Lineare Algebra und analytische Geometrie I

5. Lineare Gleichungssysteme.

Lineare Gleichung

Betrachten wir eine Gleichung

$$a{\cdot}x = b,$$

wo a und b reelle Zahlen sind ($a, b \in \mathbb{R}$) und x eine Unbekannte ist.

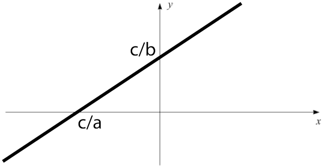
- ◇ Falls $a = 0$, $b \neq 0$, hat die Gleichung keine Lösung.
- ◇ Falls $a = b = 0$, ist jede reelle Zahl u eine Lösung, $0{\cdot}u = 0$.
- ◇ Falls $a \neq 0$, hat die Gleichung genau eine Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Zwei Unbekannte oder zwei Gleichungen

Die Lösungen der Gleichung $a{\cdot}x + b{\cdot}y = c$ bilden

- ◇ die leere Menge, falls $a = b = 0$, $c \neq 0$;
- ◇ die Ebene $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, falls $a = b = c = 0$;
- ◇ eine Gerade, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

Falls $a \neq 0$, $b \neq 0$:



Wenn wir zwei Gleichungen, wie $a_1{\cdot}x = b_1$, $a_2{\cdot}x = b_2$, haben, spricht man von einem **Gleichungssystem**. Schreibweise:

$$\begin{cases} a_1{\cdot}x = b_1 \\ a_2{\cdot}x = b_2 \end{cases}$$

Zwei Unbekannte und zwei Gleichungen, ein Beispiel

$$\begin{cases} 2{\cdot}x + 3{\cdot}y = 5 \\ 7{\cdot}x - 4{\cdot}y = 1 \end{cases}$$

Die Gleichungen kann man z.B. addieren, subtrahieren oder mit reellen Zahlen multiplizieren.

$-5{\cdot}x + 7{\cdot}y = (2{\cdot}x + 3{\cdot}y) - (7{\cdot}x - 4{\cdot}y) = 5 - 1 = 4,\ -5{\cdot}x + 7{\cdot}y = 4;$
$7{\cdot}(2{\cdot}x + 3{\cdot}y) - 2{\cdot}(7{\cdot}x - 4{\cdot}y) = 14{\cdot}x + 21{\cdot}y - 14{\cdot}x + 8{\cdot}y =$
$= 29{\cdot}y = 7{\cdot}5 - 2 = 35 - 2 = 33,$ daraus $y = \frac{33}{29}$.
Weiter, $x = \frac{1}{2}(5 - 3{\cdot}\frac{33}{29}) = \frac{46}{58}$ aus der ersten Gleichung.

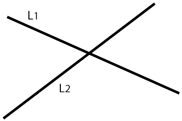
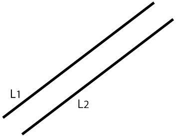
Überprüfen wir die zweite Gleichung: $7{\cdot}\frac{46}{58} - 4{\cdot}\frac{33}{29} = \frac{322-264}{58} = \frac{58}{58} = 1$.

Zwei Unbekannte und zwei Gleichungen, allgemein

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

Angenommen:
$(a_1 \neq 0 \vee b_1 \neq 0) \wedge (a_2 \neq 0 \vee b_2 \neq 0)$.

Geometrische Bedeutung und die Menge der Lösungen:

		
$a_1 \cdot b_2 \neq a_2 \cdot b_1$	$a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 \neq d \cdot c_1$	$a_2 = d \cdot a_1$, $b_2 = d \cdot b_1$, $c_2 = d \cdot c_1$
Schnittpunkt	leere Menge (keine Lösung)	Gerade

Definition (Def. 4.10.)

Ein **Körper** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist eine Menge mit zwei kommutativen assoziativen Verknüpfungen, derart dass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(A1) $(\mathbb{K}, +)$ ist eine Gruppe, die additive Gruppe des Körpers, $e_{(\mathbb{K},+)} = 0_{\mathbb{K}} = 0$;

(A2) die Teilmenge $\mathbb{K}^{\times} = \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$, wo $0_{\mathbb{K}} = e_{(\mathbb{K},+)}$ ist unter "$\cdot$" abgeschlossen und $(\mathbb{K}^{\times}, \cdot)$ ist eine Gruppe, die multiplikative Gruppe des Körpers, $e_{(\mathbb{K}^{\times},\cdot)} = 1_{\mathbb{K}} = 1$;

(A3) Es gilt das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \ \ \forall a, b, c, \in \mathbb{K}$.

Zwei Vereinbarungen:

"Punk vor Strich": $a \cdot c + b \cdot d = (a \cdot c) + (b \cdot d)$.

"Weglassen von Multiplikationssymbolen": $ab = a \cdot b$.

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Unbekannte und seien $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, wo $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n,\ \ m \in \mathbb{N}$, gegeben.
Ein allgemeines lineares Gleichungsystem (LGS) mit m Gleichungen sieht wie Folgendes aus:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1(n-1)}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2(n-1)}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
. & \ldots & & & & & & & & & . \\
. & \ldots & & & & & & & & & . \\
. & \ldots & & & & & & & & & . \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m(n-1)}x_{n-1} & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.$$

Kurz schreiben: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \ \forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant m.$
Die Elemente a_{ij} heißen Koeffizienten, die Elemente b_i heißen Bekannten.

Ein LGS mit m Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1(n-1)}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2(n-1)}x_{n-1} & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & \dots & & & & & & & & & . \\ . & \dots & & & & & & & & & . \\ . & \dots & & & & & & & & & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{m(n-1)}x_{n-1} & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

und Koeffizienten a_{ij}.

Bemerkung

a_{12} ist nicht als a-Zwölf zu verstehen, sondern als a-Eins-Zwei.

In a_{ij} ist ij ein Doppelindex, man darf auch mit Komma, also $a_{i,j}$ schreiben.

Sei

$$(A)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ein Gleichungssystem.

Ein n-Tupel $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ mit $u_i \in \mathbb{K}$ ist **eine Lösung** des Sytems A, falls die Elemente u_i alle m Gleichungen simultan erfüllen, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Die **Lösungsmenge** ist die Menge aller Lösungen von A. Fragen:

1. lösbar - unlösbar?
2. Wie viele Lösungen?
3. Struktur der Lösungsmenge?
4. Geometrische Veranschaulichung?
5. Lösungsalgorithmus?

Zwei Gleichungssysteme A und B in n Unbekannten sind **äquivalent**, $A \Leftrightarrow B$, genau dann, wenn die Lösungsmengen von A und von B gleich sind.

Beispiel (Alle folgende Systeme sind äquivalent.)

$$\begin{cases} 3x+y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases}, \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+y=2 \end{cases}, \begin{cases} 5x=3 \\ 2x-y=1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 5y=1 \end{cases}, \begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=3/5 \\ y=1/5 \end{cases}.$$

Um das zu sehen, müssen wir nicht alle Systeme lösen.

Im Beispiel haben wir drei **elementare Transformationen** und ihre Kombinationen verwendet.

Drei **elementare Transformationen**:

(1) zwei Zeilen vertauschen

$$(A)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow (A')\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Beispiel:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 18 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Drei **elementare Transformationen**:

(2) eine Zeile mit Skalar multipizieren

Sei $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Dann

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \Leftrightarrow (A') \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ ra_{k1}x_1 + ra_{k2}x_2 + \ldots + ra_{kn}x_n = rb_k \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

- $A \Rightarrow A'$: Multiplikation mit r.
- $A' \Rightarrow A$: Multiplikation mit $1/r$.

Beispiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 18 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 18 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 12x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -6 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 18 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Drei **elementare Transformationen**:

(3) eine Zeile durch ihre Summe mit einer anderen ersetzen

$$(A)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (A')\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ (a_{k1}+a_{\ell 1})x_1 + (a_{k2}+a_{\ell 2})x_2 + \ldots + (a_{kn}+a_{\ell n})x_n = b_k+b_\ell \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

Wenn wir (2) und (3) kombinieren, bekommen wir (3') eine Zeile durch ihre Summe mit einem Vielfachen einer anderen ersetzen

$$(A)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (A')\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ (a_{k1}+ra_{\ell 1})x_1 + (a_{k2}+ra_{\ell 2})x_2 + \ldots + (a_{kn}+ra_{\ell n})x_n = b_k+rb_\ell \\ \ldots \\ a_{\ell 1}x_1 + a_{\ell 2}x_2 + \ldots + a_{\ell n}x_n = b_\ell \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(3'): Die Gleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$ ersetzen wir durch

$$(k'):\quad \sum_{j=1}^{n}(a_{kj}+ra_{\ell j})x_j = b_k + rb_\ell,\ \text{wo } r \in K, r \neq 0.$$

So übergehen wir von A zu A', $A \Rightarrow A'$. Um zurück zu kehren, ersetzen wir die Gleichung k' durch ihre Summe mit $\sum_{j=1}^{n} -ra_{\ell j}x_j = -rb_\ell$, $A' \Rightarrow A$.

Beispiel, $r = -4$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 4x_1-2x_2+x_3 = -2 \\ x_1-7x_2+5x_3 = 18 \\ -2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 0x_1+26x_2-19x_3 = -74 \\ x_1-7x_2+5x_3 = 18 \\ -2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Zeilenstufenform, ein Beispiel

$$(A)\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-3x_3=1\\ 4x_1+10x_2+x_3=-2\\ x_1-6x_2+5x_3=8\\ 8x_1+13x_2-3x_3=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-3x_3=1\\ 0x_1-2x_2+13x_3=-6\\ 0x_1-9x_2+8x_3=7\\ 0x_1-11x_2+21x_3=1\end{array}\right.$$

$$(A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-3x_3=1\\ x_2-\frac{13}{2}x_3=3\\ -9x_2+8x_3=7\\ -11x_2+21x_3=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-3x_3=1\\ x_2-\frac{13}{2}x_3=3\\ -\frac{101}{2}x_3=34\\ -\frac{101}{2}x_3=34\end{array}\right.$$

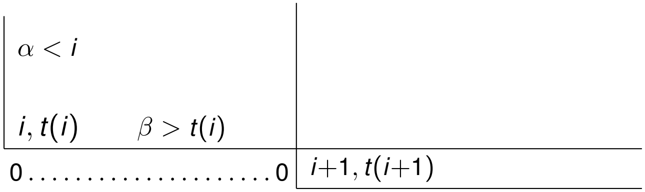
$$(A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 1\\ & & x_2 & - & \frac{13}{2}x_3 & = & 3\\ & & & & x_3 & = & -\frac{68}{101}\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right.$$

Lösung: $x_3=-\frac{68}{101}$, $x_2=3-\frac{13}{2}\frac{68}{101}=-\frac{139}{101}$,
$x_1=1-3(x_2-x_3)=1+\frac{213}{101}=\frac{314}{101}$.

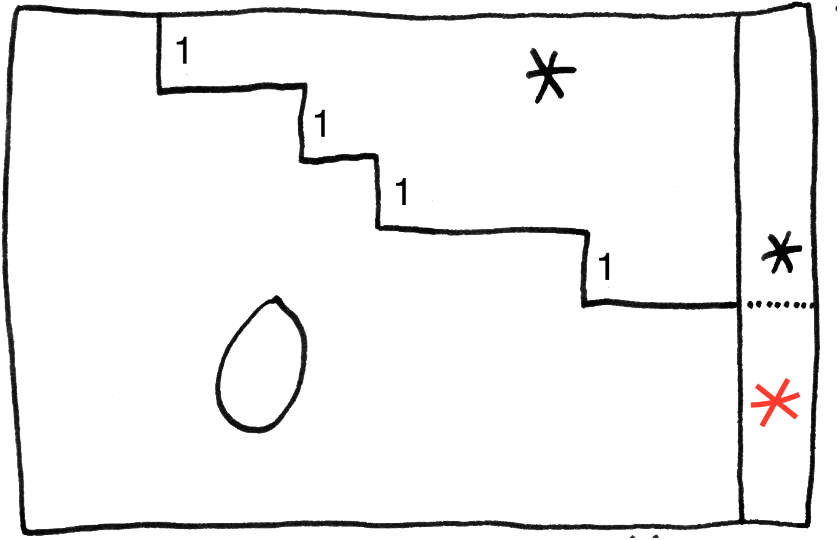
Definition (Def. 5.1.)

Ein Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;\; 1 \leqslant i \leqslant m$ ist in Zeilenstufenform genau dann, wenn man ein $s \geqslant 0$ und Indizes $1 \leqslant t(1) < t(2) < \ldots < t(s) \leqslant n$ so angeben kann, dass

- ◇ $a_{i,t(i)} = 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant s$ und dass
- ◇ $a_{\alpha\beta} \neq 0$ nur gelten kann, wenn es ein i mit $\alpha \leqslant i$, $\beta \geqslant t(i)$ gibt.



Zeilenstufenform mit $s = 4$



Bei (A) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{13}{2}x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & -\frac{68}{101} \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$

ist es $s = 3$, $t(1) = 1$, $t(2) = 2$, $t(3) = 3$.

Für (B) $\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} 0x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & 11x_5 & - & x_6 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & x_6 & = & 7 \end{array}\right.$

finden wir $s = 4$, $t(1) = 2$, $t(2) = 4$, $t(3) = 5$, $t(4) = 6$.

Satz (Satz 5.2. Gauß-Algorithmus, Eliminationsverfahren)

Ein beliebiges vorgegebenes LGS kann man durch mehrfache elementare Transformationen, also ohne die Lösungsmenge zu ändern, auf Zeilenstufenform bringen.

Beweis.

Sind alle Koeffizienten in der ersten Spalte Null, so ignorieren wir die erste Spalte und machen mit der auf diese Weise entstehenden LGS weiter. Ist ein Koeffizient a in der ersten Spalte von Null verschieden, so bringen wir ihn durch eine Zeilenvertauschung an die oberste Stelle und dividieren die oberste Gleichung durch a. Ziehen wir dann geeignete Vielfache der obersten Zeile von den anderen Zeilen ab, so gelangen wir zu einem System, bei dem in der ersten Spalte unterhalb des obersten Eintrags nur Nullen stehen. Für das weitere ignorieren wir dann die oberste Zeile und die erste Spalte und machen mit der auf diese Weise entstehenden LGS weiter. □

Wie lösen wir ein LGS? Zuerst bringen wir es auf Zeilenstufenform.
Sei A in Zeilenstufenform mit den Stufen-Indizes $t(1) < t(2) < \ldots < t(s)$.
Falls $s < m$ und ein Element $b_k \neq 0$ mit $k > s$ existiert, hat das System keine Lösung. (Hier ist m die Anzahl der Gleichungen.)

Das System

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & 7x_3 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & -2 \\ \hline & & & & 0x_3 & = & 1 \end{array}\right. ,$$

wo $s = 3$, $b_4 = 1$, hat keine Lösung!

$$\text{Das System } A \text{ hat eine Lösung} \iff (s = m) \vee (b_k = 0 \; \forall k > s)$$

Lösen wir das System

$$(B)\begin{cases} 0x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 7x_4 & - & x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & 11x_5 & - & x_6 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & x_6 & = & 7 \end{cases}$$

Hier $x_6 = 7$, $x_5 = -4x_6 = -28$, $x_4 = 3 + x_6 - 11x_5 = 318$,
$x_2 = 3x_3 - 2267$.

Die Lösungsmenge: $\{(u_1, 3u_3 - 2267, u_3, 318, -28, 7) \mid u_1, u_3 \in \mathbb{K}\}$.

Das System B hat unendlich viele Lösungen.

Lösungsmenge bei Zeilenstufenform

Sei A ein System in Zeilenstufenform mit den Stufen-Indizes $t(1) < t(2) < \ldots < t(s)$. Angenommen, $s = m$ oder $b_k = 0$ für alle $k > s$. Die Variablen x_i mit $i \notin \{t(1), t(2), \ldots, t(s)\}$ heißen frei, ihre Werte kann man frei wählen.

Ein n-Tupel $(u_1, \ldots, u_n)$ ist eine Lösung des Systems A genau dann, wenn

$$u_{t(i)} = b_i - (a_{i,t(i)+1} u_{t(i)+1} + a_{i,t(i)+2} u_{t(i)+2} + \ldots + a_{i,n} u_n)$$

für jede $t(i)$ mit $1 \leqslant i \leqslant s$.
Man beginnt mit $u_{t(s)}$ und rechnet dann alle $u_{t(i)}$ mit $i = s-1, s-2, \ldots, 1$ aus.

Homogene Systeme

Definition (Def. 5.3.)

Ein LGS A mit m Gleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, heißt **homogen**, falls alle b_i Null sind.
Das lineare Gleichungssystem, das aus einem inhomogenen System entsteht, indem man alle b_i zu Null setzt, heißt das zugehörige **homogenisierte** Gleichungssystem.

Ein homogenes System hat immer eine Lösung, das n-Tupel $(0, 0, \ldots, 0)$.
Sei das System A homogen und seien $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ seine Lösungen. Wir definieren:

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Dann ist $\bar{u} + \bar{v}$ eine Lösung von A.

Überprüfen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j + v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = 0 + 0 = 0.$

Sei das System A homogen, d.h. $b_i = 0$ für alle i, und seien $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ seine Lösungen. Wir haben gezeigt, dass $\bar{u} + \bar{v}$ eine Lösung von A ist.

Sei nun $r \in \mathbb{K}$. Dann $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} r u_j = r \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = r0 = 0$. Das n-Tupel

$$r\bar{u} = (ru_1, ru_2, \dots, ru_n)$$

ist eine Lösung des Systems A.

Sei V die Lösungsmenge von A.

1. $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0) \in V$;
2. V ist eine Menge mit Verknüpfung "$+$", $\bar{v} + \bar{u} \in V$, falls $\bar{u}, \bar{v} \in V$;
3. Sei $r \in \mathbb{K}$ und $\bar{v} \in V$, dann $r\bar{v} \in V$.

Sei A ein inhomogenes System und $\tilde{A}$ das zugehörige homogenisierte Gleichungssystem.

Lemma (Lemma 5.4.)

(1) Sind $\bar{u}$, $\bar{v}$ Lösungen von A, dann ist $\bar{u} - \bar{v}$ eine Lösung von $\tilde{A}$.

(2) Ist die Lösungsmenge von A nicht leer, so erhalten wir alle Lösungen, indem wir zu einer fest gewählten Lösung des Systems A eine beliebige Lösung von $\tilde{A}$ addieren.

Bemerkung, $\bar{u} - \bar{v} = \bar{u} + (-1)\bar{v}$.

Beweis.

Seien a_{ij} die Koeffizienten und b_i die Bekannten von A.

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j - v_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = b_i - b_i = 0.$ $\square$

Sei A ein inhomogenes System mit den Koeffizienten und den Bekannten b_i.
Sei $\tilde{A}$ das zugehörige homogenisierte Gleichungssystem.

Lemma (Lemma 5.4.)

(2) Ist die Lösungsmenge von A nicht leer, so erhalten wir alle Lösungen, indem wir zu einer fest gewählten Lösung des Systems A eine beliebige Lösung von $\tilde{A}$ addieren.

Beweis.

(2) Sei $\bar{u}$ eine fest gewählte Lösung von A und sei $\bar{v}$ eine weiter Lösung.
Dann ist $\bar{v} - \bar{u}$ eine Lösung von $\tilde{A}$ nach (1). Gut, $\bar{v} = \bar{u} + (\bar{v} - \bar{u})$.
Sei nun $\bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Lösung von $\tilde{A}$. Dann
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(u_j + w_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j = b_i + 0 = b_i$ und $\bar{u} + \bar{w}$ ist eine Lösung von A. $\square$

Ein Beispiel

Betrachten wir das System

$$(A)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Dann ist die Lösungsmenge $M = \{(3u - 4, u, 1, 2) \mid u \in \mathbb{K}\}$.

Das System $\tilde{A}$ ist

$$(A)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

und hat die Lösungsmenge $V = \{(3u, u, 0, 0) \mid u \in \mathbb{K}\}$.

Nun $M = \{(-4, 0, 1, 2) + \bar{v} \mid \bar{v} \in V\}$.

Matrizen

Ein Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m$ abkürzen wir durch seine **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Die Spezifikation "erweitert" weist auf die letzte Spalte der b_i hin. Die Matrix der a_{ij} für sich genommen heißt die **Koeffizientenmatrix** unseres Gleichungssystems.

Eine Abbildung A der Produktmenge $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ in einen Körper $\mathbb{K}$ heißt ganz allgemein eine $m \times n$**-Matrix mit Einträgen in** $\mathbb{K}$. Man schreibt A_{ij} oder a_{ij} statt $A((i, j))$.

Seien $m = n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ eine Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$, die man so verstehen kann: $A((1, 1)) = 5 = a_{11}$, $A((1, 2)) = 7 = a_{12}$, $A((2, 1)) = -2$, $A((2, 2) = 3 = a_{2,2}$.

Das a_{ij} heißt der **Eintrag** unserer Matrix in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Das i heißt **Zeilenindex**, das j heißt **Spaltenindex**. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Koeffizienten (Einträgen) in $\mathbb{K}$ notieren wir

$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \mathrm{Abb}(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{K}).$$

Eine Frage an Sie zu Notation

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine 2×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$.

Dann sind:

- ▷ $a_{11} =$
- ▷ $a_{23} =$
- ▷ $a_{13} =$
- ▷ $a_{21} =$
- ▷ $a_{22} =$
- ▷ $a_{12} =$

Bemerkung

Falls ein LGS in n Unbekannten aus m Gleichungen besteht, ist die Koeffizientenmatrix des Systems eine $m \times n$-Matrix, die erweiterte Koeffizientenmatrix ist eine $m \times (n+1)$-Matrix.

Ein Beispiel:

LGS	Koeffizientenmatrix	erweiterte Koeffizientenmatrix
$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3 = 1 \\ 4x_1-2x_2+x_3 = -2 \\ x_1-7x_2+5x_3 = 18 \\ -2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -7 & 5 & 18 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Im Fall $m = n$ sprechen wir von einer **quadratischen Matrix** und kürzen unsere Notation ab zu $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
Die $n\times n$-Matrizen kann man *Multiplizieren*, das kommt noch.
Allgemein kann man zwei $m\times n$-Matrizen A und B addieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Noch eine Frage an Sie

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 11 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

Dann sind:

- $a_{11} =$
- $a_{12} =$
- $a_{13} =$
- $a_{21} =$
- $a_{22} =$
- $a_{23} =$

Weiter geht es zu *Vektorräume*.
Sei A ein homogenes LGS und sei V seine Lösungsmenge.
Dann

1. $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in V$;
2. V ist eine Menge mit Verknüpfung "$+$", $\bar{v} + \bar{u} \in V$, falls $\bar{u}, \bar{v} \in V$;
3. Sei $r \in \mathbb{K}$ und $\bar{v} \in V$, dann $r\bar{v} \in V$.

Fast durch diese drei Eigenschaften definiert man einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.