Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 02

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

Sei K ein Körper, $V = \mathrm{M}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $b : V \times V \longrightarrow K$ eine Bilinearform auf V.

(a): Es gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$

$$b(A,B) = \operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA) = b(B,A)$$

b ist also symmetrisch. Es reicht also die Linearität im ersten Argument zu zeigen, um die Bilinearität nachzuweisen. Für alle $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$ und alle $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} b(A + \lambda B, C) &= \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} + \lambda b_{ij})c_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}c_{ji} + \lambda b_{ij}c_{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ji} + \lambda \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}c_{ji} = b(A,C) + \lambda b(B,C) \end{aligned}$$

b ist also eine Bilinearform.

(b): Es gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$

$$b(A,B) = \operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0$$

b ist damit die triviale Bilinearform und besitzt damit die Nullmatrix als darstellende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis.

(c): Es seien $b(A,B) := \det(AB)$ für alle $A, B \in V$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = -3, \quad -1 \in \lambda(A)$$

$$\Longrightarrow \quad b(A + \mathrm{I}, \mathrm{I}) = \det(A + \mathrm{I}) = 0 \neq -2 = \det A + \det \mathrm{I} = b(A, \mathrm{I}) + b(\mathrm{I}, \mathrm{I})$$

Damit ist b keine Bilinearform.

(d): Sei $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i, j \leq n$. Es gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$

$$b(A,B) = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Der Nachweis, dass b bilinear ist kann vollkommen analog zu Teilaufgabe (a) behandelt werden.

Aufgabe 2

(a): Es sei b die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$, welche bezüglich der Basis $B := \{e_1, e_2, e_3\}$ durch die Matrix $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ gegeben ist. Weiterhin sei $\tilde{B} := \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ eine weitere Basis mit der zugehörigen Basistransformationsmatrix $C \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung ist dann bekannt, dass sich die Matrix A der Bilinearform b gemäß der folgenden Formel transformiert.

$$\tilde{A} = C^{\mathrm{T}} A C$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}$$

(b): Diese Lösung dieser Aufgabe kann analog zu (a) berechnet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \\ 11 & 10 & 29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und $V = K^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien weiterhin $W_1, W_2, W \subset V$ Unterräume und b eine symmetrische Bilinearform auf V.

(a): Sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & v \in (W_1 + W_2)_b^\perp \\ \iff\quad & b(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in W_1 + W_2 \\ \iff\quad & b(v, x+y) = 0 \text{ für alle } x \in W_1, y \in W_2 \\ \overset{(\star)}{\iff}\quad & b(v,x) = b(v,y) = 0 \text{ für alle } x \in W_1, y \in W_2 \\ \iff\quad & v \in (W_1)_b^\perp \wedge v \in (W_2)_b^\perp \\ \iff\quad & v \in (W_1)_b^\perp \cap (W_2)_b^\perp \end{aligned}$$

Die Rückrichtung von $(\star)$ ist klar aufgrund der Bilinearität von b. Für die vorhandene Richtung kann man, da es sich bei W_1 und W_2 um Unterräume handelt, entweder $x = 0$ oder $y = 0$ setzen.

$\square$

(b): Sei $v \in W$ beliebig.

$$\begin{aligned} \implies\quad & b(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in W_b^\perp \\ \iff\quad & v \in \left(W_b^\perp\right)_b^\perp \end{aligned}$$

Dies bedeutet gerade $W \subset \left(W_b^\perp\right)_b^\perp$.

$\square$

(c): Es seien nun $W_1 \subset W_2$ und $v \in (W_2)_b^\perp$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad b(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in W_2 \\
&\overset{(W_1 \subset W_2)}{\Longrightarrow} \quad b(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in W_1 \subset W_2 \\
&\Longrightarrow \quad v \in (W_1)_b^\perp
\end{aligned}$$

Es folgt also $(W_2)_b^\perp \subset (W_1)_b^\perp$.

$\square$

Aufgabe 4

Seien $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad b(A,B) := \det(A+B) - \det A - \det B$$

Dann ist b symmetrisch, da Folgendes für alle $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ gilt.

$$\begin{aligned}
b(A,B) &= \det(A+B) - \det A - \det B \\
&= \det(B+A) - \det B - \det A \\
&= b(B,A)
\end{aligned}$$

Seien nun $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ beliebig mit

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Dann folgt durch Berechnung der Determinanten

$$\begin{aligned}
b(A,B) &= (a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})(a_{21} + b_{21}) \\
&\qquad - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} \\
&= a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11}
\end{aligned}$$

Es ist aufgrund der bereits gezeigten Symmetrie ausreichend die Linearität im ersten Argument zu zeigen, um Bilinearität nachzuweisen. Für alle $A, B, C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
b(A + \lambda B, C) &= (a_{11} + \lambda b_{11})c_{22} - (a_{12} + \lambda b_{12})c_{21} \\
&\quad - (a_{21} + \lambda b_{21})c_{12} + (a_{22} + \lambda b_{22})c_{11} \\
&= a_{11}c_{22} + \lambda b_{11}c_{22} - a_{12}c_{21} + \lambda b_{12}c_{21} \\
&\quad - a_{21}c_{12} + \lambda b_{21}c_{12} + a_{22}c_{11} + \lambda b_{22}c_{11} \\
&= b(A,C) + \lambda b(B,C)
\end{aligned}$$

Es soll nun jede 2×2-Matrix $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit einem vierdimensionalen Vektor $a \in \mathbb{R}^4$ identifiziert werden.

$$a_1 := a_{11}, \quad a_2 := a_{12}, \quad a_3 := a_{21}, \quad a_4 := a_{22}$$

Dann lässt sich b für $x, y \in \mathbb{R}^4$ schreiben als

$$b(x,y) = x_1 y_4 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_1$$

Bezüglich der kanonischen Basis ergibt sich damit auch sofort die zu b zugehörige Matrix B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(x,y) = x^{\mathrm{T}} B y$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich die Signatur einer Bilinearform gerade aus der Anzahl positiver und negativer Eigenwerte der zugehörigen Matrix ergibt. Für das charakteristische Polynom von B folgt

$$\det(B - \lambda \mathrm{I}) = \left(1 - \lambda^2\right)^2 = (1-\lambda)^2 (1+\lambda)^2$$

Damit besitzt das charakteristische Polynom für $\lambda = \pm 1$ jeweils eine doppelte Nullstelle. Es gibt damit zwei positive und zwei negative Eigenwerte. Die Signatur von b ist also $(2,2)$.

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^4$. Dann ergibt sich deren Spur durch

$$\operatorname{tr} x = x_1 + x_4, \qquad \operatorname{tr} y = y_1 + y_4$$

Dann folgt damit direkt (analoges gilt auch für y)

$$\operatorname{tr} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -x_4$$

Es seien jetzt x, y spurfrei und $S := \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \operatorname{tr} x = 0 \right\}$. Dann gilt

$$b|_S(x,y) = -2 x_1 y_1 - x_2 y_3 - x_3 y_2$$

und es folgt auch hier direkt die zugehörige Matrix

$$B|_S = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$