

3. Geometrie in euklidischen (und hermiteschen) Räumen.

Euklidisch $\iff \mathbb{R}^n$ mit $(v, w) = v^t w$.

Hermitesch $\iff V = \mathbb{C}^n$ mit $\langle v, w \rangle = \bar{v}^t w$.

$$|v|^2 = (v, v) \text{ oder } |v|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Satz 3.1. (der Satz des Pythagoras).

Stehen zwei Vektoren v, w senkrecht aufeinander, so gilt $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2$.

Bew. $|v+w|^2 = (v+w) \cdot (v+w) = (v, v) + (v, w) + (w, v) + (w, w) = |v|^2 + |w|^2$. (Der herm. Fall ähnlich). \square

Bew. In \mathbb{R}^n : $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \iff (v, w) = 0$;
aber in \mathbb{C}^n : $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \iff \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle = 0 \iff$
 $\iff \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} = 0 \iff \langle v, w \rangle \in i\mathbb{R}$.

Sei nun $v \in V$ ein Vektor und $\mathcal{U} \subseteq V$ ein Unterraum. Wir suchen einen Punkt (Vektor) $u_0 \in \mathcal{U}$, der den kleinsten Abstand zu v hat:
 $|v - u_0| \leq |v - u| \quad \forall u \in \mathcal{U}$; setzen $d(v, \mathcal{U}) = |v - u_0|$.

Lemma 3.2. Für den Punkt u_0 gilt:

$v - u_0 \perp \mathcal{U}$ und u_0 ist der einzige Vektor in \mathcal{U} mit der Eigenschaft.

Bew. Erstens zeigen wir, dass ein solcher u_0 existiert. Sei $\{t_1, \dots, t_m\}$ eine orthonormale Basis von \mathcal{U} , $m = \dim \mathcal{U}$. (Das Skalarprodukt ist positiv definit auf \mathcal{U} , so gelten die Sätze

2.5. und 2.17.). Damit ist

$v - u_0 = v - (v \cdot t_1)t_1 - \dots - (v \cdot t_m)t_m$ zu jedem t_i (und zu \mathcal{U}) orthogonal.

(Herm.: $u_0 = \langle v, t_1 \rangle t_1 + \dots + \langle v, t_m \rangle t_m$.)

Der Vektor u_0 ist die orthogonale Projektion von v auf \mathcal{U} .

Wenn $u \in \mathcal{U}$, dann, nach Pythagoras,

$|v - u|^2 = |v - u_0|^2 + |u - u_0|^2$, weil $(v - u_0) \perp (u - u_0)$,
denn $u - u_0 \in \mathcal{U}$ (\mathcal{U} ist ein Unterraum).

$|v - u|^2 \geq |v - u_0|^2$ und die sind gleich, nur wenn
 $u = u_0$.

Falls $(v - u) \perp \mathcal{U}$, dann $((v - u) - (v - u_0)) \perp \mathcal{U}$ und
insb. $(u_0 - u) \perp (u_0 - u)$. Also $u - u_0 = \vec{0}$, $u = u_0$. \square

Satz 3.3. (i) [Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung]

$$|(v \cdot w)| \leq |v| \cdot |w| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n;$$

$$(|\langle v, w \rangle| \leq |v| \cdot |w| \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n).$$

(ii) [Dreiecksungleichung]

$$|v + w| \leq |v| + |w| \quad \forall v, w \in V.$$

Bew. (i) Wenn wir v mit $r \in \mathbb{R}$ multiplizieren,
multiplizieren sich die beiden Seiten mit r .

So nehmen wir an, $|v| = 1$. (Der Fall $|v| = 0$,

wo $v = \vec{0}$, ist klar.) Nun $w = (w \cdot v)v + u_0$, wo
 $(u_0 \cdot v) = 0$ (orthogonale Projektion auf $\mathbb{R}v$). Nun

$$|(w \cdot v)|^2 \stackrel{|v|^2=1}{=} |(w \cdot v)v|^2 = |w - u_0|^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{\leq} |w - u_0|^2 + |u_0|^2 = |w|^2.$$

Das Bild:

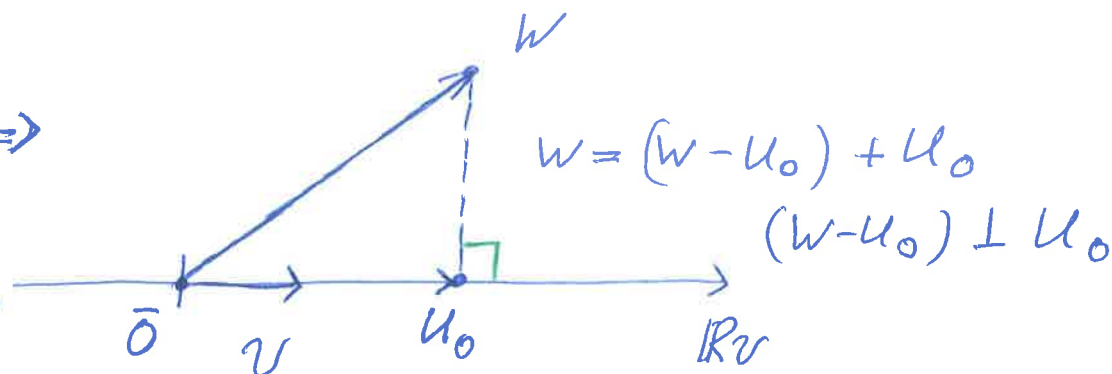
$$|w|^2 = |u_0|^2 + |w - u_0|^2$$

(II)

Merken,

$$|w - u_0| = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow w \in \mathbb{R}v$
(oder $w \in \mathbb{C}v$).



Der herm. Fall ist ähnlich.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad |v+w|^2 &= |((v+w) \cdot (v+w))| = | |v|^2 + |w|^2 + 2(v \cdot w) | \leq \\ &\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|(v \cdot w)| \leq |v|^2 + |w|^2 + 2|v| \cdot |w| = (|v| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz

Die Gleichheit haben wir genau dann, wenn v und w linear abhängig sind und $(v \cdot w) \geq 0$ ($\langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle \geq 0$). \square

Lemma 3.4. [Bessel'sche Ungleichung]

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis in V und $v \in V$. Dann gilt: $|v|^2 \geq \sum_{i=1}^k |(e_i \cdot v)|^2 \forall k \leq n$,
 $|v|^2 \geq \sum_{i=1}^k |\langle e_i, v \rangle|^2$ im hermiteschen Fall.

Bew. (nur für $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ähnlich).

Wir haben $v = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$, wo $\gamma_i = (v \cdot e_i)$.

Weiter, $|v|^2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \geq \sum_{i=1}^k \gamma_i^2$, falls $k \leq n$. \square

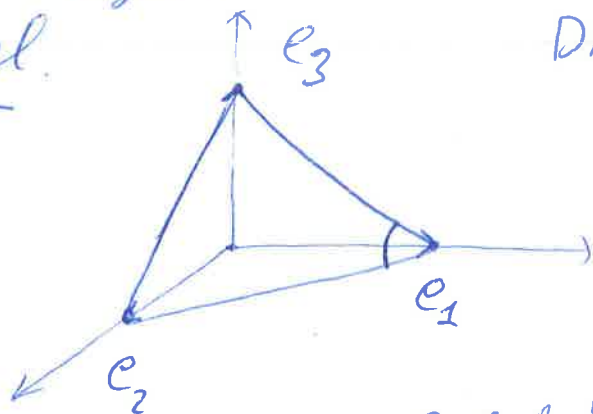
Der Winkel: $\angle(v, w) \in [0, \pi]$ und es muss

gelten $\cos \alpha = \frac{(v \cdot w)}{|v||w|} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} \right)$ für $\alpha = \angle(v, w)$.

Die Vektoren v, w liegen in \mathbb{R}^2 (auch im herm. Fall), da kennen wir schon den Winkelbegriff mit genau

dieser Eigenschaft.
Beispiel.

\mathbb{R}^3

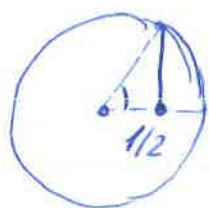


Diese drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel an jeder Ecke sollte folglich $\pi/3$ sein.

Überprüfen:

$$(e_1 - e_3, e_1 - e_2) = 1, |e_1 - e_3| = \sqrt{2} = |e_1 - e_2|$$

$$\text{Damit } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ = \pi/3 \text{ für}$$



$$\alpha = \angle(e_1 - e_3, e_1 - e_2).$$

Der orientierte Winkel in \mathbb{R}^2 : $\gamma = \Delta^\pm(v, w)$.

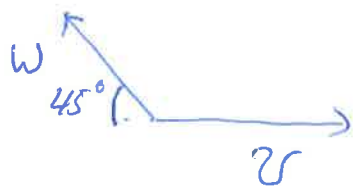
$\gamma \in (-\pi, \pi]$, also $-\pi < \gamma \leq \pi$. ($v \neq \bar{0}, w \neq \bar{0}$.)

$$\Delta^\pm(v, rv) = 0, \Delta^\pm(v, -rv) = \pi, \text{ falls } r > 0.$$

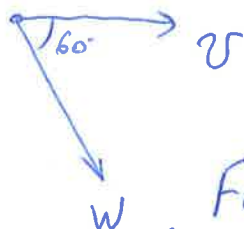
$$\cos \gamma = \begin{cases} \cos \angle(v, w), & \det(v|w) > 0; \\ -\cos \angle(v, w), & \text{sonst} \end{cases}$$

für linear unabhängige v und w .

Beispiele:



$$\Delta^\pm(v, w) = 135^\circ,$$



$$\Delta^\pm(v, w) = -60^\circ.$$

Falls v und w linear unabhängig sind, gilt $\Delta^\pm(v, w) = -\Delta^\pm(w, v)$.

Das Kreuzprodukt in \mathbb{R}^3 ist eine (III)

Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(v, w) \mapsto v \times w$, (Das Produkt ist wieder ein Vektor.)

die bilinear, alternierend $v \times w = -w \times v$ und, s.d. $v_1 \times v_2 = v_3$ für jede Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $\det(v_1 | v_2 | v_3) > 0$, ist.

Satz 3.5. Das Kreuzprodukt existiert und ist durch die Formel $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Bew. Sei das Bild von (v, w) mit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $K(v, w)$ genannt, $K(v, w) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Merken, $c_1 = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}, c_2 = -\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix},$

$c_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Damit ist K bilinear und $K(v, w) = -K(w, v)$.

Entwicklung nach der 3-en Spalte zeigt, dass

$$\det(v | w | K(v, w)) = (K(v, w) \cdot K(v, w)) \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & c_1 \\ x_2 & y_2 & c_2 \\ x_3 & y_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Und noch, dass $(K(v, w) \cdot v) = \det(v | w | v) = 0 =$
 $= \det(v | w | w) = (K(v, w) \cdot w) \cdot \det(v | w | u) = \det(v | w | u) \cdot (K(v, w) \cdot u) = 0 \quad \forall u.$
Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis, so ist
 $A = (v_1 | v_2 | v_3)$ orthogonal, $A^t A = E_3$. Wenn dazu

$\det(A) > 0$, dann $\det(A) = 1$ und wir bekommen $(K(v_1, v_2) \cdot v_3) = 1$, $K(v_1, v_2) \perp v_1, v_2$.

Es folgt $K(v_1, v_2) = v_3$. (Wir haben die Formel $\det(v_1 | v_2 | v_3) = (K(v_1, v_2) \cdot v_3)$ benutzt.)

Nun zu Eindeutigkeit von „ \times “.

$$v \times w = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j e_i \times e_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \beta_j e_i \times e_j =$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ sei die übliche Basis von \mathbb{R}^3)

$$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 \times e_2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_1 \times e_3 +$$
$$+ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_2 \times e_3 = K(v, w), \text{ weil}$$

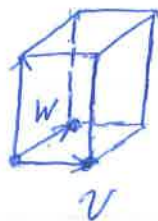
$\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, -e_3, e_2\}$, $\{e_2, e_3, e_1\}$ Orthonormalbasen mit $\det(\dots) > 0$ sind. \boxtimes

Geometrische Bedeutung.

Sind v und w linear abhängig, so gilt $v \times w = \vec{0}$.
Seien v und w linear unabhängig. Dann

$$|v \times w|^2 = \det(v | w | v \times w) \quad \text{und} \quad v \times w \perp v, w.$$

des Volumen des Parallelepipeds



Also ist $|v \times w|$ **der** Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms gleich.

$$|v \times w| = |v||w| \cdot \sin \angle(v, w)$$

Direkt das zu zeigen: $\det(Av | Aw | Au) =$
 $= \det(A) \det(v | w | u)$. Wenn $A \in SO_n$, ändert sich die Determinante $\det(v | w | v \times w)$ nicht. Für $v_1 = \alpha e_1$, $v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$ stimmt die Formel.