Lineare Algebra und analytische Geometrie I

6. Vektorräume.

Tutorium

Tutorium zu Algebra/Geometrie

- Dienstags von 14 bis 16 Uhr
- Seminarraum 018, August-Bebel-Straße 4

Findet schon diese Woche, also am 10.11. statt!

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (denken Sie an $\mathbb{R}$).

Definition (Def. 6.1.)

Ein **Vektorraum** V über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein Paar bestehend aus einer abelschen Gruppe $V = (V, +)$ und einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\to V \\ (a, \bar{v}) &\mapsto a\bar{v} \end{aligned}$$

derart, dass $\forall a, b \in \mathbb{K}$ und $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ die folgenden Identitäten gelten:

- $a(\bar{v} + \bar{u}) = (a\bar{v}) + (a\bar{u})$,
- $(a + b)\bar{v} = (a\bar{v}) + (b\bar{v})$,
- $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$,
- $1_{\mathbb{K}}\bar{v} = \bar{v}$.

Einen Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ nennt man auch $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine ablesche Gruppe $V = (V, +)$

- V ist eine Menge mit Verknüpfung "$+$", d.h. die **Vektoren** kann man addieren;
- $(\bar{v} + \bar{u}) + \bar{w} = \bar{v} + (\bar{u} + \bar{w}), \quad \bar{v} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{v} \quad \forall \bar{v}, \bar{u}, \bar{w} \in V$;
- Es existiert das neutrale Element $e_{(V,+)} = \bar{0}_V = \bar{0}$, der **Nullvektor**;
- $\forall \bar{v} \in V \;\; \exists -\bar{v}$, s.d. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$.

Weiter kann man die Vektoren mit den **Skalaren** (Elementen des Körpers) multiplizieren, $(a, \bar{v}) \mapsto a\bar{v} \in V$. Wir werden 1 statt $1_{\mathbb{K}}$ und $a\bar{v} + b\bar{u}$ statt $(a\bar{v}) + (b\bar{u})$ (**"Punk vor Strich"**) benutzen. Damit können **Vektorraumaxiome** übersichtlicher geschrieben werden:

- $a(\bar{v} + \bar{u}) = a\bar{v} + a\bar{u}$,
- $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$,
- $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$,
- $1\bar{v} = \bar{v}$.

Das erste Beispiel

$V = \mathbb{K}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

- $(\mathbb{K}, +)$ ist eine abelsche Gruppe (die additive Gruppe des Körpers);
- Seien $a, v \in \mathbb{K}$, dann $av \in \mathbb{K}$;
- $a(v + u) = av + au$ (Distributivgesetz);
- $(a + b)v = v(a + b) = va + vb = av + ab$ (Distributivgesetz und die Kommutativität der Multiplikation);
- $a(bv) = (ab)v$ (die Assoziativität der Multiplikation);
- $1v = v$ $(1 = e_{(\mathbb{K},\cdot)})$.

Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$

Sei zuerst $n = 2$. Dann $V = \mathbb{K}^2 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Wir setzen:

- $(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$,
- $a(v_1, v_2) = (av_1, av_2)$.

Die Vektorraumaxiome gelten.

Sei $n > 2$. Dann $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{n-1} = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ Stücke}}$. Die Elemente von $\mathbb{K}^n$ sind die n-Tupel $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, wo $v_i \in \mathbb{K}\ \forall i$. Die Addition ist:

$$(v_1, \ldots, v_n) + (u_1, \ldots, u_n) = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n),$$

die Multiplikation mit den Skalaren: $a(v_1, \ldots, v_n) = (av_1, \ldots, av_n)$.

Die Vektoren $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$ kann man entweder als $1 \times n$- oder als $n \times 1$-Matrizen ansehen.

Die Vektoren $\bar{v} \in \mathbb{K}^n$ kann man entweder als $1 \times n$- oder als $n \times 1$-Matrizen ansehen.

Nehmen wir $n \times 1$, $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$, so spricht man von **Spaltenvektoren**; nehmen wir $1 \times n$, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dann von **Zeilenvektoren**.

Wir werden zeigen, dass die Menge aller $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$,

$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \mathrm{Abb}(\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{K}),$$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Lemma (Lemma 6.2.)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gelten

(i) $0_{\mathbb{K}}\bar{v} = \bar{0} = \bar{0}_V \ \forall \bar{v} \in V$;

(ii) $(-1)\bar{v} = -\bar{v} \ \forall \bar{v} \in V$.

Beweis.

(i) Sei $0 = 0_{\mathbb{K}}$. Dann $0 + 0 = 0$ und $0\bar{v} = (0+0)\bar{v} = 0\bar{v} + 0\bar{v}$. Daraus

$$\bar{0} = 0\bar{v} + (-0\bar{v}) = 0\bar{v} + 0\bar{v} + (-0\bar{v}) = 0\bar{v}.$$

(ii) Nun haben wir

$$\bar{0} = 0\bar{v} = (1 + (-1))\bar{v} = \bar{v} + (-1)\bar{v}.$$

Weil das Inverse eindeutig ist (Lemma 4.8.), gilt es $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$. $\square$

Definition (Def. 6.3.)

Eine Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **Untervektorraum** (oder **Teilraum** oder **Unterraum**) genau dann, wenn

- $\bar{0}_V \in U$ und
- $(\, \bar{u}, \bar{v} \in U \wedge a \in \mathbb{K} \,) \Rightarrow (\, \bar{u} + \bar{v} \in U \wedge a\bar{u} \in U \,)$.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Dann $U \neq \varnothing$, denn $\bar{0}_V \in U$.

Die Teilmenge U ist unter der Verknüpfung “$+$" abgeschlossen, $\bar{u} + \bar{v} \in U$, falls $\bar{u}, \bar{v} \in U$.

Die Verknüpfung “$+$" auf U ist kommutativ und assoziativ.

Wir haben fast gezeigt, dass $(U, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

Definition (Def. 6.3.)

Eine Teilmenge U eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **Untervektorraum**, falls

- ◇ $\bar{0}_V \in U$ und
- ◇ $(\bar{u}, \bar{v} \in U \wedge a \in \mathbb{K}) \Rightarrow (\bar{u} + \bar{v} \in U \wedge a\bar{u} \in U)$.

Lemma (Lemma 6.4.)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist U ein $\mathbb{K}$-Vektorraum bezüglich der Einschränkungen der Addition und der Multiplikation mit den Skalaren.

Beweis.

Es gilt: $(-1)\bar{u} \in U \ \ \forall \bar{u} \in U$ und $(-1)\bar{u} = -\bar{u} \ \ \forall \bar{u} \in V$. Damit ist $(U, +)$ eine (kommutative) Gruppe.
Unter der Multiplikation mit den Skalaren $(a, \bar{u}) \to a\bar{u}$ wird jedes Paar $(a, \bar{u})$ mit $\bar{u} \in U$ auf $a\bar{u} \in U$ abgebildet.
Die anderen Axiome gelten, weil die in V gelten. □

Nullvektorraum und andere Unterräume

Der kleinste $\mathbb{K}$-Vektorraum besteht aus einem Element, $\bar{0} = \bar{0}_V$. Das ist der **Nullvektorraum**, $\{\bar{0}\}$.
Merken, $\{\bar{0}\} \subseteq V$ ist ein Unterraum jedes Vektorraums V (Aufgabe 1(i): $a\bar{0} = \bar{0} \ \forall a \in \mathbb{K}$).

Beispiele (Unterräume $U \subseteq V$)

1. $V = \mathbb{R}$. $U = \{\bar{0}\}$ oder $U = V$.
2. $V = \mathbb{R}^2$.
   - $U_0 = \{\bar{0}\}$, $U_1 = V$ oder
   - $U = U_{\bar{v}} = \{r\bar{v} \mid r \in \mathbb{R}\}$, wo $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.
3. $V = \mathbb{R}^3$.
   - $U_0 = \{\bar{0}\}$, $U_1 = V$ oder
   - $U = U_{\bar{v}} = \{r\bar{v} \mid r \in \mathbb{R}\}$, wo $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ oder
   - $U = U_{\bar{v},\bar{u}} = \{a\bar{v} + b\bar{u} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, wo $\bar{v}, \bar{u} \in \mathbb{R}^3$ und $\bar{v}, \bar{u}$ nicht auf einer Geraden liegen.

Homogene lineare Gleichungssysteme

Ein LGS A mit m Gleichungen $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, heißt **homogen**, falls alle b_i Null sind.

Sei A ein homogenes System mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

- Das n-Tupel $(0, 0, \ldots, 0)$ ist eine Lösung von A.
- Für jedes $r \in \mathbb{K}$ ist $r\bar{u} = (ru_1, ru_2, \ldots, ru_n)$ eine Lösungen, falls $\bar{u}$ eine Lösung des Systems A ist.
- $\bar{u} + \bar{v}$ ist eine Lösung, falls $\bar{u}$, $\bar{v}$ Lösungen sind.

Lemma (Lemma 6.4.)

Die Menge aller Lösungen des homogenen Systems A ist ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{K}^n$.

Matrizen, Addition

Nun betrachten wir $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Diese Matrizen kann man addieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Abkürzen wir $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, dann $A + B = (c_{ij})$, wo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Oder noch kürzer: $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Die Addition its kommutativ und assoziativ.

Lemma (Lemma 6.5.)

Definieren wir $rA = (c_{ij})$ *mit* $c_{ij} = ra_{ij}$ *für jede Matrix* $A = (a_{ij})$ *und jede* $r \in \mathbb{K}$, *so bekommt die Menge* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *eine Struktur des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums.*

Beweis.

- Die Addition its kommutativ und assoziativ.
- Die Nullmatrix (c_{ij}) mit allen $c_{ij} = 0$ ist das neutrale Element, (0_{ij}).
- $A + C = (0_{ij})$, falls $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = -a_{ij}$, $(-A)_{ij} = -a_{ij}$.
- Die Multiplikation mit den Skalaren ist gegeben.
- $(r(A+B))_{ij} = r(a_{ij} + b_{ij}) = ra_{ij} + rb_{ij} = (rA + rB)_{ij}$.
- $((r+s)A)_{ij} = (r+s)a_{ij} = ra_{ij} + sa_{ij} = (rA + sA)_{ij}$.
- $r(sA) = (rs)A$.
- $1A = A$.

$\square$

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Ein Ausdruck der Gestalt $\bar{u} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{v}_k$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Hierbei sind nur endliche Summen erlaubt, damit $\bar{u} \in V$.

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\bar{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (-1, -2, 7)$, dann sind

$$\bar{u}_1 = (0, -1, 10) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3,$$

$$\bar{u}_2 = (1, -3, 10) = 2\bar{v}_1 + (-1)\bar{v}_2 + \bar{v}_3,$$

$$\bar{u}_3 = (4, 7, -7) = 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + (-2)\bar{v}_3$$

Linearkombinationen von $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$.

Der Nullvektor $\bar{0}$ ist eine Linearkombination beliebiger Vektoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$, $\bar{0} = 0\bar{v}_1 + \ldots + 0\bar{v}_k$.

Noch zwei Tatsachen aus der Mengenlehre

Sei M eine Menge. Teilmengen von M kann man **vergleichen**, obwohl nicht *vollständig*. Seien $N_1, N_2 \subseteq M$ Teilmengen. Man sagt, dass
N_1 kleiner als N_2 ist, falls $N_1 \subset N_2$; mögliche Bezeichnung $N_1 < N_2$.
Eigenschaften: $(N_1 < N_2 \wedge N_2 < N_3) \Rightarrow N_1 < N_3$;
falls $N_1 < N_2$, dann $N_2 \not< N_1$; $\quad N \not< N$.

Beispiel

Sei $M = \{1, 2, 3, 4, \}$. Dann $\{2, 3\} < \{2, 3, 4\}$, $\{3\} < \{1, 3, 4\}$, $\{2, 3\} < \{2, 3, 4\}$. Aber $N_1 = \{1, 2, 3\}$ und $N_2 = \{2, 3, 4\}$ sind nicht vergleichbar.

Seien M und N Mengen, dann ist der Schnitt $M \cap N$ eine Menge. Sei jetzt $(M_\alpha, \alpha \in \mathcal{F})$ eine *Familie* von Mengen. Dann ist $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} M_\alpha$ eine Menge. Hier

$$m \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} M_\alpha \;\Leftrightarrow m \in M_\alpha \;\forall \alpha \in \mathcal{F}.$$

Schnitt von Untervektorräumen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Der Schnitt $U = U_1 \cap U_2$ ist wieder ein Unterraum.

- $\bar{0} \in U_1, \bar{0} \in U_2 \;\Rightarrow\; \bar{0} \in U$;
- Falls $\bar{u}, \bar{v} \in U$, dann $\bar{u}, \bar{v} \in U_1 \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U_1$ und ebenfalls $\bar{u} + \bar{v} \in U_2$, also $\bar{u} + \bar{v} \in U$;
- Falls $\bar{u} \in U$, dann $\bar{u} \in U_1$, $\bar{u} \in U_2$ und $r\bar{u} \in U_1$, $r\bar{u} \in U_2$ für jedes $r \in \mathbb{K}$, also $r\bar{u} \in U$.

Für jede Familie (Menge, tatsächlich) $(U_\alpha, \alpha \in \mathcal{F})$ von Unterräumen $U_\alpha \subseteq V$ ist der Schnitt $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} U_\alpha$ ein Unterraum von V.

Von einer Teilmenge erzeugter Untervektorraum

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $T \subset V$ eine Teilmenge. Betrachten wie die Familie (Menge) $\mathcal{F}$ aller Unterräume, die T umfassen. Dann ist

$$\langle T \rangle = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} U_\alpha = \bigcap_{U \subseteq V \text{ Unterrraum},\ T \subseteq U} U$$

ein Unterrraum von V.

$\langle T \rangle$ ist der kleinste Untervektorraum, der T umfasst.

Der kleinste: ist es $T \subseteq W$, wo $W \subseteq V$ ein Unterrraum ist, dann $\langle T \rangle \subseteq W$.
In der Tat, falls $T \subseteq W$, dann gehört W zu der Familie $\mathcal{F}$, dieser Elemente wir schneiden, und $\langle T \rangle = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} U_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}} U_\alpha \right) \cap W \subseteq W$.

Man sagt, dass $\langle T \rangle$ **von der Teilmenge** T **erzeugt** ist.

- $\langle T \rangle$ ist von T **aufgespannt**.
- $\langle T \rangle$ ist der **Spann** von T.
- $\langle T \rangle$ ist die lineare Hülle von T.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $T \subseteq V$ eine nicht leere Teilmenge, $\langle T \rangle \subseteq V$ der Spann von T.

Lemma (Lemma 6.6.)

Es gilt $\langle T \rangle = \{a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_k\bar{v}_k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, \bar{v}_i \in T\}$.

Beweis.

Sei $\widehat{U} = \{a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_k\bar{v}_k \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, \bar{v}_i \in T\}$. Das ist eine Teilmenge von V. Wir haben: $\bar{0} = 0\bar{v}_1$ mit $\bar{v}_1 \in T$ gehört zu $\widehat{U}$. Weiter, $r(a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_k\bar{v}_k) = ra_1\bar{v}_1 + \ldots + ra_k\bar{v}_k \in \widehat{U}$, falls $r \in \mathbb{K}$, $\bar{v}_i \in T$. Wenn wir zwei lineare Kombinationen addieren: $(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\bar{v}_i) + (\sum\limits_{j=1}^{\ell} b_j\bar{u}_j)$, dann gehört die Summe zu $\widehat{U}$. Zusammengefasst: $\widehat{U}$ ist ein Untervektorraum. Weil $\exists 1 \in \mathbb{K}$, ist es $T \subseteq \widehat{U}$. Daraus $\langle T \rangle \subseteq \widehat{U}$.
Merken noch, dass $\widehat{U} \subseteq \langle T \rangle$, weil $\langle T \rangle$ ein Unterraum ist. $\square$

Bemerkung: $\langle \varnothing \rangle = \{\bar{0}\}$.

Sei $T \subseteq V$ eine endliche nicht leere Teilmenge, $T = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$. Dann $\langle T \rangle = \{a_1 \bar{v}_1 + \ldots + a_n \bar{v}_n \mid a_i \in \mathbb{K}\}$.

Bezeichnung: $\langle T \rangle = \langle \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \rangle$.

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. Dann $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = V$, $(u_1, u_2, u_3) = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + u_3 \bar{e}_3$.

Merken,

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \rangle = V$$

für beliebige Vektoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$.

Gehört der Vektor $(3, -1, 4)$ zu $\langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$?

Definition (Def. 6.7.)

Eine Teilmenge $L \subseteq V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **linear unabhängig** genau dann, wenn für paarweise verschiedene Vektoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in L$ und beliebige Skalare $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \ldots + a_k \bar{v}_k = \bar{0} \ \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0.$$

Eine Teilmenge $L \subseteq V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt **linear abhängig** genau dann, wenn sie nicht linear unabhängig ist, wenn also paarweise verschiedene Vektoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in L$ und Skalare $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ mit

$$a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \ldots + a_k \bar{v}_k = \bar{0}, \ \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \neq \{0\}$$

existieren.

Bemerkung: $\varnothing$ ist linear unabhängig.

Noch eine: Falls $\bar{0} \in L$, ist L linear abhängig.

Sei $L \subseteq V$ endlich und nicht leer, $L = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$.

L ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i \bar{v}_i \neq \bar{0}$ für alle Skalare $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$, die nicht alle Null sind.

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$, $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$. Falls $a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 = \bar{0}$, dann $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Die Menge $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ist linear unabhängig.

Noch Beispiele.

1. Sei $|L| = 1$, $L = \{\bar{v}\}$. Dann gilt: L ist linear unabhängig $\Leftrightarrow \bar{v} \neq \bar{0}$.
2. $L = \{\bar{v}, \bar{u}\}$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow (\bar{v} = a\bar{u} \vee \bar{u} = b\bar{v}$, wo $a, b \in \mathbb{K})$.
3. $L = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig $\Leftrightarrow$ die Vektoren $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ in einer Ebene liegen.

Sei $V = \mathbb{K}^m$ und sei $L = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\} \subseteq V$. Wie stellen wir fest, dass L linear abhängig oder linear unabhängig ist?

Wir probieren die Gleichung $c_1\bar{v}_1 + \ldots + c_k\bar{v}_k = \bar{0}$ zu lösen. Eigentlich haben wir hier m Gleichungen.

Sei es $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{v}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{v}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}$.

Also $c_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + c_i \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix} + \ldots + c_k \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} = \bar{0}$.

Anders geschrieben $\begin{cases} \alpha_{11}c_1 + \ldots + \alpha_{1i}c_i + \ldots + \alpha_{1k}c_k = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}c_1 + \ldots + \alpha_{mi}c_i + \ldots + \alpha_{mk}c_k = 0\,. \end{cases}$

Die Vektoren $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \bar{v}_k = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ sind linear unabhängig $\Leftrightarrow$ das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1i}x_i + \ldots + \alpha_{1k}x_k = 0 \\ \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mi}x_i + \ldots + \alpha_{mk}x_k = 0 \end{cases}$$

besitzt nur eine, die triviale Lösung $(0, 0, \ldots, 0)$.

Wir werden sagen, dass die paarweise verschiedene Vektoren $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ linear unabhängig (bzw. abhängig) sind, falls die Menge $L = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ linear unabhängig (bzw. abhängig) ist.

Sei $L = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ mit $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\bar{v}_3 = (1, 0, 1)$.
Ist L linear abhängig?

Angenommen: $c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 + c_3 \bar{v}_3 = \bar{0}$. Das Tupel (c_1, c_2, c_3) ist eine Lösung von

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Die einzige Lösung ist $(0, 0, 0)$, d.h. L ist linear unabhängig.