Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Algebra/Geometrie 1 für
B.Sc. Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Physik

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Die Vorlesung beginnt mit den folgenden Themen:

- Grundbegriffe der Logik;
- Grundbegriffe der Mengenlehre;
- Relationen, Abbildungen und Funktionen;
- Algebraische Grundbegriffe.

Weiter werden wir zu Vektorräume, linearen Gleichungen, Matrizen, Determinanten, symmetrischen Gruppen, scalaren Produkten und orthogonalen Transformationen übergehen.

Ziel der Vorlesung: Einführung in das Gebiet der linearen Algebra mit Anwendungen in der Geometrie.

Hier bekommen Sie die Kenntnis, die um die weiteren Vorlesungen über Algebra und Geometrie zu folgen notwendig ist.

Aussage

Eine Aussage ist entweder wahr (w) oder falsch (f).

Beispiele

1. $2 \cdot 2 = 4$. (w)
2. Die Eins ist eine negative Zahl. (f)
3. Die Winkelsumme in einem (euklidischen) Dreieck beträgt 180°. (w)
4. Alle Katzen sind schwarz. (f)

Im Leben wissen wir nicht immer, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. In Mathematik gibt es einige Regeln, wie man die Wahrheit feststellen kann.

Logische Regeln

Für jede Aussage A ist $\neg A$ (nicht A) ihre **Negation** (**Verneinung**).
Zum Beispiel, ist A “Die Eins ist eine negative Zahl" (f), so ist $\neg A$ “Die Eins ist nicht eine negative Zahl" (w). (Tatsächlich ist 1 eine positive Zahl, $1 > 0$.)

Hier sehen wir schon die erste Regel:

A	w	f
$\neg A$	f	w

Man soll merken, $\neg(\neg A) = A$.

Konjunktion und Disjunktion

Für Aussagen A, B sind auch die **Konjunktion** $A \wedge B$ (A und B) und die **Disjunktion** $A \vee B$ (A oder B) Aussagen.

Beispiel

“Heute ist Montag" $\wedge$ “Morgen ist Dienstag" $=$ “Heute ist Montag und morgen ist Dienstag".
“Heute ist Montag" $\vee$ “Heute ist Dienstag" $=$ “Heute ist Montag oder heute ist Dienstag"(neu formulieren “Heute ist Montag oder Dienstag".)

Die Wahrheitstafel für $\wedge$ und $\vee$:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Die Wahrheitstafel für $\wedge$ und $\vee$:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f
$A \vee B$	w	w	w	f

In der mathematischen Fachsprache meint **oder** immer, dass auch beides erlaubt ist. Die Aussage "$2 + 2 = 4 \vee 2 \cdot 2 = 4$" ist wahr.
Die Aussage "$2 + 2 = 4 \vee 2 \cdot 2 = 5$" ist auch wahr.
Eine Geschichte zu logischer "oder".

Ein Logiker erzählt seinem Freund, er habe ein Kind bekommen. Der Freund fragt: "Ist es ein Junge oder ein Mädchen?" worauf der Logiker antwortet: "Ja!"

Implikation und Äquivalenz

Für Aussagen A, B ist die **Implikation** $A \Rightarrow B$ (A impliziert B; aus A folgt B; wenn A, dann B) eine Aussage. Die kann entweder wahr oder falsch sein.

Beispiel

$A =$ “Es regnet am Nachmittag nicht".
$B =$ “Ich gehe spazieren."
$(A \Rightarrow B) =$ “Wenn es am Nachmittag nicht regnet, dann gehe ich spazieren."

Aber es gibt Leute, die auch im Regen gern spazieren gehen. Vielleicht haben wir hier keine *Äquivalenz*.

Die Aussagen A, B sind **äquivalent**, falls die beiden Aussagen $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$ wahr sind. Mathematisch geschrieben,

$$(A \Leftrightarrow B) \;=\; (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Wahrheitstafel

Vorsicht!

Aus einer falschen Aussage folgt jede Aussage!
Alle falschen Aussagen sind äquivalent.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Beispiel (Sind die folgenden Aussagen wahr?)

$$(A): \ 3 = -3 \Rightarrow 3^2 = (-3)^2;$$
$$(B): \ 3 = -3 \Rightarrow 1 = 2;$$
$$(C): \ x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -1).$$

Ja!

Satz (Satz 1.1.)

Für Aussagen A und B gilt:

(i) $A \vee \neg A$ *ist stets wahr,* $A \wedge \neg A$ *ist stets falsch;*

(ii) $\neg(A \vee B)$ *ist äquivalent zu* $(\neg A) \wedge \neg B$*;*

(iii) $A \Rightarrow B$ *ist äquivalent zu* $(\neg A) \vee B$*.*

Beweis.

(i) A ist entweder wahr oder falsch. Falls A wahr ist, ist $A \vee \neg A$ auch wahr (wegen A). Falls A falsch ist, ist $\neg A$ wahr und dann ist $A \vee \neg A$ wegen $\neg A$ wahr. Die erste Aussage ist bewiesen.
Weiter, merken wir, dass $A \wedge \neg A$ falsch ist, falls A oder $\neg A$ falsch ist. Die beiden Aussagen A und $\neg A$ können nicht gleichzeitig wahr sein. So sind wir mit (i) fertig.

$\square$

(ii) $\neg(A \vee B)$ ist äquivalent zu $(\neg A) \wedge \neg B$;

Beweis.

(ii) Hier betrachten wir die Wahrheitstafeln:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f
$\neg(A \vee B)$	f	f	f	w
$\neg A$	f	f	w	w
$\neg B$	f	w	f	w
$(\neg A) \wedge \neg B$	f	f	f	w

und merken, dass die Zeilen von $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A) \wedge \neg B$ gleich sind. □

(iii) $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$.

Beweis.

(iii) Hier betrachten wir die folgenden Wahrheitstafeln:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\neg A$	f	f	w	w
$(\neg A) \vee B$	w	f	w	w

und merken, dass die Zeilen von $A \Rightarrow B$ und $(\neg A) \vee B$ gleich sind. $\square$

Beweise

Einen Beweis haben wir gerade durchgeführt. In der Vorlesungen und Übungen müssen Sie

- die Beweise verstehen,
- selbst beweisen können,
- Beweise sauber aufschreiben können.

Wie man einem Beweis schreibt, kann man nur durch Erfahrung lernen!

Es gibt drei Beweismethoden, *direkter* Beweis, *Widerspruchsbeweis* und *Induktionsbeweis*.

Direkter Beweis: Die Behauptung wird durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.
Hier benutzt man Folgendes:

> Sind die Aussagen A und $(A \Rightarrow B)$ richtig, dann ist die Aussage B richtig.

Direkter Beweis: Die Behauptung wird durch Anwendung von bereits bewiesenen Aussagen und durch logische Folgerungen bewiesen.

Beispiel

Wir zeigen, dass für jede natürliche Zahl a a^3-a durch 3 teilbar ist. Man schreibt $a = 3\cdot k+r$, wo r entweder 0 oder 1 oder 2 ist (Division mit Rest) und merkt, dass

$$a^3-a = a\cdot(a^2-1) = 3\cdot k\cdot(a^2-1)+r\cdot(9\cdot k^2+6\cdot k\cdot r+r^2-1) = \\ = 3\cdot(k\cdot(a^2-1)+3\cdot k^2\cdot r+2\cdot k\cdot r^2) + r^3-r, \text{ wo}$$

$r^3-r = 0$, falls $r = 0$;

$r^3-r = 1-1 = 0$, falls $r = 1$;

$r^3-r = 8-2 = 6$, falls $r = 2$.

Oder man merkt, dass $a^3 - a = a\cdot(a-1)\cdot(a+1)$. Eine von drei auf einander folgenden Zahlen $a-1,\ a,\ a+1$ ist durch 3 teilbar.

Widerspruchsbeweis (lat. *Reductio ad absurdum*): Wir möchten zeigen, dass A wahr ist, nehmen an, dass $\neg A$ wahr ist und konstruieren logische Schlussfolgerungen, die zu einem Widerspruch führen. Ein Widerspruch sieht so aus: *Beiden Aussagen B und $\neg B$ sind wahr*.

Beispiel

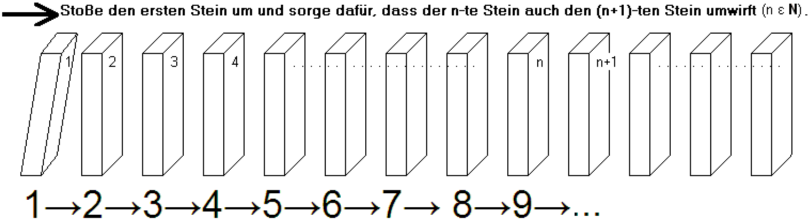
Eine natürliche Zahl p heißt prim, falls sie nur durch $\pm p$ und ± 1 teilbar ist. Wir zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Nehmen wir an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt und die sind $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Sei

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{m-1} \cdot p_m + 1.$$

Die Zahl P ist nicht prim, weil $P \neq p_i$ für jede i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Gleichzeitig ist P prim, weil keine p_i ihr Teiler ist. Widerspruch!

Mit Induktion beweist man Aussagen, die für (fast) alle natürliche Zahlen wahr sind. Man zeigt zuerst, dass die Aussage für $n = 1$ (oder einen anderen Anfangswert n_0) gilt [Induktionsanfang] und danach, dass sie auch für $n+1$ gilt [Induktionsschritt] , wenn sie für n oder alle natürliche $m < n+1$ gilt [Induktionsannahme].

Ein Bild aus Wikipedia (“Domino - 2" von Joachim Mohr - Eigenes Werk)



Die Induktion lässt sich mit einem Domino-Effekt vergleichen. Man stellt die Steine (= Aussagen) so auf, dass, wenn einer umfällt (= richtig ist), auch der nächste umfällt (= richtig ist), so erfolgt der Schritt $n \to n+1$.

Induktion, ein Beispiel

Für eine natürliche Zahl n definieren wir die Zahl $n!$, man sagt n-**Fakultät**, durch die Formel

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n{-}1) \cdot n.$$

Wir treffen zusätzlich die Vereinbarung $0! := 1$ und haben also

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ und so weiter.

Satz (Satz 1.2. Bedeutung der Fakultät)

Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.

Zum Beispiel, es gibt genau $3! = 6$ Möglichkeiten, die drei Buchstaben a, b und c in eine Reihenfolge zu bringen, nämlich: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Satz (Satz 1.2. Bedeutung der Fakultät)

Es gibt genau $n!$ Möglichkeiten, n voneinander verschiedene Objekte in eine Reihenfolge zu bringen.

Beweis.

Induktionsanfang: $n = 1$ oder $n = 2$ oder sogar $n = 3$.
Hat man $n+1$ voneinander verschiedene Objekte, so hat man $n+1$ Möglichkeiten, ein Erstes auszusuchen. Danach bleiben noch n Objekte, für die es $n!$ voneinander verschiedene Reihenfolgen gibt [Induktionsannhame].
Insgesamt haben wir $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. $\square$

Menge

2. Grundbegriffe der Mengenlehre

Georg Cantor (1845–1918)

Def. 2.1 (von Cantor). Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Bemerkung

Die Definition ist nicht ganz exakt. Man kann sich Zusammenfassungen vorstellen, die keine Mengen sind. Aber um das zu sehen, müssen wir die Axiome der Mengenlehre einführen, was wir jetzt nicht tun.

Mengen

Mengen bestehen aus Elementen. Wichtig ist, dass die Elemente paarweise verschieden sind.

Beispiele

1. Die Menge aller Wochentage $M = \{Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag, Samstag, Sontag\}$. Hier besteht die Menge M aus 7 Elementen.
2. Die Menge der Ziffern $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eine andere Weise das auszudrucken, $M = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant i \leqslant 9\}$, wo $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen ist.
3. Die Menge der europäischen Hauptstädte $M = \{\text{Berlin, Madrid, Paris, Rom, Oslo}, \ldots\}$. Hier hat die Menge M viele, aber nur endlich viele Elemente.
4. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \pm 12, \ldots\}$ hat unendlich viele Elemente.

Mengen, weiter

Bemerkung

Die Reihenfolge in der Beschreibung spielt keine Rolle, z.B., $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\}$.

Es gibt die sogenannte *leere* Menge $\emptyset = \{\ \}$, die gar kein Element enthält. Falls a ein Element der Menge M ist, schreibt man: $a \in M$, a gehört zu M, a liegt in M.

Definition (Def. 2.2.)

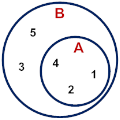
Anzahl der Elemente einer Menge M, symbolische Beschreibung $|M|$, heißt **Mächtigkeit** von M. Hat M unendlich viele Elemente, so schreibt man $|M| = \infty$ und sagt, dass die Menge M *unendlich* ist.

Merken, $|M| = 0$ genau dann, wenn $M = \emptyset$.

Definition (Def. 2.3.)

Seien M und N Mengen. Falls jedes Element von N in M liegt, heißt N **Teilmenge** der Menge M, Bezeichnung $N \subseteq M$.

Beispiele.



$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{4, 2, 1\}$; $A \subseteq B$.

- $\{$Dienstag, Freitag$\} \subset \{$Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag$\}$.
- Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ bilden eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.
- $\varnothing \subseteq M$ und $M \subseteq M$ für jede Menge M.

N ist eine **echte** Teilmenge von M, Bezeichnung $N \subset M$, falls $N \subseteq M$ und $N \neq M$. N ist genau dann gleich M, $N = M$, wenn $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$.

In manchen Bücher benutzt man $N \subset M$ statt $N \subseteq M$ und $N \subsetneq M$ statt $N \subset M$.

Neue Mengen aus den gegebenen

Definition (Def. 2.4.)

Seien M und N Mengen. Man definiert:

(i) $M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$, **die Vereinigung**. Ein Element x gehört zu $M \cup N$ genau dann, wenn x zu M oder zu N gehört;

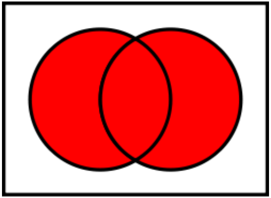
(ii) $M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$, **den Schnitt**;

(iii) $M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$, **die Differenz**. Ein Element x gehört zu $M \setminus N$ genau dann, wenn x kein Element von N ist und x zu M gehört;

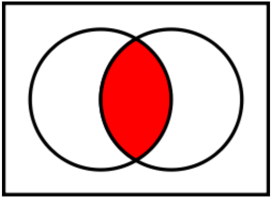
(iv) $M \times N = \{(m, n) \mid m \in M \wedge n \in N\}$, **das kartesische oder direkte Produkt**. Das ist die Menge aller **geordneten** Paare (m, n) mit $m \in M$, $n \in N$.

Merken, $M \times \varnothing = \varnothing$ für jede Menge M.

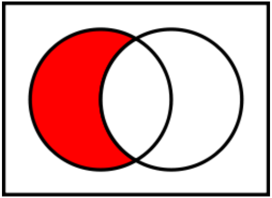
Venn-Diagramme



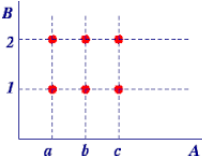
$M \cup N$



$M \cap N$



$M \setminus N$



Das direkte Produkt von $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{1, 2\}$.

Distributivgesetze

Lemma (Lemma 2.5.)

Seien P, M und N Mengen. Dann gelten:

(a) $P \cup (M \cap N) = (P \cup M) \cap (P \cup N)$;

(b) $P \cap (M \cup N) = (P \cap M) \cup (P \cap N)$.

Beweis.

(a) Die Aufgabe ist zu zeigen, dass $P \cup (M \cap N) \subseteq (P \cup M) \cap (P \cup N)$ und dass $(P \cup M) \cap (P \cup N) \subseteq P \cup (M \cap N)$. Merken,

$$x \in P \cup (M \cap N) \Leftrightarrow x \in P \vee x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in P \vee (x \in M \wedge x \in N).$$

Falls $x \in P \cup (M \cap N)$, dann $x \in P$ oder $x \in M$, $x \in N$. Daraus $x \in P \cup M$, $x \in P \cup N$ und $x \in (P \cup M) \cap (P \cup N)$.
Sei $x \in (P \cup M) \cap (P \cup N)$. Dann $x \in P \cup M$, $x \in P \cup N$. Falls $x \in P$, haben wir auch $x \in P \cup (M \cap N)$. Sonst $x \notin P$ und deswegen $x \in M$, $x \in N$. Damit $x \in M \cap N$ und $x \in P \cup (M \cap N)$. □

[(b)] $P \cap (M \cup N) = (P \cap M) \cup (P \cap N)$.

Beweis.

Hier

$$x \in P \cap (M \cup N) \Leftrightarrow x \in P \wedge (x \in M \vee x \in N) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in P \cap M \vee x \in P \cap N \Rightarrow x \in (P \cap M) \cup (P \cap N).$$

Und

$$x \in (P \cap M) \cup (P \cap N) \Rightarrow x \in P \cap M \vee x \in P \cap N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in P \wedge x \in M) \vee (x \in P \wedge x \in N) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in P \wedge (x \in M \vee x \in N) \Rightarrow x \in P \cap (M \cup N).$$

□

Lemma (Lemma 2.6.)

Seien N und M Teilmengen einer Menge P. Dann gelten:

(a) $P \setminus (M \cup N) = (P \setminus M) \cap (P \setminus N)$;

(b) $P \setminus (M \cap N) = (P \setminus M) \cup (P \setminus N)$.

Beweis.

Wir betrachten nur die Elemente $x \in P$. Das reicht, denn es immer sich um Teilmengen von P handelt.

(a) $x \in P \setminus (M \cup N) \Leftrightarrow x \notin M \wedge x \notin M \Leftrightarrow x \in P \setminus M \wedge x \in P \setminus N \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (P \setminus M) \cap (P \setminus N)$;

(b) $x \in P \setminus (M \cap N) \Leftrightarrow x \notin M \vee x \notin M \Leftrightarrow x \in P \setminus M \vee x \in P \setminus N \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (P \setminus M) \cup (P \setminus N)$.

$\square$

Die Potenzmenge

Definition (Def. 2.7.)

Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt die **Potenzmenge** von M und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

Beispiel ($\mathcal{P}(\{1,2\})$)

Sei $M = \{1,2\}$. Dann

$$\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, M\}.$$

Satz (Satz 2.8.)

Sei M eine endliche Menge. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Zuerst überlegen wir, was passiert, falls $|M|$ klein ist.
Falls $M = \varnothing$, haben wir $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing\}$ und $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$, stimmt.
Falls $|M| = 1$, haben wir $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, M\}$ und $|\mathcal{P}(M)| = 2 = 2^1$, stimmt.
Falls $|M| = 2$, dann $|\mathcal{P}(M)| = 4$ (wie im Beispiel) und $4 = 2^2$.
Den Satz beweisen wir mit Induktion über $|M|$ und der Induktionsanfang ist schon gegeben.

Wir benötigen noch einen Begriff.

Seien M und N Mengen. Die Vereinigung $M \cup N$ ist **disjunkt**, Schreibweise $M \sqcup N$, falls $M \cap N = \varnothing$.

Zum Beispiel, $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing$ und $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\}$.
Durch abzählen die Elemente bekommt man, dass $|M \sqcup N| = |M| + |N|$, falls M und N endlich sind.

$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$, der Induktionsschritt im Beweis

Sei es $|M| = n+1$ mit $n \geqslant 1$. Sei $x \in M$. Dann $M = \{x\} \sqcup M'$, wo $M' = M \setminus \{x\}$ und $|M'| = n$.
Induktionsannahme: $|\mathcal{P}(M')| = 2^n$.
Sei $N \subseteq M$. Entweder $x \notin N$ oder $x \in N$ (nicht beide gleichzeitig).

- 'in' Falls $x \in N$, gilt $N = \{x\} \sqcup N'$, wo $N' = N \cap M'$. Also $N' \in \mathcal{P}(M')$.
- $\notin$ Falls $x \notin N$, gilt $N \subseteq M'$ und $N \in \mathcal{P}(M')$.

Wir haben $\mathcal{P}(M) = A \sqcup \mathcal{P}(M')$, wo $A = \{N \mid N \subseteq M \wedge x \in N\}$ und $|A| = |\mathcal{P}(M')|$.
Es folgt, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(M')| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

Abkürzende logische Symbole

$\exists$ steht für "Es existiert **mindestens** ein ...".

$\forall$ steht für "Für alle ...".

$\exists!$ steht für "Es existiert **genau** ein ...".

Beispiele:
$\exists x \in \mathbb{Z}$, so dass $x^2 = 4$.
(Die Aussage ist wahr, man kann $x = 2$ oder $x = -2$ nehmen.)
$\forall x \in \mathbb{Z}$ gilt es, $x^2 \geqslant 0$. (w)

Definition (Def. 2.9.)

Gegeben seien eine Menge M und für jedes $x \in M$ eine Aussage A_x. Dann hat man neue Aussagen "$\forall x \in M\colon A_x$" und "$\exists x \in M\colon A_x$".

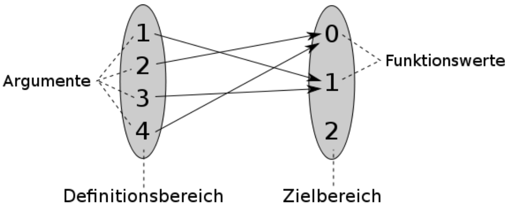
"$\forall x \in M\colon A_x$" ist wahr $\Leftrightarrow$ A_x ist wahr für **jedes** $x \in M$.
"$\exists x \in M\colon A_x$" ist wahr $\Leftrightarrow$ A_x ist wahr für **mindestens** ein $x \in M$.

Abbildungen

Definition (Def. 3.1.)

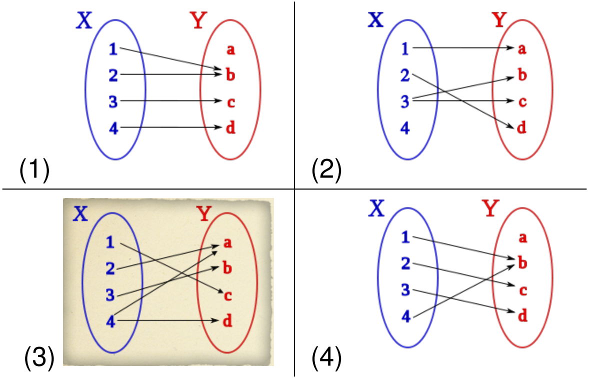
Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** (oder eine **Funktion**) $f\colon M \to N$ ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet, das **Bild** von x unter f, auch gennant der **Wert** von f an der Stelle x. Man spricht dann auch von **Auswerten** der Funktion f an der Stelle x oder von **Einsetzen** von x in f.

Ein Beispiel, $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{0,1,2\}$ mit $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 0$. Die Funktion f nimmt den Wert 2 nicht.



Fragen an Sie

Welche der folgenden Pfeildiagramme stellen Abbildungen von X nach Y dar?



Relationen

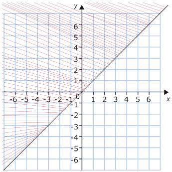
Definition (Def. 3.2.)

Eine **Relation** ist ein Tripel (M, N, R), das aus Mengen M, N und einer Teilmenge $R \subseteq M \times N$ besteht. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man xRy.

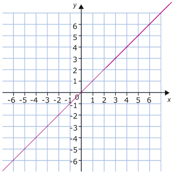
Beispiele

1. $M = N = \mathbb{R}$, $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$, **Kleiner-Relation**;
2. $M = N = \mathbb{R}$, $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\}$, **Gleichheitsrelation**;
3. $M = N = \mathbb{R}$, $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$, Kreis.

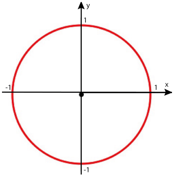
(R1)



(R2)



(R3)



Funktion, andere Definition

Eine N-wertige Funktion auf M (oder eine Abbildung von M nach N) ist eine Relation, d.h. eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$, solche dass,

zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$.

Die Menge aller Abbildung von M nach N bezeichnet man mit $\mathrm{Abb}(M, N)$.
Eine sehr wichtige Abbildung ist die *Identität*, id oder $\mathrm{id}_M : M \to M$, wo $\mathrm{id}(x) = x$ für jedes Element $x \in M$.

Beispiel ($\mathrm{Abb}(M, M)$ mit $M = \{1, 2\}$)

id	Transposition (12)	f_3	f_4
$1 \to 1$	$1 \to 2$	$1 \to 1$	$1 \to 2$
$2 \to 2$	$2 \to 1$	$2 \to 1$	$2 \to 2$

$$\mathrm{Abb}(M, M) = \{\mathrm{id}_M, (12), f_3, f_4\}.$$

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung (für jedes $x \in M$ haben wir genau ein $f(x) \in N$).

Definition (Def. 3.3.)

Die Abbildung f heißt

- **injektiv**, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- **surjektiv**, falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert;
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Wenn $f(x) = y$, dann sagt man, dass x ein **Urbild** von y unter f ist. Ebenfalls, falls $Y \subset N$ eine Teilmenge ist, dann heißt $f^{-1}(Y) := \{x \in M \mid f(x) \in Y\}$ Urbild von Y unter f.

$$
\begin{aligned}
f \text{ ist surjektiv} &\Leftrightarrow \text{jedes } y \in N \text{ hat mindestens ein Urbild;}\\
f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \text{jedes } y \in N \text{ hat höchstens ein Urbild;}\\
f \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \text{jedes } y \in N \text{ hat genau ein Urbild.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \text{ ist surjektiv} &\Leftrightarrow \text{ jedes } y \in N \text{ hat mindestens ein Urbild;}\\
f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \text{ jedes } y \in N \text{ hat höchstens ein Urbild;}\\
f \text{ ist bijektiv} &\Leftrightarrow \text{ jedes } y \in N \text{ hat genau ein Urbild.}
\end{aligned}
$$

Beispiele.

(12): $\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[ur] & 2 \end{tikzcd}$ ist bijektiv. f_4: $\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & 1 \\ 2 \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$ ist weder injektiv noch surjektiv.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 1$ ist injektiv, nicht surjektiv. (Welche Zahl hat kein Urbild?)

Identität ist immer bijektiv.

Übung

Sei M eine endliche Menge und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

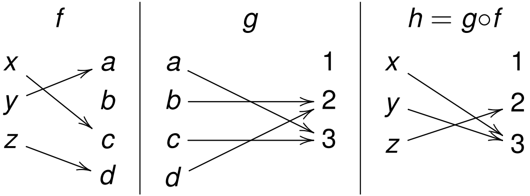
$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv.}$$

Komposition

Definition (Def. 3.4.)

Seien M, N, P Mengen und $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $h = g \circ f\colon M \to P$ mit $h(x) = g(f(x))$ für jedes $x \in M$, **Komposition** von f und g.

Ein Beispiel, $M = \{x, y, z\}$, $N = \{a, b, c, d\}$, $P = \{1, 2, 3\}$.



Merken, die “rechte" Abbildung in $g \circ f$ anwenden wir zuerst.

Eigenschaften der Komposition

Man merkt, es gilt: $f \circ \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_N \circ f = f$ für beliebige Mengen M, N und jede Abbildung $f\colon M \to N$.

Satz (Satz 3.5.)

Die Komposition von Abbildungen ist **assoziativ**, *es gilt:* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *für Abbildungen* $f\colon M \to N$, $g\colon N \to P$, $h\colon P \to Q$.

Das Bild:

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[rr, "h\circ g"] \arrow[dr, "g"] & & Q \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & P \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Beweis.

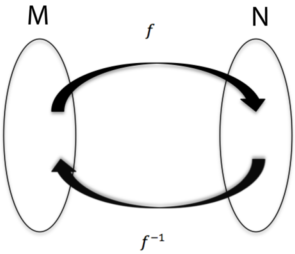
Sei $x \in M$. Dann $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$. Und $h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$ ist das gleiche Element von Q. $\square$

Wir dürfen schreiben $h \circ g \circ f$, der Ausdruck ist eindeutig.

Die inverse Abbildung

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Eine Abbildung $g\colon N \to M$ heißt

- **Rechtsinverse** zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_N$;
- **Linksinverse** zu f, falls $g \circ f = \mathrm{id}_M$;
- **inverse** Abbildung zu f, falls $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$, die Bezeichnung ist f^{-1}.



Lemma (Lemma 3.6.)

Die inverse Abbildung ist eindeutig.

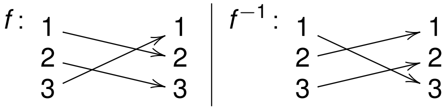
Beweis.

Seien g und g' inverse Abbildungen zu $f\colon M \to N$ und sei $y \in M$. Dann

$$g'(y) = g' \circ \underbrace{(f \circ g)}_{\mathrm{id}_N}(y) = \underbrace{(g' \circ f)}_{\mathrm{id}_M} \circ g(y) = g(y).$$

$\square$

Beispiele.
Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(m) = m + 1$. Dann $f^{-1}(m) = m - 1$.
Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann $f^{-1} = f$.



Motivation

Auf der Schule versteht man unter einer “reellen Zahl" meist einen unendlichen Dezimalbruch, wobei man noch aufpassen muss, dass verschiedene unendliche Dezimalbrüche durchaus dieselbe reelle Zahl darstellen können, zum Beispiel gilt in den reellen Zahlen ja

$$0,99999\ldots = 1,00000\ldots$$

Diese reellen Zahlen kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren und die Fragen wie

Warum gilt es: $(a+b)-c = a+(b-c)$ für $a=b=c=0,99999\ldots$?

werden verschweigen.

Wir werden uns nicht mit der dezimalen Darstellung beschäftigen, sondern die reellen Zahlen als einen **Körper**, ein algebraisches Objekt, behandeln. Zunächst führen wir einige grundlegende algebraische Konzepte ein, die Ihnen im weiteren Studium der Mathematik noch oft begegnen werden.