befindet und der vom Strom I durchflossen wird, am Ort \vec{r} das Magnetfeld $d\vec{B}$ erzeugt:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

30

3. Statt eines allgemeinen Beweises zeigen wir, dass das Biot-Savartsche Gesetz angewandt auf einen unendlich langen geraden Draht auf die in Kap. 6.7.1 abgeleitete Gleichung (25) führt.



4. Wir fragen also, wie groß das Magnetfeld an einem Punkt im Abstand a vom Draht ist. Der Einfachheit halber, soll der Ursprung in diesem Punkt liegen, also $\vec{r} = 0$. Mit der Rechte-Hand-Regel erhalten wir, dass das \vec{B} -Feld in die Zeichenebene hinein zeigt, also $\vec{B} = B \vec{e}_\otimes$.

5. Das \vec{B} -Feld ergibt sich durch Integrieren von $d\vec{B}$, also $\vec{B} = \int d\vec{B}$.
Mit $d\vec{s} \times \vec{R} = dx \cdot R \cdot \sin \alpha$ (wobei $dx = |d\vec{s}|$) folgt

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot R \sin \alpha}{R^3} \cdot \vec{e}_\otimes \quad 31$$

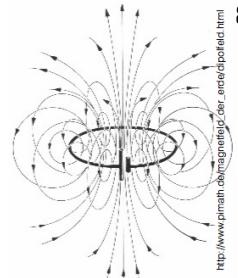
6. Im Integral (31) können wir allerdings nur eine Variable brauchen, bisher sind es aber R und α . Wir einigen uns auf keine von beiden, sondern nehmen θ :

$$a = R \cos \theta \implies \frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2} \cos^2 \theta \quad 32$$

$$\begin{aligned} x = a \tan \theta &\implies \frac{dx}{d\theta} = a \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \frac{a}{\cos^2 \theta} \\ &\implies dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned} \quad 33$$

7. (32) und (33) sowie $\sin \alpha = \cos \theta$ in (31) einsetzen

$$\begin{aligned} \implies \vec{B} &= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \cdot \cos \theta \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \\ &= 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta]_0^{\pi/2} \\ \implies |\vec{B}| &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



7 Materie im Magnetfeld

7.1 Magnetische Dipole

- Eine stromdurchflossene Drahtschleife erzeugt ein dipolartiges Magnetfeld, wie in nebenstehender Skizze angedeutet.
- Als magnetisches (Dipol)moment wird das Produkt

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} \quad (\text{vgl. } \vec{p}_e = q \vec{d}) \quad 1$$

definiert. Die Richtung von \vec{A} wird so festgelegt, dass sie mit I eine Rechtsschraube bildet.

- Der magnetische Dipol wird nun in ein homogenes Magnetfeld gesetzt. Wegen $d\vec{F} = I(d\vec{s} \times \vec{B})$ gibt es eine Kraft auf die Drahtschleife. Damit die Rechnung einfach bleibt, sei eine rechteckige Schleife angenommen.

→ Exp.

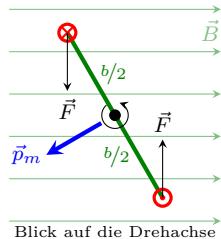
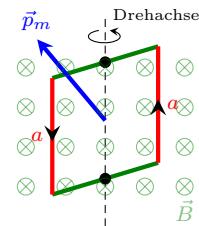
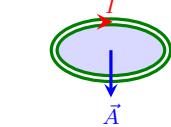
- Die Kraft auf die Drahtabschnitte b sind vom Winkel dieser Drahtstücke mit der Magnetfeldrichtung abhängig. Allerdings werden sie, wie man sich mit dem Lorentzgesetz schnell überzeugt, von den Lagern der Drehachse aufgenommen, brauchen also nicht zu berücksichtigt werden.

- Kraft auf *ein* Drahtstück a :

$$\vec{F}_m = a \cdot I \cdot (\vec{e}_a \times \vec{B}) \quad 2$$

- Drehmoment für beide Drahtstücke a : $\vec{D} = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot (\vec{e}_b \times \vec{F})$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= b [\vec{e}_b \times a \cdot I \cdot (\vec{e}_a \times \vec{B})] = \underbrace{a b \cdot I}_{= p_m} \underbrace{(\vec{e}_b \times \vec{e}_a)}_{= \vec{e}_A} \times \vec{B} \\ \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{p}_m \times \vec{B}} \end{aligned} \quad 3$$



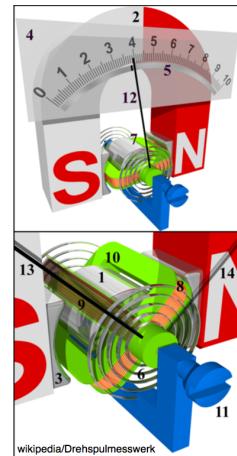
- Diese Gleichung ist vollkommen analog zu der für den elektrischen Dipol, vergl. Kap. 3.7, S. 30.

7.2 Anwendung: Drehspulmessgeräte

- Wenn statt eines homogenen Feldes ein radialsymmetrisches \vec{B} -Feld verwendet wird, vereinfacht sich Gl. (3) zu

$$D = p \cdot B, \quad 4$$

da der Winkel zwischen \vec{B} und der Spulenfläche (bei entsprechendem Einbau der Spule in das Magnetfeld) stets 90° beträgt. Ein radialsymmetrisches Magnetfeld kann durch die Verwendung entsprechend geformter sog. Polschuhe aus Weicheisen realisiert werden. In der Abbildung sind sie mit 3 gekennzeichnet.



- Zur Erhöhung der Empfindlichkeit eines Drehspulinstruments werden für gewöhnlich statt einer mehrere Spulenwindungen verwendet. Mit $p_m = N \cdot I \cdot A$ erhält man dann

$$D = N \cdot I \cdot A \cdot B. \quad 5$$

- Die Spule wird mit einer Spiralfeder (6) zurück in ihre Nulllage gezogen. Nachdem das Drehmoment der Spiralfeder zum Drehwinkel ebenso proportional ist, wie das Drehmoment auf die Spule gemäß (5) proportional zum Strom I in der Spule ist, erhält man einen zum Strom proportionalen Drehwinkel.
- Historisch hat das Drehspulinstrument eine herausragende Bedeutung. Tatsächlich wurden eine Reihe mehr oder weniger raffinierter Schemata entwickelt, die mit Drehspulinstrumenten neben Strom- und Spannungsmessungen auch die direkte Messung von Widerständen, Leistungen und anderen physikalischen Größen erlauben (Lit. z.B. Gehrtsen). Seit den 1980er Jahren werden Drehspulinstrumente zunehmend durch Digitalinstrumente verdrängt.
- Die Drehspulinstrumente haben sich aus den Galvanometern entwickelt. Letztere haben nach wie vor große Bedeutung z.B. für Laserscanner.

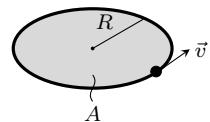
7.3 Atomare magnetische Momente

1. Seit den Arbeiten von Rutherford stellt man sich Atome vereinfacht als einen schweren Atomkern vor um den Elektronen kreisen. Im einfachsten Fall hätte man ein Elektron, das ein Proton umrundet. Das kreisende Elektron entspricht einem Strom I – die Ampèresche Vermutung, dass auch das Magnetfeld von Permanentmagneten durch Ströme verursacht sei, erweist sich damit in der Tat als visionär.

2. Der Strom – Ladung q pro Zeit (Umlaufdauer) – ergibt sich aus der Umlauffrequenz f mit

$$I = q \cdot f = q \frac{v}{2\pi R},$$

wobei v die Geschwindigkeit der umlaufenden Ladung und R ihr Bahnradius ist.



3. Damit ergibt sich für das magnetische Moment

$$\vec{p}_m = q f \vec{A} = \underbrace{\frac{1}{2} q R^2 \vec{\omega}}_{A=R^2\pi}$$

4. Der Drehimpuls der umlaufenden Masse m ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m(\vec{R} \times \vec{v}) = m R^2 \vec{\omega} \\ \implies \vec{p}_m &= \frac{q}{2m} \vec{L}. \end{aligned}$$

5

5. Die Quantenmechanik diktiert die Quantisierung des Drehimpulses: $L = \ell \hbar$ mit beispielsweise $\ell \in \mathbb{N}$. L kann also nicht jeden beliebigen reellen Wert annehmen, sondern nur ganzzahlige (oder auch halbzahlige) Vielfache des (reduzierten) Planckschen Wirkungsquantums \hbar . Für Elektronen ($q = -e$ und $m = m_e$) gilt also

$$\vec{p}_m = -\ell \frac{e \hbar}{2m_e} \quad \text{“Bohrsches Magneton”}$$

6

6. Bei Atomen oder Molekülen mit mehr als einem Elektron hängt es von der Struktur der Elektronenhülle ab, ob die Elektronen einen Netto-Gesamtdrehimpuls haben. Dies ist ein quantenmechanisches Problem. Für $L = 0$ ist die Substanz diamagnetisch, ansonsten paramagnetisch (s. Kap. 7.6).

7.4 Magnetisierung und magnetische Suszeptibilität

1. Wir hatten festgestellt, dass

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I. \quad (\text{Ampèresches Gesetz})$$

\vec{B} hatten wir analog zum Coulomb-Gesetz $\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$ Magnetfeld genannt, weil es die Felderöse im Lorentzgesetz ist. Entsprechend könnte man $\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ als magnetischen (Kraft-)fluss bezeichnen. In der älteren Literatur heißt \vec{B} daher auch magnetische Kraftflussdichte (oder, aus Gründen die wir noch kennen lernen werden, magnetische Induktion).

2. Wir hätten auch ein Vektorfeld $\vec{H} := \vec{B}/\mu_0$ definieren können, so dass

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I. \quad 10$$

\vec{H} hat man früher Magnetfeld genannt.⁵ Nachdem heute \vec{B} so genannt wird, nennt man \vec{H} *magnetische Erregung* oder einfach nur H -Feld.

3. Füllt man den Innenraum einer Spule mit Materie (\rightarrow Exp.), bemerkt man eine veränderte Kraftwirkung auf einen Gilbertschen Visorium (Kompassnadel). Besonders eindrucksvoll ist dies bei ferromagnetischer Materie, die zu einem starken Anstieg der Kraft auf das Visorium führt.
4. Offensichtlich hat sich also der magnetischen (Kraft-)fluss $\Phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ vergrößert – sagen wir um den Faktor μ_r . Nachdem sich aber an der Geometrie der Anordnung nichts verändert hat, ändert sich auch an der Integration $\int_A \vec{B} d\vec{A}$ nichts. Der veränderte Kraftfluss kann also nur von einer Veränderung des Magnetfeldes \vec{B} um den Faktor μ_r herrühren:

$$B_{\text{Materie}} = \mu_r B_{\text{Vakuum}} = \mu_r \mu_0 H$$

↗
 relat. Permeabilität ↙
 mag. Permeabilitätskonstante
 mag. Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
 Induktionskonstante

5. Mikroskopisch kann der Effekt durch atomare oder molekulare magnetische Dipole in der Materie erklärt werden, die durch das äußere Magnetfeld entweder

⁵Als Grund kann man u.a. die Einheit von \vec{H} anführen: $[H] = \text{A/m}$, vergl. $[\mathcal{E}] = \text{V/m}$.

ausgerichtet oder erst erzeugt werden, s. Kap. 7.6.

6. Die makroskopische Beschreibung der induzierten oder ausgerichteten mikroskopischen magnetischen Dipole erfolgt durch die Einführung der zur elektrischen Polarisation analogen Größe *Magnetisierung*:

$\vec{M} :=$ Summe der atomaren magnetischen Momente \vec{p}_m pro Volumeneinheit = Dichte der atomaren magnetischen Momente \vec{p}_m .

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_V \vec{p}_m \quad 12$$

7. Einheiten: Wir hatten $\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} \implies [\vec{M}] = \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Das ist dieselbe Einheit wie die von H , s. Fußnote bei -2. Deshalb und aufgrund der zur elektrischen Polarisation analogen Form der Gleichungen können wir schreiben

$$B_{\text{Materie}} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{vergl. } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P}) \quad 13$$

\downarrow
 $P = \chi \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$

8. Man stellt empirisch fest, dass "oft" und bei "nicht zu großen" Feldstärken die Magnetisierung \vec{M} proportional zur magnetischen Erregung \vec{H} ist,

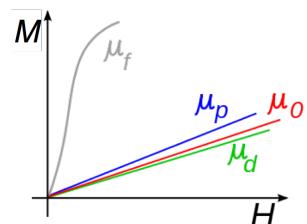
$$\vec{M} = \chi \vec{H}. \quad 14$$

9. (14) in (15) \implies

$$B_{\text{Materie}} = \mu_0 (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \quad 15$$

Die Stoffe werden anhand von χ klassifiziert:

$$\left. \begin{array}{l} \text{diamag. Stoffe: } \chi < 0 \\ \text{paramag. Stoffe: } \chi > 0 \\ \text{ferromag. Stoffe: } \chi \gg 0 \end{array} \right\} |\chi| \ll 1$$



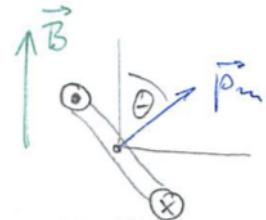
7.5 Kräfte im inhomogenen Magnetfeld

1. Herleitung von

$$E_{\text{pot}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad (\text{vergl. } E_{\text{pot}} = -\vec{p}_{el} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \quad 20$$

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$dE_{\text{pot}} = D d\theta \quad D = p_m B \sin \theta \quad \text{vergl. Gl. (3)}$$



$$\implies dE_{\text{pot}} = p_m B \sin \theta d\theta$$

$$\implies E_{\text{pot}} = -p_m B \cos \theta + \text{const.} \quad \text{q.e.d.}$$

2. Vorzeichen von Gl. (20): Wenn \vec{p}_m antiparallel zu \vec{B} ist, ist der Dipol gespannt wie eine Mausefalle $\implies E_{\text{pot}} > 0$.

$$\vec{p}_m \perp \vec{B} \implies E_{\text{pot}} = 0 \text{ und}$$

$$\vec{p}_m \parallel \vec{B}; \implies E_{\text{pot}} < 0$$

3. Kraft

wenn p_m homogen

$$F = \text{grad } E_{\text{pot}} = \text{grad} (-\vec{p}_m \cdot \vec{B}) \stackrel{\downarrow}{=} p_m \text{grad } \vec{B} \quad 21$$

(Wir meinen tatsächlich $\text{grad } \vec{B}$ und nicht etwa $\text{div } \vec{B}$, das ohnehin $= 0$ wäre; $\text{grad } \vec{B}$ ist komponentenweise zu verstehen.)

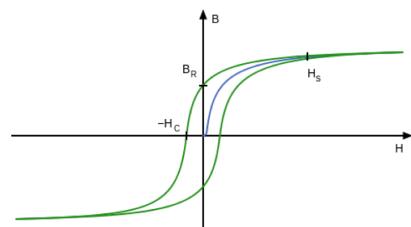
Makroskopisch ist p_m durch Magnetisierung mal Volumen gegeben, s. Gl. (14)

$$\implies \vec{F} = V \overset{\downarrow}{M} \text{grad } \vec{B} \quad M = \chi H = \chi B / \mu_0$$

$$\implies \vec{F} = \frac{\chi}{\mu_0} V \vec{B} \text{grad } \vec{B} \quad 22$$

7.6 Ferromagnetismus

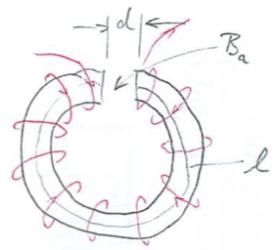
1. Hystereseschleife



2. Remanenz
3. Koerzitiv-Feldstärke
4. Sättigung
5. Weißsche Beziehungen und Barkhausen-Sprünge
6. Curie-Temperatur
7. Anti-Ferromagnete
8. Ferrimagnete und Ferrite
9. Mikroskopische Erklärung von Dia-, Para- und Ferro-magnetismus
10. Analogie zu Dielektrika

7.7 Elektromagnete

1. Wir betrachten einen torusförmigen (Umfang ℓ) Elektromagneten mit Luftspalt (Spaltbreite d). Die Windungszahl sei N . Mit Hilfe des Gaußschen Satzes $\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$ lässt sich die Stetigkeit der Normalkomponente des Magnetfeldes schnell zeigen:⁶



$$B_{\text{Luftspalt}} = B_{\text{Kern}}$$

$$\Rightarrow H_L = \frac{1}{\mu_0} B_L \quad \& \quad H_K = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_L$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad H_K \cdot \ell + H_L \cdot d = N \cdot I$$

$$\Rightarrow \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell + \frac{B}{\mu_0} d = N \cdot I \quad \Rightarrow \quad B \left(\frac{\ell}{\mu_r} + d \right) = N \cdot I \cdot \mu_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{d + \ell/\mu_r}$$

30

2. Auf den ersten Blick scheint B durch ℓ im Nenner dominiert zu sein nachdem der Torusumfang ℓ viel größer als der Luftspalt d ist. Allerdings ist zu beachten, dass für Eisen $\mu_r > 1000$. $\Rightarrow B$ fällt sehr schnell ab für einen größer werdenden Luftspalt.
3. Ein Weicheisenteil wird in den Luftspalt gezogen, weil dadurch die Gesamtenergie kleiner wird. Analog zum elektrischen Fall ist die Energiedichte gegeben durch $\frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

$$\begin{aligned} \text{Energie mit Spalt: } E_i &= \frac{1}{2} A \ell H_K \cdot B + \frac{1}{2} A d H_L \cdot B = \\ &= \frac{A \ell}{2 \mu_0 \mu_r} B^2 + \frac{A d}{2 \mu_0} B^2 = \frac{A}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + d \right) \end{aligned} \quad 31$$

$$\begin{aligned} \text{mit gefülltem Spalt: } E_f &= \frac{A}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + d \right) \\ \Rightarrow \Delta E = E_f - E_i &= \frac{A}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + \frac{d}{\mu_r} - \frac{\ell}{\mu_r} - d \right) = \frac{1}{2} A \frac{B^2}{\mu_0} \overbrace{\left(\frac{1}{\mu_r} - 1 \right)}^{\approx -1} \end{aligned} \quad 32$$

⁶Man verwende eine Gaußsche Fläche in Form einer infinitesimal hohen Dose, deren Deckel parallel zu den Polflächen des Torus' sind.

4. An Gl. (31) erkennt man die bedeutsame Tatsache, dass im Luftspalt ein erheblicher Anteil der magnetischen Feldenergie lokalisiert ist. Wir werden darauf im Rahmen einer alternativen Beschreibung gleich zurück kommen.
5. Haltkraft des Elektromagneten: Wir stellen uns den Toruskern elastisch vor, als wäre er aus Gummi gefertigt. Die erforderliche Kraft, um den Spalt zu vergrößern, berechnet man mit

$$F = \frac{\partial E}{\partial d} = \frac{1}{2} \frac{A B^2}{\mu_0} \quad 33$$

6. Der Magnet mit Luftspalt ist ein einfaches Beispiel zur Illustration der Theorie magnetischer Stromkreise,⁷ die wir kurz andeuten wollen, weil sie eine hohe praktische Bedeutung zur Berechnung der Magnetfelder in nahezu allen Anwendungen (Transformatoren, Motoren, Drosseln usw.) hat.

Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass Magnetfeldlinien immer geschlossen sind weil keine magnetischen Monopole existieren. Dies begründet die Analogie zum elektrischen Stromkreis, bei dem Stromfluss nur dann zustande kommt, wenn der Stromkreis geschlossen ist. Man kann daher zu allen für einen Stromkreis charakteristischen Größen Analoga in magnetischen Kreisen definieren. Insbesondere gilt dies auch für die Kirchhoffsche Knotenregel und mit Einschränkungen für die Maschenregel, so dass sich auch geometrisch komplizierte magnetische Anordnungen berechnen lassen.

7. Das Analogon zum Strom ist der magnetischen Fluss, das zur Spannung die sog. Durchflutung $\Theta = I \cdot N$. Interessant der magnetische Widerstand: Genau wie im elektrischen Fall berechnet er sich zu

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{\ell}{A} \quad \text{vergl. } R = \rho \frac{\ell}{A} \quad 34$$

8. Obigen Magneten mit Luftspalt können wir also als Reihenschaltung eines kleinen (Eisenkern) und eines großen magnetischen Widerstands (Luftspalt) betrachten. Genau wie im elektrischen Fall fällt am großen Widerstand die meiste Spannung ab. Und genau wie im elektrischen Widerstand die meiste Energie verbraucht wird, ist auch im Luftspalt, s.o., die Energiedichte am höchsten.

⁷Für eine kurze, elementare Darstellung: <http://elektroniktutor.de/grundlagen/magkreis.html>.

9. Die Analogie ist auch zum qualitativen Verständnis von magnetischen Anordnungen höchst nützlich: Genauso wie sich der elektrische Strom den Weg des geringsten Widerstandes sucht, suchen sich die Magnetfelder den Weg des geringsten magnetischen Widerstandes. Dies erklärt u.a. die konzentrierende Wirkung von konischen Polschuhen.

8 Magnetfeld und Relativität

9 Das Induktionsgesetz

9.1 Experimentelle Evidenz

1. Nachdem die Ørstedtschen Experimente gezeigt hatten, dass Ströme Magnete in Bewegung setzen können, dass also Ströme Magnetfelder erzeugen, hat Faraday (ebenso wie z.B. auch Joseph Henry) vermutet, dass durch sich durch Bewegung elektrischer Strom erzeugen lassen sollte. Letztlich war es damit ein abstraktes und zur damaligen Zeit sogar diffuses Symmetrieargument, das die Entdeckung der Induktion auf den Weg brachte.

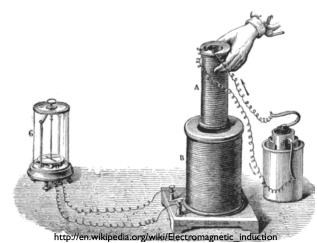


Michael Faraday
1791–1867

2. Der Prototyp des Induktionsexperiments (das Faraday so nicht durchgeführt hat) ist unten abgebildet: Man hat zwei nahezu identische Stromkreise ① und ②, die sich nur dadurch unterscheiden, dass im Stromkreis ② die Batterie (und auch der Schalter) fehlt. Die beiden Spulen haben, um das Prinzip zu verdeutlichen, nur eine Windung. Vorerst gehen wir davon aus, dass sie sich parallel gegenüberstehen.



3. Man beobachtet nun, dass das Lämpchen in Stromkreis ② immer dann kurz aufblitzt, wenn der Schalter in Stromkreis ① geschlossen oder geöffnet wird.
4. Es dürfte klar sein, dass das Experiment wie oben skizziert nicht funktionieren wird: Um einen Effekt zu beobachten, müsste entweder ein erheblich empfindlicheres Anzeigegerät als ein Lämpchen verwendet werden, oder man bräuchte Spulen nicht nur mit einer, sondern mit sehr vielen Windungen. Am prinzipiellen experimentellen Befund ändert das jedoch nichts.



9.2 Das Problem

- Der in Kap. 9.1 vorgestellte experimentelle Befund darf nicht schulterzuckend zur Kenntnis genommen werden: er befindet sich in einem eklatanten Widerspruch zu dem Gedankengebäude, auf dem wie bislang unser Verständnis elektrischer und magnetischer Phänomene aufgebaut haben.
- Bisher hatten wir stets wie folgt argumentiert: Das Coulombsche Gesetz hat mathematisch die gleiche Gestalt wie das Newtonsche Gravitationsgesetz. Daraus hatten wir geschlossen, dass die Coulombkraft genauso wie die Gravitationskraft konservativ ist. Gleiches gilt für die entsprechenden Felder. Wenn das \vec{E} -Feld konservativ ist, bedeutet das $\text{rot } \vec{E} = 0$ oder, äquivalent,

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = 0.$$

- Für den nebenstehenden Stromkreis heißt das

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = U - IR = 0$$

- Formulieren wir das nun als *Energiebilanz*. Dazu ist zunächst (2) mit der Ladung q zu multiplizieren, die während des Experiments fließt. In die *Energiegesamtbilanz* sollten wir aber natürlich nicht nur die Arbeit durch elektrische Kräfte einschließen, sondern alle Energieformen, denen wir im skizzierten Stromkreis begegnen. Entsprechend würden wir schreiben:

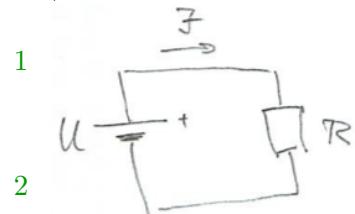
$$\text{chem. Energie} + q \oint \vec{E} d\vec{r} - \text{Arbeit des Gitters} = 0. \quad 3$$

Die Batterie stellt durch chemische Prozesse Energie bereit (daher das “+”-Zeichen), das Kristallgitter bremst die Elektronen ab wobei Wärme entsteht (daher das “-”-Zeichen) und zum Vorzeichen von $\oint \vec{E} d\vec{r}$ kommen wir gleich.

- (3) mit (2) ergibt:

$$\text{chem. Energie} \underbrace{- qU + qIR}_{=0} - \text{Gitterarbeit} = 0. \quad 4$$

Dass $-qU + qIR = 0$ ist, ist klar. Fragen könnte man, warum es nicht $+qU - qIR$ heißt. Dazu ruft man sich die Definition der Arbeit in Erinnerung: Wenn Kraft und Verschiebung in dieselbe Richtung gehen, ist die Arbeit positiv, “Joules



gehen in den Körper" und erhöhen z.B. seine kinetische oder potentielle Energie. Betrachten wir das am Beispiel des Terms qIR . Dieser Term ist der Teil des geschlossenen Pfads, der über den Widerstand integriert. Tatsächlich wissen wir, vergl. Kap. 4.1 über den Spannungsabfall, dass es im Widerstand ein elektrisches Feld gibt, das die positiven Ladungsträger in Stromrichtung beschleunigt. Kraft und Verschiebung zeigen also in dieselbe Richtung, daher das positive Vorzeichen für den Term qIR . Genauso wissen wir, dass das Gitter eine Art Reibungskraft auf die Ladungsträger ausübt, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist, daher das negative Vorzeichen für die Gitterarbeit, usw.

6. Die ersten beiden Terme sind der Batterie zuzuordnen, die letzten beiden dem Widerstand. Beide Bauteile sind räumlich getrennt. Da die kinetische Energie der Elektronen in den Drähten konstant ist, also auf diese Weise keine Energie zwischen Batterie und Widerstand übertragen wird, sind die ersten und letzten beiden Terme getrennt gleich Null. (4) kann man also umgruppieren:

$$\underbrace{\text{chem. Energie} - qU}_{=0} + \underbrace{qIR - \text{Gitterarbeit}}_{=0} = 0. \quad 5$$

(Das mag merkwürdig klingen: Die Batterie überträgt keine Energie auf den Widerstand??? Doch, tut sie schon; nur nicht mittels der kinetischen Energie der Elektronen. Die Batterie sorgt aber dafür, dass längs des Widerstandes das durch qIR implizierte elektrische Feld aufrecht erhalten wird.)

7. Nun kommen die entscheidenden Schritte: Der Stromkreis ② aus Kap. 9.1 ähnelt dem eben betrachteten, nur dass es keine Batterie gibt \Rightarrow aus (5) wird

$$qIR - \text{Gitterarbeit} = 0.$$

$$\Rightarrow \text{Gitterarbeit} = qIR \quad 6$$

8. Wir hatten aber immer gesagt, dass $q\oint\vec{E}d\vec{r} = 0$ – wenn wir einmal um den ganzen Stromkreis ② herum integrieren, muss Null herauskommen, sonst gibt's kein Potential. Soeben in -7 zeigten wir aber, dass die Elektronen Arbeit am

Gitter verrichten, das dabei warm wird.

$$\Rightarrow q \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = q I R$$

$$\Rightarrow \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = I R$$

7

Wir werden auf dieses Ergebnis in Kap. 9.5 zurückkommen.

9. Man könnte die Situation auch so beschreiben: Wir hatten von Anfang an betont, dass ein Potential nur dann existiert, wenn die Ladungen festgenagelt sind. Dann hatten wir Ströme betrachtet und festgestellt, dass die Ladungen im Raum nicht fixiert sind, die Geschäftsgrundlage also entfallen war. Noch einmal konnten wir die Situation retten, indem wir darauf verwiesen, dass die Ströme immerhin *stationär* seien. Das ist nun ebenfalls hinfällig geworden: Der Effekt tritt nur beim Ein- und Ausschalten ein, also dann, wenn der Strom gerade nicht stationär ist.

9.3 Faradays Erklärung

- Faraday postulierte – auf der Basis seines experimentellen Befundes! – dass die beobachtete “elektromotive Kraft” EMK aus der Änderung des magnetischen Flusses in der Spule des Stromkreises ② resultiert:

$$\text{EMK} = \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} \quad \text{mit} \quad \Phi_{\text{mag}} = \iint_A \vec{B} d\vec{A}. \quad 10$$

- Damit wird aus unserem Schleifengesetz das Faradaysche Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} d\vec{A} \quad 11$$

Bemerkungen:

- Das Vorzeichen auf der rhs wird noch erklärt (Lenzsche Regel)
 - In der Schleife von Stromkreis ② entsteht durch den Strom ein Magnetfeld, das irgendwas mit Stromkreis ① anstellen könnte. Das ignorieren wir zunächst.
- Wenn (11) stimmt, dann sollten die Ergebnisse weiterer Experimente vorhersagbar sein:
 - Stelle die Schleifen in Stromkreis ① und ② senkrecht aufeinander \Rightarrow kein induzierter Strom.
 - Führe einen Permanentmagneten in Schleife ② ein \Rightarrow Induktion.
 - Je mehr Windungen, desto mehr EMK.
 - Man braucht gar kein zeitlich veränderliches Magnetfeld, eine änderung der Geometrie tut es auch.

→ Exp.:

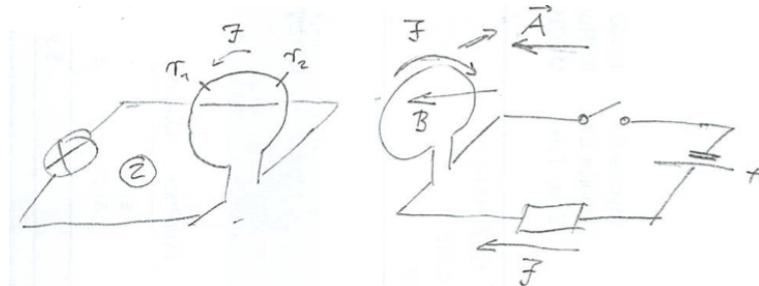
9.4 Die Lenzsche Regel

- Das Vorzeichen aus (11) sollten wir noch bestätigen. Dieses Minuszeichen ist das Verdienst des deutsch-baltischen Physikers Emil Lenz. Vor Lenz hatte man geglaubt, dass die Richtung der induzierten Ströme zufällig sei. Wir werden sehen, dass das Lenzsche Minuszeichen die Energieerhaltung sicher stellt, deren Verständnis zu Lenz' Zeiten noch in den Kinderschuhen steckte



H. F. Emil Lenz
1804–1865

- Wenn der Schalter geschlossen wird, nimmt der magnetische Fluss durch die Schleife des Stromkreises ② zu $\Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi_{\text{mag}} > 0$. Das Vorzeichen in (11) sagt, dass dann $\oint \vec{E} d\vec{r} < 0 \Rightarrow$ der Strom in der Schleife von ② fließt in die entgegengesetzte Richtung wie in ①.



- Das ist auch gut so, denn der Strom in ② produziert auch ein Magnetfeld. Ginge es in die gleiche Richtung wie das von ①, würde dort der Fluß noch größer \Rightarrow in ① würde EMK in der schon anliegenden Richtung erzeugt \Rightarrow mehr Strom \Rightarrow mehr Fluß in der Schleife von ① \Rightarrow es wird noch mehr in ② induziert usw.
- Die Lenzsche Regel in deutscher Prosa: Die durch elektromagnetische Induktion entstehenden Ströme, Felder oder Kräfte behindern stets den die Induktion auslösenden Vorgang.

9.5 Die Lenzsche Regel am Beispiel einer bewegten Stromschleife

1. Wir betrachten ein homogenes magnetisches Feld \vec{B} , das auf einen wohldefinierten Teil des Raumes begrenzt ist und in die Zeichenebene hinein zeigt. Eine Drahtschleife befindet sich teilweise im Magnetfeld und wird mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} herausgezogen.

2. Der magnetische Fluss durch die Drahtschleife:

$$\Phi_{\text{mag}} = \iint \vec{B} d\vec{A} = -B x \ell$$

gem. obiger Skizze zeigen \vec{B} und \vec{A} in entgegengesetzte Richtung

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} = -\frac{d}{dt} (-B x \ell) = +B \ell v$$

wir ziehen die Drahtschleife raus, A wird kleiner für $v > 0$

3. Wir hatten in Kap. 9.2 gesehen, dass

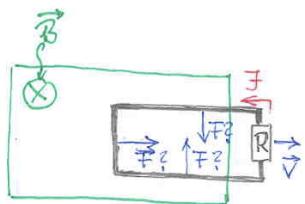
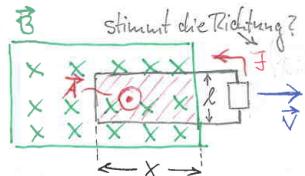
$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} &= IR \\ \text{nun } \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} &= -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow B \ell v = -IR \Rightarrow I = -\frac{B \ell v}{R}$$

4. Das Minuszeichen bedeutet, dass der Strom genau anders herum fließt, wie unter -1 angenommen. Macht das Sinn? Wir klären die Frage, indem wir die Kräfte auf die Drahtstücke der Drahtschleife betrachten. Nachdem ein Strom in der Drahtschleife fließt, gibt es auch eine Lorentzkraft auf die Drahtschleife,

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B},$$

wobei \vec{l} in Richtung des angenommenen Stromflusses zeigt.

5. Nehmen wir an, der induzierte Strom I fließt – entgegen dessen was wir in -4 abgeleitet haben – doch entgegen des Uhrzeigersinns. In welche Richtung wirken die Kräfte. Mit der Rechte-Hand-Regel ermittelt man die Richtungen, wie in nebenstehender Skizze eingezeichnet. \Rightarrow es gibt eine Nettokraft nach rechts.



6. Wenn der Strom also tatsächlich so fließen würde, wie in der Skizze vorgeschlagen, dann würde der Draht aus dem Feld herausgedrückt obwohl im Widerstand R Energie mit der Rate I^2R verbraucht wird. Wir bräuchten die Drahtschleife dann nur von oben wieder ins Feld legen und hätten ein Perpetuum Mobile.

⇒ der Strom fließt im Uhrzeigersinn.

⇒ es kostet "Kraft" (vielmehr es kostet Energie, nämlich $F \Delta x$, die Drahtschleife aus dem Magnetfeld herauszuziehen. Diese Energie ist identisch zu der in R verbrauchten Energie).

Anwendung: Wirbelstrombremse → Exp.: Waltenhofensches Pendel

7. Weitere Experimente zur Lenzschen Regel:

- An Faden aufgehängter Metallring, der durch einen Magneten zum Pendeln gebracht wird. Mit einem geschlitzten Ring funktioniert das nicht.
- Magnet der in einem Metallrohr fällt.
- Induktionsschleuder.

→ Exp.

9.6 Selbstinduktion und Gegeninduktion

- Der magnetische Fluss durch eine von der Kurve C umrandete Fläche A ist gegeben durch

$$\Phi_{\text{mag}} = \iint_{A(C)} \vec{B} d\vec{A} \quad 20$$

Konkret können wir uns eine Spule (eine “Induktivität”) mit Querschnitt A vorstellen.

- Das Ampèresche Gesetz

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \quad 21$$

impliziert, dass \vec{B} proportional zu I ist, solange sich an der Geometrie nichts ändert, solange man also keine eine andere Kurve C oder Fläche A wählt.

- Aus (20) und (21) folgt also, dass (bei unveränderter Geometrie) Φ_{mag} proportional zu I ist, also

$$\Phi_{\text{mag}} = L \cdot I. \quad 22$$

L wird Selbstinduktion oder Induktivität genannt. Warum wird später klar wenn wir die gegenseitige Induktion betrachten. L ist nur von der Geometrie abhängig

- Einheit:

$$[L] = \frac{[\Phi_{\text{mag}}]}{[I]} = \frac{\text{T m}^2}{\text{A}} =: 1 \text{ Henry} =: 1 \text{ H.}$$

- Beispiel: Induktivität einer Spule: Wie hatten aus dem Ampèreschen Gesetz $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$ (6-28). Der magnetische Fluss durch eine Spule ist $\Phi_{\text{mag}} = N \pi r^2 B$.

$$\Rightarrow \Phi_{\text{mag}} = N \pi \frac{r^2 \mu_0 N}{\ell} \cdot I$$

Andererseits ist nach (22) $\Phi_{\text{mag}} = L \cdot I$.

$$\Rightarrow L = \mu_0 N^2 \pi \frac{r^2}{\ell}. \quad 23$$



Joseph Henry
1797–1878

6. Bei der Gegeninduktion gibt es im Stromkreis zwei sich wechselseitig beeinflussende Induktivitäten. Die Gegeninduktion sollte man sie vielleicht besser gegenseitige oder wechselseitige Induktion nennen – die englisch-sprachige Literatur sagt folgerichtig “mutual inductance”.
7. Um ein Experiment mit mehreren sich beeinflussenden Induktivitäten zu beschreiben, muss man den magnetischen Fluss Φ_{mag} kennen oder berechnen. Das ist viel leichter gesagt als getan, da die \vec{B} -Felder oft inhomogen sind. Ebenso sind die Stromschleifen – z.B. der ganze Stromkreis selbst – oft irregulär geformt. Das Integral $\iint \vec{B} d\vec{A}$ zuberechnen gelingt also nur in Spezialfällen oder numerisch.
8. Gleichwohl können wir (wie bei der Selbstinduktion) feststellen, dass bei fixer Geometrie das \vec{B} -Feld linear vom Strom I abhängt (Ampèresches Gesetz), und dass der Fluss Φ_{mag} linear von \vec{B} abhängt. Also ist Φ_{mag} proportional zu I ,

$$\Phi_{\text{mag}} = M I.$$

24

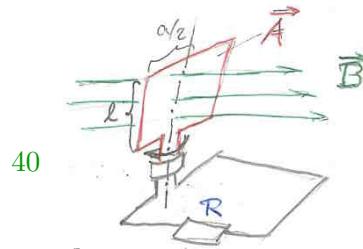
Die so definierte Proportionalitätskonstante M wird Gegeninduktivität genannt. In der Regel muss sie experimentell oder numerisch bestimmt werden.

9.7 Generator

1. Magnetischer Fluss:

$$\Phi_{\text{mag}}(t) = B A \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}}(t) = -B A \omega \sin \omega t$$



40

2. Induktionsgesetz:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = I R = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}}(t) \stackrel{(40)}{=} +B A \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{B A \omega}{R} \sin \omega t$$

41

3. Elektrische Leistung:

$$P = I^2 R \stackrel{(40)}{=} R \frac{B^2 A^2 \omega^2}{R^2} \sin^2 \omega t$$

4. Mechanische Leistung:

$$P = 2 \cdot \vec{v} \cdot \vec{F} = 2 v F \sin \omega t$$

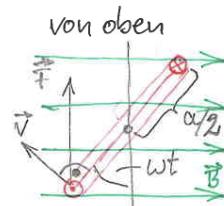
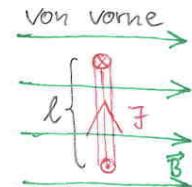
für beide Drahtstücke

$$\frac{a}{2} \cdot \omega$$

$$I \ell \times \vec{B} = I \ell B$$

da immer $\ell \perp \vec{B}$

$$\Rightarrow P = 2 \frac{a}{2} \omega I B \sin \omega t = A B \omega \sin \omega t \cdot I \stackrel{(41)}{=} \frac{B^2 A^2 \omega^2}{R} \sin^2 \omega t$$



5. Wir sehen also, dass die mechanische Leistung (43), die wir in den Generator stecken, genauso groß ist wie die elektrische Leistung, die im Verbraucher R verbraucht wird.

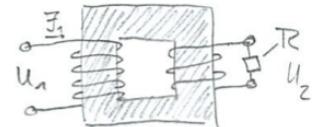
9.8 Transformator

1. Primärspule:

$$U_1 + U_{\text{ind}} = 0 \quad \text{Fluss durch Kern}$$

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI_1}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

Zahl der Windungen



35

2. Sekundärspule:

Der Fluss durch beide Spulen ist gleich \Rightarrow

$\dot{\Phi}_{\text{mag}}$ durch beide Spulen ist auch gleich \Rightarrow

$$U_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

36

10 Stromkreise mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen

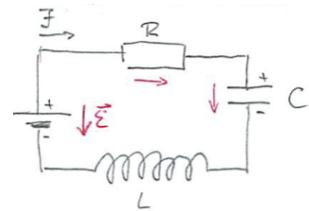
1. Wir haben in den vorangegangenen Kapiteln nacheinander drei elementare Bauteile eingeführt: Zuerst Kondensatoren, dann Widerstände und jüngst Spulen. Jedes Mal sind wir zur Erkenntnis gelangt, dass die Kapazität, der Widerstand und die Induktivität nicht von elektrischen Größen, sondern nur vom Material der Bauteile bzw. seiner Geometrie abhängt.
2. In einem Stromkreis betrachten wir die Drähte als widerstandslos. Außerdem sollen sie weder Kapazität noch Induktivität haben. Alle drei Annahmen sind nur Näherungen.
3. Ebenso ist es eine Näherung, dass ein Widerstand keine Kapazität oder Induktivität hat, dass ein Kondensator keinen Widerstand oder Induktivität hat und dass eine Spule keinen Widerstand und keine Kapazität hat.
4. Im Vergleich zu den Verhältnissen, die wir vor der Betrachtung von Spulen (Induktivitäten) hatten, müssen wir, wie bereits in Kap. 9.2 im Detail diskutiert, berücksichtigen, dass für $L \neq 0$ *kein* Potential existiert. In Folge dessen ist es ratsam $\oint \vec{E} d\vec{r}$ zunächst mal zu Fuß zu berechnen. Dies erfordert die Einführung eines Koordinatensystems.

10.1 Vorzeichen und Konventionen

1. Wir sind bisher meist so vorgegangen, dass wir $\oint \vec{E} d\vec{r}$ in Richtung des Stromes I integriert haben. Das Problem ist nur – besonders wenn Induktion im Spiel ist – dass man die Stromrichtung evtl. gar nicht kennt. Tatsächlich ist uns das bei der Diskussion der Lenzschen Regel (Kap. 9.5) widerfahren. Damals haben wir einfach die Stromrichtung geraten. “Natürlich” hat sich herausgestellt, dass wir gerade falsch geraten hatten. Das hat sich darin geäußert, dass ein negativer Strom aus der Rechnung heraus kam.
2. Offensichtlich (und notwendigerweise!) spielt die Integrationsrichtung keine wirklich entscheidende Rolle. Wichtig ist nur, dass man die einmal gewählte Richtung beibehält. Das ist genau wie bei der Wahl eines Koordinatensystems; auch da kann man wählen was man will. Man muss nur aufpassen, wenn man plötzlich unglücklich mit seiner Wahl wird und das Koordinatensystem wechseln will.

3. Um klare Verhältnisse zu schaffen, vereinbaren wir, in jedem Stromkreis (bei Netzwerken jede Masche) $\oint \vec{E} d\vec{r}$ entgegen des Uhrzeigersinns zu integrieren.

4. Zur Illustration diskutieren wir den nebenstehenden RLC -Kreis mit Batterie. Die roten Pfeile neben den Bauteilen geben die Richtung des elektrischen Feldes in den Bauteilen an. Außer den Bauteilen R , L , C und der Batterie besteht der Schaltkreis nur aus Drähten. In denen ist das E -Feld = 0 – das macht $\oint \vec{E} d\vec{r}$ doch sehr übersichtlich.



- Batterie: Der Job einer Batterie ist es, Ladungen zu trennen, positive Ladungen am Plus-Pol anzuhäufen, negative am Minus-Pol. Entsprechend herrscht in einer Batterie ein elektrisches Feld: es zeigt wie immer von den positiven zu den negativen Ladungen. Gegen dieses Feld muss die Chemie in der Batterie Arbeit verrichten, um positive Ladungen vom Minus- zum Plus-Pol zu verschieben.
- Im Widerstand zeigt das Feld in Richtung Stromfluss, wie schon in Kap. 4 diskutiert. Ohne Feld in Stromrichtung würden die Ladungen von den dissipativen Kräften im Gitter gestoppt. Man sieht die Feldrichtung auch an Gl. (4-14) $\vec{E} = \rho \vec{j}$.
- Im Kondensator ist die Feldrichtung offensichtlich, sie geht von der positiv zur negativ geladenen Platte.
- In der Spule ist die Sache nicht so eindeutig. Darüber wird im Folgenden zu reden sein.

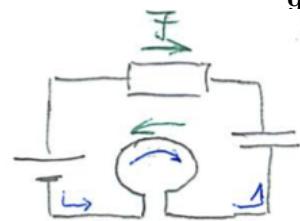
5. Die Konvention ist – wie gesagt – entgegen des Uhrzeigersinns zu integrieren. Für die rhs des Faradayschen Gesetzes

$$\oint \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} \quad 1$$

ergibt sich aus dieser Konvention die Richtung von $d\vec{A}$ bzw. \vec{A} .

6. Analysieren wir das an nebenstehendem Stromkreis:

- Wir integrieren gegen den Uhrzeigersinn (blau) $\Rightarrow d\vec{A}$ für die Spule geht in die Papierebene hinein.
- Der Stromfluss in der Spule (grün) hat ein Magnetfeld zur Folge, das aus der Papierebene heraus zeigt. Also haben \vec{B} und $d\vec{A}$ entgegengesetztes Vorzeichen \Rightarrow



$$\Phi_{\text{mag}} = \iint \vec{B} d\vec{A} = - \left| \iint \vec{B} d\vec{A} \right| < 0. \quad 2$$

7. In der Definition von L gibt es eine Zweideutigkeit: Während L definitionsgemäß positiv sein soll, soll auch gelten $\Phi_{\text{mag}} = L \cdot I$. Allerdings hängt das Vorzeichen von Φ_{mag} von Stromrichtung und Integrationsweg ab. Besser würde man also statt (9-22) entweder schreiben

$$|\Phi_{\text{mag}}| = L I \quad \text{oder} \quad \Phi_{\text{mag}} = \pm L I. \quad 3$$

8. Für den unter -6 betrachteten Fall gilt offenbar

$$\Phi_{\text{mag}} = -L \cdot I.$$

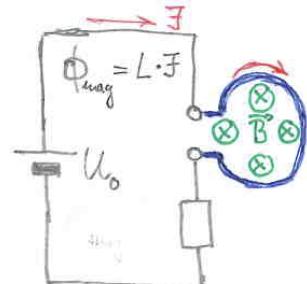
Nachdem auf der rechten Seite des Faradayschen Gesetzes $\dot{\Phi}_{\text{mag}}$ steht, erhalten wir für hier

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -L \frac{dI}{dt}. \quad 4$$

Das ist genau das, was man nach der Lenzschen Regel erwarten sollte.

10.2 Berechnung von Stromkreisen mit Induktivitäten

1. Betrachten wir nun den skizzierten Schaltkreis. Wir wollen ihn so verstehen, dass es Induktion nur in der Schleife/Spule gibt. Experimentell können wir das auf zwei Wegen approximieren: Entweder machen wir die Fläche des eigentlichen Schaltkreises gegenüber der Fläche der Schleife klein und/oder wir sorgen durch viele Windungen und evtl. sogar einen Ferritkern dafür, dass es nur in der Schleife ein nennenswertes Magnetfeld gibt.



2. Es bleibt jedenfalls bei dem, was wir in (22) gesagt hatten: $|\Phi_{\text{mag}}| = L \cdot I$, wobei L nur von der Geometrie abhängt, also für eine Schaltung ohne bewegliche Teile zeitlich konstant ist.

Andererseits gilt nach Faraday (22) ist so gut wie geschlossen)

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} = \left(-\frac{d}{dt} \iint \vec{B} d\vec{A} \right) \stackrel{(9-22) \text{ s.u.}}{=} \pm L \dot{I} \quad 1$$

3. $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ ist aber definitionsgemäß gerade die an den Anschlusspolen der Spule herrschende Spannung, nennen wir sie U_{ind} .⁸ Der Betrag von U_{ind} ist klar – das ist $L \dot{I}$. Das Vorzeichen erhält man aus dem Oberflächenintegral in (1). Demnach liegt an den Polen der Spule die Spannung $U_{\text{ind}} = +L \dot{I}$ an.

4. Für den ganzen Stromkreis können wir dasselbe wie (??) schreiben:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \Phi_{\text{mag}} \quad 2$$

Es gilt natürlich:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = \oint_{\text{Spule}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} + \int_{\text{rest}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$$

5. Nun waren wir aber so geschickt, Φ_{mag} ganz auf die Schleife zu beschränken. Der erste Term auf der rhs ist deshalb Teil eines herkömmlicher Stromkreis und kann wie gewohnt ausgerechnet werden. Beachten müssen wir aber schon, dass wir für beide Terme die gleiche Integrationsrichtung wählen, d.h. wir müssen in beiden Integralen z.B. gegen den Uhrzeigersinn integrieren.

⁸Genau wie z.B. bei einer analogen Betrachtung eines Widerstandes ist es hier nicht wichtig, dass die Integrationskurve geschlossen ist.

10.3 Der *RL-Kreis*

- Im *RL-Kreis* wird ein veränderlicher Strom einen veränderlichen Fluss von \vec{B} in der Spule produzieren. Das induziert eine EMK, die wir – wie inzwischen vielfach betont – nicht ignorieren dürfen.
- $\vec{\mathcal{E}}$ ist hier also explizit *nicht* konservativ, was durch

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\dot{\Phi}_{\text{mag}} \neq 0$$

zum Ausdruck kommt – wir wiederholen uns. Es gibt also keine Potentialfunktion U . Vielmehr müssen wir nun, auch das hatten wir schon gesagt, $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ Bauelement für Bauelement zu Fuß berechnen.

- Das klingt schlimmer als es ist. Ausgeschrieben ist $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ nämlich

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = \int_{\text{Batt.}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} + \int_{\text{Spule}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} + \int_{\text{Widerst.}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r},$$

10

und darin erkennen wir ein paar gute Bekannte.

- Integriere über die Batterie: Wir erinnern an die Diskussion unter 10.1-4: Die Batterie besorgt eine Ladungstrennung und damit ein elektrisches Feld Richtung \oplus - zum \ominus -Pol. An einer entgegen des Uhrzeigersinns geführten Probeladung q wird also Arbeit verrichtet. Wenn wir durch q dividieren, nennen wir das die Spannung, im Fall einer Batterie auch EMK:

$$\int_{\oplus}^{\ominus} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = U_0$$

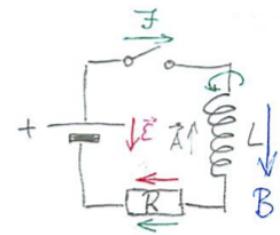
11

- Integriere über den Widerstand: Das elektrische Feld im Widerstand zeigt in Stromrichtung ($\vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{j}$) und damit dem Integrationsweg entgegen:

$$\int_R \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = \int_R -\rho j dx = -I \cdot R.$$

12

- Alle anderen Teile des Stromkreises liefern *keinen* Beitrag zu $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$: Die Drähte, auch die der Spule, haben Widerstand Null \implies Das $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld in ihnen ist Null.



7. Sehen wir uns die rhs des Induktionsgesetzes $-\dot{\Phi}_{\text{mag}}$ – an. Der Figur oben entnehmen wir, dass \vec{B} nach unten zeigt, die Querschnittsfläche der Spule aber aufgrund des Integrationsweges entgegen dem Uhrzeigersinn nach oben zeigt
 $\Rightarrow \Phi_{\text{mag}} < 0 \Rightarrow$

$$\Phi_{\text{mag}} = -L \cdot I \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}_{\text{mag}} = -L \cdot \dot{I}. \quad 13$$

8. Mit Hilfe der Gleichungen (11)-(13) wir aus dem Faradayschen Induktionsgesetz also

$$U_0 - IR = +L \dot{I}. \quad 14$$

9. In einigen – wenn nicht den meisten – Büchern wird (u.a.) der RL -Kreis einfach mit der Maschenregel “erklärt”, wobei für die Spule der “Spannungsabfall” $L \dot{I}$ eingesetzt wird. Das liefert zwar das richtige Ergebnis, physikalisch ist die Erklärung aber falsch, jedenfalls wenn man die Maschenregel als Ausdruck der Existenz eines Potentials begreift.

10. Lösung von (14): Zuerst die homogene Gleichung

$$L \dot{I} + IR = 0.$$

Ansatz $I = \alpha \exp(-\beta t)$

$$\Rightarrow L \alpha (-\beta) \exp(-\beta t) = \alpha \exp(-\beta t) \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{R}{L}$$

11. Spezielle Lösung von (14): $I = U_0/R$ (Beweis durch Einsetzen).

$$\begin{aligned} \Rightarrow I(t) &= \frac{U_0}{R} + \alpha \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \\ \alpha &= -\frac{U_0}{R} \quad \text{Beweis durch Randbed. } I(t=0) = 0, \text{ schließe Schalter bei } t = 0 \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{U_0}{R} + \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = = \frac{U_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] \end{aligned} \quad 15$$

12. Anwendungen:

- Zünden von Leuchtstofflampen
 - Zündkerzen
- Exp. & Keynote-Folien

10.4 Wechselströme und -spannungen

- Einen periodisch veränderlichen Strom kann man stets als Superposition sinusförmiger Ströme betrachten (Fourier).

$$\tilde{I}(t) = I e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad 20$$

“c.c.” bedeutet komplex konjugiert. Ausgeschrieben heißt (20) also: $\tilde{I}(t) = I e^{i\omega t} + I^* e^{-i\omega t}$. Das c.c. sorgt also dafür, daß $\tilde{I}(t) \in \mathbb{R}$. Demgegenüber ist $I \in \mathbb{C}$, so dass I eine Phase hat. Genauso verfahren wir mit der Spannung:

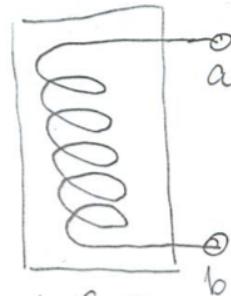
$$\tilde{U}(t) = U e^{i\omega t} + \text{c.c.}, \quad U \in \mathbb{C}. \quad 21$$

- Der Realteil von U bzw. I ist die Amplitude der Wechselspannung bzw. des Wechselstromes.
- Da wir nur lineare Schaltungselemente betrachten (also Bauteile, deren Widerstand, Kapazität oder Induktivität *nicht* von elektrischen Größen abhängt), können Ströme und Spannungen wie komplexe Zahlen addiert werden (Superpositionsprinzip).
- Insbesondere gelten die Kirchhoffschen Regeln, wobei die Schaltungselemente – wie wir sehen werden – nicht auf ohmsche Widerstände beschränkt bleiben, sondern zu (komplexen) “Impedanzen” werden.
- Die effektive Stromstärke I_{eff} eines Wechselstromes ist definiert als derjenige *Gleichstrom*, der am gleichen ohmschen Widerstand die gleiche Wärmemenge erzeugen würde. Wg. $P = R \cdot I^2$ ist also

$$\begin{aligned} R I_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{P}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R \tilde{I}^2(t) dt = \frac{R}{T} \int_0^T I^2 \sin^2(\omega t) dt = \\ &= \frac{R I^2}{T} \underbrace{\int_0^T \sin^2(\omega t) dt}_{= T/2} = \frac{1}{2} R I^2 \\ \implies I_{\text{eff}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} |I| \approx 0.707 |I| \end{aligned} \quad 22$$

10.5 Impedanz einer Induktivität (Spule)

1. Wir nehmen an, dass das Magnetfeld der Induktivität nicht mit anderen Teilen des Stromkreises wechselwirkt. Das kann durch ringförmige Wicklungskerne, Eisenkerne oder Abschirmungen erreicht werden. Jedenfalls sei das Magnetfeld außerhalb der skizzierten Begrenzung und insbesondere im Bereich der Anschlüsse a und b vernachlässigbar.
 2. Außerdem nehmen wir an, dass eine ideale Induktivitätse Widerstand ist Null und es gibt keine elektrischen Verluste, während das Feld aufgebaut wird ($\Rightarrow C = 0$).



3. Wir erinnern uns an die Definition der (Selbst-)induktivität L :

 - Der Strom durch die Spule hat ein Magnetfeld proportional zu I in der Spule zur Folge; entsprechend kann der magnetische Fluss geschrieben werden als $\Phi_{\text{mag}} = L \cdot I$.
 - Eine Stromänderung \dot{I} führt folglich zu einer Änderung des magnetischen Flusses $L \cdot \dot{I}$. Mit dem Faradayschen Gesetz $\oint \vec{E} d\vec{r} = \dot{\Phi}_{\text{mag}}$ erhält man so

25

4. Betrachte nun folgenden geschlossenen Weg:

- von a nach b durch den Spulendraht und dann
 - von b nach a durch die Luft zurück;

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \, d\vec{s} = \int_a^b \vec{\mathcal{E}} \, d\vec{s} + \int_b^a \vec{\mathcal{E}} \, d\vec{s}$$

in Spule durch Luft

5. Der erste Term ist Null, weil die Spule aus einem idealen Leiter besteht ($\Rightarrow \vec{\mathcal{E}} \text{ im Draht} = 0$). Nachdem wir vorausgesetzt hatten, dass es außerhalb der Begrenzung keine Magnetfelder gibt (und damit auch keine Änderung des magnetischen Flusses) ist nach dem Faraday-Gesetz außerhalb der Begrenzung $\int \vec{\mathcal{E}} d\vec{s}$ unabhängig vom Weg \Rightarrow wir können an den Anschlüssen a und b ein Potential definieren.

6. Die Differenz dieses Potentials an den Punkten a und b bezeichnet man wie gehabt als Spannung \tilde{U}

$$\tilde{U} = - \int_b^a \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} = - \oint_{\text{weil Integral über Spule = 0}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} \quad 27$$

7. Andererseits hatten wir:

$$\text{EMK} = -L \frac{d\tilde{I}}{dt} \xrightarrow[\text{(27)}]{\text{Faraday}} \tilde{U} = L \frac{d\tilde{I}}{dt} \quad 28$$

Bem.: Wir benutzen die Übereinkunft, dass EMK und der Strom positiv sind, wenn sie dieselbe Richtung haben (s. Feynmann S. 325).

8. Für einen sinusförmigen Strom $\tilde{I} = I e^{i\omega t}$ gilt

$$\frac{d\tilde{I}}{dt} = i\omega \tilde{I} \xrightarrow[\text{(28)}]{} \tilde{U} = i\omega L \tilde{I} \quad 29$$

9. Diese Beschreibung einer idealen Induktivität ist ein erstes Beispiel der Charakterisierung jedweder idealer ("punktformiger") Elemente: Ihre Eigenschaften werden vollständig durch die Ströme und Spannungen an ihren Anschlüssen beschrieben. All die komplizierten Feldverteilungen etc. im Inneren des Bauteils werden mit einer Proportionalitätskonstante (in (29) ist das $i\omega L$) zusammengefasst.

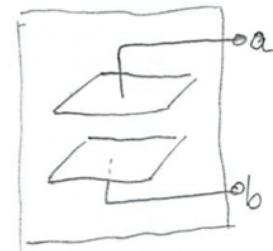
10. Diese Proportionalitätskonstante bezeichnet man als Impedanz. Sie ist für gewöhnlich komplex. Im Falle der Spule gilt

$Z_L = i\omega L.$

30

10.6 Impedanz eines Kondensators

1. Den Kondensator wollen wir ebenfalls als ideales Schaltelement betrachten. Das bedeutet hier insbesondere, dass die elektrischen Felder im Inneren des Kondensators nicht nach außen dringen. Außerdem seien die Drähte des Kondensators perfekte Leiter sowie das Dielektrikum zwischen den Platten ein perfekter Isolator. Und schließlich soll es im Kondensator kein Magnetfeld geben.



2. Wir betrachten nun das geschlossene Linienintegral

- von a über den Draht zur oberen Platte, dann
- der oberen Platte zur unteren Platte, dann
- von der unteren Platte zu b und schließlich
- von b durch die Luft zu a

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} = \int_{\text{Draht}}^{\text{obere Platte}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} + \int_{\text{zw. Platten}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} + \int_{\text{untere Platte}}^b \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} + \int_a^b \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} \quad 30$$

($\vec{\mathcal{E}} = 0$ im Draht und $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} = 0$ da es kein Magnetfeld gibt.)

3. Nachdem wir angenommen hatten, dass die Felder im Kondensator nicht nach außen dringen und nachdem wir wissen, dass elektrische Feldlinien an positiven Ladungen beginnen und an negativen enden, muss es im Kondensator genauso viele positive wie negative Ladungen geben. Die Gesamtladung auf dem Kondensator ist also Null und auf den Platten befinden sich entgegengesetzt gleiche Ladungen $+Q$ und $-Q$.

4. Wir wissen aus Kapitel 3, dass die Potentialdifferenz $\int \vec{\mathcal{E}} d\vec{s} = 0$ zwischen den Platten gleich Q/C ist. Aus (30) folgt dann, dass die Potentialdifferenz $\tilde{U} = - \int_a^b \vec{\mathcal{E}} d\vec{s}$ zwischen den Anschlüssen gegeben ist durch

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{Q}}{C}. \quad 31$$

5. Der Strom, der durch den Anschluss a in den Kondensator fließt, ist gleich $\frac{d\tilde{Q}}{dt}$, also die Ladungsänderung auf der oberen Platte. Nun differenzieren wir (31):

$$\frac{d\tilde{U}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d\tilde{Q}}{dt} = \frac{1}{C} \tilde{I}. \quad 32$$

6. Nachdem $\tilde{U} = U e^{i\omega t}$ ist, zumindest nach Fourier immer so zerlegt werden kann, ist $\frac{d\tilde{U}}{dt} = i\omega \tilde{U}$. Außerdem war $\tilde{I} = I e^{i\omega t}$. Eingesetzt in (32) folgt

$$i\omega \tilde{U} = \frac{\tilde{I}}{C} \implies \tilde{U} = \frac{\tilde{I}}{i\omega C}. \quad 33$$

\implies die Impedanz eines Kondensators ist

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{i\omega C}} \quad 34$$

10.7 Impedanz eines ohmschen Widerstandes

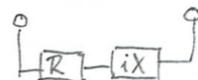
1. Die Impedanz eines Widerstandes ist trivialerweise

$$\boxed{Z_L = R}, \quad 35$$

sie ist also reell.

10.8 Kirchhoffsche Regeln und Ersatzschaltungen

1. Die Kirchhoffschen Regeln gelten analog für komplexe Widerstände (=Impedanzen). Für alle Schaltelemente außer Induktivitäten war das ohnehin klar (Kontinuitätsgleichung bzw. $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = 0$), für Induktivitäten haben wir es in Kap. 10.4 etabliert.
2. Eine unmittelbare Folge ist, dass jedes Netzwerk passiver Schaltelemente mit zwei Anschlüssen ("Zweipol") äquivalent zu einer gewissen effektiven Impedanz Z_{eff} ist, die sich mit den Kirchhoffschen Regeln berechnen lässt.
3. Ein beliebiger Zweipol, der z.B. an einem Generator hängt, kann also durch eine aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator bestehenden Impedanz Z_{eff} ersetzt werden (Ersatzschaltung), ohne dass sich bei den Strömen oder Spannungen außerhalb des Zweipols etwas ändern würde.



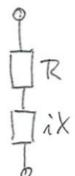
10.9 Blind- und Wirkleistung

- Um einen Kondensator auf eine Spannung U aufzuladen, benötigt man eine Energie $E = \frac{1}{2}CU^2$. Diese Energie wird beim Entladen vollständig an die Schaltung zurückgegeben.
- Genauso muss man einer Induktivität eine Energie $E = \frac{1}{2}LI^2$ zuführen, um den Strom I auzubauen. Fällt der Strom wieder auf Null, wird E vollständig an die Schaltung zurückgegeben.
- Im ohmschen Widerstand wird dagegen Energie mit einer Rate $\tilde{P} = \frac{d\tilde{E}}{dt} = R \cdot \tilde{I}^2$ in Wärme umgewandelt. Im Abschnitt 10.4 haben wir gesehen, dass der Mittelwert (=Durchschnitt über eine Periodendauer) $\langle \tilde{P} \rangle$ gleich $\frac{1}{2}$ der Amplitude von \tilde{P} ist.
- Im Gegensatz zu einem ohmschen Widerstand R sind also ideale Kondensatoren C und Induktivitäten L nicht-dissipative Schaltungselemente.
- Wir hatten gesehen (s. Generator in Kap. 9.7), dass eine EMK eine Energiequelle ist \implies Wenn der Strom dieselbe Richtung wie die EMK hat, gibt die EMK Energie ab und umgekehrt. Die Rate der Energieabgabe (=Leistung) ist

$$\tilde{P} = \frac{d\tilde{E}}{dt} = \widetilde{\text{EMK}} \cdot \tilde{I}.$$

40

- Nun wird die EMK mit einem Zweipol verbunden und wir wollen wissen, welche Leistung in ihm dissipiert wird. Dazu ersetzen wir den Zweipol durch die effektive Impedanz $Z_{\text{eff}} = R + iX$, betrachten also das nebenstehende Ersatzschaltbild.
- Aus dem Konzept der Ersatzschaltungen (s. Kap. 10.7) folgt, dass jede Impedanz ein ohmscher Widerstand ist, der mit einer rein imaginären Impedanz (=Blindwiderstand oder Reaktanz) in Serie geschaltet ist.
- Die Impedanz von Schaltungen, die nur Induktivitäten L und Kapazitäten C enthalten, ist rein imaginär. Nachdem weder in (idealen) Induktivitäten noch in Kondensatoren Energie dissipiert wird (s. -1 & -2), hat ein reiner Blindwiderstand keinen Energieverlust. Das muss die nachfolgende Rechnung reproduzieren.



9. Für den allgemeinen Fall betrachten wir eine EMK, die mit der Impedanz $Z = R + iX$ verbunden ist. Der entsprechende Strom genügt dem Zusammenhang

$$\widetilde{\text{EMK}} =: \tilde{U} = \tilde{I} \cdot (R + iX). \quad 41$$

10. Zur Berechnung der Leistung, die die EMK abgibt, müssen wir den Mittelwert des Produktes $\widetilde{\text{EMK}} \cdot \tilde{I}$ berechnen. Nachdem wir hier komplexe Größen multiplizieren (statt addieren), sind nichtlineare Beziehungen zu erwarten (tatsächlich ist ja $P \propto I^2$). Daher ist es zweckmäßig, vorsichtshalber zur reellen Darstellung von \tilde{U} und \tilde{I} zurückzukehren.

11. Sei also der Zeitnullpunkt so gewählt, dass

$$\tilde{I} = I_0 \cos \omega t = I_0 \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) \quad (I_0 \in \mathbb{R}) \quad 42$$

Dann ist \tilde{U} der Realteil von $I_0 e^{i\omega t} \cdot (R - iX)$, also

$$\tilde{U} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t. \quad 43$$

12. Die beiden Terme auf der rhs von (43) stellen die Spannungsabfälle an R und X dar. Der Spannungsabfall am ohmschen Widerstand ist in Phase mit dem Strom, der am Blindwiderstand um 90° phasenverschoben.

13. Die mittlere Rate des Energieverlustes aus dem Generator (= mittlere Leistung des Generators) ist

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{U} \tilde{I} dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt \quad 44$$

14. Den ersten Term kennen wir aus 10.4-5: bei der Mittelung von \cos^2 kommt $\frac{1}{2}$ heraus. Der zweite Term ist wie erwartet (s. -8) im Mittel gleich 0 (Blindleistung).

10.10 Der RLC -Kreis – Schwingkreise

1. (s. Welsch)

11 Maxwellsche Gleichungen und elektromagnetische Wellen

11.1 Ein Problem mit dem Ampèreschen Gesetz

- Betrachte den nebenstehenden Schaltkreis: Wenn der Schalter geschlossen wird, fließt – wie in Kap. 3 gezeigt – folgender Strom:

$$I(t) = \frac{U}{R} \exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

(Die Selbstinduktion des Stromkreises haben wir vernachlässigt – wir machen einfach die Stromkreis hinreichend groß.)

- Wir wollen das Ampèresche Gesetz kurz vor dem Kondensator auf die Probe stellen. Das Ampèresche Gesetz sagt, dass der Strom (1) ein Magnetfeld nach sich ziehen muss:

$$\oint_{C} \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{eingeschl}} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \, d\vec{A}$$

Dabei ist A eine beliebige Fläche mit dem Rand C . Die wohl nachliegenste Wahl ist in Fig. 2 gezeigt: Man stelle sich C als den Blasring eines Seifenblasenspiels vor und A als die Seifenlösungmembran bevor in den Blasring gepustet wird. Wenn – was nicht nötig ist aber was wir mal annehmen wollen – C in einer Ebene liegt, dann ist diese Fläche A_1 auch eben.

- (2) gilt aber nicht nur für A_1 , sondern für jede Fläche, die den Rand C , unseren Blasring, hat. Wir können also mal leicht gegen die anfangs ebene Seifenlösungmembran blasen und erhalten so eine leicht gewölbte Fläche A_2 , s. Fig. 3.

Ganz offensichtlich hat A_2 den selben Rand C wie A_1 . Und tatsächlich erscheint es uns ganz natürlich zu sein, dass $\iint_{A_1} \vec{j} \, d\vec{A} = \iint_{A_2} \vec{j} \, d\vec{A}$ – in beiden Fällen geht der stromführende Draht durch die Integrationsfläche. Also alles in Butter?

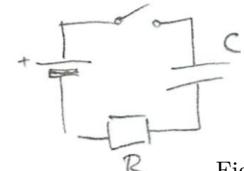


Fig. 1
1

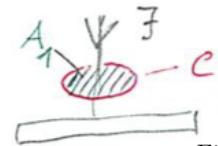


Fig. 2

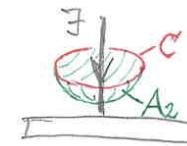


Fig. 3

4. Blasen wir nun deutlich stärker gegen die Membran; so, dass sich eine (nicht geschlossene!) Blase ausbildet wie in Fig. 4 gezeigt. Die Blase soll so groß und so geformt sein, dass sie die obere Platte des Kondensators umschließt. Der Draht durchdringt die Membran dann gar nicht mehr.

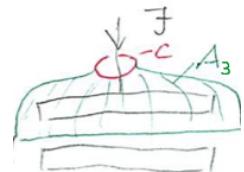


Fig. 4

Damit die nachfolgende Rechnung einfach bleibt, sei die Seifenblasenmembran A_3 zwischen den Kondensatorplatten parallel zu den Platten. A_3 besteht also aus einer ebenen Fläche und einem domförmigen Teil.

5. Ganz gewiss hat aber auch A_3 denselben Rand C wie A_2 oder A_1 . An der *lhs* des Ampèreschen Gesetzes ändert sich deshalb von Fig. 2 über Fig. 3 zu Fig. 4 nichts: $\oint_C \vec{B} d\vec{r}$ bleibt gleich.

Wir haben schon bemerkt, dass der Draht A_3 gar nicht mehr durchdringt. Also ist

$$\iint_{A_3} \vec{j} d\vec{A} = 0 \quad \text{während} \quad \iint_{A_1} \vec{j} d\vec{A} = I_{\text{eingeschl}} \neq 0. \quad 3$$

Offensichtlich ist also das Ampèresche Gesetz inkonsistent!

6. Noch ein Problem:

Hatten wir nicht immer gesagt $\iint \vec{j} d\vec{A} = 0$? – Für jede geschlossene Fläche!? Ja, das hatten wir gesagt, s. (4-13)! Die Gleichung trägt den Namen Kontinuitätsgleichung und ist die mathematische Art, das Prinzip der Ladungserhaltung für den Fall $dq/dt = 0$ auszudrücken.

Nun ist aber $A_1 + A_3$ eine geschlossene Fläche. Es gilt aber

$$\iint_{A_1} \vec{j} d\vec{A} + \iint_{A_3} \vec{j} d\vec{A} = \iint_{A_1+A_3} \vec{j} d\vec{A} \neq 0. \quad 4$$

7. (4) ist natürlich ein echtes Problem: Die Erhaltungssätze sind uns in der Physik heilig!

11.2 Maxwells Lösung: Der Verschiebungsstrom

- Wir betrachten das $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld im Plattenkondensator unseres Stromkreises. Vor Wochen hatten wir aus dem Gaußschen Gesetz berechnet:

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Die Richtung von $\vec{\mathcal{E}}$ ist in diesem Fall auch klar: von oben nach unten, von den positiven zu den negativen Ladungen.

- Nun betrachten wir den elektrischen Fluss Φ_{el} durch A_3 . A_3 besteht aus der plattenförmigen Fläche zwischen den Kondensatorplatten und dem domförmigen Teil. Also kann man Φ_{el} schreiben als

$$\Phi_{el} = \iint_{A_3} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \iint_{\text{Platte}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} + \iint_{\text{Dom}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}.$$

- Da bei einem Kondensator nur zwischen den Platten ein $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld existiert, ist $\iint_{\text{Dom}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = 0$.

$$\Rightarrow \Phi_{el} = \iint_{\text{Platte}} \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \stackrel{(5)}{=} \Phi_{el} = \iint_{\text{Platte}} \frac{Q}{\varepsilon_0 A} dA = +\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Das Vorzeichen von $d\vec{A}$ und damit schließlich Φ_{el} ergibt sich aus der Stromrichtung.

- Bem.: (6) hat nichts mit dem Gaußschen Gesetz zu tun. A_3 ist keine geschlossene Fläche.
- Der Strom I muss gleich der Änderung der Ladung Q auf den Platten sein – wo will der Strom sonst hin?

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- Jetzt differenzieren wir (6) nach der Zeit und verwenden (7):

$$\frac{d}{dt} \Phi_{el} = \frac{d}{dt} \frac{Q}{\varepsilon_0} \stackrel{(7)}{=} \frac{I}{\varepsilon_0}$$

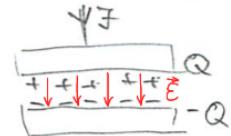


Fig. 5

5

6

7

8

Wenn wir (8) mit $\varepsilon_0 \mu_0$ multiplizieren, ist das **dasselbe wie das, was uns bei (2) fehlt** für den Fall $A = A_3$.

7. Es fließt – wie gesagt – kein Strom durch die Fläche A_3 . Es gibt aber eine Größe – nämlich $\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{el}$ durch diese Fläche –, die genauso groß ist wie der Strom. Wenn wir diese Größe einen Strom nennen – nach Maxwell den “Verschiebungsstrom” I_D (D wie displacement) –, und diesen Strom im Ampèreschen Gesetz berücksichtigen, ist alles wieder in Butter:

$$\oint_{\textcolor{red}{C}} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 (I + I_D) = \mu_0 \iint_{A(\textcolor{red}{C})} (\vec{j} + \vec{j}_D) d\vec{A} =$$

$$\stackrel{(8)}{=} \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_{el}}{dt}$$

9

8. Und was ist mit dem anderen Problem, mit 11.1-6? Wir hatten ein Problem mit $\oint \vec{j} d\vec{A} = 0$, eine Beziehung, die für geschlossene Oberflächen immer stimmen sollte, und das bei den stationären Strömen bisher auch brav getan hat – nur jetzt plötzlich nicht mehr.

Unsere fromme Hoffnung ist, dass der Verschiebungsstrom vielleicht auch das richtig zaubert.

9. Also schreiben wir statt \vec{j} nun $\vec{j} + \vec{j}_D \implies$

$$\oint \vec{j} d\vec{A} + \oint \vec{j}_D d\vec{A} \stackrel{\text{fromme Hoffnung}}{=} 0$$

$$\implies \oint \vec{j} d\vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = 0$$

Hier wird (anders als bei -4) $\vec{\mathcal{E}}$ über eine geschlossene Fläche integriert \implies hier kann das Gaußsche Gesetz angewandt werden.

$$\implies \iint \vec{j} d\vec{A} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{Q_{eingeschl.}}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

$$\implies \iint \vec{j} d\vec{A} = - \frac{d}{dt} Q_{eingeschl.}$$

Das macht doch Sinn!! Das ist die allgemeine Kontinuitätsgleichung (4-11).

11.3 Die Maxwellschen Gleichungen

Mit Maxwells Korrektur des Ampèreschen Gesetzes haben die fundamentalen Gleichungen der klassischen Elektrodynamik ihren Abschluss gefunden. Wie wir sehen werden, sind die Konsequenzen der eher aus mathematischen Gründen veranlassten Postulierung des Verschiebungsstrom derart durchgreifend, dass man Maxwell wohl in eine Reihe mit Newton und Einstein stellen muss.



James Clerk Maxwell
1831–1879

$$\text{Gauß: } \oint\!\!\!\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{eingeschl.}}}{\varepsilon_0} \quad 15a$$

$$\text{noname: } \oint\!\!\!\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad 15b$$

$$\text{Faraday: } \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} d\vec{A} \quad 15c$$

$$\text{Ampère & Maxwell: } \oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \iint \vec{j} d\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \quad 15d$$

11.4 Wellengleichung

1. Wir wollen die Maxwellschen Gleichungen für den Spezialfall des Vakuums (d.h. $Q_{\text{pol}} = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ und $\mu = \mu_0$) betrachten. Es soll auch keine freien Ladungen und keine Ströme geben \implies

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = 0 \quad \oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad 20a$$

$$\oint \vec{\mathcal{E}} dr = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} d\vec{A} \quad \oint \vec{B} dr = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} \quad 20b$$

2. Zudem wollen wir davon ausgehen, dass das $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld nur eine x -Komponente und das \vec{B} -Feld nur eine y -Komponente hat:

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad 21$$

Bemerkung:

- $\vec{\mathcal{E}}_x$ und B_y können durchaus z.B. von z abhängig sein.
- Die Felder (21) erfüllen $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = 0$ und $\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$, sind also zumindest insofern mit den Maxwell-Gleichungen kompatibel.

3. Im Folgenden werden wir mit Hilfe des Faradayschen- und des Ampèreschen Gesetzes je eine Gleichung herleiten, die dann zu Wellengleichungen für das $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Feld kombiniert werden. Zur Herleitung dieser Gleichungen wenden wir Faradaysches- und Ampèresches Gesetz auf frei gewählte Integrationswege an – schließlich gelten die beiden Gesetze ja für jeden geschlossenen Integrationsweg. Die Kunst besteht natürlich darin, für beide Gesetze den Integrationsweg so zu wählen, dass zwei Gleichungen entstehen, die zu einer Wellengleichung kombiniert werden können.

4. Berechne die lhs, d.h. $\oint \vec{\mathcal{E}} dr$, des Faraday-Gesetzes:

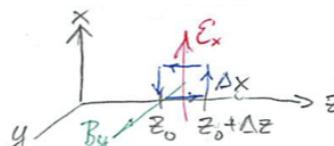


Fig. 7

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = \underbrace{\int_{(z_o, 0)}^{(z_o + \Delta z, 0)} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}}_{=0, \text{ da } \vec{\mathcal{E}} \perp d\vec{r}} + \underbrace{\int_{(z_o + \Delta z, 0)}^{(z_o + \Delta z, \Delta x)} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}}_{=\mathcal{E}_x(z_o + \Delta z) \Delta x} + \underbrace{\int_{(z_o + \Delta z, \Delta x)}^{(z_o, \Delta x)} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}}_{=0} + \underbrace{\int_{(z_o, \Delta x)}^{(z_o, 0)} \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}}_{=-\mathcal{E}_x(z_o) \Delta x} = \\
 = [\mathcal{E}_x(z_0 + \Delta z) - \mathcal{E}_x(z_0)] \Delta x \quad 22$$

5. Berechne die *rhs*, d.h. $-\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} dA$, des Faraday-Gesetzes:

$$\iint \vec{B} dA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s. Zeichnung}}}{=} B_y(z_0) \Delta z \Delta x \quad 23$$

6. Das Faraday-Gesetz zusammen, also (22) = (23):

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{E}_x(z_0 + \Delta z) - \mathcal{E}_x(z_0)] \Delta x &= -\frac{\partial}{\partial t} B_y(z_0) \Delta z \Delta x \\
 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}_x(z_0 + \Delta z) - \mathcal{E}_x(z_0)}{\Delta z} &= -\frac{\partial}{\partial t} B_y(z_0) \\
 \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_x(z_0, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} B_y(z_0, t) \quad 24
 \end{aligned}$$

7. Berechne die *lhs*, d.h. $\oint \vec{B} d\vec{r}$, des Ampère-Gesetzes:

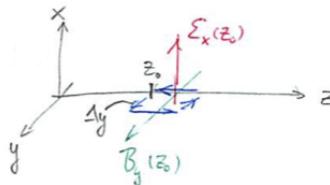


Fig. 8

$$\begin{aligned}
 \oint \vec{B} d\vec{r} &= \underbrace{\int_{(z_o, 0)}^{(z_o, \Delta y)} \vec{B} d\vec{r}}_{=B_y(z_o) \Delta y} + \underbrace{\int_{(z_o, \Delta y)}^{(z_o + \Delta z, \Delta y)} \vec{B} d\vec{r}}_{=0} + \underbrace{\int_{(z_o + \Delta z, \Delta y)}^{(z_o + \Delta z, 0)} \vec{B} d\vec{r}}_{=-B_y(z_o + \Delta z) \Delta y} + \underbrace{\int_{(z_o + \Delta z, 0)}^{(z_o, 0)} \vec{B} d\vec{r}}_{=0} = \\
 &= -[B_y(z_0 + \Delta z) - B_y(z_0)] \Delta y \quad 25
 \end{aligned}$$

8. Berechne die rhs , d.h. $-\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} d\vec{A}$, des Ampère-Gesetzes:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \uparrow \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_x(z_0) \Delta z \Delta y$$

 s. Zeichnung

26

9. Das Ampère-Gesetz zusammen, also (25) = (26):

$$-\left[B_y(z_0 + \Delta z) - B_y(z_0) \right] \cancel{\Delta y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_x(z_0) \Delta z \cancel{\Delta y}$$

$$\stackrel{\Delta z \rightarrow 0}{\Rightarrow} ; -\frac{\partial}{\partial z} B_y(z, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_x(z, t)$$



27

10. $\frac{\partial}{\partial z}(24) + \frac{\partial}{\partial t}(27) \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial z^2}}_{\text{orange wavy line}} - \cancel{\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t \partial z}} = -\cancel{\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z \partial t}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t^2}$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t^2}} \quad \text{Wellengleichung !} \quad 28$$

11. Nun umgekehrt: (24) nach der Zeit und (27) nach dem Ort ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial t} (24): \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t \partial z} = -\underbrace{\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (27): \quad -\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x(z, t)}{\partial t \partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2}} \quad \text{Wellengleichung !} \quad 29$$

11.5 Eine Lösung der Wellengleichung

1. Zur Lösung der partiellen DGL (28) bzw. (29) machen wir den folgenden Ansatz:

$$\mathcal{E}_x(z, t) = A \sin(kz - \omega t) \quad 30$$

Die zweiten Ableitungen nach z und t können sofort hingeschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} = -k^2 A \sin(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kz - \omega t)$$

2. Einsetzen in die Wellengleichung (28) \Rightarrow

$$-k^2 A \sin(kz - \omega t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 A \sin(kz - \omega t)$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad 31$$

3. Wellengeschwindigkeit:

Wir verlangen, dass \mathcal{E}_x an zwei Orten gleich sei, die Δz voneinander entfernt sind, und fragen, welche Zeit Δt verstreichen muss, damit das eintritt. $\Delta z / \Delta t$ ist dann offensichtlich die Wellengeschwindigkeit.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(z, t) &\stackrel{!}{=} \mathcal{E}_x(z + \Delta z, t + \Delta t) \\ \stackrel{(30)}{\Rightarrow} A \sin(k z - \omega t) &\stackrel{!}{=} A \sin(k z + k \Delta z - \omega t - \omega \Delta t) \end{aligned} \quad 32$$

(32) ist offensichtlich erfüllt, wenn $k \Delta z - \omega \Delta t = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} &=: v = \frac{\omega}{k} \\ \stackrel{(31)}{\Rightarrow} v &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned} \quad 33$$

4. (30) ist nicht die einzige Lösung der Wellengleichung. Vielmehr ist jede zweimal differenzierbare Funktion $f(kz - \omega t)$ eine Lösung.

11.6 Elektromagnetische Wellen sind transversal

1. (muss noch geschrieben werden ...)

11.7 Eine andere Wellengleichung: die Schrödinger-Gleichung

1. DeBroglie-Hypothese: Teilchen haben Welleneigenschaften, genauer: Ein Teilchen mit Impuls p hat eine Wellenlänge

$$p = \frac{h}{\lambda} =: \hbar k. \quad 50$$

2. Die entsprechende Wellengleichung ist die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \psi(x, t) \quad 51$$

3. Im einfachsten Fall – nämlich für ein konstantes Potential V – ist die Lösung ebenfalls eine ebene Welle

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} = A e^{i(px - Et)/\hbar} \quad 52$$

11.8 Potentiale und Wellengleichung *

1. Unser Ziel ist, aus der Ladungsverteilung ρ und^{9*} der Stromverteilung \vec{J} Potentiale zu gewinnen, aus denen sich dann das \vec{E} - und \vec{B} -Feld berechnen lässt und die sogar eine Wellengleichung liefern.

2. Wir beginnen mit dem Noronne-Gesetz $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Nachdem jedes (physicalische) Vektorfeld als Summe einer quellfreien und eines wirbelfreien Antils geschrieben werden kann, bedeutet $\text{div } \vec{B} = 0$, dass \vec{B} geschrieben werden kann als

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (40)$$

3. \vec{A} heißt das Vektorpotential. Seine Welle ist nicht eindeutig! Jedes andere Vektorfeld

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \quad (41)$$

tut es auch, weil $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \psi) = 0$

4. (40) in das Faraday-Gesetz ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$) einsetzen:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0 \quad (42)$$

5. Wenn rot (Jemandwas) = 0, bedeutet das immer, dass das Vektorfeld „Jemandwas“ ein Potential hat, also der Gradient irgendeiner skalaren Funktion – sagen wir $-\phi$ – ist \Rightarrow

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla} \phi \quad (43)$$

^{9*} nicht prüfungsrelevant!

6. (43) können wir nach $\vec{\Sigma}$ auflösen => (3.18)

$$\underline{\vec{\Sigma} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}} \quad (44)$$

Außerdem hatten wir (40):

$$\underline{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \quad (40)$$

Wir sehen also, dass wir 4 Potentialfunktionen brauchen, um die elektromagnetischen Felder $\vec{\Sigma}$ u. \vec{B} zu bestimmen.

7. Was passiert, wenn wir statt \vec{A} nun $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ verwenden? Am \vec{B} -Feld ändert sich nichts wie in -1 diskutiert. Aber das $\vec{\Sigma}$ -Feld ändert sich wenn wir nicht aufpassen und beim Ersetzen $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' + \vec{\nabla}\psi$ nicht gleichzeitig auch ϕ durch ein ϕ' ersetzen.
Aber wie?

8. Nun, wir verlangen, dass sich $\vec{\Sigma}$ bei dieses Ersatzes nicht verändern soll:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{\Sigma}} &= -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \\ \underline{\vec{\Sigma}'} &= -\vec{\nabla}\phi' - \partial_t \vec{A}' \stackrel{(44)}{=} -\vec{\nabla}\phi' - \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\partial_t \psi \end{aligned} \quad \left. \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla}\phi' - \cancel{\partial_t \vec{A}} - \vec{\nabla}\partial_t \psi$$

$$\Rightarrow \phi' = \phi - \partial_t \psi \quad (45)$$

(13.19)

9. Bis her haben wir nur die beiden Maxwell-Gleichungen verwendet, die keine Quellen habe, also das Normale und das Faraday-Gesetz. Jetzt wollen wir das Gauß- und das Ampère-Gesetz (selbstverst. inkl. Maxwell-Term) verwenden, um daraus \vec{A} und ϕ zu berechnen. Wenn das gelänge, wären wir einen großen Schritt weiter weil sich aus \vec{A} und ϕ mit (40) und (44) dann die Felder berechnen lassen.

10. Dazu setzen wir zuerst (44) in das Gauß-Gesetz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ein \Rightarrow

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow -\nabla^2\phi - \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (46)$$

(46) verknüpft ϕ und \vec{A} mit den Quellen des el. Feldes, den Ladungen. Viel gewonnen ist noch nicht.

11. Nun verwenden wir das Ampère-Gesetz $c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{\Sigma} = \vec{J}$ und ersetzen auch hier die Felder mit den entsprechenden Potentiälen, verwenden also (40) und (44)

$$c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \partial_t (-\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}) = \vec{J}$$

12. Mit der algebraischen Tautilität $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ wird daraus

$$-c^2 \nabla^2 \vec{A} + c^2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \partial_t \vec{\nabla}\phi + \partial_t^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (47)$$

13. (47) schaut nicht besonders verlockend aus. Wir können jedoch — s. Anhang — die Divergenz von \vec{A} frei wählen. Wir wählen die sog. Lorentz-Eichung (13.20)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t \phi \quad (48)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \partial_t \vec{\nabla} \phi = -c^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (49)$$

$$\Rightarrow \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi \quad (50)$$

14. (49) in (47) $\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{J}}{\epsilon_0 c^2}} \quad (51)$

(50) in (46). $\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (52)$

15. Diese beiden Gleichungen sind aus zwei Gründen "schön": Erstens sind sie entkoppelt (ϕ wird von \vec{J} bestimmt und \vec{A} von \vec{J}) und zweitens haben sie eine Symmetrie. Letzteres sehen wir, wenn wir z.B. (52) ausschreiben:

$$(52): \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (53)$$

16. Die Maxwell-Gleichungen führen auf dieselbe Gleichung für die 4 Funktionen ϕ , A_x , A_y und A_z

17. So ganz unbekannt ist uns eine Gleichung wie (53) nicht. Abgesehen vom inhomogenen Teil ist das eine Wellengleichung

Auflösung: Die Divergenz von \vec{A} kann willkürlich gewählt werden (B21)

1. Dazu stellen wir zunächst fest, dass \vec{A} in einen quellenfreien Anteil \vec{A}_1 und einen wirbelfreien Anteil \vec{A}_2 aufgespalten werden kann:

$$\vec{A} = \underbrace{\vec{A}_1}_{\text{quellenfrei}} + \underbrace{\vec{A}_2}_{\text{wirbelfrei}}, \text{ d.h. } \operatorname{div} \vec{A}_1 = 0 \text{ & } \operatorname{rot} \vec{A}_2 = 0$$

2. Die Divergenz von \vec{A} ist dann = der Divergenz von \vec{A}_2
 dann: $\operatorname{div} \vec{A} = \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}_1}_{=0} + \underbrace{\operatorname{div} \vec{A}_2}_{\text{wirbelfrei}}$

3. \vec{A}_2 ist beliebig, weil es

- das \vec{B} -Feld nicht beeinflusst, denn bilde ich

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{A}_1 + \operatorname{rot} \vec{A}_2 = \operatorname{rot} \vec{A}_1$$

wirbelfrei

- das $\vec{\Sigma}$ -Feld nicht beeinflusst, denn bilde ich

$$\vec{\Sigma} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A}_1 - \partial_t \vec{A}_2$$

\vec{A}_2 ist wirbelfrei \Rightarrow es existiert eine skalare Fkt. ψ so, dass $\vec{A}_2 = \vec{\nabla} \psi$.

Andererseits haben wir im -3 und (41) gesehen, dass wir tatsächlich jederzeit ein $\vec{\nabla} \psi$ zu \vec{A} addieren dürfen.

12 Erzeugung elektromagnetischer Wellen, Hertzsche Versuche

12.1 Hertzsche Versuche

1.

12.2 Ein einfacher Fall eines sich ausbreitenden Feldes *

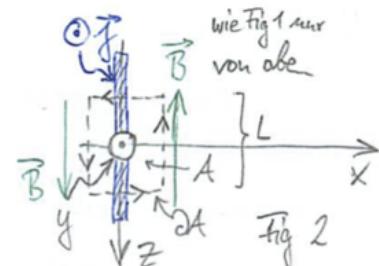
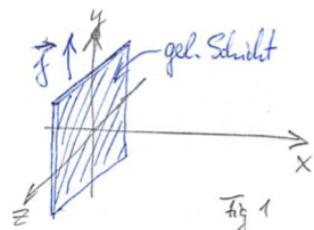
- Wir betrachten der Einfachheit halber ein eindimensionales Problem, genauer eine unendlich ausgedehnte geladene Schicht in der yz -Ebene. Zunächst befindet sich die Schicht in Ruhe.
- Nun wird sie plötzlich auf eine Geschwindigkeit \vec{u} nach oben, also in y -Richtung beschleunigt. Im weiteren Verlauf bleibt \vec{u} dann konstant. Die Bewegung der Schicht mit Geschwindigkeit \vec{u} hat eine Stromdichte \vec{j} zur Folge.¹¹
- Elektrostatische Felder interessieren uns im Moment gar nicht. Um sie von Anfang an aus dem Problem zu eliminieren, stellen wir uns vor, es gäbe in der yz -Ebene auch eine entgegengesetzt geladene Schicht, die in Ruhe bleibt. Dieses Szenario ist nicht ganz so artifiziell wie es vielleicht klingt. So könnte die bewegte Schicht von den Elektronen in einer hauchdünnen und, naja, unendlich ausgedehnten Blattgoldschicht dargestellt werden. Die ruhende, positiv geladene Schicht wären die Goldionen, die das Metallgitter bilden.

- Aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\oint_A \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_A \vec{j} dA$$

erhalten wir, dass \vec{B} für $x > 0$ in negative z -Richtung und für $x < 0$ in positive z -Richtung zeigen muss.

Da \vec{j} und \vec{A} parallel sind, ist nämlich $\iint_A \vec{j} dA > 0 \Rightarrow \vec{B}$ muss in Richtung des Integrationsweges zeigen und der zeigt (s. Fig. 2) für $x > 0$ eben nach oben ($-\vec{e}_z$) und für $x < 0$ nach unten ($+\vec{e}_z$).



* Q: Feynman-Lectures, Kap. 18-4

¹¹ \vec{j} scheint hier der Strom pro Längeneinheit in z -Richtung zu sein. Tatsächlich ist \vec{j} aber eine ordentliche Stromdichte (mit Einheit A/m^2). Das erkennt man, wenn man diesem Strom entgegenblickt: Er ist in z -Richtung ausgedehnt, in x -Richtung infinitesimal.

5. Quantitativ liefert das Ampèresche Gesetz

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= 2LB \\ \mu_0 \iint j d\vec{A} &= \mu_0 j L = \frac{jL}{\epsilon_0 c^2} \end{aligned} \right\} \implies \vec{B} = \frac{j}{2\epsilon_0 c^2}$$
1

6. Aufgrund der Geometrie (unendlich ausgedehnte Schicht) erwarten wir ein homogenes Magnetfeld, also

$$\vec{B} = -\frac{j}{2\epsilon_0 c^2} \vec{e}_z \quad \text{für } x > 0 \quad \& \quad \vec{B} = +\frac{j}{2\epsilon_0 c^2} \vec{e}_z \quad \text{für } x < 0$$

jeweils im gesamten Halbraum. – Im *gesamten* Halbraum? Ganz so kann es natürlich nicht sein, weil sich dazu das \vec{B} -Feld unendlich schnell hätte ausbreiten müssen als die Schicht in Bewegung gesetzt wurde.

7. Durch die Beschleunigung der Schicht entsteht vielmehr ein *veränderliches* Magnetfeld, das gemäß dem Faraday Gesetz ein elektrisches Feld erzeugt. In Folge dessen gibt es dann wieder ein $\partial\mathcal{E}/\partial t \neq 0$, das wiederum (zusammen mit dem Strom) zum Magnetfeld beiträgt.

⇒ Die Kopplung des Ampèreschen und des Faradayschen Gesetzes erfordert die gleichzeitige Suche nach einer Lösung für alle Felder.

8. Trotzdem muss natürlich die Symmetrie befriedigt werden. Die unendlich ausgedehnte ebene Geometrie verlangt ein $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Feld parallel oder senkrecht zur Schicht, wobei der Betrag von y und z unabhängig ist. Auch von x sind $\vec{\mathcal{E}}$ und \vec{B} nur insofern abhängig, als sie Null sind für $|x| > v \cdot \Delta t$, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder ist und Δt die Zeit, die seit dem In-Bewegung-Setzen der Schicht vergangen ist.

9. In -7 haben wir gesehen, dass es ein $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld geben muss. Fragt sich natürlich, ob seine Existenz einen anderen Betrag des \vec{B} -Feldes als (1) zur Folge haben wird. An obiger Betrachtung (s. -5) können wir nur durch Berücksichtigung des Maxwellschen Verschiebungsstromes was verbessern. Die entsprechende Größe ist der elektrische Fluss (oder vielmehr seine zeitliche Ableitung) durch die in Fig. 2 skizzierte Integrationsschleife / -fläche. Diese Schleife / Fläche können wir aber so nahe an die **Schicht** führen, dass der elektrische Fluss infinitesimal bleibt.
 ⇒ direkt an der Schicht und damit überall (außer natürlich $|x| > v \cdot \Delta t$) ist

und bleibt B durch (1) gegeben.

10. Wir können also festhalten, wie sich das \vec{B} -Feld verhält: Ein homogenes Feld wie in Fig. 3 skizziert, das jedoch jenseits der Ebene $|x| = v \cdot \Delta t$ gleich Null ist. $v \cdot \Delta t$ definiert also eine Wellenfront.

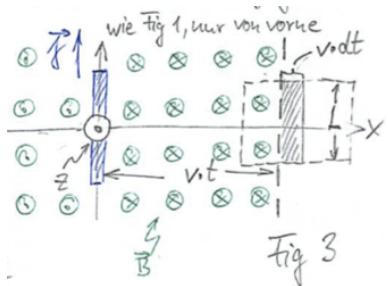


Fig 3

11. Zur Bestimmung des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes betrachten wir das in Fig. 3 skizzierte Integrationsgebiet: Nachdem die Front des \vec{B} -Feldes mit v voran schreitet, ändert sich im Zeitintervall dt der magnetische Fluss im Integrationsgebiet entsprechend dem schraffierte Bereich.
12. Die Rate, mit der sich der magnetische Fluss im Integrationsgebiet ändert, ist also leicht zu berechnen

$$d\Phi_m = \oint \vec{B}(t+dt) d\vec{A} - \oint \vec{B}(t) d\vec{A} = \oint \vec{B} d\vec{A} = -B v dt L$$

(Das Minuszeichen kommt daher, dass für $x > 0$ die Vektoren \vec{B} und $d\vec{A}$ in entgegengesetzte Richtung zeigen.)

$$\Rightarrow \dot{\Phi}_m \equiv \frac{d\Phi_m}{dt} = -B v L \quad 2$$

13. Das Faraday-Gesetz lautet $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\dot{\Phi}_m$. Die lhs können wir auch leicht berechnen. Nachdem $\vec{\mathcal{E}}$ aus Symmetriegründen (s. -??) parallel zur Schicht gerichtet sein muss, tragen nur die Integrationsstücke parallel zur Schicht bei. Von diesen ergibt das Rechte Null, weil dort das Feld noch nicht angekommen sein kann. Also:

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = \mathcal{E} L \quad 3$$

14. (2) und (3) ins Induktionsgesetz \Rightarrow

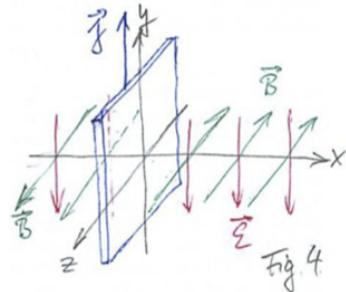
$$\mathcal{E} L = +B v L \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = B v \quad 4$$

\uparrow ein (-1) von Lenz, das Andere von (2)

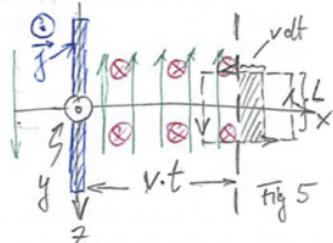
Das Plus-Zeichen bedeutet, dass $\vec{\mathcal{E}}$ in Richtung Integrationsweg zeigt \Rightarrow

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{B} v \vec{e}_y \quad 5$$

15. Wenn wir die Analyse für $x < 0$ wiederholen, sehen wir, dass auch dort $\vec{\mathcal{E}} = -Bv\vec{e}_y$ gilt (während – wie gesagt – das B -Feld das Vorzeichen wechselt. Damit können wir $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Feld in Fig. 1 einzeichnen, s. Fig. 4.



16. Um zu sehen, wie groß die Geschwindigkeit v der Feldfront ist, wenden wir das Ampèresche Gesetz (einschließlich Verschiebungsstrom natürlich) an. Dazu betrachten wir Fig. 5, die Fig. 2 entspricht, nur dass ein anderer Integrationsweg verwendet wird.



17. Das Ampère-Gesetz lautet $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}$. Nachdem \vec{j} im Integrationsgebiet gleich Null ist, haben wir

$$\underbrace{c^2 \oint \vec{B} d\vec{s}}_{= -c^2 B L} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{\mathcal{E}} d\vec{A}}_{= -\mathcal{E} L v dt} \quad \Rightarrow \quad c^2 B = \mathcal{E} v \quad 6$$

18. (4) und (6) sind genau dann verträglich, wenn $v = c$ ist. \Rightarrow Die Feldfront muss sich mit der Geschwindigkeit c bewegen!

19. Schließlich betrachten wir noch den Fall, dass sich die Schicht nur für eine kurze Zeit T mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips können wir diesen Fall aus bereits Bekanntem zusammensetzen: Zur Zeit t_1 wird eine Schicht mit Geschwindigkeit $+\vec{u}$ in Bewegung gesetzt, und dann zur Zeit $t_2 = t_1 + T$ eine zweite gleichartige Schicht mit Geschwindigkeit $-\vec{u}$.

20. Die erste Schicht (mit Geschwindigkeit $+\vec{u}$) erzeugt ein $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Feld in $-\vec{e}_y$ - bzw. $-\vec{e}_z$ -Richtung dessen Feldfront sich bei $x = ct_1$ befindet, s. Fig. 6a.

Die zweite Schicht (mit Geschwindigkeit $-\vec{u}$) erzeugt gleich starke $\vec{\mathcal{E}}$ - und \vec{B} -Felder mit genau umgekehrten Vorzeichen, also in $+\vec{e}_y$ - bzw. $+\vec{e}_z$ -Richtung. Die Wellenfronten dieser beiden Felder befinden sich bei $x = ct_2$, s. Fig. 6b.

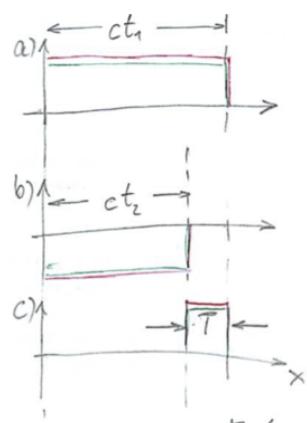


Fig 6

21. Bis auf den Bereich $ct_2 < x < ct_1$ heben sich die Felder genau auf. Was bleibt ist ein elektromagnetischer Impuls, der sich **frei** und **selbstständig** durch den Raum bewegt, ohne mit der Quelle (hier die **Schicht**) verbunden zu sein.
22. Es ist in der Tat bemerkenswert, wie sich dieses Bündel elektrischer und magnetischer Felder selbst aufrecht erhält. Wie wir gesehen haben, liegt dem die kombinierte Wirkung des Faraday- und Ampère-Gesetzes zugrunde, wobei bei Letzterem der Maxwell-Term entscheidend ist.

12.3 Die inhomogene Wellengleichung

1. Maxwell Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{Gauß: } \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{D}} = \tilde{\rho} & \text{Ampère & Maxwell: } \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{H}} = + \frac{\partial \tilde{\vec{D}}}{\partial t} + \tilde{\vec{J}} \\ \text{nobody: } \vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{D}} = 0 & \text{Faraday: } \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = - \frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t} \end{array} \quad 10$$

2. Vereinfachungen:

$$\text{keine freien Ladungen: } \tilde{\rho} = 0$$

$$\text{keine freien Ströme: } \tilde{\vec{J}} = 0$$

$$\text{nicht-mag. Material: } \tilde{\vec{B}} = \mu_0 \vec{H}$$

3. Wellengleichung auf die übliche Art und Weise herleiten:

- Faraday von links mit $\vec{\nabla} \times$ multiplizieren \implies

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = \partial_t \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}} \quad 12$$

- Ampère (mit Maxwell aber ohne Ampère :-)) einsetzen, d.h.

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{B}} / \mu_0 = \partial_t \tilde{\vec{D}} \text{ in (12)} \implies$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -\mu_0 \partial_t^2 \tilde{\vec{D}} \quad 13$$

- verwende $\tilde{\vec{D}} = \varepsilon_0 \tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{P}}$ and $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2$ \implies

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \partial_t^2 \left(\varepsilon_0 \tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{P}} \right) \implies$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\vec{E}} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\vec{P}} \quad 14$$

(14) ist die “allgemeinste Form” der Wellengleichung in der Optik.

4. Verwende die Vektoridentität $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}}) - \nabla^2 \tilde{\vec{E}}$, um (14) zu vereinfachen. In der linearen Optik ist der Term $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}}) = 0$. Dies gilt zumindest für isotrope Medien für die das Gauß-Gesetz $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{D}} = 0$ impliziert, dass $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{P}}) = \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \tilde{\vec{E}} + \varepsilon_0 \chi \tilde{\vec{E}}) = 0$, was wiederum $\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{E}} = 0$ zur Folge hat.

$$\implies \nabla^2 \tilde{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \tilde{\vec{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \partial_t^2 \tilde{\vec{P}} \quad 15$$

12.4 Larmorformel und Rayleighstreuung

- Die gesamte Strahlungsleistung P einer beschleunigten Ladung beträgt¹²

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi c^3 \epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{m_e r_e \dot{v}^2}{c}, \quad 20$$

wobei der zweite Ausdruck auf das Elektron zutrifft. Der Ausdruck mit Elektronenmasse m_e und klassischen Elektronenradius r_e hat den Vorteil, dass die Formel unabhängig vom Einheitensystem gilt.

- Rayleighstreuung:

$$\sigma(\omega) = \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega^4}{\omega_0^4}, \quad 21$$

wobei $\sigma_{\text{Th}} = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ der Thomson-Wirkungsquerschnitt ist.

- Die Intensität \mathcal{I} des von einer Kugel mit Durchmesser d und Brechungsindex n um den Winkel θ gestreuten Lichtes im Abstand R ist gegeben durch

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{I}_0}{R^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \left(\frac{d}{2} \right)^6 \quad 22$$

Die extrem starke Abhängigkeit von d ist Ursache des Tyndall-Effektes.

¹² s. z.B. <http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/astrospace/spacechap5.pdf>

12.5 Erzeugung von Röntgenstrahlung

Bremsstrahlung

1. Aufbau einer Röntgenröhre
2. Kontinuierliches Spektrum
3. Charakteristisches Spektrum

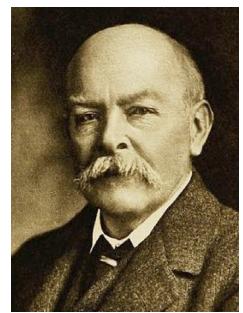
Synchrotronstrahlung

- 4.

12.6 Der Poynting-Vektor

- Die Energie pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit, die durch Felder transportiert wird, ist durch den Poynting Vektor \vec{S} gegeben.

$$S = \frac{1}{\mu_0} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}) \quad 40$$



John Henry Poynting
1852–1914

- Beispiel 1:

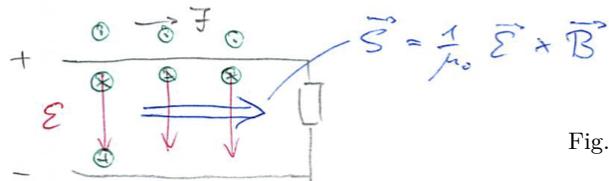


Fig. 10

- Beispiel 2:

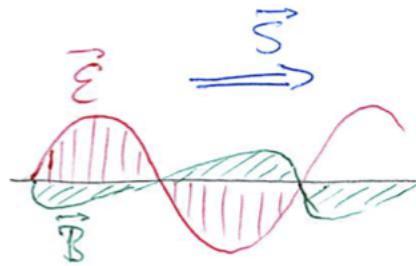


Fig. 11

13 Beugung und Interferenz

13.1 Doppelspalt

1. Betrachte zwei unendlich dünne Spalte im Abstand d . Die Spalte werden durch eine ebene Welle beleuchtet. Im Abstand D beobachten wir das Beugungsmuster auf einen Schirm. Wir wollen die Beleuchtung des Schirmes berechnen und tun das erst mal etwas langatmig, bevor wir zeigen, dass der wesentliche Aspekt, die Interferenz, in zwei Zeilen hingeschrieben werden kann.

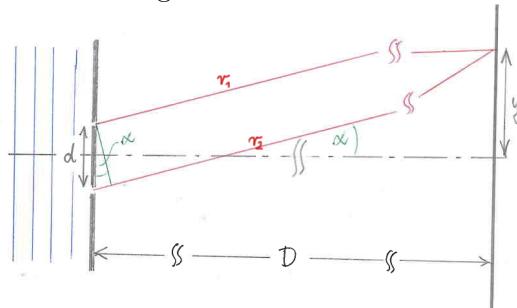


Fig. 1

2. Das Feld \mathcal{E}_1 bzw. \mathcal{E}_2 , das die beiden Spalte auf dem Schirm erzeugen ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{01}}{\sqrt{r_1}} \cos(\omega t - kr_1) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{02}}{\sqrt{r_2}} \cos(\omega t - kr_2) \quad 1$$

Der Einfachheit halber nehmen wir identische Schlitze, also $\mathcal{E}_{01} = \mathcal{E}_{02}$ an.

3. Bem.: Für eine Punktquelle würde wie eine Abnahme der Amplitude mit $1/r$ (und damit der Intensität mit $1/r^2$) erwarten. Wir haben hier jedoch unendlich lange Schlitze und verweisen auf die Situation bei analogen Problemen z.B. der Elektrostatik, wie sie uns mehrfach begegnet sind.
4. Das Feld auf dem Schirm ist aufgrund des Superpositionsprinzips gegeben durch $\mathcal{E}(y) = \mathcal{E}_1(y) + \mathcal{E}_2(y)$. Zur Berechnung dieser Summe machen wir folgende Approximationen:

$$r_1^2 = (y - d/2)^2 + D^2 \approx y^2 - yd + D^2$$

$$r_2^2 = (y + d/2)^2 + D^2 \approx y^2 + yd + D^2$$

Taylor-Entwicklung von $\sqrt{r_1^2} = \sqrt{y^2 - yd + D^2}$ und $\sqrt{r_2^2} = \dots \Rightarrow$

$$r_1 = D - \frac{d}{2D}y \quad \text{und} \quad r_2 = D + \frac{d}{2D}y$$

5. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\propto \cos(\omega t - kr_1) + \cos(\omega t - kr_2) \stackrel{t=0}{=} \\ &= \cos\left[k\left(D - \frac{d}{2D}y\right)\right] + \cos\left[k\left(D + \frac{d}{2D}y\right)\right] \stackrel{\substack{\nearrow \\ \searrow}}{=} \\ &= \cos(kD) \cdot \cos\left(k\frac{dy}{2D}\right) \end{aligned}$$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ 2

6. Der erste Term ist konstant und damit hier uninteressant. Aber was ist damit?

Die Extrema einer Cosinus-Funktion finden sich für

$$k \frac{dy}{2D} = n\pi \implies \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dy}{2D} = n\pi \implies y = n \frac{\lambda D}{d} \quad 3$$

Das sind die Extrema, also sowohl Maxima als auch Minima. Nachdem die Intensität proportional zu \mathcal{E}^2 ist, sehen wir helle Streifen an den Orten der Extrema. Außerdem bemerken wir, dass die Intensität dort viermal so hoch ist als die Intensität, die wir auf dem Schirm sehen würden, wenn einer der beiden Spalte abgedeckt ist.

7. Die Bedingung für konstruktive Interferenz kann man natürlich auch direkt an Fig. 1 ablesen: Der untere Lichtstrahl r_2 muss ein ganzzahliges Vielfaches von λ länger sein als der obere Lichtstrahl. Am Dreieck unmittelbar beim Spalt lesen wir ab

$$\tan \alpha = \frac{n\lambda}{d}.$$

Beachten wir nun noch, dass $\sin \alpha = y/D$ und verwenden für kleine Winkel $\sin \alpha \approx \tan \alpha$, so reproduzieren wir (3).

13.2 Doppelspalt und Quanten

1. Doppelspalt mit Einzelphotonen
2. Doppelspalt mit Elektronen: das Jöhnson-Experiment
3. Doppelspalt mit Atomen und Molekülen
4. Interferenz und Information

13.3 Abbesche Theorie der Bildentstehung

- Wir betrachten einen Doppelspalt unter dem Mikroskop. Um den Spalt aufzulösen, muss man mindestens die erste Beugungsordnung durchs Objektiv bringen

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

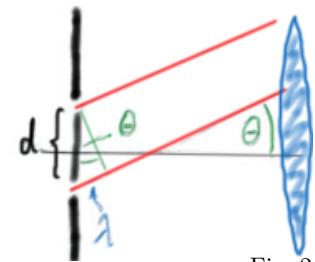


Fig. 2

- Kurze Wellenlängen helfen offenbar: Es reicht dann eine kleinere Objektivöffnung, um die erste Beugungsordnung einzufangen. Die effektive Wellenlänge verkürzt sich jedoch auch in Medien, und zwar um einen Faktor, der dem Brechungsindex entspricht.

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda}{n d}$$

- Schließlich betrachtet man im Mikroskop für gewöhnlich keine Streifen, sondern eher punktförmige Gegenstände. Das trägt über eine Besselfunktion, genauer eine ihrer Nullstellen, noch einen Faktor 1.22 bei.

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1.22 \lambda}{n d}$$



Fig. 3

13.4 Der Einfachspalt, Methode der Phasoren

- Wir zerlegen den Einfachspalt (Breite b) in viele kleine identische Abschnitte mit Abstand δ . Jeder dieser Abschnitte wird auf jedem Punkt des Schirms gleichermaßen zum dort registrierten Feld beitragen. Die von jedem einzelnen Abschnitt beigetragene Amplitude ist also gleich, unterschiedlich sind nur die Phasen.

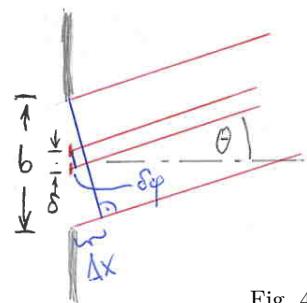


Fig. 4

Es liegt also nahe, den Beitrag jeden Abschnitts als Pfeil (Phasor) darzustellen mit einem Winkel, der der Phase entspricht. Die Gesamtamplitude ergibt sich als Vektorsumme aller Phasoren.

2. Beispiele

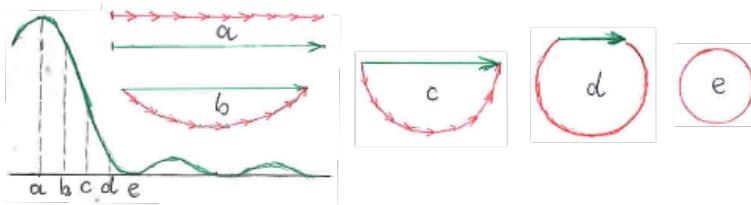


Fig. 5

- Nachdem die Abschnitte alle gleich sind, sind erstens alle Pfeillängen gleich und zweitens, das ist der neue Gedanke, die Phasendifferenzen $\delta\varphi$ zwischen je zwei benachbarten Abschnitten sind ebenfalls gleich: $\delta\varphi = \delta \sin \theta$.
- Damit bilden die Phasoren ein regelmäßiges Vieleck (genauer einen Ausschnitt davon) – im Grenzübergang infinitesimal vieler Abschnitte bilden sie einen Kreisbogen. Der Kreisbogen kann verschieden stark gekrümmmt, evtl. sogar mehrfach aufgewickelt sein, je nachdem wie groß der Phasenunterschied benachbarter Phasoren ist. Die Länge des Bogens ist aber immer gleich – nur die Vektorsumme, deren Betrag gleich der Sehnenlänge ist, ändert sich.

- Die Sehnenlänge entspricht der am Schirm gemessenen Amplitude A . Wir können diese noch auf die Amplitude auf der Achse A_0 , also auf die Bogenlänge (die für alle θ gleich bleibt) normieren. Die Größe, die wir berechnen wollen, ist also

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\text{Sehnenlänge}}{\text{Bogenlänge}}$$

30

- Der Kreisbogen ist durch seine Länge und seine Krümmung an beiden Enden eindeutig festgelegt. Die Krümmung kennen wir, weil wir die Phasenunterschiede

benachbarter Phasoren kennen. Tatsächlich ist es noch einfacher: Wir brauchen nur den Phasenunterschied α zwischen den Rand-Phasoren kennen, also zwischen den Phasoren, die zu den beiden Rändern des Einfachspaltes gehören.

$$\text{Wegunterschied: } \Delta x = b \sin \theta \implies \text{Phasenunterschied: } \alpha = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta \quad 31$$

Dass dies tatsächlich so ist, sehen wir an den Beispielen oben: Wenn z.B. die Phasendifferenz der Rand-Phasoren 2π beträgt, erhält man offensichtlich einen geschlossenen Kreis (und damit Sehnenlänge Null, also kein Licht an der entsprechenden Position auf dem Schirm).

7. Nachdem die Rand-Phasoren (tangential) auf dem Kreisbogen liegen, treffen sich die Senkrechten auf diesen Phasoren im Mittelpunkt des Kreisbogens und bilden den durch (31) gegebenen Winkel α .
8. Die Sehnenlänge A beträgt also

$$A = 2r \sin \alpha/2. \quad 32$$

9. Fragt sich, wie groß r ist. Statt dies zu beantworten, drücken wir die Bogenlänge ebenfalls mit r aus,

$$A_0 = r \alpha. \quad 33$$

10. Damit erhalten wir die bekannte sinc-Funktion für die Beugung am Spalt:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{2r \sin \alpha/2}{r \alpha} = \frac{\sin \alpha/2}{\alpha/2} = \text{sinc}\left(\frac{b\pi}{\lambda} \sin \theta\right). \quad 34$$

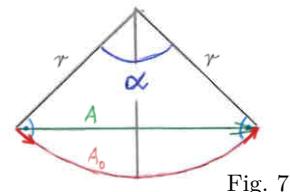


Fig. 7

13.5 Huygenssches Prinzip und Beugungsintegral

- Elementarwelle: Unter einer Elementarwelle versteht man eine von einem Punkt ausgehende und sich in alle drei Raumrichtungen ausbreitende Welle, also eine Kugelwelle.¹³ Die komplexe Amplitude einer sich im Punkt Q befindlichen Elementarwelle hat am Ort P den Wert

$$\psi(P) = \psi_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad 40$$

wenn die Entfernung von Q zu P r_0 ist.

- Huygenssches Prinzip: Huygens hatte die geniale Einsicht, dass alle leuchtenden Objekte als eine unendlich Summe von Elementarwellen aufgefasst werden können. Sie interferieren so, dass am Empfänger (z.B. einem Schirm) das Bild entsteht.

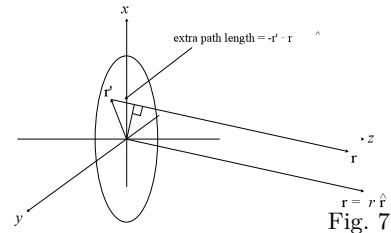


Fig. 7

Entsprechend würde man das Wellenfeld nach der Beugung an einem Objekt S auffassen als Summe (oder Integral) über alle Elementarwellen, die von diesem Objekt ausgehen. Die variierende Transparenz des Objekts und Phasenverschiebungen lassen sich leicht mit entsprechend variierenden (komplexen) Amplituden der Elementarwellen berücksichtigen.

$$\psi(\vec{r}) \propto \iint_{\text{Objekt}} \psi_i(x', y', z') \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA \quad 41$$

$\psi_i(x', y')$ ist dabei das auf das Objekt einfallende Wellenfeld, also die Beleuchtung des Objekts.

- Mit dem Huygenschen Prinzip lassen sich, zumindest qualitativ, alle Phänomene der Optik erklären, zumindest soweit Polarisation keine Rolle spielt. Dies gilt insbesondere auch für Phänomene, bei denen man zunächst nicht an den Wellencharakter des Lichtes denkt, z.B. Brechung.

¹³ Bei zylindrischer Geometrie kann es vorteilhaft sein, stattdessen Zylinderwellen zu verwenden.

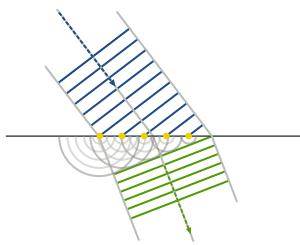


Fig. 10

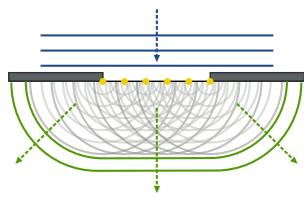


Fig. 11

4. Fresnel hat der Huygensschen Variante des Beugungsintegrals noch zwei Faktoren hinzugefügt, die die Phasenverschiebung der Beugung und ihre Abhängigkeit von der Wellenlänge sowie die Neigung der Wellenfronten berücksichtigen. Kirchhoff ist es schließlich gelungen, das Fresnelsche Beugungsintegral aus den Maxwell-Gleichungen herzuleiten.

5. Fraunhofer-Beugung: Wenn man $|x-x'| \ll |z-z'|$ und $|y-y'| \ll |z-z'|$ annimmt, kann man $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ Taylor-entwickeln:

$$\sqrt{\varepsilon + (z-z')^2} \approx z - z' + \frac{1}{2} \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{z - z'} \quad 42$$

Damit vereinfacht sich (41) zu

$$\psi(x, y, z) \propto e^{-ikz} \iint_{\text{Objekt}} \frac{\psi_i(x', y', z')}{z - z'} \exp \left[ik \left(z - \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2(z-z')} \right) \right] dx' dy' \quad 43$$

($z - z'$ im Nenner des Integranden kommt von der Taylorentwicklung von $|\vec{r} - \vec{r}'|$, bei der schon nach dem ersten Glied abgebrochen wird.)

6. Wenn man nun x'^2 und y'^2 vernachlässigt, kann man eine Reihe weiterer Faktoren vor das Integral ziehen, so dass man

$$\psi(x, y, z) \propto \frac{e^{-ikr}}{r} \iint_{\text{Objekt}} \psi_i(x', y', z') e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \quad 44$$

erhält. (Wir haben hier ein paar Schritte ausgelassen, die erklären, wie die Vektorkomponenten k_x und k_y im Integranden zustande kommen.)

7. (44) hat die Form einer Fouriertransformation: Das Beugungsbild ist also die Fouriertransformierte des Objektes. Die Fourier-Rücktransformation lässt sich mit einer Linse bewerkstelligen. Dies ist die Grundlage der Fourieroptik, die u.a.

davon Gebrauch macht, das Beugungsbild zu manipulieren, um das Bild selbst zu bearbeiten.

8. Die Fraunhofer-Näherung ist, wie durch $|x - x'| \ll |z - z'|$ und $|y - y'| \ll |z - z'|$ vorausgesetzt, nur im Fernfeld gültig. Im Nahfeld sind die quadratischen Terme zu berücksichtigen. Das Beugungsbild kann dann meist nur noch numerisch berechnet werden. Poisson hat immerhin den Spezialfall des Beugungsbilds einer runden Scheibe berechnet und gefunden, dass mitten im Kernschatten ein heller Punkt auftreten müsste. Er hielt dieses Ergebnis für absurd und daher für eine Widerlegung der Fresnelschen Theorie. Arago jedoch hat das Experiment durchgeführt und den hellen Punkt nachgewiesen. Dies war der Durchbruch für die Wellentheorie des Lichtes.

14 Stehende Wellen, Gruppengeschwindigkeit und Lichtpulse

14.1 Stehende Wellen

- Wir betrachten zwei in $+x$ - bzw. $-x$ -Richtung laufende Wellen mit gleicher Frequenz und Amplitude

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - kx - \varphi_r)$$

und $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + kx)$

1

Genau entgegenlaufende Wellen, noch dazu mit gleicher Frequenz und Amplitude, ist nur scheinbar eine spezielle Situation. Sie entsteht vielmehr bei der Rückreflexion von Wellen. Ein eventuell auftretender Phasensprung bei der Reflexion kann mit φ_r berücksichtigt werden.

- Die resultierende Gesamtwellen \mathcal{E}_{ges} ergibt sich aus dem Superpositionsprinzip

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \cdot [\sin(\omega t - kx - \varphi_r) + \sin(\omega t + kx)].$$

- Mit der trigonometrischen Identität $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow$

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = 2 \mathcal{E}_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_r}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\varphi_r}{2}\right).$$

2

- Für den charakteristischen Fall der Reflexion an einem elektrisch leitenden Spiegel gilt $\varphi_r/2 = \pi/2$. Dies kann z.B. an den Fresnel-Formeln gesehen werden und entspricht im Übrigen der Reflexion am festen Ende bei einer transversalen Welle auf einer Saite.

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{ges}} = 2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t \sin kx.$$

3

Die Orts- und Zeitabhängigkeit faktorisiert! In (3) haben wir die Faktoren absichtlich in dieser Reihenfolge geschrieben: wir können $2 \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ als die zeitabhängige Amplitude einer räumlichen Sinusfunktion $\sin kx$ auffassen.

- Die Orte der Nulldurchgänge dieser Sinusfunktion sind also unabhängig von der Zeit, bleiben also *stehen*, ebenso die Orte maximaler Amplitude. Daher der Name stehende Welle. Die Orte der Nulldurchgänge nennt man Knoten, die Orte maximaler Amplitude Bäuche.
- Offensichtlich ist der räumliche Abstand der Knoten durch die Bedingung $kx = m\pi$ bestimmt. Mit $k = 2\pi/\lambda$ erhalten wir – wenig überraschend – einen

Knotenabstand von $\lambda/2$.

7. Stehende Wellen zwischen zwei hochreflektierenden Spiegeln sind typisch für Laserresonatoren. Der Knotenabstand von $\lambda/2$ bedeutet dann, dass im Resonator nur stehende Wellen existieren können, deren halbe Wellenlänge $\lambda/2$ ganzzahligter Teiler der Resonatorlänge L ist. Man nennt diese erlaubten stehenden Wellen auch Moden.
8. Offensichtlich impliziert die Bedingung $m\frac{\lambda}{2} = L \implies \lambda = \frac{2L}{m}$ auch, dass ein derartiger Laser nur auf diskreten Frequenzen ν schwingen kann die gegeben sind durch

$$\lambda\nu = c \implies \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc}{2L}. \quad 4$$

9. Der Frequenzabstand der Moden

$$\Delta\nu = \frac{(m+1)c}{2L} - \frac{mc}{2L} = \frac{c}{2L} \quad 5$$

entspricht gerade der Zeit, die ein Lichtpuls braucht, um einmal im Resonator umzulaufen. Für typische Laser mit einer Resonatorlänge der Größenordnung $L = 1 \text{ m}$ ist $\Delta\nu \approx 300 \text{ MHz}$, ist also sehr klein verglichen mit den optischen Frequenzen von ca. 500 THz : Es passen eben sehr viele Wellenlängen $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$ in den Resonator, und ob es eine mehr oder weniger ist, macht dann keinen großen Unterschied.

10. Wenn das Lasermedium eine große Verstärkungsbandbreite hat, also viele verschiedene Frequenzen verstärken kann, ist das Laserspektrum durch ein breites Spektrum von diskreten Frequenzen (“Linien”) gegeben. Wenn man es schafft, diese Moden in eine feste Phasenbeziehung zu bringen (“Modenkopplung”), kann man sehr kurze Lichtpulse erzeugen
11. Ein realer Laserresonator besteht natürlich nicht aus perfekt leitenden Spiegeln, schon deshalb nicht, weil etwas Laserlicht aus dem Resonator herauskommen soll. Zudem sind die besten Spiegel heutzutage nicht aus Metall, sondern bestehen aus Stapeln dünner dielektrischer Schichten unterschiedlichen Brechungsexponenten. Wie dies die Dinge ändert, werden wir in Kap. 17 sehen.

14.2 Schwebung

- Wir betrachten zwei Wellen, die gleiche Amplitude haben und in gleiche Richtung laufen, jedoch leicht verschiedene Frequenzen $\omega_{1,2}$ und damit leicht verschiedene Wellenlängen $\lambda_{1,2}$ oder Wellenzahlen $k_{1,2}$ haben.

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

und $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$

10

- Die Gesamtwelle \mathcal{E}_{ges} ist dem Superpositionsprinzip zufolge

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \cdot [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)].$$

- Mit der trigonometrischen Identität $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ erhält man

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = 2 \mathcal{E}_0 \cos \left[\underbrace{\frac{k_1 + k_2}{2} x}_{=: k_p} - \underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}_{=: \omega_p} \right] \cdot \cos \left[\underbrace{\frac{k_1 - k_2}{2} x}_{=: k_g} - \underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{=: \omega_g} \right].$$

- Mit den Definitionen

$$k_p := \frac{k_1 + k_2}{2} \quad k_g := \frac{k_1 - k_2}{2} \quad \omega_p := \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \omega_g := \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad 11$$

vereinfacht sich \mathcal{E}_{ges} zu

$$\mathcal{E}_{\text{ges}} = 2 \mathcal{E}_0 \cdot \cos(k_g x - \omega_g t) \cdot \cos(k_p x - \omega_p t) \quad 12$$

- Auch hier haben wir die Terme in der Reihenfolge hingeschrieben, dass man $2 \mathcal{E}_0 \cos(k_p x - \omega_p t)$ als zeitabhängige Amplitude auffassen kann. Das sieht man wie folgt:

$k_p = (k_1 + k_2)/2$ und $\omega_p = (\omega_1 + \omega_2)/2$ sind die Mittelwerte zweier nahe beieinander liegender Wellenzahlen bzw. Frequenzen, also im wesentlichen gleich dieser ursprünglichen Wellen.

k_g und ω_g sind dagegen viel kleiner. Tatsächlich ist aber die zeitabhängige Amplitude $2 \mathcal{E}_0 \cdot \cos(k_g x - \omega_g t)$ auch eine Welle, allerdings eine bei viel kleinerer Frequenz.

Wir haben also eine sog. **Trägerwelle** hoher Wellenzahl k_p und Frequenz ω_p und eine **Envelope-Welle** mit k_g und ω_g .

6. An einem Empfänger macht sich die zeitabhängige Amplitude als pulsierende Intensitäts- (im Akustischen als Lautstärke-) Schwankung bemerkbar, die man als *Schwebung* (engl. beat) bezeichnet. Nachdem Intensität bzw. Lautstärke proportional zum Quadrat der Amplitude sind, ist die Schwebungsfrequenz ω_b gegeben durch

$$\omega_b = 2\omega_g = \omega_1 - \omega_2. \quad 13$$

7. Genau wie in der Musik kann man die Schwebung auch im Optischen zur empfindlichen Messung von Frequenzunterschieden ausnützen. Beispielsweise kann man einen von einem bewegten Objekt rückreflektierten und doppler-verschobenen Laserstrahl mit dem ausgesandten Laserstrahl zur Interferenz bringen und dann die Schwebungsfrequenz messen, um daraus schließlich die Geschwindigkeit des Objektes zu berechnen. Während die direkte Frequenzmessung der optischen Welle weit jenseits der Fähigkeiten der Elektronik liegt, ist die Messung der Schwebungsfrequenz vergleichsweise einfach.

14.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

1. Mit Gl. (12) hatten wir das sich bei der Schwebung ergebende Gesamtfeld als Produkt von Envelope- und Träger-Welle dargestellt

$$(12): \quad \mathcal{E}_{\text{ges}} = 2\mathcal{E}_0 \cdot \cos(k_g x - \omega_g t) \cdot \cos(k_p x - \omega_p t).$$

Wir betonen an dieser Stelle, dass die Bezeichnung beider Terme als Welle nicht leichtfertig war: Sowohl die Träger- wie auch die Envelope-Welle haben das für eine Welle charakteristische Argument $kx - \omega t$.

2. Nun hatten wir gleich zu Anfang unserer Beschäftigung mit Wellen in Kap. 11.5 (S. 114) festgestellt, dass die Wellengeschwindigkeit gegeben ist durch

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad 20$$

Es scheint also so zu sein, dass sich Träger- und Envelope-Welle nicht notwendigerweise mit derselben Geschwindigkeit ausbreiten.

3. Trägerwelle:

$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}{\frac{k_1 + k_2}{2}} \approx \frac{\omega}{k}.$$

21

Die Trägerwelle breitet sich also mit der bekannten Geschwindigkeit ω/k aus, wir nennen sie entsprechend ihrer ursprünglichen Herleitung in Kap. 11.5, bei der wir Ort-Zeit-Punkte gleicher Phase betrachteten, auch Phasengeschwindigkeit.

4. Envelope-Welle:

$$v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \xrightarrow{\omega = v_p k}$$

$v_g = \frac{d}{dk}(v_p k) = v_p + k \frac{dv_p}{dk}.$

22

5. Sobald also die vertraute Phasengeschwindigkeit v_p von der Wellenlänge (und damit von k) abhängig ist, unterscheiden sich Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge wird als *Dispersion* bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass alle absorbierenden Medien, also alle Medien außer Vakuum, dispersiv sind. Nur im Vakuum gilt deshalb $v_g = v_p$.

6. Die Verschiedenheit von v_p und v_g führt dazu, dass sich die Phase relativ zur Envelope verändert. Es gibt also einen Phasenschlupf unter der Einhüllenden.

7. Die Dispersion kann man auch mit Hilfe des Brechungsindex' ausdrücken: $n = n(\lambda)$ oder $n(k)$.

$$\frac{dv_p}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{n} \right) = -\frac{c}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

23

14.4 Lichtpulse und Fouriertheorem, Unschärferelation

1. Gegeben sei ein Lichtpuls mit elektrischem Feld

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right) \exp(i 2\pi f_0 t). \quad 30$$

Man erkennt einen Puls mit gaußförmiger Einhüllenden und Trägerfrequenz f_0 . Die Pulsdauer ist proportional zu σ_t . Ob wir die Pulsdauer beim halben Maximum oder sonst wo messen, ist hier egal. Ebenso wenig sollen uns die Vorfaktoren interessieren. Auch die Schlamperei, hier nicht explizit den Realteil von $\mathcal{E}(t)$ hinzuschreiben, wollen wir uns verzeihen – wir wissen, dass physikalische Größen reell sind und lesen (30) als $\text{Re}(\mathcal{E})$.

2. Den obigen Puls kann man aus vielen Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz und Amplitude zusammensetzen. Das Spektrum dieser Funktionen $\tilde{\mathcal{E}}(f)$, also deren Amplitude vs. deren Frequenz, berechnet sich durch die Fouriertransformierte

$$\tilde{\mathcal{E}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) e^{-i 2\pi f t} dt. \quad 31$$

3. Dieses bestimmte Integral kann man ausrechnen, z.B. mit einem Computeralgebra-Programm oder mit Integraltabellen:

$$\tilde{\mathcal{E}}(f) = \mathcal{E}_0 \exp\left[-2\pi(f - f_0)^2 \sigma_t^2\right] \quad 32$$

4. Das Spektrum hat σ_t^2 also im Zähler des Exponenten und nicht im Nenner. D.h. je kürzer Puls der Puls ist, desto breiter das Spektrum. Anders ausgedrückt: Je genauer die Ankunftszeit des Pulses gemessen werden kann, desto unbestimmt ist seine Frequenz. Noch anders ausgedrückt: Das Produkt aus Pulsdauer und Breite des Spektrums ist eine Konstante.¹⁴ Man findet, dass die Konstante von der Größenordnung 1 ist.
5. Derselbe Sachverhalt wird uns in der Quantenmechanik wieder begegnen. Das ist kein Wunder: Ob Materiewelle oder Lichtwelle macht für die mathematische Prozedur einer Fouriertransformation keinen Unterschied. Die Tatsache, dass

¹⁴Genauer gesagt, ist dieses Produkt größer oder gleich besagter Konstante.

die Breite eine Funktion und die Breite ihrer Fouriertransformation zueinander umgekehrt proportional sind, war übrigens lange vor Heisenberg bekannt.

15 Elektromagnetische Optik I: Reflexion und Brechung

15.1 Stetigkeit der Normalkomponente des \vec{D} -Feldes

1. Betrachte die Grenzfläche zwischen zwei Materialien (Dielektrika) mit relativer Permeabilitätszahl ε_1 und ε_2 . Wie die Kapitelüberschrift deutlich macht, sind wir an der Reflexion und Brechung einer elektromagnetischen Welle an dieser Grenzfläche interessiert.

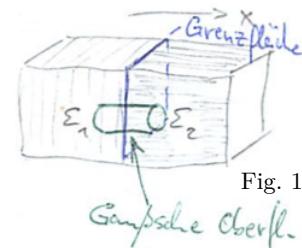


Fig. 1

Offensichtlich gibt es demnach \vec{E} -, \vec{D} -, \vec{B} - und \vec{H} -Felder im Dielektrikum und es ist sicher ein sinnvoller Gedanke, nach der Stetigkeit der entsprechenden Feldvektoren an der Grenzfläche zu fragen.

2. Wir wählen eine zylinderförmige Gaußsche Oberfläche □ , deren Deckel parallel zur Grenzfläche sind. Das Gaußsche Gesetz lautet dafür

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = \text{eingeschl. freie Ladung} \stackrel{!}{=} 0, \quad 1$$

da es im Inneren eines Dielektrikums so ohne Weiteres keine freien Ladungen gibt.

3. Interessant ist hier nur die Grenzfläche. Entsprechend wählen wir die Höhe des Zylinders infinitesimal klein \Rightarrow

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = \int_{\text{li. Deckel}} \vec{D} d\vec{A} + \int_{\text{re. Deckel}} \vec{D} d\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad 2$$

4. Die Deckelflächen wurden so gewählt, dass ihre Normalen parallel (rechter Deckel) bzw. antiparallel (linker Deckel) zur x -Achse verlaufen. Das ergibt schon einmal das Vorzeichen von $d\vec{A}$ in den Integralen auf der rhs von (2). Die Tatsache, dass $d\vec{A} \parallel \vec{e}_x$ ist bedeutet, dass im Integranden nur die x -Komponente des \vec{D} -Feldes beiträgt.

$$\iint \vec{D} d\vec{A} = -D_x^{\text{li}} \cdot \Delta A + D_x^{\text{re}} \cdot \Delta A \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow D_x^{\text{li}} = D_x^{\text{re}} \quad 3$$

\Rightarrow die Normalkomponente des \vec{D} -Feldes ist stetig an der Grenzfläche zweier Dielektrika.

15.2 Stetigkeit der Tangentialkomponente des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes

1. Hier verwenden wir das Faradaysche Gesetz

$$\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} d\vec{A}$$

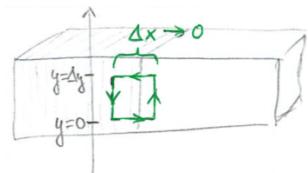


Fig. 2

2. Wir lassen $\Delta x \rightarrow 0$ gehen. Das hat zwei angenehme Folgen:

- das Integral $\oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ wird einfacher
- das Integral $\iint \vec{B} d\vec{A}$ wird besonders einfach, nämlich $= 0$, da die Integrationsfläche gegen Null geht für $\Delta x \rightarrow 0$.

3. Vom Linienintegral bleiben wg. $\Delta x \rightarrow 0$ nur die Integrationswege parallel (also tangential) zur Grenzfläche. Das Skalarprodukt im Integranden $\vec{\mathcal{E}} d\vec{r}$ selektiert also die y -Komponente des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes, das ist die Tangentialkomponente von $\vec{\mathcal{E}}$ bzgl. der Grenzfläche.

$$\begin{aligned} \oint \vec{\mathcal{E}} d\vec{r} &= \int_{y=0}^{y=\Delta y} \mathcal{E}_y^{\text{re}} dy + \int_{y=\Delta y}^{y=0} \mathcal{E}_y^{\text{li}} dy \stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \mathcal{E}_y^{\text{re}} \cdot \Delta y + \mathcal{E}_y^{\text{li}} \cdot (-\Delta y) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \implies \mathcal{E}_y^{\text{re}} &= \mathcal{E}_y^{\text{li}} \end{aligned}$$

5

\implies die Parallelkomponente des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes ist stetig an der Grenzfläche zweier Dielektrika.

15.3 Reflexion- und Brechungsgesetz

- Gegeben sei eine Lichtwelle, die sich parallel zur x - y -Ebene ausbreitet, d.h. für den Wellenvektor \vec{k} gilt $\vec{k} \parallel (x, y)$.

- Wir wissen natürlich (vergl. Kap. 11.6), dass $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{k}$ – elektromagnetische Wellen sind transversale Wellen.

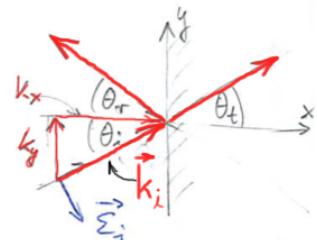


Fig. 3

Hier wollen wir die Sache noch dahingehend vereinfachen, dass $\vec{\mathcal{E}}$ keine z -Komponente haben soll, d.h. $\vec{\mathcal{E}}$ ist „parallel polarisiert“.

- Das einfallende $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld ist eine Welle, d.h. das $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld hat die Form

$$|\vec{\mathcal{E}}_i| = \mathcal{E}_{0i} \sin[\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}] = \mathcal{E}_{0i} \sin[\omega_i t - (k_{xi}x + k_{yi}y)] =$$

Fig. 3 \downarrow

$$= \sin[\omega_i t - k_i(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i)].$$

Das „i“ steht hierbei für incident = einfallend.

- Mit der Dispersionrelation $v = \frac{\omega}{k}$ oder $k = \frac{\omega}{v}$ vereinfacht sich das zu

$$|\vec{\mathcal{E}}_i| = \mathcal{E}_{0i} \sin \omega_i \left[t - \frac{x \cos \theta_i + y \sin \theta_i}{v_i} \right] \quad 10$$

- Für die reflektierte und die transmittierte Welle schaut das genauso aus:

$$|\vec{\mathcal{E}}_r| = \mathcal{E}_{0r} \sin \omega_r \left[t - \frac{x \cos(\pi - \theta_r) + y \sin(\pi - \theta_r)}{v_r} \right] \quad 11$$

$$|\vec{\mathcal{E}}_t| = \mathcal{E}_{0t} \sin \omega_t \left[t - \frac{x \cos \theta_t + y \sin \theta_t}{v_t} \right] \quad 12$$

- Wende die Stetigkeit der Normalkomponente von \vec{D} an,

$$D_x^{\text{li}} = D_x^{\text{re}} \implies \epsilon_1 \mathcal{E}_x^{\text{li}} = \epsilon_2 \mathcal{E}_x^{\text{re}}$$

Links der Grenzfläche gibt es sowohl den einfallenden wie auch den reflektierten Strahl, rechts davon nur den transmittierten Strahl. Mit dem Superpositionsprinzip wird aus unserer Stetigkeitsbedingung

$$\epsilon_1 (\mathcal{E}_{xi} + \mathcal{E}_{xr}) = \epsilon_2 \mathcal{E}_{xt} \quad 13$$

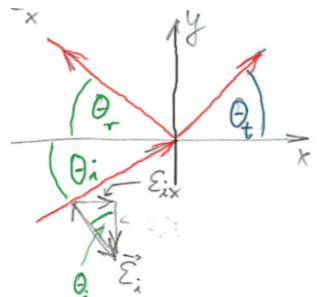


Fig. 4

7. Aus Fig. 4 ergibt sich die Komponentenzerlegung von $\vec{\mathcal{E}}_i$, $\vec{\mathcal{E}}_r$ und $\vec{\mathcal{E}}_t$, so dass sich Ausdrücke für \mathcal{E}_{xi} , \mathcal{E}_{xr} und \mathcal{E}_{xt} ergeben:

$$\varepsilon_1 \left(|\vec{\mathcal{E}}_i| \sin \theta_i + |\vec{\mathcal{E}}_r| \sin \theta_r \right) = \varepsilon_2 |\vec{\mathcal{E}}_t| \sin \theta_t \quad 14$$

8. Setze (10)-(12) in (14) ein, wobei (10)-(12) an der Grenzfläche, also bei $x = 0$ ausgewertet werden \Rightarrow

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mathcal{E}_{0i} \sin \theta_i \sin \left[\omega_i \left(t - \frac{y \sin \theta_i}{v_i} \right) \right] - \varepsilon_1 \mathcal{E}_{0r} \sin \theta_r \sin \left[\omega_r \left(t - \frac{y \sin \theta_r}{v_r} \right) \right] &= \\ = \varepsilon_2 \mathcal{E}_{0t} \sin \theta_t \sin \left[\omega_t \left(t - \frac{y \sin \theta_t}{v_t} \right) \right] \end{aligned} \quad 15$$

9. Betrachten wir (15) bei $y = 0 \Rightarrow$

$$A \sin \omega_i t + B \sin \omega_r t + C \sin \omega_t t = 0, \quad 16$$

wobei $A := \varepsilon_1 \mathcal{E}_{0i} \sin \theta_i$, $B := \dots$ und $C := \dots$ Konstanten $\neq 0$ sind. (16) kann nur dann für alle t erfüllt sein, wenn

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t =: \omega. \quad 17$$

10. Statt bei $y = 0$ betrachten wir (15) nun bei $t = 0 \Rightarrow$

$$A \sin \left(\omega \frac{\sin \theta_i}{v_i} y \right) + B \sin \left(\omega \frac{\sin \theta_r}{v_r} y \right) + C \sin \left(\omega \frac{\sin \theta_t}{v_t} y \right) = 0 \quad 18$$

Analog wie wir von (16) auf (17) geschlossen haben – (18) muss für alle y gelten –, schließen wir nun von (18) auf

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{v_r} = \frac{\sin \theta_t}{v_t} \quad 19$$

11. (19) enthält das Reflexionsgesetz und das Snellsche Gesetz:

Reflexion: $v_i = v_r$ da die Wellengeschwindigkeit im selben Medium dieselbe sein muss:

$$\boxed{\theta_i = \theta_r} \quad n_t \quad 1/n_i \quad 20$$

Brechung (Snell):

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_i}{v_t} = \left(\frac{c}{v_t} \right) \cdot \left(\frac{v_i}{c} \right)} = \boxed{\frac{n_t}{n_i}} \quad 21$$

12. Bem.: Diese Betrachtung kann auf die senkrechte Polarisationskomponente verallgemeinert und dahingehend ausgedehnt werden, dass man für beide Polarisationsrichtungen komplexe (also die Phaseninformation enthaltende) Reflexions- und Transmissionkoeffizienten herleiten kann. Man findet sie in jedem Optikbuch unter dem Namen Fresnelsche Formeln.

Harriott-Konstruktion:

12. In die durch die Grenzfläche definierten Halbebene werden **Halbkreise** eingezeichnet, deren Radien gleich dem Brechungsindex des Mediums in der jeweiligen Halbebene ist. Der Hintergrund dieses Ansatzes ist, dass die Beträge (Länge) der Wellenvektoren $\vec{k}_{i,r,t}$ proportional zum Brechungsindex sind:

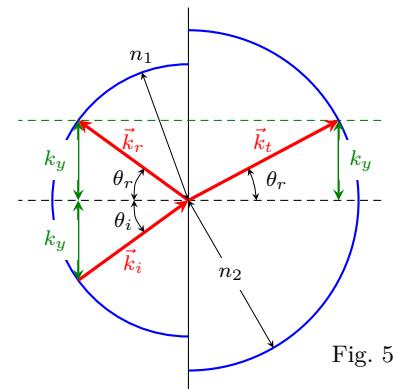


Fig. 5

Die Frequenz in beiden Medien ist aus Stetigkeitsgründen gleich, weshalb $\lambda \cdot \nu = \frac{c}{n}$ von n abhängt: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{n\nu}$, also $k = n\frac{\omega}{c}$, wie behauptet. Deshalb liegen die Fuß- bzw. Endpunkte der Vektoren $\vec{k}_{i,r,t}$ auf den besagten Halbkreisen.

13. Nachdem ky gerade gleich $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ ist, bleibt ky bei der Brechung invariant. Auch dies ist in Fig. 5 eingezeichnet.
14. Die Harriott-Konstruktion mag trivial und überflüssig erscheinen und wird deshalb in den modernen Lehrbüchern meist ignoriert, sie entfaltet ihre Nützlichkeit aber bei der Doppelbrechung, besonders wenn aus den Halbkreisen Ellipsenausschnitte werden.

15.4 Totalreflexion und evaneszente Wellen

1. Bei der Brechung am Übergang vom “optisch dichten” zum “optisch dünnerem” Medium (d.h. $n_1 > n_2$) erkannt man bereits am Snellschen Gesetz, dass eine Besonderheit auftreten kann. Wir nehmen o.w.B.d.A.¹⁵ ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit :-) $n_2 = 1$ an und setzen $n \equiv n_1 \Rightarrow$

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_e.$$

30

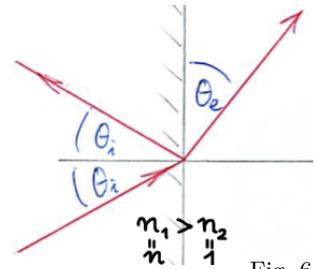


Fig. 6

Nachdem $n > 1$ ist, ist klar, dass für Einfallswinkel $\theta_i > \theta_g$ die lhs von (30) größer 1 wird und (30) scheinbar nicht erfüllt werden kann.

2. In Folge dessen wird bei $\theta_i = \theta_g$ der Ausfallswinkel $\theta_e = 0$ und bei $\theta_i > \theta_g$ imaginär. Die physikalische Folge ist, dass es den transmittierten Strahl nicht mehr gibt, also alles reflektiert wird. Entsprechend spricht man von Totalreflexion.
3. Der Grenzwinkel θ_g ist trivial zu berechnen:

$$n \sin \theta_g \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_g = \arcsin \frac{1}{n}$$

31

Evaneszente Wellen

4. Aus der Harriott-Konstruktion, die wir links noch mal abbilden, kann man sofort

$$\frac{k_t^2}{n_2^2} = \frac{k_r^2}{n_1^2} = \frac{k_i^2}{n_1^2}$$

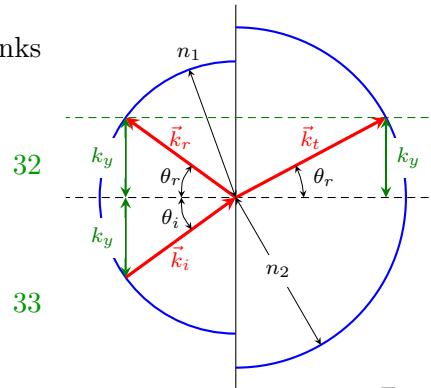


Fig. 7

und

$$k_{t,y} = k_{r,y} = k_{i,y}$$

33

ablesen, woraus sofort folgt, dass

$$k_{t,x}^2 = k_t^2 - k_{t,y}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k_i^2 - k_{i,y}^2.$$

34

¹⁵ ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit :-)

5. Wir setzen wieder $n_2 = 1$ und $n \equiv n_1 > 1$. Es ist, s. Fig. 6,

$$k_y = k \sin \theta_i \quad \xrightarrow{(34)} \quad k_{t,x}^2 = \frac{k_i^2}{n^2} - k_i^2 \sin^2 \theta_i$$

Dies hätten wir gerne in Abhängigkeit der Frequenz ω oder der Wellenlänge λ bzw. der Wellenzahl k im Vakuum.

$$\text{mit } k = n \frac{\omega}{c} = n \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad k_{t,x}^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \left(1 - n^2 \sin^2 \theta_i \right) \quad 35$$

6. An (35) sieht man in etwas anderer Form, was wir schon eingangs festgestellt hatten: Wenn $n \sin \theta_i > 1 \Rightarrow k_{t,x}^2$ ist negativ $\Rightarrow k_{t,x}$ ist rein imaginär, also

$$k_{t,x} =: \pm i k_{\text{ev}} = \pm i \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1} \quad (k_{\text{ev}} \in \mathbf{R}), \quad 36$$

wobei wir nochmals feststellen, dass mit λ die Vakuumwellenlänge gemeint ist.

7. Die transmittierte Welle hat die Form

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{t,0} e^{\pm k_{\text{ev}} x} e^{i(\omega t - k_y y)}. \quad 37$$

Offensichtlich ist das negative Vorzeichen im Term $e^{\pm k_{\text{ev}} x}$ zu verwenden. \Rightarrow man erhält im rechten Halbraum eine exponentiell abfallende Amplitude.

8. Bei $x = 1/k_{\text{ev}}$ ist die Amplitude der evaneszenten Welle auf $1/e$ (und die Intensität auf $1/e^2 \approx 13\%$) abgefallen. Dies kann man als Eindringtiefe in den “verbotenen” Bereich definieren.

$$x = \frac{1}{k_{\text{ev}}} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - 1}} \quad 38$$

Betrachten wir als Beispiel $n = 1.5$ und entsprechend den Grenzwinkel $\theta_g = 41.81^\circ$. Es ist natürlich klar, dass das $x \rightarrow \infty$ für $\theta_i = \theta_g$. Sehen wir uns daher $\theta_g = 41.9^\circ$ an. Einsetzen ergibt, dass selbst für diesen Fall das Feld bereits nach 2.7λ auf $1/e$ abgefallen ist. Wenn wir $\theta_g = 42.8^\circ$ nehmen, ist dies schon bei 0.8λ der Fall. Die geringste Eindringtiefe des Feldes in das optisch dünnerne Medium erhält man offenbar für $\theta_i = 90^\circ$, also streifenden Einfall auf die Grenzfläche: 0.14λ .

9. Eine detaillierte Betrachtung erfolgt wie beim Brechungsgesetz über die Fresnel-Formeln. Dies führt zur Vorhersage einer Reihe weiterer Effekte. Ein Beispiel ist eine Phasenverschiebung zwischen paralleler und senkrechter Polarisation, die im

Fresnel-Rhombus zur Erzeugung zirkular polarisierten Lichtes ausgenutzt wird. Ein anderes Beispiel ist, dass der scheinbare Reflexionspunkt bei der Totalreflexion nicht auf der Grenzfläche, sondern etwas dahinter im Vakuum befindet. Die führt zu einem minimalen Strahlversatz, der erst im 20. Jhd. von Goos und Hänchen experimentell nachgewiesen werden konnte und deshalb als Goos-Hänchen-Effekt bezeichnet wird.

10. Mit Hilfe des Poynting-Vektors kann nachgerechnet werden,¹⁶ dass es keinen Energiefluss in den rechten Halbraum gibt. Es ist also tatsächlich gerechtfertigt, von Totalreflexion zu sprechen.
11. Die Totalreflexion hat zahllose Anwendungen in den optischen Technologien gefunden. Die vom Marktvolumen bedeutendste ist sicherlich die Lichtleitung in Glasfasern geworden.
12. Das evanescente Feld kann vergleichsweise einfach über die “frustrierte Totalreflexion” nachgewiesen werden. Auch dieser Effekt hat viele Anwendungen bis hin zu neuartigen Touchpads in Massenelektronik.
13. Die frustrierte Totalreflexion ist das optische Analogon zum quantenmechanischen Tunneleffekt. Die Analogie ist so vollkommen, dass es angebracht ist, statt von frustrierter Totalreflexion vom optischen Tunneleffekt zu sprechen.

¹⁶ s. bspw. Lipson, Lipson, Tannhauser: Optik

15.5 Brewstersches Gesetz

- Der Brewster-Winkel ist der Einfallswinkel, bei dem transmittierter und reflektierter Strahl einen rechten Winkel bilden würden. Wenn die Polarisation des Lichtes parallel zur abgebildeten Ebene ist, werden die Elektronen auf der Grenzfläche parallel zum reflektierten Strahl oszillieren.

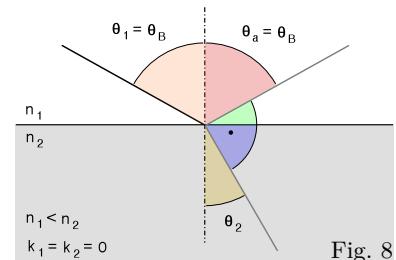


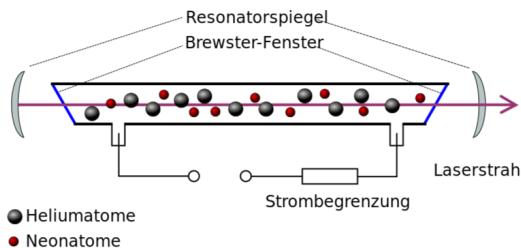
Fig. 8

Nachdem die oszillierenden Elektronen in Beschleunigungsrichtung nicht abstrahlen, existiert kein reflektierter Strahl, die parallel zur Einfallsebene polarisierte Komponente des einfallenden Lichtes wird vollständig transmittiert.

- Aus der oben diskutierten Bedingung kann man den Brewsterwinkel sofort ausrechnen:

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} \quad 40$$

- Es liegt auf der Hand, dass die vollständige Transmission im Brewsterwinkel große praktische Bedeutung hat. Laser, deren aktives Medium nur eine geringe Verstärkung aufweist (z.B. der HeNe-Laser), wären ohne diesen Effekt technisch nur schwer handhabbar: Man muss dafür sorgen, dass die Reflexionsverluste bei jedem Umlauf im Laserresonator kleiner sind als die Gewinne durch die Verstärkung.



Eine weitere Klasse von Anwendungen betrifft die Herstellung polarisierten Lichtes.

- Bem.: Ebenso wie die Totalreflexion ist auch der Brewster-Effekt als Spezialfall in den Fresnel-Formel enthalten.

16 Der Brechungsindex, Lorentz-Modell

16.1 Brechungsindex durchsichtiger Körper

- Der einfachste Fall eines durchsichtigen Körpers (Dielektrikum) ist der eines verdünnten Gases, d.h. die Atome wechselwirken nicht. Dafür gilt die folgende als Lorentz-Modell bekannte Betrachtung in guter Näherung; qualitativ gilt sie auch für andere Dielektrika.
- Wir hatten in Kap. 11 die Wellengleichung im Vakuum hergeleitet und dabei für die Phasengeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ gefunden. Dieselben Schritte ausgeführt für ein durchsichtiges (also keine freien Ladungen und Ströme) isotropes Medium führt auf eine Phasengeschwindigkeit c' im Medium von

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}. \quad 1$$

- Für μ_r können wir sofort $\mu_r = 1$ annehmen: $\mu_r \ll 1$ trifft nur auf ferromagnetische Stoffe zu und die sind in aller Regel nicht durchsichtig.
- Wenn wir (1) mit der Definition des Brechungsindex $n = c/c'$ abgleichen, sehen wir, dass

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad 2$$

- Wir modellieren nun die Atome unseres Dielektrikums als ein Elektron, das an einen Kern *harmonisch* gebunden ist und durch ein elektrisches Feld in eine Oszillation versetzt wird. Die charakteristische Frequenz dieses Oszillators (dominierende Resonanzlinie des Atoms) sei ω_0 . \Rightarrow Die Bewegungsgleichung des Oszillators lautet

$$m_e \frac{d^2 z}{dt^2} = m_e \omega_0^2 z - e \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \quad 3$$

(Wir sparen uns hier die vektorielle Schreibweise, meinen aber z.B. $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \vec{e}_z$.

- Die Differentialgleichung (3) kann mit dem Ansatz $z = A_0 \sin \omega t$ leicht gelöst werden. Man erhält

$$z(t) = \frac{e \mathcal{E}_0}{m_e (\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \omega t. \quad 4$$

¹⁶ <http://farside.ph.utexas.edu>

7. Damit können wir auch das Dipolmoment \vec{p} dieses Atoms angeben,

$$\vec{p} = -e z \vec{e}_z \stackrel{(4)}{=} \frac{e^2}{m_e (\omega^2 - \omega_0^2)} \vec{\mathcal{E}}. \quad 5$$

8. Für ein Ensemble von n Atomen pro Volumen erhalten wir das Dipolmoment pro Volumen, also die Polarisation \vec{P}

$$\vec{P} = \frac{n e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{\mathcal{E}}. \quad 6$$

9. In Kap. 7 hatten wir

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \varepsilon_0 \chi \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \varepsilon_0 \chi \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Mit $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{\mathcal{E}}$ folgt bekanntlich $\varepsilon_r = 1 + \chi$.

$$\Rightarrow \chi = \varepsilon_r - 1$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{\mathcal{E}} \quad 7$$

10. Vergleiche (6) und (7) \Rightarrow

$$\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) = \frac{n e^2}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad 8$$

11. Wir sehen also, dass die dielektrische "Konstante" ε_r (und damit der Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon_r}$) von der Frequenz abhängt. Nachdem die Phasengeschwindigkeit in einem Medium durch $c/\sqrt{\varepsilon_r} \equiv c/n$ gegeben ist, laufen Wellen verschiedener Frequenzen mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Dieses Phänomen nennt man Dispersion.

12. Beispiel:

λ [nm]	480	589	656
Quarzglas	1.464	1.458	1.456
BK 7	1.522	1.516	1.514
SF 10	1.748	1.728	1.721
Diamant	2.437	2.417	2.410

13. Das oben diskutierte Lorentz-Modell ist natürlich eine drastische Approximation insofern nur eine, wenn auch die dominierende, atomare Resonanz berücksichtigt wurde. Reale Atome und Moleküle haben eine Vielzahl von Resonanzen, die

mit einer entsprechenden Verallgemeinerung des Modells auch in die Rechnung einbezogen werden können. In der Praxis verwendet man jedoch in der Regel sie Sellmeier-Formel

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3}. \quad 9$$

Die Koeffizienten B_i und C_i findet man in der Regel in den Datenblättern der Hersteller der jeweiligen Gläser.

14. Das Lorentz-Modell deutet bereits darauf hin, dass Dispersion und Absorption untrennbar miteinander verbunden sind, da die Dispersion eine Konsequenz atomarer Resonanzen ist, die ihrerseits für die Absorption von Licht durch Materie verantwortlich zeichnen. Der genaue Zusammenhang wird durch die Kramers-Kronig-Relationen beschrieben. Diese Relationen sind höchst bemerkenswert, da sie mit ganz wenigen, dafür aber fundamentalen Annahmen hergeleitet werden können: Man braucht nicht mehr als Kausalität und das Superpositionsprinzip (Linearität).

16.2 Das Prisma

1.

16.3 Der Regenbogen

1.

16.4 Brechungsindex von Plasmen und Metallen

1. Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für ein Plasma mit idealer Elektronenbeweglichkeit und für Metalle soweit, wie die Elektronen als frei beweglich betrachtet werden können.
2. Von Atomen kennen wir die Beziehung

$$(8): \varepsilon_r = 1 + \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Für ein idealisiertes Plasma würden wir die Rückstellkraft auf die Elektronen = 0 setzen und damit $\omega_0 = 0$. Außerdem ist die Atomdichte n durch die Elektronendichte n_e zu ersetzen.

$$\Rightarrow \varepsilon_r = 1 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} =: 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad 30$$

wobei

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad 31$$

die sogenannte Plasmafrequenz ist.

3. (30) scheint gleich aus zwei Gründen problematisch zu sein:

- für $\omega > \omega_p$ ist $\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1$
 $\Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r} < 1 \Rightarrow$ Wellengeschwindigkeit $c/n > c$!
- für $\omega < \omega_p$ ist $\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 0$
 $\Rightarrow n$ ist rein imaginär!

Der Fall $\omega > \omega_p$ (also $n < 1$)

4. Betrachte eine ebene Welle \Rightarrow das elektrische Feld hat die Form

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_z \quad 32$$

5. Ein Feldmaximum (Schwingungsbauch) bewegt sich demnach mit der Phasengeschwindigkeit v_p definiert durch

$$k x - \omega t \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_p = \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k}. \quad 33$$

¹⁶ <http://farside.ph.utexas.edu>

6. Andererseits wissen wir, dass die Phasengeschwindigkeit im Medium gegeben ist durch

$$v_p = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad 34$$

7. (34) in (33) \Rightarrow

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon_r} \quad 35$$

8. (30): $\epsilon_r = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ in (35) \Rightarrow

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{1 - 1 - \omega_p^2/\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 - \omega_p^2 = k^2 c^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \quad 36$$

9. (36) legt die Frequenz in Abhängigkeit des Wellenvektors \vec{k} fest. So eine Beziehung nennt man Dispersionsrelation.

10.

17 Resonatoren

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit zwei Resonatoren, je einem im Radiowellen- und optischen Bereich. Die technische Bedeutung beider Fälle ist sicherlich zur Rechtfertigung der vergleichsweise ausführlichen Behandlung mehr als ausreichend; für den Radiowellen-Resonator tritt dazu noch die lehrreiche direkte Anwendung der Maxwellschen Gleichungen. Gleichwohl ist das eigentliche Motiv dieses Kapitels die Analogie zur Quantenmechanik. Wir werden darauf am Ende dieses Kapitels zurückkommen.

17.1 Fabry-Pérot Interferometer

1. Vor der Erfindung der Laserspektroskopie war das Fabry-Pérot-Interferometer in der Spektroskopie eines, wenn nicht das Instrument mit der höchsten Auflösung. Grundlegende Eigenschaften in der Atomphysik, wie die Hyperfeinstruktur-Aufspaltung, konnten erst mit seiner Hilfe detektiert werden.
2. Das Fabry-Pérot-Interferometer besteht aus zwei nahezu vollständig verspiegelten parallelen Glasplatten (Reflexionskoeffizient $|r| \approx 100\%$, Transmissionskoeffizient $t = 1 - r$, beide für die Amplituden) im Abstand d .¹⁷ Die Umlaufzeit τ des Lichtes in der “Cavity” beträgt entsprechend

$$\tau = \frac{2d}{v} = \frac{2nd}{c}, \quad 30$$

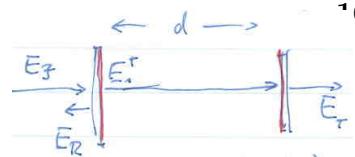
wobei n der Brechungsindex des Mediums zwischen den Platten ist. O.B.d.A. wollen wir $n = 1$ annehmen.

3. Nachdem die Spiegel so gut wie vollständig verspiegelt sind – wir wollen für die folgende Diskussion eine metallische Verspiegelung annehmen – muss das elektrische Feld auf den Spiegeloberflächen verschwinden. Damit sind in der Cavity nur mehr stehende Wellen möglich, die ihre Schwingungsknoten auf der Spiegeloberfläche haben. Offensichtlich können dann nur Wellenlängen λ existieren, für die gilt

$$d = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } m \in \mathbf{N} \quad 31$$

¹⁷ Wenn man stattdessen einen Glasblock mit verspiegelten Oberflächen nimmt – also d nicht veränderlich ist – spricht man von einem *Etalon*.

4. Tatsächlich ist obige Bedingung nicht ganz so scharf wie eben behauptet. Für eine genauere Analyse führen wir folgende Felder ein:



das einfallende Feld \mathcal{E}_i , das reflektierte Feld \mathcal{E}_r , das transmittierte Feld \mathcal{E}_t und das Feld unmittelbar nach seiner Reflexion auf der linken Spiegeloberfläche \mathcal{E}_1^+ , also das in positive Richtung laufende Feld auf dem ersten Spiegel. Diese Felder haben natürlich eine Phase, werden also mit Vorteil als komplexe Größen aufgefasst.

5. Zur Berechnung der Felder bedienen wir uns des sog. Propagationsfaktors $P(\Delta z, \Delta t)$. Er ist definiert als Verhältnis des Feldes am Ort z zur Zeit t und des Feldes am Ort $z + \Delta z$ zur Zeit $t + \Delta t$,

$$P(\Delta z, \Delta t) = \frac{\mathcal{E}(z + \Delta z, t + \Delta t)}{\mathcal{E}(z, t)}$$

bzw. $\mathcal{E}(z + \Delta z, t + \Delta t) = P(\Delta z, \Delta t) \cdot \mathcal{E}(z, t)$ 32

6. Für eine ebene Welle $\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}_0 \exp[i(\omega t - kz)]$ kann man den Propagationsfaktor mit Hilfe seiner Definition (32) sofort angeben:

$$P(\Delta z, \Delta t) = \exp[i(\omega \Delta t - k \Delta z)]. \quad 33$$

7. Bem.: Der Propagationsfaktor enthält *keine* mögliche Phasensprünge bei der Reflexion oder Transmission durch optische Elemente. Der Einfachheit halber wollen wir solche auch ignorieren, obwohl wir sie problemlos in r und t einbauen könnten nachdem diese $\in \mathbf{C}$ sind.

8. Das einfallende Feld hat auf der linken Spiegeloberfläche die Form

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{0i} e^{i\omega t}. \quad 34$$

Wenn wir nach dem Einschalten des Lichtfeldes von einem konstanten Feld ausgehen, ist die Amplitude \mathcal{E}_{0i} (nach dem Einschalten) nicht zeitabhängig.

9. Das Cavityfeld \mathcal{E}_1^+ muss aus Stetigkeitsgründen mit derselben Frequenz wie \mathcal{E}_i oszillieren,

$$\mathcal{E}_1^+ = \mathcal{E}_{0i}^+(t) e^{i\omega t}. \quad 35$$

Allerdings müssen wir davon ausgehen, dass die Amplitude zumindest unmittelbar nach dem Einschalten zeitabhängig ist.

10. Eine Umlaufzeit später – also bei $t + \tau$ – setzt sich das nach rechts laufende Feld an der linken Spiegeloberfläche aus zwei Beiträgen zusammen: (i) Der Teil des einfallenden Feldes \mathcal{E}_i , der im Augenblick $t + \tau$ transmittiert wird, also $t \mathcal{E}_i(t + \tau)$. (ii) Das Licht, das einen Umlauf hinter sich hat, also am rechten und dann am linken Spiegel reflektiert wurde, d.h. $r^2 P(\Delta z = 2d, \Delta t = \tau) E_1^+(t)$.

$$\Rightarrow \mathcal{E}_1^+(t + \tau) = t \mathcal{E}_i(t + \tau) + r^2 P(2d, \tau) \mathcal{E}_1^+(t) \quad 36$$

11. (33) bis (35) in (36) \Rightarrow

$$\mathcal{E}_{01}^+(t + \tau) e^{i\omega(t+\tau)} = t \mathcal{E}_{0i} e^{i\omega(t+\tau)} + r^2 e^{i(\omega\tau - 2kd)} \mathcal{E}_{01}^+(t) e^{i\omega\tau} \quad 37$$

12. Einige Zeit nach dem Einschalten wird sich ein stationärer Zustand einstellen, $\mathcal{E}_{01}^+(t)$ wird also seine Zeitabhängigkeit verlieren, so dass $\mathcal{E}_{01}^+(t + \tau) = \mathcal{E}_{01}^+(t) \equiv \mathcal{E}_{01}^+$. Das eingesetzt in (37) ergibt

$$\mathcal{E}_{01}^+ = t \mathcal{E}_{0i} + r^2 e^{-i2kd} \mathcal{E}_{01}^+,$$

und aufgelöst nach \mathcal{E}_{01}^+

$$\mathcal{E}_{01}^+ = \frac{t}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \cdot \mathcal{E}_{0i} \quad \text{mit } \delta := 2k d \quad 38$$

13. Zur Berechnung des durch den zweiten Spiegel transmittierten Feldes \mathcal{E}_t ist \mathcal{E}_{01}^+ nochmals zu propagieren, aber natürlich nur der Hinweg. Außerdem ist die Transmission durch den zweiten Spiegel zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(t + \frac{\tau}{2}) &= t \cdot P(\Delta z = d, \Delta t = \frac{\tau}{2}) \cdot \mathcal{E}_1^+(t) = \\ &= t \cdot \mathcal{E}_{01}^+ \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\tau/2 - \delta/2} \end{aligned} \quad 39$$

14. (38) in (39) und $\mathcal{E}_t(t) = \mathcal{E}_{0t} \cdot e^{i\omega t}$ $\Rightarrow \mathcal{E}_t(t + \frac{\tau}{2}) = \mathcal{E}_{0t} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\tau/2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{E}_{0t} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\tau/2} &= t \cdot \frac{t}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega\tau/2} \cdot e^{-i\delta/2} \\ \Rightarrow \mathcal{E}_{0t} &= \frac{t^2 e^{-i\delta/2}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \cdot \mathcal{E}_{0i} \end{aligned} \quad 40$$

15. Die Intensität ist proportional zum Betragsquadrat des Feldes \Rightarrow die Transmission des Fabry-Pérot-Interferometers ist gegeben durch

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\mathcal{E}_{0t} \mathcal{E}_{0t}^*}{\mathcal{E}_{0i} \mathcal{E}_{0i}^*} = \frac{t^4 e^{-i\delta/2} e^{+i\delta/2}}{(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})}$$

$$\text{NR: } (1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta}) = 1 - r^2 e^{+i\delta} - r^2 e^{-i\delta} + r^4 e^{-i\delta} e^{+i\delta} = \\ = 1 + r^4 - 2 r^2 \cos \delta.$$

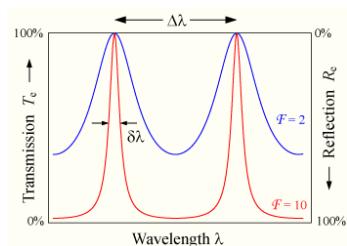
$$\Rightarrow T = \frac{t^4}{1 + r^4 - 2 r^2 \cos \delta} = \frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^4 - 2 r^2 \cos \delta} \quad 41$$

16. Schließlich verwenden wir noch die trigonometrische Identität $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ und erhalten damit

$$T = \frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^4 - 2 r^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}\right)} = \frac{(1 - r^2)^2}{1 + r^4 - 2 r^2 + 4 r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \\ = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{4 r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad 42$$

Damit ist die Transmission in Form einer Funktion ausgedrückt worden, die Optiker als Airy-Funktion bezeichnen, während der Rest der Wissenschaft darunter was Anderes versteht.

- 17.



17.2 Finesse, Fringe-Kontrast, freier Spektralbereich

Fringe-Kontrast

1. Der Term

$$F = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \quad 45$$

in (42) wird nach Fabry als Finesse-Koeffizient bezeichnet. Diese Bezeichnung stiftet Verwirrung, weil man unter Finesse \mathcal{F} etwas leicht anderes versteht. Jedenfalls kann man mit F die Fabry-Pérot-Transmission T etwas kompakter schreiben,

$$T = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad 46$$

Wir werden gleich sehen, dass F gerade der Fringe-Kontrast ist. (Insofern besteht also kein Bedarf für die mit dem Namen Finesse-Koeffizient verursachte Verwirrung.)

2. Das Maximum $T_{\max} = 1$ wird für das Minimum des Nenners von (46) erreicht, also für $\sin^2 \frac{\delta}{2} = 0$ bei $\delta = m 2\pi$. Das Minimum $T_{\min} = 1/(1+F)$ erreicht man bei $\sin^2 \frac{\delta}{2} = 1$ für $\delta = (m + \frac{1}{2}) 2\pi$.
3. Den Fringe-Kontrast kann man sinnvollerweise definieren als

$$\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\min}} = \frac{1 - \frac{1}{1+F}}{\frac{1}{1+F}} = \frac{1+F-1}{1} = F. \quad 47$$

Finesse-Koeffizient und Fringe-Kontrast sind also tatsächlich dasselbe.

Finesse \mathcal{F}

4. Die Finesse \mathcal{F} ist definiert als das Verhältnis der Differenz der Phasen zweier benachbarter Transmissionsmaxima und der Halbwertsbreite der Maxima. Erstes wird auch als *freier Spektralbereich* FSR bezeichnet.¹⁸

$$\mathcal{F} := \frac{\text{freier Spektralbereich}}{\text{Halbwertsbreite}} = \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} \quad 48$$

5. Der FSR ist natürlich $\delta = 2\pi$, und man mag sicher wundern, warum er einen eigenen Namen verdient. Das erschließt sich, wenn man den FSR nicht als Phase,

¹⁸ FSR = free spectral range, FWHM = full width at half maximum

sondern mit (38): $\delta = 2 k d$ als Frequenz- oder Wellenlängenbereich angibt.

6. Die Halbwertsbreite berechnet sich aus (46) mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta_{1/2}}{2}} &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \implies 2 = 1 + F \sin^2 \frac{\delta_{1/2}}{2} \implies \\ \implies \sin^2 \frac{\delta_{1/2}}{2} &= \frac{1}{F} \stackrel{\delta_{1/2} \ll 1}{\implies} \frac{\delta_{1/2}^2}{4} = \frac{1}{F} \implies \\ \implies \delta_{1/2} &= \frac{2}{\sqrt{F}} \implies \text{FWHM} = \frac{4}{\sqrt{F}} \end{aligned} \quad 49$$

7. Damit wird die Finesse \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi\sqrt{F}}{4} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi r}{1 - r^2} \quad 50$$

An dieser Stelle erinnern wir daran, dass r der Amplituden-Reflexionskoeffizient ist; üblicherweise verwendet man in (50) stattdessen den Intensitäts-Reflexionskoeffizienten $R = r r^*$.

8. \mathcal{F} kann man als das Auflösungsvermögen des Fabry-Pérot-Interferometers begreifen. Offensichtlich interferieren umso mehr Wellen, je größer \mathcal{F} ist. Das erinnert ans Gitter, bei dem das Auflösungsvermögen ebenfalls von der Anzahl interferierender Wellen abhängt. Mit dielektrischen Spiegeln lassen sich Finesen bis zu ca. 10^6 erreichen. In der Cavity ist die umlaufende Laserintensität dann um diesen Faktor gegenüber der einfallenden und transmittierten Intensität überhöht.

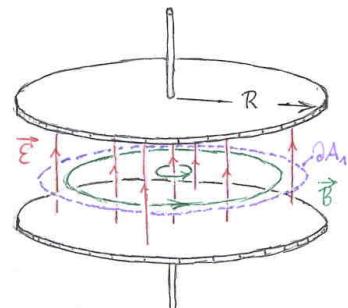
17.3 Der Plattenkondensator bei hohen Frequenzen

1. Im quasistatischen Fall ist das elektrische Feld im Kondensator (abgesehen von Randeffekten) homogen. Wenn also an einen Plattenkondensator eine niederfrequente Wechselspannung angelegt wird, kann das elektrische Feld angegeben werden mit

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

1

2. Wir werden im Folgenden für den zylindrischen Plattenkondensator zeigen, dass bei hohen Frequenzen das elektrische Feld im Kondensator inhomogen wird. Das kommt daher, dass das zeitlich variierende Feld gemäß dem Ampère-Gesetz ein Magnetfeld zur Folge hat. Dieses ist selbstverständlich ebenfalls zeitabhängig, aber zusätzlich auch ortsabhängig, wie wir bei der experimentellen Demonstration des Maxwellschen Verschiebungstromes gesehen haben.



Das zeitabhängige Magnetfeld hat aufgrund des Faraday-Gesetzes ein elektrisches Feld zur Folge, das das ursprünglich homogene elektrische Feld im Kondensator modifiziert. Nachdem das das zusätzliche elektrische Feld induzierende Magnetfeld inhomogen ist, ist zu erwarten, dass auch das zusätzliche elektrische Feld inhomogen ist und daher das elektrische Gesamtfeld im Kondensator ebenfalls inhomogen wird.

3. Das durch den Verschiebungstrom verursachte Magnetfeld \vec{B}_1 können wir leicht berechnen (vergl. Kap. 11.4) solange wir in erster Näherung ein homogenes \mathcal{E} -Feld annehmen:

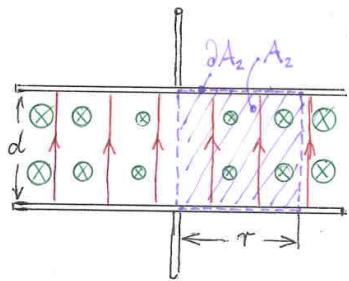
$$c^2 \oint_{\partial A_1} \vec{B}_1 d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_1} \vec{\mathcal{E}}_1 d\vec{A}$$

$$\implies c^2 2\pi r B_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} r^2 \pi)$$

$$\implies B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

2

4. Wie angekündigt, ist das Magnetfeld vom Radius r und der Zeit t abhängig. Entsprechend ändert sich der magnetische Fluss durch die in Fig. 2 skizzierte Fläche A_2 , sodass das Liniensintegral entlang der Umrandung gemäß dem Faraday-Gesetz nicht verschwindet:



$$\oint_{\partial A_2} \vec{\mathcal{E}} \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_2} \vec{B}_1 \, d\vec{A} \quad 3$$

5. In (3) können wir $\vec{\mathcal{E}}$ als Gesamtfeld im Kondensator betrachten. Alternativ – und das ist im Weiteren zweckmäßig – können wir $\vec{\mathcal{E}}$ als Summe des ursprünglichen homogenen Feldes $\vec{\mathcal{E}}_1$ und der durch das zeitabhängige Magnetfeld induzierten Korrektur $\vec{\mathcal{E}}_2$ betrachten, weil sich die Beiträge des homogenen Feldes bei der Weg-Integration nach oben und unten aufheben. (Die Beiträge von den waagerechten Wegstücken verschwinden ohnehin, da in den Kondensatorplatten $\mathcal{E} = 0$ ist.) \Rightarrow

$$\oint_{\partial A_2} \vec{\mathcal{E}}_2 \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_1} \vec{B}_1 \, d\vec{A}. \quad 4$$

6. Wenn man (4) genau ansieht und $B(r=0) = 0$ bedenkt, erkennt man, dass $\mathcal{E}_2(r=0)$ ebenfalls $= 0$ sein muss. Auf der Symmetrieachse des Plattenkondensators ändert sich die Amplitude der elektrischen Feldstärke also nicht. (Auch bei den später folgenden weiteren Korrekturen wird das so bleiben.) Die Tatsache $\mathcal{E}_2(r=0)$ ist hilfreich, um die *lhs* von (4) zu berechnen: nur der senkrechte Integrationsweg bei r trägt bei:

$$\oint_{\partial A_2} \vec{\mathcal{E}}_2 \, d\vec{s} = \mathcal{E}_2 d. \quad 4$$

Ob wir das richtige Vorzeichen erwischt haben, ob also $\vec{\mathcal{E}}_2$ parallel zu $d\vec{s}$ ist und damit nach oben zeigt, werden wir gleich sehen.

7. Die *rhs* von (4) ist ebenfalls leicht zu berechnen. Wenn wir die mit Fig. 2 implizierte Orientierung von A_2 beachten (\vec{B}_1 antiparallel \vec{A}_2), gilt

$$+\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_2} \vec{B}_1 \mathrm{d}\vec{A} = +\frac{\partial}{\partial t} \int_{y=0}^d \int_{r'=0}^r B_1 \mathrm{d}r' \mathrm{d}y = +d \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \vec{B}_1 \mathrm{d}r'$$

Zusammen mit der in -6 berechneten *lhs* \Rightarrow

$$\mathcal{E}_2 = +\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \vec{B}_1 \mathrm{d}r' \quad 5$$

8. (2) in (5) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= +\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \frac{i\omega r'}{2c^2} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \mathrm{d}r' \\ &= -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad 6$$

\mathcal{E}_2 zeigt also entgegen der Annahme in -6 nach unten, also in die entgegengesetzte Richtung wie \mathcal{E}_1 .

9. Die korrigierte elektrische Feldstärke im Kondensator beträgt also

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad 7$$

10. (7) bedeutet leider auch, dass wir das Magnetfeld in -3 nicht ganz richtig berechnet haben: wir hätten das korrigierte \mathcal{E} -Feld verwenden müssen. Zum Glück hängt das B -Feld *linear* vom \mathcal{E} -Feld ab. Wir können deshalb nur die eben berechnete Korrektur des \mathcal{E} -Feldes \mathcal{E}_2 verwenden, um die dadurch erforderliche

Korrektur B_2 des Magnetfeldes auszurechnen:

$$\begin{aligned} c^2 \oint_{\partial A_1} \vec{B}_2 \, d\vec{s} &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_1} \vec{\mathcal{E}}_2 \, d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r'=0}^r \mathcal{E}_2(r') r' dr' \, d\varphi \\ \implies c^2 2\pi r B_2 &= \frac{\partial}{\partial t} 2\pi \int_0^r \mathcal{E}_2(r') r' dr' \\ \implies B_2(r) &= \frac{1}{r c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \mathcal{E}_2(r') r' dr' \quad 8 \\ \stackrel{(6)}{\implies} B_2(r) &= \int_0^r -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} r' dr' = -i \frac{\omega^3 r^3}{16c^4} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad 9 \end{aligned}$$

11. Die Korrektur des Magnetfeldes macht eine weitere Korrektur des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes erforderlich. Zum Glück ist \mathcal{E} nach wie vor proportional zu B , so dass für die Korrektur der Korrektur des $\vec{\mathcal{E}}$ -Feldes nur B_2 berücksichtigt werden muss. Folglich können wir (5) recyceln, wir müssen nur die Indices erhöhen:

$$\mathcal{E}_3 = + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \vec{B}_2 \, dr' \quad 10$$

12. (9) in (10) \implies

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r -i \frac{\omega^3 r'^3}{16c^4} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} dr' = + \frac{\omega^4 r^4}{64c^4} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \\ &= \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c} \right)^4 \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad 11 \end{aligned}$$

13. Nun die Korrektur der Korrektur des B -Feldes. Wir erhöhen die Indices in (8) und setzen (11) ein:

$$\begin{aligned} B_3(r) &= \frac{1}{r c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \mathcal{E}_3(r') r' dr' = \frac{1}{r c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r \frac{\omega^4 r'^4}{64c^4} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} r' dr' = \\ &= \frac{i\omega}{r c^2} \frac{\omega^4 r^5}{64 \cdot 5 c^4} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = i \frac{\omega^5 r^5}{64 \cdot 5 c^6} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \quad 12 \end{aligned}$$

14. (12) in (10) mit entsprechend erhöhten Indices: \Rightarrow

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_4 &= + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r i \frac{\omega^5 r'^5}{64 \cdot 5 c^6} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} dr' = \\ &= - \frac{\omega^6}{64 \cdot 5 c^6} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \int_0^r r'^5 dr' = - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}\end{aligned}\quad 13$$

15. Damit dürfte klar sein, wie die Reihe fortzusetzen ist. Das $\vec{\mathcal{E}}$ -Feld im Kondensator ist also gegeben durch

$$\mathcal{E}(r, t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 - \dots \right] \quad 14$$

16. Ebenso wie beispielsweise $\sin(x)$ durch die Reihenentwicklung $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{3!}x^5 - \dots$ gegeben ist, kann man obige Reihe als Darstellung einer gewissen speziellen Funktion $J_0(x)$ betrachten, wobei in (14) das Argument $\omega r / 2c$ ist. $J_0(x)$ gehört der Familie der Besselfunktionen an. Man braucht keinen besonderen Respekt vor ihr zu haben – es ist auch nur eine Funktion, die wie die uns geläufigeren Funktionen eine gewisse Reihenentwicklung hat und Lösung einer Differentialgleichung ist. In der Physik ist sie weit verbreitet wann immer Probleme mit zylindrischer Symmetrie vorliegen (z.B. Beugung von Licht an einem runden Loch). Ein anderes bedeutendes Problem, bei dem Besselfunktionen helfen, ist die Berechnung der Amplituden der Seitenbänder bei der Frequenz-Modulation.

$$\mathcal{E}(r, t) = \mathcal{E}_0 \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{2c}\right) \cdot e^{i\omega t} \quad 15$$

17.4 Der Plattenkondensator als Resonator

1.