Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Übungsserie 7

Aufgabe 1

(i)

Voraussetzung:
$A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A(x, y, z) = (x + 2y, y - z)$

Behauptung:
A ist eine lineare Abbildung.

Beweis:

Sei $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A((a, b, c) + (x, y, z)) &= A(a + x, b + y, c + z) \\
&= ((a + x) + 2(b + y), (b + y) - (c + z)) \\
&= ((a + 2b) + (x + 2y), (b - c) + (y - z)) \\
&= (a + 2b, b - c) + (x + 2y, y - z) \\
&= A(a, b, c) + A(x, y, z)
\end{aligned}$$

Weiterhin sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A(\lambda \cdot (a, b, c)) &= A(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \\
&= (\lambda a + 2\lambda b, \lambda b - \lambda c) \\
&= (\lambda(a + 2b), \lambda(b - c)) \\
&= \lambda(a + 2b, b - c) \\
&= \lambda \cdot A(a, b, c)
\end{aligned}$$

Damit erfüllt A die Bedingungen (nach Definition) für eine lineare Abbildung. A ist also linear. $\square$

(ii)

Voraussetzung:
$B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $B(x, y, z) = (x + y, z + 1)$

Behauptung:
B ist nicht linear.

Beweis:

Gegenbeispiel: Es gilt $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
B((1, 1, 1) + (1, 1, 1)) &= B(2, 2, 2) = (2 + 2, 2 + 1) &&= (4, 3) \\
B(1, 1, 1) + B(1, 1, 1) &= (1 + 1, 1 + 1) + (1 + 1, 1 + 1) = (2, 2) + (2, 2) &&= (4, 4)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; B((1, 1, 1) + (1, 1, 1)) = (4, 3) \neq (4, 4) = B(1, 1, 1) + B(1, 1, 1)$$

Damit gelten die Bedingungen schon nicht für $(1, 1, 1)$ nicht. B kann also nicht linear sein. $\square$

(iii)

Voraussetzung:
$C : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $C(x, y, z) = (x + yz, z)$

Behauptung:
C ist nicht linear.

Beweis:

Gegenbeispiel: Es gilt $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ und $2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} C(2 \cdot (1,1,1)) &= C(2,2,2) = (2 + 2 \cdot 2, 2) && = (6,2) \\ 2 \cdot C(1,1,1) &= 2 \cdot (1 + 1 \cdot 1, 1) = 2 \cdot (2,1) && = (4,2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; C(2 \cdot (1,1,1)) = (6,2) \neq (4,2) = 2 \cdot C(1,1,1)$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedingung nicht allgemein erfüllt ist. C kann also nicht linear sein.
□

(iv)

Voraussetzung:
$D : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $D(z) = \overline{z}$

Behauptung:
Wenn $K = \mathbb{R}$, dann ist D linear.
Wenn $K = \mathbb{C}$, dann ist D nicht linear.

Beweis:

Sei $(a + ib), (c + id) \in \mathbb{C}$. Dann gilt allgemein:

$$\begin{aligned} D((a+ib) + (c+id)) &= D((a+c) + i(b+d)) \\ &= (a+c) - i(b+d) \\ &= (a - ib) + (c - id) \\ &= D(a+ib) + D(c+id) \end{aligned}$$

Fall $K = \mathbb{R}$: Sei weiterhin $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} D(\lambda \cdot (a+ib)) &= D(\lambda a + i\lambda b) \\ &= \lambda a - i\lambda b \\ &= \lambda(a - ib) \\ &= \lambda \cdot D(a+ib) \end{aligned}$$

Damit erfüllt D für den Fall $K = \mathbb{R}$ die benötigten Bedingungen. D ist also linear.

Fall $K = \mathbb{C}$ (durch Gegenbeispiel): Es gilt $(1+i), (1-i) \in \mathbb{C}$. Dann gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} D((1+i) \cdot (1-i)) &= D(1 - i^2) = D(2) && =2 \\ (1+i) \cdot D(1-i) &= (1+i) \cdot (1+i) = 1 + 2i + i^2 && =2i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; D((1+i) \cdot (1-i)) = 2 \neq 2i = (1+i) \cdot D(1-i)$$

Für den Fall $K = \mathbb{C}$ sind die Bedingungen also nicht allgemein erfüllt. D ist also nicht linear. □

Aufgabe 2

Voraussetzung:

Sei $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit
$A(1,2) = (0,3,5)$ und $A(1,-1) = (3,0,2)$.

Aufgabe:

Bestimmen Sie $A(1,5)$ und $A(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Jede lineare Abbildung lässt sich mithilfe einer Matrix beschreiben. Für eine bestimmte 3×2-Matrix M gilt also für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und bestimmte $x', y', z' \in \mathbb{R}$:

$$A(x,y) = M(x,y) = (x', y', z')$$

Eine Matrix selbst beschreibt immer ein lineares Gleichungssystem. Damit können also allgemein folgende Gleichungen für bestimmte Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \\ z' &= ex + fy \end{aligned}$$

Setzt man nun die bereits bekannten Punkte in dieses System ein, folgt:

$$\begin{array}{llll} (1) & 0 = a + 2b & (4) & 3 = a - b \\ (2) & 3 = c + 2d & (5) & 0 = c - d \\ (3) & 5 = e + 2f & (6) & 2 = e - f \end{array}$$

Für Gleichung (4) und (1) folgt:

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \ a = 3 + b \ \overset{(1)}{\Rightarrow} \ 3 + 3b = 0 \ \Rightarrow \ b = -1 \ \Rightarrow \ a = 2$$

Weiterhin folgt für (2) und (5):

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \ c = d \ \overset{(2)}{\Rightarrow} \ 3d = 3 \ \Rightarrow \ d = 1 \ \Rightarrow \ c = 1$$

Für (3) und (6) folgt dann:

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \ e = 2 + f \ \overset{(3)}{\Rightarrow} \ 2 + 3f = 5 \ \Rightarrow \ f = 1 \ \Rightarrow \ e = 3$$

Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\underline{\underline{A(x,y) = (2x - y, x + y, 3x + y)}}$$

$$\Rightarrow \ \underline{\underline{A(1,5) = (-3, 6, 8)}}$$

Aufgabe 3

Voraussetzung:

Sei $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit
$A(x, y, z) = (x + 2y + z,\ y + 3z,\ -x - y + 2z,\ x + 3y + 4z)$.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Basen von Bild(A) und Kern(A), sowie den Rang und den Defekt von A.

Lösung:

Es gilt Kern$(A) = A^{-1}(\{(0, 0, 0, 0)\})$. Der Kern ist die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, welche auf $(0, 0, 0, 0)$ abgebildet werden. Für diese Vektoren gilt also (für bestimmte $x, y, z \in \mathbb{R}$):

$$A(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} (1)\ 0 &= x + 2y + z \\ (2)\ 0 &= y + 3z \\ (3)\ 0 &= -x - y + 2z \\ (4)\ 0 &= x + 3y + 4z \end{aligned}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\ y = -3z \ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x = 5z$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\ 5z - 6z + z = 0 \ \Rightarrow\ 0 = 0 \ \Rightarrow\ w.A.$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\ 5z - 9z + 4z = 0 \ \Rightarrow\ 0 = 0 \ \Rightarrow\ w.A.$$

Sowohl x als auch y können eindeutig durch z bestimmt werden. Allerdings erlauben es die Gleichungen z beliebig zu wählen. Sei $z = c \in \mathbb{R}$ mit c beliebig, dann können alle Vektoren aus $\mathbb{R}^3$, welche auf $(0, 0, 0, 0)$ abgebildet werden, durch folgenden Zusammenhang ausgedrückt werden:

$$A(5c, -3c, c) = (0, 0, 0, 0)$$

Weiterhin gilt dann für beliebige $c \in \mathbb{R}$:

$$(5c, -3c, c) = c \cdot (5, -3, 1)$$

Die Vektoren können also alle aus einer Linearkombination von $(5, -3, 1)$ erzeugt werden (Erzeugereigenschaften). Dieser Vektor ist als System betrachtet linear unabhängig, denn für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda \cdot (5, -3, 1) = (0, 0, 0)$$

gibt es nur eine Lösung für $\lambda = 0$. Damit bildet $\{(5, -3, 1)\}$ eine Basis zum Kern(A). Es folgt dann Defekt$(A) = \dim(\text{Kern}(A)) = 1$.
Für das Bild von A müssen alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$ bestimmt werden, die durch A abgebildet werden. Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Abbildung auf (a, b, c, d) für $x, y, z \in \mathbb{R}$ (wegen $A(x, y, z) = (a, b, c, d)$):

$$\begin{aligned} (1)\ a &= x + 2y + z \\ (2)\ b &= y + 3z \\ (3)\ c &= -x - y + 2z \\ (4)\ d &= x + 3y + 4z \end{aligned}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\ y = b - 3z \ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x = -c - b + 3z + 2z = 5z - c - b$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}\ y = b - 3z \ \overset{(3)}{\Rightarrow}\ x = -c - b + 3z + 2z = 5z - c - b$$
$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\ 5z - c - b + 2b - 6z + z = a \ \Rightarrow\ a = b - c \ \Rightarrow\ c = b - a$$
$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\ 5z - c - b + 3b - 9z + 4z = d \ \Rightarrow\ d = 2b - c \ \Rightarrow\ d = b + a$$

Damit können die Vektoren, auf welche abgebildet wird, durch $(a, b, b-a, a+b)$ dargestellt werden, sofern a und b beliebig sind.

$$\Rightarrow\ (a, b, b-a, a+b) = (a, 0, -a, a) + (0, b, b, b) = a \cdot (1, 0, -1, 1) + b \cdot (0, 1, 1, 1)$$

Es wird deutlich, dass $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ ein erzeugendes System für diese Vektoren darstellt. Weiterhin gibt es für

$$a \cdot (1, 0, -1, 1) + b \cdot (0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

nur eine Lösung für $a = b = 0$. Die beiden Vektoren sind also linear unabhängig. $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ bildet damit eine Basis für alle abgebildeten Vektoren. Es folgt dann $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Bild}(A)) = 2$.

Aufgabe 4

(i)

Sei $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $A(x) = (x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $A(0) = (0, 0)$. Weiterhin folgt:

$$\Rightarrow \; A^{-1}(\{(1,1)\}) = \emptyset \; \Rightarrow \; \mathrm{Lin}(A^{-1}(\{(1,1)\})) = \emptyset$$

Aber es gilt:

$$(0,0) \in \mathrm{Lin}(\{(1,1)\}) \; \Rightarrow \; 0 \in A^{-1}(\mathrm{Lin}(\{(1,1)\}))$$
$$\Rightarrow \; A^{-1}(\mathrm{Lin}(\{(1,1)\})) \neq \mathrm{Lin}(A^{-1}(\{(1,1)\}))$$

Damit gilt also die Mengengleichheit nicht im Allgemeinen.

(ii)

Voraussetzung:
Sei $A : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und V, W Vektorräume über K. Sei W' ein Untervektorraum von W.

Behauptung:
$A^{-1}(W')$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis:

Allgemein gilt:

$$A^{-1}(W') = \{v \in V \mid A(v) \in W'\}$$

Da es sich bei W' um einen Untervektorraum handelt, gilt $W' \neq \emptyset$. Dann gibt es auch mindestens ein $v \in V$, für welches $A(v) \in W'$ gilt. Es folgt dann $A^{-1}(W') \neq \emptyset$.
Sei nun $a, b \in W'$ und $\lambda \in K$. Dann gilt, weil W' ein Untervektorraum ist:

$$a + b \in W'$$
$$\lambda a \in W'$$

Weiterhin muss es dann auch $u, v \in A^{-1}(W')$ geben, für welche $a = A(u)$ und $b = A(v)$ gilt. Dann folgt, da es sich bei A um eine lineare Abbildung handelt:

$$\Rightarrow \; a + b = A(u) + A(v) = A(u + v) \in W'$$
$$\Rightarrow \; u + v \in A^{-1}(W')$$

Damit ist $A^{-1}(W')$ abgeschlossen bezüglich der Addition. Für die skalare Multiplikation gilt dann:

$$\Rightarrow \; \lambda a = \lambda A(u) = A(\lambda u) \in W'$$
$$\Rightarrow \; \lambda u \in A^{-1}(W')$$

Also ist $A^{-1}(W')$ auch abgeschlossen bezüglich der skalaren Multiplikation. Es folgt, dass es sich bei $A^{-1}(W')$ um einen Untervektorraum von V handeln muss. $\square$