3 Lineare Abbildungen

3.1 Koordinatentransformation und quadratische Matrizen

In Abschnitt 2.4 haben wir einen Isomorphismus **F** zwischen V_n und K^n konstruiert, der jedem Vektor aus V_n seinen Koordinatenvektor bezüglich einer festen Basis zuordnet. Wir wollen nun den Übergang von einer Basis zu einer anderen als Koordinatentransformation darstellen. Seien $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Basen in V_n und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bzw. $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ die zugehörigen Koordinaten eines Vektors v, d.h.

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, a_i \tag{1}$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, b_j \, . \tag{2}$$

Jeder Vektor b_j der “neuen” Basis besitzt bzgl. der “alten” Basis Koordinaten, sagen wir $(\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{nj})$, d.h.

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \, a_i \, . \tag{3}$$

Wir setzen (3) in (2) ein und erhalten

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \, a_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \, \beta_j \right) a_i \, .$$

Da die Koordinaten von v bzgl. der alten Basis eindeutig bestimmt sind, folgt durch Koordinatenvergleich

$$\boxed{\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \, \beta_j} \quad , \qquad i = 1, \ldots, n \, . \tag{4}$$

Durch diese **Koordinatentransformation** werden die alten Koordinaten mit Hilfe der neuen ausgedrückt.

Für das Gleichungssystem (4) führt man nun eine kompakte und nützliche Schreibweise ein. Zunächst ordnet man die Koordinaten γ_{ij} in einer sogenannten **quadratischen $n \times n$–Matrix** an:

$$C := \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Dabei gibt der Index i von γ_{ij} die Nummer der Zeile und j die Nummer der Spalte von C an, in der γ_{ij} steht.

Für die Koordinatenvektoren als Spalten schreiben wir allgemein

$$\bar{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n \, .$$

Die Gleichungen (4) sind dann äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \, ,$$

in Kurzschreibweise,

(6) $$\boxed{\bar{\alpha} = C\bar{\beta}} \, ,$$

wobei auf der rechten Seite das **Produkt einer $n \times n$–Matrix mit einem Spaltenvektor** der Länge n steht. Dieses ist per **Definition** gerade der Spaltenvektor $\bar{\alpha}$, dessen Komponenten α_i durch die Vorschrift (4) gegeben sind. (Die Definition dieses Produkts gilt für jede Wahl der $n \times n$–Matrix C und des Spaltenvektors $\bar{\beta}$.)

Die Transformationsmatrix C induziert eine Abbildung $\mathbf{C} : K^n \to K^n$ durch $\mathbf{C}(\bar{\lambda}) = C\bar{\lambda}$. Wir zeigen, dass $\mathbf{C}$ linear ist. Es gilt

$$\mathbf{C}(\bar{x} + \bar{\mu}) = C(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \left(\lambda_j + \mu_j\right) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\lambda_j + \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\mu_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\lambda_j \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_{ij}\mu_j \\ \vdots \end{pmatrix} = C\bar{\lambda} + C\bar{\mu} = \mathbf{C}(\bar{\lambda}) + \mathbf{C}(\bar{\mu})$$

und analogerweise $\mathbf{C}(\mu\bar{\lambda}) = \mu\mathbf{C}(\bar{\lambda}) \; , \; \mu \in K.$

Aus allgemeineren Prinzipien können wir bald ableiten, dass $\mathbf{C}$ auch bijektiv ist. Wir haben es also wieder mit einem Vektorraumisomorphismus zu tun, der hier **Automorphismus** genannt wird, da Ausgangsraum und Bildraum übereinstimmen.

3.2 Allgemeine lineare Abbildungen

Wir betrachten nun beliebige **lineare Abbildungen** $\mathbf{A}$ zwischen zwei Vektorräumen V und W über K, d.h. $\mathbf{A}$ besitzt die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(u+v) &= \mathbf{A}(u) + \mathbf{A}(v) \quad , \quad u, v \in V \\ \mathbf{A}(\lambda v) &= \lambda\, \mathbf{A}(v) \qquad\qquad , \quad v \in V\ ,\ \lambda \in K. \end{aligned}$$

Diese werden auch **lineare Operatoren** oder **Vektorraumhomomorphismen** genannt. In Zukunft schreiben wir kurz $\mathbf{A}v := \mathbf{A}(v)$. Ehe wir die linearen Abbildungen in ihrer Wechselwirkung mit den zugehöringen Vektorräumen genauer untersuchen, wollen wir noch einige Beispiele aufzählen.

1. **Nullabbildung:** $\mathbf{O} : V \to W$ mit $\mathbf{O}v = \mathcal{O}$
2. **Identische Abbildung:** $\mathbf{I} : V \to V$ mit $\mathbf{I}v := v$
3. **Lineare Funktionale** oder **Linearformen:** Jede lineare Abbildung von V nach K.
4. **Koordinatenabbildung:** $\mathbf{F} : V_n \to K^n$ aus Abschnitt 2.4
5. **Koordinatentransformation:** $\mathbf{C} : K^n \to K^n$ aus Abschnitt 3.1
6. **Projektionen:** Sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. Dann heißt $\mathbf{\Pi}_i : V \to V_i$ mit $\mathbf{\Pi}_i v = v_i$, falls $v = v_1 + \ldots + v_k$, Projektion von V auf den Unterraum V_i entlang dem Unterraum $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \ldots \oplus V_k$.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Projektionen $\mathbf{\Pi}_i$ sämtlich linear sind. Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung im Raum der geometrischen Vektoren an. •

Der Zusammenhang zwischen der linearen Struktur der Räume und der linearen Abbildungen kommt in den folgenden Sachverhalten noch deutlicher zum Ausdruck.

3.2.1 Satz.
(1) $$\mathbf{A}(\mathrm{Lin}(S)) = \mathrm{Lin}(\mathbf{A}(S)) \quad , \quad S \subset V$$
(2) $$\mathbf{A}^{-1}(\mathrm{Lin}(S')) \supset \mathrm{Lin}(\mathbf{A}^{-1}(S')) \quad , \quad S' \subset W\ .$$

Beweis.

(1) Jedes $w \in \mathbf{A}(\mathrm{Lin}(S))$ ist darstellbar als

$$w = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \right)$$

für gewisse $v_i \in S\ ,\ \lambda_i \in K, k \in \mathbb{N}$. Die Linearität von $\mathbf{A}$ impliziert

$$w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, \mathbf{A} v_i\ ,$$

was offenbar ein Element von $\mathrm{Lin}(\mathbf{A}(S))$ ist. Die Umkehrung dieser logischen Kette ist ebenfalls richtig.

(2) $v \in \mathrm{Lin}(\mathbf{A}^{-1}(S))$ heißt, dass $v = \sum\limits_{i=1}^{l} \mu_i v_i$ für gewisse $v_i \in \mathbf{A}^{-1}(S'), \mu_i \in K$.
Es gilt also $\mathbf{A}\, v_i \in S'$, $i = 1, \ldots, l$. Wegen der Linearität von $\mathbf{A}$ ist

$$\mathbf{A}\, v = \sum_{i=1}^{l} \mu_i \mathbf{A} v_i \in \mathrm{Lin}(S') \text{ , d.h. } v \in \mathbf{A}^{-1}(\mathrm{Lin}(S')) .$$ □

Aufgabe. Weisen Sie anhand eines Gegenbeispiels nach, dass in (2) die Mengengleichheit im Allgemeinen nicht gilt. (* Für welche S' lässt sich diese erreichen?) •

3.2.2 Folgerung. V' ist Unterraum von $V \Rightarrow \mathbf{A}(V')$ ist Unterraum von W. •

3.2.3 Folgerung. W' ist Unterrraum von $W \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}(W')$ ist Unterraum von V. •

3.3 Bild, Kern, Rang und Defekt linearer Abbildungen

Wie oben sei $\mathbf{A} : V \to W$ linear.

Definition.
Bild $\mathbf{A} = \mathbf{A}(V)$ heißt **Bildraum** von $\mathbf{A}$.
Kern $\mathbf{A} := \mathbf{A}^{-1}(\{\mathcal{O}\})$ heißt **Kern** von $\mathbf{A}$.

Aufgrund der Aussagen 3.2.2 und 3.2.3 sind Bild $\mathbf{A}$ und Kern $\mathbf{A}$ Unterräume von W bzw. V. Für ihre Dimensionen gibt es spezielle Begriffe:

Definition.
Rang $\mathbf{A} := \dim($Bild $\mathbf{A})$ heißt **Rang** von $\mathbf{A}$.
Defekt $\mathbf{A} := \dim($Kern $\mathbf{A})$ heißt **Defekt** von $\mathbf{A}$.

Beispiele.

1. $\mathbf{O} : V \to W$, Bild $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}\}$, Rang $\mathbf{O} = 0$
   Kern $\mathbf{O} = V$, Defekt $\mathbf{O} = \dim V$

2. $\mathbf{I} : V \to V$, Bild $\mathbf{I} = V$, Rang $\mathbf{I} = \dim V$
   Kern $\mathbf{I} = \{\mathcal{O}\}$, Defekt $\mathbf{I} = 0$

3. $V = V_1 \oplus V_2$, $\mathbf{\Pi}_i : V \to V_i$ Projektion auf V_i entlang V_j , $i, j = 1, 2$, $i \neq j$
   Bild $\mathbf{\Pi}_i = V_i$, Rang $\mathbf{\Pi}_i = \dim V_i$
   Kern $\mathbf{\Pi}_i = V_j$, Defekt $\mathbf{\Pi}_i = \dim V_j$

3.3.1 Satz. *Für jede lineare Abbildung $\mathbf{A} : V \to W$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathbf{A}$ *ist injektiv*

(2) Defekt $\mathbf{A} = 0$

(3) $S \subset V$ *ist linear unabhängig* $\Rightarrow$ $\mathbf{A}(S)$ *ist linear unabhängig.*

Gilt außerdem $\dim V < \infty$, *so ist*

(4) Rang $\mathbf{A} = \dim V$

äquivalent zu (1), (2), (3).

Beweis.

Aus (1) folgt (2): Wenn $\mathbf{A}$ injektiv ist, so gilt insbesondere Kern $\mathbf{A} = \{\mathcal{O}\}$, d.h. Defekt $\mathbf{A} = 0$.

Aus (2) folgt (1): Defekt $\mathbf{A} = 0$ bedeutet Kern $\mathbf{A} = \{\mathcal{O}\}$. Falls $\mathbf{A}v = \mathbf{A}v'$, so erhält man $\mathbf{A}(v - v') = \mathcal{O}$, d.h. $v - v' \in$ Kern $\mathbf{A}$ und demnach $v - v' = \mathcal{O}$.

Aus (2) folgt (3): Sei $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \,\mathbf{A} v_i = \mathcal{O}$ für gewisse $v_i \in S$.
Dann ist $\mathbf{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i\right) = \mathcal{O}$ und demnach $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i \in$ Kern $\mathbf{A} = \{\mathcal{O}\}$, d.h. $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \, v_i = \mathcal{O}$. Die lineare Unabhängigkeit von S ergibt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Aus (3) folgt (2): Falls $\mathbf{A}v = \mathcal{O}$ für ein $v \neq \mathcal{O}$, so wird das linear unabhängige System $S = \{v\}$ in das linear abhängige System $\{\mathcal{O}\}$ überführt, was ein Widerspruch zu (3) ist.

Sei nun $\dim(V) = n$.

Aus (3) folgt dann (4): Für jede Basis $b_1, \ldots, b_n$ in V sind die $\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n$ linear unabhängig. Nach Satz 3.2.1 (1) gilt $\mathbf{A}(V) = \mathrm{Lin}(\{\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n\})$, so dass $\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_n$ Basis in $\mathbf{A}(V)$ ist, d.h. $\dim \mathbf{A}(V) = n$.

Aus (4) folgt (3): Wir nehmen an, dass es ein linear unabhängiges System $S = \{a_1, \dots, a_k\} \subset V$ gibt, für das $\mathbf{A}a_1, \dots, \mathbf{A}a_k$ linear abhängig wird. In diesem Fall sei o. E. $\mathbf{A}a_1 \in \mathrm{Lin}(\mathbf{A}a_2, \dots, \mathbf{A}a_k)$. Wir ergänzen $a_1, \dots, a_k$ zu einer Basis $a_1, \dots, a_n$ in V und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(V) &= \mathbf{A}(\mathrm{Lin}(a_1, \dots, a_n)) = \mathrm{Lin}(\mathbf{A}a_1, \dots, \mathbf{A}a_n)\\ &= \mathrm{Lin}(\mathbf{A}a_2, \dots, \mathbf{A}a_n).\end{aligned}$$

Dies ergibt $\dim \mathbf{A}(V) \leq n - 1$, d.h. einen Widerspruch zu (4). Also ist (3) richtig.

□

3.3.2 Folgerung.

(i) Ein Vektorraumisomorphismus $\mathbf{A} : V_n \to W_n$ überträgt jede Basis in V_n in eine Basis von W_n.

(ii) Wenn eine lineare Abbildung $\mathbf{A} : V_n \to W_n$ irgendeine Basis von V_n in eine Basis von W_n überträgt, so ist $\mathbf{A}$ ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. (i) Für eine beliebige Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ in V ist wegen $((1) \Rightarrow (3))$ das System $\{\mathbf{A}b_1, \dots, \mathbf{A}b_n\}$ linear unabhängig. Gemäß $((1) \Rightarrow (4))$ ist $\dim W = n$ und deshalb $\{\mathbf{A}b_1, \dots, \mathbf{A}b_n\}$ eine Basis in W.

(ii) Wenn für die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ die Vektoren $\{\mathbf{A}b_1, \dots, \mathbf{A}b_n\}$ eine Basis in W bilden, so ist $\mathbf{A}$ wegen $((4) \Rightarrow (1))$ injektiv. Satz 3.2.1 ergibt

$$\mathbf{A}(V) = \mathrm{Lin}(\mathbf{A}b_1, \dots, \mathbf{A}b_n),$$

somit $\mathbf{A}(V) = W$. Also ist $\mathbf{A}$ auch surjektiv.

□

3.3.3 Folgerung. Die Koordinatentransformation $\mathbf{C} : K^n \to K^n$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. In 3.3.1 haben wir die Linearität der Abbildung $\mathbf{C}\bar{\lambda} = C \cdot \bar{\lambda}, \bar{\lambda} \in K^n$, bewiesen. Wegen 3.3.2 genügt es nun zu zeigen, dass $\mathbf{C}$ die Standardbasis $\bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}$ von K^n in eine neue Basis überträgt. Es gilt aber

$$C \cdot \bar{e_k} = \bar{\gamma_k}$$

wobei $\bar{\gamma_k}$ der k-te Spaltenvektor der Koordinatentransformationsmatrix C ist. Nach Konstruktion von C sind die $\bar{\gamma_1}, \dots, \bar{\gamma_n}$ Koordinatenvektoren von Basisvektoren im gegebenen Vektorraum V_n und damit immer Basisvektoren in K^n. □

Wir können nun den **Dimensionssatz für lineare Abbildungen** zeigen.

3.3.4 Satz. *Sei* $\dim V < \infty$. *Dann gilt*

$$\text{Rang } \mathbf{A} + \text{Defekt } \mathbf{A} = \dim V\,.$$

Beweis.

<u>1. Fall:</u> Defekt $\mathbf{A} = 0$.
Nach dem obigen Satz ist dann Rang $\mathbf{A} = \dim V$.

<u>2. Fall:</u> Rang $\mathbf{A} = 0\,$.

Dann ist $\mathbf{A}(V) = \{\mathcal{O}\}$, d.h. Kern $\mathbf{A} = V$ und deshalb Defekt $\mathbf{A} = \dim V$.

<u>3. Fall:</u> Defekt $\mathbf{A} \neq 0$, Rang $\mathbf{A} \neq 0$.
Wir wählen eine Basis $b_1, \ldots, b_k$ in Kern $\mathbf{A}$, ergänzen sie zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ in V und zeigen, dass Rang $\mathbf{A} = n - k$, indem wir nachweisen, dass $\mathbf{A}b_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}b_n$ eine Basis in $\mathbf{A}(V)$ ist. Sei $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i \mathbf{A} b_i = \mathcal{O}$, d.h. $\mathbf{A}\big(\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, b_i\big) = \mathcal{O}$, also $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda_i\, b_i \in$ Kern $\mathbf{A}$. Dann lässt sich dieser Vektor nach der Basis $b_1, \ldots, b_k$ zerlegen: $\sum\limits_{i=k+1}^{n} \lambda\, b_i = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda\, b_i$. Da dann $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\, b_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} (-\lambda_i) b_i = \mathcal{O}$ gilt, sind alle λ_i gleich Null. Insbesondere ist die obenstehende Linearkombination der $\mathbf{A}b_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}b_n$ trivial, d.h. diese Vektoren sind linear unabhängig. Außerdem erzeugen sie $\mathbf{A}(V)$, denn jedes $v \in V$ lässt sich darstellen als $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\, b_i$, so dass
$\mathbf{A}v = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i\, \mathbf{A}b_i = \sum\limits_{i=k+1}^{n} \mu_i\, \mathbf{A}b_i$, da $\mathbf{A}b_i = \mathcal{O}$ für $i \leq k$.

□

3.4 Abbildungsoperationen und Matrizendarstellung

Wir wollen nun der Menge aller linearen Abbildungen von V nach W selbst wieder die Struktur eines Vektorraumes geben. Dazu führen wir eine Addition und eine skalare Multiplikation ein. Je zwei solchen Abbildungen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ordnen wir ihre **Summe** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ als neue Abbildung von V nach W zu:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})v := \mathbf{A}v + \mathbf{B}v\,.$$

Analog entsteht das **skalare Vielfache** $\lambda\mathbf{A}$ von $\mathbf{A}$:

$$(\lambda\mathbf{A})v := \lambda\mathbf{A}v$$

Aufgabe. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ und $\lambda\mathbf{A}$ sind wieder linear, und es gilt die folgende Aussage. •

3.4.1 Satz. *Die Menge $L(V,W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W bildet bezüglich der Abbildungsaddition und der skalaren Multiplikation einen Vektorraum über K.*

Die Komposition von linearen Abbildungen spielt ebenfalls eine wichtige Rolle.

3.4.2 Satz. *Es sei $\mathbf{A} \in L(U,V)$, $\mathbf{B} \in L(V,W)$. Dann ist $\mathbf{B}\circ\mathbf{A} \in L(U,W)$, und es gelten das Assoziativgesetz*

$$\mathbf{A}\circ(\mathbf{B}\circ\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\circ\mathbf{B})\circ\mathbf{C}$$

und die Distributivgesetze

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\circ\mathbf{C} &= \mathbf{A}\circ\mathbf{B}+\mathbf{B}\circ\mathbf{C}\\ \mathbf{A}\circ(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\circ\mathbf{B}+\mathbf{A}\circ\mathbf{C}\\ \lambda(\mathbf{A}\circ\mathbf{B}) &= (\lambda\mathbf{A})\circ\mathbf{B} = \mathbf{A}\circ(\lambda\mathbf{B})\,.\end{aligned}$$ •

Matrizendarstellung linearer Abbildungen

Wir wissen bereits, dass sich Vektoren mit Hilfe ihrer Koordinaten bezüglich einer Basis beschreiben lassen. Ähnlich kann man bei linearen Abbildungen vorgehen, die ja selbst als Vektoren von $L(V,W)$ betrachtet werden dürfen. Im Fall von endlich–dimensionalen V und W ordnet man die Koordinaten aus Zweckmäßigkeitsgründen hier jedoch matrizenförmig an. Wir wollen diesen Zusammenhang jetzt herleiten. Zunächst machen wir uns den folgenden Sachverhalt klar.

3.4.3 Lemma. *Jede lineare Abbildung ist durch ihre Werte für die Elemente einer Basis eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\mathbf{A} \in L(V,W)$ und B Basis in V. Dann hat jedes $v \in V$ die eindeutige Darstellung $v = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j b_j$ für gewisse $b_j \in B$, so dass $\mathbf{A}v = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j\, \mathbf{A}b_j$. Es genügt also, die Werte $\mathbf{A}b$, $b \in B$, zu kennen. □

Bemerkung. Im Sinne einer suggestiven Schreibweise bezeichnen wir die Koordinaten eines Vektors v bzgl. einer gegebenen Basis jetzt auch mit v_i anstelle von λ_i usw. $\overline{v}$ ist dann der Koordinatenvektor zu v .

Im weiteren setzen wir voraus $\dim V = m$ und $\dim W = n$. Jede Basis in V hat dann die Gestalt $B = \{b_1,\ldots,b_m\}$. Die Bildvektoren $\mathbf{A}b_1,\ldots,\mathbf{A}b_m$ lassen sich nach einer zweiten Basis $\{e_1,\ldots,e_n\}$ in W zerlegen. Ihre zugehörigen Koordinatenvektoren seien $\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} a_{1m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix}$. Wir schreiben dafür auch kurz $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_m$, d.h.

$\bar{a}_j = \overline{\mathbf{A}b_j}$. Wir betrachten nun einen beliebigen Vektor $v \in V$ mit dem Koordinatenvektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ bzgl. $\{b_1, \dots, b_m\}$ und sein Bild $\mathbf{A}v =: w$. Der Koordinatenvektor von w bzgl. $\{e_1, \dots, e_n\}$ sei $\bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Wegen der Linearität von $\mathbf{A}$ gilt wieder $w = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \mathbf{A} b_j$, und die Linearität der Koordinatendarstellung $\mathbf{F}$ aus 2.4 ergibt

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^{m} v_j \, \bar{a}_j \ .$$

Koordinatenweise aufgeschrieben, erhält man die Gleichungen

$$\text{(1)} \qquad \boxed{w_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, v_j} \ , \quad i = 1, \dots, n \ .$$

Ähnlich wie bei der Koordinatentransformation in 3.1 wollen wir dafür wieder eine kompakte Schreibweise einführen. Wir bilden die sogenannte $\boldsymbol{n \times m}$**–Matrix**

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

und schreiben (1) in der Form

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \ ,$$

kurz

$$\text{(2)} \qquad \boxed{\bar{w} = A\bar{v}} \ .$$

Dabei sei die Multiplikation von A mit $\bar{v}$ durch die Vorschrift (1) erklärt. Gemäß (2) gibt also die Matrix A die **zur linearen Abbildung A gehörende Abbildung der Koordinaten** an. (Bei festen Basen wollen wir diese Zuordnung immer durch die Wahl gleicher Buchstaben unterschiedlicher Stärke zum Ausdruck bringen.) A heißt auch **darstellende Matrix** von $\mathbf{A}$ oder Darstellungsmatrix.
Parallel zu den Abbildungsoperationen gibt es nun einen passenden Matrizenkalkül. Wir wollen Letzteren zunächst formal einführen und ihn dann anhand der Operationen für lineare Abbildungen deuten.

Matrizenkalkül
Eine $n \times m$–Matrix über dem Körper K sei ein beliebiges Rechteckschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a_{ij} \in K\ .$$

Die horizontalen Elementefolgen heißen **Zeilen** und die vertikalen **Spalten** der Matrix A. Man schreibt auch kurz $A = (a_{ij})$, wenn n und m fest sind.

Die Menge $M(n \times m)$ aller solcher Matrizen lässt sich mit einer Vektorraumstruktur versehen. Dabei ist die **Summe** zweier Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$aus $M(n \times m)$ definiert als

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})$$

und die **skalare Multiplikation** von $A = (a_{ij})$ mit $\lambda \in K$ als

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})\ .$$

Aufgabe. Überprüfen Sie die Axiome des Vektorraums und folgende Dimensionsformel:

3.4.4. $$\dim M(n \times m) = n \cdot m$$ •

Schließlich wollen wir noch die **Matrizenmultiplikation** einführen. Hierbei muss man die zugehörigen Ausmaße beachten. Seien $A = (a_{ij})$ eine $p \times q$–Matrix und $B = (b_{ij})$ eine $q \times r$–Matrix über K. Dann ist ihr **Produkt** eine $p \times r$–Matrix, die wie folgt definiert ist:

$$\boxed{AB := \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\, b_{kj} \right)}\ .$$

Den Spezialfall $r = 1$ (für $p = n,\ q = m$) haben wir bereits oben betrachtet, als wir eine $n \times m$–Matrix mit einem Spaltenvektor der Länge m – also mit einer $m \times 1$–Matrix – multipliziert haben.

Aufgabe. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Matrizenmultiplikation im Raum der $n \times n$–Matrizen nicht kommutativ ist. •

Definition. Die **transponierte Matrix** zu einer $m \times n$–Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $n \times m$–Matrix

$$A^T = (a^T_{ij}) \ \text{ mit } a^T_{ij} := a_{ji}\ \ .$$

(Für quadratische Matrizen A entsteht A^T durch Spiegelung an der Diagonalen.) Produkt und Transposition sind wir folgt verbunden:

3.4.5. $$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}.$$ •

Die Bedeutung des Matrizenkalküls wird entscheidend durch den folgenden Zusammenhang erhellt.

3.4.6 Satz. $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *seien lineare Abbildungen und* A, B, C *die zugehörigen Matrizen bzgl. fester Basen. Dann gelten die Aussagen*

(1) $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow A + B = C$$

(2) $$\lambda\mathbf{A} = \mathbf{C} \Rightarrow \lambda A = C$$

(3) $$\mathbf{B} \circ \mathbf{A} = \mathbf{C} \Rightarrow BA = C\ .$$

Beweis. (1) und (2) folgen unmittelbar aus den Definitionen und der Linearität der Koordinatendarstellung, denn die Spalten der Matrix A von $\mathbf{A}$ sind gerade die Koordinatenvektoren $\overline{\mathbf{A}b_1}, \ldots, \overline{\mathbf{A}b_m}$ bzgl der Basis $e_1, \ldots, e_n$. Sei nun $\mathbf{A} \in L(U_m, V_n)$, $\mathbf{B} \in L(V_n, W_p)$. Dann sind $\bar{v} = A\bar{u}$ und $\bar{w} = B\bar{v}$ die angehörigen Koordinatendarstellungen der Abbildungen. Die Koordinatenabbildung zur Komposition $\mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ ist durch $\bar{w} = C\bar{u}$ gegeben.
Andererseits gilt $\bar{w} = B(A\bar{u})$, d.h.

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\ u_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\ a_{kj} \right) u_j\ ,\ i = 1, \ldots, p,$$

also $\bar{w} = (BA)\bar{u}$. Wir erhalten $(BA)\bar{u} = C\,\bar{u}$ für alle $\bar{u} \in K^n$. Setzt man für $\bar{u}$ sukzessive die kanonischen Basisvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ in K^n ein, so ergibt sich die Gleichheit der entsprechenden Spaltenvektoren von BA und C, so dass diese beiden Matrizen übereinstimmen. □

Die Beziehung der linearen Abbildungen zu ihren Matrizen lässt sich noch etwas schärfer als in 3.4.6 (1), (2) formulieren:

3.4.7 Satz. *Die Abbildung* $f\ :\ L(V_m, W_n) \to M(n \times m)$ *mit* $f(\mathbf{A}) = A$ *ist ein Vektorraumisomorphismus.*

Bemerkung. In diesem Sinne kann man eine lineare Abbildung $\mathbf{A}$ mit ihrer Darstellungsmatrix A bzgl. fester Basen identifizieren.

Beweis des Satzes.
1) Die **Linearität** von f ist in (1) und (2) von Satz 3.4.6 bewiesen.
2) f ist **injektiv**: Falls $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$, so gibt es wegen 3.4.3 einen Basisvektor b_j in V_m, für den $\mathbf{A}b_j \neq \mathbf{B}b_j$. Dann sind aber auch die zugehörigen Koordinatenvektoren verschieden, und diese stehen in der j–ten Spalte von A bzw. B. Es gilt also $A \neq B$.
3) f ist **surjektiv**: Für eine beliebige $n \times m$–Matrix A über K definieren wir die Abbildung $\mathbf{A} : V_m \to W_n$ durch $\mathbf{A}v := \sum\limits_{i=1}^{n} w_i\, e_i$, falls $v = \sum\limits_{j=1}^{m} v_j\, b_j$ und $A\bar{v} = \bar{w}$.

Es bleibt die Linearität von $\mathbf{A}$ zu zeigen, denn A ist dann nach Konstruktion die Darstellungsmatrix. Wenn $\bar{v}, \bar{v}'$ die Koordinatenvektoren von v bzw. v' sind, so ist $\bar{v} + \bar{v}'$ der Koordinatenvektor von $v+v'$, und $A(\bar{v}+\bar{v}') = A\bar{v}+A\bar{v}' = \bar{w}+\bar{w}'$, wobei $\bar{w}$ und $\bar{w}'$ die Koordinatenvektoren von $\mathbf{A}v$ bzw. $\mathbf{A}v'$ sind. $\bar{w} + \bar{w}'$ ist deshalb nach Konstruktion der Koordinatenvektor von $\mathbf{A}(v + v')$. Es muss also gelten $\mathbf{A}(v + v') = \mathbf{A}v + \mathbf{A}v'$. Analog zeigt man $\mathbf{A}(\lambda v) = \lambda \mathbf{A}v$. □

Da $\dim M(n \times m) = nm$ (s. 3.4.4), kann man aufgrund von 3.4.7 und 2.4.7 auf die Dimension von $L(V_m, W_n)$ schließen.

3.4.8. Folgerung.

$$\dim L(V_m, W_n) = mn\,.$$

Weitere Beziehungen

3.4.9. Zur Nullabbildung $\mathbf{O} : V_m \to V_n$ gehört die $n \times m$–**Nullmatrix**

$$O := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4.10. Zur Identität $\mathbf{I} : V_n \to V_n$ gehört die $n \times n$–**Einheitsmatrix**

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.11. Zur inversen Abbildung gehört die **inverse Matrix** :

Sei $\mathbf{A} \in L(V_n, W_n)$ ein Vektorraumisomorphismus. Wie wir bereits für Satz 2.4.6 gezeigt haben, ist die inverse Abbildung $\mathbf{A}^{-1}$ dann ebenfalls linear. Die zugehörige Matrix wollen wir mit A^{-1} bezeichnen. Der Zusammenhang zwischen A^{-1} und A lässt sich jedoch auch im Matrizenkalkül beschreiben: Aus den Gleichungen $\mathbf{A}^{-1} \circ \mathbf{A} = \mathbf{I}_{V_n}$ und $\mathbf{A} \circ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{W_n}$ schließen wir mit Hilfe von Satz 3.4.6 (3) auf

$$A^{-1}A = I \quad , \quad AA^{-1} = I\ .$$

A^{-1} spielt also die Rolle des inversen Elements zu A bzgl. der Matrizenmultiplikation, denn I kann dabei als neutrales Element interpretiert werden. Man nennt A^{-1} deshalb **inverse Matrix** zu A.

Bemerkung. Die Menge $M(n \times n)^*$ aller invertierbaren Matrizen $A \in M(n \times n)$, d.h. solcher, für die es ein $A^{-1} \in M(n \times n)$ gibt mit $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, ist in der Gruppentheorie von Bedeutung. Sie bildet nämlich bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Für die Menge aller Vektorraumisomorphismen von V_n auf sich selbst schreibt man auch $GL(V_n)$. Diese wiederum bildet bzgl. der Komposition eine Gruppe, und die Abbildung $f : GL(V_n) \to M(n \times n)^*$ mit $f(\mathbf{A}) = A$ ist ein sogenannter Gruppenisomorphismus. Dies bedeutet, daß f bijektiv ist und die Gruppenstruktur überträgt:

$$f(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) = AB$$
$$f(\mathbf{I}) = I$$
$$f(\mathbf{A}^{-1}) = A^{-1}.$$

Ausführlich werden wir uns mit solchen Dingen in der höheren Algebra beschäftigen. Ein Existenzkriterium und ein Verfahren zur Bestimmung der inversen Matrix werden wir später kennenlernen.

Änderung der Matrix einer linearen Abbildung beim Übergang zu neuen Basen

Für ein $\mathbf{A} \in L(V_m, W_n)$ betrachten wir jetzt die zugehörigen Matrizen A und A' bzgl. verschiedener Basen $\{b_1, \ldots, b_m\}, \{e_1, \ldots, e_n\}$ bzw. $\{b'_1, \ldots, b'_m\}, \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. C_V und C_W seien die Koordinatentransformationsmatrizen beim Übergang von $\{b'_1, \ldots, b'_m\}$ nach $\{b_1, \ldots, b_m\}$ bzw. von $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ nach $\{e_1, \ldots, e_n\}$, d.h.

$$(1) \quad \bar{v} = C_V \bar{v}' \qquad\qquad (2) \quad \bar{w} = C_W \bar{w}' \; .$$

Die zu $\mathbf{A}$ gehörenden Koordinatenabbildungen lauten

$$(3) \quad \bar{w} = A\bar{v} \qquad\qquad (4) \quad \bar{w}' = A'\bar{v}' \; .$$

Wir setzen (1) und (2) in (3) ein und erhalten

$$C_W \bar{w}' = A\, C_V \bar{v}' \; .$$

Da Koordinatentransformationen bijektiv sind (vgl. 3.3.3), existieren die Inversen C_V^{-1} und C_W^{-1}. Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit C_W^{-1} kommen wir zu

$$(5) \quad \bar{w}' = C_W^{-1}\, A\, V_V\, \bar{v}' \; .$$

Ein Vergleich von (4) und (5) ergibt die folgende **Transformationsregel** für den Übergang von A zu A'.

3.4.12 Lemma.

$$A' = C_W^{-1}\, A\, C_V \; ,$$

oder umgekehrt

$$A = C_W\, A'\, C_V^{-1} \; .$$

3.5 Rangbestimmung mittels Matrizen – Gaußscher Algorithmus

Der Rang einer linearen Abbildung kann mit Hilfe ihrer Matrizen bestimmt werden. Es genügt dabei, dies für eine feste Matrix zu tun: Für $\mathbf{A} \in L(V_m, W_n)$ gilt

$$\text{Rang } \mathbf{A} = \dim \mathbf{A}(V_m) = \text{Rang }(\mathbf{A}b_1, \ldots, \mathbf{A}b_m) = \text{Rang }\left(\overline{\mathbf{A}b}_1, \ldots, \overline{\mathbf{A}b}_m\right)$$

wobei $b_1, \ldots, b_m$ eine beliebige Basis in V_m ist und $\overline{\mathbf{A}b}_i$ den Spaltenkoordinatenvektor von $\mathbf{A}b_i$ bzgl. eine beliebigen Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in W_n bezeichnet. Die $\overline{\mathbf{A}b}_1, \ldots, \overline{\mathbf{A}b}_m$ bilden gleichzeitig die Spalten der zugehörigen Matrix A von $\mathbf{A}$. Ihren Rang nennt man deshalb auch **Spaltenrang** von A. Analog heißt der Rang des Systems der Zeilenvektoren einer Matrix auch **Zeilenrang**. Weiter unten werden wir den nachfolgenden Satz beweisen.

3.5.1 Satz. *Der Spaltenrang einer Matrix A ist gleich ihrem Zeilenrang (und wird deshalb mit **Rang** der Matrix, kurz* Rang *A bezeichnet).*

3.5.2 Folgerung. Für jede Darstellungsmatrix A von $\mathbf{A} \in L(V_m, V_n)$ gilt Rang $\mathbf{A} =$ Rang A.

Zum Beweis von Satz 3.5.1 benutzen wir zwei Hilfsschritte:

3.5.3 Lemma. *Der Spalten- und der Zeilenrang einer Matrix sind invariant gegenüber*
(1) *Vertauschen zweier beliebigen Spalten oder Zeilen*
(2) *Addition eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile zu einer anderen.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass es genügt, alle Aussagen für den Spaltenrang zu beweisen, denn beim Übergang zur transponierten Matrix werden die Zeilen zu Spalten und umgekehrt.
Wir zeigen zuerst die Invarianz des Spaltenranges gegenüber den genannten Spaltenoperationen. (1) ist in diesem Fall offensichtlich. Sei nun $A' = (\bar{a}'_1 \ldots \bar{a}'_n)$ die Matrix, die aus $A = (\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n)$ entsteht, wenn man zur j–ten Spalte $\bar{a}_j$ das μ–fache der Spalte $\bar{a}_k$ addiert. Offenbar ist dann $\text{Lin}(\bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_n) \subset \text{Lin}(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$, d.h. der Spaltenrang von A' ist nicht größer als der Spaltenrang von A. Andererseits gewinnt man A aus A' durch Subtraktion des μ–fachen von $\bar{a}'_k$ von der Spalte $\bar{a}'_j$. Aus den gleichen Gründen wie oben ist nun der Spaltenrang von A nicht größer als der Spaltenrang von A'. Deshalb fallen die beiden Ränge zusammen, d.h. (2) ist für den Spaltenfall bewiesen.
Als nächstes betrachten wir die Zeilenoperationen. Diesmal entsteht bei (1) die Matrix $A' = (\bar{a}'_1 \ldots \bar{a}'_n)$ aus $A = (\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n)$ durch Vertauschen zweier Zeilen. Ein Teilsystem $\bar{a}_{j_1}, \ldots, \bar{a}_{j_k}$ ist genau dann linear abhängig, wenn

$$(3) \quad \lambda_1 \bar{a}_{j_1} + \ldots + \lambda_k \bar{a}_{j_k} = \bar{0} \quad \text{mit } \lambda_l \neq 0 \quad \text{für ein } l\ .$$

Wenn wir diese Vektorgleichung komponentenweise aufschreiben, so ändert sich beim Übergang von A zu A' nur die Reihenfolge der Gleichungen des Systems, so dass folgendes dazu äquivalent ist:

$$(4) \quad \lambda_1 \bar{a}'_{j_1} + \ldots + \lambda_k \bar{a}'_{j_k} = \bar{0} \quad \text{mit } \lambda_l \text{ wie oben.}$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit von $\bar{a}'_{j_1}, \ldots, \bar{a}'_{j_k}$. Also stimmen die Spaltenränge von A und A' überein. Bei (2) gehen wir ähnlich vor. Diesmal entsteht das Gleichungssystem (4) aus (3) durch Addition des μ–fachen der k–ten Zeile zur i–ten Zeile. Umgekehrt gewinnt man (3) aus (4) hier durch Subtraktion des μ–fachen der k–ten Zeile von der i–ten. $\square$

Die in Lemma 3.5.3 verwendeten Umformmengen nennt man auch **elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperationen**.

3.5.4 Lemma. *Jede Matrix A lässt sich durch elementare Zeilenoperationen und Vertauschen von Spalten auf folgende Dreiecksform bringen:*

$$A' := \left(\begin{array}{cccccc|ccc} b_{11} & \ldots & & & b_{1r} & & & \ldots & \\ 0 & b_{22} & \ldots & & b_{2r} & & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & & & & & \\ \ldots & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & b_{rr} & & & \ldots & \\ \hline 0 & 0 & \ldots & & 0 & & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & & & 0 & & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \qquad \textit{mit } b_{ii} \neq 0 \;,\; \forall i \;.$$

Beweis. Bei der Ausgangsmatrix $A = (a_{ij})$ vertauscht man nötigenfalls Zeilen bzw. Spalten, um an der Stelle $i = j = 1$ ein Element $b_{11} \neq 0$ zu erhalten. Dann addiert man geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den anderen, um die Elemente, die unterhalb von b_{11} liegen, zu Null zu machen. Anschließend vertauscht man, wenn nötig, nachfolgende Zeilen bzw. Spalten mit der zweiten, so dass an die Stelle $i = j = 2$ ein Element $b_{22} \neq 0$ kommt. Danach lässt man durch Addition von Vielfachen der zweiten Zeile zu den nachfolgenden die Elemente unter b_{22} verschwinden, usw. $\square$

Das im letzten Beweis benutzte Verfahren nennt man den **Gaußschen Algorithmus**. Er wird auch eine wichtige Rolle bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen spielen.

Beweis von Satz 3.5.1. Nach 3.5.3 und 3.5.4 genügt es, Matrizen der Form A' aus Lemma 3.5.4 zu betrachten. Wir bezeichnen die Matrix oberhalb der waagerechten Linie von A' mit B. Aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A' fallen ihr Zeilen- und ihr Spaltenrang mit den entsprechenden Rängen von B zusammen. (Erläutern Sie dies genauer!) Es reicht deshalb zu zeigen, dass der Zeilenrang der Matrix

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1r} & \ldots \\ 0 & b_{22} & & & \\ \ldots & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & b_{rr} & \ldots \end{array}\right)$$

gleich ihrem Spaltenrang ist. Da die b_{ii} von Null verschieden sind, können wir auf die lineare Unabhängigkeit der r Zeilenvektoren und die der ersten r Spaltenvektoren von B schließen. Es bleibt zu beweisen, dass der Spaltenrang von B gleich r ist. Dazu zeigen wir die Darstellbarkeit jedes Spaltenvektors $\bar{\mu}$ rechts von der senkrechten Linie von B als Linearkombination der ersten r Spaltenvektoren. Gesucht sind also Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ der Gleichung $\bar{\mu} = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_j \bar{b}_j$, welche in Koordinatenschreibweise lautet:

$$\begin{array}{lcr}
\mu_1 & = & \lambda_1 b_{11} + \lambda_2 b_{12} + \ldots + \lambda_r b_{1r} \\
\mu_1 & = & \lambda_2 b_{22} + \ldots + \lambda_r b_{2r} \\
\vdots & & \\
\mu_1 & = & \lambda_r b_{rr}\,.
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich rekursiv lösen: $\lambda_r = b_{rr}^{-1}\, \mu_r$,
$\lambda_k = b_{kk}^{-1} \left(\mu_k - \sum\limits_{j=k+1}^{r} \lambda_j\, b_{kj} \right)$. □

3.6 Ein Invertierungsverfahren für quadratische Matrizen

Ähnlich wie beim Gaußschen Algorithmus kann man die elementaren Zeilenoperationen zum Invertieren einer Matrix A benutzen. Die theoretische Grundlage für das Verfahren wird durch folgendes gegeben.

3.6.1 Satz. *Es sei $AB = C$ ein Matrizenprodukt. Wenn die Matrizen A und C durch die gleichen elementaren Zeilenoperationen in A' bzw. C' überführt werden, so gilt $A'B = C'$.*

Beweis. Die Elemente a_{ij}, b_{jk} und c_{ik} der Matrizen A, B bzw. C sind durch die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = c_{ik}$$

verbunden. Wenn wir in A und C die gleichen Zeilen vertauschen, ergeben sich die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} b_{jk} = c'_{ik}$$

durch Änderung der Reihenfolge. Beim Addieren des Vielfachen der l–ten Zeile zur i–ten Zeile von A und von C müssen wir nur zu den Gleichungen des ersten Systems mit vorderem Index i dieselben Vielfachen der Gleichungen mit vorderem Index l dazu zählen, um auf das zweite Gleichungssystem zu kommen. □

Sei nun $A \in M(n \times n)$ eine invertierbare Matrix. Der Rang von A muss dann gleich n sein. (Warum?) Wir setzen in Satz 3.6.1 $B := A^{-1}$ und deshalb $C = I$. Ähnlich wie beim Gaußschen Algorithmus kann man die Matrix A durch elementare Zeilenoperationen zur Einheitsmatrix $I =: A'$ umformen. Die Matrix C soll bei diesen Operationen in C' übergehen. Nach Satz 3.6.1 gilt aber $C' = A'B = IA^{-1} = A^{-1}$. Praktisch geht man deshalb nach folgendem Schema vor: Man schreibt neben die Matrix A die $n \times n$–Einheitsmatrix I und formt die neue $n \times 2n$–Matrix solange durch elementare Zeilenoperationen um, bis aus A die Einheitsmatrix entsteht. Gleichzeitig erhält man daneben die Matrix A^{-1}.

Die letzten beiden Abschnitte finden in der Theorie linearer Gleichungssysteme eine wichtige Anwendung.