Aufgabe 1 $C(\mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum (Bsp. 5 Kap 2.2 in Vorlesung)
& $+, \cdot$ punktweise definiert.

(i) zeige: $V_1 := \{ f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 1 \}$ ist kein Vektorraum.

Beweis. ~~z~~ zz: $(V_1 ; +)$ keine Gruppe.

Sei $f, g \in V_1$. $[f+g](0) \overset{+\text{punktweise}}{=} f(0) + g(0) \overset{f,g \in V_1}{=} 1 + 1 = 2 \neq 1$

Daher ist $+ : V_1 \times V_1 \to V_1$ nicht wohldefiniert und $(V_1 ; +)$ keine Gruppe.

(ii) zeige: $V_2 := \{ f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0 \}$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum.

a) zz: $(V_2 ; +)$ abelsche Gruppe:

0) zz: $+ : V_2 \times V_2 \to V_2$ wohldefiniert:

Seien $f, g \in V_2$. • $f+g \in C(\mathbb{R})$ da stetig.

• $[f+g](0) \overset{\text{punktw.}}{=} f(0) + g(0) \overset{\in V_2}{=} 0 + 0 = 0$

$\rightsquigarrow f+g \in V_2$

Beweise kopieren den von $C(\mathbb{R})$ oder wenden punktweise die entsprechende Eigenschaft von $\mathbb{R}$ an.

Alle gleich, daher zeige ich nur einen.

1) Assoziativgesetz zeigen:

Seien $f, g, h \in V_2$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, einschließlich $x = 0$ möglich.

$[[f+g]+h](x) \overset{\text{punktweise}}{=} [f+g](x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$

$\overset{\mathbb{R}\text{ assoziativ}}{=} f(x) + (g(x) + h(x))$ genauso rückwärts $[f+[g+h]](x)$

$\overset{x \text{ beliebig}}{\Longrightarrow} (f+g)+h = f+(g+h)$

2) Existenz der Null: zz: $\vec{0} \in V_2$, d.h. $\forall_{x \in V_2}$ $\vec{0}(x) := 0$

3) Existenz des Inversen: zz zu $f \in V_2$ ist $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Element von V_2.
$[-f](x) := -(f(x))$

b) zz $\mathbb{R}$ Körper: bekannt

c) zz: Skalarmultiplikation erfüllt V-Raum-Axiome:

$\cdot : \mathbb{R} \times V_2 \to V_2$
$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$ $\quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$ $[\lambda \cdot f](x) := \lambda \cdot f(x)$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V_2$ beliebig & $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

0) wohldefiniert: ~~Sei $\lambda \in \mathbb{R}, f \in V_2$.~~
- $\lambda \cdot f$ ist wieder stetig (wie $C(\mathbb{R})$)
- $\lambda \cdot f \in V_2$: $[\lambda \cdot f](0) \overset{\text{punktweise}}{=} \lambda \cdot f(0) \overset{f \in V_2}{=} \lambda \cdot 0 = 0$

$\rightsquigarrow \lambda \cdot f \in V_2$

wieder alles gleiches Prinzip.

1) zz: Es ist $\underset{\in \mathbb{R}}{1} \cdot f = f$: $[1 \cdot f](x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

2) zz: Es ist $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f$: $[\lambda \cdot [\mu f]](x) \overset{\text{punktw.}}{=} \lambda \cdot [\mu f](x) \overset{\text{punktw.}}{=} \lambda \cdot (\mu \cdot f(x)) \overset{\text{assoz.}}{=} (\lambda \mu) f(x) = [(\lambda \mu) f](x)$

3) zz $(\lambda \cdot f) + (\lambda \cdot g) = \lambda(f+g) \cdot f \wedge (\lambda \cdot f) + (\mu \cdot f) = (\lambda + \mu) \cdot f$

(iii) $V_3 := \{ f \in C(\mathbb{R}) : \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{a_0 \ldots a_n \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \}$ Polynome

zz: V_3 ist $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis a), 0): + wohldefiniert. Seien $f, g \in V_3$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{n_f} f_k \cdot x^k$, $g(x) = \sum_{k=1}^{n_g} g_k \cdot x^k$.

OBdA $f_k := 0$ für $k > n_f$, $g_k := 0$ wenn $k > n_g$.

$[f+g](x) \overset{\text{punktweise}+}{=} f(x) + g(x)$

$\overset{\text{OBdA}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n_f+n_g} f_k \cdot x^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n_g+n_g} g_k \cdot x^k \right) \overset{\mathbb{R}\text{-Gesetze}}{=} \sum_{k=1}^{n_f+n_g} \underbrace{(f_k + g_k)}_{\in \mathbb{R}} \cdot x^k$

$\Longrightarrow f+g$ hat wieder Polynomdarstellung (und ist stetig)

$\Rightarrow f+g \in V_3$.

1) Assoz.
2) Null
3) Inverses

Beweis wie in (ii)

b) $\mathbb{R}$ Körper

c) 0) Skalarmultiplikation wohldefiniert:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in V_3$, $x \in \mathbb{R}$. $[\lambda \cdot f](x) \overset{\text{punktweise}}{=} \lambda \cdot f(x) \overset{f \in V_3}{=} \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n_f} f_k \cdot x^k$

$\overset{\mathbb{R}\text{ distributiv, assoziativ}}{=} \sum_{k=1}^{n_f} \underbrace{(\lambda \cdot f_k)}_{\in \mathbb{R}} \cdot x^k$

$\Rightarrow \lambda \cdot f$ ist Polynom (& stetig) $\Rightarrow \lambda \cdot f \in V_3$

1), 2), 3): wie in Aufgabe (ii). □

Aufgabe 2 V, $W = V \times V$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +_W, \bullet$ möge wie in Aufgabe definiert sein.
$(V, +_V)$ möge abelsche Gruppe sein.

Seien $(v_1; v_2), (u_1, u_2), (w_1, w_2) \in W$ beliebig & $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ beliebig.

1) a) zz: $+_W : W \times W \to W$ wohldefiniert.

$(v_1, v_2) +_W (u_1, u_2) \overset{\text{def}+_W}{=} (\underbrace{v_1 +_V u_1}_{\in V \text{ da Gruppe}}, \underbrace{v_2 +_V u_2}_{\in V \text{ da Gruppe}}) \in W$

b1) assoz: z.z: $\underbrace{[(v_1, v_2) +_W (u_1, u_2)] +_W (w_1, w_2)}_{=: LHS} = \underbrace{(v_1, v_2) +_W [(u_1, u_2) +_W (w_1, w_2)]}_{=: RHS}$

B: $LHS \overset{\text{def}+_W}{=} (v_1 +_V u_1 ; v_2 +_V u_2) +_W (w_1 ; w_2) \overset{\text{def}+_W}{=} ((v_1 +_V u_1) +_V w_1 ; (v_2 +_V u_2) +_V w_2)$

$\overset{V \text{assoz}}{=} (v_1 +_V (u_1 +_V w_1) ; v_2 +_V (u_2 +_V w_2))$ rückwärts genauso RHS

b2): neutrales: zz: $\underbrace{(0_V ; 0_V) +_W (v_1 ; v_2)}_{=: LHS} = \underbrace{(v_1 ; v_2)}_{RHS}$ ⚠ $(0_V, 0_V) =: 0_W$, ist für alle (v_1, v_2) gleich, wegen Reihenfolge Quantoren im Axiom.

B. $LHS \overset{\text{def}+_W}{=} (0_V +_V v_1 , 0_V +_V v_2) \overset{0_V \text{ V-neutral}}{=} RHS$

b3) inverses: zz: $\underbrace{(-v_1, -v_2)}_{:= \text{Inverses zu } v_1 \text{ in } (V, +)}$ ist invers zu (v_1, v_2), d.h. $\underbrace{(-v_1, -v_2) +_W (v_1 ; v_2)}_{=: LHS} = \underbrace{(0_V, 0_V)}_{=: RHS}$

$LHS \overset{\text{def}+_W}{=} ((-v_1) +_V v_1 ; (-v_2) +_V v_2) \overset{\text{invers in } (V, +_V)}{=} RHS$

Weil u, v, w beliebig: Mit Bemerkung zu Satz 2.2.6 folgt aus a), b1), b2), b3), daß $(W, +_W)$ Gruppe ist.

c) zz: $\underbrace{(v_1, v_2) +_W (u_1, u_2)}_{=: LHS} = \underbrace{(u_1 ; u_2) +_W (v_1 ; v_2)}_{=: RHS}$

B: $LHS \overset{\text{Def}+_W}{=} (v_1 +_V u_1 ; v_2 +_V u_2) \overset{V \text{ komm}}{=} (u_1 +_V v_1 ; u_2 +_V v_2) \overset{\text{def}+_W}{=} RHS$

2) zz: $\underbrace{((\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta)) \bullet (v_1, v_2)}_{=: LHS} = \underbrace{(\alpha, \beta) \bullet [(\gamma, \delta) \bullet (v_1, v_2)]}_{=: RHS}$

$LHS \overset{\text{def} \cdot \text{in } \mathbb{C}}{=} (\alpha\delta - \beta\delta, \beta\gamma + \alpha\delta) \bullet (v_1, v_2) \overset{\text{def} \bullet}{=} ((\alpha\delta - \beta\delta) v_1 -_V (\beta\gamma + \alpha\delta) v_2 ; (\beta\gamma + \alpha\delta) v_1 +_V (\alpha\delta - \beta\delta) v_2)$

(weiter A 2.2) $\underset{\beta \mathbb{R} \text{ ist Körper}}{\overset{V \text{ ist } \mathbb{R}\text{-Vektorraum}}{=}} (\alpha(\gamma v_1 - \delta v_2) - \beta(\gamma v_2 + \delta v_1), \alpha(\delta v_1 + \gamma v_2) + \beta(\gamma v_1 - \delta v_2))$

$\overset{\text{def} \bullet}{=} (\alpha,\beta) \bullet (\gamma v_1 -_V \delta v_2, \gamma v_2 +_V \delta v_1) \overset{\text{def}}{=} (\alpha,\beta) \bullet [(\gamma,\delta) \bullet (v_1, v_2)] = RHS$

3) $(1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}) \bullet (v_1, v_2) \overset{\text{def} \bullet}{=} (\underbrace{1_{\mathbb{R}} \cdot v_1}_{\overset{V \text{ Vektr.}}{=} v_1} -_V \underbrace{0_{\mathbb{R}} \cdot v_2}_{\overset{V \text{ } \mathbb{R}\text{-Vektr.}}{=} 0_V}; \underbrace{0_{\mathbb{R}} \cdot v_2}_{= 0_V} +_V \underbrace{1_{\mathbb{R}} \cdot v_2}_{\overset{V \text{ ist } \mathbb{R}\text{-Vraum}}{=} v_2}) = (v_1 -_V 0_V, 0_V +_V v_2)$

$= (v_1, v_2) \Rightarrow$ Behauptung

4) zz: $LHS := (\alpha,\beta) \bullet [(v_1, v_2) +_W (u_1, u_2)] +_W (\gamma,\delta) \bullet (u_1, u_2) = (\alpha,\beta) \bullet (v_1, v_2) +_W [(\alpha,\beta) + (\gamma,\delta)] \bullet (u_1, u_2) =: RHS$

B $LHS \overset{\text{Def} +_W}{=} (\alpha,\beta) \bullet (v_1 +_V u_1; v_2 +_V u_2) +_W (\gamma,\delta) \bullet (u_1; u_2)$

$\overset{\text{Def} \bullet, +_V}{=} ([\alpha(v_1 +_V u_1) -_V \beta(v_2 +_V u_2)] + [\gamma u_1 -_V \delta u_2]; [\alpha(v_2 +_V u_2) +_V \beta(v_1 +_V u_1)] +_V [\gamma u_2 +_V \delta u_1])$

Distributiv, & Assoziativ $(V, +_V)$ & Kommutativ $(V, +_V)$ da V $\mathbb{R}$-Vektorraum

$= (\alpha v_1 +_V \alpha u_1 +_V (-\beta) v_2 +_V (-\beta) u_2 +_V \gamma u_1 +_V (-\delta) u_2;$
$\alpha v_2 +_V \alpha u_2 +_V \beta v_1 +_V \beta u_1 +_V \gamma u_2 +_V \delta u_1)$

$RHS \overset{\text{def} \bullet}{=} (\alpha v_1 -_V \beta v_2; \beta v_1 +_V \alpha v_1) +_W ((\alpha+\gamma) u_1 -_W (\beta+\delta) u_2; (\alpha+\gamma) u_2 +_V (\beta+\delta) u_1)$

def $+_W$; dann distrib in $\mathbb{R}$-Vraum V & assoziativ $(V, +_V)$ & Kommutativ $(V, +_V)$

$= (\alpha v_1 +_V (-\beta) v_2 +_V \alpha u_1 +_V \gamma u_1 +_V (-\beta) u_2 +_V (-\delta) u_2;$
$\beta v_1 +_V \alpha v_1 +_V \alpha u_2 +_V \gamma u_2 +_V \beta u_1 +_V \delta u_1)$

Jedem Summand in LHS entspricht genau ein gleicher Summand in RHS (gleichartig unterstrichen). Nach dem Kommutativ- und Assoziativgesetzen in $(V, +_V)$ sind beide linken bzw. rechten Tupelhälften von LHS und RHS gleich. Daher LHS = RHS.

Durch Einsetzen von $\gamma := \delta := 0_{\mathbb{R}}$ folgt das zweite Distributivgesetz (denn $(0,0) \bullet (w_1 w_2) = 0_W$ für jeden Vektor $(w_1, w_2) \in W$).

Durch Einsetzen von $u_1 := u_2 := 0_V$ folgt das erste Distributivgesetz genauso.

Aufgabe 3 $S_3 := \{\pi : \pi$ ist eine bijektive Funktion $\pi : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}\}$.

Es gibt nach Aufgabe III.3.(i) genau sechs Elemente von S_3.

$\pi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{pmatrix}$ $\quad \pi_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 2 \end{pmatrix}$

$\pi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{pmatrix}$ $\quad \pi_5 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (3\ 1) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 1 \end{pmatrix}$

$\pi_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{pmatrix}$ $\quad \pi_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2) \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 3 \end{pmatrix}$

eine der drei Darstellungen reicht.

und $\forall i = 1,2,\dots,6 \quad \pi_i : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$.

Jedes dieser π_i ist bijektiv (laut Wertetabelle) und daher $\pi_i \in S_3$. Daher ist

$S_3 = \{\pi_i : i = 1,2,\dots,6\}$.

Aufgabe 4 $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$ gesucht: $sign(\sigma)$, $sign(\sigma^2)$

i) Variante 1 $\quad sign(\sigma) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\mathcal{X}(\sigma)}$, $\mathcal{X}(\sigma) :\overset{\text{def}}{=} \#$ Vertauschungen.

$\mathcal{X}(\sigma) = |\{(2,6),(2,7),(3,6),(3,7),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7)\}| = 8$

$\rightsquigarrow sign(\sigma) = (-1)^8 = 1$

Variante 2: $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = ((2\ 4) \circ (6\ 2)) \circ ((3,5) \circ (7\ 3))$

$sign(\sigma) \overset{2.1.3.(iii)}{=} sign((2\ 4)) \cdot sign((6\ 2)) \cdot sign((3,5)) \cdot sign((7\ 3))$

$\overset{2.1.3.(ii)}{=} -1 \cdot -1 \cdot -1 \cdot -1$

$= 1$

ii) $sign(\sigma^2) = sign(\sigma \circ \sigma) \overset{2.1.3.(iii)}{=} sign(\sigma) \cdot sign(\sigma) \overset{(i)}{=} 1^2 = 1$

Zusatzaufgabe: (Aufgabe & Lösung von Johannes Hahn)

Mit den Bezeichnungen der Aufgabe:

Angenommen, e wäre so ein Iso.

e surjektiv $\Rightarrow \exists x \in K : e(x) = -1$. Wähle dies x so.

$e(0) = 1 = (-1)^2 = (e(x))^2 \overset{e \text{ Iso}}{=} e(x+x)$

$\overset{e \text{ Injektiv}}{\Rightarrow} 2x := x + x = 0 \quad \overset{2 := 1_K + 1_K}{\Rightarrow} 2_K = 0$ oder $x = 0$.

Fall $x = 0$: $\quad -1 = e(x) = e(0) = e(0+0) = e(0)^2 = (-1)^2 = 1$ ↯

Fall $2_K = 0$: ok

Also $2_K = 0$ ist bewiesen.

Sei $z \in K$ beliebig.

$e(z)^2 = e(z+z) = e((1_K + 1_K) z) = e(2_K z) \overset{2_K = 0}{=} e(0) \overset{(*)}{=} 1$

daher $e(z) \in \{0, 1\}$.

Da e surjektiv ist, hat K höchstens 2 Elemente.

$K := \{0,1\}$ ist zwar ein Körper, aber

$e : \underbrace{\{0,1\}}_{= K} \to \underbrace{\{1\}}_{= K \setminus \{0\}}$

ist aus Anzahlgründen nicht bijektiv möglich.