

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Markus Pawellek

31. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	1
2	Skalarprodukt und orthogonale Matrizen	2
3	Bilinearformen	9
3.1	Bilinearformen und Matrizen	9
3.2	Indefinite Bilinearformen	12
4	Vektorräume über dem Körper \mathbb{C}	14
4.1	Idee komplexes Skalarprodukt	14
4.2	Hermiteische Formen	15
4.3	Schiefsymmetrische Bilinearformen	19
4.4	Der orientierte Winkel	20
4.5	Kreuzprodukt	20
5	Jordansche Normalform	21
6	Kegelschnitte und Quadriken	27

Verzeichnis der Definitionen und Sätze

1.1	Definition	(Gruppe)	1
1.2	Definition	(Vektorraum)	1
1.3	Definition	(Vektorraumendomorphismus)	1
1.1	Lemma	($GL_n(\mathbb{R})$ ist Gruppe)	1
2.1	Definition	(orthogonale Matrix, O_n)	2
2.1	Lemma	(O_n ist Untergruppe)	2
2.2	Proposition	(Determinante orthogonaler Matrizen)	3
2.2	Definition	(spezielle Teilmenge SO_n)	3
2.3	Lemma	(SO_n ist Untergruppe)	3
2.3	Definition	(Standardskalarprodukt und -norm auf \mathbb{R}^n)	3
2.4	Proposition	(Zusammenhang Skalarprodukt und Winkel)	4
2.5	Korollar	(Charakterisierung Orthogonalität)	4
2.6	Theorem	(Charakterisierung orthogonaler Matrizen)	4
2.4	Definition	(Orthonormalbasis)	5
2.5	Definition	(orthogonaler Endomorphismus)	5
2.6	Definition	(Isometrie)	5
2.7	Lemma	(Isometrien bilden Gruppe)	6
2.8	Theorem	(Charakterisierung homogene Isometrie)	6
2.7	Definition	(Translation)	7
2.9	Lemma	(Translation ist Isometrie)	7
2.10	Theorem	(Charakterisierung Isometrie)	7
2.8	Definition	(Orientierung)	8
2.11	Lemma	($A \in SO_3$ besitzt 1 als Eigenwert)	8
2.12	Korollar	(Charakterisierung Drehungen)	8
3.1	Definition	(Bilinearform)	9
3.2	Definition	(symmetrische und schiefsymmetrische Bilinearform)	9
3.3	Definition	(positiv definite Bilinearform)	9
3.1	Lemma	(Charakterisierung symmetrischer Bilinearformen)	10
3.4	Definition	(Äquivalenz Bilinearformen)	10
3.2	Korollar	(Übergangsformel)	10
3.5	Definition	(positiv definite Matrix)	10
3.3	Theorem	(Charakterisierung positiv definit)	11
3.4	Theorem	(Charakterisierung symmetrisch und positiv definite Matrix)	11
3.6	Definition	(Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren)	11
3.5	Lemma		12
3.7	Definition	(orthogonales Komplement)	12
3.6	Lemma		12
3.8	Definition	(Radikal und Nicht-Entartung)	12
3.7	Lemma		13
3.8	Theorem		13
3.9	Theorem		13
4.1	Definition	(hermitesches Standardskalarprodukt)	15
4.2	Definition	(Sesquilinearform)	15
4.3	Definition	(hermitesche Form)	15
4.4	Definition	(hermitesche Matrix)	15
4.5	Definition	(unitäre Matrix, U_n)	16
4.1	Lemma	(U_n bildet Gruppe)	16

4.6	Definition	(Orthogonalität komplexer Vektoren)	16
4.7	Definition	(positiv definite hermitesche Form)	16
4.2	Theorem	(Charakterisierung positiv Definitheit)	17
4.3	Theorem	(Spektralsatz)	17
4.4	Korollar	(hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar)	17
4.5	Theorem		17
4.6	Korollar		18
4.7	Theorem	(Spektralsatz im reellen Fall)	18
4.8	Definition	(schiefsymmetrische Bilinearformen)	19
4.9	Definition	(Kreuzprodukt)	20
4.8	Theorem	(Existenz und Formel des Kreuzprodukts)	20
5.1	Definition	(Hauptraum von f zu λ)	21
5.1	Lemma	(Hauptraum ist Unterraum)	21
5.2	Lemma	(Charakterisierung nicht-trivialer Hauptraum)	21
5.2	Definition	(nilpotenter Endomorphismus)	21
5.3	Theorem	(Charakterisierung nilpotente Abbildung)	22
5.4	Lemma	(Hauptraum ist stabil unter kommutierenden Abbildungen)	22
5.5	Korollar	(Hauptraum ist stabil unter eigener Abbildung)	23
5.6	Theorem	(Haupträume als direkte Summe)	23
5.7	Theorem	(Fitting-Zerlegung)	24
5.3	Definition	(nilpotente Jordan-Block der Größe r)	24
5.8	Theorem	(Normalform nilpotenter Abbildungen)	24
5.9	Korollar		24
5.10	Lemma		25
5.4	Definition	(Jordan-Basis)	25
5.11	Lemma	(Jedes f besitzt eine Jordan-Basis)	25
5.12	Proposition		26
5.13	Proposition	(Eigenschaften)	26
5.14	Theorem	(Cayley-Hamilton)	26
6.1	Definition	(quadratische Form)	27
6.2	Definition	(Quadrike)	28
6.3	Definition	(Kegelschnitt)	28
6.4	Definition	(entarteter Kegelschnitt)	28
6.1	Theorem	(Kongruenz nicht entarteter Kegelschnitte)	28

1 Wiederholung

DEFINITION 1.1: (Gruppe)

Sei G eine Menge und sei $\star : G \times G \longrightarrow G$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften.

(G1) Es gibt ein $e \in G$, sodass für alle $g \in G$ gilt

$$e \star g = g \star e = g \quad (\text{neutrales Element})$$

(G2) Für alle $g, f, h \in G$ gilt

$$(g \star f) \star h = g \star (f \star h) \quad (\text{Assoziativität})$$

(G3) Für alle $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ mit

$$g \star g^{-1} = g^{-1} \star g = e \quad (\text{inverses Element})$$

Dann nennt man (G, \star) oder auch G eine Gruppe. Gilt darüber hinaus für alle $g, f \in G$ auch

$$f \star g = g \star f \quad (\text{Kommutativität})$$

so nennt man (G, \star) auch abelsche Gruppe.

DEFINITION 1.2: (Vektorraum)

Sei K ein Körper. Seien weiterhin $(V, +)$ eine abelsche Gruppe und $\star : K \times V \longrightarrow V$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften für alle $u, v \in V$ und alle $a, b \in K$.

(V1) $1 \star v = v$ (neutrales Element)

(V2) $(ab) \star v = a \star (b \star v)$ (Assoziativität)

(V3) $(a + b) \star v = a \star v + b \star v$ (1. Distributivgesetz)

(V4) $a \star (v + u) = a \star v + a \star u$ (2. Distributivgesetz)

Dann nennt man $(V, +, \star)$ oder auch V einen K -Vektorraum.

DEFINITION 1.3: (Vektorraumendomorphismus)

Sei $(V, +, \star)$ ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ heißt Endomorphismus, wenn φ linear ist, das heißt für alle $a \in K$ und $x, y \in V$ gilt

$$\varphi((a \star x) + y) = a \star \varphi(x) + \varphi(y)$$

LEMMA 1.1: ($GL_n(\mathbb{R})$ ist Gruppe)

Die Menge der reellen invertierbaren Matrizen

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

BEWEIS: (Lemma 2.5)

Es gilt im allgemeinen für alle $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{R})$$

Weiterhin folgt

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{es gibt } A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } A^{-1}A = I$$

Die Identitätsmatrix beschreibt das neutrale Element. Die Matrixmultiplikation ist assoziativ. GL_n ist damit gerade eine Gruppe. \square

2 Skalarprodukt und orthogonale Matrizen

Im Folgenden soll es das Ziel sein, eine geeignete Charakterisierung von 2- und 3-dimensionalen Drehungen im euklidischen Raum zu finden. Dafür soll als Grundgerüst die euklidische Geometrie verwendet werden. Durch Einführung weiterer Konzepte sollen die erhaltenen Ergebnisse dann für ein $n \in \mathbb{N}$ auf dem n -dimensionalen euklidischen Raum verallgemeinert werden.

DEFINITION 2.1: (orthogonale Matrix, O_n)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine reelle invertierbare $n \times n$ -Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heißt orthogonal genau dann, wenn

$$A^T = A^{-1}$$

Die Menge der orthogonalen Matrizen sei dann

$$O_n := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0, A^T A = I\}$$

LEMMA 2.1: (O_n ist Untergruppe)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der orthogonalen Matrizen O_n bildet eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ bezüglich der Matrixmultiplikation.

BEWEIS:

Es seien $A, B \in O_n$. Dann gilt

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I \Rightarrow AB \in O_n$$

Weiterhin gilt

$$A^{-1} (A^{-1})^T = A^T (A^T)^T = A^T A = I \implies A^{-1} \in O_n$$

Damit ist O_n eine Untergruppe. \square

PROPOSITION 2.2: (Determinante orthogonaler Matrizen)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in O_n$. Dann gilt

$$|\det A| = 1$$

BEWEIS:

Es gilt $A^T A = I$. Daraus folgt

$$1 = \det I = \det(A^T A) = \det A^T \det A = (\det A)^2 \implies |\det A| = 1$$

\square

Ist die Determinante einer orthogonalen Matrix gerade -1 , so spiegelt sie den Raum. Dies kann man sich am Beispiel von

$$A := \text{diag}(1, -1) \in \mathbb{R}^2$$

klar machen. Hier wird der Raum nicht gedreht, sondern nur an der Abszisse gespiegelt. Damit wird also eine spezielle Teilmenge aus O_n benötigt, um Drehungen zu charakterisieren.

DEFINITION 2.2: (spezielle Teilmenge SO_n)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sei die Menge der n -dimensionalen orthogonalen Matrizen mit Determinante 1

$$SO_n := \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$$

LEMMA 2.3: (SO_n ist Untergruppe)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bildet SO_n eine spezielle Untergruppe von O_n .

BEWEIS:

$$A = B$$

\square

Die Drehungen im 2- und 3-dimensionalen sind nun gerade Elemente aus SO_2 beziehungsweise SO_3 . Dies ist der Grund, weshalb SO_n auch n -dimensionale Drehgruppe genannt wird.

DEFINITION 2.3: (Standardskalarprodukt und -norm auf \mathbb{R}^n)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die folgende Abbildung wird Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n genannt.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y$$

Die zugehörige induzierte Standardnorm auf \mathbb{R}^n sei dann

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty), \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ heißt Einheitsvektor oder auch normierter Vektor.

$\|x - y\|$ stellt gerade den Abstand zwischen x und y dar. $\langle x, y \rangle$ enthält zusätzlich noch die Information über den Winkel zwischen den Vektoren x, y .

PROPOSITION 2.4: (Zusammenhang Skalarprodukt und Winkel)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen x, y . Dann gilt

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \vartheta$$

BEWEIS:

Aus der Bilinearität und dem Kosinussatz folgt die Aussage direkt. \square

KOROLLAR 2.5: (Charakterisierung Orthogonalität)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0$$

BEWEIS: (Korollar 2.5)

Ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen x und y , dann muss $\varphi = \pi/2$ gelten, wenn sie senkrecht aufeinander stehen. Nach Proposition 2.4 folgt nun direkt

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

\square

THEOREM 2.6: (Charakterisierung orthogonaler Matrizen)

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) A ist orthogonal.
- (ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$$

⌈ (iii) Die Spaltenvektoren von A sind paarweise orthogonale Einheitsvektoren.

BEWEIS:

(i) \iff (ii):

Sei A orthogonal. In diesem Falle gilt

$$AA^T = I \iff \langle x, y \rangle = x^T y = x^T A^T A y = (Ax)^T A y = \langle Ax, Ay \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

(ii) \Rightarrow (iii):

Es sei $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ für $1 \leq i \leq n$. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. Weiterhin seien die e_i für $1 \leq i \leq n$ die kartesischen Einheitsvektoren. Dann folgt für $i, j \leq n$

$$a_i = Ae_i \Rightarrow \langle a_i, a_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle \stackrel{(V.or.)}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

(iii) \Rightarrow (i):

Es sei $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ für $1 \leq i \leq n$, sodass $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$. Es gelte $A^T A = (c_{ij})$. Dann folgt durch Rechnung

$$c_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow A^T A = I$$

□

DEFINITION 2.4: (Orthonormalbasis)

Seien V ein K -Vektorraum und $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Basis. Dann ist B eine Orthonormalbasis genau dann, wenn für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i, j \leq n$ Folgendes gilt.

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

Im Falle $i = j$ bedeutet dies gerade $\langle b_i, b_i \rangle = \|b_i\|^2 = 1$. Die Basisvektoren einer Orthonormalbasis stehen also senkrecht aufeinander und haben jeweils die Länge 1.

DEFINITION 2.5: (orthogonaler Endomorphismus)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus. φ heißt orthogonal, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$$

DEFINITION 2.6: (Isometrie)

Eine euklidische Bewegung oder auch Isometrie auf \mathbb{R}^n ist eine abstandstreue Abbildung $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, das heißt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\beta(x) - \beta(y)\| = \|x - y\|$$

Erfüllt β darüber hinaus auch die Eigenschaft

$$\beta(0) = 0$$

so nennt man β hier eine *homogene Isometrie*.

LEMMA 2.7: (Isometrien bilden Gruppe)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der Isometrien auf \mathbb{R}^n bildet bezüglich der Komposition eine Gruppe. Diese Gruppe wird auch *Bewegungs- oder Isometriegruppe* genannt.

BEWEIS:

Seien α, β Isometrien auf \mathbb{R}^n .

$$\|\alpha(\beta(x)) - \alpha(\beta(y))\| \stackrel{(\alpha \text{ Iso.})}{=} \|\beta(x) - \beta(y)\| \stackrel{(\beta \text{ Iso.})}{=} \|x - y\|$$

$$\Rightarrow \alpha \circ \beta \text{ ist Isometrie auf } \mathbb{R}^n$$

Das neutrale Element wird durch die Identität, welche auch eine Isometrie ist, beschrieben.

Weiterhin ist die Komposition von Funktionen im Allgemeinen assoziativ. Gibt es nun zu β eine inverse Funktion β^{-1} folgert man

$$\|\beta(x) - \beta(y)\| = \|x - y\| = \|\beta^{-1}(\beta(x)) - \beta^{-1}(\beta(y))\|$$

Mit $\tilde{x} := \beta(x)$ und $\tilde{y} := \beta(y)$ ist ersichtlich, dass β^{-1} eine Isometrie sein muss.

$$\|\tilde{x} - \tilde{y}\| = \|\beta^{-1}(\tilde{x}) - \beta^{-1}(\tilde{y})\| \Leftrightarrow \beta^{-1} \text{ ist Isometrie}$$

Zu zeigen ist nun noch, dass β^{-1} existiert. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\beta(x) = \beta(y)$. Dann gilt per Definition

$$0 = \|\beta(x) - \beta(y)\| = \|x - y\| \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\Leftrightarrow \beta \text{ ist bijektiv} \Leftrightarrow \beta^{-1} \text{ existiert}$$

□

THEOREM 2.8: (Charakterisierung homogene Isometrie)

Sei $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) β ist eine Isometrie mit $\beta(0) = 0$.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \beta(x), \beta(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(iii) β ist gegeben durch Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix.

BEWEIS:

(i)⇒(ii):

Es seien β eine homogene Isometrie und $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$\|\beta(x) - \beta(y)\|^2 = \langle \beta(x) - \beta(y), \beta(x) - \beta(y) \rangle = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle$$

Setze nun $y = 0$.

$$\Rightarrow \|\beta(x)\|^2 = \langle \beta(x), \beta(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Aus der Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt wieder für beliebige y

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \|\beta(x)\|^2 + \|\beta(y)\|^2 - 2 \langle \beta(x), \beta(y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \beta(x), \beta(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(ii)⇒(iii):

Die einzige Abbildung, welche nun das Skalarprodukt erhält und die Einheitsvektoren auf sich selbst abbildet, ist die Identität.

$$\langle x, e_i \rangle = \langle \beta(x), \beta(e_i) \rangle = \langle \beta(x), e_i \rangle$$

$$\Rightarrow x'_i = x_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x' = x \Leftrightarrow \beta = \text{id}$$

Für ein allgemeines β folgt nun, dass $\{\beta(e_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ ein Orthonormalsystem ist, wegen

$$\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle \beta(e_i), \beta(e_j) \rangle$$

Da β ein Endomorphismus ist, gibt es eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, sodass $\beta(x) = Ax$. Diese Matrix ist eindeutig bestimmt.

$$A := (\beta(e_1), \dots, \beta(e_n))$$

Dann gilt nach Theorem 2.6 über die Charakterisierung orthogonaler Matrizen, dass A orthogonal ist.

(iii)⇒(i):

Folgt ebenfalls aus dem Theorem 2.6. □

DEFINITION 2.7: (Translation)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $b \in \mathbb{R}^n$ sei die Translation t_b die Abbildung

$$t_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t_b(x) = x + b$$

LEMMA 2.9: (Translation ist Isometrie)

Jede Translation ist eine Isometrie.

BEWEIS:

Klar. □

THEOREM 2.10: (Charakterisierung Isometrie)

Sei β eine Isometrie auf \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $A \in O_n$ und genau ein $b \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\beta(x) = Ax + b$$

BEWEIS:

Sei $\beta(0) = b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $t_{-b} \circ \beta(0) = 0$. Dann ist $t_{-b} \circ \beta$ eine homogene Isometrie und gerade durch die Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix $A \in O_n$ gegeben.

$$\Leftrightarrow t_{-b} \circ \beta(x) = Ax \Leftrightarrow \beta(x) = Ax + b$$

□

Nach dem obigen Beweis für Theorem 2.10 sind A und b für ein β eindeutig bestimmt. Die euklidischen Bewegungen teilen sich damit gerade in Spiegelungen, Drehungen und Translationen auf.

DEFINITION 2.8: (Orientierung)

Sei $A \in O_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ein orthogonaler Endomorphismus. A heißt orientierungserhaltend, wenn $\det A = 1$, und orientierungsumkehrend, wenn $\det A = -1$. Eine analoge Definition sei für den homogenen Anteil der Isometrien gegeben.

LEMMA 2.11: ($A \in SO_3$ besitzt 1 als Eigenwert)

Für alle $A \in SO_3$ gilt $1 \in \lambda(A)$.

BEWEIS:

$$\det(A - I) = \det(A^T) \det(A - I) = \det((E - A)^T) = \det(E - A) = (-1)^n \det(A - I)$$

□

KOROLLAR 2.12: (Charakterisierung Drehungen)

Die Drehungen in \mathbb{R}^n sind gerade die homogenen orientierungserhaltenden Isometrien.

BEWEIS:

Es ist bereits klar, dass jede Drehung eine Isometrie ist. Die Determinante des zugehörigen Endomorphismus muss stetig vom Winkel abhängen. Die Drehung um den Winkel 0 entspricht $\det I = 1$. Es müssen damit alle Determinanten 1 sein, da sie sonst nur -1 sein könnten.

Jede Drehung kann auf den zweidimensionalen Fall zurückgeführt werden. Bestimme den Unterraum, der auf sich selbst abgebildet wird und berechne die Matrix, welche die Einheitsvektoren in dieser Ebene abbildet. □

3 Bilinearformen

Im folgenden sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

DEFINITION 3.1: (Bilinearform)

Eine Bilinearform b auf V ist eine Abbildung $b : V \times V \longrightarrow K$, sodass für alle $u, v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$b(\alpha v + \beta w, u) = \alpha b(v, u) + \beta b(w, u)$$

$$b(u, \alpha v + \beta w) = \alpha b(u, v) + \beta b(u, w)$$

BEISPIEL:

Das Standardskalarprodukt ist eine Bilinearform.

DEFINITION 3.2: (symmetrische und schiefsymmetrische Bilinearform)

Eine Bilinearform b heißt *symmetrisch*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$b(v, w) = b(w, v)$$

und *schiefsymmetrisch*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt

$$b(v, w) = -b(w, v) \text{ oder } b(v, v) = 0$$

Für das Skalarprodukt gilt, dass

$$\langle v, v \rangle > 0$$

für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$.

DEFINITION 3.3: (positiv definite Bilinearform)

Eine Bilinearform b heißt *positiv definit*, wenn

$$b(v, v) > 0$$

für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt. (Hierbei muss die Relation $>$ im Körper sinnvoll definiert sein.)

3.1 Bilinearformen und Matrizen

Sei nun $V = K^n$ und $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Sei $A \in M_n(K)$. Wir setzen nun

$$b_A(v, w) = v^T A w \in K$$

Dann ist b_A eine Bilinearform auf V . Es gilt, wenn $A = (a_{ij})$,

$$b(e_i, e_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

BEISPIEL:

$$b(\alpha, \gamma) := \alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1$$

Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sowohl A als auch b sind schiefssymmetrisch.

LEMMA 3.1: (Charakterisierung symmetrischer Bilinearformen)

Die Bilinearform b_A ist genau dann symmetrisch, wenn gilt

$$A = A^T$$

Also wenn A symmetrisch ist.

BEWEIS:

\Rightarrow :

$$a_{ij} = b_A(e_i, e_j) = b(e_j, e_i) = a_{ji}$$

\Leftarrow :

$$b_A(v, w) = v^T A w = (v^T A w)^T = w^T A^T v = w^T A v = b_A(w, v)$$

□

Betrachtet man einen Basiswechsel, so betrachtet man $\tilde{A} = C A C^T$.

$$\tilde{b}(Cv, Cw) = (Cv)^T \tilde{A} Cw$$

$$\tilde{A} = (C^{-1})^T A C^{-1}$$

DEFINITION 3.4: (Äquivalenz Bilinearformen)

Zwei Bilinearformen b_1, b_2 heißen äquivalent, wenn es ein $C \in GL_n(K)$ gibt, sodass

$$A_2 = C^T A_1 C$$

A_1, A_2 beschreiben die Matrizen von b_1, b_2 .

KOROLLAR 3.2: (Übergangsformel)

Eine Bilinearform b_A ist genau dann zum Standardskalarprodukt äquivalent, wenn

$$A = C^T C$$

mit $C \in GL_n(K)$.

DEFINITION 3.5: (positiv definite Matrix)

Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt positiv definit, falls für alle $v \in V$ mit $v \neq 0$ gilt

$$v^T A v > 0$$

THEOREM 3.3: (Charakterisierung positiv definit)

Eine Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn b_A positiv definit ist.

THEOREM 3.4: (Charakterisierung symmetrisch und positiv definite Matrix)

Für $A \in M_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) A repräsentiert bezüglich einer geeigneten Basis das Standardskalarprodukt.
- (ii) $A = C^T C$ für ein geeignetes $C \in GL_n(K)$
- (iii) $A = A^T$ und A ist positiv definit.

BEWEIS:

(i) \Rightarrow (ii):

$A = C^T I C$ ist invertierbar.

(ii) \Rightarrow (iii):

Gegeben sei $A = C^T C$.

$$A^T = C^T C = A$$

(iii) \Rightarrow (i):

Suchen orthonormale Basis für A oder für b_A mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren. Danach wird eine Induktion über die Dimension durchgeführt.

□

DEFINITION 3.6: (Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren)

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren. Dann ist das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren gerade die Abbildung, welche B auf $U = \{w_1, \dots, w_n\}$ abbildet, sodass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i < n$ gilt

$$w_{i+1} = \frac{v_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle v_{i+1}, w_k \rangle w_k}{\left\| v_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle v_{i+1}, w_k \rangle w_k \right\|}$$

U bildet dann ein Orthonormalsystem. Hierbei kann $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine beliebige symmetrische positive definite Bilinearform darstellen. $\|\cdot\|$ stellt dann die dazu induzierte Norm dar.

Hier muss ein Beispiel für symmetrische positiv definite 2x2-Matrizen kommen (Charakterisierung).

3.2 Indefinite Bilinearformen

BEISPIEL: (Lorentzform)

Es gilt $V = \mathbb{R}^4$ und für ein $c > 0$

$$b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2x_4y_4$$

LEMMA 3.5:

Sei b eine nicht-triviale symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n . Dann gibt es ein $v \in \mathbb{R}^n$, sodass $b(v, v) \neq 0$.

BEWEIS:

Es gilt für zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, dass $b(u, v) \neq 0$. Ist $b(u, u) \neq 0$ oder $b(v, v) \neq 0$, dann ist die Aussage gezeigt. Sonst gilt $b(u, u) = b(v, v) = 0$ und für $w = u + v$ gilt dann

$$b(w, w) = b(u, u) + 2b(u, v) + b(v, v) = 2b(u, v) \neq 0$$

□

DEFINITION 3.7: (orthogonales Komplement)

Sei b eine Bilinearform auf $V = K^n$ und $W \subset V$ ein Unterraum von V . Das orthogonale Komplement von W bezüglich V ist der Unterraum

$$W_b^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in W : b(v, w) = 0\}$$

Es kann passieren, dass $W \cap W_b^\perp \neq \{0\}$.

LEMMA 3.6:

Ist $b(v, v) \neq 0$, so gilt für $W = \langle v \rangle$ (lineare Hülle), dass

$$W \oplus W_b^\perp = V$$

BEWEIS:

Klar, dass $v \notin W_b^\perp$, da $b(v, v) \neq 0$. Der Unterraum W_b^\perp wird bestimmt mit Hilfe der linearen Gleichung $b(x, v) = 0$. Die Lösung dafür lautet

$$u - \frac{b(u, v)}{b(v, v)}v \in W_b^\perp$$

Dieser Raum besitzt also die Dimension $n - 1$.

□

DEFINITION 3.8: (Radikal und Nicht-Entartung)

Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $V = K^n$ der zugehörige n -dimensionale K -Vektorraum. Sei nun b eine symmetrische Bilinearform auf V . Der Unterraum V_b^\perp heißt das Radikal von b . Die Bilinearform heißt nicht-entartet, wenn $V_b^\perp = \{0\}$

LEMMA 3.7:

Sei $b = b_A$ mit $A = A^T$. Dann gilt

- (a) $V_b^\perp = \text{Kern} A$
- (b) b_A ist nicht-entartet $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

BEWEIS:

(a): Es gilt nach Definition $b_A(v, w) = v^T A w$. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Basis in V . Dann falls $v^T A e_i = 0$ für alle i folgt $v^T A = 0$. Andererseits falls $v^T A = 0$ gilt $v^T A w = 0$ für alle w . Nun $v^T A = (A^T v)^T = (A v)^T$ und damit $V_b^\perp = \text{Kern} A$.

(b): es gilt $\text{Kern} A = 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0$ □

THEOREM 3.8:

Sei b eine symmetrische Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, sodass die Vektoren orthogonal zueinander bezüglich b stehen und $b(v_i, v_i) \in \{1, -1, 0\}$.

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert ein $C \in GL_n(\mathbb{R})$, sodass CAC^T eine Diagonalmatrix ist mit den Einträgen aus der Menge $\{1, -1, 0\}$.

BEWEIS:

Sei b nicht trivial. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $b(v, v) \neq 0$. Setze

$$v_n := \frac{v}{\sqrt{|b(v, v)|}}$$

Zerlege nun V in $V = \langle v_n \rangle \oplus \langle v_n \rangle_b^\perp$. Die Einschränkung von b auf $\langle v_n \rangle_b^\perp$ ist wieder eine symmetrische Bilinearform mit Dimension $n - 1$. Führe nun eine Induktion durch. Die Matrix CAC^T hat die Gestalt

$$CAC^T = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, \underbrace{0, \dots, 0}_s)$$

mit $p + q + s = n$. Das Paar (p, q) heißt Signatur von b_A . □

THEOREM 3.9:

Die Zahlen p, q, s sind durch die Bilinearform b_A eindeutig bestimmt. Sie hängen also nicht von der Wahl der Orthogonalbasis ab.

BEWEIS:

$s = n - (p + q) = \dim(CAC^T) = \dim A$ Zeige nun das p eindeutig ist. Sei $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ eine andere Orthogonalbasis mit $p' < p$. Wir zeigen, dass die Vektoren $\{v_1, \dots, v_p, v'_{p+1}, \dots, v'_n\}$ linear unabhängig sind. Betrachte eine nicht-triviale Abhängigkeit

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p}_{=:u} = \underbrace{\gamma_{p'+1} v'_{p'+1} + \dots + \gamma_n v'_n}_{=:w}$$

Dann

$$b(u, u) = \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \geq 0$$

$$b(w, w) = - \sum_{j=1}^{q'} \gamma_{p'+j}^2 \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i^2 = \sum_{j=1}^{q'} \gamma_{p'+j}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_i^2 = \gamma_{p'+j}^2 = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q'\}$$

Alle übrigen Koeffizienten müssen ebenfalls Null sein, da es sich um eine Basis handelt. Die Vektoren sind also doch linear unabhängig. Das sind insgesamt $p + n - p'$ Vektoren.

$$p + n - p' \leq n \Rightarrow p \leq p' \Rightarrow$$

Schließlich gilt dann $p' = p$ □

4 Vektorräume über dem Körper \mathbb{C}

4.1 Idee komplexes Skalarprodukt

Der Körper \mathbb{C} kann auch geschrieben werden als

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Die Addition $+$ auf \mathbb{C} sei wie auf dem \mathbb{R}^2 eingeführt. Die Multiplikation für $a + ib, c + id \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Es entsteht nun ein Problem, wenn man die Länge eines Vektors berechnen möchte, da die induzierte Norm im Allgemeinen nicht größer gleich Null sein wird. Es gibt also $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\langle z, z \rangle = zz \not\geq 0$$

Um dieses Problem zu umgehen, möchte man, dass die Länge in \mathbb{C} sich gerade aus der Länge in \mathbb{R} ergibt. Man führt ein neues Skalarprodukt, welches positiv definit ist und gerade die Norm aus dem \mathbb{R} beibehält.

$$\langle z, z \rangle_{\mathbb{C}} := \bar{z}z = |z|^2 \geq 0$$

Aufgrund dieser Betrachtung erhält man nun eine Idee für ein neues Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$, welches die Länge erhält.

4.2 Hermitesche Formen

DEFINITION 4.1: (hermitesches Standardskalarprodukt)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die folgende Abbildung stellt das hermitesche Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{C}^n dar.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \bar{x}, y \rangle = \bar{x}^T y$$

Im Folgenden wird diese Abbildung auch Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n genannt oder als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ geschrieben.

Es ist nun angebracht eine Verallgemeinerung für das hermitesche Standardskalarprodukt analog zu den Bilinearformen zu konstruieren. Dafür betrachtet man die grundlegendsten Eigenschaften des Skalarproduktes.

DEFINITION 4.2: (Sesquilinearform)

Seien V ein \mathbb{C} -Vektorraum und eine Abbildung $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist s eine Sesquilinearform genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $u, v, w \in V$ gilt

$$(S1) \quad s(u, \alpha v + \beta w) = \alpha s(u, v) + \beta s(u, w) \quad (\text{Linearität})$$

$$(S2) \quad s(\alpha u + \beta v, w) = \bar{\alpha} s(u, w) + \bar{\beta} s(v, w) \quad (\text{Semilinearität})$$

Hier wird gefordert, dass die Linearität im zweiten Argument und die Semilinearität im ersten Argument gilt. Es ist allerdings auch gebräuchlich dies in umgekehrter Weise zu definieren.

DEFINITION 4.3: (hermitesche Form)

Eine hermitesche Form auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V ist eine Sesquilinearform $H : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, sodass für alle $x, y \in V$ gilt

$$H(x, y) = \overline{H(y, x)} \quad (\text{hermitesche Symmetrie})$$

Eine hermitesche Form wird auch hermitesches Skalarprodukt oder auch hermitesche Sesquilinearform genannt.

Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine hermitesche Form auf dem \mathbb{C}^n . Eine der im Folgenden betrachteten Haupteigenschaften von solchen durch Matrizen induzierten Formen wird die Hermitizität oder auch hermitesche Symmetrie sein.

DEFINITION 4.4: (hermitesche Matrix)

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist A hermitesch genau dann, wenn

$$\bar{A} = A^T$$

Hierbei ist $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})$ die komplex konjugierte Matrix zu A . Es sei weiterhin

$$A^\dagger := \bar{A}^T.$$

Das Analogon einer orthogonalen Matrix für hermitesche Formen ist die unitäre Matrix.

DEFINITION 4.5: (unitäre Matrix, U_n)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein $C \in M_n(\mathbb{C})$ heißt unitär genau dann, wenn

$$C^\dagger C = I$$

Damit bleibt das Standardskalarprodukt erhalten. Die Menge der unitären Matrizen sei dann

$$U_n := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = I\}$$

Gilt $A \in M_n(\mathbb{R})$, dann ist orthogonal äquivalent zu unitär. Analoges gilt für hermitesche und symmetrische Matrizen. Für die Übergangsformel gilt

$$\tilde{A} = C^\dagger A C$$

LEMMA 4.1: (U_n bildet Gruppe)

U_n bildet für $n \in \mathbb{N}$ bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

BEWEIS:

Klar. □

Analog lässt sich auch die Orthogonalität von Vektoren übertragen. Diese wird vor Allem gebraucht, um Orthonormalbasen im komplexen Vektorraum zu definieren.

DEFINITION 4.6: (Orthogonalität komplexer Vektoren)

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form auf V . Dann stehen zwei Vektoren $v, w \in V$ orthogonal zueinander genau dann, wenn

$$H(v, w) = 0$$

In diesem Falle schreibt man auch $v \perp_H w$ oder auch nur $v \perp w$.

Für das vollständige Konzept einer Orthonormalbasis wird nun noch eine analoge Eigenschaft zur positiv Definitheit benötigt, um so die Normierung von Vektoren zu ermöglichen.

DEFINITION 4.7: (positiv definite hermitesche Form)

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $H : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form auf

V . H heißt positiv definit, wenn für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt

$$H(v, v) > 0$$

Diese Eigenschaft ist wohldefiniert, da $H(v, v) = \overline{H(v, v)}$ und damit $H(v, v) \in \mathbb{R}$ folgt.

Diese Eigenschaft lässt sich so nur für hermitesche Formen formulieren. Dies war bei positiv definiten Bilinearformen nicht der Fall.

THEOREM 4.2: (Charakterisierung positiv Definitheit)

Eine hermitesche Form H ist genau dann positiv definit, wenn es eine Orthonormalbasis bezüglich H gibt.

THEOREM 4.3: (Spektralsatz)

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum.

- (a) Sei $f : V \rightarrow V$ eine hermitesche lineare Abbildung. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V , die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht.
- (b) Sei eine hermitesche Matrix M gegeben. Dann gibt es ein $C \in U_n$, sodass

$$C^\dagger M C \in M_n(\mathbb{R})$$

eine Diagonalmatrix ist.

BEWEIS:

- (a): Wir benutzen, dass \mathbb{C} algebraisch abgeschlossen ist (siehe Algebra II). Sei

$$\chi_M := \det(XI - M)$$

das charakteristische Polynom zu M . Dieses Polynom besitzt komplexe Koeffizienten. Aufgrund der algebraischen Abgeschlossenheit folgt dann \square

Der Spektralsatz begründet noch einmal, weshalb man ein neues Skalarprodukt für Vektorräume über den komplexen Zahlen konstruiert. Diese Betrachtung ermöglicht es nun hermitesche Matrizen zu diagonalisieren.

KOROLLAR 4.4: (hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar)

Jede hermitesche Matrix ist diagonalisierbar.

THEOREM 4.5:

Seien H eine hermitesche Form auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V und M die zugehörige Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von M reell, das heißt

$$\lambda(M) \subset \mathbb{R}$$

Außerdem gibt es ein $C \in U_n$, sodass $C^\dagger M C$ Diagonalform hat und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als ein Teilkörper abgeschlossen ist.

KOROLLAR 4.6:

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ für $n \in \mathbb{N}$ hermitesch. Dann sind alle Eigenwerte von A reell und A ist in $M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar.

Seien $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v_\lambda \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann folgt

$$\lambda \in \mathbb{R} \iff v_\lambda \in \mathbb{R}$$

Warum besitzt nun eine symmetrische reelle Matrix einen reellen Eigenwert? Dies ist eigentlich eine Frage der Analysis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist dann

$$S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v \rangle = 1\}$$

eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n . Sei nun $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

$$F_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_A(v) := v^T A v$$

F_A ist nun eine stetige kontinuierliche Funktion. $F_A|_{S^{n-1}}$ ist also begrenzt und die nimmt maximale und minimale Werte an. Sei L nun ein maximaler Wert.

$$L = F_A(v_0), \quad v_0^T v_0 = 1$$

$$dF_A(v_0) \text{ ist Null auf } T_{v_0} S^{n-1}$$

Das heißt also, dass für alle $w \in \mathbb{R}^n$

$$w^T A v_0 + v_0^T A w = 0 \implies w^T v_0 = 0$$

$$\implies v_0^T A w = 0 \implies v_0^\perp \subset (A v_0)^\perp \implies \langle A v_0 \rangle \subset \langle v_0 \rangle$$

$$A v_0 \in \{r v_0 \mid r \in \mathbb{R}\}$$

v_0 ist also ein Eigenvektor von A . Wenn nun $A v_0 = r v_0$, dann folgt

$$\implies F_A(v_0) = L = r$$

THEOREM 4.7: (Spektralsatz im reellen Fall)

Sei $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Orthonormalbasis in \mathbb{R}^n , wo alle Vektoren Eigenvektoren von f sind. Alle Eigenvektoren von f sind reell und f ist diagonalisierbar.
- (b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert ein $C \in O_n$, sodass $C^T A C$ eine Diagonalmatrix ist.

BEWEIS:

Es sei hier $f(v) = Av$. f ist damit auch symmetrisch (da es selbstadjungiert ist). Die beiden getroffenen Aussagen sind äquivalent.

(a) \implies (b):

zu zeigen: Es gibt ein $C \in O_n$, sodass $C^T AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = \lambda v$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $v \neq 0$.

$$v_1 := \frac{v}{\|v\|}, \quad \|v\| = \sqrt{v^T v} > 0$$

$$\mathbb{R}^n = \langle v_1 \rangle \oplus v^\perp$$

Aus $\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle$ folgt es, dass v^\perp stabil ist.

$$\langle v, w \rangle = 0 \implies \langle v, f(w) \rangle = 0$$

Die Induktion über n bringt uns dann eine Orthonormalbasis. \square

BEISPIEL:

Sei $n = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \chi_A(x) := (x - a)(x - b) - b^2$$

Die Nullstellen liegen hier in \mathbb{R} , wie man sich durch eine Parabel leicht veranschaulichen kann.

4.3 Schiefsymmetrische Bilinearformen

Im Körper \mathbb{F}_2 ist $2 = 0$ und damit auch $-1 = 1$. Führt man eine Bilinearform b auf einem \mathbb{F}_2 -Vektorraum ein, so bedeutet Schiefsymmetrie nichts weiter als

$$b(v, w) = -b(w, v) = b(w, v)$$

b wäre also auch symmetrisch. Um dieses Problem zu umgehen, führt man eine etwas abgewandelte Definition ein.

DEFINITION 4.8: (schiefsymmetrische Bilinearformen)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Bilinearform b auf $V = K^n$, wobei K ein Körper ist, heißt *schiefsymmetrisch*, falls für alle $v \in V$ gilt

$$b(v, v) = 0$$

Hierbei muss das Folgende beachtet werden.

$$\begin{aligned} 0 &= b(v + w, v + w) = b(v, v) + b(v, w) + b(w, v) + b(w, w) = b(v, w) + b(w, v) \\ &\implies b(v, w) = -b(w, v) \end{aligned}$$

Die oben geforderte Eigenschaft bedeutet also gerade Schiefsymmetrie. Für einen Körper K , indem $0 \neq 2$ gilt, folgt dann auch

$$b(v, w) = -b(w, v) \implies b(v, v) = -b(v, v) \implies b(v, v) = 0$$

4.4 DER ORIENTIERTE WINKEL Vektorräume ÜBER DEM KÖRPER C

Sei $b = b_A$ schief-symmetrisch. Dann gilt $A^T = -A$ und damit auch $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq n$.

$$v \perp_b w \implies b(v, w) = 0$$

$$b(v, w) = 0 \iff b(w, v) = 0$$

$$b \text{ nicht entartet} \iff \{v \mid b(v, w) = 0\} = \{0\} \iff \det A \neq 0$$

4.4 Der orientierte Winkel

Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ linear unabhängig und $\gamma := \angle_{\pm}(v, w)$.

$$\cos \gamma := \begin{cases} \cos \angle(v, w) & : \det(v, w) > 0 \\ -\cos \angle(v, w) & : \text{sonst} \end{cases}$$

4.5 Kreuzprodukt

DEFINITION 4.9: (Kreuzprodukt)

Das Kreuzprodukt ist eine bilineare Verknüpfung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass für alle $v, w, u \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(K1) \quad v \times w = -w \times v \quad (\text{alternierend})$$

$$(K2) \quad (v, w, u) \in SO_3 \implies v \times w = u$$

THEOREM 4.8: (Existenz und Formel des Kreuzprodukts)

Das Kreuzprodukt existiert und ist für $v, w \in \mathbb{R}^3$ durch die folgende Formel eindeutig bestimmt.

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

BEWEIS:

Es sei ${}^T(c_1, c_2, c_3) := v \times w$.

$$\implies \det(v, w, v \times w) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \|v \times w\|^2$$

Wir betrachten nun

$$\langle v \times w, v \rangle = \det(v, w, v) = 0 = \det(v, w, w) = \langle v \times w, w \rangle$$

Sei jetzt $(v, w, u) \in SO_3$.

$$\|v \times w\|^2 = \det(v, w, v \times w) = 1$$

Eindeutigkeit:

$$v \times w = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j e_i \times e_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i y_j e_i \times e_j = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 (x_i w_j - x_j w_i) e_i \times e_j$$

□

(geometrische Bedeutung einfügen)

5 Jordansche Normalform

DEFINITION 5.1: (Hauptraum von f zu λ)

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Für ein $\lambda \in K$ heißt die folgende Menge der Hauptraum von f zu λ .

$$\text{Hau}(f, \lambda) := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (f - \lambda \text{id}_V)^n(v) = 0\}$$

LEMMA 5.1: (Hauptraum ist Unterraum)

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann ist $\text{Hau}(f, \lambda)$ ein linearer Unterraum von V .

BEWEIS:

Es ist $\text{Hau}(f, \lambda) \neq \emptyset$, da $0 \in \text{Hau}(f, \lambda)$. Seien $v, w \in \text{Hau}(f, \lambda)$ und $\alpha \in K$, dann gibt es $n, m \in \mathbb{N}$, sodass

$$(f - \lambda \text{id})^n(v) = (f - \lambda \text{id})^m(w) = 0$$

Setzt man nun $p := \max\{n, m\}$, folgt

$$(f - \lambda \text{id})^p(v + \alpha w) = (f - \lambda \text{id})^p(v) + \alpha(f - \lambda \text{id})^p(w) = 0$$

$$\implies v + \alpha w \in \text{Hau}(f, \lambda)$$

□

LEMMA 5.2: (Charakterisierung nicht-trivialer Hauptraum)

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$.

$$\text{Hau}(f, \lambda) \neq \{0\} \iff \lambda \in \sigma(f)$$

BEWEIS:

\Leftarrow : Sei λ ein Eigenwert von f . In diesem Fall gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = \lambda v$. Damit gilt dann auch

$$(f - \lambda \text{id})(v) = 0 \implies v \in \text{Hau}(f, \lambda)$$

\implies : Sei nun $v \in \text{Hau}(f, \lambda)$ mit $v \neq 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit

$$0 = (f - \lambda \text{id})^n(v)$$

Ist $n = 1$, folgt direkt, dass λ ein Eigenwert ist. Für $n > 1$ definiert man

$$u := (f - \lambda \text{id})^{n-1}(v) \neq 0 \implies (f - \lambda \text{id})(u) = 0$$

u ist damit ein Eigenvektor zum Eigenwert λ .

□

DEFINITION 5.2: (nilpotenter Endomorphismus)

Seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$f^n = 0$$

Analoges sei für die zugehörige Matrix definiert.

THEOREM 5.3: (Charakterisierung nilpotente Abbildung)

Seien K ein Körper und $V = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für einen Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ mit der zugehörigen Matrix $A \in M_n(K)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist nilpotent
- (ii) $\text{Hau}(f, 0) = V$
- (iii) A ist triagonalisierbar und alle Eigenwerte sind Null.

BEWEIS:

(iii) \Leftrightarrow (i) wurde bereits in Linearer Algebra I gezeigt.

(i) \Rightarrow (ii): Ist f nilpotent, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass für alle $v \in V$ gilt

$$f^k(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v \in \text{Hau}(f, 0)$$

Damit folgt direkt $\text{Hau}(f, 0) = V$, da $\text{Hau}(f, 0) \subset V$.

(ii) \Rightarrow (i): Sei nun also $\text{Hau}(f, 0) = V$. Dann gibt es für alle $v \in V$ ein $k_v \in \mathbb{N}$, sodass $f^{k_v}(v) = 0$ gilt. Setze nun

$$\tilde{k} := \max \{k_v \mid v \in V\}$$

Sei nun $v \in V$.

- Fall $k_v = \tilde{k}$:
Aus der Definition ergibt sich direkt $f^{\tilde{k}}(v) = 0$.
- Fall $k_v < \tilde{k}$:
Es gibt nun ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\tilde{k} = k_v + m$. Dafür folgt nun

$$f^{\tilde{k}}(v) = f^{m+k_v}(v) = f^m(f^{k_v}(v)) = f^m(0) = 0$$

Die Funktion f ist also nilpotent. □

LEMMA 5.4: (Hauptraum ist stabil unter kommutierenden Abbildungen)

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f, h: V \rightarrow V$ lineare Abbildungen, welche kommutieren (das heißt $f \circ h = h \circ f$). Dann ist für alle $\lambda \in K$

$$h(\text{Hau}(f, \lambda)) \subset \text{Hau}(f, \lambda)$$

$\text{Hau}(f, \lambda)$ heißt dann auch h -stabil.

BEWEIS:

Aus Rechenregeln ergibt sich

$$h \circ (f - \lambda \text{id}) = h \circ f - \lambda h = f \circ h - \lambda h = (f - \lambda \text{id}) \circ h$$

$$\implies h \circ (f - \lambda \text{id})^k = (f - \lambda \text{id})^k \circ h \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

Sei nun $v \in \text{Hau}(f, \lambda)$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$(f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = 0 = h \circ (f - \lambda \text{id}_V)^k(v) = (f - \lambda \text{id}_V)^k(h(v))$$

$$\implies h(v) \in \text{Hau}(f, \lambda)$$

□

KOROLLAR 5.5: (Hauptraum ist stabil unter eigener Abbildung)

Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Für alle $\lambda \in K$ ist $\text{Hau}(f, \lambda)$ ein f -stabiler Unterraum.

THEOREM 5.6: (Haupträume als direkte Summe)

Seien K ein Körper und für ein $r \in \mathbb{N}$ die paarweise verschiedenen Werte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ gegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^r \text{Hau}(f, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Hau}(f, \lambda_i)$$

BEWEIS:

Man führt hier eine Induktion über r durch. Für $r = 1$ gibt es nichts zu zeigen.

$r \implies r + 1$: Wir nehmen an, dass

$$S := \text{Hau}(f, \lambda_{r+1}) \cap \sum_{i=1}^r \text{Hau}(f, \lambda_i) \neq \{0\}$$

Man findet also einen Vektor $u \in S$ mit $u \neq 0$. Dann gibt es eindeutige $v_i \in \text{Hau}(f, \lambda_i)$ für $i \in \mathbb{N}, i \leq r$ und ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit

$$u = \sum_{i=1}^r v_i, \quad h(u) := (f - \lambda_{r+1} \text{id})^n(u) = 0$$

$$\implies 0 = h(u) = h\left(\sum_{i=1}^r v_i\right) = \sum_{i=1}^r h(v_i)$$

Da die Summe der ersten r Haupträume direkt ist, muss $h(v_i) = 0$ sein für alle $i \in \mathbb{N}, i \leq r$. Es gibt nun ein $i \in \mathbb{N}, i \leq r$, sodass $v_i \neq 0$ und der folgende Vektor ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_{r+1} ist.

$$\tilde{h}(v_i) := (f - \lambda_{r+1} \text{id})^{n-1}(v_i) \neq 0$$

Weiterhin gibt es ein kleinstes $k \in \mathbb{N}$ mit

$$g(v_i) := (f - \lambda_i \text{id})^k(v_i) = 0 \implies \tilde{g}(v_i) := (f - \lambda_i \text{id})^{k-1}(v_i) \neq 0$$

$\tilde{g}(v_i)$ stellt also auch einen Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_i dar. Man macht sich leicht klar, dass $h, \tilde{h}, g, \tilde{g}$ kommutierende Abbildungen sind. Aus diesem Grund ist

$$\tilde{h} \circ \tilde{g}(v_i) = \tilde{g} \circ \tilde{h}(v_i)$$

□

THEOREM 5.7: (Fitting-Zerlegung)

Seien K ein Körper, $V = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann besitzt $\text{Hau}(f, 0)$ stets genau ein f -stabiles Komplement U .

$$V = \text{Hau}(f, 0) \oplus U$$

BEWEIS:

□

DEFINITION 5.3: (nilpotente Jordan-Block der Größe r)

Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann sei der nilpotente Jordan-Block der Größe r durch eine $r \times r$ -Matrix $J(r) \in M_r(\mathbb{R})$ definiert, sodass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i, j \leq r$ gilt

$$J(r)_{ij} = \delta_{i+1,j}$$

BEISPIEL:

$$J(1) = 0, \quad J(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

THEOREM 5.8: (Normalform nilpotenter Abbildungen)

Seien K ein Körper und V ein Vektorraum mit $V = K^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $f: V \rightarrow V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Dann gibt es eine Basis B von V , sodass

$$[f] = \text{diag } J(r_1), \dots, J(r_t)$$

Die Zahlen r_1, \dots, r_n sind hierbei von f eindeutig bis auf ihre Reihenfolge bestimmt.

BEWEIS:

Eindeutigkeit:

$$t = \dim(\ker f)$$

$$f(e_i) = 0 \implies i = 1 \text{ oder } i = 1 + r_1 \text{ oder } i = 1 + r_1 + \dots + r_s$$

mit $s < t$.

$$\dim(\ker f) \geq t$$

$$\dim(\text{im } f) \geq \dim V - t$$

$$\text{im } f = \langle e_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$$

$$e_j = f(e_i) \iff i \notin \{r_1, r_1 + r_2, \dots, r_1 + \dots + r_t\}$$

□

KOROLLAR 5.9:

Seien $A, B \in M_n(K)$ nilpotent. Dann existieren r_1, \dots, r_t , sodass

$$A \sim \text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_t))$$

$$A \sim B \iff B \sim \text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_t))$$

LEMMA 5.10:

Sei $f : V \longrightarrow V$ nilpotent mit $\dim V < \infty$. Dann existiert eine Basis B von V , sodass $B \cup \{0\}$ stabil ist und jedes Element von B unter f höchstens ein Urbild in B hat.

BEWEIS:

Sei B eine Basis des Lemmas von f . Nicht jedes Element von B hat ein Urbild unter f in B . (f wäre sonst nicht nilpotent). Wir sehen auch, dass es für alle $b \in B$ ein $b' \in B$ und ein $k \geq 0$ gibt, sodass b' kein Urbild in B hat und $b = f^k(b')$. B zerfällt in Ketten unter f . Jede dieser Ketten entspricht dann einem Jordan-Block $J(r_i)$ der jeweiligen Größe r_i .

Führe eine Induktion über die Dimension des Vektorraums durch.

$$\text{im } f \subset V$$

$$f \text{ nilpotent} \implies \ker f \neq \{0\} \implies \text{im } f \neq V$$

$\dim(\text{im } f) \leq \dim V$. $\text{im } f$ ist ein f -stabiler Unterraum.

$$\implies \text{im } f \text{ hat eine Jordan-Basis } J$$

$$\langle B_0 \rangle \oplus (\text{im } f \cap \ker f) = \ker f$$

□

DEFINITION 5.4: (Jordan-Basis)

Die Basis des vorherigen Lemmas wird auch *Jordan-Basis* von f genannt.

LEMMA 5.11: (Jedes f besitzt eine Jordan-Basis)

Eine Jordan-Basis existiert für alle linearen Abbildungen $f : V \longrightarrow V$.

BEWEIS:

Führe hier eine Induktion über n aus. Falls $n = 0$ oder $n = 1$ ist jede Basis von V eine Jordan-Basis.

$$\ker f \neq \{0\} \implies \dim(\text{im } f) < n$$

$\text{im } f$ ist ein f -stabiler Unterraum. $\text{im } f$ besitzt eine Jordan-Basis \mathcal{J} von f .

$$\mathcal{J}_0 := \{t \in \mathcal{J} \mid f(t) = 0\}$$

\mathcal{J}_0 ist eine Basis von $\text{im } f \cap \ker f$. Sei $\mathcal{J}_0 \cup B_0$ eine Basis von $\ker f = (\text{im } f \cap \ker f) \oplus \langle B_0 \rangle$. $f(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J} \cup \{0\}$ weil \mathcal{J} eine Jordan-Basis ist. Seien $s_1, \dots, s_r \in \mathcal{J}$ genau die Elemente, die

nicht in $f(\mathcal{J})$ liegen. Jedes Element s_i liegt in $\text{im } f$ (das heißt s_i hat ein Urbild $b_i \in V$).

$$B := \{b_1, \dots, b_r\} \cup B_0 \cup \mathcal{J}$$

Wir zeigen, dass B eine Basis von V und dass B eine Jordan-Basis ist.

$$B = (B_0 \sqcup \mathcal{J}_0) \sqcup (\{b_1, \dots, b_r\} \sqcup \{t \in \mathcal{J} \mid f(t) \neq 0\})$$

$f(B) \setminus \{0\}$ ist eine Basis von $\text{im } f$. Es folgt, dass B linear unabhängig ist und dass $\#B = \dim V$. Hier fehlt noch was. \square

PROPOSITION 5.12:

Wenn $A^n = f$ für $A \in M_n(K)$, dann

$$A \sim \text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_m))$$

PROPOSITION 5.13: (Eigenschaften)

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Dann gilt

$$\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A) C^{-1}$$

(b)

$$AB = BA \implies \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

(c) Sei $A = A_s + A_{nl}$ die Jordan-Zerlegung von A . Hier ist A_s diagonalisierbar, $A_{nl}^n = 0$ und $A_s A_{nl} = A_{nl} A_s$.

$$A_s \sim \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \quad \exp(A_s) \sim \text{diag}(e^{\gamma_1}, \dots, e^{\gamma_n})$$

$$\exp(A) = \exp(A_s) \exp(A_{nl})$$

$$A_{nl} = \text{diag}(J(r_1), \dots, J(r_m))$$

$$\exp(A_{nl}) = \text{diag}(\exp(J(r_1)), \dots, \exp(J(r_m)))$$

BEWEIS:

(a): Es gilt für ein $k \in \mathbb{N}$

$$(CAC^{-1})^k = CA^k C^{-1}$$

(b): Direktes Rechnen. \square

THEOREM 5.14: (Cayley-Hamilton)

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\chi_A(A) = 0$$

Der Satz gilt auch, wenn die Jordan-Normalform nicht existiert. Das wird hier aber nicht gezeigt.

BEWEIS:

Sei

$$\chi_A(x) = \prod_{i=1}^m (x - \lambda_i)^{\alpha_i} \quad \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$$

$$A \sim \text{diag} \left(J(r_1^{(1)}, \lambda_1), \dots, J(r_{i(1)}^{(1)}, \lambda_1), J(r_1^{(2)}, \lambda_2), \dots, J(r_{i(m)}^{(m)}, \lambda_m) \right)$$

$$\chi_A(A) = \prod_{i=1}^m (A - \lambda_i I)^{\alpha_i} \quad \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$$

□

6 Kegelschnitte und Quadriken

Wir betrachten den \mathbb{R}^2 und eine Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c_1x + c_2y + d$$

Wir untersuchen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) = 0\}$$

Wir lösen also eine quadratische Gleichung.

DEFINITION 6.1: (quadratische Form)

Eine Funktion $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt quadratische Form, genau dann wenn

$$q(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

für bestimmte Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$. Man schreibt dann auch für alle $v \in \mathbb{R}^2$

$$q(v) = v^T A v$$

mit $A := (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ symmetrisch.

Auf \mathbb{R}^n sehen die quadratischen Formen so aus:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_i x_j$$

Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$ also eine symmetrische Matrix, so ist q mit

$$q(v) = v^T A v$$

gerade eine quadratische Form.

Die quadratischen Formen auf dem \mathbb{R}^n sind isomorph zu den Bilinearformen auf \mathbb{R}^n .

$$q \mapsto b(v, w) = \frac{1}{2} [q(v + w) - q(v) - q(w)]$$

$$h(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n c_i x_i + d$$

$$\implies h(v) = v^T A v + \langle c, v \rangle + d$$

DEFINITION 6.2: (Quadriке)

Die Quadriке einer so definierten Funktion h ist gerade die Lösungsmenge

$$\{v \in \mathbb{R}^n \mid h(v) = 0\}$$

DEFINITION 6.3: (Kegelschnitt)

Ein Kegelschnitt ist gerade eine Quadriке aus dem \mathbb{R}^2 .

Beispiel Kreis.

DEFINITION 6.4: (entarteter Kegelschnitt)

Ein Kegelschnitt heißt entartet, falls er ein Paar von Geraden, eine Gerade, einen Punkt oder die leere Menge ist.

Beispiel

THEOREM 6.1: (Kongruenz nicht entarteter Kegelschnitte)

Jeder nicht entartete Kegelschnitt ist kongruent zu einem der folgenden Typen, wobei jeweils $a_1, a_2 > 0$.

(i) *Ellipse:*

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - 1 = 0$$

(ii) *Hyperbel:*

$$a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 - 1 = 0$$

(iii) *Parabel:*

$$a_1 x_1^2 - x_2 = 0$$

BEWEIS:

Sei $A \in M_2(\mathbb{R}) \neq 0$. Dann gibt es ein $C \in O_2(\mathbb{R})$, sodass

$$C^T A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(h und $-h$ besitzen die gleichen Lösungsmengen.) Wir nehmen an, dass $\lambda_1 > 0$.

$$\lambda_1 x_1^2 + c_1 x_1 = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{c_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{c_1^2}{4\lambda_1}$$

$$x'_1 := x_1 + \frac{c_1}{2\lambda_1}$$

Wenn $\lambda_i \neq 0$, können wir den Koeffizienten c_i eliminieren.

Für den Fall $\lambda_2 > 0$

$$\lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + d' = 0$$

Sei

$$H(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + D$$

Wenn $d \geq 0$, dann ist der Kegelschnitt entartet. Dann folgt die Äquivalenz zu

$$\frac{\lambda_1}{-d} (x'_1)^2 + \frac{\lambda_2}{-d} (x'_2)^2 - 1 = 0$$

Sollte $\lambda_2 < 0$ sein, so gilt:

$$\lambda_1 (x'_1)^2 - |\lambda_2| (x'_2)^2 + d = 0$$

Wenn $d = 0$, dann ist h entartet. Wenn $d > 0$: So bekommen wir $d < 0$.

Sei nun $\lambda_2 = 0$. Dann muss $c_2 \neq 0$.

$$h \sim \frac{\lambda_1}{-c_2} (x'_1)^2 - x_2$$

□

BEISPIEL:

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_1=3/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{7}{2}(x_1 + x_2) + 4$$

Dies ist eine Ellipse.

Ist nun $n \geq 3$, so gibt es nach dem Spektralsatz für eine orthogonale Matrix, sodass A eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf der Diagonalen. Ist dann $\lambda_i \neq 0$, so können wir den Koeffizienten c_i eliminieren. Eine Normalform:

- $\det A \neq 0$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + d = 0$$

- $\det A = 0$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 + C_{k+1} x_{k+1} = 0$$