6 Affine Räume und affine Abbildungen

6.1 Axiome der affinen Geometrie

In der (euklidischen) Schulgeometrie wurde ein synthetischer Zugang gewählt: Ausgangsobjekte waren Punkte, Geraden und Ebenen mit gewissen Inzidenzbeziehungen. Über die geometrische Vektorrechnung wurde ein Zusammenhang zur analytischen Geometrie hergestellt. Dort sind die Punkte und Vektoren Grundgegebenheiten, und Geraden und Ebenen werden daraus aufgebaut. In diesem Kapitel wählen wir nun den abstrakten analytischen Zugang zur Geometrie, der stark auf Methoden der linearen Algebra basiert.
Zunächst wollen wir aber auf solche Begriffe wir Abstand, Länge, Winkel, Orthogonalität verzichten und eine Geometrie kennenlernen, die das Prinzip der Parallelität in den Vordergrund stellt.

Definition. Eine **affine Geometrie** ist ein Tripel $(\mathcal{A}, V, f)$, wobei $\mathcal{A}$ und V Mengen sind, deren Elemente Punkte bzw. Vektoren genannt werden, und f eine Abbildung von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ in V (man schreibt auch $f(A, B) = \overrightarrow{AB}$) mit folgenden Eigenschaften:

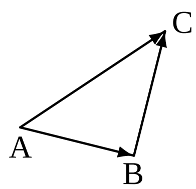
($\mathcal{A}$I) V ist ein Vektorraum über einem Körper K.

($\mathcal{A}$II) Für jeden Punkt $A \in \mathcal{A}$ und jeden Vektor $v \in V$ gibt es einen Punkt $B \in \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{AB} = v$.
(Jeder Vektor lässt sich an jedem Punkt abtragen.)

($\mathcal{A}$III) Für zwei verschiedene Punkte A, B gilt $\overrightarrow{AB} \neq \mathcal{O}$.

($\mathcal{A}$IV) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Bemerkung. Diejenigen geordneten Punktepaare AB, für die $\overrightarrow{AB} = v$ gilt, können als **Repräsentanten** des Vektors v interpretiert werden. Diese Darstellung entspricht dem Begriff der Pfeilklassen aus der Schulgeometrie. Die Bedingungen ($\mathcal{A}$IV) liefert dann den Zusammenhang zwischen der Vektoraddition und der Repräsentantenaddition:



Eigenschaften

6.1.1. $\overrightarrow{AA} = \mathcal{O}$

Beweis. Nach ($\mathcal{A}$IV) ist $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$, so dass die Subtraktion von $\overrightarrow{AA}$ auf beiden Seiten zur Behauptung führt. □

6.1.2. Der Punkt B in ($\mathcal{A}$II) ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Falls $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}$ wegen ($\mathcal{A}$IV,) so folgt $\overrightarrow{BB'} = \mathcal{O}$, was wegen ($\mathcal{A}$III) $B = B'$ bedeutet. □

Definition. $\dim \mathcal{A} := \dim V$ ist die **Dimension** des affinen Raumes $\mathcal{A}$.

Beispiele.

1) Wenn wir den synthetischen Zugang zur Schulgeometrie voraussetzen, passen die Ebene und der Raum zusammen mit ihren geometrischen Vektoren in diese Begriffsbildung.

2) Sei $A\bar{x} = \bar{b}$ ein beliebiges lineares Gleichungssystem wie in Kapitel 3. Wir setzen

$$\mathcal{A} := LM(A\bar{x} = \bar{b}) \subset K^n,\ V := LM(A\bar{x} = \bar{0}) \text{ und } f(\bar{x}, \bar{y}) := \bar{y} - \bar{x}\ .$$

Das Axiom ($\mathcal{A}$I) ist hier wegen Satz 4.2 erfüllt, und es gilt $\dim \mathcal{A} = \dim V = n-$Rang A .

Aufgabe. Überprüfen Sie ($\mathcal{A}$II) – ($\mathcal{A}$IV). •

3) Für einen Vektorraum V setzen wir $\mathcal{A} := V$ und $f : V \times V \to V\ ,\ f(u, v) := v - u$.

Aufgabe. Überprüfen Sie ($\mathcal{A}$II) – ($\mathcal{A}$IV). •

Demnach lässt sich jeder Vektorraum gleichzeitig auch als affiner Punktraum betrachten.

Weitere Eigenschaften

6.1.3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Beweis. ($\mathcal{A}$IV) und 6.1.1 liefern $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathcal{O}$. □

6.1.4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

(Dies entspricht der Parallelogrammmbildung in der Schulgeometrie.)

Beweis. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$ wegen ($\mathcal{A}$IV), 6.1.3 und der Voraussetzung. □

Als nächstes wollen wir den Punkten von $\mathcal{A}$ Ortsvektoren zuordnen. Wir zeichnen dafür in $\mathcal{A}$ einen festen Bezugspunkt O aus, den wir auch **Ursprung** nennen.

Definition. $f_o(A) := f(O, A) = \overrightarrow{OA}$ heißt **Ortsvektor** des Punktes $A \in \mathcal{A}$.

6.1.5. Die Abbildung $f_o : \mathcal{A} \to V$ ist bijektiv.

Beweis. Die Surjektivität folgt aus ($\mathcal{A}$II) und die Injektivität aus 6.1.2. □

D.h. also, dass die Punkte von $\mathcal{A}$ mit ihren Ortsvektoren identifiziert werden können, die wiederum ganz V ausschöpfen. Dies rechtfertigt auch den Dimensionsbegriff von oben.

6.2 Affine Unterräume (Ebenen)

Für eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ schreiben wir

$$V(\mathcal{M}) := \{\overrightarrow{AB} : A, B \in \mathcal{M}\}\,.$$

Definition. $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ heißt **affiner Unterraum** oder auch **Ebene** in $\mathcal{A}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

($\mathcal{E}$I) $V(\mathcal{E})$ ist ein Unterraum von V.

($\mathcal{E}$II) $\forall\big(v \in V(\mathcal{E}),\ A \in \mathcal{E}\big)\ \exists\, B \in \mathcal{E}$ mit $\overrightarrow{AB} = v$.

6.2.1 Lemma. *$\mathcal{E}$, $V(\mathcal{E})$ und die Einschränkung von f auf $\mathcal{E}$ liefern wieder eine affine Geometrie.*

Beweis. ($\mathcal{E}$I) entspricht ($\mathcal{A}$I), ($\mathcal{E}$II) dem Axiom ($\mathcal{A}$II), und ($\mathcal{A}$III) und ($\mathcal{A}$IV) gelten insbesondere für die Teilmenge $\mathcal{E}$. □

Bemerkung. Oft werden nur k–dimensionale affine Unterräume auch k–dimensionale Ebenen genannt $(k \in \mathbb{N})$, nicht aber unendlichdimensionale.

Sei nun $\mathfrak{A}$ ein beliebiges System von affinen Unterräumen von $\mathcal{A}$.

6.2.2. Falls $\mathcal{A}' := \bigcap\limits_{\mathcal{E}\in\mathfrak{A}} \mathcal{E} \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{A}'$ ein affiner Unterraum, und es gilt

$$V(\mathcal{A}') = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathfrak{A}} V(\mathcal{E}). \qquad \bullet$$

Definition. Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ heißt der kleinste affine Unterraum, der $\mathcal{M}$ enthält, d.h.

$$\bigcap\{\mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ ist affiner Unterraum, } \mathcal{M} \subset \mathcal{E}\}$$

der von $\mathcal{M}$ **erzeugte Unterraum**.

Definition. Der von $\bigcup\limits_{\mathcal{E}\in\mathfrak{A}} \mathcal{E}$ erzeugte affine Unterraum $\vee\{\mathcal{E} : \mathcal{E} \in \mathfrak{A}\}$ ist der **Verbindungsraum** des Ebenensystems $\mathfrak{A}$.

Im Fall $\mathfrak{A} = \{\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m\}$ schreibt man $\mathcal{E}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{E}_m$ und für Punkte $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ auch $A_1 \vee \ldots \vee A_m := \{A_1\} \vee \ldots \vee \{A_m\}$ (vgl. Beispiel (1) unten).

Beispiele.

(1) Jede einpunktige Menge $\{A\}$ ist ein nulldimensionaler affiner Unterraum.

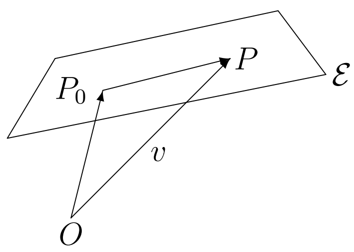
(2) Ein eindimensionaler affiner Unterraum $\mathcal{G}$ heißt **Gerade**. Für zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{G}$ erhält man $\mathcal{G} = A \vee B$. (Offenbar ist $A \vee B \subset \mathcal{G}$, $V(A \vee B) = V(\mathcal{G})$, da beide Räume eindimensional sind, und die Zuordnungen $A \vee B \to V(A \vee B)$ sowie $\mathcal{G} \to V(\mathcal{G})$ gemäß f_0 sind bijektiv. □)

(3) $(n-1)$–dimensionale affine Unterräume eines n–dimensionalen affinen Raumes nennt man **Hyperebenen**.

Unser nächstes Ziel ist die Charakterisierung von Ebenen mit Hilfe der Menge $f_0(\mathcal{E})$ ihrer Ortsvektoren.

6.2.3 Lemma. *Für einen beliebigen Punkt P_0 einer Ebene $\mathcal{E}$ gilt $f_o(\mathcal{E}) = V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}$.*

Beweis. Für einen Ortsvektor $v \in f_o(\mathcal{E})$ sei $P \in \mathcal{E}$ der Endpunkt mit $v = \overrightarrow{OP}$. Wir haben $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \in V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}$, da $\overrightarrow{P_0P} \in V(\mathcal{E})$, d.h. $v \in V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}$.



Umgekehrt, lässt sich jedes $v \in V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}$ darstellen als $v = w + \overrightarrow{OP_0}$ mit $w \in V(\mathcal{E})$. Wir tragen w an P_0 ab und gewinnen den Endpunkt $P \in \mathcal{E}$ mit $w = \overrightarrow{P_0P}$ Dies ergibt $v = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP}$, d.h. $v \in f_o(\mathcal{E})$. □

6.2.4 Lemma. *Für eine Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ sei $f_o(\mathcal{E}) = U + \overrightarrow{OP_0}$ mit einem Unterraum $U \subset V$. Dann folgt $P_0 \in \mathcal{E}$ und $U = V(\mathcal{E})$.*

Beweis. Wegen der Darstellung $\overrightarrow{OP_0} = \mathcal{O} + \overrightarrow{OP_0} \in U + \overrightarrow{OP_0}$ ist $\overrightarrow{OP_0}$ Ortsvektor eines Punktes aus $\mathcal{E}$, der wegen 6.1.2 mit P_0 zusammenfällt. Außerdem gilt $u \in U \Leftrightarrow u + \overrightarrow{OP_0} \in f_o(\mathcal{E}) \Leftrightarrow u + \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP}$ für ein $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow u = \overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0P}$ für ein $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow u \in V(\mathcal{E})$. □

Zusammenfassend lässt sich damit die Menge der Ortsvektoren einer Ebene wie folgt charakterisieren:

6.2.5 Satz. *$\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann eine Ebene, wenn sich $f_o(\mathcal{E})$ als Verschiebung eines Unterraumes darstellen lässt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung liefert 6.2.3. Sei nun $f_o(\mathcal{E}) = U + v$ für einen Unterraum U und ein $v \in V$. Wegen 6.2.4 muss dann $V(\mathcal{E})$ mit U zusammenfallen. $\mathcal{E}$ genügt also der Bedingung ($\mathcal{E}$I). Nach ($\mathcal{A}$I) gibt es für jeden Punkt $A \in \mathcal{E}$ und jeden Vektor $w \in V(\mathcal{E})$ einen Punkt $B \in \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{AB} = w$. Für ($\mathcal{E}$II) bleibt zu zeigen, dass B in $\mathcal{E}$ liegt. Dies schließen wir aus $\overrightarrow{OA} = u + v$ für ein $u \in U$ und $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = u + v + \overrightarrow{AB} = (u + w) + v \in U + v = f_o(\mathcal{E})$. □

Wir betrachten nun Ebenen durch den Ursprung:

6.2.6 Satz. *Eine Menge $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ist genau dann eine Ebene mit $O \in \mathcal{E}$, wenn $f_o(V)$ einen Unterraum von V bildet.*

Beweis. Für die Notwendigkeit setze man in 6.2.3 $P_0 = O$. Gilt andererseits für einen Unterraum U, dass $f_o(\mathcal{E}) = U = U + \overrightarrow{OO}$, so muss wegen 6.2.4 der Ursprung O in $\mathcal{E}$ liegen, und 6.2.5 charakterisiert $\mathcal{E}$ als Ebene. □

6.2.7 Satz. *Für jeden Unterraum $U \subset V$ und jeden Punkt $O \in \mathcal{A}$ gibt es genau eine Ebene $\mathcal{E}$ mit $O \in \mathcal{E}$ und $V(\mathcal{E}) = U$.*

Beweis. Da f_o bijektiv ist, können wir $\mathcal{E} := f_o^{-1}(U)$ setzen, d.h. $f_o(\mathcal{E}) = U$, und somit ist wegen Satz 6.2.6 die Menge $\mathcal{E}$ eine gesuchte Ebene. Falls für eine weitere Ebene $\mathcal{E}'$ ebenfalls $O \in \mathcal{E}'$ und $V(\mathcal{E}') = U$, so erhält man $V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OO} = V(\mathcal{E}') + \overrightarrow{OO}$ und wegen 6.2.3 $f_o(\mathcal{E}') = f_o(\mathcal{E})$, d.h. $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ aufgrund der Eineindeutigkeit von f_o. □

Aus der Schulgeometrie wissen wir, dass durch 3 nichtkollineare Punkte im Raum genau eine Ebene geht. Wir betrachten nun das höherdimensionale Analogon.

Definition. Die Punkte $A_0, A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ heißen **linear unabhängig**, falls die Vektoren $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ lineare unabhängig sind.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass diese Definition nicht von der Nummerierung der Punkte abhängt. •

6.2.8 Satz. *Durch je $k+1$ linear unabhängige Punkte $A_0, \ldots, A_k$ geht genau eine k–dimensionale Ebene $\mathcal{E}$. Es gilt $\mathcal{E} = A_0 \vee \ldots \vee A_k$.*

Beweis. Der von der gesuchten Ebene erzeugte Vektorraum $V(\mathcal{E})$ muss $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\}$ enthalten. Da seine Dimension gleich k sein soll, muss gelten

$$V(\mathcal{E}) = \operatorname{Lin}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right).$$

Satz 6.2.7 für $O := A_0$ und $U := \operatorname{Lin}\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}\right)$ sichert nun Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Ebene, denn in diesem Fall ist $f_o(\mathcal{E}) = V(\mathcal{E})$ und damit $A_i \in \mathcal{E}$, für alle i. Da $A_0 \vee \ldots \vee A_k$ die kleinste Ebene ist, die $\{A_0, \ldots, A_k\}$ enthält, und ihre Dimension nicht kleiner als k ist, muss sie mit $\mathcal{E}$ zusammenfallen. □

6.2.9 Folgerung. *Jede Ebene enthält mit je $l+1$ linear unabhängigen Punkten auch die durch diese Punkte gehende l–dimensionale Ebene.* □

6.3 Koordinaten im n–dimensionalen affinen Raum

Affine Koordinatensysteme

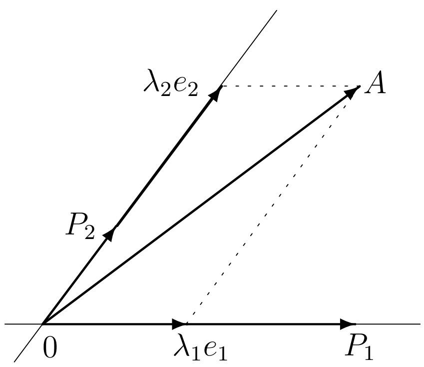
Sei jetzt $(\mathcal{A}, v, f)$ eine $\boldsymbol{n}$**-dimensionale** affine Geometrie.

Definition. Jedes System $\{O,\ e_1, \ldots, e_n\}$ für einen Punkt $O \in \mathcal{A}$, der **Koordinatenursprung** genannt wird, und eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ in V heißt **affines Koordinatensystem**.

Wenn man den Basisvektor e_i an O abträgt, so geht durch den Endpunkt P_i und den Ursprung genau eine Gerade, die man die ***i*–te Koordinatenachse** nennt. Durch die Basisvektoren ist wie früher eine Koordinatendarstellung in V gegeben. Diese benutzen wir nun zur Bestimmung der Koordinaten eines Punktes $A \in \mathcal{A}$, indem wir zu seinem Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ übergehen:

$$\overrightarrow{OA} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

mit eindeutig bestimmten $\lambda_i \in K$.



Definition. Die $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißen die **Koordinaten** des Punktes A.

(Wie früher schreiben wir $\overline{\lambda}$ für den entsprechenden Spaltenvektor.)

Parameterdarstellung von Ebenen und Koordinatengleichung

Sei $\mathcal{E}_k$ eine k–dimensionale Ebene in $\mathcal{A}, k < n$. Wir wählen eine Basis $\{b_1, \ldots, b_k\}$ in $V(\mathcal{E}_k)$. Da sich die Menge der Ortsvektoren von $\mathcal{E}_k$ darstellen lässt als $f_o(\mathcal{E}_k) = V(\mathcal{E}_k) + \overrightarrow{OP_0}$ für beliebiges $P_0 \in \mathcal{E}_k$, liegt ein Punkt P genau dann in $\mathcal{E}_k$, wenn für seinen Ortsvektor gilt

$$(1) \qquad \boxed{\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i + \overrightarrow{OP_0}}$$

für gewisse Parameter $\mu_i \in K$. Außerdem liefert jede Wahl von $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \in K^k$ in (1) einen Punkt P der Ebene $\mathcal{E}_k$. Die μ_i heißen deshalb auch **freie Parameter**.

Definition. Die Gleichung (1) heißt **Parametergleichung** der Ebene $\mathcal{E}_k$.

Als nächstes werden wir (1) in eine Koordinatengleichung umformen. Ein affines Koordinatensystem $\{0, e_1, \ldots, e_n\}$ sei vorgegeben. Den Koordinatenvektor des Punktes P wollen wir mit $\overline{x}$ bezeichnen, den von P_0 mit $\overline{y}$, und den des Vektors b_i mit $\overline{b}_i, i = 1, \ldots, k$. Dann lautet (1) in Koordinatenschreibweise

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \overline{b}_i + \overline{y}\,,$$

und noch kompakter

$$\overline{x} = B\,\overline{\mu} + \overline{y}\,, \tag{1'}$$

wenn B die $n \times k$–Matrix mit $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_k$ als Spaltenvektoren bezeichnet. Als Hilfsmittel betrachten wir nun das homogene lineare Gleichungssystem $B^\top \overline{z} = \overline{0}$ mit unbekanntem $\overline{z}$, dessen Lösungsmenge ein Unterraum von K^n ist mit der Dimension

$$n - \text{Rang}\, B = n - k.$$

Es existieren deshalb $n - k$ linear unabhängige Lösungsvektoren $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_k$, d.h. $B^\top \overline{z}_i = \overline{0}$, $\forall i$. In Zeilenschreibweise bedeutet dies

$$\overline{z}_i^\top B = \overline{0}^\top\,, \quad i = 1, \ldots, n-k\,.$$

Mit den $\overline{z}_i^\top$ bilden wir die $(n-k) \times n$–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \overline{z}_1^\top \\ \vdots \\ \overline{z}_{n-k}^\top \end{pmatrix}$$

vom Rang $n - k$. Die Konstruktion ergibt

$$AB = \begin{pmatrix} \overline{z}_1^\top \\ \vdots \\ \overline{z}_{n-k}^\top \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \overline{z}_1^\top B \\ \vdots \\ \overline{z}_{n-k}^\top B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0}^\top \\ \vdots \\ \overline{0}^\top \end{pmatrix}\,,$$

und deshalb ist wegen $(1')$

$$A\overline{x} = AB\overline{\mu} + A\overline{y} = A\overline{y}\,.$$

Wir setzen $\overline{b} := A\overline{y}$ und erhalten

$$\boxed{A\overline{x} = \overline{b}}\,. \tag{2}$$

Die Koordinaten $\overline{x}$ des Punktes P genügen also dieser Gleichung. Aus dem nächsten Satz folgt, dass auch jede Lösung $\overline{x}$ von (2) Koordinatenvektor eines Punktes von $\mathcal{E}_k$ ist.

6.3.1 Satz. *Jede Parametergleichung der Form (1) mit linear unabhängigen Vektoren $b_1, \ldots, b_k$ bzw. jedes lineare Gleichungssystem der Form (2) mit* $\text{Rang}(A, \overline{b}) = \text{Rang} A = n - k$ *bestimmt eindeutig eine k–dimensionale Ebene.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ die Menge der Punkte P, die (1) genügen. Dann gilt $f_o(\mathcal{E}) = L(\{b_1, \ldots, b_k\}) + \overrightarrow{OP_0}$, und wegen Satz 6.2.5 ist $\mathcal{E}$ eine Ebene.
Weiter wissen wir aus dem Kapitel über lineare Gleichungssysteme, dass $LM(A\overline{x} = \overline{b}) = U + \overline{v}$, wobei $U = LM(A\overline{x} = \overline{0})$ ein linearer Unterraum von K^n der Dimension k ist und $\overline{v}$ eine spezielle Lösung von (2). Jeder Lösungsvektor $\overline{x}$ von (2) lässt sich also darstellen als $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \, \overline{b}_i + \overline{v}$ für eine Basis $\{b_1, \ldots, b_k\}$ in V, und alle $\overline{\mu} \in K^k$ liefern Lösungsvektoren $\overline{x}$. Wir interpretieren nun $\overline{x}, \overline{v}$ und $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_k$ als Koordinaten von Vektoren x, v und $b_1, \ldots, b_k$ in V bzgl. der Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und erhalten $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \, b_i + v$. Schließlich definieren wir die Punkte P und P_0 durch $\overrightarrow{OP} = x$ bzw. $\overrightarrow{OP_0} = v$ und kommen zu $\overrightarrow{OP} = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i \, b_i + \overrightarrow{OP_0}$. Dies ist wiederum die Parametergleichung einer k–dimensionalen Ebene. □

Bemerkung. Im Spezialfall der Hyperebene $\mathcal{H}$, wo dim $\mathcal{H} = n - 1$ gilt, hat die Koordinatengleichung (2) die Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \ ,$$

mit mindestens einem von 0 verschiedenen a_i. Eine Gerade $\mathcal{G}$ ist durch $n - 1$ Gleichungen dieser Art gegeben, wobei $\text{Rang} A = \text{Rang}(A, \overline{b}) = n - 1$.

6.4 Parallelität und Schnitte von Ebenen

Der Begriff der Parallelität spielt eine wichtige Rolle in der affinen Geometrie. Wir kommen darauf zurück, wenn wir die entsprechenden Abbildungen behandeln. Hier betrachten wir folgendes:

Definition. Zwei Ebenen eines affinen Raumes heißen **parallel**, falls einer der beiden erzeugten Vektorräume den anderen enthält.

6.4.1 Satz. *Die durch die Koordinatengleichungen $A\overline{x} = \overline{b}$ und $A'\overline{x} = \overline{b'}$ gegebenen Ebenen $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ sind genau dann parallel, wenn die Lösungsmenge eines der beiden zugehörigen homogenen Gleichungssysteme die des anderen enthält.*

Beweis. Aus dem Zusammenhang zwischen Parameterdarstellung und Koordinatengleichungen der Ebenen ergibt sich, dass $V(\mathcal{E})$ in Koordinaten zu $LM(A\overline{x} = \overline{0})$ gehört und $V(\mathcal{E}')$ zu $LM(A'\overline{x} = \overline{0})$. □

Aufgabe. Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ parallele Ebenen mit nichtleerem Durchschnitt und $\dim \mathcal{E} \leq \dim \mathcal{E}'$. Dann ist $\mathcal{E}$ in $\mathcal{E}'$ enthalten. •

Wir erinnern, dass der nichtleere Durchschnitt zweier Ebenen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ stets wieder eine Ebene bildet und $V(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}') = V(\mathcal{E}) \cap V(\mathcal{E}')$. Für den Verbindungsraum $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}'$ kann man folgendes zeigen.

6.4.2 Satz. $\quad \mathcal{E} \cap \mathcal{E}' \neq \emptyset \Leftrightarrow V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')$.

Beweis. Unter der Voraussetzung $V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')$ findet man für $A \in \mathcal{E}$ und $A' \in \mathcal{E}'$ die Darstellung $\overrightarrow{AA'} = v + v'$ mit $v \in V(\mathcal{E})$ und $v' \in V(\mathcal{E}')$. Der Punkt $O \in \mathcal{E}$ sei durch $\overrightarrow{AO} = v$ bestimmt. Aus $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'}$ folgt $\overrightarrow{OA'} = v'$, d.h. $\overrightarrow{A'O} = -v' \in V(\mathcal{E}')$. Somit gilt auch $O \in \mathcal{E}'$, so dass $O \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$.
Sei umgekehrt O ein Punkt aus $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}'$. Wir gehen in zwei Schritten vor:

1) Sei $w \in V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')$, d.h. $w = v + v'$ mit $v \in V(\mathcal{E}),\ v' \in V(\mathcal{E}')$. Die Punkte $A \in \mathcal{E}$ und $A' \in \mathcal{E}'$ bestimmen wir durch $-v = \overrightarrow{OA},\ v' = \overrightarrow{OA'}$ und bekommen $w = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AA'} \in V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}')$. Also haben wir
$$V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}') \subset V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}')\ .$$

2) Wir betrachten die Ebene $\mathcal{E}'' := f_0^{-1}\big(V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')\big)$ mit $O \in \mathcal{E}''$ und $V(\mathcal{E}'') = V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')$. Offenbar gilt $\mathcal{E} \cup \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''$, demzufolge $\mathcal{E} \vee \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''$ und damit $V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') \subset V(\mathcal{E}'')$, d.h.
$$V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') \subset V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')\ .$$

1) und 2) ergeben $V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')$ $\quad$ (und $\mathcal{E}'' = \mathcal{E} \vee \mathcal{E}'$). $\square$

Unmittelbar daraus resultiert der folgende Dimensionssatz.

6.4.3 Satz. *Für zwei sich schneidende Ebenen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ gilt*
$$\dim(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{E}' - \dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}').$$

Beweis. $\dim(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = \dim V(\mathcal{E} \vee \mathcal{E}') = \dim\big(V(\mathcal{E}) + V(\mathcal{E}')\big) = \dim V(\mathcal{E}) + \dim V(\mathcal{E}') - \dim\big(V(\mathcal{E}) \cap V(\mathcal{E}')\big) = \dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{E}' - \dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}')$, wobei der Dimensionssatz für die Summe von Unterräumen benutzt wurde. $\square$

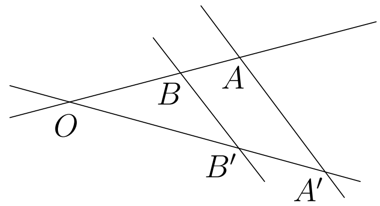
Definition. Zwei Ebenen heißen **windschief**, wenn sie nicht parallel sind und sich nicht schneiden.

Aufgabe.

1) Eine Ebene $\mathcal{E}$ und eine Hyperebene $\mathcal{H}$ sind nicht windschief.

2) Falls $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ nicht parallel sind, so gilt $\dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{H}) = \dim \mathcal{E} - 1$. $\bullet$

Aufgabe. Beweisen Sie den **Strahlensatz**:



O, A, A' seien linear unabhängige Punkte, $B \in O \vee A$, $B' \in O \vee A'$ und $B \vee B'$ parallel zu $A \vee A'$. Dann gilt

$$\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OA'}$$

für ein gemeinsames Teilverhältnis $\lambda \in K$. •

6.5 Affine Abbildungen

Wir suchen nun Abbildungen zwischen affinen Räumen, die mit linearen Abbildungen zwischen den erzeugten Vektorräumen korrespondieren. Dabei gehen wir wie folgt vor:

$(\mathcal{A}, V, f)$ und $\mathcal{A}', V', f')$ seien affine Geometrien über demselben Körper K.

Definition. Eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ heißt **affin**, falls aus $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$ folgt $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \lambda \overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(D)}$.
Eine bijektive affine Abbildung wird **Affinität** genannt.

Ehe wir Affinitäten genauer untersuchen, wollen wir einen wichtigen Spezialfall behandeln.

Definition. Eine Abbildung $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $\overrightarrow{\mathcal{T}(A)\mathcal{T}(B)} = \overrightarrow{AB}$ heißt **Translation** oder **Parallelverschiebung**.

6.5.1 Lemma. *Jede Translation $\mathcal{T}$ ist eine Affinität.*

Beweis. $\mathcal{T}$ ist offenbar affin.
Für die Injektivität setzen wir $\mathcal{T}(A) = \mathcal{T}(B)$, wählen ein beliebiges $O \in \mathcal{A}$ und erhalten $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\mathcal{T}(O)\mathcal{T}(A)} = \overrightarrow{\mathcal{T}(O)\mathcal{T}(B)} = \overrightarrow{OB}$, d.h. $A = B$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ surjektiv ist tragen wir für ein beliebiges $A' \in \mathcal{A}$ den Vektor $\overrightarrow{\mathcal{T}(A')A'}$ an A' ab. Der Endpunkt sei A. Dann ist $\overrightarrow{\mathcal{T}(A')A'} = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{\mathcal{T}(A')\mathcal{T}(A)}$ und demnach $\mathcal{T}(A) = A'$. □

Aufgabe. Die Menge aller Translationen in $\mathcal{A}$ bildet eine Gruppe. •

Der folgende Satz beinhaltet, dass die Translationsgruppe mit V identifiziert werden kann.

6.5.2 Lemma. *$\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist genau dann eine Translation, wenn es einen (eindeutig bestimmten) Vektor $v \in V$ gibt mit $\overrightarrow{O\mathcal{T}(A)} = \overrightarrow{OA} + v$, bei festem $O \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathcal{T}(A)\mathcal{T}(B)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\mathcal{T}(A)O} + \overrightarrow{O\mathcal{T}(B)} \Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{O\mathcal{T}(A)} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\mathcal{T}(B)} - \overrightarrow{OB} =: v \Leftrightarrow \overrightarrow{O\mathcal{T}(A)} = \overrightarrow{OA} + v$$

für ein (eindeutig bestimmtes) $v \in V$. □

Jeder Affinität $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ ordnen wir nun die Abbildung $\mathbf{F} : V \to V'$ zu mit $\mathbf{F}v = v'$, falls $v = \overrightarrow{AB}$ und $v' = \overrightarrow{\mathcal{F}(A')\mathcal{F}(B')}$.

Bemerkung. Die Definition von $\mathbf{F}$ ist korrekt, denn aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ folgt $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(D)}$.

6.5.3 Satz. (1) *$\mathbf{F}$ ist linear und mit $\mathcal{F}$ surjektiv bzw. injektiv, für Affinitäten $\mathcal{F}$ also ein Vektorraumisomorphismus.*

(2) *Wenn $\mathcal{F}_1$ eine weitere Affinität ist mit $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$, so gibt es eine Translation $\mathcal{T}$ in $\mathcal{A}$ mit*

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{T} \circ \mathcal{F}\,.$$

Beweis. **(1)** $\mathbf{F}$ is *linear*: Für $v, w \in V$ sei $v = \overrightarrow{AB}$, $w = \overrightarrow{BC}$ uns somit $v + w = \overrightarrow{AC}$. Dann gilt $\mathbf{F}(v + w) = \overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(C)} = \overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} + \overrightarrow{\mathcal{F}(B)\mathcal{F}(C)} = \mathbf{F}v + \mathbf{F}w$.
Aus $\lambda u = \overrightarrow{AB}$ und $u = \overrightarrow{CD}$ folgt nach Definition $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \lambda\overrightarrow{\mathcal{F}(C)\mathcal{F}(D)}$, d.h. $\mathbf{F}(\lambda u) = \lambda \mathbf{F}u$.
$\mathbf{F}$ ist mit $\mathcal{F}$ *surjektiv*: Sei $\overrightarrow{A'B'} = v' \in V'$ beliebig. Wegen der Surjektivität vom $\mathcal{F}$ gibt es Punkte $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{F}(A) = A'$, $\mathcal{F}(B) = B'$. Wir setzen $v := \overrightarrow{AB}$ und erhalten $\mathbf{F}v = \overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \overrightarrow{A'B'} = v'$.
$\mathbf{F}$ ist mit $\mathcal{F}$ *injektiv*: Sei $\mathbf{F}u = \mathbf{F}v$ und $u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}$. Dann ist $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(C)}$, d.h. $\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(C)$, und wegen der Injektivität von $\mathcal{F}$ folgt $B = C$, also auch $u = v$.

(2) Wir definieren die Translation $\mathcal{T} : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}'$ durch

$$\overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{T}(A')} = \overrightarrow{\mathcal{F}(O)A'} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(O)}\ ,\ A' \in \mathcal{A}' \text{ für ein } O \in \mathcal{A}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{T}(\mathcal{F}(A))} &= \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}(A)} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(O)} \\
&= \overrightarrow{\mathcal{F}_1(O)\mathcal{F}_1(A)} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(O)} \\
&= \mathbf{F}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(O)} \\
&= \overrightarrow{\mathcal{F}_1(O)\mathcal{F}_1(A)} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(O)} \\
&= \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}_1(A)}
\end{aligned}$$

und demnach

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}_1(A).$$

□

Koordinatendarstellung von affinen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen

Seien $(O, \{e_1, \ldots, e_n\})$ und $(O', \{e'_1, \ldots, e'_{n'}\})$ affine Koordinatensysteme in $(\mathcal{A}, V)$ bzw. $(\mathcal{A}', V')$. Für eine Affinität $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ betrachten wir die Ortsvektoren

$$\overrightarrow{O'\mathcal{F}(A)} = \overrightarrow{O'\mathcal{F}(O)} + \overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}(A)} = \mathbf{F}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'\mathcal{F}(O))} \ .$$

Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

$F \in M(n' \times n)$	Matrix von **F**.
$\overline{x} \in K^n$	Koordinaten des Punktes A,
$\overline{y} \in K^{n'}$	Koordinaten des Punktes $\mathcal{F}(A)$,
$\overline{c} \in K^{n'}$	Koordinaten des Punktes $\mathcal{F}(O)$.

Die obenstehende Beziehung liefert dann die **Koordinatendarstellung** der Abbildung $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\overline{y} = F\overline{x} + \overline{c}} \ .$$

Für $n = n'$ und Affinitäten $\mathcal{F}$ gilt $\det F \neq 0$.

6.5.4 Satz. *Jede Gleichung der obigen Form kann als Koordinatengleichung einer affinen Abbildung interpretiert werden. (Für $n = n'$ und $\det F \neq 0$ ist diese eine Affinität.)*

Beweis. Die Matrix F (mit $\det F \neq 0$) gehört zu einer linearen Abbildung (einem Isomorphismus) $\mathbf{F} : V \to V'$. Wir definieren die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ durch $\mathcal{F}(A) = A'$, falls $\overrightarrow{O'A'} = \mathbf{F}\overrightarrow{OA} + c$, wobei $c \in V'$ die Koordinaten $\overline{c}$ besitzt.

1) $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = -\mathbf{F}\overrightarrow{OA} - c + \mathbf{F}\overrightarrow{OB} + c = \mathbf{F}\big(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\big) = \mathbf{F}\overrightarrow{AB}$, d.h. $\overrightarrow{\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)} = \mathbf{F}\overrightarrow{AB}$, insbesondere ist $\mathcal{F}$ dann **affin**. Nach Konstruktion hat $\mathcal{F}$ die gewünschte Koordinatendarstellung.

2) $\mathcal{F}$ ist mit $\mathbf{F}$ **injektiv**: Aus $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$ folgt $\mathbf{F}\overrightarrow{OA} = \mathbf{F}\overrightarrow{OB}$ und wegen der Injektivität von $\mathbf{F}$ auch $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, d.h. $A = B$.

3) $\mathcal{F}$ ist mit $\mathbf{F}$ **surjektiv**: Da $\mathbf{F}$ surjektiv ist, gibt es für jedes $A' \in \mathcal{A}'$ ein $v \in V$ mit $\mathbf{F}v = \overrightarrow{O'A'} - c$. Wir definieren A durch $\overrightarrow{OA} = v$ und schließen aus $\mathbf{F}\overrightarrow{OA} + c = \overrightarrow{O'A'}$ auf $\mathcal{F}(A) = A'$.

□

Einige geometrische Eigenschaften von Affinitäten

Die affine Geometrie als mathematische Theorie wird oft auch als die Lehre von den geometrischen Eigenschaften der Objekte des affinen Raumes, die bei Affinität erhalten bleiben, betrachtet. Einige davon wollen wir aufzählen.

6.5.5 Satz. *Affinitäten $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ sind* ***ebenentreu****, d.h. für jede Ebene $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ und $\mathcal{E}' := \mathcal{F}(\mathcal{E})$ gilt*

(1) *$\mathcal{E}'$ ist eine Ebene in $\mathcal{A}'$,*

(2) $V(\mathcal{E}') = \mathbf{F}(V(\mathcal{E}))$,

(3) $\dim \mathcal{E}' = \dim \mathcal{E}$.

Beweis. Wir benutzen die Darstellungen aus Abschnitt 5.2. Für $O \in \mathcal{E}$ ist die Menge der Ortsvektoren von $\mathcal{E}$ gleich $f_o(\mathcal{E}) = V(\mathcal{E})$. Sei $O' := \mathcal{F}(O)$. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} f'_{o'}(\mathcal{E}) &= \big\{\overrightarrow{O'A'} : A' \in \mathcal{E}'\big\} = \big\{\overrightarrow{\mathcal{F}(O)\mathcal{F}(A)} : A \in \mathcal{E}\big\} = \big\{\mathbf{F}\overrightarrow{OA} : A \in \mathcal{E}\big\} \\ &= \mathbf{F}\big(f_o(\mathcal{E})\big) = \mathbf{F}V(\mathcal{E})\,. \end{aligned}$$

Also bildet $f_{o'}(\mathcal{E})$ einen Unterraum von V' und $O' \in \mathcal{E}'$. Deshalb ist $\mathcal{E}'$ eine Ebene und $f'_{O'}(\mathcal{E}') = V'(\mathcal{E}')$, was (1) und (2) beweist. Schließlich gilt $\dim \mathcal{E}' = \dim V'(\mathcal{E}') = \dim \mathbf{F}(V(\mathcal{E})) = \dim V(\mathcal{E}) = \dim \mathcal{E}$. □

Insbesondere sind Affinitäten geradentreu.
Als nächstes betrachten wir nun den Fall $K = \mathbb{R}$.
Seien A, P, B Punkte auf einer Geraden.

Definition.

(1) Das **Teilverhältnis** $\tau = \tau(A, P, B) \in \mathbb{R}$ bestimmen wir durch $\overrightarrow{AP} = \tau\overrightarrow{PB}$.

(2) P liegt **zwischen** A und B, falls $\tau(A, P, B) > 0$.

(3) Die **Strecke** AB ist die Menge aller Punkte der Geraden $A \vee B$, die zwischen A und B liegen, vereinigt mit den Endpunkten A und B.

6.5.6 Lemma. *Wenn die Punkte A, P und B auf einer Geraden liegen und P zwischen A und B, so gilt das Gleiche für entsprechende Bildpunkte unter einer Affinität.*

Beweis. Jede Affinität ist geradentreu und erhält das Teilverhältnis. $\square$

6.5.7 Folgerung. *Affinitäten sind* **streckentreu**. $\square$

Zuletzt sei K wieder beliebig.

6.5.8 Lemma. *Affinitäten sind* **parallelentreu**.

Beweis. Seien $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ parallele Ebenen in $\mathcal{A}$ mit $V(\mathcal{E}_1) \subset V(\mathcal{E}_2)$ und $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ eine Affinität. Für den zugehörigen Vektorraumisomorphismus $\mathbf{F}$ gilt dann $V\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)\big) = \mathbf{F}(V(\mathcal{E}_1)) \subset \mathbf{F}(V(\mathcal{E}_2)) = V\big(\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)\big)$, d.h. $\mathcal{F}(\mathcal{E}_1)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{E}_2)$ sind ebenfalls parallel. $\square$