Musterlösung 12. Serie

Aufgabe 1. Leider habe ich die Aufgabe zwischendrin verschlimmbessert. Ich beweise die aktuellste Version:

i) z.z.: $\forall_{u,v \in E\setminus\{0\}} \left[|u+v| = |u| + |v| \iff \exists_{\lambda > 0} \left(\lambda u = v \right) \right]$

imitiere Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
Seien $u, v \in E \setminus \{0\}$. Daher $|v| \neq 0$.

① $|u+v| = |u| + |v|$

beide Seiten ≥ 0 weil $\langle\,\rangle$ definit

$$\overset{\iff}{} \quad \underbrace{|u+v|^2}_{\overset{\langle\,\rangle \text{ bilinear, symm}}{=} |u|^2 + 2\langle u,v\rangle + |v|^2} = (|u| + |v|)^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v|$$

$$\overset{-|u|^2 - |v|^2}{\iff} \quad 2\langle u,v\rangle = 2|u||v|$$

$$\iff \quad ② \quad \langle u,v\rangle = |u||v|$$

Fall $\langle u,v\rangle < 0$: ② nicht erfüllbar (da rechte Seite ≥ 0), daher ① falsch.

Widerspruchsannahme: $\exists \lambda > 0 : \lambda u = v$

$$0 > \langle u,v\rangle = \langle u, \lambda u\rangle \overset{\text{bilin.}}{=} \underbrace{\lambda}_{\substack{>0 \\ \text{nach Wahl } \lambda}} \cdot \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\substack{>0 \text{ da } u \neq 0 \\ \text{und Skalarprodukt} \\ \text{positiv definit.}}} > 0 \ \lightning$$

$\rightsquigarrow$ Rechte Seite der Behauptung auch nicht erfüllt.

Fall $\langle u,v\rangle \geq 0$:

$$① \iff ② \overset{|\langle u,v\rangle| = \langle u,v\rangle}{\iff} |\langle u,v\rangle| = |u||v| \overset{\text{Gleichheit in Cauchy-Schwarz}}{\iff} u,v \text{ linear abhängig.}$$

$$\iff \exists_{\substack{\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \\ \text{nicht beide null}}} \mu_1 u + \mu_2 v = 0$$

Weil $u, v \neq 0$, kann nicht nur ein Koeff. μ_1, μ_2 Null sein. Teile durch $\mu_2 \neq 0$:

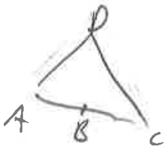
$$\iff \exists_{\lambda = -\frac{\mu_1}{\mu_2}} \lambda \cdot u = v$$

Wegen der Fallunterscheidung ist $\lambda \geq 0$: $0 \overset{\text{Fall Annahme}}{\leq} \langle u,v\rangle \overset{\lambda u = v}{=} \langle u, \lambda u\rangle \overset{\text{bilin.}}{=} \lambda \underbrace{|u|^2}_{>0}$

$$\iff \exists_{\lambda > 0} \lambda \cdot u = v$$

Aufgabe 2 Sei $A, C, D \in E_2$ in allgemeiner Lage gegeben.

Sei $B \in E_2$ genau zwischen A, C. $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$



Annahme: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}|$, zz: $\measuredangle(ADC)$ recht

g.z.z.: $\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0$ (da $|AD| \neq 0$ und $|DC| \neq 0$)

$$\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD} \rangle \overset{\Delta\text{-Regel}}{=} \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \rangle$$

$$\overset{\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB}}{=} \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \rangle$$

$$\overset{\text{bilinear}}{=} -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle + \underbrace{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} \rangle - \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AB} \rangle}_{=0 \text{ da Skalarprod. symm.}} + \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} \rangle$$

$$\overset{\text{def} |\,|}{=} -|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$$

$$\overset{\text{Annahme}}{=} 0$$

Aufgabe 3: (mit den Bezeichnungen der Aufgabe):

$x \in E_2$, $u \in U$, $x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|x-u| = \left| \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - \bar{u}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{u}_1)^2 + (\bar{x}_2)^2} \overset{\sqrt{\cdot}\text{ streng monoton},\ (\bar{x}_1-\bar{u}_1)^2 \geq 0}{\geq} \sqrt{0 + (\bar{x}_2)^2}$$

$$= \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2 - 0)^2} = |x - \pi_U x|$$

Mit Gleichheit genau dann (wegen strenger Monotonie) wenn

$$(\bar{x}_1 - \bar{u}_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}_1.$$

Da u beliebig war, gilt $\inf_{u \in U} |x-u| \geq |x - \pi_U x|$.

Andererseits wird das Infimum bei $u = \pi_U x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ angenommen und ist daher ein Minimum.

Aufgabe 4 Sei E Eukl. V-raum, $u, v \in E$ beliebig.

zz: $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$

B: $|u+v|^2 + |u-v|^2 \overset{\text{Def} |\,|}{=} \sqrt{\langle u+v | u+v \rangle}^2 + \sqrt{\langle u-v | u-v \rangle}^2 \overset{\text{innen } \geq 0}{=} \langle u+v | u+v \rangle + \langle u-v, u-v \rangle$

$$\overset{\text{Bilinear}}{=} \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle + \langle u,u \rangle - \langle u,v \rangle - \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$\overset{\text{def} \,\&\, |\,|}{=} 2|u|^2 + 2|v|^2 + 0 + 0$$

$$= 2(|u|^2 + |v|^2)$$

Aufgabe 5 E Euklidisch, $A: E \to E$ linear & voller Rang. zz: $(u,v) \mapsto \langle Au, Av \rangle$ Skalarprodukt.

0) wohldefiniert: $\langle \underset{\in E}{Au}, \underset{\in E}{Av} \rangle \in \mathbb{R}$ ✓

1) Linear: $\langle A(u_1 + \lambda u_2), Av \rangle \overset{A \text{ linear}}{=} \langle Au_1 + \lambda Au_2, Av \rangle \overset{\text{Skalarp. lin.}}{=} \langle Au_1, Av \rangle + \lambda \langle Au_2, Av \rangle$

2) symmetr.: da $\langle\,\rangle$ symmetrisch

3) positiv definit: $u \in E \to Au \in E \Rightarrow \langle Au, Au \rangle \geq 0$. $\langle Au, Au \rangle = 0 \overset{\text{Skalarprodukt}}{\Leftrightarrow} Au = 0 \overset{\text{Rang}}{\Leftrightarrow} u = 0$.