Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 01

Aufgabe 1

(a): Sei $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit $\det A = -1$. Es ist nun zu zeigen, dass -1 ein Eigenwert von A ist. Dafür betrachtet man die folgende Rechnung.

$$\begin{aligned}
& \det(A + \mathrm{I}) = \det\left[(A+\mathrm{I})^{\mathrm{T}}\right] \\
& \qquad = \det\left(A^{\mathrm{T}} + \mathrm{I}\right) \\
(A \text{ ist orthogonal}) \qquad & \qquad = \det\left(A^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} A\right) \\
& \qquad = \det A^{\mathrm{T}} \det(\mathrm{I} + A) \\
\left(\det A = \det A^{\mathrm{T}} = -1\right) \qquad & \qquad = -\det(A + \mathrm{I})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \det(A + \mathrm{I}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \in \lambda(A)$$

$\square$

(b): Sei nun $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $\det A = -1$. Um nun zu beweisen, dass A immer die Spiegelung an einer Achse darstellt, soll als Erstes eine Matrix eingeführt werden, welche eine solche Spiegelung beschreibt. Diese soll dann auf Orthogonalität und Determinante untersucht werden. Im Anschluss wird gezeigt, dass sich jede Matrix A mit den angegebenen Eigenschaften als eine solche Matrix schreiben lässt.

Einer der beiden normierten Richtungsvektoren der Achse sei mit $e \in \mathbb{R}^2, \|e\| = 1$ bezeichnet. Es sei dann

$$e := \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}, \qquad e^{\perp} := \begin{pmatrix} -e_y \\ e_x \end{pmatrix}$$

Folglich ergibt sich $\left\langle e, e^{\perp} \right\rangle = 0$ und damit bildet $\left\{e, e^{\perp}\right\}$ eine Orthonormalbasis. Sei nun $S \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ mit

$$S := \left(e, e^{\perp}\right) = \begin{pmatrix} e_x & e_y \\ -e_y & e_x \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \ \det S = e_x^2 + e_y^2 = \|e\|^2 = 1$$

Daraus folgt nun $S \in \mathrm{SO}_2$. S muss also gerade eine Drehung auf die Orthonormalbasis $\left\{e, e^{\perp}\right\}$ beschreiben. Für diese Orthonormalbasis ist die Spiegelachse gerade die Abszisse. Im Koordinatensystem ergibt sich also die Spiegelmatrix S_x zu

$$S_x := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Ausführen der Spiegelung transformiert man das System nun durch S^{T} zurück in das ursprüngliche. Für die Spiegelmatrix S_e der beliebigen Achse ergibt sich also

$$S_e = S^{\mathrm{T}} S_x S = \begin{pmatrix} e_x & -e_y \\ e_y & e_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x & e_y \\ -e_y & e_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x^2 - e_y^2 & 2e_x e_y \\ 2e_x e_y & -(e_x^2 - e_y^2) \end{pmatrix}$$

Dabei ist $S_e \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $\det S_e = 1$, da $S, S_x \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ mit $\det S = -\det S_x = 1$.

Die Spaltenvektoren $a, a^\perp$ von A müssen nun nach der Charakterisierung über orthogonale Matrizen eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bilden. Sei nun $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\| = 1$. Dann gibt es genau zwei Möglichkeiten $a_1^\perp, a_2^\perp \in \mathbb{R}$ einen orthogonalen Einheitsvektor zu a zu wählen.

$$a_1^\perp := \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}, \qquad a_2^\perp := \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$$

Dabei gilt

$$\det(a, a_1^\perp) = a_x^2 + a_y^2 = 1, \qquad \det(a, a_2^\perp) = -\left(a_x^2 + a_y^2\right) = -1$$

Nach der Voraussetzung $\det A = -1$ muss also $a^\perp = a_2^\perp$ sein und A damit die folgende Form haben.

$$A = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ a_y & -a_x \end{pmatrix}$$

Es ist nun zu zeigen, dass es ein $e \in \mathbb{R}^2, \|e\| = 1$ gibt, sodass $A = S_e$. Dafür ist das folgende Gleichungssystem zu lösen.

$$\begin{aligned} a_x &= e_x^2 - e_y^2 \\ a_y &= 2e_xe_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 + a_x &= (e_x^2 + e_y^2) + e_x^2 - e_y^2 = 2e_x^2 \\ 1 - a_x &= (e_x^2 + e_y^2) - e_x^2 + e_y^2 = 2e_y^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |e_x| = \sqrt{\frac{1 + a_x}{2}}, \qquad |e_y| = \sqrt{\frac{1 - a_x}{2}}$$

Die Vorzeichen bestimmen sich nun aus der zweiten Gleichung. Die Lösung besteht damit aus den zwei Vektoren e und $-e$ mit

$$e := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 + a_x}{2}} & \sqrt{\frac{1 - a_x}{2}} \end{pmatrix}$$

Dies ist logisch, da $S_e = S_{-e}$ sein muss.

$\square$

Aufgabe 2

Seien $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ und b_A die zugehörige Bilinearformen mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist A symmetrisch und positiv definit, da für alle $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0$ gilt

$$x^\mathrm{T} Ax = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0$$

Damit lässt sich nun das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren anwenden. Die gegebene (frei gewählte) Orthonormalbasis bestehe hier aus den kartesischen Einheitsvektoren e_1, e_2. Dann sei

$$v_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|_A} = \frac{e_1}{\sqrt{b_A(e_1,e_1)}} = \frac{e_1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \|v_1\|_A = 1$$

Weiterhin sei dann

$$v_2 := \frac{e_2 - b_A(e_2,v_1)v_1}{\|e_2 - b_A(e_2,v_1)v_1\|_A} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \right\|_A} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|v_2\|_A = 1$$

Es folgt nach den Verfahrensregeln

$$b_A(v_1, v_2) = 0$$

$\{v_1, v_2\}$ stellt damit eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^2$ bezüglich b_A dar.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Bilinearform. Dann definiert man $s, a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die folgenden wohldefinierten Ausdrücke.

$$s(x,y) := \frac{1}{2}\left[b(x,y) + b(y,x)\right], \qquad a(x,y) := \frac{1}{2}\left[b(x,y) - b(y,x)\right]$$

Sowohl s als a sind Linearkombinationen von b und damit wieder Bilinearformen. Es gilt nun für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} s(x,y) &= \frac{1}{2}\left[b(x,y) + b(y,x)\right] = \frac{1}{2}\left[b(y,x) + b(x,y)\right] = s(y,x) \\ a(x,y) &= \frac{1}{2}\left[b(x,y) - b(y,x)\right] = -\frac{1}{2}\left[b(y,x) - b(x,y)\right] = -a(y,x) \end{aligned}$$

Damit ist s also symmetrisch und a schiefsymmetrisch. Weiterhin folgt nun für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$s(x,y) + a(x,y) = \frac{1}{2}\left[b(x,y) + b(y,x)\right] + \frac{1}{2}\left[b(x,y) - b(y,x)\right] = b(x,y)$$

oder auch $b = s + a$.

$\square$

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es ist nun folgende Aussage zu zeigen.

$$A \text{ ist positiv definit} \quad \Rightarrow \quad \det A \neq 0$$

Nach Aussagenlogik ergibt sich eine äquivalente Aussage zu

$$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ ist nicht positiv definit}$$

Sei also nun $\det A = 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, sodass $Ax = 0$ gilt. Für dieses x gilt dann aber auch

$$x^{\mathrm{T}} Ax = 0 \not> 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ ist nicht positiv definit}$$

$\square$