Punkteverteilung und

Musterlösung 1. Serie (Mo 8:00h Gruppe)

Aufgabe 1 A, B, C Mengen.

(i) $\emptyset \in A$: i.A. falsch.

Beweis: Setze $A := \emptyset$. Dann ist $\neg\, \emptyset \in A$, da nach Def. von $\emptyset$ A die Menge ist, die gar keine Elemente enthält.

ii) $\emptyset \subseteq A$: wahr.

Beweis: zz: $\forall x \in \emptyset : x \in A$.

leere Aussage, daher trivial erfüllt.
(Es gibt kein Gegenbeispiel x)

iii) $(A \cup B) \setminus A = B$: i.A. falsch.

Beweis: Setze $A := B := \{\emptyset\} \neq \emptyset$

$$\underbrace{(\underbrace{A \cup B}_{=A}) \setminus A}_{=\emptyset} \neq \underbrace{B}_{=\{\emptyset\}}$$

iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$: wahr

Beweis: $(A \cup B) \setminus C = \{x \in A \cup B : x \notin C\}$

$$= \{x \in A \cup B : x \in A \wedge x \notin C\} \cup \{x \in A \cup B : x \in B \wedge x \notin C\}$$

$$= \{x \in A : x \notin C\} \cup \{x \in B : x \notin C\}$$

$$= (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Punkte: 1 Punkt pro Teilaufgabe, für die wahr/falsch bewiesen wurde.
Behauptungen ohne Beweis bringen keine Punkte.

Aufgabe 1.2 A, B Aussagen. Gesucht: Negation von:

i) $\cancel{\neg(\underbrace{A \Leftrightarrow \neg B}_{\text{Aufgabe}}) \overset{\text{def} \Leftrightarrow}{=} \neg\big((A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \Rightarrow A)\big)}$

$\cancel{\overset{\text{def} \Rightarrow}{=} \neg\big([(\neg A) \vee (\neg B)] \wedge [B \vee A]\big)}$

Zu umständlich.

Fall-Voraussetz.: A	B	Dann: $A \Leftrightarrow \neg B$	zusammengefasste Fall-Voraussetzung:
w	w	f	$A \wedge B$
w	f	w	...
f	w	w	...
f	f	f	$(\neg A) \wedge (\neg B)$

Mit Oder zusammengesetzte Aufzählung aller Fälle, in denen $\neg(A \Leftrightarrow \neg B)$ wahr ist

Also ist $\neg(A \Leftrightarrow \neg B) = (A \wedge B) \vee \big((\neg A) \wedge (\neg B)\big) = (A \Leftrightarrow B)$

ii) Negation von „$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 3$" gesucht:

$$\neg\big[\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 3\big] \overset{\text{de Morgan}}{=} \exists x \in \mathbb{R}: \underbrace{\neg\big(f(x) > 3\big)}_{= f(x) \leq 3}$$

$$= \exists x \in \mathbb{R}: f(x) \leq 3$$

iii) zu negieren: $\exists! x \in X\big(\underbrace{\forall y \in Y: f(x) < g(y)}_{=: \varphi(x)}\big)$

a) $\neg\big[\exists! x \in X: \varphi(x)\big]$

$$\overset{\text{Def } \exists!}{=} \neg\Big(\big(\exists x \in X: \varphi(x)\big) \wedge \forall x \in X\ \forall z \in X\big(\varphi(x) \wedge \varphi(z) \Rightarrow (x = z)\big)\Big)$$

$$\overset{\text{de Morgan \& Distributiv}}{=} \big(\forall x \in X: \neg\varphi(x)\big) \vee \exists x \in X\ \exists z \in X\big(\underbrace{\neg\big(\varphi(x) \wedge \varphi(z) \Rightarrow (x = z)\big)}_{\Rightarrow \neg(\neg(\varphi(x) \wedge \varphi(z)) \vee (x = z)) = \varphi(x) \wedge \varphi(z) \wedge \neg(x = z)}\big)$$

$$= \big(\forall x \in X: \neg\varphi(x)\big) \vee \exists x \in X\ \exists z \in X\big(x \neq z \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(z)\big)$$

b) $\neg\varphi(x) \overset{\text{def } \varphi}{=} \neg\forall y \in Y: (f(x) < g(y))$

$\overset{\text{de Morgan}}{=} \exists y \in Y: \neg(f(x) < g(y))$

$= \exists y \in Y: f(x) \geq g(y)$

c) b) in a) einsetzen:

$$\neg\exists! x \in X\left(\forall y \in Y: f(x) < g(y)\right) \overset{a)}{=} \left(\forall x \in X: \neg\varphi(x)\right) \vee \exists x \in X \exists z \in X(\ldots)$$

$$\overset{b)}{=} \left[\forall x \in X\left(\exists y \in Y: f(x) \geq g(y)\right)\right] \vee \exists x \in X\, \exists z \in X\left[x \neq z \wedge \forall y \in Y: \left(f(x) < g(y) \wedge f(z) < g(y)\right)\right]$$

$$= \left[\forall x \in X\left(\exists y \in Y: f(x) \geq g(y)\right)\right] \vee \left[\exists x \in X\, \exists z \in X \setminus \{x\}\, \forall y \in Y: \left(\max(f(x), f(z)) < g(y)\right)\right]$$

Punkte: jeweils

- $\frac{1}{2}$ für die ausformulierte Negation
- 1 für nachvollziehbare Rechnung
- $\frac{1}{2}$ für Begründung der (wichtigsten, kritischen) Schritte.

Alternativ, wenn die Rechnung ganz kleinschrittig ist, sehe ich die Schrittweite als ausreichende Begründung an, weil es nur eine Handvoll in Frage kommender Logik-Rechenregeln gibt.
Normalerweise muss man das nur bei größeren Gedankenschritten zitieren, aber hier soll es gerade geübt werden.

Aufgabe 3 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2 + bx + c$

i) & ii) : Für welche Werte von a, b, c ist f injektiv bzw. surjektiv?

$\boxed{\text{Behauptung: } f \text{ ist genau dann surjektiv, wenn } a = 0 \wedge b \neq 0}$ $f^{-1}(y) = \frac{1}{b}y - \frac{c}{b}$

" — " — injektiv, " — "

Fall $a \neq 0$. Bekannt:

(L) wenn g bijektive Funktion, dann ist $g \circ f$ genau dann injektiv (surjektiv) wenn f injektiv bzw. surjektiv ist.

(a) Wende das auf die bijektive* Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{a}$ an.

$\forall_{x \in \mathbb{R}}\, g \circ f(x) = \frac{1}{a} f(x) = \underbrace{\cancel{\tfrac{a}{a}}}_{=1} x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}$

* Die Bijektivität beweisen wir im Fall $a = 0$ mit.

Setze
$\tilde{a} := 1$
$\tilde{b} := \frac{b}{a}$
$\tilde{c} := \frac{c}{a}$
$\tilde{f} := g \circ f$

Bijektivität von f ist auf die von $\tilde{f}$ zurückgeführt. Damit ist der Fall $a \neq 0$ auf den Fall $\tilde{a} = 1$ zurückgeführt.

Ab jetzt schreibe ich $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f}$ als a, b, c, f.

(b) Wende (L) auf die bijektive* Funktion $\hat{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - c + \frac{b^2}{4}$ an.

$\forall x \in \mathbb{R}: \hat{g} \circ f(x) = f(x) - c + \frac{b^2}{4} = x^2 + bx + c - c + \frac{b^2}{4}$

$= x^2 + 2\frac{b}{2}x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

Setze wieder
$\hat{a} := 1$
$\hat{b} := b$
$\hat{c} := \left(\frac{b}{2}\right)^2$
$\hat{f} := \hat{g} \circ f$; f ist sur/injektiv $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ ist es } gemäß (L)

Damit ist der Fall eines allgemeinen c auf $\hat{c} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ zurückgeführt.

Schreibe a, b, c, f statt $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{f}$.

(c) Im Prinzip könnte man noch $x \mapsto f(x-\frac{b}{2})$ betrachten, (5)

d.h. (L) für $f \circ g$ formulieren, um $f(x)=x^2$ zu erreichen, $b=0$

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x+\frac{b}{2})^2$

Behauptung: f ist nicht injektiv:

$\mathbb{R} \ni x_1 := -\frac{b}{2}+1,\quad \mathbb{R} \ni x_2 := -\frac{b}{2}-1$

Aber $f(x_1) = \left(\left(1-\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

$f(x_2) = \left(-1-\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1$

Also $x_1 \neq x_2$ aber $f(x_1)=f(x_2)$. $\rightsquigarrow$ nicht injektiv.

Behauptung: f ist nicht surjektiv

$f(x) = (x+\frac{b}{2})^2 \geq 0$ da Quadrat stets positiv.

Also gibt es $y := -1 \in \mathbb{R}$, so daß $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \geq 0 > -1$ und daher $f(x) \neq y$.

$\rightsquigarrow$ nicht surjektiv.

Fall $a=0 \wedge b \neq 0$: $\quad f(x) = bx+c \quad | \ b \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b} f(x) = x + \frac{c}{b}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b} f(x) - \frac{c}{b} = x \quad (*)$

Setze $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{1}{b} y - \frac{c}{b}$.

Aus $(*)$ folgt $g \circ f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (**)$

Ähnliche Rechnung: $\forall y \in \mathbb{R}\ f \circ g(y) = y$. $(***)$

$(**)$ und $(***)$ implizieren, daß g die Umkehrfunktion von f ist: $f^{-1}=g$

Damit ist f bijektiv.

Fall $a = 0 \wedge b = 0$: $f(0) = f(1) = c$ $\rightsquigarrow$ nicht injektiv

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = c \neq c+1 \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ nicht surjektiv

$\square$

Punkte:

- 1 für überhaupt (richtige) Fallunterscheidung. (+ $\frac{1}{2}$ Punkt für die Antwort inj/surj, wenn ohne Beweis)
- 2 für den Fall $a \neq 0$: 1 P. für surjekt., 1 P für injektiv
- 2 für den Fall $a = 0 \wedge b \neq 0$: 1 P für bijektiv, 1 P für Umkehrfunktion ($\frac{1}{2}$ für Angabe, $\frac{1}{2}$ für Beweis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
- 1 für den Fall $a = b = 0$

Aufgabe 4 X, Y, Z Mengen $\neq \emptyset$, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

(i) zu zeigen: $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

Beweis: Seien $x_1, x_2 \in X$. Möge $f(x_1) = f(x_2)$.
z.z.: $x_1 = x_2$

Weil g eine Funktion ist, ordnet er jedem $y \in Y$ genau ein $z \in Z$ zu. Das gilt auch für $y := f(x_1) = f(x_2)$.

Daher $g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) \overset{g \text{ funkt.} \& f(x_1)=f(x_2)}{=} g(f(x_2)) \overset{\text{def } g \circ f}{=} g \circ f(x_2)$

$\leadsto g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Weil $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$.

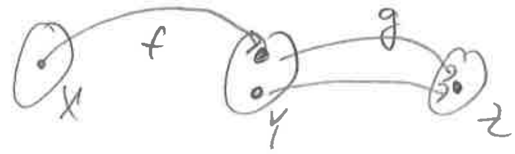
(ii) zu zeigen: $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Sei $z \in Z$ beliebig. z.z.: $\exists y \in Y$: $g(y) = z$.

Weil $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es $x \in X$ mit $g \circ f(x) = z$.

$z = g \circ f(x) \overset{\text{Def } g \circ f}{=} g(\underbrace{f(x)}_{\in Y \text{ weil } f: X \to Y}) \overset{y := f(x)}{=} g(y)$ setze $y := f(x)$, $y \in Y$ weil $f: X \to Y$.

(iii) Behauptung: [$g \circ f$ bijektiv $\not\Rightarrow$ (f bijektiv) $\vee$ (g bijektiv)]



Alternativ: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\underbrace{a \mapsto a + 0i}_{\text{nicht surjektiv, } \forall a \in \mathbb{R}\ f(a) \neq i}$

$g: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\underbrace{(a+bi) \mapsto a}_{\text{nicht injektiv: } g(0) = g(i)}$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dann $g \circ f(a) = g(a + 0i) = a$
$\Rightarrow g \circ f = id_{\mathbb{R}}$, bijektiv.