Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 07

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

(a): Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit dem charakteristischen Polynom χ

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \chi(\lambda) = (3-\lambda)(1+\lambda)(5+\lambda)-16(1+\lambda) = -(1+\lambda)^3$$

A besitzt damit nur den Eigenwert -1 mit algebraischer Vielfachheit 3. Für die Eigenvektoren $(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ gilt dann

$$\left.\begin{aligned} 3x + 8z &= -x \\ 3x - y + 6z &= -y \\ -2x - 5z &= -z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \qquad x = -2z \qquad \Longrightarrow \qquad \dim \mathrm{E}_{-1}(A) = 2$$

Der Eigenwert besitzt demzufolge die geometrische Vielfachheit 2. Die Jordan-Normalform J von A wird also gerade durch zwei Jordan-Blöcke beschrieben.

$$A \sim \operatorname{diag}\left[J(2,-1), J(1,-1)\right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notiz zur Nebenrechnung: Die Transformationsmatrix ist gerade

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b): Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit dem charakteristischen Polynom χ

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \chi(\lambda) = (1-\lambda)^4$$

A besitzt damit nur den Eigenwert $\lambda \coloneqq 1$ mit algebraischer Vielfachheit 4. Für die Eigenvektoren $(x,y,z,t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ gilt dann

$$\left.\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \qquad \dim \mathrm{E}_1(A) = 2$$

Der Eigenwert besitzt demzufolge die geometrische Vielfachheit 2. Die Jordan-Normalform J von A wird also gerade durch zwei Jordan-Blöcke beschrieben. Für die Größe der Jordan-Blöcke betrachtet man $B \coloneqq A - \lambda\mathrm{I}$. Dann ist $\dim(\ker B) = 2$. Durch direktes Rechnen folgt

$$B^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dim(\ker B^3) = 4$$

B ist also nilpotent. Es gilt damit nach bereits bewiesenen Sätzen

$$4 = \dim(\ker B^3) > \dim(\ker B^2) = 3 > \dim(\ker B) = 2$$

Die Dimensionen nehmen damit immer um 1 ab. Demzufolge besitzt der größte Jordan-Blöcke die Dimension 3.

$$A \sim \operatorname{diag}\left[J(3,1), J(1,1)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiz zur Nebenrechnung: Die Transformationsmatrix ist gerade

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei $A \coloneqq J(r,\lambda)$ für ein $r \in \mathbb{N}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Dann besitzt A nur den Eigenwert λ mit der algebraischen Vielfachheit r und der geometrischen Vielfachheit 1. Damit besitzt A^{-1} nur den Eigenwert λ^{-1} und die selben Eigenvektoren (siehe Lineare Algebra I). Der Eigenraum von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} besitzt also auch die Dimension 1. λ^{-1} besitzt also bezüglich A^{-1} die gleich algebraische und geometrische Vielfachheit wie λ bezüglich A. Die Jordan-Normalform J von A^{-1} setzt sich demnach aus einem Jordan-Block zusammen.

$$A^{-1} \sim J\left(r, \lambda^{-1}\right)$$

Für A^2 gelten analoge Schlussfolgerungen. A^2 besitzt nur den Eigenwert λ^2. Der zugehörige Eigenraum besitzt die Dimension 1. Die Jordan-Normalform J von A^2 besteht wieder nur aus einem Jordan-Block.

$$A^2 \sim J\left(r, \lambda^2\right)$$

Aufgabe 3

(a): Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit dem charakteristischen Polynom χ

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$$

A besitzt damit nur den Eigenwert 2 mit algebraischen Vielfachheit 2. Für die zugehörigen Eigenvektoren $(x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

$$x + y = 2x, \quad -x + 3y = 2y \qquad \Longrightarrow \qquad x = y$$

Der Eigenraum besitzt demzufolge die Dimension 1, was der geometrischen Vielfachheit des Eigenwertes entspricht. Die Jordan-Normalform der Matrix besteht also aus einem Jordan-Block. Im zweidimensionalen Fall reicht es nun einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ zu wählen, welcher kein Eigenvektor ist.

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad u := (A - \lambda \mathrm{I})v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es ist dann $C := (u, v) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ und $C^{-1}AC$ die Jordan-Normalform von A.

$$J := C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J(2,2)$$

Für J lässt sich nun leicht durch vollständige Induktion für beliebige $k \in \mathbb{N}$ zeigen

$$J^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Es gilt nach aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln für $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = CJ^kC^{-1} = \begin{pmatrix} 2^k - k2^{k-1} & k2^{k-1} \\ -k2^{k-1} & 2^k + k2^{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad A^{50} = \begin{pmatrix} -48 \cdot 2^{49} & 50 \cdot 2^{49} \\ -50 \cdot 2^{49} & 52 \cdot 2^{49} \end{pmatrix}$$

(b): Sei nun

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \chi(\lambda) = (7 - \lambda)(-8 - \lambda) + 56 = \lambda(\lambda + 1)$$

Die Eigenwerte von A sind damit $\lambda_1 := -1$ und $\lambda_2 := 0$ mit der algebraischen Vielfachheit 1. Da A wieder eine 2×2-Matrix ist, besitzen beide Eigenräume die Dimension 1. Die Jordan-Normalform J von A besteht damit aus zwei Jordan-Blöcken der Dimension 1. J ist also eine Diagonalmatrix. Es seien nun $u, v \in \mathbb{R}^2$ zwei Eigenvektoren zu dem Eigenwert λ_1 beziehungsweise λ_2.

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v := \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Es sei wieder $C := (u, v)$. Dann ist

$$J := C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt damit für $k \in \mathbb{N}$

$$J^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad J^{64} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{64} = CJ^{64}C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert die Jordan-Zerlegung von A. Es gibt also eine Diagonalmatrix $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und eine nilpotente Matrix $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $N = \operatorname{diag}(J(r_1), \dots, J(r_m))$ für gewisse Parameter $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^m r_i = n$, sodass

$$A \sim D + N, \qquad DN = ND$$

Es folgt damit aus bekannten Rechenregeln

$$\det A = \det(D + N) = \det D, \qquad \operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(D + N) = \operatorname{tr} D$$

Für das Matrixexponential gilt dann unter Verwendung von $DN = ND$

$$\exp A \sim \exp(D + N) = \exp D \exp N$$

$$\implies \quad \det(\exp A) = \det(\exp D \exp N) = \det(\exp D) \det(\exp N)$$

N ist ein obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen. Demzufolge ist auch N^k für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen. Man wendet nun die Definition des Matrixexponetials an.

$$\exp N = \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^k}{k!}$$

Es muss also $\exp N$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen sein. Damit gilt unmittelbar

$$\det(\exp N) = 1$$

Sei nun $\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) \coloneqq D$.

$$\begin{aligned}
&\implies \quad D^k = \operatorname{diag}\left(d_1^k, \dots, d_n^k\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \\
&\implies \quad \exp D = \operatorname{diag}\left(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}\right) \\
&\implies \quad \det(\exp D) = \prod_{i=1}^n e^{d_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n d_i\right) = \exp(\operatorname{tr} D) = \exp(\operatorname{tr} A)
\end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$$

$\square$