Prof. Dr. M. Zähle — Online: 11.10.2013
Aufgabenstellung: Dr. T. Bohl — ohne Abgabe

Wintersemester 2013/14

Lineare Algebra und Geometrie 1

0. Übungsblatt

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind vom Wahrheitsgehalt her zueinander äquivalent? Alle Aussagen beziehen sich auf dieselbe Situation. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch, aber wir können nicht feststellen, welches von beidem zutrifft.

(1) Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
(2) Wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nass.
(3) Wenn es regnet, dann ist die Straße nicht nass.
(4) Wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nicht nass.
(5) Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.
(6) Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es.
(7) Wenn die Straße nass ist, dann regnet es nicht.
(8) Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht.

Aufgabe 2. Vorgegeben ist: Der Dorfbarbier wohnt im Dorf und rasiert genau diejenigen Männer des Dorfes, die sich nicht selber rasieren. Folgt aus dem Vorgegebenen schon, ob der Dorfbarbier ein Mann oder eine Frau ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Seien A und B zwei Mengen. Beweisen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Mengen:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) .$$

(Der Backslash ist die Mengendifferenz, also z.B. $A \backslash B = A \cap (B^c)$. Die Gleichheit zweier Mengen U, V zeigt man, indem man beweist, dass jedes beliebige $u \in U$ auch $u \in V$ erfüllt und umgekehrt.)

Aufgabe 4. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv (d.h. $f(x) = f(z)$ ist nur möglich, wenn $x = z$)? Welche sind surjektiv (d.h. zu jedem Element $y \in \mathbb{R}$ gibt es mindestens ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = y$)? Welche sind bijektiv (d.h. surjektiv und injektiv)? Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(x) := x^2 + 3$
(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_2(x) := 3x - 2$
(3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_3(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ x - 2 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
(4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_4(x) := x^3 - 2x^2 - x + 2$

Aufgabe 5. Eine Getränkefirma hat 2 Orangensaftsorten im Angebot. Die Sorte ”fruchtig“ besteht aus 70% Orangensaft, 10% Zucker und 20% Wasser. Die Sorte ”mild“ besteht aus 50% Orangensaft, 20% Zucker und 30% Wasser. Die Firma will eine neue Sorte ”light“ einführen, die aus 22% Orangensaft, 7% Zucker und 71% Wasser besteht. Diese Sorte möchte die Firma aus den Sorten A und B mischen, wobei sie beliebig mit Wasser verdünnen kann. Welche Anteile muß die Firma verwenden?

Aufgabe 6. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(1) $\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$
(2) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}(n + 1)$
(3) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

(Wiederholen Sie bitte für sich das Prinzip der vollständigen Induktion falls nötig.)

Denkanstoß für Interessierte, ohne Punkte: Gibt es zu jedem festen $m \in \mathbb{N}$ Zahlen $a_{l,m}$, so dass $\sum_{k=0}^{n} k^m = \sum_{l=0}^{m+1} a_{l,m} n^l$ für alle n gilt?

Aufgabe 7. Seien A, B, C Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. (Hinweis: auf Aussagenlogik zurückführen. Bitte auf saubere Teilmengenschreibweise $\{x \in A : x \text{ erfüllt Eigenschaft}\}$ achten.)

(1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
(2) $(C \times C) \cup (A \times B) = (C \cup A) \times (C \cup B)$
(3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
(4) $(C \times C) \cap (A \times B) = (A \cap C) \times (B \cap C)$

.