Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 05

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt nach der Formel des Kreuzproduktes

$$a \times (b \times c) = a \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_2b_2 + c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 + c_2a_3b_3 \\ b_3a_2c_2 + b_3a_1c_1 - c_3a_2b_2 + c_3a_1b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} = \langle a, c \rangle \, b - \langle a, b \rangle \, c$$

Verwendet man nun, dass das Kreuzprodukt alternierend ist, dann erhält man die Jacobi-Identität direkt durch Einsetzen.

$$\begin{aligned} (a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = {} & \langle a, c \rangle \, b - \langle b, c \rangle \, a \\ + {} & \langle a, b \rangle \, c - \langle a, c \rangle \, b \\ + {} & \langle b, c \rangle \, a - \langle a, b \rangle \, c = 0 \end{aligned}$$

$\square$