3. Geometrie in euklidischen (und hermiteschen) Räumen.

Euklidisch $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ mit $(v\cdot w) = v^t w$.
Hermitesch $\longleftrightarrow$ $V = \mathbb{C}^n$ mit $\langle v, w\rangle = \bar{v}^t w$.
$|v|^2 = (v\cdot v)$ oder $|v|^2 = \langle v, v\rangle$.

Satz 3.1. (der Satz des Pythagoras).
Stehen zwei Vektoren v, w senkrecht aufeinander, so gilt $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2$.

Bew. $|v+w|^2 = ((v+w)\cdot(v+w)) = (v\cdot v) + (v\cdot w) + (w\cdot v) + (w\cdot w) = |v|^2 + |w|^2$. (Der herm. Fall ähnlich). $\boxtimes$

Bew. In $\mathbb{R}^n$: $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \Leftrightarrow (v\cdot w) = 0$;
aber in $\mathbb{C}^n$: $|v+w|^2 = |v|^2 + |w|^2 \Leftrightarrow \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, w\rangle \in i\mathbb{R}$.

Sei nun $v \in V$ ein Vektor und $\mathcal{U} \subseteq V$ ein Unterraum. Wir suchen einen Punkt (Vektor) $u_0 \in \mathcal{U}$, der den kleinsten Abstand zu v hat: $|v - u_0| \leq |v - u|$ $\forall u \in \mathcal{U}$; setzen $d(v, \mathcal{U}) = |v - u_0|$.

Lemma 3.2. Für den Punkt u_0 gilt:
$v - u_0 \perp \mathcal{U}$ und u_0 ist der einzige Vektor in $\mathcal{U}$ mit der Eigenschaft.

Bew. Erstens zeigen wir, dass ein solcher u_0 existiert. Sei $\{t_1, \dots, t_m\}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{U}$, $m = \dim \mathcal{U}$. (Das Skalarprodukt ist positiv definit auf $\mathcal{U}$, so gelten die Sätze

2.5. und 2.17.). Damit ist

$$u_0 = v - (v \cdot t_1)t_1 - \ldots - (v \cdot t_m)t_m$$ zu jedem t_i (und zu $\mathcal{U}$) orthogonal.

(Herm.: $u_0 = v - \langle v, t_1\rangle t_1 - \ldots - \langle v, t_m\rangle t_m$.)

Der Vektor u_0 ist die orthogonale Projektion von v auf $\mathcal{U}$.

Wenn $u \in \mathcal{U}$, dann, nach Pythagoras,
$|v-u|^2 = |v-u_0|^2 + |u-u_0|^2$, weil $(v-u_0) \perp (u-u_0)$, denn $u-u_0 \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ ist ein Unterraum).
$|v-u|^2 \geq |v-u_0|^2$ und die sind gleich, nur wenn $u = u_0$.

Falls $(v-u) \perp \mathcal{U}$, dann $((v-u)-(v-u_0)) \perp \mathcal{U}$ und insb. $(u_0-u) \perp (u_0-u)$. Also $u-u_0 = \bar{0}$, $u = u_0$. ⊠

Satz 3.3. (i) [Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung]

$$|(v \cdot w)| \leq |v| \cdot |w| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n;$$

$$(|\langle v, w\rangle| \leq |v| \cdot |w| \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n).$$

(ii) [Dreiecksungleichung]

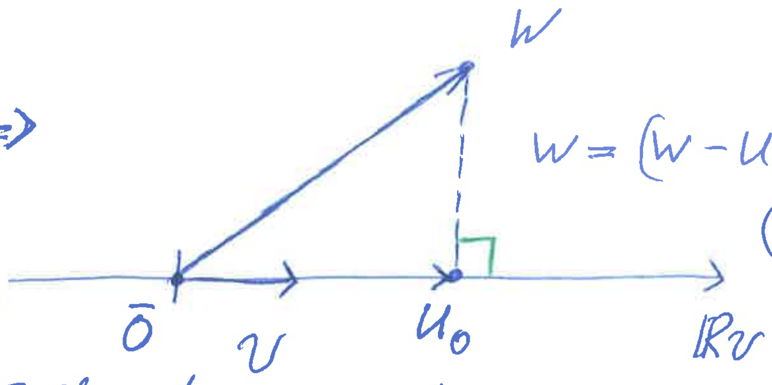
$$|v+w| \leq |v| + |w| \quad \forall v, w \in V.$$

Bew. (i) Wenn wir v mit $r \in \mathbb{R}$ multiplizieren, multiplizieren sich die beiden Seiten mit r.
So nehmen wir an, $|v| = 1$. (Der Fall $|v| = 0$, wo $v = \bar{0}$, ist klar.) Nun $w = (w \cdot v)v + u_0$, wo $(u_0 \cdot v) = 0$ (orthogonale Projektion auf $\mathbb{R}v$). Nun

$$|(w \cdot v)|^2 \underset{|v|^2=1}{=} |(w \cdot v)v|^2 \underset{(w\cdot v)v = w-u_0}{=} |w-u_0|^2 \leq |w-u_0|^2 + |u_0|^2 \underset{\text{Pythagoras}}{=} |w|^2.$$

Das Bild: $|w|^2 = |u_0|^2 + |w-u_0|^2$

Merken, $|w-u_0| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow w \in \mathbb{R}v$
(oder $w \in \mathbb{C}v$).



$w = (w-u_0) + u_0$
$(w-u_0) \perp u_0$

Der herm. Fall ist ähnlich.

(ii) $|v+w|^2 = |((v+w)\cdot(v+w))| = ||v|^2 + |w|^2 + 2(v\cdot w)| \leq$
$\leq |v|^2 + |w|^2 + 2|(v\cdot w)| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |v|^2 + |w|^2 + 2|v|\cdot|w| = (|v|+|w|)^2.$

Die Gleichheit haben wir genau dann, wenn v und w linear abhängig sind und $(v\cdot w) \geq 0$ ($\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle \geq 0$). ▦

<u>Lemma 3.4.</u> [Bessel'sche Ungleichung]
Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis in V und $v \in V$. Dann gilt: $|v|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |(e_i \cdot v)|^2 \; \forall k \leq n$,
$|v|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, v\rangle|^2$ im hermiteschen Fall.

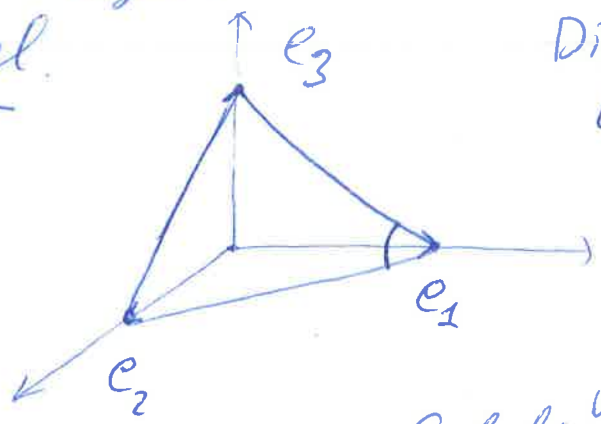
<u>Bew.</u> (nur für $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ähnlich).
Wir haben $v = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$, wo $\gamma_i = (v\cdot e_i)$.
Weiter, $|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \gamma_i^2$, falls $k \leq n$. ▦

<u>Der Winkel:</u> $\measuredangle(v,w) \in [0,\pi]$ und es muss gelten $\cos\alpha = \dfrac{(v\cdot w)}{|v||w|}$ $\left(\dfrac{\langle v,w\rangle}{|v||w|}\right)$ für $\alpha = \measuredangle(v,w)$.
Die Vektoren v, w liegen in $\mathbb{R}^2$ (auch im herm. Fall), da kennen wir schon des Winkelbegriff mit genau

dieser Eigenschaft.

Beispiel

$\mathbb{R}^3$

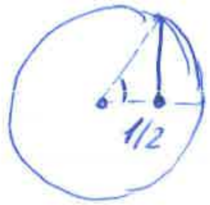


Diese drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel an jeder Ecke sollte folglich $\pi/3$ sein.

Überprüfen:

$(e_1 - e_3, e_1 - e_2) = 1$, $|e_1 - e_3| = \sqrt{2} = |e_1 - e_2|$

Damit $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60° = \pi/3$ für



$\alpha = \angle(e_1 - e_3, e_1 - e_2)$.

Der orientierte Winkel in $\mathbb{R}^2$: $\gamma = \angle^{+/-}(v, w)$.

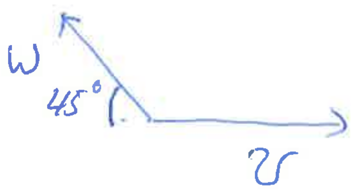
$\gamma \in (-\pi, \pi]$, also $-\pi < \gamma \le \pi$. $(v \neq \bar{0}, w \neq \bar{0}.)$

$\angle^{+/-}(v, rv) = 0$, $\angle^{+/-}(v, -rv) = \pi$, falls $r > 0$.

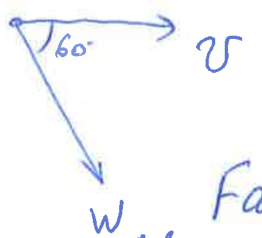
$$\cos\gamma = \begin{cases} \cos\angle(v, w), & \det(v|w) > 0; \\ -\cos\angle(v, w), & \text{sonst} \end{cases}$$

für linear unabhängige v und w.

Beispiele:



$\angle^{+/-}(v, w) = 135°$,



$\angle^{+/-}(v, w) = -60°$.

Falls v und w linear unabhängig sind, gilt $\angle^{+/-}(v, w) = -\angle^{+/-}(w, v)$.

Das <u>Kreuzprodukt</u> in $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(v,w) \mapsto v \times w$ (Das Produkt ist wieder ein Vektor.)

die bilinear, alternierend $v \times w = -w \times v$ und, s.d. $v_1 \times v_2 = v_3$ für jede **Orthonormalbasis** $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $\det(v_1|v_2|v_3) > 0$, ist.

<u>Satz 3.5.</u> Das Kreuzprodukt existiert und ist durch die Formel

$$\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix}\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2\\ \alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3\\ \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1\end{pmatrix}$$

gegeben.

<u>Bew.</u> Sei das Bild von (v,w) mit $v = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_3\end{pmatrix}$ $K(v,w)$ genannt, $K(v,w) = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$.

Merken, $c_1 = \det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{pmatrix}$, $c_2 = -\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_3 & \gamma_3\end{pmatrix}$, $c_3 = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{pmatrix}$. Damit ist K bilinear und $K(v,w) = -K(w,v)$.

Entwicklung nach der 3-en Spalte zeigt, dass

$$\det(v|w|K(v,w)) = (K(v,w) \cdot K(v,w)).$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1 & c_1\\ \alpha_2 & \gamma_2 & c_2\\ \alpha_3 & \gamma_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Und noch, dass $(K(v,w) \cdot v) = \det(v|w|v) = 0 = \det(v|w|w) = (K(v,w) \cdot w)$. $(K(v,w) \cdot u) = \det(v|w|u)$ $\forall u$.

Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis, so ist $A = (v_1|v_2|v_3)$ orthogonal, $A^tA = E_3$. Wenn dazu

$\det(A) > 0$, dann $\det(A) = 1$ und wir bekommen $(K(v_1, v_2) \cdot v_3) = 1$, $K(v_1, v_2) \perp v_1, v_2$. Es folgt $K(v_1, v_2) = v_3$. (Wir haben die Formel $\det(v_1 | v_2 | v_3) = (K(v_1, v_2) \cdot v_3)$ benutzt.)

Nun zu <u>Eindeutigkeit</u> von „$\times$".

$$v \times w = \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j \, e_i \times e_j = \sum_{i \neq j} \alpha_i \gamma_j \, e_i \times e_j =$$

($\{e_1, e_2, e_3\}$ sei die übliche Basis von $\mathbb{R}^3$)

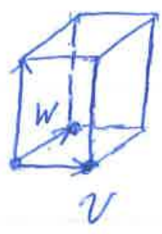
$$= (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \, e_1 \times e_2 + (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1) \, e_1 \times e_3 + (\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) \, e_2 \times e_3 = K(v, w),$$

weil $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, -e_3, e_2\}$, $\{e_2, e_3, e_1\}$ Orthonormalbasen mit $\det(\ldots) > 0$ sind. $\boxtimes$

<u>Geometrische Bedeutung</u>

Sind v und w linear abhängig, so gilt $v \times w = \bar{0}$. Seien v und w linear unabhängig. Dann $|v \times w|^2 = \underline{\det(v | w | v \times w)}$ und $v \times w \perp v, w$.

„ des Volumen des Parallelepipeds $\rightarrow$



Also ist $|v \times w|$ der Fläche des von v und w aufgespannten Parallelograms gleich.

$$|v \times w| = |v| |w| \cdot \sin \measuredangle(v, w)$$

Direkt das zu zeigen: $\det(Av | Aw | Au) = \det(A) \det(v | w | u)$. Wenn $A \in SO_n$, ändert sich die Determinante $\det(v | w | v \times w)$ nicht. Für die Determinante

$v_1 = \alpha e_1$, $v_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$ stimmt die Formel.