4. Jordan'sche Normalform

Sei V ein Vektorraum, $f: V \to V$ eine lineare Abbildung, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Def. 4.1. Der Unterraum
$$Hau(f,\lambda) = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } (f-\lambda id_V)^n(v) = \bar{o}\}$$
heißt **Hauptraum** von f zu λ.

Bem. $Hau(f,\lambda)$ ist wirklich ein Unterraum. Wenn $(f-\lambda id_V)^n(v)=\bar{o}$ und $(f-\lambda id_V)^m(w)=\bar{o}$, dann $(f-\lambda id_V)^u(v+w)=\bar{o}$ für $u=\max(n,m)$.

Lemma 4.2. $Hau(f,\lambda) \neq \{\bar{o}\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f.

Bew. ($\Leftarrow$) $\exists v \neq \bar{o}$, $v \in V$, s.d. $f(v)=\lambda v$. Also $(f-\lambda id_V)(v)=\bar{o}$ und $v \in Hau(f,\lambda)$.

($\Rightarrow$) Gegeben: $Hau(f,\lambda) \neq \{\bar{o}\}$. Sei $v \in Hau(f,\lambda)$, $v \neq \bar{o}$ und sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $(f-\lambda id_V)^n(v)=\bar{o}$. Falls $n=1$, ist v ein Eigenvektor von f zu λ. Falls $n \geq 2$, haben wir $u=(f-\lambda id_V)^{n-1}(v) \neq \bar{o}$ und $(f-\lambda id_V)(u)=\bar{o}$, u ist ein Eigenvektor zu λ. ▨

Beispiel. Sei $V=\mathbb{K}^n$. Dann gilt: $Hau(f,0)=V \Leftrightarrow f^n=0$, f ist eine nilpotente Abbildung.

($\Leftarrow$) klar.

($\Rightarrow$) Eigenvektor zu 0 + Induktion über n.

In einer Basis ist die Matrix von f

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline \vdots & & & \\ & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$ wo $\tilde{A}$ eine nilpotente Matrix ist, weil

$\tilde{A}^{M} e'_i = \bar{0}$, falls $2 \le i \le n$, $M \geq n_i$ und

$A^{n_i} e_i = \bar{0}$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ ist die Basis), ($e'_i \in \mathbb{K}^{n-1}$).

Induktionsannahme: $\tilde{A}^{n-1} = 0$.

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \dots u\tilde{A}^{n-2} \dots \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A}^{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \cdot A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \dots u\tilde{A}^{n-2} \dots \\ \hline \vdots & \bigcirc \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0 & u \\ \hline \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & u \cdot \tilde{A}^{n-1} \\ \hline \vdots & \bigcirc \\ 0 & \end{array}\right) = 0. \quad (u = (* \dots *))$$

Aus LAI: $A \in M_n(\mathbb{K})$ ist nilpotent ($\exists M$, s.d. $A^M = 0$) $\Leftrightarrow$ A ist triagonalisierbar und alle Eigenwerte sind Null

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n = 0.$$

ähnlich

Lemma 4.3. Sei $h: V \to V$ ein lineare Abbildung, die mit f kommutiert, $h \circ f = f \circ h$. Dann $h(v) \in Hau(f, \lambda)$ $\forall v \in Hau(f, \lambda)$, $\forall \lambda$.

Bew. $(f - \lambda\, id_V)^n (h(v)) = h \circ (f - \lambda\, id_V)^n (v) =$

$= h(\bar{0}) = \bar{0}$, falls $(f - \lambda\, id_V)^n (v) = \bar{0}$. ▨

Kor. Jeder Hauptraum $Hau(f,\lambda)$ ist f-stabil. (II)

Satz 4.4. Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{r} Hau(f,\lambda_i) = Hau(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus Hau(f,\lambda_r)$.

Bew. Induktion über r.

Falls $r=1$, gibt es nichts zu zeigen.

Sei $r \geq 2$. Hier ist die Summe $\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)$ direkt. Sei es $\left(\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)\right) \cap Hau(f,\lambda_r) \neq \{\bar{0}\}$. Dann finden wir einen Vektor $u \neq \bar{0}$ im Schnitt, $u = v_1 + \ldots + v_{r-1}$ und $v_i \in Hau(f,\lambda_i)$. $\exists n$ mit $(f-\lambda_r id_V)^n(u) = \bar{0}$. Setzen $h = (f-\lambda_r id_V)^n$. $h: V \to V$ ist eine lineare Abbildung und $h \circ f = f \circ h$. Wir haben $\bar{0} = h(u) = h(v_1) + \ldots + h(v_{r-1})$. Weil die Summe $\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)$ direkt ist, mussen alle Summanden gleich Null sein, $h(v_i) = \bar{0}$ $\forall i \leq r-1$. (Nach dem Lemma 4.3. $h(v_i) \in Hau(f,\lambda_i)$.)

Sei $n_i \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $(f-\lambda_i id_V)^{n_i}(v_i) = \bar{0}$.

Wie schon bemerkt, $(f-\lambda_i id_V)^{n_i-1}(v_i) =: w_i \neq \bar{0}$ ist ein Eigenvektor von f zu λ_i. (Falls $n_i = 1$, setzt man $(f-\lambda_i id_V)^0 = id_V$.)

Es ist angenommen, dass $v_i \neq \bar{0}$.

Die Abbildungen h und $f-\lambda_i id_V$ kommutieren, damit auch $h\circ(f-\lambda_i id_V)^{n_i-1}(v) =$ $= \bar{0}$ und $h(w)=\bar{0}$. Aber

$h(w) = (f-\lambda_r id_V)^n(w) = (f-\lambda_r id_V)(\lambda_i-\lambda_r)w =$ $=(\lambda_i-\lambda_r)^n w \neq \bar{0}$. Der Widerspruch zeigt, dass alle v_i gleich Null sind und

$(Hau(f,\lambda_1)\oplus .. \oplus Hau(f,\lambda_{r-1}))\cap Hau(f,\lambda_r) =$
$= \{\bar{0}\}$. ▨

<u>Satz 4.5.</u> (Fitting-Zerlegung). Sei $V\cong \mathbb{K}^n$. Dann besitzt $Hau(f,0)$ stets genau ein unter f stabiles Komplement.

$$V = Hau(f,0)\oplus \mathcal{U}, \text{ wo } f(u)\in\mathcal{U}\ \forall u\in\mathcal{U}.$$

<u>Bew.</u> $Hau(f,0) = Ker\, f^n = Ker\, f^\nu\ \forall \nu\geq n$.

Betrachten wir noch die Kette von Unterräumen $Im f \supseteq Im f^2 \supseteq .. \supseteq Im f^k \supseteq ....$

Eine Seite ist die unendlich, die andere liegen alle Unterräume in V und $\dim V<\infty$.

Wenn $Im f^k \supset Im f^{k+1}$, dann $\dim(Im f^k) >$ $> \dim(Im f^{k+1})$. Weil $\dim(Im f)\leq n$, gibt es eine Stelle m, ab der diese Folge konstant wird, $Im f^\nu = Im f^m\ \forall \nu\geq m$.

Sei $N \geq m$, $N \geq n$. Dann $\operatorname{Im} f^{2N} = f^N(\operatorname{Im} f^N) = \operatorname{Im} f^N$ und aus Dimensionsgründen $\operatorname{Im} f^N \cap \operatorname{Ker} f^N = \{\bar{0}\}$. Nach der Dimensionsformel: $n = \dim(\operatorname{Im} f^N) + \dim(\operatorname{Ker} f^N)$ folgt es, dass

$$V = \operatorname{Im} f^N \oplus \operatorname{Ker} f^N = \operatorname{Im} f^N \oplus \operatorname{Hau}(f,0).$$

$\operatorname{Im} f^N$ ist f-stabil, weil $f(\operatorname{Im} f^N) = \operatorname{Im} f^{N+1} = \operatorname{Im} f^N$.

Zu Eindeutigkeit: Gegeben ist $V = \operatorname{Hau}(f,0) \oplus \mathcal{U}$ und $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$. Weil $\mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, gilt es $\dim f(\mathcal{U}) = \dim \mathcal{U}$, also $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Damit $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Im} f^k \ \forall k$. Nun $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Im} f^N$ und $\dim \mathcal{U} = \dim(\operatorname{Im} f^N) = n - \dim \operatorname{Hau}(f,0)$. $\mathcal{U} = \operatorname{Im} f^N$. ▨

Lemma 4.6. Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann stimmt $\dim \operatorname{Hau}(f,\lambda)$ mit der Vielfachheit der Nullstelle λ von $\chi_f(\lambda)$ (diese Vielfachheit nennt man algebraische Vielfachheit des Eigenwerts).

Bem. $\dim V_\lambda(f)$ ist die geometrische Vielfachheit von λ, $V_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$.

Bew. Die Fitting-Zerlegung zu $h = f - \lambda \operatorname{id}_V$

liefert: $V = \underset{(\mathrm{Hau}(h,0))}{\mathrm{Hau}(f,\lambda)} \oplus U$, wo $h^m(U) = U$ für alle $m \geq 1$.

Auf $\mathrm{Hau}(f,\lambda)$ ist h nilpotent, so ist sie triagonalisierbar (LA I) mit alle Eigenwerte gleich Null.

$$f = h + \lambda id_V \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & f|_U \end{array}\right).$$

Damit

$$\chi_f(x) = \det(x \cdot id_V - f) = (x-\lambda)^{\dim \mathrm{Hau}(f,\lambda)} \times$$

$$\times\, \chi_{f|_U}(x)$$ und $\chi_{f|_U}(\lambda) \neq 0$, weil $\mathrm{Ker}\, h \cap U = \{\bar{0}\}$. ∎

Satz 4.7. (Hauptraumzerlegung). Zerfällt $\chi_f(x)$ in Lineafaktoren, $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{\alpha_i}$, so gilt $V = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_r)$. Hier ist es $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$.

Bew. Nach dem Satz 4.4 haben wir

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_r)$$

und das ist ein Unterraum von V von Dimension $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ (Lemma 4.6).

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \deg \chi_f(x) = \dim V \Longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = V.$$

∎

17.05. Satz 4.7. Ist es Ⅳ

$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, wo $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$,

so gilt $V = Hau(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus Hau(f,\lambda_r)$.

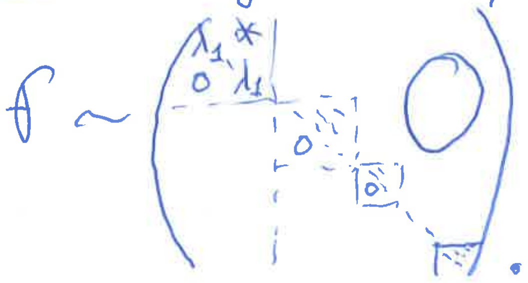
Das charakteristische Polynom $\chi_f(X)$ zerfällt in Linearfaktoren. Es ist nicht wahr, dass alle Nullstellen von $\chi_f(X)$ paarweise verschieden sind, $\alpha_i > 1$ ist erlaubt. D.h. f ist triagonalisierbar, nicht immer diagonalisierbar.

$$f \sim \begin{pmatrix} \gamma_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_r \end{matrix} & \textcircled{*} & \textcircled{*} \\ \hline 0 & \ddots & \textcircled{*} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} \lambda_r & * \\ 0 & \lambda_r \end{matrix} \end{array}\right) \alpha_r \end{array}, \text{ denn}$$

$$\chi_f(X) = \prod (X-\gamma_j) \Rightarrow (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots \lambda_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{\alpha_r})$$

bis auf Reihenfolge.

Der Satz sagt doch, dass



f hat eine Blocc-diagonale Gestalt.

Satz 4.8. (Jordan-Zerlegung). Sei $f: V \to V$ linear mit $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\gamma_i)$, $n = \dim V$.
Dann existiert genau eine Zerlegung $f = f_s + f_{nl}$, wo f_s diagonalisierbar ist,

f_{nl} nilpotent ist, und $f_s \circ f_{nl} = f_{nl} \circ f_s$.

Man sagt, dass f_s halbeinfach (auf Englisch „semisimple", deswegen „s").

Bew. $\chi_f(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $\overset{S.4.7.}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow V = \underset{\overset{\parallel}{\mathcal{U}_1}}{\text{Hau}(f,\lambda_1)} \oplus \dots \oplus \underset{\overset{\parallel}{\mathcal{U}_r}}{\text{Hau}(f,\lambda_r)}, \ \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ für } i \neq j.$$

Setzen $f_s := \lambda_1 \, id_{\mathcal{U}_1} \oplus \dots \oplus \lambda_r \, id_{\mathcal{U}_r}$, gemeint ist, dass $f_s(u_i) = \lambda_i u_i \ \forall u_i \in \mathcal{U}_i$. Weiter, $f_{nl} = f - f_s$ ist nilpotent, weil $f_{nl}^n(u_i) = (f - \lambda_i id_V)^n(u_i) = \bar{0} \ \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \forall i$.

Noch merken, $f \circ f_s(u_i) = f(\lambda_i u_i) = \lambda_i f(u_i) = f_s \circ f(u_i) \Rightarrow f \circ f_s = f_s \circ f \Rightarrow f_s \circ f_{nl} = f_{nl} \circ f_s$.

Zu Eindeutigkeit:

Sei es $f = f_s + f_{nl} = h + l$, wo h diagonalisierbar, l nilpotent ist, und $h \circ l = l \circ h$. Dann $h \circ (h+l) = (h+l) \circ h$, also $h \circ f = f \circ h$ und die Haupträume von f sind h-stabil (L.4.3.). Ebenfalls $l \circ f = f \circ l$ und jeder $\mathcal{U}_i$ ist auch l-stabil. Auf $\mathcal{U}_i$: $f_s\big|_{\mathcal{U}_i} = \lambda_i \cdot id_{\mathcal{U}_i}$, diese Abbildung vertauscht mit jeder anderen

linearen Abbildung $\varphi: U_i \to U_i$. Insb.
$f_s \circ \ell = \ell \circ f_s$ auf jedem Unterraum U_i.

Damit $f_s \circ \ell = \ell \circ f_s$ und $\ell \circ f_{n\ell} = f_{n\ell} \circ \ell$.

Wenn zwei nilpotente Abbildungen ψ_1, ψ_2 kommutieren $\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_2 \psi_1$, dann ist jede lineare Kombination $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ nilpotent.

$$(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha^k \beta^{N-k} \psi_1^k \circ \psi_2^{N-k}$$

So ist $f_{n\ell} - \ell = h - f_s$ eine nilpotente Abbildung.

Hier $h \circ f_s = f_s \circ h \xRightarrow[L.4.9]{} h - f_s$ diagonalisierbar.

Eine nilpotente Abbildung ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie gleich Null ist.
Also $h = f_s$ und $f_{n\ell} = \ell$. ▨

Lemma 4.9. Seien $f, h: V \to V$ linear und diagonalisierbar. Wenn $f \circ h = h \circ f$, dann ist $f + h$ (auch $f - h$) diagonalisierbar.

Bew. f diagonalisierbar $\Rightarrow V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}(f)$,
wo wie oben $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{d_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$.

Hier $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = V_{\lambda_i}(f)$ (Eigenraum zu λ_i).

Ebenfalls für h: $\mathrm{Hau}(h, \mu) = V_\mu(f)$ $\forall \mu$.

Wir wissen, dass jeder $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = V_{\lambda_i}(f)$

h-stabil ist (Lemma 4.3.).

Sei $\tilde{h}_i = h\big|_{Hau(f,\lambda_i)}$, $U_i := Hau(f,\lambda_i)$.

Dann $U_i = Hau(\tilde{h}_i, \mu_1) \oplus \dots \oplus Hau(\tilde{h}_i, \mu_{r(i)})$.

Klar, $Hau(\tilde{h}_i, \mu_j) \subseteq Hau(h, \mu_j) = V_{\mu_j}(h)$.

U_i hat eine Basis, wo jedes Element ein Eigenvektor von h ist. Damit $\exists$ eine Basis, wo f und h gleichzeitig diagonal sind, da ist jede Linearkombination

$\alpha f + \beta h$ diagonal. ▨

Sind $h, f: V \to V$ diagonalisierbar und gilt $h \circ f = f \circ h$, so existiert eine Basis, wo f und h diagonal sind. Alle Abbildungen $\alpha f + \beta h$, sowie $f \circ h$, $f^k \circ h^l$ sind diagonalisierbar.

Beispiel (zu Jordan-Zerlegung).

Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & & \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so

ist $A_s = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$, $A_{nl} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bem. f ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \chi_f(X) = \prod(X - \gamma_i)$ und $f = f_s$;

f ist nilpotent $\Longleftrightarrow$ $f = f_{nl}$.

Def. 4.10. Gegeben $r \geq 1$ definieren wir eine $r \times r$-Matrix $J(r)$, genannt der nilpotente Jordan-Block der Größe r, durch die Vorschrift $J(r)_{i,j} = 1$ für $j = i+1$ und $J(r)_{i,j} = 0$ sonst. Insb. $J(1) = 0$.

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & \bigcirc & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad J(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merken, $\operatorname{rk} J(r) = r-1$, $J(r)^{r-1} = 0$.

Als Abbildung: $\mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ wirkt $J(r)$ wie Folgend:

$$e_r \mapsto e_{r-1} \mapsto e_{r-2} \mapsto e_{r-3} \mapsto \dots \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto \bar{0}.$$

⇝ Wir möchten die nilpotenten Abbildungen $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (oder die nilpotenten Matrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$ bis auf Konjugation) klassifizieren.

Satz 4.11. (Normalform nilpotenter Abbildungen.) Gegeben eine nilpotente Abbildung $f: V \to V$, $V \cong \mathbb{K}^n$, gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, s.d.

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(J(r_1), \dots, J(r_t)).$$

Die positiven ganzen Zahlen $r_1, \dots, r_t$ sind hierbei durch f eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge. (Hier ist $n < \infty$.)

Beispiel. $\operatorname{diag}(J(2), J(3)) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\end{array}\right)$.

Kor. Seien $A, \tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotent. Dann $\exists\, r_1 \le r_2 \le .. \le r_t$, $r_1 \ge 1$, s.d.

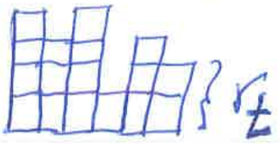
$A \underset{\text{ähnlich (oder konjugiert)}}{\sim} \operatorname{diag}(J(r_1), .., J(r_t))$ und

$A \sim \tilde{A} \iff \tilde{A} \sim \operatorname{diag}(J(r_1), .., J(r_t))$.

Beweis des Satzes.

Die Eindeutigkeit ist unproblematisch. Ist f eine Abbildung mit der Matrix $\operatorname{diag}(J(r_1), .., J(r_t))$, so gilt

$$\dim(\operatorname{Im} f^{d-1}) - \dim(\operatorname{Im} f^{d}) = |\{i \mid r_i \ge d\}|.$$



$f^2(e_{r_1})$

$f(e_{r_1}) \in \operatorname{Im} f$, $f(e_{r_1}) \notin \operatorname{Im} f^2$.

$e_{r_1} \notin \operatorname{Im} f$, $f(e_{r_1}) = e_{r_1 - 1}$ und so weiter.

$(f^0 = id_V)$

Die Kenntnis aller Zahlen $|\{i \mid r_i \ge d\}|$ liegt das t-Tupel $(r_1, .., r_t)$ bis auf Reihenfolge fest, $t = \dim V - \dim(\operatorname{Im} f)$.

Die Existenz folgt aus dem folgenden Lemma. ▨

Lemma 4.12. Sei $f : V \to V$ eine nilpotente Abbildung, $V \cong \mathbb{K}^n$, $n < \infty$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, s.d. $\mathcal{B} \sqcup \{\bar{0}\}$ unter f stabil ist und, s.d. jedes Element von $\mathcal{B}$ unter f höchstens ein Urbild in $\mathcal{B}$ hat. Wir nennen solche Basis eine Jordan-Basis.

Lemma $\Rightarrow$ Satz: Nicht jedes Element von $\mathcal{B}$ hat ein Urbild in $\mathcal{B}$.

falls immer geht, kommen wir zu einem Zyklus:

Also $f^s(v) = v$, für f die Länge s des Zykles und f wäre nicht nilpotent.

Wir sehen auch, dass jedes Element von $\mathcal{B}$, das in $f(\mathcal{B})$ liegt, die Gestalt $f^k(w)$ mit $w \in \mathcal{B}$, $w \notin f(\mathcal{B})$ hat.

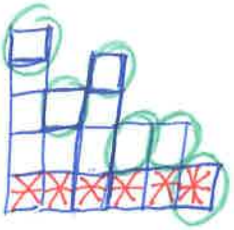
Unter f zerfällt $\mathcal{B}$ in Ketten:

$$\begin{tikzcd}
f(\mathcal{B}) \not\ni v_1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dashed, no head] & f(v_1) \arrow[r, mapsto] & f^2(v_1) \arrow[r, mapsto] & f^3(v_1) \arrow[r, dashed, no head] & \cdot \arrow[r, mapsto] & \bar{0} \\
f(\mathcal{B}) \not\ni v_t \arrow[r, mapsto] & f(v_t) \arrow[r, mapsto] & f^2(v_t) \arrow[r, mapsto] & f^3(v_t) \arrow[r, dashed, no head] & \cdot \arrow[r, mapsto] & \bar{0}
\end{tikzcd}$$

Bew. des Lemmas. Induktion über $n = \dim V$.

f ist nilpotent, so $\dim(\operatorname{Ker} f) \geq 1$ und $\dim(\operatorname{Im} f) < n$. Das Bild von f hat eine Jordan-Basis $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$:



Die Menge $\mathcal{T}$ enthält eine Basis $\mathcal{T}_0 = \{t_1, \dots, t_{r'}\}$ von $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\mathcal{T}_0 = \{t \in \mathcal{T} \mid f(t) = \bar{0}\}$.

Sei weiter $\mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{T}_0$ eine Basis von $\operatorname{Ker} f$. ($\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \oplus W_0$, wo keinen Vektor $v \in W_0$, $v \neq \bar{0}$ im Bild von f liegt.)

$\mathcal{T}$ ist eine Jordan-Basis $\overset{\text{Def. (Lemma)}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T} \sqcup \{\bar{0}\}$. Wie betrachten die Elemente von $\mathcal{T}$, die nicht in $f(\mathcal{T})$ liegen. Seien die $s_1, \dots, s_{r'}$. Jedes hat ein Urbild, weil $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Im} f$. Seien $b_1, \dots, b_{r'}$ Urbilde von $s_1, \dots, s_{r'}$, $b_i \in V$ und $f(b_i) = s_i$. Setzen $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_{r'}\} \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{T}$.

Wir überprüfen, dass $\mathcal{B}$ eine Jordan-Basis von V ist.

Wir haben

$$\mathcal{B} = \underbrace{(\mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{S}_0)}_{\text{eine Basis von } \operatorname{Ker} f} \sqcup (\{b_1, \dots, b_{r'}\} \sqcup \{t \in \mathcal{S} \mid f(t) \neq \bar{0}\}).$$

Merken, $f(\mathcal{B}) = \{\bar{0}\} \cup (\{s_1, \dots, s_{r'}\} \sqcup f(\mathcal{S}))$.

Und $f(\mathcal{S}) = \{f(t) \mid t \in \mathcal{S}, f(t) \neq \bar{0}\} \sqcup \{\bar{0}\}$.

$\{f(b_1), \dots, f(b_{r'})\} \sqcup \{f(t) \mid t \in \mathcal{S}, f(t) \neq \bar{0}\} = \mathcal{S}$

ist eine Basis in $\operatorname{Im} f \Longrightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist linear unabhängig und $|\mathcal{B}| = \dim V$.

$\mathcal{B}$ ist eine Basis von V.

Wir haben gesehen, dass $f(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B} \sqcup \{0\}$.

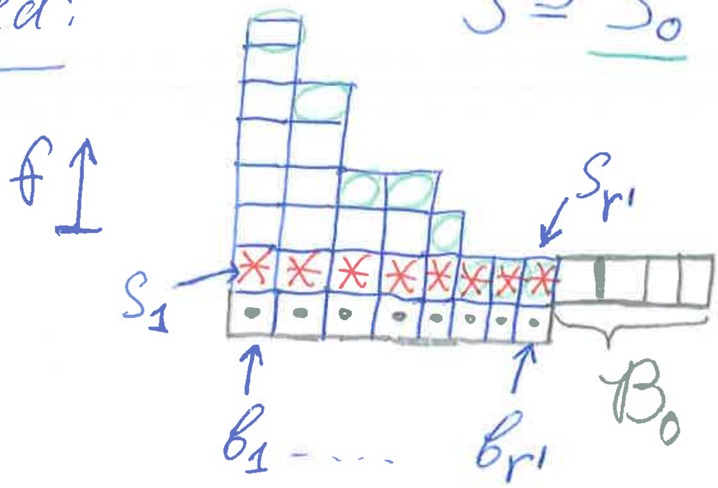
Zu Urbilde: Sei $b \in \mathcal{B}$. Es gibt drei Möglichkeiten.

(I) $b \notin \mathcal{S}$, $b = b_i$. Hier $b \notin \operatorname{Im} f$, weil $\mathcal{S} \sqcup \{b\}$ linear unabhängig ist. Das Element b hat kein Urbild unter f.

(II) $b \in \mathcal{S}$, aber $b \notin f(\mathcal{S})$. Hier $b = s_i$ und b hat genau ein Urbild in $\mathcal{B}$, b_i.

(III) $b \in \mathcal{S}$, $b \in f(\mathcal{S})$. In $\mathcal{S}$ hat b genau ein Urbild ($\mathcal{S}$ ist eine Jordan-Basis) und $f(b_i) = s_i \neq b \;\forall i, 1 \leq i \leq r'$. ▨

Das Bild: $\mathcal{J} \supseteq \mathcal{S}_0$



Bem. $O_{n\times n} = \mathrm{diag}(\mathcal{J}(1), \dots, \mathcal{J}(1))$.

Beispiele (Nilpotente Konjugationsklassen für kleine n.)

$A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A^n = 0$,

$\mathcal{C}(A) = \{CAC^{-1} \mid C \in GL_n(\mathbb{K})\}$, $A \neq 0$.

$n=2$. $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}(2)$

$n=3$. $A_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\mathcal{J}(2), \mathcal{J}(1))$.

$\mathrm{rk}\, A_1 = 2$; $\mathrm{rk}\, A_2 = 1$

$n=4$. $A_1 \sim \mathcal{J}(4)$, $A_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & \bigcirc & & 0 \end{array}\right)$, $A_3 \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right)$,

$A_4 \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & 0 \\ \bigcirc & \end{array}\right)$. Hier $\mathrm{rk}\, A_2 = 2 = \mathrm{rk}\, A_3$. $A_3^2 = 0$,

$A_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \bigcirc & & \end{pmatrix} \neq 0$. So sieht man, dass $A_2 \not\sim A_3$.

$n=5$. Partitionen $5=5$, $\operatorname{rk} A_1=4$; $5=4+1$, $\operatorname{rk} A_2=3$; $5=3+2$, $\operatorname{rk} A_3=3$; $5=3+1+1$, $\operatorname{rk} A_4=2$; $5=2+2+1$, $\operatorname{rk} A_5=2$; $5=2+1+1+1$, $\operatorname{rk} A_6=1$; $5=1+1+1+1+1$, $A_7=0$, solche Klassen möchten wir nicht betrachten.

Und noch ein Beispiel, $n=7$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rk} A=5.$$

Also $A \sim \operatorname{diag}(J(r_1), J(r_2))$ und $r_1+r_2=7$.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4=E_{1,6}\neq 0. \quad A^5=0.$$

Es folgt, $A \sim (J(5), J(2))$.

Der Jordan-Block der Größe r zu einem Eigenwert λ ist die Matrix

$$J(r;\lambda) = J(r) + \lambda E_r =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & \lambda \end{pmatrix}. \qquad J(r;0) = J(r).$$

<u>Beispiele</u> $J(2;-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$J(3,7) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $J(4;-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Sei $\dim V = n < \infty$, $f : V \to V$ linear.

<u>Satz 4.13.</u> (Jordan'sche Normalform.)
Wenn $\chi_f(x)$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-\lambda_i)^{\alpha_i}$, dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, s.d.

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(J(r_1,\mu_1), \ldots, J(r_s,\mu_s)).$$

<u>Bew.</u> Nehmen an, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.
Dann $V = \operatorname{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hau}(f,\lambda_m)$ (S. 4.7).
Jeder Unterraum $\operatorname{Hau}(f,\lambda_i)$ ist f-stabil.
Auf $U_i := \operatorname{Hau}(f,\lambda_i)$: $\tilde{f}_i = f\big|_{U_i} = \lambda_i \, id_{U_i} + h_i$,

wo $h_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_i$ eine nilpotente Abbildung ist.

Nach dem Satz 4.11. existiert eine Basis $\mathcal{B}_i$ von $\mathcal{U}_i$, s.d.

$$_{\mathcal{B}_i}[h_i]_{\mathcal{B}_i} = \mathrm{diag}(J(r_1^{(i)}, \ldots, J(r_{t(i)}^{(i)}))).$$

Damit $_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(J(r_1, \mu_1), \ldots, J(r_s, \mu_s))$

für $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{B}_m$,

$\mu_1 = \ldots = \mu_{t(1)} = \lambda_1$, $r_1 = r_1^{(1)}$ und so weiter. ▨

Über $\mathbb{C}$ hat jede $n\times n$-Matrix eine Jordan'sche Normalform.

Bem. Die Jordan-Blöcke sind durch f eindeutig bestimmt (bis auf Reihenfolge).

Beispiel. Sei $T = \mathrm{diag}(J(2;5), J(3;5), J(1;7)) =$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & & & & \\ 0 & 5 & & & & \\ & & 5 & 1 & 0 & \\ & & 0 & 5 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 5 & \\ & & & & & 7 \end{pmatrix}.$$

Sei $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{C})$, dann $A \sim T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi_A(X) = (X-5)^5(X-7)$, $\mathrm{rk}(A-5E_6) = 4$, $\mathrm{rk}(A-5E_6)^2 = 2$.

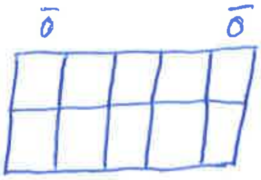
Zu Jordan-Basen:

Sei $f: V \to V$ nilpotent, $f \neq 0$.

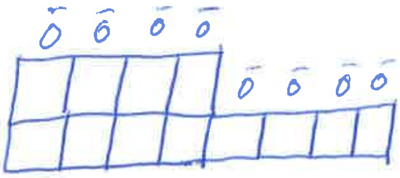
$V \subset \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2 \subset \dots \subset \operatorname{Im} f^d \subset \operatorname{Im} f^{d+1} = \{0\}$.

Also $f^d \neq 0$, $f^{d+1} = 0$.

In $\operatorname{Im} f^d$ wählen wir eine beliebige Basis:



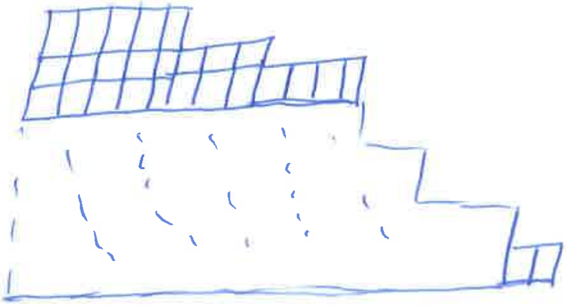
Finden Urbilde in $\operatorname{Im} f^{d-1}$, und wählen noch eine Basis in einem Komplement von $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^d$ in $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^{d-1}$. $(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^d = \operatorname{Im} f^d)$



Jetzt ist das eine Jordan-Basis von

$\operatorname{Im} f^{d-1}$ für $f|_{\operatorname{Im} f^{d-1}}$.

Kann man weiter führen.



Am Ende wird man eine Jordan-Basis von V für f haben.

Es gibt noch andere Algorithmen.

Einige Einwendungen der Jordan'schen Normalform.

Die Exponentialabbildung für Matrizen.

$$A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \exp(A) = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + .. + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Diese Reihe liefert eine nxn Matrix. Die Exponentialreihe konvergiert für alle komplexen Matrizen absolut (ohne Beweis).

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $\exp(A) = \left(\begin{array}{c|c} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{array}\right)$, $e = \exp(1)$.

Und noch ein Beispiel:

$$\exp\begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\gamma_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\gamma_n) \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften:

(·) $\exp(CAC^{-1}) = C\exp(A)C^{-1}$;

(··) $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, falls $AB = BA$.

Kor. $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ und $\exp(A)$ ist immer invertierbar. Merken, $\exp(0) = E_n$.

Sei $A = A_s + A_{nl}$ die Jordan-Zerlegung von A, A_s ist diagonalisierba, A_{nl} nilpotent und $A_s A_{nl} = A_{nl} A_s$. Dann

$\exp(A) = \exp(A_s)\exp(A_{nl})$.

$\exists C$ mit $\quad CA_sC^{-1} = \begin{pmatrix}\gamma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n\end{pmatrix}$ und

$$\exp(A_s) = C^{-1}\begin{pmatrix}\exp(\gamma_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\gamma_n)\end{pmatrix} C .$$

Für A_{ns} finden wir eine Jordan'sche Normalform

$$A_{ns} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{durch } \tilde{C}}}{\sim} \begin{pmatrix} J(r_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(r_m)\end{pmatrix}$$ und

$$A_{ns} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{mit derselben Matrix } \tilde{C}}}{\sim} \begin{pmatrix}\exp(J(r_1)) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(J(r_m))\end{pmatrix}.$$

Wie ist es mit $\exp(J(r))$?

$$\exp(J(r)) = E_r + J(r) + \frac{1}{2}J(r)^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!}J(r)^{r-1}$$

ist ein Polynom.

Wenn $f: \; e_r \mapsto e_{r-1} \mapsto e_{r-2} \mapsto \dots \mapsto e_1 \mapsto \bar{0}$,

dann $f^k: \; e_r \mapsto e_{r-k}, \; e_{r-1} \mapsto e_{r-k-1}$ und

so weiter.

$$J(r)^k = \left(\begin{array}{c:c} \overbrace{}^{k} & \\ 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1\end{matrix} \\ & \underset{k+1}{} \end{array}\right)\Big\}k \qquad \begin{array}{l} e_{k+1} \mapsto e_1 \\ e_{k+2} \mapsto e_2 \\ \quad \vdots \end{array}$$

$1 \le k \le r-1$

Damit

$$\exp(J(r)) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3! & \cdots & 1/(r-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1/3! \\ & 0 & & \ddots & 1/2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Satz von Cayley-Hamilton

$$\chi_A(A) = 0 \quad (\text{als Matrix})$$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-2)^2$.

$$(A-2E_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Wenn $\chi_A(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_1 X + c_0$, dann

$$\chi_A(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E_n.$$

Bew. $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$. Seies $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$.

Dann $A \sim \operatorname{diag}(J(r_1^{(1)}; \lambda_1), \ldots, J(r_{t(1)}^{(1)}; \lambda_1), \ldots, J(r_{t(m)}^{(m)}; \lambda_m))$

Nehmen an $r_1^{(i)} \geq \ldots \geq r_{t(i)}^{(i)}$ $\forall i$.

Merken $r_1^{(i)} + \ldots + r_{t(i)}^{(i)} = \alpha_i$, $\alpha_i \geq r_j^{(i)}$ $\forall j$.

Also $\left(J(r_j^{(i)}; \lambda_i) - \lambda_i E_{r_j^{(i)}}\right)^{\alpha_i} = 0$ und

$$\chi_A(A) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & * & \\ \hline & & \ddots\ * \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} * & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & * \ddots \end{array}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\begin{array}{c|c} * & \\ \ \ \ * & \\ \ \ \ \ \ \ * & \\ \hline & 0 \end{array}\right) = 0.$$ ▨