Vorlesung

Algebra / Geometrie 1

(Lineare Algebra und analytische Geometrie)

Prof. Dr. M. Zähle

WS 2013/2014

1 Vorbemerkungen

In den ersten beiden Abschnitten werden einige grundlegende Bezeichnungen und Begriffe eingeführt, auf die überall in der Mathematik zurückgegriffen wird. Außerdem formulieren wir logische Schlussweisen, die bereits aus der Schule bekannt sind, als mathematische Prinzipien.
Wenn Ihnen diese Dinge jetzt zu abstrakt erscheinen, können Sie auch darüber hinweg lesen und im Laufe der Stoffentwicklung immer mal auf diese Seiten zurück schauen.
Am Ende der Vorbemerkungen geben wir dann eine Einführung in Aufgabenstellungen der **linearen Algebra**, die sich wie ein roter Faden durch viele andere Gebiete der reinen und vor allem auch der angewandten Mathematik zieht.

1.1 Grundbegriffe aus der naiven Logik und Mengenlehre

1.1.1 Logische Zeichen und Schlussweisen

In der modernen mathematischen Sprache haben sich folgende **logische Zeichen** durchgesetzt, die viele Darstellungen verkürzen und abstrahieren:

1) <u>Logische Verbindungszeichen</u>

$$\left.\begin{array}{ll} \wedge & \text{und} \\ \vee & \text{oder} \\ \neg & \text{nicht} \\ \Rightarrow & \text{daraus folgt} \end{array}\right\} \quad \text{sind aussagenlogische Verknüpfungen}$$

$$\left.\begin{array}{ll} = & \text{gleich} \\ (\neq & \text{ungleich}\,) \end{array}\right\} \quad \text{gehören zur “Prädikatenlogik”}$$

2) <u>Logische Quantoren</u>

$$\begin{array}{ll} \forall & \text{für alle (für jedes)} \\ \exists & \text{es existiert} \\ \exists! & \text{es existiert genau ein} \end{array}$$

3) <u>Variablenzeichen</u>

z.B. Buchstaben $A,\ B,\ C,\ \ldots,$
stehen in der naiven Logik für Aussagen, d. h. für Ihren Wahrheitsgehalt. Der konkrete Inhalt ist dabei unwichtig, es geht nur um “richtig” oder “falsch”.

4) Klammern

werden zur Kennzeichnung der Reihenfolge des logischen Schließens eingeführt.

Diese Zeichen benutzt man nun im Zusammenspiel, wie wir gleich an Beispielen sehen werden.

Zur Vereinfachung verwendet man noch folgende abgeleitete Symbole:

$A \Leftrightarrow B$ (A gilt genau dann, wenn B richtig ist)
steht für: $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
(aus A folgt B und aus B folgt A)

$A \not\Rightarrow B$ (aus A folgt nicht B)
steht für: $\neg(A \Rightarrow B)$.

Oft werden auch gewisse Zusatzzeichen benutzt:

a) Bei der Definition eines neuen Begriffes A durch vorher eingeführte Sachverhalte B schreibt man
$A :\Leftrightarrow B$ (z. B.: reelle Zahl heißt gerade $:\Leftrightarrow$ durch 2 teilbar).

b) $a := b$ beschreibt die Einführung eines neuen Symbols a mit Hilfe alter Symbole b (z. B.: $x^2 := x \cdot x$)

c) $\square$ kennzeichnet das Ende eines Beweises
• wird in unserer Vorlesung eine Aufgabe hervorheben.

Grundlegende Beweisprinzipien (logische Schlussweisen) in der Mathematik sind:

1) $A \vee \neg A$ das **Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten**

2) $\neg(A \wedge \neg A)$ die **Widerspruchsfreiheit**
(wir schreiben auch $\lightning$ (Widerspruch) für $A \wedge \neg A$)

3) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ die **Negation der Negation**

4) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
die **de Morganschen Regeln**

5) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ die **Transitivität**

6) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
$(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
die **Distributivgesetze** der Aussagenlogik

7) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
die **Regel der Kontraposition**

8) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
die **Elimination der Implikation**.

Bemerkung. Die hier aufgeführten Regeln sind überbestimmt, z. B. sind unter Voraussetzung von 4) die Prinzipien 1) und 2) äquivalent.

- Regel 7) folgt mit Hilfe von 3) aus 8).
- Eine andere Darstellung von 8) ist

9) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$.

Die letzte Beziehung wird verwendet beim
indirekten Beweisprinzip (Beweis durch Widerspruch):

Wir wollen $(A \Rightarrow B)$ zeigen und nehmen dazu an, dass A und $\neg B$ richtig sind. Wenn wir das auf irgendeine Weise zum Widerspruch führen können, so muss wegen der Widerspruchsfreiheit gelten $\neg(A \wedge \neg B)$ und damit wegen 9) auch $(A \Rightarrow B)$.
Dieses Beweisprinzip wird relativ häufig angewendet und kommt auch beim Induktionsprinzip zum Tragen:

10) **Vollständige Induktion**:

Für jedes natürliche n sei A_n eine Aussage. A_n ist für alle n richtig, falls

a) A_1 richtig ist und

b) für jedes n die Aussage A_{n+1} aus A_n folgt
(in Symbolen: $\forall n(A_n \Rightarrow A_{n+1})$ oder $\bigwedge\limits_n (A_n \Rightarrow A_{n+1})$).

Würden nämlich a) und b) gelten und A_n nicht für alle n richtig sein, so gäbe es ein **kleinstes** n_0, für das A_{n_0} falsch ist. D. h. A_{n_0-1} wäre richtig und wegen b) dann aber auch A_{n_0}, was offensichtlich einen Widerspruch ergibt. Das Prinzip der Widerspruchsfreiheit führt uns zu dem Schluss, dass unsere Annahme falsch war, also das Induktionsprinzip richtig ist.

1.1.2 Mengen und Abbildungen

Der Mengenbegriff wird heute überall in der Mathematik gebraucht. Nach Georg Cantor (1845–1918) ist ein **Menge** "eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** der Menge genannt werden – zu einem Ganzen". Bei dieser "naiven" Begriffsbildung werden wir es belassen. (Es gibt jedoch auch eine axiomatische Mengenlehre, bei der der Mengenbegriff mit Hilfe von Axiomen eingeführt wird. Den axiomatischen Zugang zu einer mathematischen Theorie werden wir im Rahmen der linearen Algebra kennen lernen.)

Beispiele für Mengen

1) **Zahlbereiche** (ausführlich wird darauf in der Vorlesung Analysis 1 eingegangen):
   $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen,
   $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen,
   $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen,
   $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen,
   $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

2) $\emptyset$ steht für die **leere Menge**.

3) $\{a, b, c\}$ ist die Menge der 3 Symbole $a,\ b,\ c$.

Für eine Menge aus **endlich** oder **abzählbar unendlich vielen Elementen** schreibt man dann z. B. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bzw. $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Insbesondere bezeichnet $\{x\}$ die **einelementige Menge** bestehend aus x.
Die Zugehörigkeit des Elements x zur Menge M in Symbolen lautet: $x \in M$ (x ist Element von M, x liegt in M). $x \notin M$ heißt "x liegt nicht in M".

Teilmengen N einer Menge M werden oft durch Eigenschaften ihrer Elemente beschrieben:

$$N := \{x \in M \ : \ x \text{ hat Eigenschaft } E\}\,,$$

z. B., $\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} : z > 0\}$, d. h. hier wird $\mathbb{N}$ als Menge der positiven ganzen Zahlen aufgefasst. Man verwendet aber auch die Schreibweise

$$\{x : \ x \text{ hat Eigenschaft } E\},$$

falls keine Obermenge gegeben ist. (Anstelle des Doppelpunktes wird oft auch ein senkrechter Strich benutzt.)

Mengenoperationen
lassen sich mit Hilfe logischer Zeichen und Schlussweisen einführen:

1) **Inklusion*** $\quad A \subset B :\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

2) **Durchschnitt** $\quad A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x : x \in A,\ x \in B\}$
   $(x \in A \cap B :\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B))$

3) **Vereinigung** $\quad A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
   $(x \in A \cup B :\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B))$

4) **Differenz** $\quad A \setminus B := \{x : x \in A,\ x \notin B\}$
   $(x \in A \setminus B :\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

*Für $\subset$ schreibt man oft auch $\subseteq$, und $\subset$ steht dann für die echte Inklusion, wo noch $A \neq B$ gilt.

5) **Komplement** bzgl. einer einheitlichen Obermenge X

$$A^c := \{x \in X : x \notin A\}$$

$(x \in A^c :\Leftrightarrow (x \in X) \wedge \neg(x \in A))$

Für diese Mengenoperationen gelten die
de Morganschen Regeln

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

und die **Distributivgesetze**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Sie folgen unmittelbar aus den entsprechenden Regeln der naiven Logik. •

Allgemein definiert man für eine Familie von Mengen A_α mit dem Index α aus einer beliebigen Indexmenge I den Durchschnitt bzw. die Vereinigung als

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha,\ \forall \alpha \in I\} = \{x : \bigwedge_{\alpha \in I} (x \in A_\alpha)\}$$
$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha := \{x : x \in A_\alpha \text{ für ein } \alpha \in I\} = \{x : \bigvee_{\alpha \in I} (x \in A_\alpha)\}.$$

Die Distributivgesetze sind dann analog zu den obigen.
Eine weitere Mengenoperation ist die Paarbildung:

6) **Kartesisches Produkt (Kreuzprodukt)**
$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$
sowie die n-fache Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} A_1 \times \ldots \times A_n &:= \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\} \\ &= \{(a_1, \ldots, a_n) : \bigwedge_{i=1}^{n} (a_i \in A_i)\}. \end{aligned}$$

Abbildungen

Der in der Schule verwendete Funktionsbegriff lässt sich auf beliebige Mengen X und Y verallgemeinern:

Definition. Eine **Abbildung** f von X in (nach) Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Man benutzt die Kurzschreibweisen $f : X \to Y$ (X heißt **Definitionsbereich** und Y **Wertevorrat** von f) und $x \mapsto f(x)$ ($f(x)$ heißt **Bild** des Elementes x).

Definition. Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ **Bild(menge)** von A unter f und Bild $f := f(X)$ **Bild** von f.

Definition. Für $B \subset Y$ heißt
$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ **(volles) Urbild** von B unter f.
$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$ ist dann das volle Urbild des Elementes $y \in Y$.

Beispiel. Wir setzen $X := X_1 \times X_2,\ Y := X_1,\ f := \pi_1$ für die **Projektion** π_1 auf die erste Komponente, d. h. $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1,\ \pi(x_1, x_2) = x_1$. Dann gilt für $B \subset X_1$ und $y \in Y_1$:

$$\pi_1^{-1}(B) = B \times X_2$$
$$\pi_1^{-1}(y) = \{y\} \times X_2\,.$$

Beziehungen zwischen Mengenoperationen und Abbildungen

Seien $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Teilmengen von Y. Dann gilt

1) $f(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$

2) $f(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$
(im Allgemeinen aber nicht die Gleichheit!)

3) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$

4) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$.

Beweis von 1). Aus der Definition der Mengenvereinigung folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big) &= \Big\{f(x) : x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\Big\} = \Big\{f(x) : \bigvee_{\alpha \in I} (x \in A_\alpha)\Big\} \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \{f(x) : x \in A_\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha). \end{aligned}$$

Woraus die Behauptung folgt. $\square$

Aufgabe. Beweisen Sie 2) – 4) und finden Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit in 2). •

Es folgen drei wichtige Typen von Abbildungen:

Definition. $f : X \to Y$ heißt
injektiv (eineindeutig) $:\Leftrightarrow$ $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$,
was gleichbedeutend ist mit
$(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
surjektiv (auf) $:\Leftrightarrow$ Bild $f = Y$
(d. h. $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ mit $f(x) = y$), bzw.
bijektiv (umkehrbar) $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv.

Man spricht von **Injektionen, Surjektionen** bzw. **Bijektionen**.

Bemerkung. f ist genau dann eine Bijektion, wenn für jedes y aus Y ein eindeutig bestimmtes Urbild x existiert, d. h. $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ in der Mengensprache. Man schreibt dann aber $x = f^{-1}(y)$, und die Zuordnung $f^{-1} : Y \to X$ mit $f^{-1}(y) = x$ wird **inverse Abbildung (Umkehrabbildung)** genannt.

Definition. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ wird die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ mit

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

Komposition der Abbildungen f und g genannt.

Die identische Abbildung (**Identität**) von X werden wir mit Id_X bezeichnen, d. h.

$$\mathrm{Id}_X : X \to X \, , \quad \mathrm{Id}_X(x) := x \, .$$

Für eine Bijektion $f : X \to Y$ gilt dann

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_X \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_Y \, . \end{aligned}$$

Aufgabe. Die Komposition ist assoziativ, d. h.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \, ,$$

wobei die Klammern die Reihenfolge der Ausführung (von rechts nach links) kennzeichnen. •

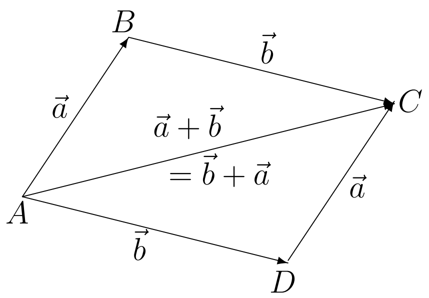
Bemerkung. Für den Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$ spricht man auch von (reellen) Funktionen. Im Rahmen der Analysis werden Sie viele Beispiele kennenlernen. Für die Lineare Algebra sind die linearen Funktionen und ihre natürliche Verallgemeinerung – die sogenannten linearen Abbildungen – von besonderer Bedeutung.

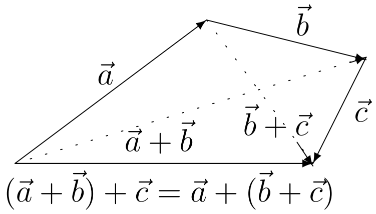
1.2 Einführung in die lineare Algebra

Zu Beginn wollen wir uns ein wichtiges Kapitel aus dem Schulstoff Mathematik ins Gedächtnis zurückrufen: die geometrische Vektorrechnung in der Ebene und im Raum. Vektoren werden dort als Pfeilklassen $\vec{a}$ eingeführt, deren Abtragung an einem Punkt A jeweils einen eindeutig bestimmten Punkt B ergibt. Der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ heißt dann Repräsentant des Vektors $\vec{a}$. Mit Hilfe der Repräsentanten lässt sich über Parallelogrammbildung eine **Vektoraddition** einführen, die **kommutativ** und **assoziativ** ist:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Wir veranschaulichen uns dies an Spezialfällen:





Aufgabe. Erläutern Sie diese Zeichnungen. •

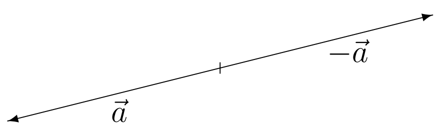
Bemerkung. Bei der eben gestellten Aufgabe sollte man sich noch einmal klarmachen, dass die Definition der Vektoraddition sowie die Rechenregeln unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind, d. h. es ist gleich, wo wir die Vektoren abtragen. Dies gilt auch für die nächsten Betrachtungen.

Für die Vektoraddition gibt es einen eindeutig bestimmten **Nullvektor** (neutrales Element) $\vec{0}$ mit

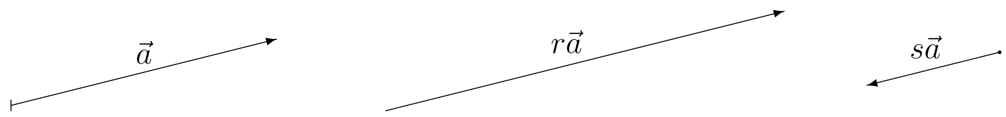
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \quad \forall \vec{a}.$$

Mit seiner Hilfe lässt sich dann zu jedem Vektor $\vec{a}$ ein eindeutig bestimmter **entgegengesetzter Vektor** (Gegenvektor) $-\vec{a}$ einführen:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0} \qquad \text{(s. Zeichnung).}$$



Wir sehen, dass die geometrische Vektoraddition ähnliche Eigenschaften hat, wie die Addition von Zahlen innerhalb der einzelnen Zahlbereiche. Außerdem ist noch eine Operation erlaubt, die bei reellen und komplexen Zahlen ebenfalls verwendet wird: die **Multiplikation** von Vektoren **mit reellen Zahlen**:



- In welchem Bereich liegen die reellen Zahlen r und s in der Zeichnung?

Hierbei gelten folgende Regeln:

$$1\vec{a} = \vec{a} \qquad \textbf{Neutralität der Eins}$$
$$(rs)\vec{a} = r(s\vec{a}) \qquad \textbf{Assoziativgesetz}.$$

Die Vektoraddition und die Multiplikation mit reellen Zahlen sind durch die **Distributivgesetze** miteinander verbunden.

$$(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$
$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}.$$

Ein ganz direkter Zusammenhang zwischen Vektoren und reellen Zahlen ergibt sich durch die Koordinatendarstellung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{in der Ebene}$$

$$\text{und} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{im Raum,} \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Damit lässt sich die geometrische Vektorrechnung in eine analytische übersetzen, d. h. in das Rechnen mit Zahlen. Man begibt sich so in das Gebiet der **analytischen Geometrie**, wo die Vektorrechnung erfolgreich Anwendung findet. Insbesondere gelingt als einfachster Spezialfall eine elegante Darstellung von **Geraden** und **Ebenen** im Raum mit Hilfe von Richtungsvektoren.
Die Geraden und Ebenen wiederum liefern eine geometrische Interpretation von **linearen Gleichungssystemen**, die in vielen mathematischen Gebieten von selbständigem Interesse sind. In engem Zusammenhang dazu stehen die **linearen Funktionen**, die in der Schule zumindest für eine Variable ausführlich behandelt werden.

Allen aufgezählten mathematischen Objekten liegt eine gemeinsame Idee zugrunde: das **Prinzip der Linearität**. Die allgemeine Mathematik dazu wurde zu Beginn des

20. Jahrhunderts entwickelt. Es zeigt sich, dass die linearen Abbildungen (Funktionen) bei allem eine tragende Rolle spielen. Da sich differenzierbare Funktionen lokal wie lineare verhalten, zieht sich das Prinzip der Linearität tief in die Differential– und Integralrechnung hinein. Es ist jedoch kein Allheilmittel, wie z. B. die Anforderungen der modernen Physik zeigen. Die **nichtlineare Analysis** und das allgemeinere **Prinzip der lokalen Skaleninvarianz** (fraktale Geometrie) gewinnen mehr und mehr an Bedeutung. Auf dem gegenwärtigen Entwicklungsstand stehen lineare Modelle in der Praxis aber noch im Vordergrund.

Für viele Belange reichen zwei– und dreidimensionale reelle Koordinatenvektoren, die in der Schule eingeführt werden, nicht aus. Wir betrachen einige Beispiele:

1) Wie Sie bereits wissen, ist die Vektorrechnung ein unentbehrliches mathematisches Hilfsmittel in der Physik.So werden beispielsweise die Bewegungsgesetze der klassischen Mechanik aus den sogenannten Lagrange–Gleichungen für die Hamilton–Funktion abgeleitet. In sie gehen sowohl die Ortsvektoren als auch die Impulsvektoren der physikalischen Körper ein. Man rechnet also gleichzeitig mit **6 Koordinaten**.

2) Bei der Beschreibung komplizierter technologischer Prozesse trifft man oft auf eine große Anzahl von Parametern. Hieraus ergibt sich eine praktische Notwendigkeit für das Rechnen mit **n Koordinaten**, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Innermathematische Gründe dafür gab es schon wesentlich früher.

3) Nicht immer sind reelle Koordinatenvektoren zweckmäßig. In der Informatik, beispielsweise, wird die Signalübertragung durch **binäre Folgen** der Gestalt $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ mit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ beschrieben. In der Koordinatenmenge $\{0, 1\}$ werden eine Addition und eine Multiplikation folgendermaßen eingeführt:

$$0 + 0 := 0\,, \quad 1 + 0 := 1\,, \quad 0 + 1 := 1\,, \quad 1 + 1 := 0;$$
$$0 \cdot 0 := 0\,, \quad 0 \cdot 1 := 0\,, \quad 1 \cdot 0 := 0\,, \quad 1 \cdot 1 := 1.$$

   Anstelle reeller oder binärer Koordinaten verwendet man oft auch **komplexe Zahlen**, für die ebenfalls eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind. Ein wesentliches Anwendungsgebiet hierfür ist wiederum die Physik, insbesondere die Elektrodynamik.

4) Zum Schluss sei noch einmal die Analysis erwähnt. Auf der Menge aller reellen Funktionen von einer reellen Variablen läßt sich eine ähnliche lineare Struktur einführen wir für geometrische Vektoren. Wir addieren zwei Funktionen f_1 und f_2 durch

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

   Diese Addition ist kommutativ und assoziativ. Die Rolle des Nullvektors (neutrales Element) spielt hier die Funktion $f(x) := 0, \ \forall x$, und die zu einer Funktion f

entgegengesetzte Funktion $-f$ ist durch $(-f)(x) := -f(x),\ \forall x$, gegeben. Die Multiplikation mit reellen Zahlen r erfolgt durch

$$(rf)(x) := rf(x),\ \forall x\,.$$

Offenbar ist dann $1f = f,\ (rs)f = r(sf),\ r, s \in \mathbb{R}$, und die Distributivgesetze übertragen sich ebenfalls von den reellen Zahlen auf die Funktionen. In diesem Sinne verhalten sich Funktionen wie geometrische Vektoren. Es wird Ihnen jedoch nicht gelingen erstere mit Hilfe von Koordinatenvektoren zu beschreiben.

- Was könnte dafür die Ursache sein ?

Unser Ziel ist nun die Erarbeitung eines allgemeinen mathematischen Zugangs zu Vektorräumen, der die erwähnten Beispiele und Problemstellungen umfasst. Wir führen dazu einen abstrakten Vektorbegriff zusammen mit einer Vektoraddition ein. Die Multiplikation mit reellen Zahlen wird zur Multiplikation mit Elementen eines algebraischen Körpers K verallgemeinert. Für K können wir uns z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$, aber auch die binäre Menge $\{0, 1\}$ denken.