Prof. M. Zähle, Dr. U. Freiberg 27.03.2009, 9:00-12:00 Uhr

Wintersemester 2008/2009

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Nachklausur

Hinweise: Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben. Insgesamt können Sie 45 Punkte erreichen. Die Klausur gilt als bestanden, wenn 20 Punkte erreicht werden.

Eine Lösung kann nur gewertet werden, wenn der Lösungsweg klar erkennbar ist. Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug. Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.

Bitte verwenden Sie für **jede** Aufgabe ein **neues** Blatt und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Studienrichtung** und Ihrer **Matrikel-Nummer**.

(Name, Vorname)	(Studienrichtung)	(Matrikel-Nr.)	(Punkte)	(Note)	(Zähle)

Aufgabe 1 (1+2+2=5 Punkte)

(a) Was ist eine lineare Abbildung?

(b) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn ihr Defekt gleich 0 ist.

(c) Formulieren Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen. Worauf lässt sich sein Beweis zurückführen (kurze Begründung)?

(Führen Sie bei (b) und (c) die verwendeten Begriffe ein.)

Aufgabe 2 (2+3=5 Punkte)

(a) Wie ist die Determinante einer quadratischen Matrix definiert?

(b) Beweisen Sie, dass sich die Determinante beim Addieren des Vielfachen einer Spalte zu einer anderen nicht ändert.

Aufgabe 3 (2+2+1=5 Punkte)

(a) Was ist ein Skalarprodukt in einem reellen Vektorraum?

(b) Zeigen Sie, dass in jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein natürliches Skalarprodukt existiert.

(c) Was versteht man unter einem euklidischen Punktraum?

Aufgabe 4 (6+8=14 Punkte)

(a) Welche der folgenden Mengen sind reelle Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ (jeweils kurze Begründung)?

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{(x_1.x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\} \\
U_2 &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | \sum_{i=1}^{4} x_i = 1\} \\
U_3 &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | \sum_{i=1}^{4} i x_i = 0\} \\
U_4 &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4\} \\
U_5 &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = 0\} \\
U_6 &:= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 \in \mathbb{Q}\}
\end{aligned}$$

(b) Man gebe jeweils eine Basis der linearen Unterräume U, V, $U+V$ und $U \cap V$ des $\mathbb{R}^4$ an, wobei

$$U := \mathrm{Lin}\left\{(1,1,0,-1)^T, (1,2,3,0)^T, (2,3,3,-1)^T\right\},$$

und

$$V := \mathrm{Lin}\left\{(1,2,2,-2)^T, (2,3,2,-3)^T, (1,3,4,-3)^T\right\}.$$

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)

(a) Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ hat das reelle Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a & -4 & -1 \\ 9 & 1 & -5 \\ 18 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 22 \\ 16 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung/keine Lösung/unendlich viele Lösungen? Für den letzten Fall gebe man die Lösungsmenge an.

(b) Man gebe ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^4$ ist:

$$(1,1,1,1)^T + \mathrm{Lin}\left\{(0,1,0,-2)^T, (1,1,0,3)^T\right\}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der reellen Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$