Prof. Dr. Oksana Yakimova
Dpil.-Math. Rico Besteher

13.4.2016

Algebra/Geometrie II, Übungsblatt 1

Bitte geben Sie die Lösungen in Ihrer Übungsgruppe entweder am 20.4. oder am 22.4. ab. Jede Aufgabe ist 4 Punkte wert.

Aufgabe 1. Unten sehen Sie einige Abbildungen $b\colon V \times V \to \mathbb{K}$. Für jede stellen Sie fest, ob die eine Bilinearform ist und falls ja, wählen Sie eine Basis von V und bestimmen die darstellende Matrix von b bez. dieser Basis.

(a) $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $b(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$.

(b) $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $b(A,B) = \mathrm{tr}(AB - BA)$.

(c) $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $b(A,B) = \det(AB)$.

(d) $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $b(A,B) = (AB)_{ij}$.

Aufgabe 2. (a) Eine Bilinearfrom b auf $\mathbb{R}^3$ ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

bez. der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ gegeben. Finden Sie die Matrix von b bez. der Basis $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, wo $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_1 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

(b) Eine Bilinearfrom b auf $\mathbb{R}^3$ ist durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bez. der Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ gegeben. Finden Sie die Matrix von b bez. der Basis $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, wo $e'_1 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $e'_3 = -e_1 + e_2 - 3e_3$.

Aufgabe 3. Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume eines Vektorraums $V \cong \mathbb{K}^n$ mit einer symmetrischen Bilinearform b. Zeigen Sie, dass

(a) $(W_1 + W_2)^{\perp}_{b} = (W_1)^{\perp}_{b} \cap (W_2)^{\perp}_{b}$, (b) $W \subset (W^{\perp}_{b})^{\perp}_{b}$,

(c) $W_1 \subseteq W_2 \Longrightarrow (W_1)^{\perp}_{b} \supseteq (W_2)^{\perp}_{b}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Sei $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $b(A,B) = \det(A+B) - \det(A) - \det(B)$. Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform ist, bestimmen Sie die Signatur von b und bestimmen die darstellende Matrix für die Einschränkung von b auf den Unterraum der Matrizen, deren Spur gleich Null ist.