9. Projektive Räume, $\mathbb{K}$ - Körper, V - $\mathbb{K}$-Vektorraum

Def. 9.1. Die Menge
$\mathbb{P}V = \{\mathbb{K}v \subseteq V \mid v \neq \bar{o}_V\}$ aller Ursprungsgeraden in V heißt der projektive Raum zu V.

Bem. $\mathbb{P}\{\bar{o}\} = \emptyset$. $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) =: \mathbb{P}^n\mathbb{K}$, das ist der n-dimensionale projektive Raum über $\mathbb{K}$.
Man hat eine Abbildung
$V \setminus \{\bar{o}_V\} \longrightarrow \mathbb{P}V$, wo $v \longmapsto \mathbb{K}v$. Die ist surjektiv.

Homogene Koordinaten auf $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$:
Sei $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\bar{o}\}$. Dann
$\mathbb{P}^n\mathbb{K} \ni (a_0 : a_1 : \dots : a_n) = \mathbb{K}(a_0, a_1, \dots, a_n)$.
Merken, $(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = (\lambda a_0 : \lambda a_1 : \dots : \lambda a_n)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.

Eine Gleichung wie $x_1 = 1$ ist in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$ sinnlos.
Zum Beispiel $(1:2) = (2:4)$ in $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$.
Die Gleichungen sollen homogen sein.

Beispiel (Projektive Geraden in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$)
Eine Projektive Gerade $L \subseteq \mathbb{P}^2\mathbb{K}$ ist die Nullmenge einer Gleichung $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$.

$$\mathbb{P}^2\mathbb{K} = \underbrace{\{(1 : y_1 : y_2)\}}_{\cong\, \mathbb{K}^2} \sqcup \underbrace{\{(0 : y_1 : y_2)\}}_{\cong\, \mathbb{P}\mathbb{K}^2}$$

Falls $b=c=0$, ist L die unendlich ferne projektive Gerade. Wenn $b\neq 0$ oder $c\neq 0$, besteht L aus der **affinen** Gerade $bX_1+cX_2=a$ in $\mathbb{K}^2$ und dem Punkt $(0:-c:b)$.

<u>Def. 9.2</u> Eine Teilmenge $X\subseteq \mathbb{P}V$ heißt ein projektiver Unterraum, falls $X=\mathbb{P}\mathcal{U}$, wo $\mathcal{U}\subseteq V$ ein Untervektorraum ist.

$\dim \mathbb{P}\mathcal{U} := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} - 1$.

$\mathbb{P}\mathcal{U}$ ist eine projektive Gerade $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{U}=2$.

$\mathbb{P}\mathcal{U}\subseteq \mathbb{P}V$ ist genau durch dieselbe Gleichungen definiert, wie $\mathcal{U}\subseteq V$.

<u>Lemma 9.3.</u> Seien $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\subseteq V$ Unterräume. Setzen $X_1\vee X_2=\mathbb{P}(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)$ für $X_i=\mathbb{P}\mathcal{U}_i$. Dann gilt $\dim(X_1\vee X_2)=\dim X_1+\dim X_2-\dim(X_1\cap X_2)$.

<u>Bew.</u> Merken, $X_1\cap X_2=\mathbb{P}(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)$. Damit

$\dim(X_1\vee X_2)=\dim(\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2)-1=$

$=\dim\mathcal{U}_1+\dim\mathcal{U}_2-\dim(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)-1=$

$=\dim X_1+\dim X_2-\dim(X_1\cap X_2)$. ☒

<u>Satz 9.4.</u> Sei $V=\mathbb{K}^{n+1}$, $n<\infty$. Dann gelten:

(1) Ist $\dim X_1+\dim X_2\geq n$ für zwei projektive Unterräume $X_1,X_2\subseteq\mathbb{P}V$, so ist $X_1\cap X_2\neq\emptyset$.

(2) Ist es $\dim X_1=1$, $\dim X_2=n-1$ und $X_1\nsubseteq X_2$, so ist $X_1\cap X_2$ genau ein Punkt.

(3) Zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}^2\mathbb{K}$ schneiden sich stets. (II)

Bew. (1) Nach dem Lemma 9.3. gilt es:
$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim(X_1 \vee X_2) \geq n - n \geq 0.$
Also $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \geq 1$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \{\bar{0}\} \Rightarrow X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.
(2) $1 + (n-1) = n \geq n$ und $X_1 \leq X_2$. D.h. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ ist ein echter Unterraum von $\mathcal{U}_1$ von positiver Dimension. Wir haben $\dim \mathcal{U}_1 = 2$, $\dim(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = 1$ und damit ist $X_1 \cap X_2$ ein Punkt.
(3) Folgt aus (1), $1 + 1 = 2 \geq 2$. $\boxtimes$

Nicht nur für $n = 2$, haben wir eine Einbettung:
$$\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{K} = \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}\mathbb{K}^n, \quad \mathbb{P}\mathbb{K}^n = \{(0 : y_1 : \ldots : y_n)\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (1 : a_1 : a_2 : \ldots : a_n)$$
ist unendlich ferne projektive Hyperebene

Projektivitäten

Sei $f: V \to V$ linear. Dann ist $f(\mathbb{K}v) = \mathbb{K}f(v)$ und f induziert eine Abbildung $\varphi: \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$, falls $\ker f = \{\bar{0}_V\}$.
Projektivität $\Leftrightarrow$ φ ist bijektiv. Ist $\dim V < \infty$, so gilt: φ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{\bar{0}_V\}$.
Ueberdem, $\varphi(\mathcal{U})$ ist ein projektiver Unterraum für jeden projektiven Unterraum $\mathcal{U} \leq \mathbb{P}V$.

Def. 9.5. Eine bijektive Abbildung $\varphi: \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$ heißt eine Kollineation, falls das Bild einer projektiven Geraden L durch die Punkte $a, b \in \mathbb{P}V$ eine projektive Gerade durch die Punkte $\varphi(a), \varphi(b)$ $\forall a, b$ ist.

Satz 9.6. (1) Zu je zwei Punkten $a, b \in \mathbb{P}V$, $a \neq b$, gibt es genau eine projektive Gerade, die a und b enthält.
(2) Jede Projektivität ist eine Kollineation.

Bew. (1) $a, b \in L$, $L = \mathbb{P}U$, $U \leq V$, $\dim U = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$, wo $a = \mathbb{K}\bar{u}$, $b = \mathbb{K}\bar{v}$, denn $\bar{u}$ und $\bar{v}$ linear unabhängig sind.
(2) $f(U) \leq V$ und $\dim_{\mathbb{K}} f(U) = 2$, weil $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}_V\}$. $\boxtimes$

Quadriken in $\mathbb{P}^n\mathbb{K}$

Eine Gleichung wie $x^2 + y^2 = 1$ ist wieder sinnlos. Aber $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ ist homogen und hier kann man von der Lösungsmenge sprechen.

Ellipse (Kreis)	$X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$		
Hyperbel	$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 0$	$\xrightarrow{X_2 = 1}$	Affine Kegelschnitte
Parabel	$X_0^2 - X_1 X_2 = 0$		

Satz 9.7. Die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln sind projektiv äquivalent, d.h. diese projektiven Kurven gehen durch eine Projektivität $\varphi: \mathbb{P}^2\mathbb{R} \to \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ ineinander über.

Bew. $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0 \Leftrightarrow -X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 0 \xleftrightarrow[X_0 \leftrightarrow X_2]{} X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 0$

$$X_0^2 - X_1 X_2 = 0 \xrightarrow[X_1 = -X_1' + X_2',\ X_2 = X_1' + X_2']{} X_0^2 + (X_1')^2 - (X_2')^2$$

$\boxtimes$

$\mathbb{P}^2\mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{P}^1\mathbb{R}$

$X_2 = 1$ $\quad X_2 = 0$ (unendlich ferne projektive Gerade)

Sei K eine projektive Quadrike wie oben.

$K \cap \mathbb{P}^1\mathbb{R} = ?$

Ellipse: $X_0^2 + X_1^2 = 0 \Rightarrow X_0 = X_1 = 0 \rightsquigarrow \emptyset$.

Hyperbel: $X_0^2 - X_1^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} X_0 = X_1 \\ X_0 = -X_1 \end{array}\right. \rightsquigarrow \{(1:1:0), (1:-1:0)\}$.

Parabel: $X_0^2 = 0 \Rightarrow X_0 = 0 \rightsquigarrow \{(0:1:0)\}$

Projektivitäten auf $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \sqcup \infty$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear $\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad \infty = (1:0)$

Bei uns $A \in GL_2(\mathbb{R})$.

$\varphi: (Y_0 : Y_1) \longmapsto (aY_0 + bY_1 : cY_0 + dY_1)$.

Wenn $Y_1 \neq 1$, dann $(Y_0 : Y_1) = \left(\frac{Y_0}{Y_1} : 1\right) \in \mathbb{R}$.

Was passiert auf $\mathbb{R}$?

$$\frac{Y_0}{Y_1} \longmapsto \frac{aY_0 + bY_1}{cY_0 + dY_1} = \frac{at + b}{ct + d}, \quad t = \frac{Y_0}{Y_1}.$$

$t \longmapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ ist eine Möbiustransformation.

Wenn $c = 0$ (dann $d \neq 0$), geht $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$, $\infty = (1:0) \mapsto (a:0) = \infty$ (hier auch $a \neq 0$)

Wenn $c \neq 0$, dann geht $t_0 = -\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$ auf $\frac{at_0 + b}{0} = \infty$.

$(t_0 : 1) \longmapsto (-\frac{1}{c}\det(A) : 0)$ und der Punkt $\infty = (1:0)$ geht auf $(a:c) = (\frac{a}{c} : 1) \in \mathbb{R}$.

Projektive Basen

Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$. Die Punkte $p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1} \in \mathbb{P}V$ sind in allgemeiner Lage, falls keine $(n+1)$ Punkte davon einen echten projektiven Unterraum von $\mathbb{P}V$ erzeugen. Man sagt, dann dass $\{p_0, \dots, p_{n+1}\}$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}V$ ist.

$p_i = \mathbb{K}v_i$; allgemeine Lage $\Leftrightarrow$ $\forall k,\ 0 \leq k \leq n+1$: $\dim\langle v_i \mid i \neq k\rangle = n+1$

Satz 9.8. Sei $V = \mathbb{K}^{n+1}$ und seien $p_0, \dots, p_{n+1}$ sowie $q_0, \dots, q_{n+1}$ in allgemeiner Lage in $\mathbb{P}V$. Dann existiert genau eine Projektivität $\varphi : \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V$, s.d. $\varphi(p_i) = q_i \ \forall i,\ 0 \leq i \leq n+1$.

Bew. $p_i = \mathbb{K}v_i$, $q_i = \mathbb{K}u_i$ und $\{v_0, \dots, v_n\}$, $\{u_0, \dots, u_n\}$ sind Basen von V. Für jedes $(n+1)$-Tupel $(c_0, \dots, c_n)$, wo $c_i \neq 0\ \forall i$, existiert genau eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to V$, s.d. $f(v_i) = c_i u_i\ \forall i$. Hier $\varphi(p_i) = q_i$, $i \leq n$.

Es muss auch gelten, dass $\varphi(p_{n+1}) = q_{n+1}$, φ ist die Projektivität, die f induziert.

$v_{n+1} = \alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_n v_n$, wo $\alpha_i \neq 0 \ \forall i$,

$u_{n+1} = \gamma_0 u_0 + \ldots + \gamma_n u_n$, wo $\gamma_i \neq 0 \ \forall i$.

(Wenn $\alpha_i = 0$, bilden $v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{n+1}$ keine Basis von V im Widerspruch zur allgemeinen Lage.)

Wir merken, dass f und λf mit $\lambda \neq 0$ die gleichen Projektivitäten induzieren und suchen f mit $f(v_{n+1}) = u_{n+1}$. Die Bedingung ist

$\alpha_0 c_0 u_0 + \ldots + \alpha_n c_n u_n = \gamma_0 u_0 + \ldots + \gamma_n u_n \iff$

$\iff c_i = \gamma_i / \alpha_i \ \forall i, \ 0 \le i \le n$. Damit existiert eine solche f und ist eindeutig. $\boxtimes$

Das Doppelverhältnis

Sei nun $n = 1$, $X = \mathbb{P}\mathbb{K}^2$. Dann sind je drei verschiedene Punkte $p_0, p_1, p_2 \in X$ in allgemeiner Lage ($p_1 = \mathbb{K}v_1 \neq \mathbb{K}v_2 = p_2 \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ ist eine Basis).

Seien $p_0, p_1, p_2, p_3 \in X$ paarweise verschieden. Nach dem Satz 9.8. existiert genau eine Projektivität $\varphi : X \to X$, s.d.

$\varphi(p_0) = (1:0)$, $\varphi(p_1) = (1:1)$, $\varphi(p_3) = (0:1)$.

Dadurch ist $\varphi(p_4) = (a:b)$ schon eindeutig festgelegt. Man nennt

$D(p_0, p_1, p_2, p_3) := (a:b) \in \mathbb{P}^1\mathbb{K}$ das *Doppelverhältnis* der vier Punkte $p_0, p_1, p_2, p_3 \in X$.

Satz 9.9. Sei $X=\mathbb{P}\mathbb{K}^2$, $\varphi: X\to X$ eine Projektivität, $p_0, p_1, p_2, p_3 \in X$ paarweise verschieden. Dann gilt $D(p_0, p_1, p_2, p_3) = D(\varphi(p_0), \varphi(p_1), \varphi(p_2), \varphi(p_3))$.

Bew. Sei ψ die Projektivität mit $\psi(p_0)=(1:0)$, $\psi(p_1)=(1:1)$, $\psi(p_2)=(0:1)$. Dann ist $\psi\circ\varphi^{-1}$ die Projektivität, die $\varphi(p_0)$ auf $(1:0)$ und so weiter abbildet. So gilt

$$D(p_0,\dots,p_3) = \psi(p_3) = \psi\circ\varphi^{-1}(\varphi(p_3)) = D(\varphi(p_0),\dots \varphi(p_3)).$$

$\blacksquare$

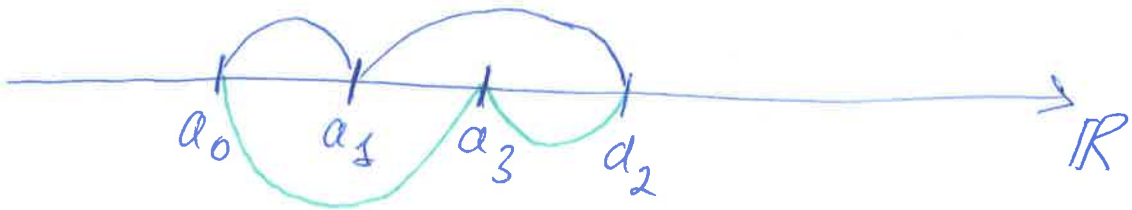
Beispiel. Seien $p_i=(a_i:1)$, $a_i\neq a_j$ für $i\neq j$.

$\varphi: \mathbb{R}\sqcup \underset{(1:0)}{\underset{\shortparallel}{\infty}} \longmapsto \mathbb{R}\sqcup\infty$ sei eine Möbiustransformation.

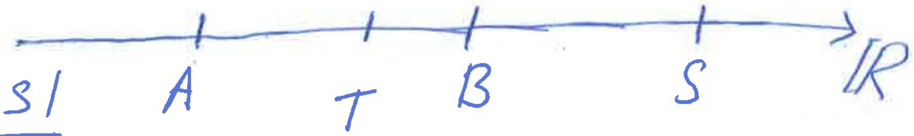
Nehmen $\varphi(t)=\varphi(t:1)=\dfrac{t-a_2}{t-a_0}\times\dfrac{a_1-a_0}{a_1-a_2}$.

Dann $\varphi(a_3)=\dfrac{a_3-a_2}{a_3-a_0}\times\dfrac{a_1-a_0}{a_1-a_2}=\dfrac{\frac{a_1-a_0}{a_1-a_2}}{\frac{a_3-a_0}{a_3-a_2}}$,

das Doppelverhältnis von a_0, a_1, a_2, a_3.



Harmonische Lage $\Leftrightarrow D(a_0, a_1, a_2, a_3) = -1$.



$$\frac{|AT|}{|BT|}=\frac{|AS|}{|BS|}$$