2 Lineare Räume

2.1 Gruppen und Körper

Um zu dem oben angedeuteten Vektorraumbegriff zu kommen, benötigen wir zwei algebraische Strukturen: die Gruppen und Körper. Hier werden sie nur die Rolle eines Hilfsmittels für die lineare Algebra spielen. Sie haben jedoch eine sehr große eigenständige Bedeutung für die gesamte höhere Algebra.

Ausgangspunkt für die Entwicklung der Gruppentheorie waren die Zahlbereiche mit ihren Additionseigenschaften. Anstelle der Addition setzt man allgemein eine abstrakte Verknüpfung, die im jeweiligen Beispiel konkretisiert wird.

Definition. Eine Menge G heißt **Gruppe**, falls auf ihr eine binäre Operation $\circ$ (d.h. eine Verknüpfung von je zwei Elementen zu einem neuen Element aus G) gegeben ist mit folgenden drei Eigenschaften:

(GI) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad , \quad a, b, c \in G$
(**Assoziativität**)

(GII) $\exists e \in G$ mit $a \circ e = a$ und $e \circ a = a \quad , \quad a \in G$
(**Existenz eines neutralen Elements**, auch **Einselement** genannt)

(GIII) $\forall a \in G \;\; \exists u \in G$ mit $a \circ u = e$ und $u \circ a = e$
(**Existenz eines Umkehrelementes**).

Unmittelbar aus der Definition folgt:

2.1.1 Satz. *Einselement und Umkehrelement sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei e' ein weiteres Einselement. Dann gilt

$$e' = e \circ e' = e \; ,$$

wobei (GII) zunächst linksseitig auf die Eins e und dann rechtsseitig auf die Eins e' angewendet wurde, d.h. $e' = e$.
Unter Benutzung von (GI) wird damit in (GIII) für ein weiteres Umkehrelement u' zu a

$$u' = u' \circ e = u' \circ (a \circ u) = (u' \circ a) \circ u = e \circ u = u \; ,$$

d.h. $u' = u$. $\square$

Bezeichnung. Für das Umkehrelement zu a schreiben wir wegen seiner Eindeutigkeit nunmehr im allgemeinen a^{-1}.

Bemerkung. Die Gruppenaxiome sind in der obigen Form eigentlich überbestimmt. Es genügt nämlich, die Existenz eines linken Einselementes und eines Linksinversen zu fordern, d.h. (GI)–(GIII) sind äquivalent zu:

(GI) wie oben

(GII^l) $\exists e \in G$ mit $e \circ a = a \quad , \quad a \in G$
(Existenz eines linken Einselements)

(GIII^l) $\forall a \in G \;\; \exists u \in G$ mit $u \circ a = e$
(Existenz eines Linksinversen)

Beweis. Zu einem linken Umkehrelement u von a existiert dann ebenfalls ein Linksinverses u', d.h. $u' \circ u = e$. Damit erhalten wir aus (GI), (GII^l) und (GIII^l)

$$\begin{aligned} a \circ u &= e \circ (a \circ u) = (u' \circ u) \circ (a \circ u) = u' \circ \big((u \circ a) \circ u\big) \\ &= u' \circ (e \circ u) = u' \circ u = e \end{aligned}$$

d.h. $a \circ u = e$ (u ist auch Rechtsinverses zu a) und somit (GIII).
(GII) ergibt sich mit

$$a \circ e = a \circ (u \circ a) = (a \circ u) \circ a = e \circ a = a$$

d.h. e ist auch rechtes Einselement. □

Die Rollen von “rechts” und “links” können wir dabei überall vertauschen. Ihre Unterscheidung ist aber notwendig, da wir von der Verknüpfung $\circ$ bisher nicht gefordert haben, dass sie kommutativ ist.

2.1.2 Aufgabe.

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(3) $\forall a, b \in G \quad \exists!\, x \in G$ mit $a \circ x = b$ ($\exists!\, y \in G$ mit $y \circ a = b$).
Geben Sie x (bzw. y) explizit an! •

Definition. Eine Gruppe G heißt **kommutativ** (oder **abelsch**), falls

$$a \circ b = b \circ a \quad , \quad a, b \in G.$$

Bemerkung. Die Gruppenoperation $\circ$ lässt sich auf endlich viele Elemente ausdehnen: Wir definieren induktiv für $a_1, a_2, \ldots \in G$

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n := (a_1 \circ \ldots \circ a_{n-1}) \circ a_n \, .$$

Wegen der Assoziativität kann man dann die Klammern beliebig setzen. Für kommutative Gruppen sind die a_i auch beliebig vertauschbar.

Beispiele für Gruppen.

1. $G := \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition + der reellen Zahlen als Verknüpfung. Die Zahl 0 spielt dabei die Rolle des neutralen Elementes e, und $-r$ ist das Umkehrelement zu $r \in \mathbb{R}$.
   Welche anderen Zahlbereiche bilden bzgl. der Addition eine Gruppe? •
   Für die endliche Addition schreibt man hier auch kurz
   $$a_1 + \ldots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_n \, .$$
2. $G := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfung. Hier fällt die reelle Zahl 1 mit dem Einselement e zusammen, und $\frac{1}{r}$ ist das Umkehrelement zu $r \in \mathbb{R}$.
   Welche Zahlbereiche ohne die 0 besitzen die Gruppeneigenschaft bzgl. der Multiplikation? •
   Man setzt $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n =: \prod_{i=1}^{n} a_i$.
3. $G :=$ Menge der geometrischen Vektoren in der Ebene mit der Vektoraddition als Verknüpfung. •
   Wieder schreibt man $\vec{v_1} + \ldots + \vec{v_n} =: \sum_{i=1}^{n} \vec{v_i}$.

Alle bisher genannten Gruppen sind abelsch.
Im Folgenden lernen wir ein Beispiel einer nicht kommutativen Gruppe ausführlich kennen, das eine wichtige Rolle bei der Behandlung von Determinanten spielen wird, nämlich die Permutationsgruppe der Ordnung $n \geq 3$. Zunächst sind wir jedoch etwas allgemeiner und betrachten die **Abbildungsgruppen**:

4. $G := S(X)$, **Menge der Bijektionen** eines Raumes X mit der Abbildungskomposition $\circ$ als Verknüpfung. Die Rolle des neutralen Elements e spielt hier die identische Abbildung Id_X, und das inverse Element zu $f \in G$ ist die Umkehrabbildung f^{-1}. $S(X)$ heißt auch **symmetrische Gruppe** von X.

Aufgabe. Wenn X mehr als 2 Elemente enthält, so ist $S(X)$ nicht kommutativ. •

Wir untersuchen nun den oben erwähnten Spezialfall.

5. <u>Permutationsgruppen</u>

Definition. Für $X := \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt $S_n := S(X)$ **Permutationsgruppe** der Ordnung n.

Aufgabe. S_n besteht aus $n!$ Elementen. •

Permutationen $\pi \in S_n$ beschreibt man auch durch ihre Wertetabellen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Die speziellen Permutationen

$$(i\,j) := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix},$$

bei denen das i–te mit dem j–ten Element vertauscht wird, nennt man **Transpositionen** (oder **Vertauschungen**).
Offenbar läßt sich jede Permutation durch Komposition von endlich vielen Transpositionen erzeugen.

Definition. Die **Charakteristik** einer Permutation π ist die Anzahl $\chi(\pi)$ ihrer "Inversionen", d.h.

$$\chi(\pi) := \text{ Anzahl } \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n,\ \pi(i) > \pi(j)\},$$

und

$$sgn\,\pi := (-1)^{\chi(\pi)}$$

heißt **Vorzeichen** (oder **Signum**) von π.

2.1.3 Satz.

(i) *Jede Transposition $(i\,j)$ lässt sich als Komposition einer ungeraden Zahl von Transpositionen benachbarter Elemente darstellen.*

(ii) $sgn(i\,j) \circ \pi = -sgn\,\pi\,, \quad \pi \in S_n$.

(iii) $sgn(\sigma \circ \pi) = sgn\,\sigma \cdot sgn\,\pi\,, \quad \pi,\, \sigma \in S_n$.

Beweis. (i) Sei r die Anzahl der Elemente zwischen i und j in der natürlichen Reihenfolge. Dann befördert man mit $r+1$ Nachbarschaftstranspositionen das Element i auf den Platz von j und dann mit r solchen Vertauschungen j auf den Ausgangsplatz von i. Folglich erhält man die Transposition $(i\ j)$ durch Komposition von $2r+1$ Vertauschungen benachbarter Elemente.

(ii) Für den Fall einer Nachbarschaftstransposition ändert sich die Zahl der Inversionen um 1, d.h.$\chi((i\ i+1) \circ \pi) = \chi(\pi) \pm 1$ und $sgn((i\ i+1) \circ \pi) = -sgn\,\pi$. Wegen (i) folgt die Behauptung durch Iteration für alle Transpositionen.

(iii) Als Spezialfall von (ii) für die Identität $\pi = Id_{S_n}$ ergibt sich $sgn(i\ j) = -1$. Da sich jede Permutation als Komposition von Transpositionen schreiben lässt, ist mit (ii) auch (iii) bewiesen.

□

Bemerkung. Die Gleichung (iii) widerspiegelt eine interessante algebraische Eigenschaft des Vorzeichens, aufgefasst als Abbildung $sgn : S_n \to \{1, -1\}$. Die Bildmenge $\{1, -1\}$, versehen mit der gewöhnlichen Multiplikation von Zahlen, kann nämlich auch als Gruppe interpretiert werden. Dann besagt (iii), dass die Gruppenoperation $\circ$ von S_n mit Hilfe des Signums in die Gruppenoperation $\cdot$ (mal) von $\{1, -1\}$ überführt wird. Eine solche Abbildung nennt man auch einen **Gruppenhomomorphismus**.

Nach diesem kleinen Ausflug kehren wir wieder zu den für die lineare Algebra wichtigen Grundstrukturen zurück. Wir betrachten im folgenden kommutative Gruppen, bei denen wir die Verknüpfung als Addition $+$ schreiben und für die noch eine weitere binäre Operation definiert ist, welche wir Multiplikation nennen.

Definition. Ein **Körper** K ist eine Menge mit zwei binären Operationen $+$ (**Addition**) und $\cdot$ (**Multiplikation**), die folgenden Bedingungen genügen:

(KI) K ist bzgl. $+$ eine **kommutative Gruppe**. (Für das neutrale Element schreibt man 0 (Null), und $-\lambda$ bezeichnet das Umkehrelement zu $\lambda \in K$.)

(KII) $K \setminus \{0\}$ ist bzgl. $\cdot$ eine **kommutative Gruppe**. (Das neutrale Element heißt 1 (Eins), und λ^{-1} bezeichnet das Umkehrelement zu λ. Das Multiplikationszeichen $\cdot$ wird oft weggelassen.)

(KIII) $\lambda \cdot (\mu + \nu) = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \nu \quad , \quad \lambda, \mu, \nu \in K$
(**Distributivität**).

Wir schreiben

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i := \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$$

für die endliche Addition und

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i := \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k$$

für die endliche Multiplikation sowie

$$\lambda^k := \prod_{i=1}^{k} \lambda \,.$$

Aus den Körperaxiomen können wir unmittelbar folgendes schließen.

2.1.4 Lemma. *Für alle $\lambda \in K$ gilt:*

(1) $0 \cdot \lambda = 0$,

(2) $(-1) \cdot \lambda = -\lambda$.

Beweis. (1) Wir setzen $\mu := 0 \cdot \mu$ und erhalten

$$\mu + \mu = 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda = (0 + 0) \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = \mu,$$

also $\mu + \mu = \mu$ und deshalb

$$(\mu + \mu) + (-\mu) = \mu + (-\mu).$$

Die rechte Seite ergibt 0 und die linke

$$\mu + (\mu + (-\mu)) = \mu + 0 = \mu.$$

Also ist $\mu = 0$.

(2) Ähnlich gilt

$$\lambda + (-1) \cdot \lambda = 1 \cdot \lambda + (-1) \cdot \lambda = (1 + (-1)) \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0$$

Deshalb ist $(-1) \cdot \lambda$ das entgegengesetzte Element zu λ. □

Klassische Beispiele für Körper sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Einen besonders einfachen Körper liefert die binäre Menge $\{0, 1\}$ mit der in der Logik verwendeten Addition und Multiplikation (s. Einführung).

Überprüfen Sie dafür die Körperaxiome (KI)–(KIII). •

Ein weiteres wichtiges Beispiel erhalten wir durch die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu den **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$. Diese sind wie folgt definiert:

($\mathbb{C}$I) $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

($\mathbb{C}$II) $\mathbb{C}$ enthält $\mathbb{R}$ als Teilkörper, d.h. die Einschränkung von Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$ auf die Teilmenge $\mathbb{R}$ fällt mit den entsprechenden Operationen auf den reellen Zahlen zusammen.

($\mathbb{C}$III) Es gibt eine komplexe Zahl i mit $i^2 := i \cdot i = -1$.

($\mathbb{C}$IV) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in der Form

$$z = a + bi \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}$$

darstellen. ($a =: \operatorname{Re} z$ heißt **Realteil** und $b =: \operatorname{Im} z$ **Imaginärteil** von z.)

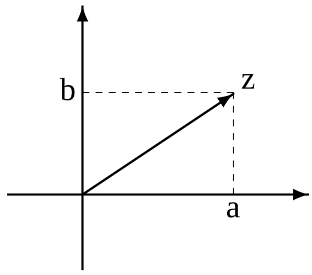
Eigenschaften der komplexen Zahlen

1. Die reellen Zahlen 0 und 1 sind auch Null– bzw. Einselement von $\mathbb{C}$.

2. Bei der Summierung zweier komplexer Zahlen addieren sich Realteile und Imaginärteile:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \, .$$

Die Zuordnung $z \mapsto (a, b)$ kann man deshalb als Koordinatendarstellung auffassen und z als Vektor in der Ebene interpretieren:



Dabei bezeichnet man die horizontale Achse als **reelle Achse** und die vertikale als **imaginäre Achse**.

3. Für das Produkt $z = z_1 \cdot z_2$ von zwei komplexen Zahlen gilt

$$a + ib = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad \text{d.h.}$$

$$a = a_1 a_2 - b_1 b_2 \text{ und } b = a_1 b_2 + a_2 b_1 .$$

4. Die zu $z = a + ib$ **konjugierte** komplexe Zahl ist definiert durch

$$\bar{z} := a - ib \, .$$

(Zeichnen sie $\bar{z}$ in der Koordinatendarstellung von z.) Dann gilt
$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + ib - ib - i^2 b^2 = a^2 + b^2$,   d.h.

$$z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \, .$$

5. Die reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$

heißt **Betrag** von z. Im Falle einer reellen Zahl z stimmt sie mit dem alten Betrag überein. Ihre geometrische Interpretation in der Koordinatendarstellung ist die **Länge** des “Vektors” z. Der Betrag hat folgende Eigenschaften:

$|z| \geq 0 \, , \; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \, , \; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ sowie $|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$. •

6. Die Inversenbildung bzgl. der Multiplikation kann mit den obigen Begriffen wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad , \quad z \neq 0.$$

(Wie bei den reellen Zahlen sind $\frac{1}{z}$ und z^{-1} äquivalente Schreibweisen für das Umkehrelement von z.)

Bemerkung. Durch die Darstellung $z = a + ib$ gewinnt man eine eineindeutige Zuordnung $z \mapsto (a, b)$ von $\mathbb{C}$ auf die Menge der reellen Zahlenpaare $\mathbb{R}^2$. Wenn wir diese mit der obigen Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

und Multiplikation

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

versehen, so kann man dafür leicht die Körperaxiome überprüfen. Durch die umgekehrte Zuordnung $(a, b) \mapsto z = a + ib$ erhalten wir damit den Nachweis der Existenz von $\mathbb{C}$. (Oft werden die komplexen Zahlen auch so eingeführt.)

2.2 Der Begriff des Vektorraumes

Wir kommen jetzt zum wichtigsten Grundobjekt der linearen Algebra.

Definition. Ein **Vektorraum** (oder auch **linearer Raum**) V über einem Körper K ist eine Menge von Elementen (**Vektoren**), auf der eine **Addition** (+) von Vektoren und eine Multiplikation von Vektoren mit beliebigen Elementen von K (**skalare Multiplikation**) erklärt sind mit folgenden Eigenschaften:

(VI) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $\mathcal{O}$ (**Nullvektor**).

(VII) Für die Multiplikation mit Elementen des Körpers gilt:

(1) $1v = v\ ,\ v \in V$, wobei 1 das Einselement des Körpers ist.

(2) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)\ ,\ \lambda, \mu \in K\ ,\ v \in V\ ,$
(**Assoziativgesetz**)

(3) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v\ ,\ \lambda, \mu \in K\ ,\ u, v \in V$
(**Distributivgesetze**)

Beispiele.

1. Siehe Einführung.

2. Jeder Körper ist ein Vektorraum über sich selbst.

3. $V = \{\mathcal{O}\}$ trivialer Raum.

4. $V = K^n := \left\{ \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_i \in K \right\}$

   (**Raum der Spaltenvektoren über** K)

   und Vektoraddition
$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} := \begin{pmatrix} \lambda_1+\mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n+\mu_n \end{pmatrix}$$
   und skalarer Multiplikation
$$\nu \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \nu\lambda_1 \\ \vdots \\ \nu\lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad \nu \in K.$$
   Analog: $K^n := \{\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \in K\}$ Raum der Zeilenvektoren über K.
   Für $K := R$ spricht man von reellen Spalten- bzw. Zeilenvektoren.

5. Die Menge $C(\mathbb{R})$ aller stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Addition

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)\,,\ f, g \in C(\mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)\,,\ f \in C(\mathbb{R})\,,\ \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe. Überprüfen Sie jeweils die Vektorraum–Axiome. (Insbesondere muß bei 4. gezeigt werden, dass die Funktionen $f+g$ und λf ebenfalls stetig sind.) •

2.2.1 Differenz von Vektoren

Mit Hilfe des Umkehrelements zu $v \in V$ bezüglich der Addition (wir schreiben hierfür wieder $-v$ und sprechen auch vom entgegengesetzten Vektor) lässt sich eine Vektorsubtraktion einführen:

$$u - v := u + (-v)\,, \quad u, v \in V\,.$$

(Analog sei

$$\lambda - \mu := \lambda + (-\mu)\,, \quad \lambda, \mu \in K\,.)$$

Dann gelten die Distributivgesetze

(1)
$$\begin{aligned} \lambda(u-v) &= \lambda u - \lambda v\,, \quad u, v \in K\,,\ \lambda \in K \\ (\lambda-\mu)v &= \lambda v - \mu v\,, \quad v \in K\,,\ \lambda, \mu \in K. \end{aligned}$$

Beweis. Aus (VII) (3) folgt $\lambda(u-v)+\lambda v = \lambda((u-v)+v) = \lambda(u+((-v)+v)) = \lambda u$. Die Addition von $-(\lambda v)$ auf beiden Seiten ergibt $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$.
Die zweite Gleichung zeigt man analog. □

(2) $$\forall(\lambda \in K \setminus \{0\}\,,\ u, v \in V)\ \exists!\, x \in V \text{ mit } \lambda x + u = v$$

Geben Sie den unbekannten Vektor x explizit an. •

2.2.2 Eigenschaften der skalaren Multiplikation

(1) $0v = \mathcal{O}\,,\ v \in V$
($\textit{wobei }0 \in K,\ \mathcal{O} \in V$ *die neutralen Elemente der jeweiligen Addition sind*).

Beweis. Wir setzen zunächst $u := 0v$ und erhalten wegen der Distributivität $u + u = 0v + 0v = 0v = u$, d.h. $u + u = u$. Die Subtraktion von u auf beiden Seiten dieser Gleichung liefert $u = \mathcal{O}$. □

(2) $$\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}\,, \quad \lambda \in K.$$

Der Beweis ist ähnlich zum vorhergehenden. •

(3) $$v \in V \setminus \{\mathcal{O}\}\,, \quad \lambda, \mu \in K,\ \lambda \neq \mu \ \Rightarrow\ \lambda v \neq \mu v$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\lambda v = \mu v$, d.h. $\mathcal{O} = (\lambda - \mu)v$. Da $\lambda - \mu \neq 0$, existiert das Umkehrelement $(\lambda - \mu)^{-1}$. Wir multiplizieren beide Seiten der letzten Gleichung damit und erhalten $\mathcal{O} = 1v = v$, d.h. einen Widerspruch zur Annahme $v \neq \mathcal{O}$. □

Für den Fall, dass K unendlich viele Elemente enthält und V nicht nur aus dem Nullvektor besteht, können wir damit auf unendlich viele Elemente von V schließen.

(4) $$(-\lambda)v = -\lambda v\,, \quad v \in V\,, \lambda \in K.$$ •

2.2.3 Endliche Summen

Für $v_1, \ldots, v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir wieder

$$\sum_{i=1}^{n} v_i := v_1 + \ldots + v_n\,.$$

Die Distributivität der Vektoroperationen überträgt sich unmittelbar auf diese endliche Addition (die wieder assoziativ und kommutativ ist).

2.3 Linearkombination und lineare Unabhängigkeit

Die unter 2.2.3 genannten Beziehungen lassen folgende Begriffsbildung zu:

Definition. Ein $v \in V$ ist **Linearkombination** von $a_1, \ldots, a_n \in V$, falls Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des zugehörigen Körpers K existieren derart, dass

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\,.$$

Die Linearkombination $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ heißt **nichttrivial**, falls eines der λ_i verschieden von 0 ist.
Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in V$ heißen **linear abhängig**, falls eine nichttriviale Linearkombination existiert mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \mathcal{O}$. Ansonsten heißen sie **linear unabhängig**.

Beispiel. Angewendet auf die Menge der geometrischen Vektoren in der Ebene, bedeutet dies folgende Kette von äquivalenten Aussagen: $\vec{a}, \vec{b}$ sind *linear abhängig*

$$\Leftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R} \text{ mit } r \neq 0 \quad (\text{oder } s \neq 0), \text{ so dass } r\vec{a} + s\vec{b} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} = (-r^{-1}s)\vec{b} \quad \text{für gewisse } r, s \in \mathbb{R} \text{ mit } r \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear,* d.h., ein Vektor ist ein Vielfaches des anderen.

Welche geometrische Deutung gibt es für die lineare Abhängigkeit von drei geometrischen Vektoren im Raum? •

Folgerungen.

2.3.1
Wenn ein endliches Vektorsystem ein linear abhängiges Teilsystem enthält, so ist es selbst linear abhängig.
Alle Teilsysteme von endlichen linear unabhängigen Vektorsystemen sind linear unabhängig.

2.3.2
$a_1, \ldots, a_n \in V$ *sind genau dann linear abhängig, wenn eines der* a_j *als Linearkombination aller übrigen darstellbar ist.*

Beweis. $a_1, \ldots, a_n$ sind linear abhängig
$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_j \neq 0$ für ein j, so dass $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \mathcal{O}$
$\Leftrightarrow a_j = \lambda_j^{-1}(-\sum\limits_{i \neq j} \lambda_i a_i) = \sum\limits_{i \neq j}(-\lambda_j^{-1}\lambda_i)a_i = \sum\limits_{i \neq j} \mu_i a_i$ für gewisse $\mu_i \in K$
(wir setzen $\mu_i := -\lambda_j^{-1}\lambda_i$ und die Summation läuft über alle i verschieden von j)
$\Leftrightarrow a_j$ ist Linearkombination der restlichen a_i. □

2.3.3
Wenn $a_1, \ldots, a_n$ *linear unabhängig sind und* $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ *linear abhängig , so folgt die Darstellbarkeit* $a_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i a_i$ *für gewisse* $\mu_i \in K$.

Beweis. Sei $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = \mathcal{O}$ für eine nichttriviale Linearkombination. Dann ist $\lambda_{n+1} \neq 0$, da ansonsten $a_1, \ldots, a_n$ linear abhängig wären. Demzufolge gilt:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda_{n+1}^{-1}\lambda_i)a_i.$$

Mit der Bezeichnung $\mu_i = -\lambda_{n+1}^{-1}\lambda_i$ ergibt sich die Behauptung. □

Wir kommen nun zu einer natürlichen Verallgemeinerung der Begriffsbildung:
Eine Zusammenfassung S von Elementen von V, wo jeder Vektor mehrfach vorkommen kann, wollen wir **System** von Vektoren aus V nennen. (Wir haben oben bereits von endlichen Vektorsystemen gesprochen.)

Definition. S heißt **linear abhängiges System**, falls es ein endliches Teilsystem von linear abhängigen Vektoren enthält, und ansonsten **linear unabhängiges System**.

Demnach ist S genau dann linear unabhängig, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. (Insbesondere ist S dann eine Teil**menge** von V, d.h., kein Vektor kommt mehrfach vor.)

2.4 Basis, Koordinaten, Austauschsatz und Dimension

Für geometrische Vektoren in der Ebene und im Raum wurden die Koordinatenvektoren mit Hilfe der Zerlegung nach einer "Basis" eingeführt. In unseren abstrakten Vektorräumen V benutzen wir folgenden allgemeinen Begriff:

Definition. $B \subset V$ heißt **Basis** von V, falls B linear unabhängig ist und jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination von Elementen von B dargestellt werden kann.

Unmittelbar aus der Definition ergibt sich folgende **Charakterisierung** von Basen:

2.4.1

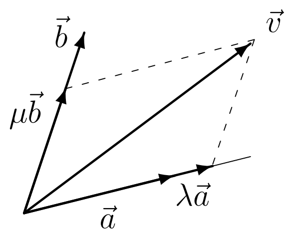
Eine Teilmenge $B \subset V$ ist genau dann Basis, wenn sie linear unabhängig und für jedes $v \in V$ das System $\{B, v\}$ linear abhängig ist.

Beweis. Aus der Basiseigenschaft erhalten wir für $v \in V$ die Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und gewisse $b_i \in B,\ \lambda_i \in K$. Deshalb bilden $\{b_1, \dots, b_n, v\}$ ein linear abhängiges System. Dass die im Kriterium formulierte Bedingung auch hinreichend ist, schließt man aus 2.3.3. $\square$

Beispiel. Wir erinnern uns, dass zwei geometrische Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ in der Ebene genau dann linear unabhängig sind, wenn sie nicht kollinear sind. Jeder andere Vektor $\vec{v}$ lässt sich nach ihnen zerlegen:



$$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

Demnach bildet jedes Paar nichtkollinearer Vektoren eine Basis, und jede Basis für die geometrischen Vektoren der Ebene hat diese Gestalt.

Aufgabe. Formulieren Sie das entsprechende Resultat für den Raum. •

2.4.2 Satz. *In jedem Vektorraum existiert eine Basis.*

Diese Aussage ist von grundlegender Bedeutung für alles weitere. Ihr Beweis stützt sich auf das sogenannte Zornsche Lemma, welches auf die axiomatische Begründung der Mathematik zurückgeht (Auswahlaxiom). Da uns hier die entsprechenden Hilfsmittel nicht zur Verfügung stehen, wollen wir auf die Literatur verweisen.

2.4.3. Eindeutigkeit der Basisdarstellung von Vektoren

Die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von Basisvektoren ist eindeutig.

Beweis. Sei $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = v = \sum\limits_{i=1}^{k+l} \mu_i b_i$ für gewisse $b_i \in B,\ \lambda_i,\ \mu_i \in K$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} (\mu_i - \lambda_i) b_i + \sum_{i=k+1}^{k+l} \mu_i b_i = \mathcal{O}.$$

Da die $b_1, \ldots, b_{k+l}$ linear unabhängig sind, erhalten wir $\mu_i = \lambda_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\mu_i = 0$ für $i > k$. D.h., die Koeffizienten in den beiden Basisdarstellungen stimmen überein. □

Definition. Die Koeffizienten $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ in der Darstellung $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ heißen **Koordinaten** des Vektors v bzgl. der Basis B.

Um die Struktur linearer Räume besser verstehen zu können, werden wir nun ein wichtiges Hilfsmittel herleiten.

2.4.4. Austauschsatz (Steinitz)

Sei B eine Basis. Dann gibt es für jedes System $\{a_1, \ldots, a_k\}$ linear unabhängiger Vektoren Basiselemente $b_1, \ldots, b_k$ derart, dass $(B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}) \cup \{a_1, \ldots, a_k\}$ wieder eine Basis bildet.

Beweis. Wir benutzen die vollständige Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivialerweise richtig. (Es wird nichts ausgetauscht.) Für $k = l$ sei nun $(B \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}) \cup \{a_1, \ldots, a_l\} =: B'$ eine Basis.
Wir suchen einen Vektor $b_{l+1} \in B$, der sich durch a_{l+1} ersetzen lässt. Zunächst gilt die Darstellung

$$a_{l+1} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i + \sum_{i=l+1}^{l+m} \mu_i b_i \tag{1}$$

für gewisse $b_i \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}$. Eines der μ_i muss verschieden von 0 sein, da sonst die $a_1, \ldots, a_{l+1}$ linear abhängig wären. Durch Umnummerierung können wir erreichen, dass dies μ_{l+1} ist. Wir zeigen, dass dann b_{l+1} den gewünschten Bedingungen genügt. Zunächst stellen wir (1) nach b_{l+1} um:

$$b_{l+1} = \sum_{i=1}^{l} (-\mu_{l+1}^{-1} \lambda_i) a_i + \mu_{l+1}^{-1} a_{l+1} + \sum_{i=l+2}^{l+m} (-\mu_{l+1}^{-1} \mu_i) b_i. \tag{2}$$

Sei $B'' = (B \setminus \{b_1, \ldots, b_{l+1}\}) \cup \{a_1, \ldots, a_{l+1}\}$.

B'' ist *linear unabhängig*: Falls nämlich

(3) $$\sum_{i=1}^{l+1} \nu_i a_i + \sum_{i=l+2}^{l+p} \nu_i b_i = \mathcal{O}$$

für gewisse $b_i \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_{l+1}\}$, so erhalten wir mit (1)

$$\sum_{i=1}^{l} \nu_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \nu_{l+1} \lambda_i a_i + \sum_{i=l+1}^{l+m} \nu_{l+1} \mu_i b_i + \sum_{i=l+2}^{l+p} \nu_i b_i = \mathcal{O}$$

und nach Zusammenfassen der Koeffizienten bei gleichen Vektoren

$$\sum_{i=1}^{l} (\nu_i + \nu_{l+1} \lambda_i) a_i + \nu_{l+1} \mu_{l+1} b_{l+1} + \sum_{i=l+2}^{l+\max(m,p)} \omega_i b_i = \mathcal{O}$$

für gewisse $\omega_i \in K$. Da B' Basis ist, folgt $\nu_i + \nu_{l+1}\lambda_i = 0\,,\, i = 1, \ldots, l$, und $\nu_{l+1}\mu_{l+1} = 0$. Nach Konstruktion ist $\mu_{l+1} \neq 0$, d.h. $\nu_{l+1} = 0$ und deshalb auch $\nu_i = 0\,,\, i = 1, \ldots, l$. Demnach verschwindet in (3) die erste Summe. Die lineare Unabhängigkeit der b_i ergibt nun $\nu_i = 0$ für $i = l+2, \ldots, l+p$, d.h. alle Koeffizienten in (3) sind 0.

Für jedes $v \in V$ können wir eine Darstellung nach der Basis B' angeben:

$$v = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + \sum_{i=l+1}^{l+q} \alpha_i b_i\,.$$

Die Substitution von b_{l+1} durch den Ausdruck in (2) führt zu

$$\begin{aligned} v = &\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{l} \alpha_{l+1}(-\mu_{l+1}^{-1}\lambda_i) a_i + \alpha_l \mu_{l+1}^{-1} a_{l+1} \\ &+ \sum_{i=l+2}^{l+m} \alpha_{l+1}(-\mu_{l+1}^{-1}\mu_i) b_i + \sum_{i=l+2}^{l+q} \alpha_i b_i\,. \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung der Koeffizienten bei gleichen Vektoren liefert dies eine *Darstellung* von v nach B''.
Wir haben somit die Basiseigenschaften für B'' gezeigt. $\square$

2.4.5. Folgerung.

(i) *Jedes System $\{a_1, \ldots, a_k\}$ von linear unabhängigen Vektoren in V lässt sich zu einer Basis ergänzen (**Basisergänzungssatz**).*

(ii) *Sind $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und B Basen von V, so ist die Anzahl der Elemente von B gleich n.*

Beweis. (i) **Aufgabe.** •

(ii) Nach dem Austauschsatz existieren Elemente $b_1, \ldots, b_n$ von B, so dass $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup (B \setminus \{b_1, \ldots, b_n\})$ ebenfalls eine Basis ist . Aus der Charakterisierung 2.4.1 einer Basis schließen wir auf $B \setminus \{b_1 \ldots, b_n\} = \emptyset$, da das obenstehende System sonst linear abhängig wäre.

□

Diese Eigenschaft rechtfertigt den folgenden *Dimensionsbegriff*:

Definition. Ein Vektorraum V heißt **n–dimensional** $(\dim V = n)$, falls in ihm eine Basis aus n Elementen existiert.

Aufgrund von 2.4.5 ist die Definition korrekt, jede Basis in V besteht dann aus n Elementen.

Beispiele

1. Der Raum der geometrischen Vektoren in der Ebene (im Raum) hat die Dimension 2 (bzw. 3).

2. Sei $K^n := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \in K\} = K \times \ldots \times K$
(oder $K^n := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_i \in K \right\}$) der Vektorraum der **Zeilen**- (bzw. **Spalten**)-**vektoren** über dem Körper K. Die Vektoraddition ist dabei komponentenweise durch
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) := (\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_n)$$
gegeben und die skalare Multiplikation durch
$$\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_n).$$
Das System
$$e_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, \ldots, 0, 1)$$
bildet die sogenannte **kanonische** (oder **Standard**) **Basis** in K^n. (Analoges gilt für die Spaltenvektoren.) Folglich ist $\dim K^n = n$.

Wir wollen nun zeigen, dass $\boldsymbol{K^n}$ **als Prototyp eines** $\boldsymbol{n}$**–dimensionalen Vektorraumes über** $\boldsymbol{K}$ aufgefasst werden kann. Dazu benötigen wir den Begriff der **Isomorphie** von Vektorräumen.

Definition. Zwei Vektorräume V und W über K heißen **isomorph**, falls es eine Bijektion $\mathbf{F} : V \to W$ gibt, die linear ist, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u+v) &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{F}(v) && , u, v \in V \\ \mathbf{F}(\lambda v) &= \lambda \mathbf{F}(v) && , v \in V\ ,\ \lambda \in K. \end{aligned}$$

Nach dieser Definition wird also die lineare Struktur von V auf die in W übertragen. Die Umkehrung gilt ebenfalls, denn die inverse Abbildung $\mathbf{F}^{-1} : W \to V$ ist auch linear: Für $w_1, w_2 \in W$ gilt nämlich

$$\mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}(w_1) + \mathbf{F}^{-1}(w_2)) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}(w_1)) + \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}(w_2)) = w_1 + w_2 \ ,$$

so dass

$$\mathbf{F}^{-1}(w_1) + \mathbf{F}^{-1}(w_2) = \mathbf{F}^{-1}(w_1 + w_2).$$

Analog zeigt man $\lambda\mathbf{F}^{-1}(w) = \mathbf{F}^{-1}(\lambda w)$, $\lambda \in K$, $w \in W$. Demnach überträgt sich auch die lineare Struktur von W auf die von V.
Wir kommen nun zu der erwähnten Bedeutung von K^n.

2.4.6 Satz. *Jeder n–dimensionale Vektorraum V_n über K ist isomorph zu K^n.*

Beweis. Für eine beliebige Basis $b_1, \ldots, b_n$ in V_n definieren wir $\mathbf{F} : V_n \to K^n$ durch

$$\mathbf{F}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ , \text{ falls } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \ , \ \text{ d.h.}$$

V wird auf seinen Koordinatenvektor abgebildet. Die Injektivität von $\mathbf{F}$ folgt sofort aus der Definition. Außerdem liegt für jedes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ der Vektor $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ in V_n, so dass $\mathbf{F}$ auch surjektiv ist. Wir überprüfen nun die Linearität: Sei $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i b_i$. Dann gilt für $\nu \in K$

$$\begin{aligned} \nu u + v &= \sum_{i=1}^{n} (\nu\lambda_i + \mu_i) b_i \ \text{ und folglich} \\ \mathbf{F}(\nu u + v) &= (\nu\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \nu\lambda_n + \mu_n) \\ &= \nu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (\mu_1, \ldots, \mu_n) = \nu\mathbf{F}(u) + \mathbf{F}(v). \end{aligned}$$

Für $\nu = 1$ erhält man die Additivität von $\mathbf{F}$ und für $v = \mathcal{O}$ die Homogenität bzgl. der skalaren Multiplikation. □

Bemerkung. K^n heißt deshalb auch **Koordinatenraum** zu V_n, und V_n wird oft mit K^n identifiziert.

2.4.7. Folgerung. *Zwei endlichdimensionale Vektorräume über K sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension besitzen.* •

2.5 Lineare Unterräume, Durchschnitt, lineare Hülle und Rang eines Vektorsystems

Definition. Eine nichtleere Teilmenge V' eines Vektorraums V heißt (**linearer**) **Unterraum**, falls

$(U1)$ $u', v' \in V' \Rightarrow u' + v' \in V'$

$(U2)$ $v' \in V\ ,\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda v' \in V'$

2.5.1 Satz. *Jeder lineare Unterraum V' von V ist bzgl. der gegebenen Operationen wieder ein Vektorraum.*

Beweis. Wir überprüfen das Axiom (V'I): Die Assoziativität und Kommutativität der Addition sind in V gegeben, also auch in V'. Da insbesondere $0v' \in V'$, so enthält V' das neutrale Element $\mathcal{O}$. Außerdem ist $-v' = (-1)v' \in V$, so dass mit jedem Vektor v' auch sein entgegengesetzter Vektor $-v'$ in V' liegt, d.h. V' ist bzgl. $+$ eine kommutative Gruppe. Alle Bedingungen von (V'II) kann man als Spezialfälle von (VII) auffassen. □

Beispiele

1. $\{\mathcal{O}\}$ ist trivialer Unterraum jedes Vektorraums V.
2. V sei der Raum der geometrischen Vektoren in der Ebene (im Raum) und V' die Menge der Vektoren, die kollinear (komplanar) zu einer Geraden (Ebene) sind.
3. $V = K^n\ ,\ V' = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n : \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0\},\ \ m < n.$

Definition. Wenn $\mathcal{U}$ ein beliebiges System von Unterräumen von V ist, so wird $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ der **Durchschnittsraum** dieser Unterräume genannt, falls diese Menge nicht leer ist.

2.5.2 Satz. *Der Durchschnitt von Unterräumen ist wieder ein Unterraum.*

Beweis. Wenn $u, v \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, so folgt $u, v \in U$ für jeden Unterraum U aus dem System $\mathcal{U}$. Dann ist aber wegen der Unterraumstruktur von U auch $u + v \in U$. Da dies für alle U gilt, können wir auf $u + v \in \bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ schließen. Analog zeigt man, dass mit u auch λu im Durchschnitt liegt. □

Eine wichtige Operation zur Vektorraumerzeugung ist folgende.

Definition. Sei S eine beliebiges nichtleeres Teilsystem des Vektorraumes V. Dann heißt die daraus erzeugte Teilmenge von V

$$\mathrm{Lin}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : v_i \in S\ ,\ \lambda_i \in K\ ,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

lineare Hülle von S.

Unmittelbar aus der Definition schlussfolgert man, dass $\mathrm{Lin}(S)$ ein linearer Unterraum von V ist. Mehr noch, man kann $\mathrm{Lin}(S)$ als den kleinsten Unterraum betrachten, der S enthält:

2.5.3 Satz.

$$\mathrm{Lin}(S) = \bigcap\{U : U \textit{ ist Unterraum }, S \subset U\}$$

Beweis. Aufgrund der Linearität enthält jeder Unterraum mit S auch $\mathrm{Lin}(S)$. Da $\mathrm{Lin}(S)$ selbst Unterraum ist, folgt die Behauptung. $\square$

2.5.4. Folgerung. *$\mathrm{Lin}(S) = S$ gilt genau dann, wenn S selbst ein Unterraum von V ist.*

Beispiel. Für die geometrischen Vektoren im Raum besteht die lineare Hülle $\mathrm{Lin}(\{\vec{u}, \vec{v}\})$ zweier nicht kollinearer Vektoren aus dem Unterraum der Vektoren, die komplanar zu einer von $\vec{u}, \vec{v}$ aufgespannten Ebene sind.

Wir betrachten nun ein endliches Vektorsystem.

Definition. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren von $a_1, \ldots, a_k$ heißt **Rang** des Vektorsystems.

Dafür werden wir die Schreibweise Rang$(a_1, \ldots, a_k)$ benutzen. Der Rang besitzt folgende algebraische Interpretation.

2.5.5 Satz.

$$\mathrm{Rang}(a_1, \ldots, a_k) = \dim \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_k).$$

Beweis. Sei Rang$(a_1, \ldots, a_k) = r$. Dann können wir – bis auf Permutation der Indizes – schließen, dass $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängig und für jedes $j > r$ das System $a_1, \ldots, a_r, a_j$ linear abhängig ist. Nach 2.3.3 gilt dann $a_j \in \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_r)$ auch für $j > r$. Folglich sind alle Linearkombinationen der $a_1, \ldots, a_k$ bereits in $\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_r)$ enthalten, so dass

$$\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_r),$$

d.h. die $a_1, \ldots, a_r$ bilden eine Basis für $\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_k)$. $\square$

2.6 Direkte Summe von Unterräumen und Dimensionssatz

Neben dem Durchschnitt und der linearen Hülle kann man Unterräume auch durch Summenbildung erzeugen. Seien $V_1, \ldots, V_k$ Unterräume von V.

Definition. Die Menge

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = V_1 + \ldots + V_k := \{v_1 + \ldots + v_k : v_i \in V_i\,,\, i = 1, \ldots, k\}$$

heißt **Summe der Vektorräume**.

Man überlegt sich leicht, dass diese Summe wieder ein Unterraum ist. •

Definition. Die Summe $V_1 + \ldots + V_k$ heißt **direkte**, falls für jedes $v \in V_1 + \ldots + V_k$ die Darstellung $v = v_1 + \ldots + v_k$ mit $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, k$, eindeutig ist.

Für die direkte Summe der Vektorräume schreibt man dann $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$.

Beispiel. Sei $\dim V = n$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine beliebige Basis in V. Dann lässt sich V darstellen als

$$V = \mathrm{Lin}(b_1, \ldots, b_m) \oplus \mathrm{Lin}(b_{m+1}, \ldots, b_n)\,,\ m < n\,,$$

oder auch als

$$V = \mathrm{Lin}(b_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Lin}(b_n).$$

Allgemein kann man direkte Summen folgendermaßen charakterisieren.

2.6.1 Satz. *$V_1 + \ldots + V_k$ ist genau dann direkte Summe, wenn für jedes i der Durchschnitt von V_i und $V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k$ trivial ist.*

Beweis. Sei $V_1 + \ldots + V_k$ direkte Summe und $V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j \neq \{\mathcal{O}\}$. Dann gibt es ein $v_i \in V \setminus \{\mathcal{O}\}$, so daß $v_i = \sum\limits_{j \neq i} v_j$ für gewisse $v_j \in V_j$ und somit

$$v_i + \sum_{j \neq i}(-v_j) = \mathcal{O} = \mathcal{O} + \ldots + \mathcal{O}.$$

Dies steht aber im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung des Nullvektors bzgl. $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. Deshalb folgt $V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j = \{\mathcal{O}\}$.

Wenn wir nun die letzte Beziehung voraussetzen und $v_1 + \ldots + v_k = v_1' + \ldots + v_k'$ mit $v_j, v_j' \in V_j$, $j = 1, \ldots, k$, und $v_i \neq v_i'$ für ein i annehmen, so erhalten wir in $\mathcal{O} \neq v_i - v_i' = \sum\limits_{j \neq i}(v_j' - v_j)$ einen Vektor aus $V_i \cap \sum\limits_{j \neq i} V_j$, d.h. einen Widerspruch. Also muss $v_i = v_i'$ für alle i gelten. □

Wenn V und W Unterräume endlicher Dimension sind, kann man folgenden **Dimensionssatz** zeigen.

2.6.2 Satz.

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Beweis. Sei $\dim V = m$, $\dim W = n$ und $\dim(V \cap W) = p$. Aus dem Basisergänzungssatz folgt, dass man jede Basis $\{u_1, \ldots, u_p\}$ in $V \cap W$ (die leere Menge, falls $V \cap W = \{\mathcal{O}\}$) zu einer Basis $\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ in V bzw. $\{u_1, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_n\}$ in W ergänzen kann. Es genügt nun zu zeigen, dass

$$\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_m, w_{p+1}, \ldots, w_n\}$$

eine Basis in $V + W$ ist, denn dann gilt $\dim(V + W) = m + n - p$.

1. *Lineare Unabhängigkeit:* Es sei

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, u_i + \sum_{i=p+1}^{m} \mu_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n} \nu_i \, w_i = \mathcal{O}.$$

Dann ist

$$x := \sum_{i=p+1}^{m} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{p} (-\lambda_i) u_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\nu_i) w_i$$

ein Vektor aus $V \cap W$ und lässt sich nach der Basis $\{u_1, \ldots, u_p\}$ zerlegen: $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' u_i$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda_i') u_i + \sum_{i=p+1}^{n} \nu_i w_i = \mathcal{O}.$$

Die lineare Unabhängigkeit von $\{u_1, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_n\}$ ergibt insbesondere $\nu_i = 0\,,\ i = p+1, \ldots, n$. Wir setzen dies in die erste Gleichung ein und erhalten $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=p+1}^{m} \mu_i v_i = \mathcal{O}$. Da $\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_m\}$ ebenfalls linear unabhängig ist, verschwinden alle Koeffizienten.

2. *Basisdarstellung:* Sei $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=p+1}^{m} \mu_i v_i \in V$ und $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' u_i + \sum_{i=p+1}^{n} \nu_i w_i \in W$. Dann ergibt sich die Basiszerlegung von $v + w \in V + W$ durch

$$v + w = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda_i') u_i + \sum_{i=p+1}^{m} \mu_i v_i + \sum_{i=p+1}^{n} \nu_i w_i. \qquad \square$$