Prof. Dr. Oksana Yakimova
Dipl.-Math. Rico Besteher

11.5.2016

Algebra/Geometrie II, Übungsblatt 5

Bitte geben Sie die Lösungen in Ihrer Übungsgruppe entweder am 18.5. oder am 20.5. ab. Jede Aufgabe ist 4 Punkte wert.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt die Jacobi-Identität erfüllt:

$$(u_1 \times u_2) \times u_3 + (u_2 \times u_3) \times u_1 + (u_3 \times u_1) \times u_2 = \bar{0} \ \ \forall u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 2. Sei $f\colon V \to V$ eine nilpotente Abbildung, $\dim V = n < \infty$. Beweisen Sie, dass $\dim(\mathrm{Im} f^{m+1}) < \dim(\mathrm{Im} f^m)$ für jede $m \geq 1$ mit $\mathrm{Im} f^m \neq \{\bar{0}\}$.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Haben die Matrizen A und A^t (ganz formal, die linearen Abbildung, die durch die Matrizen A und A^t gegeben sind) dieselben Eigenwerte, dieselben Haupträume, dieselben Eigenvektoren?

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Haupträume von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, wenn f durch die Matrix A gegeben ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.