7 Euklidische Räume und ihre Abbildungen

7.1 Skalarprodukt Norm, Winkel, Metrik

Die aus der euklidischen Schulgeometrie bekannten Objekte wie Punkte, Geraden, Ebenen und Vektoren haben wir bereits verallgemeinert und ihre linearen und affinen Eigenschaften behandelt. Unser Ziel besteht nun darin, solche Begriffe wie Länge von Strecken und Vektoren, Winkel zwischen Geraden, Ebenen und Vektoren, das Prinzip der Orthogonalität, Volumen u.ä. mathematisch streng einzuführen. Wir brauchen dazu:

1) eine Metrik im Punktraum für den Abstand,

2) eine Norm im Vektorraum für die Länge,

3) ein Skalarprodukt im Vektorraum für die Winkel, das eng mit der Metrik und der Norm verbunden ist.

Es hat sich als günstig erwiesen, den Begriff des Skalarprodukts an den Anfang zu stellen: Ausgangspunkt ist eine reelle affine Geometrie $(\mathcal{A}, V, f)$ oder nur ein linearer Raum V über dem Körper $\mathbb{R}$.

Definition. Ein **Skalarprodukt** in V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $B : V \times V \to \mathbb{R}$, d.h.

1) B ist bilinear

2) $B(u, v) = B(v, u)$

3) $B(v, v) > 0$ für $v \neq 0$.

Üblich sind folgende Kurzschreibweisen: $B(u, v) = (u, v),\ B(u, v) = \langle u, v\rangle$ oder $B(u, v) = u \cdot v$. Wir wollen hier die eckigen Klammern benutzen.

Bemerkung. Aus der Bilinearität folgt sofort $B(\mathcal{O}, v) = B(v, \mathcal{O}) = 0,\ \forall v \in V$.

7.1.1 Satz. *In jedem endlichdimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ existiert ein Skalarprodukt.*

Beweis. Wir wählen irgendeine Basis $b_1,\ \ldots,\ b_n$ in V und bezeichnen die Koordinaten von $u, v \in V$ mit $u_1,\ \ldots,\ u_n$ bzw. $v_1,\ \ldots,\ v_n$. Dann genügt

$$B(u, v) := \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$$

allen Bedingungen an ein Skalarprodukt. □

Bemerkung. Aus dem obenstehenden Beweis ist ersichtlich, dass es in V verschiedene Skalarprodukte gibt. Weiter unten werden wir diese beschreiben.

Definition. Ein endlichdimensionaler Vektorraum, versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, heißt **euklidischer Vektorraum**. Im n–dimensionalen Fall schreibt man auch $\mathbb{E}_n$.

Definition. Ein **euklidischer Punktraum** ist ein affiner Raum, dessen erzeugter Vektorraum euklidisch ist.

Die folgende Eigenschaft eines Skalarproduktes in V ist grundlegend für alles weitere.

7.1.2 Satz (Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)**.**

(1) $\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \, \langle v, v \rangle$

(2) *Die Gleichheit in* (1) *gilt genau dann, wenn* u *und* v *kollinear sind.*

Beweis. Falls $v = \mathcal{O}$ ist, so gilt die Gleichheit in (1), und u und v sind linear unabhängig. Sei nun $v \neq \mathcal{O}$. Wir setzen $\lambda := \frac{\langle u,v \rangle}{\langle v,v \rangle}$ und erhalten aus 1) – 3)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - \lambda v,\ u - \lambda v \rangle = \langle u, u \rangle + \lambda^2 \langle v, v \rangle - 2\lambda \langle u, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle^2} \, \langle v, v \rangle - 2 \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \, \langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

d.h. $\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$. Wenn hier die Gleichheit gilt, dann folgt $\langle u - \lambda v,\ u - \lambda v \rangle = 0$, also $u - \lambda v = \mathcal{O}$. Ist umgekehrt $u = \mu v$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$, so ergibt sich $\langle u, v \rangle^2 = \langle \mu v, v \rangle^2 = \mu^2 \langle v, v \rangle^2 = \langle \mu v,\ \mu v \rangle \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$, d.h. die gewünschte Gleichheit. $\square$

Mit Hilfe des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in V führen wir nun die Länge von Vektoren ein:

Definition. $\boxed{|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}}$ heißt **Betrag** oder **Länge** des Vektors $v \in V$.

7.1.3 Satz. *Die Länge von Vektoren bestimmt eine Norm im Vektorraum, d.h.*

(1) $|v| > 0$ *für* $v \neq \mathcal{O}$ *(positive Definitheit)*

(2) $|\lambda v| = |\lambda| \, |v|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *(positive Linearität)*

(3) $|u + v| \leq |u| + |v|$ *(Dreiecksungleichung)*

Bemerkung.

1) Aus (2) folgt $|\mathcal{O}| = 0$.

2) Ein $v \in V$ mit $|v| = 1$ heißt **normierter** oder **Einheitsvektor**.

Beweis vom Satz 7.1.3. **(1)** resultiert aus der positiven Definitheit des Skalarproduktes und **(2)** aus der entsprechenden Eigenschaft: $|\lambda v| = \sqrt{\langle \lambda v,\, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v\rangle} = |\lambda|\,|v|$. Die Schwarzsche Ungleichung lautet in der Sprache der Beträge $|\langle u, v\rangle| \leq |u|\,|v|$ und führt zu folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= \langle u+v,\, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v\rangle \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u|\,|v| = \big(|u| + |v|\big)^2 . \end{aligned}$$

Dies ergibt aber die Dreiecksungleichung **(3)**. $\square$

Aufgabe. In der Dreiecksungleichung gilt genau dann die Gleichheit, wenn u und v gleichgerichtet sind. $\bullet$

Für den Winkelbegriff benutzen wir ebenfalls das Skalarprodukt. Eine weitere Konsequenz aus der Chauchy–Schwarzschen Ungleichung ist nämlich wegen

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|} \leq 1 \quad \text{für} \quad u, v \neq \mathcal{O}$$

die Existenz eines eindeutig bestimmten $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|}}$$

Definition. α heißt **Winkel** zwischen den Vektoren u und v. Man schreibt auch $\alpha = \sphericalangle(u, v)$.

Bemerkung. Der Begriff des Winkels zwischen Geraden lässt sich darauf zurückführen, wobei dann stets zwei Winkel auftreten.

Schließlich wollen wir noch den Abstand zwischen den Punkten eines affinen Raumes $\mathcal{A}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im erzeugten Vektorraum V bestimmen:

Definition. $d(A, B) := |\overrightarrow{AB}\,|$ heißt **Abstand** zwischen den Punkten $A, B \in \mathcal{A}$ oder auch **Länge der Stecke** AB.

7.1.4 Satz. *Durch die Abbildung $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik in $\mathcal{A}$ gegeben, d.h.*

(1) $d(A, B) \geq 0$, *und* $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ *(positive Definitheit)*

(2) $d(A, B) = d(B, A)$ *(Symmetrie)*

(3) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ *(Dreiecksungleichung).*

Beweis. **(1)** Folgt aus (1) für die Norm und $|\mathcal{O}| = 0$. Für **(2)** bemerken wir, dass $|\overrightarrow{AB}\,| = |-\overrightarrow{BA}\,| = |-1|\,|\overrightarrow{BA}\,| = |\overrightarrow{BA}\,|$, und **(3)** ergibt sich aus (3) für die Norm wegen $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. $\square$

7.2 Orthogonalität

Sei V wieder ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

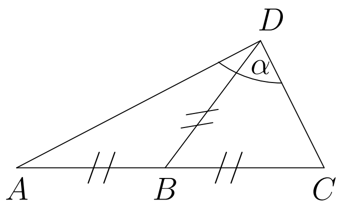
Definition. Die Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, falls $\langle u, v\rangle = 0$.

Insbesondere ist der Nullvektor orthogonal zu jedem anderen. Für $u, v \neq \mathcal{O}$ haben wir $\langle u, v\rangle = |u|\,|v| \cos \sphericalangle(u, v)$. Also sind u und v genau dann orthogonal, wenn gilt

$$\boxed{\sphericalangle(u, v) = \frac{\pi}{2}}.$$

Man spricht von einem **rechten Winkel** und schreibt auch $u \perp v$.

Aufgabe. Beweisen Sie den Thales–Satz:



Wenn die Strecken $AB,\ BC$ und BD gleichlang sind, so ist der Winkel α ein rechter.
Hinweis: Benutzen Sie die Vektordarstellung !

Definition. Ein Vektorsystem $S \subset V$ heißt **orthogonal**, falls alle Vektoren aus S paarweise orthogonal sind.

Definition. $S \subset V$ heißt **orthonormiertes** System, falls es orthogonal ist und nur aus normierten Vektoren besteht.

7.2.1 Satz. *Jedes orthogonale System S mit $\mathcal{O} \notin S$ ist linear unabhängig.*

Beweis. Sei $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \mathcal{O}$ mit $v_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$.
Dann ist für $j = 1, \ldots, k$, $\quad 0 = \Big\langle v_j,\ \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \Big\rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \big\langle v_j, v_i \big\rangle = \lambda_j \big\langle v_j, v_j \big\rangle$ aufgrund der paarweisen Orthogonalität. Somit ist $\lambda_j = 0$, denn $v_j = \mathcal{O}$ wurde ausgeschlossen. $\square$

Koordinatendarstellung des Skalarproduktes in euklidischen Vektorräumen

Sei $\dim V = n$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis. Wir benutzen die Koordinatendarstellung $u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i b_i$ und $v = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j b_j$ und die Bilinearität des Skalarproduktes für $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{n} u_i v_j \langle b_i, b_j\rangle$. In der Bezeichnung

$$g_{ij} := \langle b_i, b_j\rangle$$

ergibt sich

$$\boxed{\langle u, v\rangle = \sum_{i.j=1}^{n} g_{ij}\, u_i v_j}$$

7.2.2 Satz. *Eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in E_n ist genau dann orthonormiert, wenn für die Koordinatendarstellung gilt*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig, denn im orthonormierten Fall haben wir $g_{ij} = \delta_{ij}$.
Setzen wir $\langle u, v\rangle = \sum u_i v_i$ voraus, so erhalten wir speziell $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, denn für einen Basisvektor e_k ist die k–te Koordinate gleich 1, und alle anderen Koordinaten sind 0. □

Insbesondere bilden dann bezüglich des **kanonischen Skalarprodukts**

$$\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

im $\mathbb{R}^n$ die Standardbasisvektoren $\{\bar{e}_i, \ldots, \bar{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis.

Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren

7.2.3 Satz. *Seien $\{a_1, a_2, \ldots\}$ abzählbar (endlich oder unendlich) viele linear unabhängige Vektoren eines Vektorraumes V mit Skalarprodukt. Dann gibt es genau ein Orthonormalsystem $\{e_1, e_2, \ldots\}$ in V, so dass für alle k*

(1) *$\{a_1, \ldots, a_k\}$ und $\{e_1, \ldots, e_k\}$ denselben Unterraum U_k von V aufspannen und*

(2) *die Determinante der Koordinatentransformation $\{a_1, \ldots, a_k\} \to \{e_1, \ldots, e_k\}$ in U_k positiv ist.*

Beweis. (Induktion nach k)
Für $k = 1$ erhalten wir mit $e_1 := |a_1|^{-1} a_1$ das Gewünschte.
Die Aussage sei für $k \le n$ richtig, und wir betrachten den Fall $k = n + 1$. Der Vektor

(3) $\quad b_{n+1} := a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle a_{n+1}, e_i\rangle\, e_i$

ist orthogonal zu $\{e_1, \ldots, e_n\}$, denn es gilt

$$\langle b_{n+1}, e_j\rangle = \langle a_{n+1}, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle a_{n+1}, e_i\rangle\, \langle e_i, e_j\rangle = \langle a_{n+1}, e_j\rangle - \langle a_{n+1}, e_j\rangle \cdot 1 = 0\,.$$

Außerdem ist nach Konstruktion (3) $b_{n+1} \ne 0$, da die Vektoren $e_1, \ldots, e_n,\ a_{n+1}$ linear unabhängig sind. (Anderenfalls ergäbe $a_{n+1} \in \operatorname{Lin}\big(e_1, \ldots, e_n\big) = \operatorname{Lin}\big(a_1, \ldots, a_n\big)$ einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $a_1, \ldots, a_{n+1}$.) Wir können deshalb setzen

(4) $\quad e_{n+1} := |b_{n+1}|^{-1}\, b_{n+1}\,,$

so dass $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ ein Orthonormalsystem bildet.
Aus $e_{n+1} \in \operatorname{Lin}\big(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\big)$, $a_{n+1} \in \operatorname{Lin}\big(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\big)$ und der Induktionsvoraussetzung folgt $U_{n+1} = \operatorname{Lin}\big(a_1, \ldots, a_{n+1}\big) = \operatorname{Lin}\big(e_1, \ldots, e_{n+1}\big)$, d.h. (1). Die Transformationsmatrix beim Übergang von $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ zu $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ hat die Gestalt

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & \ldots & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & \ldots & & c_{nn} & 0 \\ c_{n+11} & \ldots & \ldots & & c_{n+1n} & |b_{n+1}|^{-1} \end{pmatrix}$$

so dass $\det C_{n+1} = |b_{n+1}^{-1} \det C_n$. Aufgrund der Induktionsvoraussetung ist aber $\det C_n > 0$, also ist (2) auch für $k = n+1$ erfüllt.
Zum Nachweis der Eindeutigkeit von e_{n+1} nehmen wir an, ein zweiter Vektor e'_{n+1} genüge allen Bedingungen. Insbesondere ist dann $a_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i - \lambda_{n+1} e'_{n+1}$ für gewisse λ_i, die folgendermaßen bestimmt werden können:
$\langle a_{n+1}, e_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle - \lambda_{n+1}\langle e'_{n+1}, e_j\rangle = \lambda_j$. Es folgt

$$\lambda_{n+1} e'_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle a_{n+1}, e_i\rangle e_i\,.$$

Der Vergleich mit (3) und (4) und die Bedingung (2) ergeben

$$e'_{n+1} = e_{n+1}\,.$$

□

Bemerkung. Die Gleichungen (3) und (4) liefern gleichzeitig ein **Konstruktionsverfahren** für das Orthonormalsystem, das so **von E. Schmid**t entwickelt wurde.

7.2.4 Folgerung. *V besitze eine abzählbare Basis. Dann lässt sich jedes Orthogonalsystem $\{e_1, \ldots, e_k\}$ zu einer orthonormierten Basis in V ergänzen.*

Beweis. Nach dem Austauschsatz gibt es Vektoren $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots$ in V derart, dass $\{e_1, \ldots, e_k,\ b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots\}$ eine Basis bildet. Die Anwendung des Verfahrens von Schmidt auf diese Basisvektoren führt nun zu einer Orthonormalbasis. □

Insbesondere gibt es in einem solchen V überhaupt eine Orthonormalbasis.

Orthogonales Komplement und orthogonale Projektion:

Definition. Zwei Mengen S_2 und S_2 von V heißen **orthogonal** $(S_1 \perp S_2)$, falls $\langle v_1, v_2\rangle = 0,\ v_1 \in S_1,\ v_2 \in S_2$.

Aufgabe. $S_1 \perp S_2 \Leftrightarrow S_1 \perp \mathrm{Lin}(S_2) \Leftrightarrow \mathrm{Lin}(S_1) \perp \mathrm{Lin}(S_2)$. •

Definition. Für einen Unterraum $U \subset V$ heißt

$$U^\perp := \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0,\ u \in U\}$$

orthogonales Komplement zu U in V.

Aufgabe. (1) $U^\perp$ ist wieder ein Unterraum.
(2) $(U^\perp)^\perp \supset U$ •

7.2.5 Satz. $\dim U < \infty \Rightarrow$

$$\boxed{V = U \oplus U^\perp.}$$

Beweis. Wir wählen eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in U und setzen für $v \in V$

$$u := \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i\,, \quad u^\perp := v - u$$

so dass

$$v = u + u^\perp\,.$$

Offenbar ist $u \in U$. Für die Beziehung $u^\perp \in U^\perp$ genügt es zu zeigen, dass $u^\perp$ orthogonal zu allen e_j ist:

$$\langle u^\perp, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle u, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \sum \langle v, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_j\rangle = 0\,.$$

Aus diesen Überlegungen folgt $V = U + U^\perp$. Außerdem ist aber $U \cap U^\perp = \{\mathcal{O}\}$, denn für $w \in U \cap U^\perp$ gilt $\langle w, w\rangle = 0$. Satz 1.5.1 besagt nun, dass die Summe direkt ist. □

Definition. Für die Zerlegung $v = u + u^\perp$ mit

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle\, e_i}$$

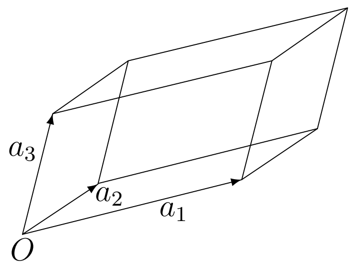
heißt u **orthogonale Projektion** von v auf U und $u^\perp$ **Lot** von v auf U.

7.3 Volumen

Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich der aus der Schulgeometrie bekannte Flächen– bzw. Volumenbegriff abstrakt fassen und auf höhere Dimensionen übertragen. Wir wählen dabei einen geometrisch anschaulichen Zugang, den wir dann in eine algebraische Sprache übersetzen. Ausgangspunkt ist ein affiner Raum $(\mathcal{A}, V)$ mit Skalarprodukt, der auch unendlichdimensional sein darf. Für jeden Punkt $O \in \mathcal{A}$ und beliebige Vektoren $a_1, \ldots, a_k \in V$ heißt die Punktmenge

$$\{P : \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \,, \quad 0 \le \lambda_i \le 1\}$$

das von den Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ aufgespannte **Parallelotop** mit O als Eckpunkt. Sind die a_i linear unabhängig, so nennt man das Parallelotop **k–dimensional**.



Für orthogonale Vektoren $\{a_1, \ldots, a_k\}$ entsteht das mehrdimensionale Analogon von Rechtecken und Quadern, insbesondere ein k–dimensionaler Würfel im Falle von Vektoren gleicher Länge. Anstelle des Punktraumes kann man auch nur den Vektorraum V betrachten, wobei man bei der Definition des Parallelotops auf die Interpretation als Ortsvektoren verzichtet. Für jedes k und alle $a_1, \ldots, a_k$ soll nun dem aufgespannten Parallelotop eine nichtnegative Zahl $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k)$ zugeordnet werden, die die Rolle eines Volumens spielen soll. Folgende Axiome sollen dabei erfüllt sein.

($\mathcal{V}$I) $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, \, \lambda a_k) = |\lambda| \, \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k), \; \lambda \in \mathbb{R}$

($\mathcal{V}$II) $b \in \mathrm{Lin}\big(a_1, \ldots, a_{k-1}\big) \Rightarrow \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + b) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$

($\mathcal{V}$III) $a_k \perp \{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \Rightarrow \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}) \, \mathcal{V}(a_1)$

($\mathcal{V}$IV) $|a| = 1 \Rightarrow \mathcal{V}(a) = 1\,.$

Bemerkung. Für $k = 2$ besagt Axiom ($\mathcal{V}$II), dass Parallelogramme mit gleichen Grundseiten und gleichen "Höhen", denselben Flächeninhalt haben, und ($\mathcal{V}$III) entspricht der Flächenformel für Rechtecke, wenn man noch folgendes berücksichtigt: Wegen ($\mathcal{V}$I) und ($\mathcal{V}$III) ist für jedes $a \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{V}(a) = |a| \, \mathcal{V}\left(\frac{1}{|a|} \, a\right) = |a|\,.$$

7.3.1 Lemma. *Sei $a_k^{\perp}$ das Lot des Vektors a_k auf $L\big(\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}\big)$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}) \; |a_k^{\perp}|\,.$$

Beweis. Wir zerlegen $a_k = a_k' + a_k^{\perp}$ und benutzen ($\mathcal{V}$II), ($\mathcal{V}$III) und $\mathcal{V}(a) = |a|$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k' + a_k^{\perp}) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k^{\perp})\\ &= \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1})\, \mathcal{V}(a_k^{\perp}) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{k-1})\, |a_k^{\perp}|\,.\end{aligned}$$

□

Durch sukzessives Anwenden dieser Formel ergibt sich
$\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k) = |a_1|\,|a_2^{\perp}|\ldots a_k^{\perp}|$ und somit:

7.3.2 Folgerung. *Die Volumenfunktion ist eindeutig bestimmt.*

Bisher wissen wir jedoch nicht, ob es überhaupt eine Funktion gibt, die den Forderungen ($\mathcal{V}$I) – ($\mathcal{V}$IV) genügen. Eine Lösung des Problems und gleichzeitig eine Berechnungsmöglichkeit liefert der folgende Satz. Wir benötigen dazu

Definition.

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) := \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_k\rangle \\ \ldots & & \\ \langle a_k, a_1\rangle & \ldots & \langle a_k, a_k\rangle \end{vmatrix}$$

heißt **Gramsche Determinante** der Vektoren $a_1, \ldots, a_k$.

Unten werden wir zeigen, dass diese Determinante stets nichtnegativ ist, zunächst aber folgendes:

7.3.3 Satz. $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k) := \sqrt{|\Gamma(a_1, \ldots, a_k)|}$,
genügt den Axiomen ($\mathcal{V}$I) – ($\mathcal{V}$IV) und ist symmetrisch in $a_1, \ldots, a_k\,,\ k \in \mathbb{N}$.

Beweis.
Die Symmetrie folgt aus der Definition von Γ.

($\mathcal{V}$I): $\quad \Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1}, \lambda a_k) = \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, \lambda a_k\rangle \\ \ldots & & \\ \langle \lambda a_k, a_1\rangle & \ldots & \langle \lambda a_k, \lambda a_k\rangle \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_k\rangle \\ \ldots & & \\ \langle a_k, a_1\rangle & \ldots & \langle a_k, a_k\rangle \end{vmatrix} = \lambda^2\, \Gamma(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$$

($\mathcal{V}$II): $\quad \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \ldots & \langle a_1, a_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_j\rangle \\ \ldots & & \\ \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_1\rangle & \ldots & \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_j\rangle \end{vmatrix}$

$$= \left| \begin{matrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_k \rangle + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j \langle a_1, a_j \rangle \\ \dots & & \\ \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_1 \rangle & \dots & \langle a_k + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_k \rangle + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \lambda_j \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i, a_j \rangle \end{matrix} \right| .$$

Der zweite Summand der letzten Spalte ist eine Linearkombination der ersten $k-1$ Spalten und kann deshalb weggelassen werden. Es ergibt sich

$$\left| \begin{matrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_k \rangle \\ \dots & & \\ \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_1 \rangle & \dots & \langle a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i,\ a_k \rangle \end{matrix} \right|$$

$$= \left| \begin{matrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_k \rangle \\ \dots & & \\ \langle a_k, a_1 \rangle + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_k, a_k \rangle + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \lambda_i \langle a_i, a_k \rangle \end{matrix} \right| .$$

Hier ist wiederum der zweite Summand der letzten Zeile Linearkombination der vorhergehenden Zeilen, so dass die Determinante gleich ist zu

$$\left| \begin{matrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_k \rangle \\ \dots & & \\ \langle a_k, a_1 \rangle & \dots & \langle a_k, a_k \rangle \end{matrix} \right| .$$

$(\mathcal{V}\mathrm{III})$: $\quad a_k \perp \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ bedeutet $\langle a_k, a_i \rangle = 0\,,\ i < k\,.$

Dann ist wegen Satz 5.3.3 und 5.1.5

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \left| \begin{matrix} & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \langle a_k, a_k \rangle \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_{k-1} \rangle \\ \dots & & \\ \langle a_{k-1}, a_1 \rangle & \dots & \langle a_{k-1}, a_{k-1} \rangle \end{matrix} \right| \langle a_k, a_k \rangle$$

$$= \Gamma(a_1, \dots, a_{k-1})\, \Gamma(a_k)\,.$$

$(\mathcal{V}\mathrm{IV})$: $\quad \sqrt{|\Gamma(a)|} = \sqrt{\langle a, a \rangle} = |a|\,.$ $\square$

Koordinatendarstellung im euklidischen Fall

Seien $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ die Koordinatenvektoren von $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{E}_n$ bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis in $\mathbb{E}_n$. Für die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} := \langle a_i, a_j \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$ gilt offenbar $C = A^\top A$ und damit $\det C = \det(A^\top A)$.
Andererseits ist $\det C = \Gamma(a_1, \ldots, a_k)$, also

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \det(A^\top A)\,.$$

Im Fall $k = n$ erhält man

$$\det(A^\top A) = \det A^\top \, \det A = (\det A)^2 \geq 0$$

und demnach $\sqrt{\Gamma(a_1, \ldots, a_n)} = |\det A|$.
Dies liefert eine geometrische Interpretation des Betrags der Determinante einer $n \times n$–Matrix.
Für $k \leq n$ können wir Ähnliches herleiten: Wenn man die $a_1, \ldots, a_k \in V$ (V beliebig) in Koordinaten bzgl. einer Orthonormalbasis in $\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_k)$ darstellt, so bleiben die obigen Überlegungen für $k = n$ richtig. Sei jetzt A' anstelle von A die zugehörige Matrix. Dann gilt

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = (\det A')^2 \geq 0\,.$$

Zusammengefasst erhalten wir folgendes:

7.3.4 Satz. *(i) Die Gramsche Determinante in V ist stets nichtnegativ.*

(ii) $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k) = \sqrt{\det(A^\top A)}$, insbesondere $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$ für $k = n$, wobei die Spalten der Matrix A aus den Koordinatenvektoren der $a_1, \ldots, a_k$ bzgl. einer beliebigen Orthonormalbasis in $\mathbb{E}_n$ gebildet werden.

7.4 Orientierung und Vektorprodukt in euklidischen Räumen

Definition. Zwei Basen im $\mathbb{E}_n$ heißen **gleich orientiert**, falls die Determinante der zugehörigen Koordinatentransformation positiv ist, und ansonsten entgegengesetzt orientiert.

Wenn $C_B^{B'}$ die Transformationsmatrix beim Übergang von der Basis B zur Basis B' bezeichnet, so gilt $C_{B'}^{B''} \, C_B^{B'} = C_B^{B''}$ und damit $\det C_{B'}^{B''} \cdot \det C_B^{B'} = \det C_B^{B''}$. Wenn also B und B' gleich orientiert sind und B' und B'' ebenfalls, so sind auch B und B'' gleich orientiert. Die Menge aller Basen von $\mathbb{E}_n$ zerfällt deshalb in zwei Äquivalenzklassen bzgl. ihrer Orientierung.

Definition. Eine **Orientierung** in $\mathbb{E}_n$ ist die Wahl einer der beiden obigen Äquivalenzklassen als positiv orientiert. (Die Basen aus der anderen Äquivalenzklasse heißen dann negativ orientiert.)

Aus 7.3.5. und der Definition der Orientierung ergibt sich folgendes: Für linear unabhängige Vektoren $A_1, \ldots, a_n \in \mathbb{E}_n$ kann man $\det A = \det(a_{ij})$ als **orientiertes Volumen** des Parallelotops mit diesen Erzeugungsvektoren interpretieren.

Seien nun $a_1, \ldots, a_{n-1}$ linear unabhängige Vektoren eines n–dimensionalen orientierten euklidischen Raumes $\mathbb{E}_n$.

7.4.1 Lemma. *Es gibt genau einen Vektor $\mathfrak{n} \in \mathbb{E}_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\langle \mathfrak{n}, a_i \rangle = 0\ ,\ i = 1, \ldots, n-1$

(2) $|\mathfrak{n}| = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{n-1})$

(3) $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, \mathfrak{n}\}$ *ist positiv orientiert.*

Beweis. Wegen (1) muss der gesuchte Vektor in $\mathrm{Lin}\,\big(a_1, \ldots, a_{n-1}\big)^{\perp}$ liegen. Dies ist ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{E}_n$. Durch die Länge $\mathcal{V}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ ist der Vektor $\mathfrak{n}$ dann bis auf sein Vorzeichen bestimmt, welches sich aus der Orientierungsbedingung ergibt. □

Definition.

$$\boxed{\mathfrak{n} =: a_1 \times \ldots \times a_{n-1}}$$

wird **Vektorprodukt** der linear unabhängigen Vektoren $a_1, \ldots, a_{n-1}$ genannt.

7.4.2 Aufgabe. $\langle a_1 \times \ldots \times a_{n-1}, v \rangle = \det(\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1} \bar{v})\ ,\ v \in \mathbb{E}_n$, wobei $\bar{a}_i, \bar{v}$ die Koordinatenvektoren bzgl. einer Orthonormalbasis sind.
(Hinweis: Zerlegen Sie v nach der Basis $\{a_1, \ldots, a_{n-1},\ a_1 \times \ldots \times a_{n-1}\}$ und benutzen Sie $|\det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n)| = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_n)$.) •

Wir wenden diese Formel an, um die Koordinatendarstellung des Vektorprodukts zu finden: Wenn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die zugrundeliegende ONB ist und $\bar{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_n \end{pmatrix}$, so gilt ja $\mathfrak{n}_i = \langle \mathfrak{n}, e_i \rangle$ und deshalb

7.4.3 Lemma. $\boxed{\mathfrak{n}_i = \det(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n-1}, \bar{e}_i)}\ ,\ i = 1, \ldots, n\,.$

Vektoren, die senkrecht auf einem gegebenen Unterraum U stehen, werden auch **Normalen** zu U genannt. Unter einer Normalen zu einer Hyperebene in einem euklidischen Punktraum versteht man eine Normale zum erzeugten Vektorraum. Mit Hilfe einer Basis $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ in diesem Raum und deren Vektorprodukt kann man dann alle Normalen bestimmen, da diese sich von $\mathfrak{n} = a_1 \times \ldots \times a_{n-1}$ nur durch ein

Vielfaches unterscheiden.

Umgekehrt gibt es zu einem beliebig vorgegebenen Vektor $\mathfrak{n} \in \mathbb{E}_n$ mit $|\mathfrak{n}| = 1$ und einem Punkt $P \in \mathcal{A}_n$ genau eine Hyperebene $\mathcal{H}$ durch P_0 Normalenvektor $\mathfrak{n}$. Ihre Gleichung lautet in der Sprache der Ortsvektoren der Punkte P:

7.4.4 Lemma. $\langle \overrightarrow{OP}, \mathfrak{n} \rangle = \langle \overrightarrow{OP_0}, \mathfrak{n} \rangle$ ***(Hessesche Normalform)***

Beweis:. Wir ergänzen $a_n := \mathfrak{n}$ zu einer Orthonormalbasis $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ in E_n. Die Parametergleichung

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \, a_i$$

von $\mathcal{H}$ ist dann wegen $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0P}$ äquivalent zu $\langle \overrightarrow{P_0P},\, a_i \rangle = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, was wegen der beliebigen Wahl der $\lambda_i \in \mathbb{R}$ keine Festlegung bedeutet, und $\langle \overrightarrow{P_0P},\, a_n \rangle = 0$. □

7.5 Orthogonale Abbildungen und Isometrien

Orthogonale Abbildungen zwischen Vektorräumen mit Skalarprodukt

Definition. Eine Abbildung $\mathbf{A} : V \to V'$ zwischen zwei Vektorräumen mit Skalarprodukt heißt **orthogonal**, falls

$$\langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v \rangle = \langle u, v \rangle \ , \ u, v \in V \ .$$

$\mathbf{A}$ sei nun eine solche Abbildung.

Eigenschaften:

7.5.1. $\mathbf{A}$ *ist normtreu, d.h.* $|\mathbf{A}v| = |v|$. □

7.5.2. $\mathbf{A}$ *ist linear und injektiv.*

Beweis. $\langle \mathbf{A}(u+v) - \mathbf{A}u - \mathbf{A}v,\, \mathbf{A}(u+v) - \mathbf{A}u - \mathbf{A}v \rangle$
$= |\mathbf{A}(u+v)|^2 + |\mathbf{A}u|^2 + |\mathbf{A}v|^2 - 2\langle \mathbf{A}(u+v),\, \mathbf{A}u \rangle - 2\langle \mathbf{A}(u+v),\, \mathbf{A}v \rangle + 2\langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v \rangle$
$= |u+v|^2 + |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u+v, u \rangle - 2\langle u+v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle$
$= \langle u+v-u-v,\, u+v-u-v \rangle = 0,$ d.h. $\mathbf{A}(u+v) = \mathbf{A}u + \mathbf{A}v$.
Die Homogenität von $\mathbf{A}$ beweist man analog.
Gilt nun $\mathbf{A}u = \mathbf{A}v$, so folgt $0 = |\mathbf{A}(u-v)| = |u-v|$, also $u = v$, so dass $\mathbf{A}$ injektiv ist. □

7.5.3. $\mathbf{A}$ *ist winkeltreu, d.h.* $\sphericalangle(\mathbf{A}u, \mathbf{A}v) = \sphericalangle(u, v)$.

Beweis. $\cos\sphericalangle(\mathbf{A}u, \mathbf{A}v) = \dfrac{\langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v\rangle}{|\mathbf{A}u|\,|\mathbf{A}v|} = \dfrac{\langle u, v\rangle}{|u|\,|v|} = \cos\sphericalangle(u, v).$ $\square$

7.5.4. $\mathbf{A}$ *ist volumentreu, d.h.* $\mathcal{V}(\mathbf{A}a_1, \ldots, \mathbf{A}a_k) = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k)$.

Beweis. $\mathcal{V}(\mathbf{A}a_1, \ldots, \mathbf{A}a_k) = \sqrt{\det(\langle \mathbf{A}a_i, \mathbf{A}a_j\rangle)} = \sqrt{\det(\langle a_i, a_j\rangle)} = \mathcal{V}(a_1, \ldots, a_k)$. $\square$

Definition. Eine orthogonale Bijektion zwischen zwei Vektorräumen mit Skalarprodukt heißt **Isomorphismus**.

Bemerkung. Zusätzlich zum Isomorphiebegriff allgemeiner linearer Räume wird hier also auch noch das Skalarprodukt übertragen.

7.5.5. *Im Fall* $\dim V = \dim V' < \infty$ *ist* $\mathbf{A}$ *ein Isomorphismus.* $\square$

7.5.6. *Alle* n*–dimensionalen euklidischen Vektorräume sind isomorph (und können mit dem Koordinatenraum* $\mathbb{R}^n$ *mit dem kanonischen Skalarprodukt identifiziert werden).*

Beweis. Seine V und V' zwei solcher Räume. Mit Hilfe zweier Orthonormalbasen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bzw. $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ definieren wir eine Abbildung $\mathbf{A} \in L(V, V')$ über $\mathbf{A}e_i = e'_i$, $i = 1, \ldots, n$. Diese ist orthogonal:
$\langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v\rangle = \langle (\sum\limits_i u_i e_i),\ \mathbf{A}(\sum\limits_j v_j e_j)\rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle \mathbf{A}e_i, \mathbf{A}e_j\rangle$
$= \sum_{i,j} u_i v_i \langle e'_i, e'_j\rangle = \sum\limits_{i,j} u_i v_j \delta_{ij} = \sum\limits_i u_i v_i = \langle u, v\rangle,$
wobei u_i und v_i die Koordinaten von u bzw. v sind. $\square$

7.5.7. *Ist* $\mathbf{A}$ *ein Isomorphismus, so gilt dies auch für* $\mathbf{A}^{-1}$.

Beweis. $\langle \mathbf{A}^{-1}u',\ \mathbf{A}^{-1}v'\rangle = \langle \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}u'),\ \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}v')\rangle = \langle u', v'\rangle$. $\square$

7.5.8 Satz. *Wenn* V *und* V' *abzählbare Basen besitzen, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mathbf{A} : V \to V'$ *ist orthogonal.*

(2) $\mathbf{A}$ *ist linear und überführt irgendeine Orthonormalbasis, und damit jede, wieder in eine Orthonormalbasis.*

Setzen wir zusätzlich voraus $\dim V = \dim V' < \infty$*, so ergibt sich eine weitere äquivalente Aussage:*

(3) $A^\top = A^{-1}$*, wobei* A *die Matrix von* $\mathbf{A}$ *bzgl. zweier Orthonormalbasen bezeichnet.*

Beweis. Jede orthogonale Abbildung überführt Orthonormalbasen wieder in Orthonormalbasen. Ist umgekehrt $\mathbf{A} \in L(V, V')$ und das Bild $\{\mathbf{A}e_1, \mathbf{A}e_2, \ldots\}$ irgendeiner Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, \ldots\}$ in V eine Orthonormalbasis in V', so schließt man wie beim Beweis von 7.5.6. auf die Orthogonalität von $\mathbf{A}$. (1) und (2) sind also äquivalent.

Sei nun $\dim V = \dim V' = n$ und A die Matrix von $\mathbf{A}$ bzgl. der Orthonormalbasen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bzw. $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Weil die Spaltenvektoren $\bar{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A die Koordinatenvektoren von $\mathbf{A}e_j$ bzgl $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ bilden, schließen wir:
$\{\mathbf{A}e_1, \ldots, \mathbf{A}e_n\}$ ist Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{A}e_i, \mathbf{A}e_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} \Leftrightarrow$
$A^\top A = I \Leftrightarrow A^\top = A^{-1}$. □

Die letzte Aussage legt folgende Begriffsbildung nahe.

Definition. Eine $n \times n$–Matrix A über $\mathbb{R}$ heißt **orthogonal** falls $A^\top = A^{-1}$.

Aufgabe. Die orthogonalen Abbildungen $\mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ und die orthogonalen $n \times n$–Matrizen bilden zwei isomorphe Gruppen. (Für erstere schreibt man auch $O(n)$.) •

Isometrien und Bewegungen in affinen Räumen mit Skalarprodukt im erzeugten Vektorraum

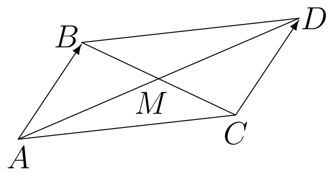
Ähnlich wir beim Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und affinen Abbildungen wollen wir nun Abbildungen zwischen Punkträumen einführen, die in enger Beziehung zu orthogonalen Abbildungen stehen.
Seien $(\mathcal{A}, V, f)$, $(\mathcal{A}', V', f')$ affine Geometrien über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukten.

Definition. Eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt **Isometrie**, falls

$$|\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)}| = |\overrightarrow{AB}| \, , \; A, B \in \mathcal{A}.$$

(Dabei bleiben also der Abstand zwischen den Punkten erhalten.) Im Fall $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ wird die Isometrie $\mathcal{F}$ auch **Bewegung** in $\mathcal{A}$ genannt.

Jeder Isometrie $\mathcal{F}$ lässt sich genau eine Vektorabbildung $\mathbf{F} : V \to V'$ zuordnen mit $\mathbf{F}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)}$. Um zu zeigen, dass die Definition von $\mathbf{F}$ korrekt ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten der Vektoren abhängt, benutzen wir das folgende Mittelpunktprinzip:
Sei $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Dann teilt der Schnittpunkt M der Diagonalen im Parallelogramm mit den Eckpunkten A, B, C, D die Diagonalen im Verhältnis 1:1, d.h. $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MD}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|$ und $|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{MB}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|$, denn es gilt auch $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.



Aus der Isometrie ergibt sich $|\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(M)}| = |\overrightarrow{\mathcal{F}(M)\mathcal{F}(D)}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(D)}|$ und $|\overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(M)}| = |\overrightarrow{\mathcal{F}(M)\mathcal{F}(B)}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(B)}|$, was wegen der Dreiecksungleichung für die Norm wiederum nur möglich ist, wenn M gemeinsamer Mittelpunkt der Strecken $\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(D)$ und $CF(C)\mathcal{F}(B)$ ist.
Damit folgt aber die gewünschte Gleichheit $|\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)}| = |\overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(D)}|$. □

7.5.9 Lemma. *Die zu einer Isometrie $\mathcal{F}$ gehörende Vektorabbildung* $\mathbf{F}$ *ist orthogonal.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $\mathbf{F}$ normtreu. Außerdem ist $\mathbf{F}$ additiv:
Sei $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{BC}$. Dann gilt $u + v = \overrightarrow{AC}$ und
$\mathbf{F}(u+v) = \overrightarrow{\mathbf{F}(A)\mathbf{F}(C)} = \overrightarrow{\mathbf{F}(A)\mathbf{F}(B)} + \overrightarrow{\mathbf{F}(B)\mathbf{F}(C)} = \mathbf{F}\overrightarrow{AB} + \mathbf{F}\overrightarrow{BC} = \mathbf{F}u + \mathbf{F}v.$

Wir können nun zeigen, dass $\mathbf{F}$ das Skalarprodukt erhält, indem wir dieses über die Norm darstellen:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{F}u, \mathbf{F}v\rangle &= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{F}u + \mathbf{F}v|^2 - |\mathbf{F}u|^2 - |\mathbf{F}v|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{F}(u+v)|^2 - |\mathbf{F}u|^2 - |\mathbf{F}v|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\right) = \langle u, v\rangle\,.\end{aligned}$$

□

7.5.10 Folgerung. *Jede Isometrie ist affin. Isometrien zwischen Räumen gleicher Dimension sind spezielle Affinitäten.*

Beweis. Da das zu einer Isometrie $\mathcal{F}$ gehörende $\mathbf{F}$ eine orthogonale Abbildung und somit linear ist, folgt unmittelbar, dass $\mathcal{F}$ affin sein muss. Bei gleicher Dimension von V und V' ist $\mathbf{F}$ außerdem bijektiv. Wie beim Beweis von Satz 6.5.4, 2) und 3) schließt man nun, dass auch $\mathcal{F}$ bijektiv ist. □

7.6 Adjungierte Abbildungen

Sei $(V, \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jetzt wieder ein beliebiger reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Für jede lineare Selbstabbildung $\mathbf{A} \in L(V,V)$ soll eine zugehörige lineare Abbildung $\mathbf{A}^*$ eingeführt werden, die in der Matrixsprache der transponierten Matrix der darstellenden Matrix von $\mathbf{A}$ entspricht.

Definition. $\mathbf{A}^* : V \to V$ heißt zu $\mathbf{A}$ **adjungiert**, falls

$$\langle \mathbf{A}u, v\rangle = \langle u, \mathbf{A}^*v\rangle\,,\ \ u, v \in V.$$

Bemerkung. Für die Untersuchung von Eigenschaften solcher Abbildungen und auch unabhängig davon ist folgende Überlegung nützlich: Für zwei Vektoren $v, w \in V$ gilt

$$v = w \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle,\ \forall u \in V$$

$\big($*Beweis:* $v - w = 0 \Rightarrow \langle u, v-w\rangle = 0,\ \forall u \in V;\quad \langle u, v-w\rangle = 0$ für $u := v - w \Rightarrow v - w = 0$ □$\big)$

7.6.1 Lemma. $\mathbf{A}^*$ *ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wenn $\mathbf{B}$ eine weitere solche Abbildungen bezeichnet, so gilt $\langle u, \mathbf{A}^*v\rangle = \langle u, \mathbf{B}v\rangle$, d.h., $\langle u, (\mathbf{A}^* - \mathbf{B})v\rangle = 0,\ \forall u \in U$, und deshalb wegen der obigen Bemerkung $(\mathbf{A}^* - \mathbf{B})v = 0,\ \forall v \in V$. Folglich ist $\mathbf{A}^* - \mathbf{B} = \mathbf{O}$. □

7.6.2 Lemma. $\mathbf{A}^*$ *ist linear.*

Beweis. Wir benutzen wieder die obige Bemerkung.
Für jedes $u \in V$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\langle u, \mathbf{A}^*(v + \lambda w)\rangle = \langle \mathbf{A}u, v + \lambda w\rangle \\
&= \langle \mathbf{A}u, v\rangle + \lambda\langle \mathbf{A}u, w\rangle \\
&= \langle u, \mathbf{A}^*v\rangle + \lambda\langle u, \mathbf{A}^*w\rangle \\
&= \langle u, \mathbf{A}^*v\rangle + \langle u, \lambda\mathbf{A}^*w\rangle = \langle u, \mathbf{A}^*v + \lambda\mathbf{A}^*w\rangle
\end{aligned}
$$

und deshalb $\mathbf{A}^*(v + \lambda w) = \mathbf{A}^*v + \lambda\mathbf{A}^*w$. □

Die Adjungiertenbildung ist folgendermaßen mit den Abbildungsoperationen verknüpft. (Existenzaussagen haben wir bisher nicht formuliert.)

7.6.3 Satz.

(1) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$

(2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$

(3) $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})^* = \mathbf{B}^* \circ \mathbf{A}^*$

(4) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$

wobei die Existenz der einen Seite jeweils die der anderen impliziert.

(5) $\mathbf{A}^*$ *existiert* $\Rightarrow$ ($\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ *ist orthogonal)*

(6) $\mathbf{A}^*$ *ist bijektiv* $\Rightarrow$ ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ *ist orthogonal).*

Beweis. (1) – (4) stellen wir als Aufgabe. •

(5): Da $\langle u, \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}v\rangle = \langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v\rangle$,so folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = \mathbf{I} &\Leftrightarrow \langle u, \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A}v\rangle = \langle u, v\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle \mathbf{A}u, \mathbf{A}v\rangle = \langle u, v\rangle \\
&\Leftrightarrow: \mathbf{A} \text{ orthogonal.}
\end{aligned}
$$

(6): Unter Voraussetzung der Bijektivität gilt $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^* \circ \mathbf{A} = \mathbf{I}$. Wegen (5) ist dieser aber äquivalent zur Orthogonalität von $\mathbf{A}$.
□

In unendlichdimensionalen Räumen muss nicht jede lineare Abbildung eine Adjungierte besitzen. Für euklidische Vektorräume gilt aber folgendes.

7.6.4 Satz. *Sei $\mathbf{A} \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$. Dann existiert $\mathbf{A}^*$, und für die darstellende Matrix A von $\mathbf{A}$ bzgl. einer Orthonormalbasis ist die Transponierte A^T die darstellende Matrix von $\mathbf{A}^*$ bzgl. dieser Basis.*

Beweis. Seien $\{e_i, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{E}_n$ und

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \ , \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \ , \quad A = (a_{ij})$$

die zugehörigen Koordinatendarstellungen.
Für das kanonische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ schreiben wir hier

$$\bar{u} \bullet \bar{v} := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \ .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}u, v\rangle &= \overline{\mathbf{A}u} \bullet \bar{v} = A\bar{u} \bullet \bar{v} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j v_i = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \\ &= \bar{u} \bullet A^T\bar{v} = \langle u, \mathbf{A}^T v\rangle, \end{aligned}$$

falls $\mathbf{A}^T$ die zur Matrix A^T gehörende lineare Abbildung bezeichnet. Wir erhalten somit

$$\langle \mathbf{A}u, v\rangle = \langle u, \mathbf{A}^T v\rangle$$

und nach Definition von $\mathbf{A}^*$ muss $\mathbf{A}^T$ mit $\mathbf{A}^*$ zusammenfallen. Insbesondere ist dann A^T die darstellende Matrix von $\mathbf{A}^*$. □

Definition. Für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt heißt $\mathbf{A} \in L(V, V)$ **symmetrisch** (oder **selbstadjungiert** im allgemeinen Fall), falls $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, und **schiefsymmetrisch**, falls $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$.

7.6.5 Folgerung. *Sei $\mathbf{A} \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$ und A die darstellende Matrix bzgl. einer Orthonormalbasis. Dann gilt:*

(1) $\mathbf{A}$ *ist symmetrisch* $\Leftrightarrow A^T = A$.

(2) $\mathbf{A}$ *ist schiefsymmetrisch* $\Leftrightarrow A^T = -A$.

(3) $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ *ist die eindeutige Zerlegung von* $\mathbf{A}$ *in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil.*

Beweis. (1) und (2) folgen aus Satz 7.6.4 und (3) aus 7.6.3. □