4 Lineare Gleichungssysteme

Diese tauchten verschiedentlich schon im letzten Kapitel auf. Ein allgemeines **lineares Gleichungssystem** über dem Körper K hat die Gestalt

(1)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dabei sind sämtliche Glieder Körperelemente. Die a_{ij} heißen **Koeffizienten**, die b_i **konstante Glieder**, und die x_j sind die **Unbekannten**. In Matrizenschreibweise lautet das Gleichungssystem

(2)
$$A\overline{x} = \overline{b}\,.$$

Falls $\overline{a}_j$ die Spaltenvektoren von $A = \Big(a_{ij}\Big)$ sind, so können wir auch schreiben

(3)
$$x_1\overline{a}_1 + \ldots + x_n\overline{a}_n = \overline{b}\,.$$

Lösbarkeitskriterium

Fügen wir zur Matrix A noch die Spalte $\overline{b}$ hinzu, so entsteht die sogenannte **erweiterte Koeffizientenmatrix** $(A\overline{b})$.

4.1 Satz (Lösbarkeitskriterium von Kronecker–Capelli)**.**
Das System (1) *besitzt genau dann eine Lösung, wenn* Rang $A = \mathrm{Rang}\ (A\overline{b})$.

Beweis. Wenn (1) eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$ besitzt, so ist wegen (3) $\overline{b} \in \mathrm{Lin}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ und demnach Rang $(A\overline{b}) =$ Rang A. Setzen wir andererseits die letzten Gleichungen voraus und $r :=$ Rang A, so gibt es linear unabhängige Spaltenvektoren $\overline{a}_{j_1}, \ldots, \overline{a}_{j_r}$, und das System $\overline{a}_{j_1}, \ldots, \overline{a}_{j_r}, \overline{b}$ ist linear abhängig. Deshalb muss $\overline{b}$ in der linearen Hülle der $\overline{a}_{j_1}, \ldots, \overline{a}_{j_r}$ liegen, d.h. $\sum\limits_{l=1}^{r} x_{j_l}\overline{a}_{j_l} = \overline{b}$ für gewisse $x_{j_l} \in K$. Wir setzen zusätzlich $x_j = 0$, falls $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$ und bekommen $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\overline{a}_j = \overline{b}$, also (3). Folglich genügen die $x_1, \ldots, x_n$ dem System (1).

□

Lösungsstruktur

Um die gesamte Lösungsmenge von (1) zu bestimmen, wollen wir die Vektorraum– und Abbildungssprache benutzen. Wie früher deuten wir die Matrix A des Systems in (2) als lineare Abbildung $\mathbf{A} : K^n \to K^m$ mit $\mathbf{A}\overline{v} = A\overline{v}$. Dann ist

$$\mathbf{A}^{-1}(\{\overline{b}\}) = \{\overline{x} \in K^n : A\overline{x} = \overline{b}\}$$

die Lösungsmenge von (2), kurz LM, und

$$\mathbf{A}^{-1}(\{\overline{0}\}) = \{\overline{x} \in K^n : A\overline{x} = \overline{0}\}$$

die Lösungsmenge des sogenannten **homogenen Gleichungssystems**, kurz $LM(\overline{0})$.

4.2 Satz.

(i) $LM(\overline{0})$ *ist ein linearer Unterraum von* K^n *der Dimension* n – Rang A .

(ii) *Jeder lineare Unterraum* U *von* K^n *ist Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems.*

Beweis. **(i)** $LM(\overline{0})$ ist als Kern der Abbildung $\mathbf{A}$ ein Unterraum, und der Dimensionssatz 3.3.4 führt zu

$$\dim LM(\overline{0}) = n - \text{Rang } \mathbf{A} = n - \text{Rang } A\,.$$

(ii) Wir ergänzen eine beliebige Basis $b_1, \ldots, b_k$ in U zu einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ in K^n und benutzen die Darstellung

$$K^n = U \oplus V$$

mit $V = \text{Lin}(b_{k+1}, \ldots, b_n)$. Seien $\mathbf{A} := \mathbf{\Pi}_V$ die Projektion auf V entlang U und A die zugehörige Matrix bzgl. der Standardbasis in K^n. Damit ist offenbar $U =$ Kern $\mathbf{A} = \{\overline{x} \in K^n : A\overline{x} = \overline{0}\}$. □

Für die Bestimmung der Lösungsmenge des Ausgangsgleichungssystems benötigen wir folgenden Begriff.

Definition. Die **Verschiebung** eines Unterraums U des Vektorraums V um einen Vektor $v \in V$ ist gegeben durch

$$U + v := \{u + v : u \in U\}.$$

4.3 Satz.

(i) $LM = LM(\overline{0}) + \overline{v}$ *für jedes* $\overline{v} \in LM$.

(ii) *Jede Verschiebung eines Unterraums von* K^n *ist Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.*

Beweis. **(i)** Die Beziehungen $\overline{x} \in LM$ und $\overline{v} \in LM$, d.h. $A\overline{x} = \overline{b}$ und $A\overline{v} = \overline{b}$, sind äquivalent zu $A(\overline{x} - \overline{v}) = \overline{0}$ und $A\overline{v} = \overline{b}$, d.h. zu $\overline{u} := \overline{x} - \overline{v} \in LM(\overline{0})$ und $\overline{v} \in LM$. Umgeschrieben lautet dies $\overline{x} = \overline{u} + \overline{v}$ mit $\overline{u} \in LM(\overline{0})$ und $\overline{v} \in LM$, was gleichbedeutend mit $LM = LM(\overline{0}) + \overline{v}$ ist.
(ii) Sei nun $U + \overline{v}$ Verschiebung eines Unterraums. Wegen Satz 4.2 (ii) gibt es eine Matrix A mit $U = \{\overline{x} \in K^n : A\overline{x} = \overline{0}\}$.Wir setzen nun $\overline{b} := A\overline{v}$ und betrachten die Gleichung $A\overline{x} = \overline{b}$. Jedes $\overline{x} \in U + \overline{v}$ gehört wegen der Darstellung $\overline{x} = \overline{u} + \overline{v}$ mit $\overline{u} \in U$ und $A\overline{x} = A\overline{u} + A\overline{v} = \overline{0} + \overline{b} = \overline{b}$ zur Lösungsmenge. Ist andererseits $\overline{x}$ eine Lösung des Gleichungssystems, so erhalten wir $A(\overline{x} - \overline{v}) = \overline{b} - \overline{b} = \overline{0}$, d.h. $\overline{u} := \overline{x} - \overline{v} \in U$ und damit $\overline{x} \in U + \overline{v}$. □

Eindeutige Lösbarkeit

4.4 Satz. *Das Gleichungssystem* (1) *besitzt genau dann eine eindeutig bestimmte Lösung $\overline{x}$, wenn gilt*

$$\text{Rang } (A\overline{b}) = \text{Rang } A = n\,.$$

Beweis. Aufgrund der Darstellung $LM = LM(\overline{0}) + \overline{v}$ aus dem Satz 4.3 ist die Lösungsmenge LM genau dann einelementig, wenn $LM(\overline{0}) = \{\overline{0}\}$ gilt und überhaupt eine Lösung $\overline{v}$ existiert. Das Lösbarkeitskriterium und der schon erwähnte Dimensionssatz ergeben die äquivalente Bedingung Rang $(A\overline{b}) = $ Rang $A = n$. □

Lösungsalgorithmus (nach Gauß)
Um die Lösungsmenge rechnerisch bestimmen zu können, betrachten wir zunächst den **Spezialfall**

(2′) $$A'\overline{x} = \overline{b'}\,,$$

wo die Matrix A' eine obere Dreiecksgestalt besitzt, d.h.

$$(A', \overline{b'}) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} a'_{11} & & & & b'_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & & a'_{rr} & & b'_r \\ \hline & & & & b'_{r+1} \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \vdots \\ & & & & b'_m \end{array}\right) \qquad \text{mit } a'_{ii} \neq 0\,,\ i = 1, \ldots, r\,.$$

Eine Lösung $\overline{x}$ existiert hier höchstens dann, wenn $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$. In diesem Fall können wir die Unbekannten $x_{r+1}, \ldots, x_n \in K$ beliebig vorgeben und in die r–te Gleichung des Systems einsetzen. x_r lässt sich dort eliminieren:

$$x_r = (a'_{rr})^{-1}\,(b'_r - \sum_{j=r+1}^{n} a'_{rj}x_j)\,.$$

Anschließend werden $x_r, \dots, x_n$ in die $(r-1)$–te Gleichung eingesetzt, und man stellt nach x_{r-1} um, usw.

Übungsaufgabe

Demzufolge ist die Lösungsmenge gleich der Menge der $(x_1, \dots, x_n)$, für die die i–te Koordinate, $i \leq r$ als durch das Verfahren bestimmte Linearkombination der Variablen $x_{r+1}, \dots, x_n$ und der Konstanten Glieder $b'_{i+1}, \dots, b'_r$ dargestellt werden kann:

$$x_i = L_i(x_{r+1}, \dots, x_n, b'_i, \dots, b'_r) \,.$$

Der Zusammenhang zu Satz 4.3 entsteht folgendermaßen. Eine spezielle Lösung liefert nach Konstruktion z.B. $\overline{v}$ mit $v_{r+1} = \dots = v_n = 0$ und $v_i = L_i(0, \dots, 0, b'_{i+1}, \dots, b'_r)$, $i \leq r$. Als nächstes wählen wir die Basis $\overline{e}_{r+1}, \dots, \overline{e}_n$ in $LM(\overline{0})$ mit $e_{ij} = \delta_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{smallmatrix} \right.$ für $i > r$ und $e_{ij} = L_i(0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$ mit 1 an $(j-r)$–ter Stelle für $i \leq r$.

Dann gilt
$$\overline{x} = \sum_{j=r+1}^{n} x_j \overline{e}_j + \overline{v} \,.$$
•

Wir kommen nun zum Lösungsverfahren für (1) im **Allgemeinfall**, wobei Rang $(A\overline{b})$ = Rang A. Dieses lässt sich auf den obigen Spezialfall zurückführen. Die Lösungsmenge von (1) ist nämlich invariant gegenüber

- Vertauschen von Zeilen von $(A\overline{b})$,
- Vertauschen von Spalten von A, falls die zugehörigen x_j mit vertauscht werden,
- Addition des Vielfachen einer Zeile von $(A\overline{b})$ zu einer anderen.

Andererseits kann $(A\overline{b})$ durch den Gaußschen Algorithmus vermöge solcher Operationen zur Form $(A'\overline{b'})$ von oben gebracht werden (s. Lemma 3.5.4).

Das gesamte Lösungsverfahren heißt dann auch wieder **Gaußschen Algorithmus**.