6. Der Dualraum

$\mathbb{K}$ Körper, V Vektorraum über $\mathbb{K}$

Def. 6.1 Die Menge $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) = \{\ell : V \to \mathbb{K} \mid \ell \text{ linear}\}$ nennt man den Dualraum von V. Seine Elemente heißen Linearformen oder lineare Funktionen auf V. ($\dim V = \infty$ ist hier erlaubt.)

Bem. (1) V^* ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Nullvektor ist die Nullabbildung: $v \mapsto 0$ $\forall v \in V$.

$(\alpha \ell)(v) = \alpha(\ell(v)) = \alpha \ell(v)$, also $\alpha \ell \in V^*$ $\forall \ell \in V^*, \alpha \in \mathbb{K}$.

Wenn $\ell_1, \ell_2 \in V^*$, dann $(\ell_1 + \ell_2)(v) = \ell_1(v) + \ell_2(v)$.

(2) Falls $\dim V = n < \infty$, gilt es $\dim V^* = n$.

Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

Wir betrachten die Linearformen $v_1^*, \dots, v_n^* \in V^*$, wo $v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Merken $\ell(\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \ell(v_i)$, $\forall \ell \in V^*$.

Insb. $v_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j\right) = \gamma_i$.

Auch $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(v_i) v_i^*$. Es folgt $V^* = \langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle$.

Linear unabhängig: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^* = 0 \Rightarrow$

$= \left(\sum \alpha_i v_i^*\right)(v_j) = 0$ $\forall j \Rightarrow \alpha_j = 0$ $\forall j$.

Die Basis $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ nennt man die zu $\{v_1, \dots, v_n\}$ <u>duale Basis</u>.

<u>Beispiel.</u> $\mathbb{K}^n$ mit $\{e_1, \dots, e_n\}$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} i$.

Sei $\varepsilon_i = e_i^* \in (\mathbb{K}^n)^*$. Dann

$\varepsilon_i \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \gamma_i$. $(\mathbb{K}^n)^* \cong \mathbb{K}^n$. Für $u \in \mathbb{K}^n$ kann man $\ell_u(v) := u^t \cdot v$ definieren, $\ell_u \in (\mathbb{K}^n)^*$.

<u>Def. 6.2.</u> Man nennt $V^{**} = (V^*)^*$ den Bidualraum von V.

Sei $v \in V$, $\ell \in V^*$. Setzen $L_v(\ell) := \ell(v)$. Das ist eine lineare Funktion:

$L_v(\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2) = (\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2)(v) = \alpha_1 \ell_1(v) + \alpha_2 \ell_2(v)$

und $\alpha_1 L_v(\ell_1) + \alpha_2 L_v(\ell_2) = \alpha_1 \ell_1(v) + \alpha_2 \ell_2(v)$.

<u>Lemma 6.3.</u> Die Abbildung $\begin{array}{l} V \longrightarrow V^{**} \\ v \longmapsto L_v \end{array}$ ist injektiv und linear. Man nennt sie die kanonische Einbettung.

<u>Bew.</u> Linear: $L_{(\alpha v_1 + \alpha_2 v_2)}(\ell) = \ell(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$

$= \alpha_1 \ell(v_1) + \alpha_2 \ell(v_2) = \alpha_1 L_{v_1}(\ell) + \alpha_2 L_{v_2}(\ell) =$

$= (\alpha_1 L_{v_1} + \alpha_2 L_{v_2})(\ell)$. Gezeigt.

<u>Injektiv:</u> z. z. $L_v = 0 \Rightarrow v = 0$.

Wenn $\dim V = n$ und $v \in V$, $v \neq 0$, finden wir eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, wo $v_1 = v$. Hier $v_1^*(v) \neq 0 \Rightarrow L_v(v_1^*) \neq 0 \Rightarrow L_v \neq 0$.

Wenn $\dim V = \infty$, geht der Beweis ähnlich, nur muss man das Lemma von Zorn (also Mengenlehre) benutzen. $\boxtimes$

Bem. Falls $\dim V = n < \infty$, sind V und V^{**} kanonisch isomorph, $v \mapsto L_v$, $L_v(\ell) = \ell(v)$.

Satz 6.4. Sei $\dim V = n < \infty$, $\mathcal{U} \subseteq V$ ein Unterraum

$\operatorname{Ann}(\mathcal{U}) = \{\ell \in V^* \mid \ell(u) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}\}$, der Annullator von $\mathcal{U}$. Dann ist $\operatorname{Ann}(\mathcal{U})$ ein Unterraum von V^* mit $\dim \mathcal{U} + \dim \operatorname{Ann}(\mathcal{U}) = n$.

Bew. Wir wählen eine Basis $\{u_1, \dots, u_m\}$ von $\mathcal{U}$ und ergänzen diese zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V ($m = \dim \mathcal{U}$; $v_i = u_i$, $1 \le i \le m$).

Jedes Element $\ell \in V^*$ ist eine Linearkombination $\ell = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i^*$ und $\ell \in \operatorname{Ann}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \gamma_i = 0$ für $1 \le i \le m$.

So gilt: $\operatorname{Ann}(\mathcal{U}) = \langle v_{m+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$ und $\{v_{m+1}^*, \dots, v_n^*\}$ ist eine Basis von $\operatorname{Ann}(\mathcal{U})$. $\boxtimes$

Def. 6.5. Seien V, W Vektorräume und sei $f: V \to W$ linear. Die duale (oder transponierte) Abbildung ist $f^*: W^* \to V^*$ mit

$(f^*(s))(v) = s(f(v)) \quad \forall v \in V, s \in W^*.$

Beachten Sie, dass die duale Abbildung „in die umgekehrte Richtung" geht.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{s} \mathbb{K}, \quad f^*(s) = s \circ f.$$

<u>Bem.</u> f^* ist linear.

$$(f^*(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2))(v) = (\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2)(f(v)) =$$
$$= \alpha_1 s_1(f(v)) + \alpha_2 s_2(f(v)) = (\alpha_1 f^*(s_1))(v) +$$
$$+ (\alpha_2 f^*(s_2))(v) = (\alpha_1 f^*(s_1) + \alpha_2 f^*(s_2))(v).$$

<u>Weitere Eigenschaften:</u>

(i) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$, klar.

(ii) Seien $f: V \to W$, $h: W \to U$ linear. Dann

$$(h \circ f)^* = f^* \circ h^*. \quad \text{(Achtung!)}$$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} U \xrightarrow{\mu} \mathbb{K}, \quad \mu \in U^*$$

$$h^*(\mu) = \mu \circ h, \quad f^*(\mu \circ h) = \mu \circ h \circ f = (h \circ f)^*(\mu).$$

<u>Satz 6.6.</u> Gegeben seien endlichdimensionale Vektorräume V, W und eine lineare Abbildung $f: V \to W$. Für die duale Abbildung $f^*: W^* \to V^*$ gilt dann:

(i) $\operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f)$;

(ii) $\operatorname{Im} f^* = \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f)$.

Bew. (i) $s \in \operatorname{Ker} f^* \Leftrightarrow s \circ f = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow s(w) = 0 \ \forall w \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow s \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f)$.

(ii) Sei $\ell \in \operatorname{Im} f^*$, also $\ell = s \circ f$ für ein $s \in W^*$.
Dann $s \circ f(v) = 0$, falls $f(v) = 0$. D.h.
$\operatorname{Im} f^* \subseteq \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f)$. Weiter
$\dim(\operatorname{Im} f^*) = \dim W^* - \dim(\operatorname{Ker} f^*) \overset{(i)}{=} \dim W -$
$- \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f) \underset{S.6.4.}{=} \dim W - (\dim W - \dim(\operatorname{Im} f)) =$
$= \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} f) \underset{S.6.4.}{=} \dim \operatorname{Ann}(\operatorname{Ker} f)$. $\boxtimes$

Eine darstellende Matrix der dualen Abbildung

$f: V \to W$ linear, $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V, $\mathcal{T}$ eine Basis von W, $|\mathcal{B}| = n < \infty$, $|\mathcal{T}| = m < \infty$.
Seien $\mathcal{B}^*, \mathcal{T}^*$ die dualen Basen von V^* und W^*.

Satz 6.7. $\quad {}_{\mathcal{B}^*}[f^*]_{\mathcal{T}^*} = \left({}_{\mathcal{T}}[f]_{\mathcal{B}}\right)^t$.

Bew. Sei $s \in W^*$, ${}_{\mathcal{T}^*}[s]$ der Spaltenvektor von s. Wie schon bemerkt,
$$s(w) = \left({}_{\mathcal{T}^*}[s]\right)^t \cdot {}_{\mathcal{T}}[w] \quad \forall w \in W. \text{ Daher}$$
$$f^*(s)(v) = s(f(v)) = \left({}_{\mathcal{T}^*}[s]\right)^t \cdot {}_{\mathcal{T}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v] =$$
$$= \left(\left({}_{\mathcal{T}}[f]_{\mathcal{B}}\right)^t \cdot {}_{\mathcal{T}^*}[s]\right)^t \cdot {}_{\mathcal{B}}[v] \quad \forall v \in V. \quad \boxtimes$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)=\{f:V\to W \text{ linear}\}\cong \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*,V^*)\cong \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K}) \qquad A\mapsto A^t$$

Kor. Sind V und W endlichdimensional, so gilt $(f^*)^*=f \quad \forall\ f:V\to W$ linear.

Bem. $\{\varphi: V\to V^* \text{ linear}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Die Bilinearformen auf } V\}$

$$\varphi\mapsto b \quad , \quad b(v,w)=\varphi(v)(w).$$

$$b\mapsto\varphi, \quad \varphi(v)(u)=b(v,u).$$

φ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi=\{0\} \Leftrightarrow (b_\varphi(v,u)=0\ \forall u\in V \Rightarrow v=0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b_\varphi$ ist nicht **entartet.**

Beispiel. $V=\mathbb{R}^2$, $\varphi(e_1)=\varepsilon_2$, $\varphi(e_2)=\varepsilon_1$.

$$b(e_i,e_j)=\varepsilon_{\underset{i'\neq i}{i'}}(e_j)=\begin{cases}1, & i\neq j;\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

Die Matrix von b ist $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, genau wie von φ, aber nur weil die symmetrisch ist.

$\mathcal{B},\mathcal{B}^*$. $\quad b(e_i,e_j)=\varphi(e_i)(e_j)=$
$=\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}\,\varepsilon_k\right)(e_j)=a_{ji}$. $\quad [b]=A^t$.
Wenn $b(v,w)=\varphi(w)(v)$, **dann** $[b]=A$.

7. Der Quotientraum

$\mathbb{K}$ - Körper, V - Vektorraum, $U \leq$ Unterraum

$(\cdot)$ $v \sim v' \iff v - v' \in U$

Das ist eine Äquivalenzrelation:

$v \sim v$, $v \sim v' \Rightarrow v' \sim v$, $v \sim v', v' \sim v'' \Rightarrow v \sim v''$.

Die Äquivalenzklasse von v ist

$$Cl(v) = \{v + u \mid u \in U\} =: v + U \subseteq V.$$

Diese Teilmenge nennt man auch die Restklasse von v bez. U. (Das ist wie modulo U zu rechnen.) Die Menge aller Restklasse bezeichnet man durch

$$V/U = \{v + U \mid v \in V\}.$$

Beispiele: (1) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \langle e_1, e_2 \rangle$.

$$V/U = \{a e_3 + U \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(2) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \langle e_1, e_3 \rangle$.

$$V/U = \{a e_2 + b e_4 + U \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Auf V/U definieren wir „+" und die Multiplikation mit den Skalaren.

„+": $(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U$;

$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$: $\quad a(v + U) = av + U$.

Lemma 7.1. Die Addition und die Multiplikation mit den Skalaren sind auf V/U wohldefiniert.

Bew. Seien $v_1 \sim v_1'$, $v_2 \sim v_2'$, $v \sim v'$. Dann

$$(v_1' + U) + (v_2' + U) = (v_1' + v_2') + U =$$

$$= v_1 + (v_1' - v_1) + v_2 + (v_2' - v_2) + U = v_1 + v_2 + U;$$

$$a(v' + U) = av' + U = av + a(v' - v) + U = av + U.$$

Bem. $1_{\mathbb{K}} \cdot (v + U) = 1_{\mathbb{K}} v + U = v + U$;

$$a((v_1 + U) + (v_2 + U)) = a((v_1 + v_2) + U) = a(v_1 + v_2) + U =$$

$$= (av_1 + av_2) + U = (av_1 + U) + (av_2 + U) =$$

$$= a(v_1 + U) + a(v_2 + U);$$

$$(a + b)(v + U) = (a + b)v + U = a(v + U) + b(v + U);$$

$$(ab)(v + U) = (ab)v + U = a(bv + U).$$

Alle Axiome, die einen $\mathbb{K}$-Vektorraum definieren, sind erfüllt, $(V/U, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Def. 7.2. Der Vektorraum V/U heißt der <u>Quotient</u> von V nach U.

Lemma 7.3. $p: V \longrightarrow V/U$ mit $p(v) = v + U$ ist eine surjektive lineare Abbildung (die kanonische Projektion.)

<u>Bew.</u> $v \in p^{-1}(v+\mathcal{U}) \Rightarrow p$ ist surjektiv.

$$p(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \mathcal{U} =$$
$$= (\alpha_1 v_1 + \mathcal{U}) + (\alpha_2 v_2 + \mathcal{U}) = \alpha_1 p(v_1) + \alpha_2 p(v_2). \boxtimes$$

<u>Bem.</u> Wenn $\mathcal{U} = \{\bar{o}_V\}$, dann ist p ein Isomorphismus. Allgemein, $\bar{o}_{V/\mathcal{U}} = \bar{o}_V + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
Also $p(v) = \bar{o}_{V/\mathcal{U}} \Leftrightarrow v \in \mathcal{U}$ und $\operatorname{Ker} p = \mathcal{U}$.

<u>Kor.</u> $\dim V/\mathcal{U} = \dim V - \dim \mathcal{U}$, falls $\dim V < \infty$.

<u>Satz 7.4.</u> (Universelle Eigenschaft) Sei $f: V \to W$ linear mit $\mathcal{U} \leq \operatorname{Ker} f$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $h: V/\mathcal{U} \to W$, s.d. $f = h \circ p$. (Man sagt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & W \\ V/\mathcal{U} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.)

<u>Bew.</u> <u>Eindeutigkeit:</u> $h(v+\mathcal{U}) = h \circ p(v) = f(v)$.
Dürfen wir h so definieren? Ja, weil $f(v') = f(v)$, wenn $v' - v \in \mathcal{U}$. Also $h(v'+\mathcal{U}) = f(v') = f(v)$.
Linear: $h(\alpha_1(v_1+\mathcal{U}) + \alpha_2(v_2+\mathcal{U})) = h((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \mathcal{U}) =$

$$= f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \underset{f \text{ linear}}{=} \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = \alpha_1 h(v_1 + \mathcal{U}) + \alpha_2 h(v_2 + \mathcal{U}). \boxtimes$$

Satz 7.5. Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ induziert einen Vektorraum-isomorphismus $V/\mathrm{Ker}\, f \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}\, f$.

Bew. $f: V \to W$ linear $\Rightarrow$ $f: V \to \mathrm{Im}\, f$, wo $\mathrm{Im}\, f \subseteq W$, ist auch eine lineare Abbildung. Setzen $U = \mathrm{Ker}\, f$. Nach dem Satz 7.4 existiert $h: V/U \to \mathrm{Im}\, f$, s.d. $h \circ p = f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Im}\, f \\ V/U \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Für jeden Vektor $v \in V$ ist es:

$h(v+U) = f(v)$. Also $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, f$.

Sei es $h(v+U) = \bar{0}_W$. Dann $f(v) = \bar{0}_W$ und $v \in \mathrm{Ker}\, f$ $(v \in U)$. Hier $v+U = U = \bar{0}_{V/U}$.

Wir sehen, dass $\mathrm{Ker}\, h = \{\bar{0}_{V/U}\}$. Die Abbildung h ist injektiv, surjektiv und linear. ☒

V/U und $\mathrm{Hom}_K(V,V)$

Sei $f: V \to V$ linear und s.d. $f(U) \subseteq U$. Dann können wir f auf U einschränken, $\hat{f}$. Auch $\tilde{f}(v+U) = f(v)+U$ ist eine wohldefinierte Abbildung. Falls $\dim V = n < \infty$ und $\{v_1, \dots, v_m, \dots v_n\}$ eine Basis von V ist, wo $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von U ist, dann haben die Abbildungen $\hat{f}$ und $\tilde{f}$ die folgenden Matrizen: $[\hat{f}]$ und $[\tilde{f}]$,

$$[f] = \begin{array}{c} m \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} [\hat{f}] & * \dots * \\ \hline 0 & [\tilde{f}] \end{array}\right).$$

Hier ist $\{v_{m+1}+U, \dots, v_n+U\}$ eine Basis von V/U, und die Matrix $[\tilde{f}]$ ist bez. dieser Basis.