11. Eigenwerte und Eigenvektoren

Def. 11.1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ ein Körper. Das Polynom $\det(xE_n - A)$ heißt charakteristisches Polynom der Matrix A.

Beispiele: $\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det\begin{pmatrix} x-a & 0 \\ 0 & x-b \end{pmatrix} = (x-a)(x-b)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 6x + 8$.

Man schreibt $\det(xE_n - A) =: \chi_A(x)$.

Satz 11.2. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von $\chi_A(x)$.

Bew. Ein $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein Eigenvert von der Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists \bar{v} \in \mathbb{K}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, s.d. $A\bar{v} = \lambda\bar{v} \Leftrightarrow \exists \bar{v} \in \mathbb{K}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, s.d. $(\lambda E_n - A)\bar{v} = \bar{0}$.

Weiter,

$\exists \bar{v} \in \mathbb{K}^n, \bar{v} \neq 0$ mit $(\lambda E_n - A)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} h \neq \{\bar{0}\}$ für $h: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$\bar{u} \mapsto (\lambda E_n - A)\bar{u}$.

$\operatorname{Ker} h \neq \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{rk}(\lambda E_n - A) < n \Leftrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0$.

λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. $\blacksquare$

Bem. Für eine lineare Abbildung $f: V \to V$, wo $\dim V = n < \infty$, ist das charakterstische Polynom von f durch $\chi_f(x) = \det(x \cdot \mathrm{id}_V - f)$ gegeben.

λ ist ein Eigenwert von $f \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0$.

II

Sei $V \cong \mathbb{K}^n$ und sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung. Wenn wir **eine** Basis $\mathcal{B}$ von V wählen, bekommen wir eine Matrix A,

$A = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$. Wechseln wir die Basis, so ändert sich die darstellende Matrix:

$\tilde{A} = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\tilde{\mathcal{B}}} = CAC^{-1}$, wo $C = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}}$.

Wir wollen, dass es leicht ist mit A zu arbeiten.

Satz 11.3. (Trigonalisierbarkeit). Eine lineare Abbildung $f: V \to V$, wo $V \cong \mathbb{K}^n$, besitzt eine darstellende Matrix, die obere Dreiekgestallt hat, genau dann, wenn $\chi_f(X)$ in Linearfaktoren zerfällt,

$\chi_f(X) = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Bew. ($\Rightarrow$) Gegeben: $\exists$ eine Basis $\mathcal{B}$, s.d.

$A = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. Dann $\det(xE_n - A) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$.

($\Leftarrow$) Gegeben: $\chi_f(X) = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$.

Nach dem Satz 11.2. existier ein Vektor

$\overline{v}_1 \in V$, $\overline{v}_1 \neq 0$, s.d. $f(\overline{v}_1) = \alpha_1 \overline{v}_1$.

Nehmen wir $\overline{v}_1$ als den ersten Basis-Vektor. Die anderen Basis-Vektoren sind beliebig.

Die darstellende Matrix ist derart

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \alpha_1 & * & * & * & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & B & \\ 0 & & & & \end{array}\right) = \tilde{A}.$$

Hier $\chi_f(x) = (x-\alpha_1)\chi_B(x)$. $B \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$.

Also $\chi_B(x) = (x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$.

Wenn $n=1$, sind wir fertig.

Wenn $n \geq 2$, führen wir Induktion über n.

Nach Induktionsannahme $\exists\, C \in Mat_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, s.d. $CBC^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. Nun

$$\tilde{C}\tilde{A}\tilde{C}^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & CBC^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$ für

$$\tilde{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$ Merken, $\tilde{C} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$.

$\boxtimes$

Def. 11.4 Eine $n\times n$-Matrix A heißt *diagonalisierbar* genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix $C\in GL_n(\mathbb{K})$ mit $CAC^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ existiert.

(III)

Kann man merken, hier ist $tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ und die Elemente $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sind die Eigenwerte von A;

$$\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n).$$

Eine lineare Abbildung $f: V\to V$ heißt *diagonalisierbar* genau dann, wenn V eine Basis $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_n\}$ mit $f(\overline{v}_i) = \lambda_i \overline{v}_i$ besitzt.

Satz 11.5. Sei $f: V\to V$ eine lineare Abbildung und seien $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_k \in V$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots\lambda_k$ (also $\lambda_i\neq\lambda_j$, falls $i\neq j$). So sind die Vektoren $\overline{v}_1,\dots,\overline{v}_k$ linear unabhängig.

Bew. Induktion über k.

$k=1$. $\overline{v}_1\neq\overline{0}$ nach der Definition. Gezeigt.

Seien $(k+1)$ Eigenvektoren linear abhängig und $\sum_{i=1}^{k+1} \gamma_i \overline{v}_i = \overline{0}$, wo nicht alle γ_i Null sind. (Dann $\gamma_{k+1}\neq 0$).

Betrachten

$$h = \lambda_{k+1}\, id_V - f.$$

Es gilt $h(\bar{v}_{k+1}) = \bar{0}$, $h(\bar{v}_i) = (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\bar{v}_i$, wo $\lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$. Dazu

$$\bar{0} = h(\bar{0}) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\gamma_i v_i \Rightarrow \gamma_i = 0 \ \forall i \leq k.$$

Nun $\gamma_{k+1}\bar{v}_{k+1} = \bar{0}$. Widerspruch! $\boxtimes$

<u>Kor.</u> Wenn $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$, wo $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, dann ist f diagonalisierbar.

1.02. Sei $f: V \to V$ linear, $V \cong \mathbb{K}^n$. $\chi_f(x) = \det(x\,id_V - f) = \det(xE_n - A)$ für jede $A = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$, wo $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

$$\chi_f(x) = x^n - tr(f)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$$

$$\begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & -a_{n-1\,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$

$tr(f) := tr(A)$ für eine (jede) darstellende Matrix A. $tr(CAC^{-1}) = tr(A)$.

Falls $n = 2$.

$$\chi_f(x) = x^2 - tr(f)x + \det(f)$$

$$\chi_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det(A)$$

Der Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Basis $\{1, i\}$ und einer Verknüpfung „$\circ$“

$$(a+bi)(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Hier ist $i \cdot i = -1$.

<u>Lemma 11.6.</u> $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

<u>Bew.</u> Wir überprüfen, dass alle Bedingungen der Def. 4.10. erfüllt sind.

Die Verknüpfung „+“ ist assoziativ, kommutativ und $(\mathbb{C}, +)$ ist eine Gruppe. [Vektorraum].

Die Verknüpfung „$\cdot$“ ist assoziativ und kommutativ, weil die in $\mathbb{R}$ so ist.

Weiter, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ soll eine Gruppe sein.

Merken, $0 = \bar{0}_{\mathbb{C}} = 0 + 0 \cdot i$ und $a+bi = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0$, weil $c^2 > 0$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Wenn $a^2+b^2 \neq 0$, dann $(a+bi)\dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$.

$1 = 1 + 0 \cdot i$ ist das Neutralelement in $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$.

Hier $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\, i$.

Wenn $u \in \mathbb{C}$ und $u \neq 0$, dann $\exists u^{-1} \in \mathbb{C}$.

Wenn $uz = 0$ und u^{-1}, dann $u^{-1}uz = z = 0$.

Die Teilmenge $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist bez. „$\cdot$“ abgeschlossen und $(\mathbb{C}^{\times}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

(A3): $(a+bi)(\alpha+\beta i+\gamma+\delta i) =$

$= (a+bi)(\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i) = a(\alpha+\gamma) - b(\beta+\delta) +$

$+ (a(\beta+\delta) + b(\alpha+\gamma))i$

$(a+bi)(\alpha+\beta i) + (a+bi)(\gamma+\delta i) =$

$= (a\alpha - b\beta) + (a\beta + b\alpha)i + (a\gamma - b\delta) + (a\delta + b\gamma)i$.

Das Axiom gilt. $\boxtimes$

Bem. (1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Teilkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(2) Jede quadratische Gleichung

$$X^2 + aX + b = 0 \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

hat eine Lösung in $\mathbb{C}$, eigentlich

$$X^2 + aX + b = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \text{ mit } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

$X^2 + aX + b = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} - b\right)$. Sei $D = a^2 - 4b$.

Wenn $D \geq 0$, $\sqrt{D} \in \mathbb{R}$ $(\sqrt{D} \geq 0)$ und

$$\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{D}}{2}.$$

Wenn $D<0$, dann $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$ und $\left(i\sqrt{-D}\right)^2 = D$.

Also $\lambda_1 = \frac{-a}{2} + \frac{\sqrt{-D}}{2} i$, $\lambda_2 = \frac{-a}{2} - \frac{\sqrt{-D}}{2} i$.

Eine Anwendung (Die Fibonacci-Zahlen)

Die sind die Folge $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots)$, wo

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \forall n \geq 0$.

Sei $\overline{v}_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$, $\overline{v}_n \in \mathbb{Q}^2$ $(\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2)$.

Merken $\overline{v}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{v}_n$. Setzen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann $\overline{v}_n = A\overline{v}_{n-1} = A(A\overline{v}_{n-2}) = A^n \overline{v}_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun, was ist A^n? $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, nicht besser als f_n selbst.

$$\chi_A(X) = X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Hier sind die Nullstellen reell, $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

äquivalent = ähnlich $\Leftrightarrow \exists C$ mit $CAC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$A^n = (C^{-1}\tilde{A}C)(C^{-1}\tilde{A}C)\dots(C^{-1}\tilde{A}C) =$$

$$= C^{-1}(\tilde{A})^n C = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} C.$$

Es bleibt die Matrix C zu berechnen.

Zuerst finden wir die Eigenvektoren:

$A\bar{u}_1 = \lambda_1 \bar{u}_1$, $A\bar{u}_2 = \lambda_2 \bar{u}_2$. Sei $\bar{u}_1 = \binom{\alpha_1}{\beta_1}$.

Dann $\beta_1 = \lambda_1 \alpha_1$ und $\bar{u}_1 = (1, \lambda_1)$ bis auf die Multiplikation mit einem Skalar $(\neq 0)$.

Ebenfalls $\bar{u}_2 = (1, \lambda_2)$.

$B = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$, $\tilde{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.

$$\tilde{A} = {}_{\tilde{B}}[Fib]_{\tilde{B}} = {}_{\tilde{B}}C_{B}\, A\, {}_{B}C_{\tilde{B}} = CAC^{-1}$$

$Fib: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\binom{y_1}{y_2} \rightarrow \binom{y_2}{y_1 + y_2}$

$${}_{B}C_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

$$C = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^{n+1} & -\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Vivatsgasse 7
D-53111 Bonn
Tel. 02 28/402-0
Fax 02 28/40 22 77
http://www.mpim-bonn.mpg.de

Eine geschlossene Formel für f_n

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_n = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(-\lambda_1^n + \lambda_2^n\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

$$0 < \sqrt{5} - 1 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{3}{4}.$$ klein für große n

Noch ein Beispiel (Konjugation in $Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_A(x) = X^2+1 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$,

$$C = \frac{-1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}.$$

Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Jedes Polynom $h = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1 X + c_0$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ ist ein Produkt $h = (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$, wo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Jede Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ kann triagonalisiert werden (Satz 11.3).

Max-Planck-Institut für Mathematik

Max Planck Institute of Mathematics

Aber $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar, auch über $\mathbb{C}$ nicht.

$\chi_B(X) = (X-1)^2$.

Wäre es $CBC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, dann

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $B = C^{-1} E_2 C = E_2$.

Widerspruch!

$B \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ hat nur einen Eigenwert, 1.

Die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben

$\chi_A(X) = \chi_{A'}(X) = (X-2)(X-1)^2$, aber

die sind nicht konjugiert.

Die Eigenwerte sind 1 und 2, dabei

$\dim \mathbb{K}_1^3(A) = 1$, $\dim \mathbb{K}_1^3(A') = 2$.

Max-Planck-Institut
für Mathematik
Vivatsgasse 7
D-53111 Bonn
Tel. 02 28/402-0
Fax 02 28/40 22 77
http://www.mpim-bonn.mpg.de

Nilpotente Abbildungen und Matrizen

<u>Def. 11.7.</u> Eine lineare Abbildung $f: V \to V$ (eine Matrix $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$) heißt <u>nilpotent</u>, falls $f^N = 0$ $(A^N = 0)$ für eine $N \in \mathbb{N}$.

<u>Lemma 11.8.</u> A ist nilpotent $\Leftrightarrow \chi_A(X) = X^n$.

<u>Bew.</u> $(\Leftarrow)$ Gegeben $\chi_A(X) = X^n$. Nach dem Satz 11.3. existiert eine Basis, wo $f_A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\bar{v} \mapsto A\bar{v}$ durch eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen dargestellt ist. Sei diese Basis $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$, $f = f_A$. Dann

$$f_A(\mathbb{K}^n) \subseteq \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1} \rangle_{\mathbb{K}} =: \mathcal{U}_{n-1}.$$

Weiter, sei $\mathcal{U}_k := \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k \rangle_{\mathbb{K}}$. Dann

$f(\mathcal{U}_k) \subseteq \mathcal{U}_{k-1}$. Immer $f(\bar{u}_d) \in \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{d-1} \rangle_{\mathbb{K}}$.

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * & & * & * \\ & 0 & \ddots & & * \\ & & \ddots & * & * \\ & 0 & & 0 & * \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bis $f(\bar{u}_1) = \bar{0}_{\mathbb{K}^n}$.

D.h. $f^n(\mathbb{K}^n) \subseteq f(\langle \bar{u}_1 \rangle_{\mathbb{K}}) = \{\bar{0}_{\mathbb{K}^n}\}$ und

$f^n = 0$. Dann auch $A^n = 0$.

$(\Rightarrow)$ Gegeben $A^N = 0$. Wenn $A = 0$, haben wir $\chi_A(X) = X^n$.

Sei es $A \neq 0$ und $A^K \neq 0$, $A^{K+1} = 0$.

Dann $\{A^K \bar{v} \mid \bar{v} \in \mathbb{K}^n\} \neq \{\bar{0}_{\mathbb{K}^n}\}$ und wir finden einen Vector $\bar{u}_1 \neq 0$, s.d. $A\bar{u}_1 = 0$.

Sei $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, $f = f_A$. Dann ist $\tilde{A} = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ derart

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline \vdots & & & \\ & & \hat{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Damit $\chi_A(X) = \chi_{\tilde{A}}(X) = X \cdot \chi_{\hat{A}}(X)$ und $\hat{A}^N = 0$.

Durch Induction über n zeigt man, dass $\chi_{\hat{A}}(X) = X^{n-1}$. $\boxtimes$

<u>Beispiel</u> Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nilpotent, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$.

<u>Bem.</u> (1) Eine nilpotente Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $A = 0$.

(2) $A^N = 0 \iff A^n = 0$ für eine $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(3) $(E_n - A)^{-1} = E_n + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}$, falls $A^n = 0$, $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Das charakteristische Polynom und Diagonalisierbarkeit (Triagonalisierbarkeit). (VIII)

$\chi_A(x) = \det(xE_n - A)$, $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(1) $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \exists \bar{v} \in \mathbb{K}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, s.d. $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$.
(Satz 11.2)

(2) $\chi_A(\lambda) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i\neq j$, dann ist A diagonalisierbar.
$\exists \bar{v}_i \in \mathbb{K}^n$ mit $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$, $\bar{v}_i \neq \bar{0}$ und diese Vektoren sind linear unabhängig (Satz 11.5.).

(3) $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{K} \Rightarrow$
$\Rightarrow A$ ist triagonalisierbar,

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

ähnlich, äquivalent, konjugiert

Bemerkungen ohne Beweis (a) Eine obere Dreiecksmatrix A mit $\chi_A(x) = (x-\lambda)^n$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie diagonal ist.

(b) $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist diagonalisierbar $\iff$
$\iff$ A ist triagonalisierbar und

$$\operatorname{Ker}(A-\lambda E_n)^n = \operatorname{Ker}(A-\lambda E_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Beispiel Für eine nilpotente A ist die Bedingung

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^n = \operatorname{Ker} 0 = \mathbb{K}^n, \quad A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K}),$$

(c) Sei $f: V \to V$ diagonalisierbar, $V \cong \mathbb{K}^n$, $\mathcal{U} \subseteq V$, $\mathcal{U}$ ein Unterraum, s.d. $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.
Dann ist die Einschränkung $\tilde{f}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$
$\bar{u} \mapsto f(\bar{u})$
auch diagonalisierbar.

Ein Beispiel. $n=3$, $f=f_A$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

Sei $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathbb{K}^3$ mit $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.
Falls $\mathcal{U}=\{\bar{0}_{\mathbb{K}^3}\}$, hat $\mathcal{U}$ eine Basis $\mathcal{B}=\emptyset$ und jeder Vektor $\bar{v} \in \mathcal{B}$ (der nicht existiert) ist ein Eigenvektor von $\tilde{f}$.

Sei es $\mathcal{U} \neq \{\bar{0}_{\mathbb{K}^3}\}$ und $\bar{u} \in \mathcal{U}$, $\bar{u} \neq \bar{0}$.

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \bar{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \bar{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Gegeben $f(\bar{u}) \in \mathcal{U} \Rightarrow f^2(\bar{u}) \in \mathcal{U} \Rightarrow f^k(\bar{u}) \in \mathcal{U}\ \forall k,\ k \geq 0$.

$$f(\bar{u}) = \alpha_1 \bar{e}_1 + 2\alpha_2 \bar{e}_2 + 3\alpha_3 \bar{e}_3,$$
$$f^2(\bar{u}) = \alpha_1 \bar{e}_1 + 4\alpha_2 \bar{e}_2 + 9\alpha_3 \bar{e}_3.$$ Also

$$\alpha_2 \bar{e}_2 + 2\alpha_3 \bar{e}_3 \in \mathcal{U}, \quad \alpha_2 \bar{e}_2 + 3\alpha_3 \bar{e}_3 \in \mathcal{U}$$

und weiter $\alpha_3 \bar{e}_3 \in \mathcal{U}$.

Falls $\alpha_3 \neq 0$, haben wir $\bar{e}_3 \in \mathcal{U}$.
Ähnlich, $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \bar{e}_1 \in \mathcal{U}$, $\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow \bar{e}_2 \in \mathcal{U}$.
$\mathcal{U}=\langle \bar{e}_i \rangle$ oder $\mathcal{U}=\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$ oder $\mathcal{U}=\mathbb{K}^3$.
$i \neq j$ $\quad \tilde{f}$ ist diagonalisierbar.

Vorbereitungsaufgaben

Aufg. 2. $f: V \to V$ linear, $V = \mathbb{K}^n$, die Eigenwerte von f sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$, falls $i \neq j$. Sei $h: V \to V$ linear, s.d. $f \circ h = h \circ f$, dann ist h diagonalisierbar.

Lösung. Es existiert eine Basis $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$, s.d. $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ (Sätze 11.2. und 11.5.)

$$f(h(\bar{v}_i)) = f \circ h(\bar{v}_i) = h \circ f(\bar{v}_i) = h(\lambda_i \bar{v}_i) = \lambda_i h(\bar{v}_i).$$

$h(\bar{v}_i)$ ist ein Eigenvektor von f zu dem Eigenwert λ_i oder $h(\bar{v}_i) = \bar{0} = 0 \cdot \bar{v}_i$.

Sei $\bar{v} = \gamma_1 \bar{v}_1 + \ldots + \gamma_n \bar{v}_n$, $\bar{v} \neq 0$, s.d. $f(\bar{v}) = \lambda_i \bar{v}$.

Dann $\lambda_i \bar{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \gamma_j \bar{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \lambda_j \bar{v}_j$.

Weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gilt es

$$\lambda_i \gamma_j = \lambda_j \gamma_j \quad \text{für alle } j, \ 1 \leq j \leq n.$$

Also $\gamma_j = 0$, falls $j \neq i$.

Das bringt uns, $h(\bar{v}_i) = \gamma_i \bar{v}_i$ mit $\gamma_i \in \mathbb{K}$, falls $h(\bar{v}_i) \neq \bar{0}$.

Jeder Vektor $\bar{v}_i \in \mathcal{B}$ ist ein Eigenvektor von h $\Rightarrow$ h ist diagonalisierbar.

Aufg. 3. Gesucht sind $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, s.d. $A_i \not\sim A_j$ für $i \neq j$ und jede A_i genau die Eigenwerte $1, 2$ hat.

Lösung. $\chi_{A_i}(X) = (X-1)(X-2)(X-\lambda_3)$, $\lambda_3 \in \{1, 2\}$.

$(X-1)^2(X-2)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$(X-1)(X-2)^2$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Warum sind A_1 und A_2 nicht konjugiert?

$$\mathrm{rk}(A_1 - E_3) = 1 < 2 = \mathrm{rk}(A_2 - E_3).$$

Ebenfalls $\mathrm{rk}(A_3 - 2E_3) = 1 < 2 = \mathrm{rk}(A_4 - 2E_3)$. $\boxtimes$

Und noch eine Tatsache (der Satz von Vieta)

Sei $p \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom und $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von λ, also $p(\lambda) = 0$. Dann gilt es $p = (X-\lambda)q$, wo $q \in \mathbb{K}[X]$.

Bew. Induktion über $n = \deg p$.

Falls $n = -\infty$ $(p = 0)$, haben wir $p = (X-\lambda)\cdot 0$.

Falls $n = 0$, $p = a$, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ und p hat keine Nullstelle. Sei $n \geq 1$, $p = c_n X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_0$ mit $c_n \neq 0$. Dann $p = (X-\lambda)c_n X^{n-1} + \tilde{p}$, wo $\tilde{p}(\lambda) = 0$ und entweder $\tilde{p} = 0$ oder $\deg \tilde{p} < n$. $\boxtimes$

Anhang I. Elementarmatrizen und A^{-1}.

$A = (a_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Die elementaren Transformationen kann man als Multiplikation mit Matrizen verstehen.

(1) Die i-te und j-te Zeilen vertauschen:

$$A \to \tilde{A}, \quad \tilde{A} = P_{ij}A, \text{ wo } P_{ij} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

z.B., $n=2$. $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $i \neq j$

$$P_{12}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Merken, $\det(P_{ij}) = -1$.

(2) Die i-te Zeile mit $r \in \mathbb{K}^{\times}$ multiplizieren:

$$A \to \tilde{A}, \quad \tilde{A} = D(i,r)\cdot A, \quad D(i,r) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 1 & & \\ & r & \\ & & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array}.$$

$$\mathrm{Det}(D(i,r)) = r$$

(3) Die i-te Zeile durch ihre Summe mit $r\cdot$(j-te Zeile) ersetzen:

$$A \to \tilde{A}, \quad \tilde{A} = U(i,j,r)A, \text{ wo } U(i,j,r) =$$

$$= \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & 1 & & r & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}.$$

z.B. $n=2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{U}(i,j,r)) = 1.$

Wenn wir den Gauß-Algorithmus durchführen

$$A \rightsquigarrow \underbrace{\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Zeilenstufenform}}.$$

Falls $\operatorname{rk} A < n$, ist A nicht invertierbar.

Falls $\operatorname{rk} A = n$, haben wir $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & * & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{n-1\,n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\hat{a}_{1n}) \\ \vdots \\ \cdot(-\hat{a}_{n-1\,n}) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

wieder mit Gauß

Dann mit der $(n-1)$-ten Zeile und so weiter bis $A \rightsquigarrow E_n$.

$$\overbrace{S_m S_{m-1} \cdots S_1}^{\text{Elementarmatrizen}} A = E_n \Rightarrow S_m S_{m-1} \cdots S_1 = A^{-1}.$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & \vdots \\ & & & & 0 & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & & 0 & 1 \end{array}\right)}_{(A \,|\, E_n)} \xrightarrow{\text{Gauß}} (E_n \,|\, A^{-1})$$

n