10. Die Determinante

Jede $\sigma \in S_n$ hat ein Länge, $\ell(\sigma)$.
Setzen $sgn(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$, das Signum
σ ist gerade $\Leftrightarrow sgn(\sigma) = 1$

Def. 10.1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Determinante ist eine Funktion

$$det: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$A \longmapsto det(A)$$

, die durch die Vorschritt $det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

für jede $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ gegeben wird.

Die Formel heißt **Leibniz-Formel.**

Beispiele. $n=1$, $A=(a_{11})$, $det(A) = a_{11}$.

$n=2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det(A) = ad - bc$.

$a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{21} = c$, $a_{22} = d$; $S_2 = \{id, (12)\}$

$n=3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $det(A) =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} +$

$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

Die „Jägerzaunformel" für die Determinante einer 3×3 Matrix:

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Nur für $n=3$.

noch mal die ersten zwei Spalten

Drei Produkte mit „+" und drei mit „−".

Noch ein Beispiel.

Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist eine obere Dreieckmatrix $\Leftrightarrow$ $a_{ij}=0$ für $i>j$.

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Hier $a_{i\sigma(i)}=0$, falls $\sigma(i)<i$.

Ein Produkt $a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$ ist ungleich Null $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma(n)=n,\ \sigma(n-1)=n-1,\ldots,\sigma(1)=1 \Rightarrow \sigma=id \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A)=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Also $\det(E_n)=1$.

Lemma 10.2. $\det(A)=\det(A^t)\ \forall A\in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Bew. $A^t=(\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij}=a_{ji}$.

$$\det(A^t)=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,\alpha_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}.$$ Sei $\tau=\sigma^{-1}$.

Dann $sgn(\sigma) = sgn(\tau)$, weil $\ell(\sigma) + \ell(\tau) \equiv 0 \pmod 2$ II.
nach dem Kor. I des Satzes 9.11.

Wenn $\sigma(i) = j$, dann $\tau(j) = i$, also $a_{\sigma(i)i} = a_{j\tau(j)}$
und $a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} = a_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau(n)}$,
denn diese Produkte unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Faktoren.

Damit $\det(A^t) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} =$

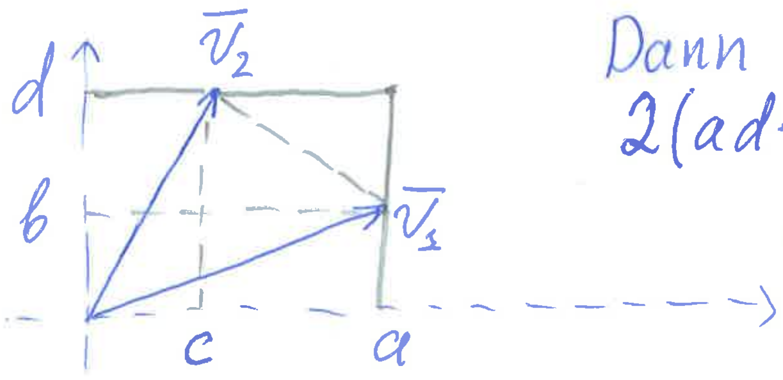
$$= \sum_{\tau \in S_n} sgn(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau(n)} = \det(A). \quad \boxtimes$$

<u>Bemerkung</u> (Determinante und die Fläche)

Seien $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
Dann ist $\det(A)$ der Fläche vom Parallelogram

gleich.

Als Beispiel nehmen wir alle Einträge positiv und $d > b$, $a > c$. Das Bild:



Dann ist die Fläche
$$2\left(ad - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ba - \frac{1}{2}(a-c)(d-b)\right) =$$
$$= ad - bc.$$

Charakterisierung der Determinante

Def. 10.3. Sei $d: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Funktion (Abbildung).

(1) d heißt <u>spaltenlinear</u>, falls

$$d\left(A_{i-1} \begin{vmatrix} \lambda a_{1i}+\gamma\alpha_{1i} \\ \vdots \\ \lambda a_{ni}+\gamma\alpha_{ni} \end{vmatrix} A_{n-i}\right) = \lambda d(A) + \gamma d\left(A_{i-1} \begin{vmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{vmatrix} A_{n-i}\right)$$

für jede i und für alle A, λ, γ, $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$.

(2) d heißt <u>alternierend</u> (oder Spalten-alternierend), falls $d(A)=0$ für alle Matrizen A, die zwei übereinstimmende Spalten haben. (Gilt es $a_{1i}=a_{1j}, \ldots, a_{ni}=a_{nj}$ und $i\neq j$, so ist $d(A)=0$.)

Lemma 10.4. Sei $d: \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ spaltenlinear und alternierend, $A = (\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n)$, $\tilde{A} = (\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_j} \ldots \underset{j}{\bar{u}_i} \ldots \bar{u}_n)$, $i \neq j$.
Dann gilt $d(A) = -d(\tilde{A})$.

Bew. $0 = d(\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_i+\bar{u}_j} \ldots \underset{j}{\bar{u}_i+\bar{u}_j} \ldots \bar{u}_n) =$

$= d(\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_i} \ldots \underset{j}{\bar{u}_i+\bar{u}_j} \ldots \bar{u}_n) + d(\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_j} \ldots \underset{j}{\bar{u}_i+\bar{u}_j} \ldots \bar{u}_n) =$

$= d(\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_i} \ldots \underset{j}{\bar{u}_i} \ldots \bar{u}_n) + d(A) + d(\tilde{A}) + d(\bar{u}_1 \ldots \underset{i}{\bar{u}_j} \ldots \underset{j}{\bar{u}_j} \ldots \bar{u}_n) =$

$= d(A) + d(\tilde{A})$. $\boxtimes$

III

Satz 10.5. Die Determinante ist die einzige Abbildung $d: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die spaltenlinear und alternierend ist und die der Einheitsmatrix die Eins zuordnet.

Bew. Zuerst zeigen wir, dass die Abbildung $\det: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ spaltenlinear und alternierend ist.

Seies $\tilde{a}_{ki} = \lambda a_{ki} + \gamma \alpha_{ki}$ für jede k, $1 \le k \le n$;
$\tilde{a}_{kj} = a_{kj}$ $\forall k, \forall j \neq i$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{tr})$.

Dann $\operatorname{sgn}(\sigma)\, \tilde{a}_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{n\sigma(n)} =$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (\lambda a_{\sigma^{-1}(i) i} + \gamma \alpha_{\sigma^{-1}(i) i}) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Also $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A) + \gamma \det\left(A_{i-1} \middle| \begin{matrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{matrix} \middle| A_{n-1}\right)$.

Falls $a_{ki} = a_{kj}$ $\forall k$ und $i \neq j$, $A = (a_{tr})$, dann
$a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = a_{1\tilde{\sigma}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tilde{\sigma}(n)}$ für $\tilde{\sigma} = (ij) \circ \sigma$. Weil (ij) eine ungerade Permutation ist (übung), gilt es: $\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\tilde{\sigma})$.
In der Leibniz-Formel heben sich die entsprechenden Terme weg. $S_n = \bigsqcup_{\sigma \in A_n} \{\sigma, (ij)\sigma\}$.
Dazu $\det(E_n) = 1$.

Jetzt beweisen wir die Eindeutigkeit.
Sei $d: Mat_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ spaltenlinear, alternierend und mit $d(E_n) = 1$. Es soll gelten: $d(A) = \det(A)$ $\forall A$.

$A = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n)$, $\bar{u}_i = a_{1i}\bar{e}_1 + \dots + a_{ni}\bar{e}_n$,

$$e_k = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} k \qquad d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, d(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{i-1} \underset{i}{\bar{e}_k} \bar{u}_{i+1} \dots \bar{u}_n).$$

Und weiter, $d(A) = \sum\limits_{(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} \dots a_{k_n n}\, d(\bar{e}_{k_1} \dots \bar{e}_{k_n})$.

Für $\det(A)$ haben wir die ähnliche Formel.

Merken, $d(\bar{e}_{k_1} \dots \bar{e}_{k_n}) = 0$, falls $k_r = k_t$ mit $r \neq t$.

Dazu $d(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n) = 1$.

$d(\bar{e}_{k_1} \dots \bar{e}_{k_n}) \neq 0 \Rightarrow (k_1, k_2, \dots, k_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ für eine $\sigma \in S_n$. Wir können definieren:

$$\hat{d} : S_n \to \mathbb{K} \text{ durch } \hat{d}(\sigma) = d(\bar{e}_{\sigma(1)} \dots \bar{e}_{\sigma(n)}).$$

Es bleibt nur zu zeigen, dass

$\hat{d}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$, dann haben wir die gewünschte Gleichheit, $d = \det$.

Merken, $\hat{d}((ij)\sigma) = -\hat{d}(\sigma)\ \forall (ij) \in S_n,\ i \neq j$.

Jede σ ist ein Produkt (Lemma 9.10), $\sigma = t_1 \dots t_k$, wo t_i Standardtranspositionen sind. Damit $\hat{d}(t_k t_{k-1} \dots t_1 \sigma) = \hat{d}(id) = 1$ und $\hat{d}(t_k \dots t_1 \sigma) = (-1)^k \hat{d}(\sigma)$.

Weil $\ell(\sigma) \equiv k \pmod 2$, bekommen wir, dass

$\hat{d}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$. $\boxtimes$

Die Abbildung det ist spaltenlinear und alternierend (Satz 10.5.). Nach dem Lemma 10.4. gilt es $\det(A) = -\det(\tilde{A})$, falls $A = (\bar{u}_1 \dots \bar{u}_i \dots \bar{u}_j \dots \bar{u}_n)$, $\hat{A} = (\bar{u}_1 \dots \underset{i}{\bar{u}_j} \dots \underset{j}{\bar{u}_i} \dots \bar{u}_n)$.
$i \neq j$

Was passiert, wenn wir zwei Zeilen vertauschen?

Sei $A = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_i \\ \vdots \\ \bar{v}_j \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} i \\ \neq \\ j \end{array}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_j \\ \vdots \\ \bar{v}_i \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} i \\ \\ j \end{array}$

<u>Bem.</u> (1) $\det(A) = \det(A^t) = -\det(\hat{A}^t) =$
$= -\det(\hat{A})$.

(2) Ähnlich kann man zeigen, dass det zeilenlinear ist.

Berechnen der Determinante mit dem Gauß-Algorithmus, ein Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann $\det(A) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Merken, ist eine Spalte oder eine Zeile von A gleich Null, so ist $\det(A) = 0$.

Damit mit Gauß $\det(A) = 0$, falls

$$rk A < n, \quad A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Oder kann man das direkt beweisen.

Lemma 10.6. $\det(A) = 0$, falls $rk A < n$, $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Bew. $rk A < n \Leftrightarrow$ die Spalten $\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n$ von A sind linear abhängig $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \bar{u}_i = \bar{0}$ und nicht alle γ_i sind Null $\Rightarrow \exists i$ mit $\gamma_i \neq 0 \Rightarrow$

$\bar{u}_i = \sum_{j\neq i} \frac{-\gamma_j}{\gamma_i} u_j$. Dann $\det(A) =$

$$= \sum_{j\neq i} \frac{-\gamma_j}{\gamma_i} \det(\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_{i-1}\, \bar{u}_j\, \bar{u}_{i+1} \ldots \bar{u}_n) = 0. \quad \boxtimes$$

Satz 10.7. Seien $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Bew. Fall 1. $\det(A) = 0$. Eine Zeilenstufenform von A hat eine Zeile gleich Null.

Hier $rk A < n \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f_A) < n$.

$f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit $f_A(\bar{v}) = A\bar{v}$.

Das Bild von $h_{AB} : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ ist

$\{(AB)\bar{v} = A(B\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{K}^n\}$ und liegt im $\operatorname{Im} f_A$.

Damit $\dim(\operatorname{Im} h_{AB}) < n \Rightarrow rk(AB) < n \Rightarrow$ (V)

$\Rightarrow \det(AB) = 0 = 0 \det(B)$.

Fall 2. $\det(A) \neq 0$.

Wir halten die Matrix A fest und betrachten die Abbildung $d : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$B \to \frac{1}{\det(A)} \det(AB)$$

Merken, sind zwei Spalten von B gleich, $\bar{u}_i = \bar{u}_j$, so sind zwei Spalten von AB gleich,

$A\bar{u}_i = A\bar{u}_j$, $i \neq j$. Dann $\det(AB) = 0$ und damit ist d alternierend.

Ebenfalls ist d spaltenlinear, $\det$ ist spaltenlinear und $A(\lambda \bar{u}_i + \gamma \bar{v}) = \lambda A\bar{u}_i + A\bar{v}$.

Wenn $B = E_n$, dann $AB = A$ und

$$d(E_n) = \frac{1}{\det(A)} \det(A) = 1.$$

Nach dem Satz 10.5. ist es $d(B) = \det(B)$.

Also $\frac{1}{\det(A)} \det(AB) = \det(B)$ und

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \quad \boxtimes$$

Bemerkung. Man kann zeigen, wie im Beweis des Satzes 10.5., dass jede spaltenlineare, alternierende Abbildung $\tilde{d} : Mat_{n \times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

der Art $\tilde{d} = c \det$ mit $c \in \mathbb{K}$, $c = \tilde{d}(E_n)$ ist. Dann setzen wir $\tilde{d}(B) = \det(AB)$ und sehen sofort, dass $\tilde{d}(B) = \det(A)\det(B)$.

<u>Bemerkung</u> $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$.

<u>Bew.</u> $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \underset{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})}{rk A = n} \Leftrightarrow f_A$ ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists f_A^{-1} \Leftrightarrow \exists A^{-1}$. ▨

Oder direkt aus $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, folgt, dass $\det(A) \neq 0$, wenn $\exists A^{-1}$.

Determinante eines Endomorphismus

Sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung, $V \cong \mathbb{K}^n$. Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V haben wir die darstellende Matrix von f, ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = A$. Wenn $\tilde{A} = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}}$, wo $\tilde{\mathcal{B}}$ eine andere Basis ist, dann $\tilde{A} = CAC^{-1}$ mit $C = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}}$.

Also $\det(\tilde{A}) = \det(C)\det(A)\det(C^{-1}) =$
$= \det(C)\det(C^{-1})\det(A) = \det(A) =: \det f$.

Und noch mal merken, $\det(C^{-1}) = \dfrac{1}{\det(C)}$.

Laplace'scher Entwicklungssatz (VI)

Gegeben eine $n\times n$-Matrix $A=(a_{ij})$ und feste k,ℓ $(1\le k,\ell\le n)$ bezeichne $A\setminus(k,\ell)$ die Streichmatrix, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte entsteht.

Beispiel. $n=3$, $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\7&0&1\end{pmatrix}$, $A\setminus(1,1)=\begin{pmatrix}4&5\\0&1\end{pmatrix}$,

$A\setminus(1,2)=\begin{pmatrix}0&5\\7&1\end{pmatrix}$, $A\setminus(2,2)=\begin{pmatrix}1&3\\7&1\end{pmatrix}$, $A\setminus(3,1)=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$.

Satz 10.8. Für jede i, $1\le i\le n$, gilt es

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A\setminus(i,j))$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile);

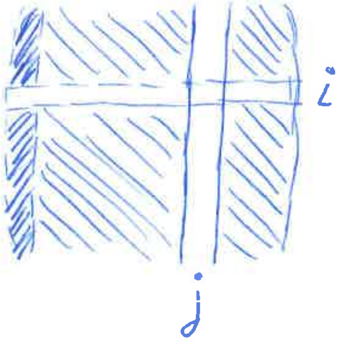
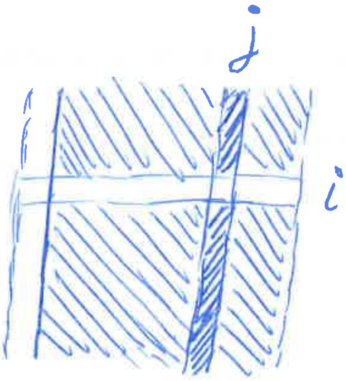
und $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A\setminus(i,j))$ für jede j, $1\le j\le n$ (Entwicklung nach der j-ten Spalte).

Vorzeichen-Regel: „schachbrettartig" $\begin{pmatrix}+&-&+&-&+&-\\-&+&-&+&-&+\\+&-&+&-&+&-\\-&+&-&+&-&+\\+&-&+&-&+&-\\-&+&-&+&-&+\end{pmatrix}$, Zeile $2k+1$ $(+|-|+|-|+|-|\ldots)$, Zeile $2k$ $(-|+|-|+|-|+|\ldots)$.

Bew. Wegen $\det(A)=\det(A^t)$ reicht es, nur die zweite Formel zu zeigen.

Sei $A=(\bar u_1\ldots\bar u_n)$, $\tilde A=(\bar u_j\,\bar u_2\ldots\underset{j}{\bar u_1}\ldots\bar u_n)$. Dann $\det(A)=-\det(\tilde A)$, falls $j\neq 1$. Wie ist es mit $\det(A\setminus(i,j))$ und $\det(\tilde A\setminus(i,1))$?

Das Bild:

$A =$  , $\tilde{A} =$  .

Also $\det(\tilde{A}\setminus(i,1)) = (-1)^{j-2}\det(A\setminus(i,j))$, $j \neq 1$.

Wenn die Formel für $\tilde{A}$ und $j=1$ stimmt, dann

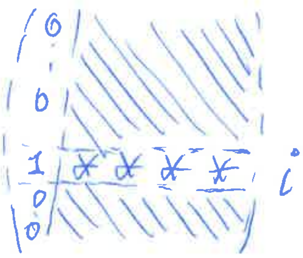
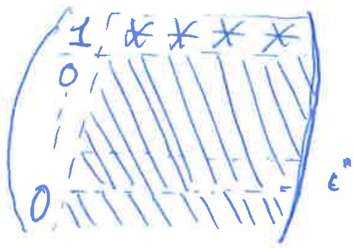
$$\det(A) \underset{j\neq 1}{=} -\det(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1+1} a_{ij}\det(\tilde{A}\setminus(i,1)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A\setminus(i,j)).$$

Wir können annehmen, dass $j=1$. Dann

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\det(\bar{e}_i\ \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_n) =$$

$$= \sum (-1)^{i-1}\det(A\setminus(i,1)),$$ denn

$\det$  $= (-1)^{i-1}\det$  . ∎

<u>Def. 10.9.</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Die Matrix $A^{\vee} = (a^{\vee}_{ij})_{1\le i\le n,\ 1\le j\le n}$ mit $a^{\vee}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A\setminus(j,i))$ heißt <u>adjunkte</u> Matrix (oder adjungierte Matrix) von A.

<u>Beispiel.</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^{\vee} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und $AA^{\vee} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}$.

Satz 10.10. $AA^{\vee} = \det(A)E_n \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. VII

Bew. $(AA^{\vee})_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(A^{\vee})_{ji} =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A\setminus(i,j)) = \det(A)$$

nach dem Satz 10.8.

Sei $k \neq i$, dann $(AA^{\vee})_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ij} \det(A\setminus(k,j)) =$

$= \det(\hat{A})$, wo

(Entwicklung nach der k-ten Zeile)

$$\hat{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{nn} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ k \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Merken, $\det(\hat{A}) = 0$. ∎

Cramer'sche Regel (ohne Beweis)

Ein LGS
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ wo}$$

$\det(A) \neq 0$ für $A = (a_{ij})$ hat genau eine Lösung und die ist $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$ mit

$$c_i = \frac{1}{\det(A)} \det(\bar{u}_1 \dots \bar{u}_{i-1}\, \bar{b}\, \bar{u}_{i+1} \dots \bar{u}_n),$$

$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\bar{u}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$. $\quad \bar{c} = \frac{1}{\det(A)} A^{\vee} \cdot \bar{b}$.