5 Determinanten

5.1 Determinantenformen

Der Begriff der Determinante entstand im Rahmen der Theorie linearer Gleichungssysteme. Die eindeutige Lösbarkeit haben wir bisher in der Sprache der Ränge formuliert. Für n Gleichungen mit n Unbekannten kann man dies auch in den Determinantenkalkül übersetzen. (Außerdem gestattet dieser eine explizite Darstellung der Lösung.) Im Laufe der Entwicklung wurde die Determinantenrechnung von Matrizen so verallgemeinert, dass auch andere Anwendungen möglich sind. Wir wählen hier diesen Zugang, der das Linearitätsprinzip betont.
In Abschnitt 3.2 wurde lineare Funktionale, die man auch Linearformen nennt, als lineare Abbildungen eines Vektorraumes V in den zugehörigen Körper K eingeführt. Wir betrachten jetzt ein mehrdimensionales Analogon.

Definition. Eine **n–fache Linearform (Multilinearform)** über den Vektorraum V mit dem Körper K ist eine Abbildung $L : V^n \to K$, die in jedem ihrer Argumente linear ist, d.h. für feste $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \in V$ ist $L(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ als Funktion in v linear, $i = 1, \ldots, n$.

Für dieses Kapitel setzen wir nun voraus

$$\dim V = n$$

und interessieren uns für ganz bestimmte n–fache Linearformen.

Definition. Eine Abbildung $\Delta : V^n \to K$ heißt **Determinantenform**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Δ ist Multilinearform.

(2) Δ ist nicht identisch Null.

(3) Für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gilt $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Eigenschaften von Determinantenformen

5.1.1 Lemma. $\Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots) = \Delta(\ldots, v_i + \lambda v_k, \ldots, v_k, \ldots),\ \lambda \in K$

Beweis. Wegen (1) ist

$$\Delta(\ldots, v_i + \lambda v_k, \ldots, v_k, \ldots) = \Delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots) + \lambda\Delta(\ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots).$$

Da $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_k, v_{i+1}, \ldots, v_k, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, folgt mit (3), dass der letzte Summand verschwindet. $\square$

5.1.2 Lemma.
$\Delta(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}\pi\ \Delta(v_1, \ldots, v_n)$ *für jede Permutation* $\pi \in S_n$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für die Vertauschung des i–ten mit dem k–ten Argument, indem wir nacheinander (3), (1) und wieder (3) anwenden:

$$\begin{aligned} 0 = \Delta(\ldots, v_i + v_k, \ldots, v_i + v_k, \ldots) &= \Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots) & &+ \Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots) \\ &+ \Delta(\ldots, v_k, \ldots, v_i, \ldots) & &+ \Delta(\ldots, v_k, \ldots, v_k, \ldots) \\ &= \Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots) & &+ \Delta(\ldots, v_k, \ldots, v_i, \ldots)\,, \end{aligned}$$

d.h.,

$$\Delta(\ldots, v_i, \ldots, v_k, \ldots) = -\Delta(\ldots, v_k, \ldots, v_i, \ldots)\,.$$

Für allgemeine $\pi \in S_n$ lässt sich $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}$ durch geeignete Transpositionen benachbarter Elemente in $v_1, \ldots, v_n$ umformen: Zunächst wird v_1 mit allen vorhergehenden $v_{\pi(i)}$ vertauscht, anschließend v_2 mit seinen Vorgängern bis auf v_1, usw. Die Anzahl dieser Transpositionen ist $\chi(\pi)$, die Charakteristik der Permutation. Die $\chi(\pi)$–fache Anwendung der obigen Gleichung ergibt

$$\Delta(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}) = (-1)^{\chi(\pi)} \Delta(v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Mit $(-1)^{\chi(\pi)} = \operatorname{sgn} \pi$ folgt die Behauptung. □

Die Eigenschaften (1) und (2) implizieren bereits die Umkehrung von (3):

5.1.3 Lemma. *Aus $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$ folgt die lineare Abhängigkeit der $v_1, \ldots, v_n$.*

Beweis. Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine beliebige Basis in V. Für $v_1, \ldots, v_n \in V$ benutzen wir die Koordinatendarstellung $v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} b_j$. Die Multilinearität von Δ führt zu

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} v_{1j_1} \ldots v_{nj_n}\, \Delta(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})\,.$$

Dabei verschwinden alle Summanden, wo zwei gleiche Indizes vorkommen, d.h.

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} v_{1\pi(1)} \ldots v_{n\pi(n)}\, \Delta(b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(n)})\,.$$

Wegen 5.1.2 können wir fortsetzen mit

$$\left(\sum_{\pi \in S_n} v_{1\pi(1)} \ldots v_{n\pi(n)}\, \operatorname{sgn} \pi \right) \Delta(b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Falls nun $\Delta(b_1, \ldots b_n) = 0$ wäre, so würde Δ identisch Null sein, was einen Widerspruch zu (2) ergäbe. Demnach ist $\Delta(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$ für jedes linear unabhängige Vektorsystem $b_1, \ldots, b_n$. □

Dieser Beweis liefert gleichzeitig eine weitere Eigenschaft von Δ:

5.1.4 Lemma. $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(b_1, \ldots, b_n) \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; v_{1\pi(1)} \ldots v_{n\pi(n)}$.

Auf dieser Grundlage können wir nun auch einen Existenznachweis für Determinantenformen führen:

5.1.5 Lemma. *Für jedes* $d \in K \setminus \{0\}$ *ist*

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) := d \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; v_{1\pi(1)} \ldots v_{n\pi(n)}$$

eine Determinantenform in V, *wobei* $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{ij} b_j$ *bzgl. einer beliebigen Basis* $b_1, \ldots, b_n$ *gesetzt wurde.*

Beweis. **(1)** Aus der Linearität der Koordinatendarstellung der Vektoren folgt sofort die Linearität von $\Delta(v_1, \ldots, v_n)$ in jedem der Argumente v_i.

(2) Da die Basisvektoren b_i die Koordinaten $\delta_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \;,\; i \neq j \\ 1 \;,\; i = j \end{smallmatrix} \right.$ besitzen, verschwinden in der Darstellung von $\Delta(b_1, \ldots, b_n)$ sämtliche Summanden mit Ausnahme des Falles $\pi = \mathrm{id}_{S_n}$, wo gilt $\operatorname{sgn} \pi = 1$ und $b_{1\pi(1)} \ldots b_{n\pi(n)} = b_{11} \ldots b_{nn} = 1$, d.h.
$\Delta(b_1, \ldots .b_n) = d$, und damit ist Δ nicht identisch Null.

(3) Seien nun $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig: Wir nehmen o.E. an, dass $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$. (Ansonsten vertauscht man die Indizes und erhält höchstens einen Vorzeichenwechsel bei Δ.) Die Multilinearität ergibt dann

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \; \Delta(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_i) \,.$$

Es genügt deshalb zu zeigen, dass

$$\Delta(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_i) = 0 \;,\; i = 1, \ldots, n-1 \,.$$

Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\Delta(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_i) &= d \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \; v_{1\pi(1)} \ldots v_{i\pi(i)} \ldots v_{n-1\,\pi(n-1)} v_{i\pi(n)} \\
&= d \sum_{\pi \in S_n^+} v_{1\pi(1)} \ldots v_{i\pi(i)} \ldots v_{n-1\,\pi(n-1)} v_{i\pi(n)} \\
&\quad + d \sum_{\sigma \in S_n^-} (-1) \, v_{1\sigma(1)} \ldots v_{i\sigma(i)} \ldots v_{n-1\sigma(n-1)} \, v_{i\sigma(n)} ,
\end{aligned}$$

wobei $S_n^+ := \{\pi \in S_n : \operatorname{sgn}\pi = 1\}$, $S_n^- := \{\sigma \in S_n : \operatorname{sgn}\sigma = -1\}$.
Mit $\sigma = (i\,n) \circ \pi$ gilt aber $\pi \in S_n^+ \Leftrightarrow \sigma \in S_n^-$. Bei der Transposition $(i\,n)$ wird das Produkt $v_{1\pi(1)} \dots v_{i\pi(i)} \dots v_{n-1\,\pi(n-1)}\, v_{i\pi(n)}$ nicht verändert. Deshalb ist die obige Summe gleich

$$d \sum_{\pi \in S_n^+} (1-1)\, v_{1\pi(1)} \dots v_{n-1\,\pi(n-1)}\, v_{i\pi(n)} = 0\,.$$

□

Als nächstes zeigen wir, dass Determinantenformen bis auf Vielfache eindeutig bestimmt sind. Wir benutzen im folgenden auch die Divisionsschreibweise für Körper:

$$\frac{\lambda}{\mu} := \lambda\mu^{-1}\ ,\ \lambda, \mu \in K\ ,\ \mu \neq 0\,.$$

5.1.6 Lemma. *Seien Δ , Δ' Determinantenformen in V. Dann ist*

$$c := \frac{\Delta'(b_1, \dots, b_n)}{\Delta(b_1, \dots, b_n)}$$

unabhängig von der Wahl der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$, und es gilt die Abbildungsgleichung

$$\Delta' = c\,\Delta\,.$$

Beweis. Nach Satz 5.1.4 ist

$$\begin{aligned}\Delta'(v_1, \dots, v_n) &= \Delta'(b_1, \dots, b_n) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi\; v_{1\pi(1)} \dots v_{n\pi(n)} \\ &= c\,\Delta(b_1, \dots, b_n) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi\; v_{1\pi(1)} \dots v_{n\pi(n)} \\ &= c\,\Delta(v_1, \dots, v_n)\end{aligned}$$

für alle $v_1, \dots, v_n \in V$, d.h. $\Delta' = c\,\Delta$. Insbesondere ergibt sich für jede weitere Basis $\{b_1', \dots, b_n'\}$

$$\Delta'(b_1', \dots, b_n') = c\,\Delta(b_1', \dots, b_n')\,.$$

□

Wir führen jetzt Determinantenformen ein, die von Isomorphismen erzeugt werden:

5.1.7 Lemma. *Seien $\mathbf{A} \in L(V, W)$ ein Vektorraumisomorphismus und Δ eine Determinantenform in W. Dann ist*

$$\Delta_{\mathbf{A}}(v_1, \dots, v_n) := \Delta(\mathbf{A}v_1, \dots, \mathbf{A}v_n)$$

eine Determinantenform in V. •

5.2 Determinanten von Endomorphismen

Eine Abbildung $\mathbf{A} \in L(V, V)$ nennt man auch **Vektorraumendomorphismus**. Das Verhältnis

$$\frac{\Delta_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)}{\Delta(b_1, \ldots, b_n)}$$

ist wegen 5.1.7 und 5.1.6 unabhängig von der Wahl der Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Es hängt jedoch auch nicht von der Wahl der Determinantenform Δ in V ab: Wir betrachten für eine weiterre Determinantenform Δ'

$$\frac{\Delta'_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)}{\Delta'(b_1, \ldots, b_n)} = \frac{\Delta'(\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n)}{\Delta'(b_1, \ldots, b_n)} = \frac{c\,\Delta(\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n)}{c\,\Delta(b_1, \ldots, b_n)} = \frac{\Delta_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)}{\Delta(b_1, \ldots, b_n)}$$

wobei wir 5.1.5 noch einmal benutzt haben.

Definition.

$$\det \mathbf{A} := \frac{\Delta_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)}{\Delta(b_1, \ldots, b_n)}$$

heißt **Determinante** von $\mathbf{A}$.
(Aufgrund der vorhergehenden Überlegungen ist die Definition korrekt.)

5.2.1 Satz. $\mathbf{A} \in L(V, V)$ *ist genau dann ein Vektorraumisomorphismus, wenn* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Beweis. Nach Satz 3.3.2 ist $\mathbf{A}$ genau dann Isomorphismus, wenn die Bilder $\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n$ einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ linear unabhängig sind. Dies gilt jedoch genau dann, wenn $\Delta(\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n) \neq 0$ für eine Determinantenform Δ, d.h. wenn

$$\det \mathbf{A} = \frac{\Delta(\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n)}{\Delta(b_1, \ldots, b_n)} \neq 0\,.$$

□

5.2.2 Satz.
(1) $\det(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

(2) $\det \mathbf{I} = 1$

(3) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$, *falls* $\mathbf{A}$ *Isomorphismus ist.*

Beweis. **(1)** Mit $\mathbf{B}$ ist auch $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ kein Isomorphismus.
In diesem Fall ergibt sich aus Satz 5.2.1

$$\det(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = 0 = \det \mathbf{A} \cdot 0 = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}\,.$$

Falls $\mathbf{B}$ Isomorphismus ist, so ist $\{\mathbf{B}b_1, \dots, \mathbf{B}b_n\}$ für jede Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ebenfalls eine Basis in V. Wir bekommen deshalb

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) &= \frac{\Delta\big((\mathbf{A} \circ \mathbf{B})b_1, \dots, (\mathbf{A} \circ \mathbf{B})b_n\big)}{\Delta(b_1, \dots, b_n)} \\ &= \frac{\Delta\big(\mathbf{A}(\mathbf{B}b_1), \dots, \mathbf{A}(\mathbf{B}b_n)\big)}{\Delta(\mathbf{B}b_1, \dots, \mathbf{B}b_n)} \quad \frac{\Delta(\mathbf{B}b_1), \dots, \mathbf{B}b_n)}{\Delta(b_1, \dots, b_n)} \\ &= \det \mathbf{A} \ \det \mathbf{B}\,.\end{aligned}$$

(2) $\det \mathbf{I} = \dfrac{\Delta(\mathbf{I}b_1, \dots, \mathbf{I}b_n)}{\Delta(b_1, \dots, b_n)} = 1.$

(3) Wir setzen in (1) $\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1}$ und erhalten mit (2) die Behauptung. $\square$

5.3 Determinanten von Matrizen

Jeder Abbildung $\mathbf{A} \in L(V, V)$ lässt sich ihre Matrix $A = (a_{ij})$ bzgl. ein und derselben Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ zuordnen. (Wir erinnern, dass diese Zuordnung einen Vektorraumisomorphismus von $L(V, V)$ auf $M(n \times n)$ darstellt.) Dabei sind $a_{ij},\ i = 1, \dots, n$, die Koordinaten des Vektors $\mathbf{A}b_j$ bzgl. der Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$. Wir setzen in 5.1.4 $v_j := \mathbf{A}b_j$, d.h. $v_{ij} = a_{ji}$, und leiten folgendes ab:

$$\det \mathbf{A} = \frac{\Delta(\mathbf{A}b_1, \dots, \mathbf{A}b_n)}{\Delta(b_1, \dots, b_n)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n}.$$

In dieser Darstellung ist noch eine Vertauschung in den Indexpaaren möglich, denn für $\sigma := \pi^{-1}$ gilt

$$a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} = a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}\ , \ \ \operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \sigma\,,$$

und mit π durchläuft π^{-1} alle Elemente von S_n.
Die obenstehende Summe ist deshalb gleich

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Definition. Für eine $n \times n$–Matrix $A = (a_{ij})$ heißt

$$\det A := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

Determinante von A. Man schreibt auch

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{array}$$

d.h. man bildet die Produkte der Elemente auf den „Hauptdiagonalen“ und zieht davon diejenigen auf den „Nebendiagonalen“ ab (**Regel von Sarrus**).

In dieser Sprache haben wir nun folgendes allgemeine Resultat bewiesen:

5.3.1 Satz. *Für eine Abbildung* $\mathbf{A} \in L(V, V)$ *gilt*

$$\det \mathbf{A} = \det A$$

für jede ihrer Darstellungsmatrizen A*.*

Damit übertragen sich die Eigenschaften von Determinanten von Endomorphismen auf Determinanten von Matrizen. Satz 5.2.2 ergibt:

5.3.2 Satz.
(1) $\det(AB) = \det A \ \det B$

(2) $\det I = 1$

(3) *Falls* $\det A \neq 0$*, so existiert* A^{-1} *und* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

(Für die Existenz von A^{-1} in (3) benutzen wir Satz 5.2.1.)
Für die transponierte Matrix gilt:

5.3.3 Satz. $\det(A^T) = \det A$.

Beweis. Für $A^T = (a_{ij}^T)$ gilt $a_{ij}^T = a_{ji}$. Wir haben aber bereits oben gezeigt, dass

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} \, .$$

□

Weitere Eigenschaften von Determinanten

Sei Δ die Determinantenform in K^n mit $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$ für die kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$.
Wir fassen A auch als Abbildung $\mathbf{A} \in L(K^n, K^n)$ auf und erinnern, dass $\mathbf{A}e_j = \bar{a}_j$ der j–te Spaltenvektor der Matrix A ist. Dies führt zu

$$\det A = \Delta(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \, .$$

Alle Eigenschaften der Determinantenformen Δ übertragen sich deshalb auf die Determinanten bzgl. ihrer Spaltenvektoren und wegen 5.3.3 auch bzgl. ihrer Zeilenvektoren. Determinanten von Matrizen sind insbesondere invariant gegenüber der Addition des Vielfachen einer Spalte oder Zeile zu einer anderen und ändern beim Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen das Vorzeichen.

Berechnung von Determinanten

Definition. Die Determinante M_{ij}, die aus $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ durch Streichen der i–ten Zeile und der j–ten Spalte entsteht heißt **Minor** des Elementes a_{ij}.

Definition. $A_{ij} := (-1)^{i+j}\, M_{ij}$ wird **Adjunkte** des Elementes a_{ij} genannt.

Man kann Determinanten nach den Elementen einer Zeile entwickeln. Aus der Definition von $\det A$ und M_{ij} ergibt sich sehr leicht:

5.3.4 Satz. $$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}\ , \quad i = 1, \dots, n\,.$$ •

Für sogenannte **Blockmatrizen** der Struktur

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad B \in M(m \times m) \quad \text{und} \quad C \in M(p \times p)$$

gilt folgende Rechenregel:

5.3.5 Satz. $\det A = \det B\, \det C$.

Beweis. Wir benutzen die vollständige Induktion nach m und entwickeln $\det A$ gemäß 5.3.4 nach der ersten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} b_{1j}\, A_{1j} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\, M_{1j}\,.$$

Für $m = 1$ liefert dies schon die Behauptung. Allgemein hat M_{ij} die Gestalt $\begin{vmatrix} B_j & 0 \\ D_j & C \end{vmatrix}$, wobei $B_j \in M\big((n-1) \times (n-1)\big)$. Im Sinne einer Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass $M_{ij} = \det B_j\, \det C$. Dann ist die letzte Summe gleich

$$\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\, \det B_j \right) \det C\,.$$

Der erste der beiden Faktoren ist aber die Entwicklung von $\det B$ nach der ersten Zeile. □

5.3.6 Folgerung.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \dots & \dots & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn} \,.$$

□

Damit ergibt sich aber folgende Berechnungsmöglichkeit für beliebige Determinanten: Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus bringt man die Determinante auf obige Dreiecksgestalt. Man muss dabei nur die entsprechende Änderung des Vorzeichen beachten.
Danach bildet man das Produkt der Elemente auf der (sogenannten) Hauptdiagonalen.
Abschließend wollen wir noch eine Anwendung auf die **Berechnung der inversen Matrix** angeben:

5.3.7 Satz. *Sei* $\det A \neq 0$. *Dann gilt*

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} .$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass

$$A \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \det A \cdot I \,,$$

was, elementeweise aufgeschrieben, bedeutet

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{kj} = \det A \;\; \delta_{ik} \,, \quad i, k = 1, \dots, n \,.$$

Für $k = i$ sind die Formeln richtig, denn sie stellen dann die Entwicklung von $\det A$ nach der i–ten Zeile dar. Für $k \neq i$ benutzen wir

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & \dots & a_{k-1\,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{kj} \,,$$

d.h. die Entwicklung dieser wegen zwei gleichen Zeilen verschwindenden Determinante nach der k–ten Zeile. □

Insbesondere kann man dadurch eine **explizite Darstellung der Lösung eines linearen Gleichungssystems** der Gestalt $A\bar{x} = \bar{b}$ mit $\det A \neq 0$ angeben, die sogenannte **Cramersche Regel**:

5.3.8 Satz.

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}\,, \quad \text{d.h.} \quad x_i = (\det A)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, b_j\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$