Lösung 5. Serie

Aufgabe 1 V sei K-Vektorraum, $u,v,w \in V$.

i) zz: $u-v,\ v-w,\ w-u$ linear abhängig.

g zz: $\underbrace{1\cdot(u-v)+1\cdot(v-w)+1\cdot(w-u)}_{LHS}=0$

$LHS = u-v+v-w+w-u = (u-u)+(v-v)+(w-w)=0$

gemäß Vektraum-Axiom & Verträglichkeit der 1, Assoziativ- u. Komm.-Gesetz in $(V,+)$.

ii) Sei zusätzlich $1_K+1_K \neq 0_K$.

zz: [u,v,w lin. unabh. $\Longleftrightarrow$ $u+v,\ v+w,\ w+u$ lin. unabh.]

„$\Rightarrow$": Seien $\lambda_i \in K$ $(i\in\{u,v,w\})$ beliebig gewählt.

$$S := \underbrace{\lambda_u(v+w)+\lambda_v(w+u)+\lambda_w(u+v)}_{(1)} \overset{\text{V-Raum Axiome}}{=} \underbrace{(\lambda_v+\lambda_w)u+(\lambda_u+\lambda_w)v+(\lambda_u+\lambda_v)w}_{(2)}$$

Sei $0=S$. Weil u,v,w lin. unabh., folgt (rechte Seite, (2)):

$$\underbrace{\lambda_v+\lambda_w}_{I}=0 \ \wedge\ \underbrace{\lambda_u+\lambda_w}_{II}=0 \ \wedge\ \underbrace{\lambda_u+\lambda_v}_{III}=0$$

$I-II \Rightarrow \lambda_v=\lambda_u \quad (IV)$

IV in III einsetzen $\Rightarrow 0=\lambda_u+\lambda_u = 1\cdot\lambda_u+1\cdot\lambda_u=\underbrace{(1+1)}_{\neq 0}\cdot\lambda_u$

$\overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \lambda_u=0.$

Die Gleichungen I, II, III sind symmetrisch bzgl. ~~Vertauschung~~ zyklischer Vertauschung der Bezeichnung u,v,w. Also folgt genauso, daß $0=\lambda_v=\lambda_w$.

Daher ist $(u+v),(v+w),(w+u)$ linear unabhängig.

„$\Leftarrow$": Seien $\mu_i\in K$ $(i\in\{u,v,w\})$ beliebig gegeben.

Als erstes suche ich passende $\lambda_i\in K$, sodaß gilt

$$\left.\begin{aligned} 0\lambda_u+1\lambda_v+1\lambda_w &= \mu_u \ \wedge\\ 1\lambda_u+0\lambda_v+1\lambda_w &= \mu_v \ \wedge\\ 1\lambda_u+1\lambda_v+0\lambda_w &= \mu_w \end{aligned}\right\} (*)$$

Gauß-Elimination & Probe zeigen, daß $\lambda_u := \frac{1}{2}(\mu_v+\mu_w-\mu_u)$, $\lambda_w := \frac{1}{2}(\mu_u+\mu_v-\mu_w)$, $\lambda_v := \frac{1}{2}(\mu_u+\mu_w-\mu_v)$, die eindeutige Lösung von (*) sind.

Sei S wieder definiert. Wegen (*) ist $S = \underbrace{\mu_u\cdot u+\mu_v\cdot v+\mu_w\cdot w}_{(3)}$.

Aus der Annahme $0=S$ folgt, weil $u+v,\ v+w,\ w+u$ lin. unabhängig, daß $\lambda_i=0\ \forall i\in\{u,v,w\}$ (Form (1) benutzen).

Nach (*) ist $\mu_i=0\ \forall i\in\{u,v,w\}$. Da die μ_i beliebig waren, ist die Linear Kombo (3) beliebig, und u,v,w sind linear unabhängig.

Aufgabe 2 (i) zur Basis ergänzen

g zz: $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}_{\text{gegeben}},\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{neu}} \in \mathbb{R}^3$ sind Basis.

g zz. nach Lemma A: —"— sind lin. unabh.

Seien also $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ so daß

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow\ 1\cdot\lambda_1-1\cdot\lambda_2+1\lambda_3=0 \ \wedge\ 1\cdot\lambda_1+1\cdot\lambda_2=0 \ \wedge\ 4\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2=0$$

Gauß-Elimination (Rechnung bitte andeuten!)

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \Rightarrow$ lin. unabh.

> Lemma (A): Seien $v_1..v_n\in V^n$ linear unabhängig. Dann sind sie eine Basis.
>
> Beweis: (1) V^n hat eine n-elementige Basis nach Bsp. 2, Kap 2.4
> (2) Es gibt eine Ergänzung $v_1,..,v_m$ zu einer Basis von V^n nach Folg. 2.4.5(i).
> (3) $n=m$ nach Folgerung 2.4.5.(ii), daher ist $v_1,..,v_n$ bereits eine Basis. □

(ii) geht genauso wie (i) ab der Zeile „g.z.z."

(Rechnung bitte andeuten!)

(iii) In $\mathbb{R}^4$ soll $v=\begin{pmatrix}-7\\4\\11\\2\end{pmatrix}$ nach der (als solcher bekannten) Basis $(1,0,3,0),(2,2,-1,0),(-3,5,2,1),(0,0,-2,0)$ entwickelt werden.

Nach Def. von Basis hat v eine solche Entwicklung, die nach Satz 2.4.3 eindeutig ist.

Seien $\lambda_i\in\mathbb{R}$ die Entwickl.-Koeff.: $\begin{pmatrix}-7\\4\\11\\2\end{pmatrix}=v\overset{\text{Wahl }\lambda_i}{=}\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-3\\5\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$

Gaußelimination (Rechnung bitte andeuten) $\Longrightarrow (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4)=(5,-3,2,\frac{11}{2})$.

(iv) Für welche $r\in\mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix}1\\r\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\r\end{pmatrix},\begin{pmatrix}r\\0\\1\end{pmatrix}$ Basis des $\mathbb{R}^3$?

Lemma A $\Rightarrow$ genügt lin. unabh. zu prüfen.

lin. abhängig $\Leftrightarrow$ Gleichungssystem $0=\lambda_1+r\lambda_3 \wedge 0=r\lambda_1+\lambda_2 \wedge 0=r\lambda_2+\lambda_3$ ~~lösbar~~ nicht eindeutig nach $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$

$\overset{\text{Schule}}{\Leftrightarrow} 0=\det\begin{pmatrix}1&0&r\\r&1&0\\0&r&1\end{pmatrix}=r^3+1 \Leftrightarrow r=-1$

Aufgabe 3: $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1+i \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -1+2i \end{pmatrix}$, $v_4 := \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}$, $v_5 := \begin{pmatrix} -1-i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$

z.z.: $M := \{ A \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} : A$ ist Basis von $\mathbb{C}^3 \}$ hat die unten angegebene Gestalt.

B: • Folgerung 2.4.5.(ii) und Bsp. 2, Kap. 2.4 $\Rightarrow$ alle Basen haben drei Elemente.

• Mit Lemma A (umseitig) folgt: M enthält genau die linear unabhängigen, 3-elementigen Teilmengen.

• Wenn $v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}$ ($k_i \in \{1,2,3,4,5\}$ für $i = 1,2,3$) linear unabhängig sind, dann müssen notwendig auch $\{v_{k_1}, v_{k_2}\}$, $\{v_{k_2}, v_{k_3}\}$, $\{v_{k_3}, v_{k_1}\}$ linear unabhängig sein, daher darf es kein $\lambda \in \mathbb{C}$ geben, so daß $v_{k_1} = \lambda \cdot v_{k_2}$ oder $v_{k_2} = \lambda \cdot v_{k_3}$ oder $v_{k_3} = \lambda \cdot v_{k_1}$.

Es gilt aber:

$(*)\quad v_4 = \underbrace{(1-i)}_{\in \mathbb{C}\setminus\{0\}} \cdot v_1 \qquad \left(\text{da } \begin{matrix} (1-i) \cdot i = i+1 \\ (1-i)\cdot(-1+i) = -1+i+i-(-1) = 2i \end{matrix} \right)$

Daher genügt es, Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ zu betrachten. Im Ergebnis sind wegen $(*)$ v_1 mit v_4 austauschbar.

• Zähle 3-elem. Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ auf:

	Menge ~~enthält~~	linear unabhängig?	Determinante Spaltenmatrix (für die, die Determinanten schon kennen)
1)	$\{v_1; v_2; v_3\}$	nein	0
2)	$\{v_1; v_2; v_5\}$	ja	$-2+2i$
3)	$\{v_1; v_3; v_5\}$	ja	$-2+2i$
4)	$\{v_2; v_3; v_5\}$	ja	$4-4i$

Alle übrigen Teilmengen müssen gemäß Vorbetrachtung linear abhängig sein oder durch Austausch $v_1 \leftrightarrow v_4$ in diese 4 übergehen.

zu 2): zeigen: $\{v_1, v_2, v_5\}$ ist linear unabhängig.

Sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5 \in \mathbb{C}$. $\quad 0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_5 v_5$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 + (-1-i)\lambda_5 = 0 \quad \mathrm{I}$

$\wedge\ i\lambda_1 + (1-i)\lambda_2 + (1-i)\lambda_5 = 0 \quad \mathrm{II}$

$\wedge\ (-1+i)\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \mathrm{III}$

$\overset{\mathrm{III}\text{ einsetzen}}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda_2 = (1-i)\lambda_1 \ \wedge\ \lambda_1 + (-1-i)\lambda_5 = 0 \quad \mathrm{II}'$

$\wedge\ 2i\lambda_1 + (1-i)\lambda_5 = 0 \quad \mathrm{III}'$

$(1-i)^2 = 1-1-2i$

$\overset{2i\cdot\mathrm{II}'-\mathrm{III}'}{\Longleftrightarrow} \quad \lambda_2 = (1-i)\lambda_1 \ \wedge\ \lambda_1 = (1+i)\lambda_5 \ \wedge\ [(1-i) - 2i(-1-i)]\lambda_5 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_5 = 0$

Weil $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5$ beliebig waren, ist $\{v_1, v_2, v_5\}$ linear unabh. und nach Lemma A Basis.

zu 1), 3), 4): [Korollar zum Basisaustauschsatz (mit demselben Beweis):

Sei V ein K-Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis und $a \in V$. Behauptung: $(B \setminus \{b_j\}) \cup \{a\}$ ist genau dann eine Basis ($1 \le j \le n$), wenn in der B-Darstellung von a, $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, gilt $\lambda_j \neq 0$.]

Wie in Aufgabe 2(iii) gibt es genau eine $\{v_1, v_2, v_5\}$-Darstellung von v_3.

Sei $v_3 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_5 v_5$ für diese $\delta_i \in \mathbb{C}$.

$\Leftrightarrow \quad 2\delta_1 + 0 + (-1-i)\delta_5 = 2$

$\wedge\ i\delta_1 + (1-i)\delta_2 + (1-i)\delta_5 = 1+i$

$\wedge\ (-1+i)\delta_1 + \delta_2 + 0 = -1+2i$

$\overset{\text{Gaußelim.}}{\Longleftrightarrow} \quad (\delta_1; \delta_2; \delta_3) = (2, 1, 0)$

Gemäß Korollar sind 3), 4) Basen und 1) nicht.

• Tabelle & $(*)$ $\Rightarrow$ $M = \{\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_5\}, \{v_3, v_4, v_5\}\}$ $\square$

Aufgabe 4 Welche der $U_i \in \mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

$U_1 := \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3 ;\ 4\tilde{x} - \tilde{z} = 0\}$

$U_2 :=$ —— " —— $\tilde{x} - \tilde{y} + 2\tilde{z} = 1\}$

U_3 —— " —— $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{z}\}$

U_4 —— " —— $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 0\}$

U_5 —— " —— $(\tilde{x} - \tilde{y})\tilde{z} = 0\}$

Seien ~~$(x,y,z), (u,v,w) \in U_1$ (...)~~

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$z := x + y\lambda = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3)$.

(i) Sei $x, y \in U_1$. z.z.: $x + \lambda y \in U_1$.

• $0 \in U_1$: klar $\Rightarrow U_1 \neq \emptyset$.

• $x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3) = z$.

$4z_1 - z_3 = 4(x_1 + \lambda y_1) - (x_3 + \lambda y_3) = \underbrace{(4x_1 - x_3)}_{=0} + \lambda \underbrace{(4y_1 - y_3)}_{=0} = 0$

$\in U_1 \leadsto$ Unterraum.

ii) Sei $x, y \in U_2$; z.z.: $z \in U_2$. Nach Def. z, ~~...~~

$z_1 - z_2 + 2z_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3) + \lambda(y_1 - y_2 + 2y_3) \overset{x,y \in U_2}{=} 1 + \lambda \cdot 1$ ~~...~~ $= 1 + \lambda \cdot 1 = 1$ nur für $\lambda = 0$.

$\leadsto$ Gegenbeispiel: $\lambda = 1$. $\leadsto$ kein Unterraum.

iii) Sei $x, y \in U_3$. z.z.: $z \in U_3$.

$0 \in U_3$: klar. $\Rightarrow U_3 \neq \emptyset$

$z_1 = x_1 + \lambda y_1 \overset{x \in U_3}{=} x_2 + \lambda y_1 \overset{y \in U_3}{=} x_2 + \lambda y_2 = z_2$.

$z_2 = z_3$: genauso. $\leadsto z \in U_3 \leadsto$ Unterraum.

iv) Sei $x \in U_4$. z.z.: $x = 0$.

$0 \overset{x \in U_4}{=} \underbrace{x_1^2}_{\ge 0} + \underbrace{x_2^2}_{\ge 0} + x_3^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

und $0 \in U_4$: klar

$\Rightarrow U_4 = \{0\}$. Ist Unterraum ~~...~~ nach Vorlesung.

v) z.z.: U_5 kein Unterraum

$\underbrace{(1,1,1)}_{\in U_5} + 1 \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{\in U_5} = (2,1,1) \notin U_5$