Prof. Dr. Oksana Yakimova
Dipl.-Math. Rico Besteher

4.5.2016

Algebra/Geometrie II, Übungsblatt 4

Bitte geben Sie die Lösungen in Ihrer Übungsgruppe entweder am 11.5. oder am 13.5. ab. Jede Aufgabe ist 4 Punkte wert.

Aufgabe 1. Sei $V = \mathbb{C}^3$, $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subset V$ die lineare Hülle von v_1 und v_2 und H die hermitesche Form auf V, die durch die Matrix A gegeben ist. Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U_H^\perp$, falls

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 0 & -2 \\ 1+i & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $v_1 = (i, 1, -1)$, $v_2 = (1-2i, -i, 3)$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2+i & -i \\ -2-i & 2 & -1+i \\ i & -1-i & -1 \end{pmatrix}$, $v_1 = (-i+1, 2, 0)$, $v_2 = (-1+3i, -3i, 2)$.

Aufgabe 2. Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass $\det(A) \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei V ein euklidischer (oder hermitescher) Raum, $v \in V$ ein Vektor und $U \subseteq V$ ein Unterraum, der durch ein LGS gegeben ist (als die Lösungsmenge). Berechnen Sie den Abstand $d(v, U)$ in den folgenden Fällen.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $v = (3, 3, -4, 2)$, LGS: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

(b) $V = \mathbb{R}^5$, $v = (3, 3, -1, 1, -1)$, LGS: $x_1 - 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$.

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $v = (1, -1, i)$, LGS: $x_1 + (5+4i)x_2 - ix_3 = 0$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Kantenlängen und die Winkeln für das Dreieck ABC in $\mathbb{R}^5$ mit $A = (2, 4, 2, 4, 2)$, $B = (6, 4, 4, 4, 6)$, $C = (5, 7, 5, 7, 2)$.