Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 09

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $U, W \subset V$ lineare Unterräume.

(a): Sei $f \in V^*$ beliebig.
„$\supset$“: Im Allgemeinen gilt

$$\begin{aligned}
&f \in \operatorname{ann} U \cap \operatorname{ann} W \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall u \in U, w \in W: \quad f(u) = f(w) = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall u \in U, w \in W: \quad f(u+w) = f(u) + f(w) = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \quad f \in \operatorname{ann}(U+W)
\end{aligned}$$

„$\subset$“: Des Weiteren folgt für die Umkehrung

$$\begin{aligned}
&f \in \operatorname{ann}(U+W) \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall u \in U, w \in W: \quad && f(u+w) = f(u) + f(w) = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall u, u' \in U,\ w, w' \in W: \quad && f(u) = -f(w) = -f(w') \\
& && f(w) = -f(u) = -f(u') \\
&\quad \Longrightarrow \quad \forall u, u' \in U,\ w, w' \in W: \quad && f(u) = f(u'), \quad f(w) = f(w') \\
&\quad \overset{(f \text{ linear})}{\Longrightarrow} \quad \forall u \in U, w \in W: \quad && f(u) = f(w) = 0 \\
&\quad \Longrightarrow \quad f \in \operatorname{ann} U \cap \operatorname{ann} W
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\operatorname{ann}(U+W) = \operatorname{ann} U \cap \operatorname{ann} W$$

$\square$

(b): Sei ein $f \in V^*$.

$$\begin{aligned}
&f \in \operatorname{ann} U + \operatorname{ann} W \\
&\quad \Longrightarrow \quad \exists g, h \in V^*: \quad g(U) = h(W) = \{0\} \quad \wedge \quad f = g + h \\
&\quad \Longrightarrow \quad f(U \cap W) = \{0\} \\
&\quad \Longrightarrow \quad f \in \operatorname{ann}(U \cap W)
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\operatorname{ann} U + \operatorname{ann} W \subset \operatorname{ann}(U \cap W)$$

Weiterhin gilt nach bekannten Rechenregeln aus der Vorlesung

$$\dim[\operatorname{ann}(U \cap W)] = n - \dim(U \cap W)$$

Durch Anwendung dieser Rechenregel und des Dimensionssatzes folgt dann

$$\begin{aligned}
&\dim(\operatorname{ann} U + \operatorname{ann} W) \\
&= \underbrace{\dim(\operatorname{ann} U)}_{=n-\dim U} + \underbrace{\dim(\operatorname{ann} W)}_{=n-\dim W} - \dim(\underbrace{\operatorname{ann} U \cap \operatorname{ann} W}_{\overset{(a)}{=}\operatorname{ann}(U+W)}) \\
&= 2n - \dim U - \dim W - \underbrace{\dim[\operatorname{ann}(U+W)]}_{=n-\dim(U+W)=n-\dim U-\dim W+\dim(U\cap W)} \\
&= n - \dim(U \cap W) \\
&= \dim[\operatorname{ann}(U \cap W)]
\end{aligned}$$

Die Gleichheit der Dimensionen impliziert nun

$$\operatorname{ann} U + \operatorname{ann} W = \operatorname{ann}(U \cap W)$$

□

Aufgabe 2

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f \in V^*$ mit $f \neq 0$. Sei weiterhin ein $u \in V$ mit $u \notin \ker f$. Dann folgt unmittelbar aus der Linearität von f, dass für alle $\alpha \in K \setminus \{0\}$

$$\alpha u \notin \ker f \qquad \Longrightarrow \qquad Ku \cap \ker f = \{0\}$$

Ku und $\ker f$ bilden damit eine direkte Summe. Des Weiteren ist klar, dass

$$Ku \oplus \ker f \subset V$$

Sei nun $x \in V$ beliebig. Dann kann aufgrund von $f(u) \neq 0$ Folgendes definiert werden.

$$w \coloneqq x - \frac{f(x)}{f(u)}u \qquad \Longrightarrow \qquad x = w + v, \quad v \coloneqq \frac{f(x)}{f(u)}u$$

Es muss $v \in Ku$ sein. Weiterhin gilt für w

$$f(w) = f\left(x - \frac{f(x)}{f(u)}u\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(u)}f(u) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad w \in \ker f$$

x wird durch v und w also gerade in ein Element aus Ku und $\ker f$ zerlegt. Diese muss aufgrund der direkten Summe eindeutig sein. Weil x beliebig war, folgt die gewünschte Aussage.

$$V \subset Ku \oplus \ker f \qquad \Longrightarrow \qquad V = Ku \oplus \ker f$$

□

Aufgabe 3

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f_1, f_2 \in V^*$ mit $f_1, f_2 \neq 0$ und $\ker f_1 = \ker f_2$. Dann lässt sich nach Aufgabe 2 der Vektorraum V für ein $u \in V$ mit $u \notin \ker f_1$ beziehungsweise $u \notin \ker f_2$ als direkte Summe schreiben.

$$V = Ku \oplus \ker f_1 = Ku \oplus \ker f_2$$

Sei $x \in V$ beliebig. Dann gibt es nach dem Beweis aus Aufgabe 2 also ein gewisses $w \in \ker f_1 = \ker f_2$ mit

$$x = w + \frac{f_1(x)}{f_1(u)}u = w + \frac{f_2(x)}{f_2(u)}u$$

$$\Longrightarrow \qquad f_1(x) = \underbrace{f_1(w)}_{=0} + \frac{f_2(x)}{f_2(u)}f_1(u) = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}f_2(x) =: \alpha f_2(x)$$

Hierbei gilt $\alpha \neq 0$ nach den Definitionen von f_1, f_2 und u. Da x beliebig war, folgt die Aussage $f_1 = \alpha f_2$. $\square$