Prof. M. Zähle–Ziezold, U. Freiberg

14.02.2009, 9:00-12:00 Uhr

Wintersemester 2008/2009

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Klausur

Hinweise: Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Insgesamt können Sie 45 Punkte erreichen. Die Klausur gilt als bestanden, wenn 25 Punkte erreicht werden.

Eine Lösung kann nur gewertet werden, wenn der Lösungsweg klar erkennbar ist. Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug. Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Bitte verwenden Sie für **jede** Aufgabe ein **neues** Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Studienrichtung** und Ihrer **Matrikel-Nummer**.

(Name, Vorname) (Studienrichtung) (Matrikel-Nr.) (Punkte) (Note) (Zähle)

Aufgabe 1 (3+2=5 Punkte)

Was ist

(a) eine Gruppe,

(b) ein Vektorraum,

(c) eine affine Geometrie?

Geben Sie bei (a) und (b) je ein Beispiel an (ohne Begründung)!

Aufgabe 2 (1+3+3=7 Punkte)

(a) Was ist ein Vektorraumisomorphismus?

(b) Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Vektorraumisomorphismen. Zeigen Sie: Die Hintereinanderausführung von f und g ist wieder ein Vektorraumisomorphismus.

(c) Beweisen Sie: Alle n–dimensionalen Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ sind isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge eines reellen homogenen linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist. (Benutzen Sie die Matrixdarstellung.)

Aufgabe 4 (3+2+5=10 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha+2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

aufgespannte Unterraum.

(a) Bestimmen Sie $\dim U$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $B(\alpha) = (b_1, b_2, b_3)$.

(c) Berechnen Sie $B(\alpha)^{-1}$ für diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $B(\alpha)$ invertierbar ist.
Hinweis: Die CRAMERsche Regel bietet sich hier an.

Aufgabe 5 (3+1+3=7 Punkte)

Von einer linearen Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei bekannt, dass

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und dass $\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Begründen Sie, warum $\mathbf{F}$ durch obige Festlegung auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

(c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\mathbf{F}$ bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

(a) Sei $\varphi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines $\mathbb{K}$–Vektorraums V und $k \in \mathbb{N}$. Man zeige: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ, so ist λ^k Eigenwert von $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k}$.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte (sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{C}$) und die Eigenvektoren (nur über $\mathbb{R}$) von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Gegeben sei der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard–Skalarprodukt. Orthonormieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormierungsverfahrens die Basis (v_1, v_2, v_3), wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$