5. Kegelschnitte und Quadriken

$\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten X_1, X_2.

$$h(X_1,X_2) = a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 + \\ + b_1X_1 + b_2X_2 + d$$

ist ein Polynom von Grad ≤ 2.

Wir Unteruchen die Teilmenge, wo

$$h(\gamma_1,\gamma_2) = 0,$$

lösen eine quadratische Gleichung.

Der quadratische Anteil von $h(X_1,X_2)$

$$q(X_1,X_2) = a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2$$

wird als quadratische Form bezeichnet.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Merken $A = A^t$. Dann

$q(\gamma_1,\gamma_2) = v^tAv$ für $v = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$. Und

$h(\gamma_1,\gamma_2) = v^tAv + (b_1,b_2)v + d$.

$$\left\{\begin{matrix}\text{Die quadratischen} \\ \text{Formen auf } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{matrix}\text{Die symmetrischen} \\ \text{Bilinearformen} \\ \text{auf } \mathbb{R}^n\end{matrix}\right\}$$

$$q \longmapsto b(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right)$$

$$\left(q(v) = b(v,v)\right) \longleftarrow\!\!| \; b$$

Kegelschnitt = Quadrike in $\mathbb{R}^2$

Quadrike = L.-M. von $h(X_1,\dots,X_n) = 0$, $\deg h = 2$

Wir möchten, dass $\deg h = 2$, also $a_{11} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ oder $a_{22} \neq 0$; $A \neq 0$.

Def. 5.1. Ein Kegelschnitt heißt <u>entartet</u>, falls er ein Paar von Geraden, eine Gerade, ein Punct oder die leere Menge ist.

Entartete Beispiele:

$$(X_1 - 1)(X_2 - 2) = X_1 X_2 - 2X_1 - X_2 + 2$$

$$(X_1 + X_2 - 2)^2 = X_1^2 + 2X_1 X_2 + X_2^2 - 4X_1 - 4X_2 + 4$$

$$X_1^2 + X_2^2 = 0 \iff X_1 = X_2 = 0$$

$$X_1^2 + X_2^2 + 1 \quad , \quad \text{keine Lösung.}$$

Wir wollen die Kegelschnitte als geometrische Figuren beschreiben, orthogonale Transformationen und Parallelverschiebungen sind erlaubt.

Satz 5.2. Jeder nichtentartete Kegelschitt ist kongruent zu einer der folgenden Typen:

(i) Ellipse: $a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 - 1 = 0$;

(ii) Hyperbel: $a_{11} X_1^2 - a_{22} X_2^2 - 1 = 0$;

(iii) Parabel: $a_{11} X_1^2 - X_2 = 0$,

wobei jeweils $a_{11}, a_{22} > 0$.

Bew. Zuerst betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Nach dem Spektralsatz (2.19) $\exists C \in O_2$ (eigentlich eine Drehung), s.d.

$$C^t A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Falls $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ist es $A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} C^t = 0$. Also $\lambda_1 \neq 0$ oder $\lambda_2 \neq 0$.

Wir können x_1 und x_2 vertauschen und wir können h durch $-h$ ersetzen. Nehmen an, $\lambda_1 > 0$. Wir arbeiten mit x_1 am Anfang. Nun haben wir eine Gleichung $\tilde{h} = 0$, $\tilde{h}(x_1, x_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + d$.

$x_1' = x_1 + \dfrac{c_1}{2\lambda_1}$ führt zu

$$\tilde{h}(x_1', x_2) = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 x_2^2 + c_2 x_2 + d - \frac{c_1^2}{4\lambda_1}.$$

Wenn $\lambda_2 \neq 0$, können wir auch den Koeffizient c_2 eliminieren.

Fall (i): $\lambda_2 > 0$. Hier $\tilde{h}(x_1', x_2') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + d'$.

Falls $d' \geq 0$, ist der Kegelschitt entartet (ein Punkt oder leere Menge). Sonst teilen wir die Gleichung durch $-d'$.

Fall (ii): $\lambda_2 < 0$. Ähnlich. Nur falls $d = 0$ bekommen wir

$$(\sqrt{\lambda_1}\, x_1 - \sqrt{\lambda_2}\, x_2)(\sqrt{\lambda_1}\, x_1 + \sqrt{\lambda_2}\, x_2) = 0,$$

und falls $d > 0$, müssen wir x_1 und x_2 vertauschen.

Fall (iii) $\lambda_2 = 0$. Hier ist die Gleichung

$$\tilde{h}(x_1', x_2) = \lambda_1 (x_1')^2 + c_2 x_2 + d.$$

Wenn $c_2 = 0$, ist der Kegelschnitt entartet.

Wenn $c_2 > 0$, multiplizieren wir x_2 mit -1.

Am besten, sei $c_2 < 0$. Die Gleichung ist

$$\frac{\lambda_1}{-c_2}(x_1')^2 - \left(x_2 + \frac{d}{c_2}\right) = 0, \quad x_2' = x_2 + \frac{d}{c_2}.$$ ▨

<u>Bem.</u> Im Beweis haben wir auch alle entartete Kegelschnitte gesehen.

<u>Beispiel.</u> $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 4.$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$; $1 > 0$.

A ist positiv definit $\Rightarrow$ Ellipse oder entartet

$$\chi_A(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{4} = (x-1)^2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

③

$$h(x_1,x_2)=\frac{1}{4}(x_1-x_2)^2+\frac{3}{4}(x_1+x_2)^2+$$
$$+\frac{1}{2}(x_1-x_2)+\frac{7}{2}(x_1+x_2)+4 \qquad (\times 4)$$

$$\tilde{h}(x_1',x_2')=(x_1')^2+2x_1'+3(x_2')^2+14x_2'+16=$$
$$=(x_1'+1)^2+3\left(x_2'+\frac{7}{3}\right)^2-\frac{4}{3}.$$ Ellipse.

Für $n\geq 3$ kann man die gleiche Methode anwenden um die Quadriken in $\mathbb{R}^n$ zu klassifizieren.

$$h(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}c_ix_i+d,$$ $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ ist symmetrisch, $u=(c_1,\dots,c_n)$.

$h(v)=v^tAv+u\cdot v+d$. $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ durch eine orthogonale Transformation.

Falls $\lambda_i\neq 0$, können wir c_i eliminieren.

Falls $\det(A)\neq 0$, bekommen wir $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i')^2+d'=0$;

wenn $\det(A)=0$, dann $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i')^2+c_{k+1}x_k'=0$.

wo $1\leq k<n$.

Die Signatur (p,q,s) von A ist eine Invariante bis auf $(p,q,s)\rightsquigarrow(q,p,s)$.

Beispiel. $n=3$. Nicht entartete Quadriken.

$(3,0,0)$ $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + d = 0$.

$d \geq 0$: ein Punkt oder leere Menge (entartet)

(i) $d<0$: Ellipsoide, $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 - 1 = 0$

$(2,1,0)$ (ii) Einschalige Hyperboloide

(Falls $d=0$, entartet.) $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 - \lambda_3 X_3^2 - 1 = 0$;

$(1,2,0)$ (iii) Zweischalige Hyperboloide

(Wir möchten $d=-1$ haben.)

$$\lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2 - \lambda_3 X_3^2 - 1 = 0;$$

$(2,0,1)$ (iv) Elliptische Paraboloide

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 - X_3 = 0$$

$(1,1,1)$ (v) Hyperbolische Paraboloide

$$\lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2^2 - X_3 = 0.$$

$(0,1,2)$ (oder $(1,0,2)$) $\Longrightarrow$ entartet.

④

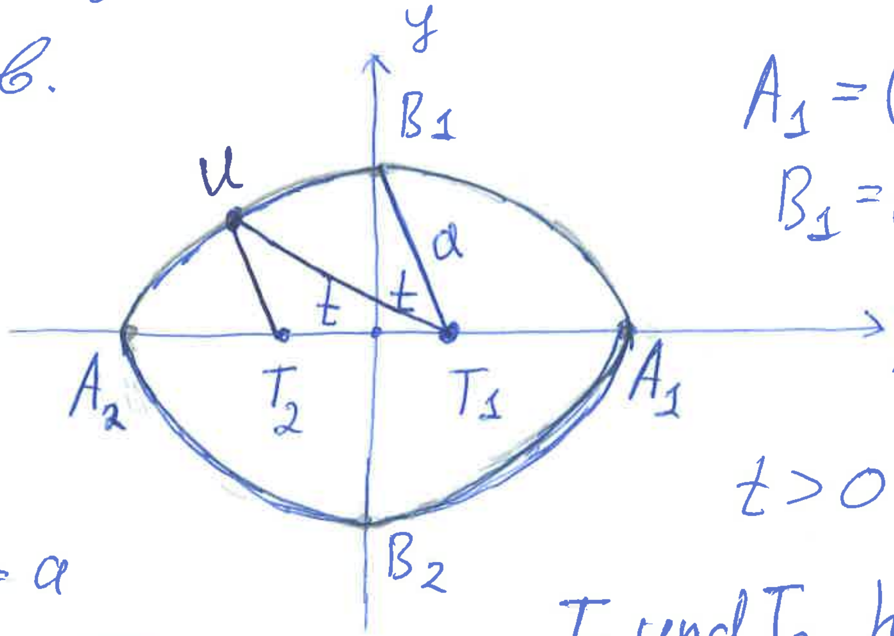
Sei wieder $n=2$, $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \ a, b > 0.$$

Q ist ein Kreis $\Leftrightarrow$ $a = b$.

Dann ist a der Radius.

Sei $a > b$.



$A_1 = (a, 0)$

$B_1 = (0, b)$

$t > 0$

$d(B_1, T_1) = a$

$t = \sqrt{a^2 - b^2}$

T_1 und T_2 heißen Brennpunkte.

t ist so gewählt, dass

$$d(A_1, T_1) + d(A_1, T_2) = d(B_1, T_1) + d(B_1, T_2)$$

$$a - t + a + t = a + a$$

Sei $u \in Q$. Merken $d(u, T_1) + d(u, T_2) = 2a$.

Wenn $u = (\alpha, \beta)$, dann $d(u, T_1) + d(u, T_2) =$

$= \sqrt{\beta^2 + (\alpha - t)^2} + \sqrt{\beta^2 + (\alpha + t)^2} = d_1 + d_2$. Und

$$d_1 = 2a - d_2 \overset{\text{quadrieren}}{\Leftrightarrow} \quad (d_2 \leq 2a)$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \alpha^2 + t^2 - 2\alpha t = 4a^2 + \beta^2 + \alpha^2 + t^2 + 2\alpha t - 4a d_2$$

Äquivalent $4\alpha d_2 = 4a^2 + 4\alpha t \iff$

quadrieren

$$\iff a^2(\beta^2+\alpha^2+t^2+2\alpha t) = a^4 + 2\alpha t a^2 + \alpha^2 t^2 \iff$$

$$\iff a^2(\beta^2+\alpha^2+a^2-b^2) = a^4 + \alpha^2 a^2 - \alpha^2 b^2 \iff$$

$$\iff a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2 b^2 \iff \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1.$$

Wenn wir nur orthogonale Transformationen erlauben, sind zwei Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1 \quad \text{mit}$$

$a \geq b > 0$, $a' \geq b' > 0$ und $(a,b) \neq (a',b')$ nicht äquivalent.

Aber merken: $x \longmapsto \frac{x}{a}$, $y \longmapsto \frac{y}{b}$ führt zu $(x')^2 + (y')^2 = 1$.

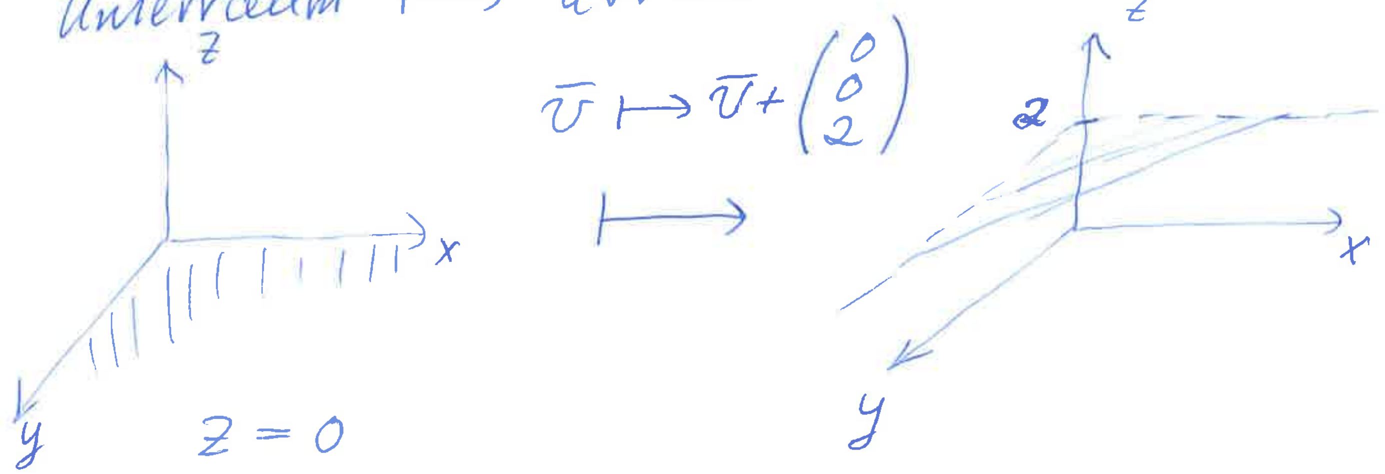
Falls wir alle lineare (affine) Abbildungen erlauben, sind alle Ellipsen äquivalent.

Affine Abbildung: $v \longmapsto f(v) + w$, wo $v, w \in V$, $f: V \to V$ linear.

$v \longmapsto v + w$ ist eine Verschiebung.

Unter affinen Transformationen gehen

$$\text{Gerade} \longmapsto \text{Gerade}$$
$$\text{Punkt} \longmapsto \text{Punkt}$$
$$\text{Unterraum} \longmapsto \text{affiner Unterraum}.$$



Was passiert mit den Quadriken?

$$h(v) = v^t A v + u \cdot v + d$$

$$h(Cv + w) = v^t C^t A C v + uC \cdot v + 2w^t A C v +$$
$$+ (w^t A w + u \cdot w + d)$$

$$A \mapsto C^t A C, \quad u \mapsto uC + 2w^t A C.$$

Die Signatur von A ändert sich nicht.
Falls die Quadrike nicht entartet war bleibt sie nicht entartet, $\det(C) \neq 0$.

<u>$n = 2$.</u> Der Typ ändert sich nicht (auch wenn wir alle affine Transformationen erlauben).

Noch mal das <u>Beispiel</u>

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 + 4$$

$$h = \underbrace{\left(X_1 + \frac{1}{2}X_2\right)}_{X_1'}^2 + \frac{3}{4}X_2^2 + 4\left(X_1 + \frac{1}{2}X_2\right) + X_2 + 4$$

$$h(X_1', X_2) = (X_1' + 2)^2 + \frac{3}{4}\left(X_2 + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ellipse.

Die neuen Koordinaten sind nicht orthogonal.

Bem. über $\mathbb{C}$ gibt es keine Signatur.

$$X_1^2 + X_2^2 = 1 \quad \longmapsto (X_1')^2 - (X_2')^2 = 1$$

$$X_2 \longmapsto X_2' = iX_2 \quad , \; i^2 = -1.$$

Der $\mathrm{rk}(A)$ ist eine Invariante.
