(9) Weil es so viele zu Fuß gerechnet haben:

$$A^{-1}B - 1 = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & -180 & 99 & -30 \\ 6 & 6 & 0 & -8 & -57 & 10 \\ 0 & 12 & 0 & 118 & 18 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Interessanterweise hat es keiner richtig – nicht einmal diejenigen, die es zugegebenermassen mit dem Computer gerechnet haben. Moral: Traue niemals einem Zahlenwust. Schon gar nicht im Stress der Klausur.

Allgemeines.

(1) Formalismus $-\frac{1}{2}$

Programm für Übung:

Lösungs skizze (keine volle Lösung!)

Aufgabe 1: ① $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} M_{11}\cdot(-1)^{1+1} & M_{12}\cdot(-1)^{1+2} \\ M_{21}\cdot(-1)^{2+1} & M_{22}\cdot(-1)^{2+2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

$M_{11} = \det\begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(a_{22}) = a_{22}$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: det ist -1, aber Sarrus $= 0$

Aufg. 2: Nach Gaußalgo (Rechnung ausführen):

$\det A \overset{\text{Blockmatrix}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\det(3) = (1^2 - 2\cdot 5)\cdot 3 = -27$

$A^{-1} = \frac{-1}{27}\begin{pmatrix} 3 & -15 & 17 \\ -6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$

$\det B = 48$ $\quad B^{-1} = \frac{-1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Aufg. 3: Simultan A und $(A;b)$ nur mit Zeilenumformungen bearbeiten. Gaußalgorithmus zur Rangbestimmung:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \\ \end{matrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{-2}{1-\lambda}\right)^{-1}\cdot II$

$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & \left[\frac{(2-\lambda)(1-\lambda)}{2}+1\right] & [3-\lambda] \end{pmatrix} =: (\tilde{A}, \tilde{b})$

Gemäß Vorlesung ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A;b)$, (nichts mit $\det A \neq 0$!) und die Dimension der Lösungsmenge ist Raumdimension $- \operatorname{rank}(A)$.

$\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 = 1 + \frac{(2-\lambda)(1-\lambda)}{2}, \text{ d.h. } \lambda \in \{0,3\} \\ 3 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$

$\operatorname{rank}(\tilde{A}\tilde{b}) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 = 1 + \frac{(2-\lambda)(1-\lambda)}{2} \wedge 0 = 3-\lambda, \text{ d.h. } \lambda = 3 \\ 3 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$

Fall $\lambda \in K\setminus\{1,3\}$: $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(\tilde{A},\tilde{b})$, genau 1 Lösung.

Fall $\lambda = 0$, char K $\neq 2$: $\;\neq\;$ — " —, keine Lösung.

Fall $\lambda = 3$, char K $\neq 2$: $\;=\;$ — " —, 1-dim. Lösungsmenge.

Fall char(K) = 2: ähnliche Rechnung, andere Zahlen wegen $2 = 0$,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{A},\tilde{b})$, $\det\tilde{A} = \lambda(1+\lambda) = \begin{cases} 0 & ; \lambda \in \{0,1\} \\ \neq 0 & \text{sonst} \end{cases}$

immer lösbar, eindeutig wenn $\lambda \in K\setminus\{0,1\}$.

Aufgabe 4: 1) folgt aus 2) oder aus der Basiseigenschaft von Polynomen,

2) Google, Wikipedia (im Hinweis steht Spalten, nicht Zeilen!)

Aufgabe 5

① $\det A \overset{\text{Blockmatrix}}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ -14 & 42 & 21 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{Blockmatrix, Dreiecksmatrix}}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\det(5) \cdot 2\cdot 6\cdot 21$

$= 8 \cdot 5 \cdot 2\cdot 6\cdot 21 = 10080$

② siehe Bemerkung 5.3

Korrektur zur Lösung des Magischen Quadrates: $\underbrace{n^2}_{\text{Einträge}} - (\underbrace{2n-1}_{\text{Zeilen- und Spaltensumme}} + \underbrace{2}_{\text{Diagonal Summe}}) = \dim$ $\quad +1$ ← Wert der Summe

- eine Zeilen- oder Spaltensumme ist linear abhängig, weil $\sum_i \underbrace{(\sum_j a_{ij})}_{\text{Spaltensumme}} = \sum_j \underbrace{(\sum_i a_{ij})}_{\text{Zeilensumme}}$.
- Parametrisiere $n\times n$-Matrix als $\left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline s & z \end{array}\right)$, $A \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$, $z \in \mathbb{R}$ dabei u, s aus A, z kombinierbar. Noch zu zeigen: Diagonalsummen linear unabhängig über $v = \{A, z\}$