14.6.16 10^{00}
AbHS1

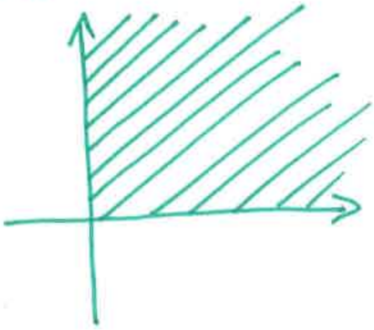
VIII Lineare Konvexgeometrie

Def 8.1 Sei V ein $\mathbb{R}$-VR, $E \subseteq V$ eine Teilmenge.
Wir sagen der Vektor $v \in V$ lässt sich aus E positiv linear kombinieren $\Longleftrightarrow \exists\, \alpha_i > 0,\ e_i \in E,\ n \geq 0$:

$$v = \alpha_1 e_1 + \_\_\_\_ + \alpha_n e_n$$

[für $n=0$ setzen wir $v = \sum_{i=1}^{0} \alpha_i e_i = 0$; 0 lässt sich aus jeder Teilmenge positiv linear kombinieren.]

Bsp Sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, Standardbasis von $\mathbb{R}^2$.
Die Menge der aus $\mathcal{B}$ positiv linear kombinierbaren Vektoren von $\mathbb{R}^2$ ist der abgeschlossene positive Quadrant



Alle Punkte im Inneren sind

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \ \alpha_i > 0,$$

also für $n=2$

Alle auf dem Rand (außer 0) sind

$$v = \alpha_1 e_1 \quad \text{oder} \quad v = \alpha_2 e_2,$$

also für $n=1$

Den Ursprung erhalten wir mit $n=0$.
Demnach hätte man in der Def. auch $\alpha_i \geq 0$ fordern können.
ABER: Diese Unterscheidung wird im Folgenden noch eine größere Rolle spielen. Also $\alpha_i \gneq 0$ für positive Linearkombination.

Satz 8.2 (Hauptsatz über lineare Ungleichungen)

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR und $E \subseteq V$ endliche Teilmenge. Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$ genau eine der folgenden Aussagen:

Entweder v lässt sich aus E positiv linear kombinieren

Oder $\exists\, \alpha \in V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) : \alpha(e) \geq 0 \ \forall e \in E$ und $\alpha(v) < 0$.

Im 1. Fall: kann v sogar aus höchstens $\dim V$ Elementen von E positiv linear kombiniert werden.

Ist im 2. Fall E ein Erzeugendensystem von V ($\langle E \rangle = V$), so kann α sogar so gewählt werden, dass $\ker \alpha$ von seinem Schnitt mit E erzeugt wird.

Anmerkg: i) zum 2. Fall: Ist ein Teilraum $W \subseteq V^*$ gegeben, derart, dass $\delta(V \setminus \{0\})$ nicht für alle $\delta \in W \ \{0\}$ ist, so können wir ein α der gesuchten Art in W finden.
Genauer gesagt: Für jede endliche Teilmenge von V und jedes $\alpha \in V^*$ existiert ein $\tilde{\alpha} \in W$, das auf dieser endlichen Teilmenge die selben Werte annimmt, wie α.

ii) Der Satz und der noch folgende Beweis stammen von Hermann Weyl (9.11.1885 – 8.12.1955), Zahlentheoretiker, theoretischer Physiker, Philosoph.

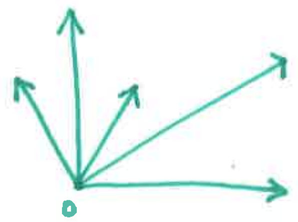
Bsp: Ikosaeder (W20) E sei die Menge der Ecken, eine Ecke liege auf dem Ursprung.
Dann ist die Menge der positiven Linearkombinationen aus E ein 5-eckiger Kegel.
Die 5 Seitenflächen sind die Kerne der "extremen Stützen von E" aus dem noch folgenden Beweis.

Korollar (Satz von Caratheodory)

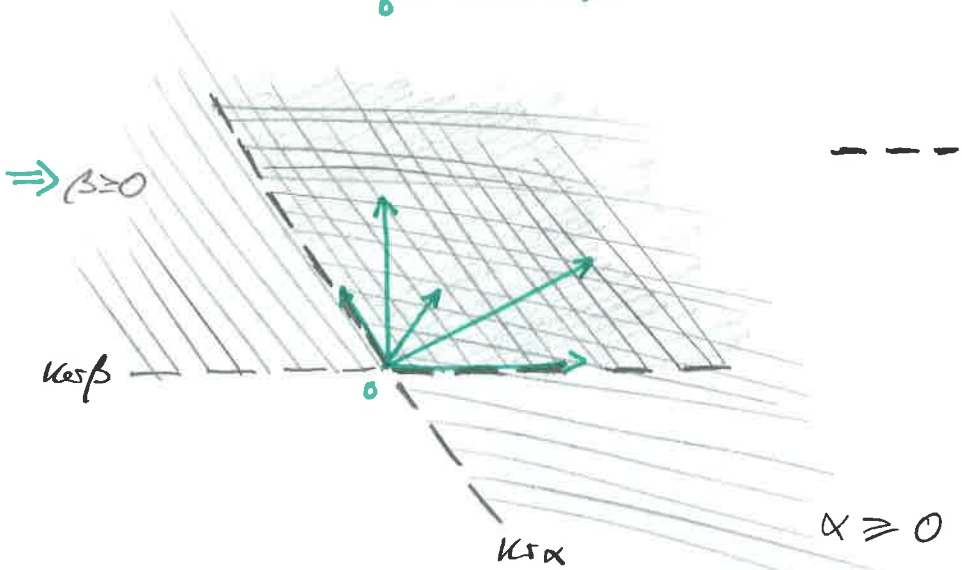
Sei V ein $\mathbb{R}$-VR, $T \subset V$ eine bel. Teilmenge.
Lässt sich $v \in V$ aus T positiv linear kombinieren, so lässt v sich bereits aus einer Teilmenge E von T mit $|E| = \dim V$ positiv linear kombinieren.

Beweis folgt direkt aus S. 8.2.

weiteres Bsp $E =$



5 Vektoren der Ebene



- - - : Kerne extremer Stützen α, β

Menge aller pos. LinKombs. ist schraffiert – inklusive der gestrichelten Ränder.
Die 2 „extremen Stützen" sind bis auf Skalarmult. eindeutig.
Einfach schraffierte Bereiche sind jene, auf denen je eine der extr. Stützen nichtnegativ ist.

Beweis OBdA $V = \langle E \rangle$ (Sonst V auf $\langle E \rangle$ verkleinern, da alle anderen gar nicht, also erst recht nicht positiv linear aus E kombiniert werden können.)

Wir nennen $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ mit $\alpha(e) \geq 0 \ \forall e \in E$ Stütze von E.
Wird zusätzlich $\ker \alpha$ erzeugt von $(\ker \alpha) \cap E$, so heißt α extreme Stütze von E.
Es gilt, dass $\lambda\alpha$ für $\lambda > 0$ wieder eine (extreme) Stütze ist, wenn α eine (extreme) Stütze ist.

Beweis über Induktion über $d = \dim V$. Dabei müssen wir die ?. die beiden Zusatzaussagen gleich mit beweisen.

Fallunterscheidung: ob E extreme Stützen besitzt.

Fall 1 E besitzt mind. 1 extreme Stütze. Sei dann $v \in V$ geg. mit $\alpha(v) \geq 0$ für jede extr. Stütze α.

ZZ: v lässt sich pos. lin. aus höchstens d Elementen kombinieren.

Fall 1.1 Liegt v im Kern einer der extremen Stützen, also $\exists \alpha$ extreme Stütze von mit $\alpha(v) = 0$, so ersetzen wir $E \subset V$ durch $E \cap \ker\alpha \subseteq \ker\alpha$ und sind fertig mit Induktion: Sei γ' Linearform auf $\ker\alpha$; γ' extreme Stütze von $E \cap \ker\alpha \subset \ker\alpha$.

Dann lässt sich γ' zu einer Linearform γ auf V ausdehnen.

Möglichkeiten für solche Ausdehnungen sind $\gamma + \mu\alpha$, $\mu \in \mathbb{R}$

α positiv auf E (außer auf Kern)

$\Rightarrow$ wenn μ groß genug gewählt ist auch $\gamma + \mu\alpha$ pos. auf $E \setminus \ker\alpha$ $\rightarrow$ auch $\gamma + \mu\alpha$ Stütze für hinreichend großes μ.

Wir wählen μ kleinstmöglich derart, dass $\gamma + \mu\alpha$ noch Stütze ist. Dies ist dann eine Linearform auf V, die eine Ausdehnung von γ' ist und selbst extreme Stütze ist.

Sind also alle extremen Stützen von $E \subset V$ nichtnegativ auf $v \in \ker\alpha$, dann auch alle extremen Stützen von $E \cap \ker\alpha \subset \ker\alpha$ und die Induktion funktioniert.

Fall 1.2 Liegt v bei keiner extremen Stütze im Kern, so sei $e \in E$ nicht im Kern aller extr. Stützen, Sei $\lambda \geq 0$ kleinstmöglich: $\alpha(v - \lambda e) \geq 0$ $\forall \alpha$ extr. Stützen aber derart, dass für eine extr. Stütze β $\beta(v - \lambda e) = 0$.

Dann folgt mit dem selben Argument, wie in Fall 1.1, dass $v - \lambda e$ sich pos. lin. kombinieren lässt aus $d-1$ Elementen von $E \cap \ker\beta$. Und damit v aus α El. von E.

Fall 2 E besitzt keine extremen Stützen. Der Fall findet nicht statt.

Sei $V \neq 0$ (sonst trivial). Sei $\tilde{\alpha} \in V^* \setminus \{0\}$: $\ker\tilde{\alpha} = \langle \ker\tilde{\alpha} \cap E \rangle$.

~~dass~~ Sei $E^+ = E^+(\tilde{\alpha}) := \{e \in E \mid \alpha(e) \geq 0\}$.

Wählen für α nun jenes $\tilde{\alpha}$, für das $|E^+|$ maximal wird.

(das so viel wie möglich positiv abbildet).

Nach Annahme ex. aber immer noch $e^- \in E: \alpha(e^-) < 0$.

OBdA (Mult mit Skalar) $\alpha(e^-) = -1$.

Betrachten die Projektion $\pi: V \to \ker\alpha,\ v \mapsto v + \alpha(v)e^-$.

Hätte $\pi(E^+)$ eine extreme Stütze β, so könnten wir diese mit der Vorschrift $\beta(e^-) = 0$ fortsetzen zu Linearform $\beta \in V^*$: $\beta|_{E^+} \geq 0$ und $\beta(e^-) = 0$ und damit wäre $\ker\beta = \langle \ker\beta \cap E \rangle$ ↯ Widerspruch zur Wahl von α.

Also hat $\pi(E^+)$ keine extr. Stütze. Nach IVoraussetzung lässt sich jeder Vektor aus $\ker\alpha$ positiv linear aus $\pi(E^+)$ kombinieren, unter der Einschränkung, dass nur der Koeff vor e^- negativ sein darf.

Aber es ex. mind. ein $e^+ \in E \cdot \alpha(e^+) > 0$, sonst wäre $-\alpha$ extr. Stütze.

Schreiben $-e^+$ als pos. lin Komb. aus $\pi(E^+)$ mit nur der Koeff von e^- darf neg. sein. Wenden α an.

$\alpha(e^+) > 0$, $\pi(E^+) = \{v + \alpha(v)e^- \mid v \in E^+\} \Rightarrow$ Koeffizient von e^- muss positiv sein.

Nach geeigneter Umformung lässt sich $-e^-$ als pos. LinKomb. von Elementen von E^+ darstellen.

Damit lässt sich jeder Vektor aus V positiv linear aus E kombinieren (sogar aus $E^+ \cup \{e^-\}$).

nzz es genügen d Elemente für Darstellg eines Vektors V als pos. Linkomb.

Sei $v = \lambda_1 e_1 + \_ + \lambda_n e_n$ pos. Linkomb von Elementen $e_i \in E$.

Sind mehr als d der $\lambda_i \neq 0$ (werden mehr als d Elemente aus E benutzt), so ist $(\lambda_1, \_, \lambda_n)$ ein Pkt. aus dem Inneren des positiven Quadranten von $\mathbb{R}^n$.

Jede mögliche Linkomb ist eine Lsg der Gleichg $v = \lambda_1 e_1 + \_ + \lambda_n e_n$ und bilden zusammen eine affine Gerade (Gerade, die nicht durch 0 geht, also um konstanten Vektor verschoben ist.)

Die Stelle, an der die Gerade den positiven Quadranten verlässt ist kürzere Darstellg von v als pos. Linkomb. von Elementen von E. □

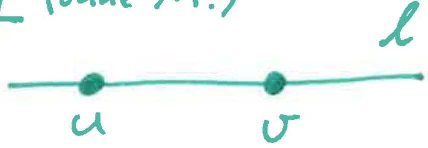
nächstes Mal: affine Räume.

16.6.16 8⁰⁰
AbHS4

$\mathbb{R}^n$ als affiner Raum

Ein affiner Raum ist ein Raum ohne Ursprung.
Die Elemente $u, v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir als Pkte und die Differenzen $v - u$ als Vektoren.

<u>Def</u> (ohne Nr.)



ℓ ist die <u>Grade</u> durch $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\ell = \{u + \alpha(v-u) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

das <u>abgeschl. Intervall</u> (Strecke):

$$[u,v] = \{u + \alpha(v-u) \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$
$$= \{(1-\alpha)u + \alpha v \mid 0 \le \alpha \le 1\}$$
$$= \{\beta u + \gamma v \mid \beta + \gamma = 1,\ 0 \le \gamma, \beta\}$$

Die <u>konvexe Hülle</u> von $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{Konv}(E) = \left\{\alpha_1 u_1 + \_\_ + \alpha_m u_m \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in \mathbb{N},\ u_i \in E, \\ 0 \le \alpha_i,\ \sum_i \alpha_i = 1 \end{array}\right\}$$

Wenn $v, w \in \mathrm{Konv}(E) \implies [v,w] \subseteq \mathrm{Konv}(E)$,

denn $v = \sum_i \alpha_i u_i$, $w = \sum_i \tilde{\alpha}_i u_i$

$$\Rightarrow \forall x \in [u,w]: \ x = \beta\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) + \gamma\left(\sum_i \tilde{\alpha}_i u_i\right), \ \beta + \gamma = 1$$

$$\text{und } \beta(\underbrace{\textstyle\sum_i \alpha_i}_{1}) + \gamma(\underbrace{\textstyle\sum_i \tilde{\alpha}_i}_{1}) = \beta + \gamma = 1 \quad \square$$

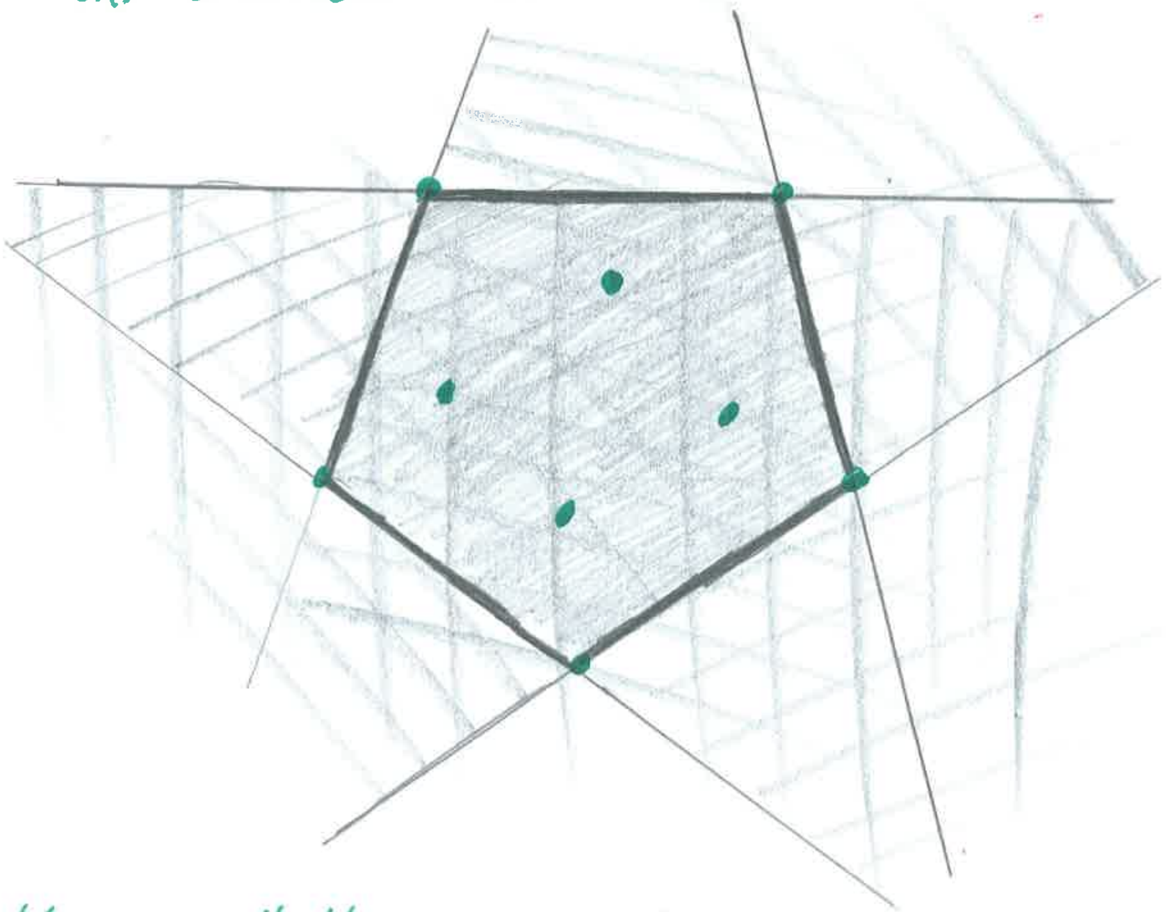
$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt affine Abb. $\iff \exists \ell \in (\mathbb{R}^n)^*, c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(v) = \ell(v) + c \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Wir können einen affinen Raum als die Verschiebung eines Raumes um einen konstanten Vektor auffassen (Bild)

Bsp (Konvexe Hülle)
Nun, da wir keinen Ursprung mehr haben, bilden die positiv linear kombinierbaren Vektoren die konvexe Hülle [Keine exakte Übertragung, wegen Unterschieden in der Definition, aber nah genug dran]

Gegeben seien die folgenden Punkte der affinen Ebene als Elemente von E:



Konvexe Hülle = unregelm. 5-Eck inkl. Rand ist Schnitt derjenigen "abgeschlossenen Halbebenen", die alle 9 Punkte umfassen und deren "begrenzende Hyperebene" von ihrem Schnitt mit E affin erzeugt wird (Hier: "begrenzende Hyperebenen" = eingezeichnete Geraden)

Wir verallgemeinern §8.2 zu

Satz 8.3 (Hauptsatz über affine Ungleichungen)

Sei E endl. TLM ~~des~~ affinen Raums $\mathbb{R}^n$.
Dann gilt $\forall p \in W$ genau eine der folgenden:

Entweder $p \in \mathrm{Konv}(E)$

Oder $\exists$ affine Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
$$\alpha(e) \geq 0 \ \forall e \in E \ \wedge \ \alpha(p) < 0$$

Im 1. Fall liegt p sogar bereits in der konvexen Hülle einer Teilmenge von E mit höchstens $(\dim W)+1$ Elementen. [Dim ist im affinen "um 1 niedriger", da ein Punkt "als Ursprung dienen" muss]

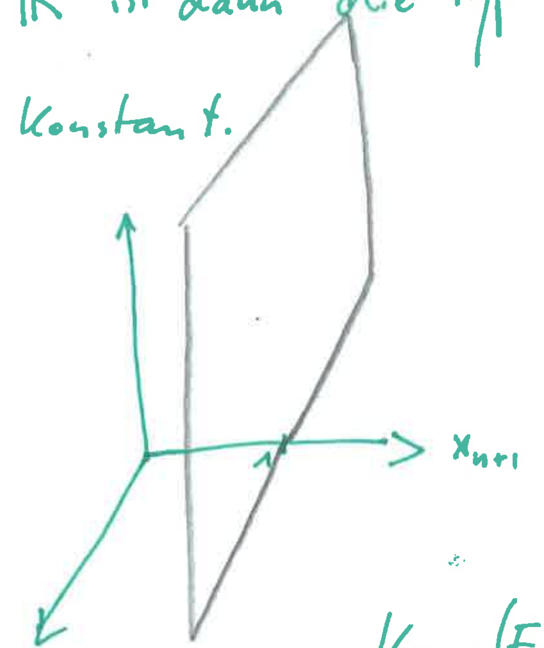
Erzeugt E den affinen Raum W, so kann im 2. Fall α sogar so gewählt werden, dass seine Nullstellenmenge von ihrem Schnitt mit E erzeugt wird.

Anm Sei W affiner Raum $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq W$ endl.
$$\Rightarrow \mathrm{Konv}(E) = \bigcap \left\{ \begin{array}{l} \text{abgeschlossene Halbräume } H \supseteq E : \\ \text{begrenzende Hyperebene von } H \text{ erzeugt von} \\ \text{ihrem Schnitt mit } E \end{array} \right\}$$

Hyperebene hat 1 Dimension weniger, als der Raum.

Siehe vorheriges Bsp.

Beweis folgt aus S. 8.2, indem wir den affinen $\mathbb{R}^n$ als Teilmenge des VRs $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen.
$\mathbb{R}^n$ ist dann die Hyperebene mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$, also Komponente $x_{n+1}=1$ konstant.



$u, v \in \mathbb{R}^n$ affine Pkte
entsprechen $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ Vektoren.

$$[u,v] = \mathbb{R}^n \cap \{\alpha \vec{u} + \gamma \vec{v} \mid \alpha, \gamma \geq 0\}$$

Wenn $E \subseteq \mathbb{R}^n$, dann

$$\mathrm{Konv}(E) = \mathbb{R}^n \cap \{\text{positive Linearkomb. aus } \bar{E} = \{\vec{u} \mid u \in E\}\}$$

Abbildg: $\Phi \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$ einschränken auf $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi((c_1, \ldots, c_n)) = \Phi((c_1, \ldots, c_n, 1)) = \Phi((c_1, \ldots, c_n, 0)) + \Phi((0, \ldots, 0, 1))$$

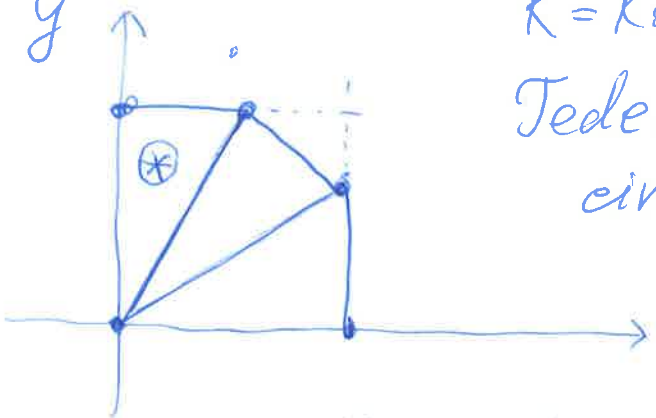
wegen Linearität.
Hiermit lässt sich der Beweis direkt übertragen $\square$

Def 8.4 Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Eine Teilmenge $C \subset V$, die den Ursprung enthält und stabil ist unter Multiplikation mit nichtnegativen Skalaren ($\lambda \cdot C \subseteq C \; \forall \lambda \geq 0$) heißt Kegel.
Ein Konvexer Kegel ist ein Kegel, der konvex ist;
D.h. $C \subseteq V$: $0 \in C$, $(v, w \in C \Rightarrow v + w \in C \wedge \lambda v \in C \; \forall \lambda \geq 0)$,
also zusätzlich stabil unter Addition.
Ein Konvexer Kegel, der keine Gerade umfasst heißt spitzer Konvexer Kegel.

Anm $\left.C, K \text{ (Konv.) Kegel}\right\} \Rightarrow C \cap K$ (Konv.) Kegel
Sei $E \subseteq V$. Der kleinste ~~Kegel~~ Konv. Kegel mit $E \subseteq C$ heißt der von E erzeugte Kegel.

Wenn $E \subset \mathbb{R}^n$ und $|E| < \infty$, heißt Konv(E) auch ein Polytop.

<u>Beispiel.</u> $n=2$, $E = \{(0,0),(0,2),(2,0),(1,2),(2,1)\}$



$K = $ Konv(E) ist ein Fünfeck.
Jeder Punkt von K ist eine Summe $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ mit $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$.

Die Ungleichungen, die K definieren sind $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 2$, $y \leq 2$, $x+y \leq 3$.

Nun nehmen wir an, wir kennen nur die Ungleichungen und möchten die Ecken finden. Dazu betrachten wir die Schnittpunkte. Zum Beispiel,

$$(x=0) \cap (y=0) = \{(0,0)\}.$$

überprüfen: $0 \leq 2$, $0 \leq 2$, $0 \leq 3$.
Manchmal ist der Schnitt leer:

$$(x=0) \cap (x=2) = \emptyset.$$

Und, vorsichtig, $(x=0) \cap (x+y=3) = \{(0,3)\}$.
Aber $3 \leq 2$ stimmt nicht. Ebenfalls,

$(x=2) \cap (y=2) = \{(2,2)\}$ und $4 \leq 3$ ist falsch.

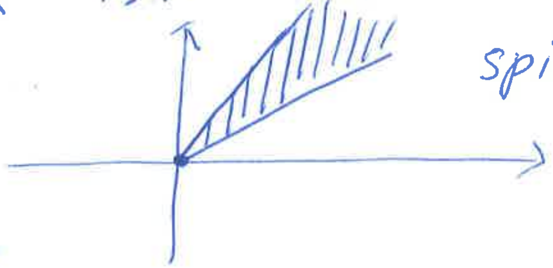
In $\mathbb{R}^3$: muss man drei Ungleichungen schneiden.

Def. 8.4. Ein Kegel in einem reellen Vektorraum V ist ein Teilmenge $C \subseteq V$, s.d. $\bar{0}_V \in C$ und $r \cdot u \in C \; \forall u \in C, \forall r \geq 0, r \in \mathbb{R}$. | 23.06.

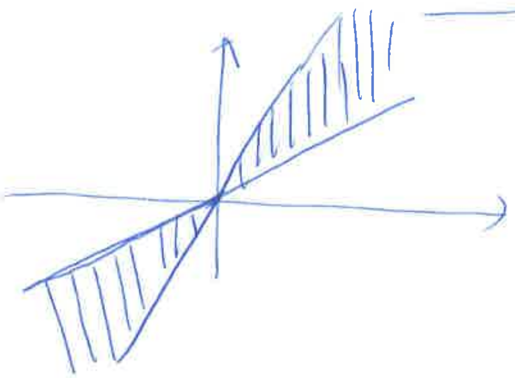
Ein Kegel C ist konvex, falls zusätzlich $u + v \in C \; \forall u, v \in C$.

Ein konvexer Kegel, der keine Gerade umfaßt, heißt spitzer konvexer Kegel.

Beispiele. $\mathbb{R}^2$ ist ein konvexer Kegel, nicht spitz.



spitzer konvexer Kegel



nicht konvexer Kegel

Bem. Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ Kegel, dann ist $C = C_1 \cap C_2$ wieder ein Kegel.

Sind C_1 und C_2 konvex, so ist C auch konvex.

Wenn $E \subseteq \mathbb{R}^n$, heißt $KK(E) = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \text{ konvexer Kegel} \\ E \subseteq C}} C$

der von E erzeugte konvexe Kegel. Der ist der kleinste konvexe Kegel, der E umfaßt.

$KK(E) = \{$ Die positiven Linearkombinationen aus $E \}$.

<u>Def. 8.5.</u> Sei $V = \mathbb{R}^n$, $E \subseteq V$ eine Teilmenge. Die Menge $E^T := \{ \ell \in V^* \mid \ell(e) \geq 0 \ \forall e \in E \}$ heißt die <u>Polaremenge</u> von E, $E^T \subseteq V^*$.

<u>Bem.</u> E^T ist immer ein konvexer Kegel.

Wir sagen, dass ein Kegel C endlich erzeugt ist, falls $C = KK(E)$, wo $|E| < \infty$.

<u>Satz 8.6.</u> Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein endlich erzeugter konvexer Kegel. Dann ist C^T auch endlich erzeugt und der kanonische Isomorphismus $\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^{**}$ induziert eine Bijektion $C \overset{1:1}{\longleftrightarrow} (C^T)^T$.

<u>Bew.</u> Setzen $V = \mathbb{R}^n$. $V \xrightarrow{\cong} V^{**}$ ist durch $v \longmapsto L_v$ mit $L_v(\ell) = \ell(v)$ gegeben.

Wir identifizieren v mit $L_v \in V^{**}$, V mit V^{**}.

Für jede Teilmenge $E' \subseteq V$ gilt es: $((E')^T)^T \supseteq E'$. Also $C \subseteq (C^T)^T$. Sei es $C = KK(E)$, wo $|E| < \infty$, $E \subseteq V$. Wir möchten zeigen, dass $(C^T)^T \subseteq C$, damit $C = (C^T)^T$.

(II)

S.8.2

$v \in (C^T)^T \Leftrightarrow l(v) \geq 0 \; \forall l \in C^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l(v) \geq 0 \; \forall l \in V^*$, s.d. $l(e) \geq 0 \; \forall e \in E \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in KK(E)$, also $v \in C$. Gezeigt.

Es bleibt nur zu zeigen, dass C^T endlich erzeugt ist. Wir zeigen dazu erst, dass

$$C = \{ v \in V \mid l_i(v) \geq 0, \; 1 \leq i \leq r, \; l_i \in V^* \}.$$

Falls $\langle E \rangle = V$, kommen wir nochmal zu dem Beweis des Satzes 8.2.

Fall 1: $KK(E) = \{ v \in V \mid \alpha(v) \geq 0, \; \alpha$ extreme Stütze von $E \}$

Bis auf $\alpha \sim r\alpha$ für $r > 0$, gibt es nur endlich viele extreme Stützen und damit $C = KK(E) = \{ v \in V \mid \alpha_i(v) \geq 0, \; 1 \leq i \leq r' \}$.

Fall 2: E besitzt keine extreme Stütze.

Das passiert nicht. (Induktion über n.)

$\pi(E^+) \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$, $\pi(E^+) \supseteq E \cap \operatorname{Ker} \alpha$, $\langle E \cap \operatorname{Ker} \alpha \rangle = \operatorname{Ker} \alpha$. Und es war gezeigt, dass $\pi(E^+)$ keine extremen Stützen hat. Im Widerspruch zu der Induktionsannahme.

$(l = 0 \Leftrightarrow l \geq 0 \wedge -l \geq 0)$

Falls $\langle E \rangle = V_0 \subsetneq V$, nehmen wir eine Basis in $\operatorname{Ann}(V_0)$, $\operatorname{Ann}(V_0) \subseteq V^*$, und fortsetzen die extremen Stützen von E, die in V_0^* liegen, auf V. Nun haben wir die Linearfunktionen $l_1, \dots, l_r$.

Sei $K = KK(\{l_1, \dots, l_r\})$. Dann $C = K^T$ und $C^T = (K^T)^T = K$. ▩

Kor. (Charakterisierungen **spitzer** konvexer Kegel). Für $C = KK(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|E| < \infty$ sind gleichbedeutend:

1. C ist spitz;
2. $\exists l \in V^*$, $V = \mathbb{R}^n$, s.d. $l(u) > 0$ $\forall u \in C, u \neq \bar{o}_V$;
3. $\langle C^T \rangle = V^*$.

<u>Bew.</u> C ist spitz $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{R}v \not\subseteq C$ $\forall v \neq \bar{o}_V$.

2. $\Rightarrow$ 1. Klar.

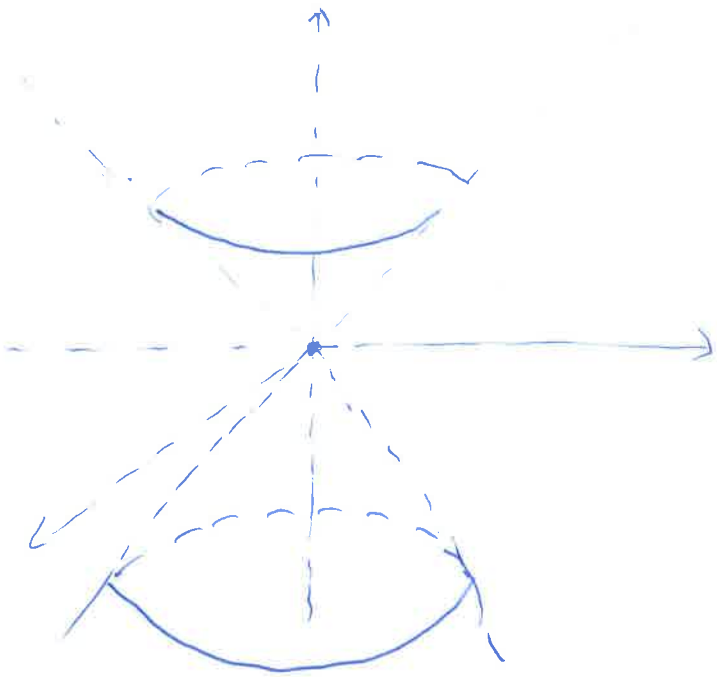
1. $\Rightarrow$ 3. Wenn $\langle C^T \rangle = \mathcal{U} \subsetneqq V^*$, dann $\mathrm{Ann}(\mathcal{U}) \subseteq (C^T)^T$ und $\mathrm{Ann}(\mathcal{U}) \neq \{\bar{o}_V\}$. Weil $(C^T)^T = C$, ist C nicht spitz.

3. $\Rightarrow$ 2. Nach dem Satz 8.6. gilt es $C^T = KK(\{l_1, \dots, l_r\})$. Sei $l = l_1 + \dots + l_r$. Wenn $l(u) = 0$ und $u \in C$, dann $l_i(u) = 0$ $\forall i$, weil $l_j(u) \geq 0$ $\forall j$. Denn $\langle l_1, \dots, l_l \rangle = V^*$, ist es $\tilde{l}(u) = 0$ $\forall \tilde{l} \in V^*$. Folglich $u = \bar{o}_V$. ▩

Quadriken in $\mathbb{R}^2$ als Kegelschitte

In $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Kegel

$$C: \quad z^2 = x^2 + y^2$$



nicht konvex,
nicht spitz.

$C_0 = C \cap \{z \geq 0\}$
ist konvex und spitz, aber nicht endlich erzeugt.

Wir schneiden C (oder C_0) mit Ebenen.

z.B. $z = R$ $(R \neq 0)$ bringt einen Kreis $x^2 + y^2 = R^2$, $z = R$.

Mit $y = c$: $z^2 - x^2 = c^2$, Hyperbel, $c \neq 0$.

Mit $z = x + 1$: $2x = y^2 - 1$, Parabel.

Allgemein, $z = ax + by + c$ führt zu

$$(a^2 - 1)x^2 + 2abxy + (b^2 - 1)y^2 + 2acx + 2bcy + c^2 = 0.$$

$y = 0$ führt zu $z = \pm x$, eine entartete Quadrik.