Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 08

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

Sei die Abbildung $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$q(x, y, z) \coloneqq x^2 + 4xy + 2xz + z^2 + 3x + z - 6$$

Dann lässt sich q auch durch die folgenden Größen $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ mit $A^\mathrm{T} = A$, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ beschreiben.

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \coloneqq \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad c \coloneqq -6$$

$$\implies \quad q(x) = x^\mathrm{T} A x + 2b^\mathrm{T} x + c$$

Q soll nun gerade die zugehörige Quadrik beschreiben.

$$Q \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; q(x) = 0 \right\}$$

Sowohl Drehungen als auch Verschiebungen ändern den Typ der Quadrik nicht. Im Folgenden soll also eine äquivalente Form für q gefunden werden, die den selben Typ beschreibt.

Für das charakteristische Polynom χ von A ergibt sich

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 4 \qquad \implies \qquad \det A \neq 0$$

λ	-2	-1	0	1	2	3
$\chi(\lambda)$	4	-5	-4	1	4	-1

χ besitzt den Grad 3 und kann damit auch maximal 3 reelle Nullstellen aufweisen. Des Weiteren ist χ stetig, da es sich um ein Polynom handelt. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also zwischen zwei Werten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < \lambda_2$ und $\operatorname{sgn}(\chi(\lambda_1)) \neq \operatorname{sgn}(\chi(\lambda_2))$ mindestens eine Nullstelle. Aus der Tabelle wird damit ersichtlich, dass es drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \sigma(A)$ gibt.

$$\lambda_1 \in (-2, -1), \qquad \lambda_2 \in (0, 1), \qquad \lambda_3 \in (2, 3)$$

Es sind damit zwei Eigenwerte positiv und ein Eigenwert negativ.

Sei $u \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Translationsvektor. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

$$q'(x) \coloneqq q(x + u) = x^\mathrm{T} A x + {b'}^\mathrm{T} x + c'$$

$$b' \coloneqq Au + b, \qquad c' \coloneqq u^{\mathrm{T}} Au + 2b^{\mathrm{T}} u + c$$

Da $\det A \neq 0$ kann man $u \coloneqq -A^{-1} b$ setzen.

$$\implies \quad b' = 0, \qquad c' = b^{\mathrm{T}} u + c \quad \implies \quad q'(x) = x^{\mathrm{T}} Ax + c'$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \implies \quad c' = -\frac{25}{4} < 0$$

Weil A symmetrisch ist, gibt es nun eine orthogonale Matrix $C \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$, sodass

$$D \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = C^{\mathrm{T}} AC$$

Die Anwendung von C ändert, wie bereits gesagt, den Typ der Quadrik nicht. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$q''(x) \coloneqq q'(Cx) = x^{\mathrm{T}} Dx + c' = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + c'$$

Durch Einsetzen der Vorzeichen folgt die beschreibende Gleichung für den Typ der Quadrik Q.

$$Q \sim \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |\lambda_2|\, x_2^2 + |\lambda_3|\, x_3^2 - |\lambda_1|\, x_1^2 = |c'| \right\}$$

Diese beschreibt gerade einen einschaligen Hyperboloiden.

Aufgabe 2

Sei eine Quadrik Q in $\mathbb{R}^3$ gerade durch die Abbildung $q \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, dem Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ und einem Skalar $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$q(x) \coloneqq x^{\mathrm{T}} Ax + b^{\mathrm{T}} x + c, \qquad Q \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; q(x) = 0 \right\}$$

Dann lässt sich Q auch durch eine quadratische Form $\bar{q} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ formulieren. Es sei also für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{q}(\bar{x}) \coloneqq \bar{x}^{\mathrm{T}} \bar{A} \bar{x}, \qquad \bar{A} \coloneqq \begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix}, \qquad \bar{x} \coloneqq \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \quad \bar{q}(\bar{x}) = q(x) \quad \implies \quad Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \bar{q}(\bar{x}) = 0 \right\}$$

Q ist genau dann entartet, wenn $\det \bar{A} = 0$ gilt. (Eine andere Möglichkeit ist es, alle Typen zu bestimmen und die aus der Vorlesung bekannten nicht entarteten Typen wegzulassen. Diese wären Ellipsoid, ein- und zweischaliger Hyperboloid, elliptischer und hyperbolischer Paraboloid.)

Es seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte der Matrix A. Durch eine entsprechende orthogonale Matrix kann A auf Diagonalform $D \coloneqq \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ gebracht werden Sind alle diese Eigenwerte ungleich Null, so kann durch eine Translation b eliminiert werden (siehe Aufgabe 1). Damit dann noch $\det \bar{A} = 0$ folgt, muss noch $c' = 0$ sein (c' beschreibt hier die Konstante, die nach der Translation entsteht). Damit ergibt sich die folgende Form

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$$

Aus dieser Form ergeben sich aufgrund unterschiedlicher Signaturen von A (hier: $(3, 0)$ oder $(2, 1)$) die ersten beiden Typen.

- $|\lambda_1|\, x_1^2 + |\lambda_2|\, x_2^2 + |\lambda_3|\, x_3^2 = 0$ (Punkt)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 + |\lambda_2|\, x_2^2 - |\lambda_3|\, x_3^2 = 0$ (Elliptischer Kegel)

Nun soll angenommen werden, dass $\lambda_3 = 0$ ist. Es lassen sich wieder die ersten beiden Koordinaten von b eliminieren. Damit jedoch $\det \bar{A} = 0$ erhalten bleibt, muss zwangsläufig auch $b_3 = 0$ folgen. Die folgenden Typen decken dann die Fälle für $c' = 0$ und $c' \neq 0$ ab.

- $|\lambda_1|\, x_1^2 + |\lambda_2|\, x_2^2 = 0$ (Gerade)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 - |\lambda_2|\, x_2^2 = 0$ (zwei sich schneidende Ebenen)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 + |\lambda_2|\, x_2^2 = |c'|$ (elliptischer Zylinder)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 - |\lambda_2|\, x_2^2 = |c'|$ (hyperbolischer Zylinder)

Ist nun auch noch $\lambda_2 = 0$, so ist $\det \bar{A} = 0$ immer erfüllt. b_2' und c' können also getrennt voneinander vorkommen (siehe Vorlesung).

- $|\lambda_1|\, x_1^2 + 2b_2' x_2 = 0$ (parabolischer Zylinder)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 = |c'|$ (zwei parallele Ebenen)
- $|\lambda_1|\, x_1^2 = 0$ (Ebene)

Alle weiteren Möglichkeiten ergeben entweder die leere Menge oder sind selbst nicht entartet.

Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V = 2n$. Sei weiterhin $q\colon V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, welche in einer gewählten Basis durch die symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ mit $q(x) \coloneqq x^{\mathrm{T}} A x$ für alle $x \in V$ gegeben ist. Gegeben sei ein Unterraum $U \subset V$ mit $\dim U = n$ und $q(U) = \{0\}$.

Da A symmetrisch ist und $\det A \neq 0$, gibt es nach dem Satz von Sylvester eine Matrix $C \in \mathrm{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$, sodass für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = 2n$ gilt

$$S \coloneqq \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q}) = C^{\mathrm{T}} A C$$

Es sei nun

$$\tilde{q}(x) \coloneqq q(Cx) = x^{\mathrm{T}} S x \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{q}\left(C^{-1} u\right) = q(u) = 0$$

Für ein $x \coloneqq C^{-1} u$ mit $u \in U$ muss also folgende Gleichung erfüllt werden

$$\tilde{q}(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2n} x_i^2 = 0$$

Da $\dim U = n$ müssen n Koordinaten frei wählbar sein. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass zu jeder frei wählbaren Koordinate eine festgelegte Koordinate mit umgekehrten Vorzeichen existieren muss. Es muss damit n positive Summanden und n negative Summanden geben. Die Signatur von A beziehungsweise S ist damit (n, n). Für eine Lösung muss also für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ gelten

$$x_i^2 = x_{i+n}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_i = \pm x_{i+n}$$

Ohne Einschränkung sei für U hier $x_i = x_{i+n}$ für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq n$ gewählt. Definiert man nun

$$W \coloneqq \{x \in V \mid x_i = -x_{i+n} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, i \leq n\}$$

Dann ist auch W ein Unterraum mit $\dim W = n$ und $U \cap W = \{0\}$.

$$\Longrightarrow \qquad U \oplus W = V$$

Des Weiteren gilt aufgrund der Definition $q(W) = 0$ in den jeweiligen Koordinaten. Es gibt also einen Unterraum, der den Bedingungen genügt.

Permutiere nun S, sodass

$$S = \operatorname{diag}(\underbrace{H, \dots, H}_{n}), \qquad H \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies ist möglich, da die Signatur von S gerade (n, n) ist. Definiere dann

$$F \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G \coloneqq \operatorname{diag}(\underbrace{F, \dots, F}_{n})$$

F und damit auch G sind orthogonale Matrizen. Durch sie lässt sich q also in eine neue Basis transformieren.

$$\Longrightarrow \qquad \hat{S} \coloneqq G^{\mathrm{T}} S G = \operatorname{diag}(\underbrace{\tilde{H}, \dots, \tilde{H}}_{n}), \qquad \tilde{H} \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \hat{q}(x) \coloneqq \tilde{q}(Gx) = x^{\mathrm{T}} \hat{S} x = x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots + x_{2n-1} x_{2n}$$

$\square$