4. Jordan'sche Normalform

Sei V ein Vektorraum, $f: V \to V$ eine lineare Abbildung, $\lambda \in \mathbb{K}$.

<u>Def. 4.1.</u> Der Unterraum

$$\mathrm{Hau}(f,\lambda) = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } (f-\lambda\, id_V)^n(v) = \bar{0}\}$$

heißt <u>Hauptraum</u> von f zu λ.

<u>Bem.</u> $\mathrm{Hau}(f,\lambda)$ ist wirklich ein Unterraum
Wenn $(f-\lambda\, id_V)^n(v) = \bar{0}$ und $(f-\lambda\, id_V)^m(w) = \bar{0}$, dann $(f-\lambda\, id_V)^u(v+w) = \bar{0}$ für $u = \max(n,m)$.

<u>Lemma 4.2.</u> $\mathrm{Hau}(f,\lambda) \neq \{\bar{0}\} \iff \lambda$ ist ein Eigenwert von f.

<u>Bew.</u> ($\Leftarrow$) $\exists v \neq \bar{0}, v \in V$, s.d. $f(v) = \lambda v$. Also $(f-\lambda\, id_V)(v) = \bar{0}$ und $v \in \mathrm{Hau}(f,\lambda)$.
($\Rightarrow$) Gegeben: $\mathrm{Hau}(f,\lambda) \neq \{\bar{0}\}$. Sei $v \in \mathrm{Hau}(f,\lambda)$, $v \neq \bar{0}$ und sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $(f-\lambda\, id_V)^n(v) = \bar{0}$. Falls $n = 1$, ist v ein Eigenvektor von f zu λ. Falls $n \geq 2$, haben wir $u = (f-\lambda\, id_V)^{n-1}(v) \neq \bar{0}$ und $(f-\lambda\, id_V)(u) = \bar{0}$, u ist ein Eigenvektor zu λ. $\boxtimes$

<u>Beispiel</u> Sei $V = \mathbb{K}^n$. Dann gilt:
$\mathrm{Hau}(f,0) = V \iff f^n = 0$, f ist eine nilpotente Abbildung.
($\Leftarrow$) klar.
($\Rightarrow$) Eigenvektor zu 0 + Induktion über n.

In einer Basis ist die Matrix von f

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * \dots * \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix},$$ wo $\tilde{A}$ eine nilpotente Matrix ist, weil

$\tilde{A}^{M} e_i' = \bar{0}$, falls $2 \le i \le n$, $M \ge n_i$ und

$A^{n_i} e_i = \bar{0}$ ($\{e_1, \dots, e_n\}$ ist die Basis), $(e_i' \in \mathbb{K}^{n-1})$.

Induktionsannahme: $\tilde{A}^{n-1} = 0$.

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & u\tilde{A}^{n-2} \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A}^{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & u\tilde{A}^{n-2} \\ \vdots & \\ 0 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u \\ \vdots & \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & u \cdot \tilde{A}^{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & O \end{pmatrix} = 0. \quad (u = (* \dots *))$$

Aus LAI: $A \in M_n(\mathbb{K})$ ist nilpotent ($\exists M$, s.d. $A^M = 0$) $\Leftrightarrow$ A ist triagonalisierbar und alle Eigenwerte sind Null

$$A \underset{\text{ähnlich}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ O & & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n = 0.$$

Lemma 4.3. Sei $h: V \to V$ ein lineare Abbildung, die mit f kommutiert, $h \circ f = f \circ h$. Dann $h(v) \in Hau(f, \lambda)$ $\forall v \in Hau(f, \lambda)$, $\forall \lambda$.

Bew. $(f - \lambda id_V)^n (h(v)) = h \circ (f - \lambda id_V)^n (v) =$
$= h(\bar{0}) = \bar{0}$, falls $(f - \lambda id_V)^n (v) = \bar{0}$. ∎

Kor. Jeder Hauptraum $Hau(f,\lambda)$ ist f-stabil. (II)

Satz 4.4. Seien $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann gilt
$$\sum_{i=1}^{r} Hau(f,\lambda_i) = Hau(f,\lambda_1) \oplus \dots \oplus Hau(f,\lambda_r).$$

Bew. Induktion über r.
Falls $r=1$, gibt es nichts zu zeigen.
Sei $r \geq 2$. Hier ist die Summe $\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)$ direkt. Sei es $\left(\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)\right) \cap Hau(f,\lambda_r) \neq \{\bar{0}\}$. Dann finden wir einen Vektor $u \neq \bar{0}$ im Schnitt, $u = v_1 + \dots + v_{r-1}$ und $v_i \in Hau(f,\lambda_i)$. $\exists n$ mit $(f-\lambda_r id_V)^n(u) = \bar{0}$.
Setzen $h = (f-\lambda_r id_V)^n$. $h: V \to V$ ist eine lineare Abbildung und $h \circ f = f \circ h$. Wir haben $\bar{0} = h(u) = h(v_1) + \dots + h(v_{r-1})$. Weil die Summe $\sum_{i=1}^{r-1} Hau(f,\lambda_i)$ direkt ist, mussen alle Summanden gleich Null sein, $h(v_i) = \bar{0}$ $\forall i \leq r-1$.
(Nach dem Lemma 4.3. $h(v_i) \in Hau(f,\lambda_i)$.)
Sei $n_i \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $(f-\lambda_i id_V)^{n_i}(v_i) = \bar{0}$.
Wie schon bemerkt, $(f-\lambda_i id_V)^{n_i - 1}(v_i) =: w_i \neq \bar{0}$ ist ein Eigenvektor von f zu λ_i. (Falls $n_i = 1$, setzt man $(f-\lambda_i id_V)^0 = id_V$.)

Es ist angenommen, dass $v_i \neq \bar{0}$.

Die Abbildungen h und $f-\lambda_i \, id_V$ kommutieren, damit auch $h \circ (f-\lambda_i \, id_V)^{n_i-1}(v) = \bar{0}$ und $h(w)=\bar{0}$. Aber

$$h(w) = (f-\lambda_r \, id_V)^n (w) = (f-\lambda_r id_V)(\lambda_i - \lambda_r) w = (\lambda_i - \lambda_r)^n w \neq \bar{0}.$$

Der Widerspruch zeigt, dass alle v_i gleich Null sind und

$$(Hau(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus Hau(f,\lambda_{r-1})) \cap Hau(f,\lambda_r) = \{\bar{0}\}. \quad \blacksquare$$

Satz 4.5. (Fitting-Zerlegung). Sei $V \cong \mathbb{K}^n$. Dann besitzt $Hau(f,0)$ stets genau ein unter f stabiles Komplement.

$$V = Hau(f,0) \oplus U, \text{ wo } f(u) \in U \ \forall u \in U.$$

Bew. $Hau(f,0) = \operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f^N \ \forall N \geq n$.

Betrachten wir noch die Kette von Unterräumen $\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} f^2 \supseteq \ldots \supseteq \operatorname{Im} f^k \supseteq \ldots$

Eine Seite ist die unendlich, die andere liegen alle Unterräume in V und $\dim V < \infty$.

Wenn $\operatorname{Im} f^k \supset \operatorname{Im} f^{k+1}$, dann $\dim(\operatorname{Im} f^k) > \dim(\operatorname{Im} f^{k+1})$. Weil $\dim(\operatorname{Im} f) \leq n$, gibt es eine Stelle m, ab der diese Folge konstant wird, $\operatorname{Im} f^N = \operatorname{Im} f^m \ \forall N \geq m$.

III

Sei $N \geq m$, $N \geq n$. Dann

$\operatorname{Im} f^{2N} = f^N(\operatorname{Im} f^N) = \operatorname{Im} f^N$ und aus

Dimensionsgründen $\operatorname{Im} f^N \cap \operatorname{Ker} f^N = \{\bar{0}\}$.

Nach der Dimensionsformel: $n = \dim(\operatorname{Im} f^N) + \dim(\operatorname{Ker} f^N)$ folgt es, dass

$V = \operatorname{Im} f^N \oplus \operatorname{Ker} f^N = \operatorname{Im} f^N \oplus \operatorname{Hau}(f,0)$.

$\operatorname{Im} f^N$ ist f-stabil, weil $f(\operatorname{Im} f^N) = \operatorname{Im} f^{N+1} = \operatorname{Im} f^N$.

Zu Eindeutigkeit: Gegeben ist

$V = \operatorname{Hau}(f,0) \oplus \mathcal{U}$ und $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$.

Weil $\mathcal{U} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, gilt es $\dim f(\mathcal{U}) = \dim \mathcal{U}$, also $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Damit $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Im} f^K$ $\forall K$.

Nun $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Im} f^N$ und $\dim \mathcal{U} = \dim(\operatorname{Im} f^N) = n - \dim \operatorname{Hau}(f,0)$. $\mathcal{U} = \operatorname{Im} f^N$. ∎

Lemma 4.6. Sei $V \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann stimmt $\dim \operatorname{Hau}(f,\lambda)$ mit der Vielfachheit der Nullstelle λ von $\chi_f(\lambda)$ (diese Vielfachheit nennt man algebraische Vielfachheit des Eigenwerts).

Bem. $\dim V_\lambda(f)$ ist die geometrische Vielfachheit von λ, $V_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$.

Bew. Die Fitting-Zerlegung zu $h = f - \lambda \operatorname{id}_V$

liefert: $V = \mathrm{Hau}(f,\lambda) \oplus \mathcal{U}$, wo $h^m(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$
$(\mathrm{Hau}(h,0))$ für alle $m \geq 1$.

Auf $\mathrm{Hau}(f,\lambda)$ ist h nilpotent, so ist sie triagonalisierbar (LA I) mit alle Eigenwerte gleich Null.

$$f = h + \lambda \mathrm{id}_V \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & f|_{\mathcal{U}} \end{array}\right)$$

Damit.

$$\chi_f(x) = \det(x \cdot \mathrm{id}_V - f) = (x-\lambda)^{\dim \mathrm{Hau}(f,\lambda)} \times$$
$$\times \chi_{f|_{\mathcal{U}}}(x)$$ und $\chi_{f|_{\mathcal{U}}}(\lambda) \neq 0$, weil $\mathrm{Ker}\, h \cap \mathcal{U} = \{\bar{0}\}$. ▨

Satz 4.7. (Hauptraumzerlegung). Zerfällt $\chi_f(x)$ in Linearfaktoren, $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{\alpha_i}$, so gilt $V = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_r)$. Hier ist es $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$.

Bew. Nach dem Satz 4.4 haben wir

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_r)$$

und das ist ein Unterraum von V von Dimension $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$ (Lemma 4.6).

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \deg \chi_f(x) = \dim V \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hau}(f,\lambda_i) = V.$$

▨

17.05. **Satz 4.7.** Ist es

$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, wo $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$,

so gilt $V = \mathrm{Hau}(f,\lambda_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Hau}(f,\lambda_r)$.

Das charakteristische Polynom $\chi_f(X)$ zerfällt in Linearfaktoren. Es ist nicht wahr, dass alle Nullstellen von $\chi_f(X)$ paarweise verschieden sind, $\alpha_i > 1$ ist erlaubt.

D.h. f ist triagonalisierbar, nicht immer diagonalisierbar.

$$f \sim \begin{pmatrix} \gamma_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_r \end{smallmatrix} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \begin{smallmatrix} \lambda_r & * \\ 0 & \lambda_r \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \alpha_r \end{array}, \text{ denn}$$

$$\chi_f(X) = \prod (X-\gamma_j) \Rightarrow (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\underbrace{\lambda_1, \ldots \lambda_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_r, \ldots, \lambda_r}_{\alpha_r})$$

bis auf Reihenfolge.

Der Satz sagt doch, dass

$$f \sim \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{smallmatrix} & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

f hat eine Block-diagonale Gestalt.

Satz 4.8. (Jordan-Zerlegung). Sei $f: V \to V$ linear mit $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\gamma_i)$, $n = \dim V$.

Dann existiert genau eine Zerlegung $f = f_s + f_{nl}$, wo f_s diagonalisierbar ist,

f_{nl} nilpotent ist, und $f_s \circ f_{nl} = f_{nl} \circ f_s$.

Man sagt, dass f_s halbeinfach (auf Englisch „semisimple", deswegen „s").

Bew. $\chi_f(x)$ zerfällt in Linearfaktoren $\overset{S.4.7.}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\mathrm{Hau}(f,\lambda_1)}_{=:\,\mathcal{U}_1} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathrm{Hau}(f,\lambda_r)}_{=:\,\mathcal{U}_r},\ \lambda_i \neq \lambda_j, \text{ für } i \neq j.$$

Setzen $f_s := \lambda_1 \mathrm{id}_{\mathcal{U}_1} \oplus \ldots \oplus \lambda_r \mathrm{id}_{\mathcal{U}_r}$, gemeint ist, dass $f_s(u_i) = \lambda_i u_i\ \forall u_i \in \mathcal{U}_i$. Weiter, $f_{nl} = f - f_s$ ist nilpotent, weil $f_{nl}^n(u_i) = (f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^n(u_i) = \bar{0}\ \forall u_i \in \mathcal{U}_i, \forall i$.

Noch merken, $f \circ f_s(u_i) = f(\lambda_i u_i) = \lambda_i f(u_i) = f_s \circ f(u_i) \Rightarrow f \circ f_s = f_s \circ f \Rightarrow f_s \circ f_{nl} = f_{nl} \circ f_s$.

Zu Eindeutigkeit:

Sei es $f = f_s + f_{nl} = h + l$, wo h diagonalisierbar, l nilpotent ist, und $h \circ l = l \circ h$. Dann $h \circ (h+l) = (h+l) \circ h$, also $h \circ f = f \circ h$ und die Haupträume von f sind h-stabil (L.4.3.). Ebenfalls $l \circ f = f \circ l$ und jeder $\mathcal{U}_i$ ist auch l-stabil. Auf $\mathcal{U}_i$: $f_s\big|_{\mathcal{U}_i} = \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{U}_i}$, diese Abbildung vertauscht mit jeder anderen linearen Abbildung $\varphi: U_i \to U_i$. Insb. (V)

$f_s \circ l = l \circ f_s$ auf jedem Unterraum U_i.

Damit $f_s \circ l = l \circ f_s$ und $l \circ f_{nl} = f_{nl} \circ l$.

Wenn zwei nilpotente Abbildungen ψ_1, ψ_2 kommutieren $\psi_1 \circ \psi_2 = \psi_2 \psi_1$, dann ist jede lineare Kombination $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ nilpotent.

$$(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha^k \beta^{N-k} \psi_1^k \circ \psi_2^{N-k}$$

So ist $f_{nl} - l = h - f_s$ eine nilpotente Abbildung.

Hier $h \circ f_s = f_s \circ h \underset{L.4.9.}{\Longrightarrow} h - f_s$ diagonalisierbar.

Eine nilpotente Abbildung ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie gleich Null ist.

Also $h = f_s$ und $f_{nl} = l$. $\boxtimes$

<u>Lemma 4.9.</u> Seien $f, h: V \to V$ linear und diagonalisierbar. Wenn $f \circ h = h \circ f$ dann ist $f + h$ (auch $f - h$) diagonalisierbar.

<u>Bew.</u> f diagonalisierbar $\Rightarrow V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus V_{\lambda_r}(f)$, wo wie oben $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{d_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$.

Hier $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = V_{\lambda_i}(f)$ (Eigenraum zu λ_i).

Ebenfalls für h: $\mathrm{Hau}(h, \mu) = V_\mu(f)$ $\forall \mu$.

Wir wissen, dass jeder $\mathrm{Hau}(f, \lambda_i) = V_{\lambda_i}(f)$

h-stabil ist (Lemma 4.3.).

Sei $\tilde{h}_i = h\big|_{\mathrm{Ker}(f,\lambda_i)}$, $U_i := \mathrm{Ker}(f,\lambda_i)$.

Dann $U_i = \mathrm{Ker}(\tilde{h}_i, \mu_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(\tilde{h}_i, \mu_{r(i)})$.

Klar, $\mathrm{Ker}(\tilde{h}_i, \mu_j) \subseteq \mathrm{Ker}(h, \mu_j) = V_{\mu_j}(h)$.

U_i hat eine Basis, wo jedes Element ein Eigenvektor von h ist. Damit $\exists$ eine Basis, wo f und h gleichzeitig diagonal sind, da ist jede Linearkombination

$\alpha f + \beta h$ diagonal. $\boxtimes$

Sind $h, f: V \to V$ diagonalisierbar und gilt $h \circ f = f \circ h$, so existiert eine Basis, wo f und h diagonal sind. Alle Abbildungen $\alpha f + \beta h$, sowie $f \circ h$, $f^k \circ h^\ell$ sind diagonalisierbar.

<u>Beispiel</u> (zu Jordan-Zerlegung).

Sei $f = f_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so

ist $A_s = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$, $A_{nl} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Bem.</u> f ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \chi_f(X) = \prod (X - \gamma_i)$ <u>und</u> $f = f_s$;

f ist nilpotent $\Leftrightarrow$ $f = f_{nl}$.

Def. 4.10 Gegeben $r \geq 1$ definieren wir eine $r\times r$-Matrix $J(r)$, genannt der nilpotente Jordan-Block der Größe r, durch die Vorschrift $J(r)_{i,j} = 1$ für $j = i+1$ und $J(r)_{i,j} = 0$ sonst. Insb. $J(1) = 0$.

$$J(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & 0 & 1 \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad J(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Merken, $\operatorname{rk} J(r) = r-1$, $J(r)^{r-1} = 0$.

Als Abbildung: $\mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$ wirkt $J(r)$ wie Folgend:

$$e_r \mapsto e_{r-1} \mapsto e_{r-2} \mapsto e_{r-3} \mapsto \cdots \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto \bar{0}.$$

$\sim$ Wir möchten die nilpotenten Abbildungen $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (oder die nilpotenten Matrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$) bis auf Konjugation) klassifizieren.

Satz 4.11 (Normalform nilpotenter Abbildungen.) Gegeben eine nilpotente Abbildung $f: V \to V$, $V \cong \mathbb{K}^n$, gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, s.d.

$${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(J(r_1), \ldots, J(r_t)).$$

Die positiven ganzen Zahlen $r_1, \ldots, r_t$ sind hierbei durch f eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge. (Hier ist $n < \infty$.)

Beispiel $\mathrm{diag}(J(2), J(3)) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Kor. Seien $A, \tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotent. Dann $\exists\ r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_t$, $r_1 \geq 1$, s.d.

$A \sim \mathrm{diag}(J(r_1), \ldots, J(r_t))$ und

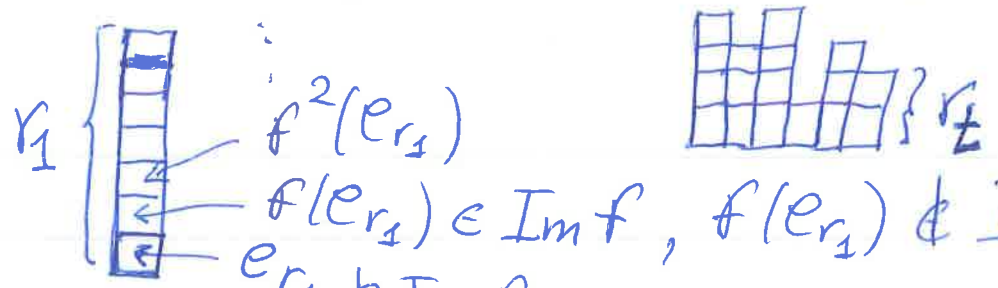
ähnlich (oder konjugiert)

$A \sim \tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{A} \sim \mathrm{diag}(J(r_1), \ldots, J(r_t))$.

Beweis des Satzes

Die Eindeutigkeit ist unproblematisch.
Ist f eine Abbildung mit der Matrix $\mathrm{diag}(J(r_1), \ldots, J(r_t))$, so gilt

$$\dim(\mathrm{Im}\, f^{d-1}) - \dim(\mathrm{Im}\, f^{d}) = |\{i \mid r_i \geq d\}|.$$



$f^2(e_{r_1})$

$f(e_{r_1}) \in \mathrm{Im} f$, $f(e_{r_1}) \notin \mathrm{Im} f^2$.

$e_{r_1} \notin \mathrm{Im} f$, $f(e_{r_1}) = e_{r_1 - 1}$ und soweiter.

$(f^0 = \mathrm{id}_V)$

Die Kenntnis aller Zahlen $|\{i \mid r_i \geq d\}|$ liegt das t-Tupel $(r_1, \ldots, r_t)$ bis auf Reihenfolge fest, $t = \dim V - \dim(\mathrm{Im} f)$.
Die Existenz folgt aus dem folgenden Lemma. $\boxtimes$

Lemma 4.12. Sei $f: V \to V$ eine nilpotente Abbildung, $V \cong \mathbb{K}^n$, $n < \infty$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, s.d. $\mathcal{B} \sqcup \{\bar{0}\}$ unter f stabil ist und, s.d. jedes Element von $\mathcal{B}$ unter f höchstens ein Urbild in $\mathcal{B}$ hat. Wir nennen solche Basis eine *Jordan-Basis*.

Lemma $\Rightarrow$ Satz: Nicht jedes Element von $\mathcal{B}$ hat ein Urbild in $\mathcal{B}$.

$$\dots \mapsto \bullet \mapsto \bullet \mapsto \bullet$$

falls immer geht, kommen wir zu einem Zyklus:

Also $f^s(v) = v$, für die Länge s des Zykles und f wäre nicht nilpotent.

Wir sehen auch, dass jedes Element von $\mathcal{B}$, das in $f(\mathcal{B})$ liegt, die Gestalt $f^k(w)$ mit $w \in \mathcal{B}$, $w \notin f(\mathcal{B})$ hat.

Unter f zerfällt $\mathcal{B}$ in Ketten:

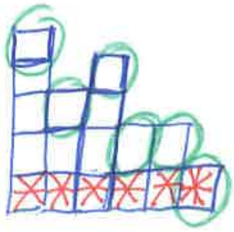
$$f(\mathcal{B}) \not\ni v_1 \mapsto f(v_1) \mapsto f^2(v_1) \mapsto f^3(v_1) \;\cdots\; \mapsto \bar{0}$$

$$\vdots$$

$$f(\mathcal{B}) \not\ni v_t \mapsto f(v_t) \mapsto f^2(v_t) \mapsto f^3(v_t) \;\cdots\; \mapsto \bar{0}$$

Bew. des Lemmas Induktion über $n = \dim V$.

f ist nilpotent, so $\dim(\operatorname{Ker} f) \geq 1$ und $\dim(\operatorname{Im} f) < n$. Das Bild von f hat eine Jordan-Basis $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$: 

Die Menge $\mathcal{T}$ enthält eine Basis $\mathcal{T}_0 = \{t_1, \ldots, t_{r'}\}$ von $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, $\mathcal{T}_0 = \{t \in \mathcal{T} \mid f(t) = \bar{0}\}$.

Sei weiter $\mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{T}_0$ eine Basis von $\operatorname{Ker} f$.

($\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \oplus W_0$, wo keinen Vektor $v \in W_0$, $v \neq \bar{0}$ im Bild von f liegt.)

$\mathcal{T}$ ist eine Jordan-Basis $\overset{\text{Def. (Lemma)}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T} \sqcup \{\bar{0}\}$. Wie betrachten die Elemente von $\mathcal{T}$, die nicht in $f(\mathcal{T})$ liegen. Seien die $s_1, \ldots, s_{r'}$. Jedes hat ein Urbild, weil $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Im} f$. Seien $b_1, \ldots, b_{r'}$ Urbilde von $s_1, \ldots, s_{r'}$, $b_i \in V$ und $f(b_i) = s_i$. Setzen $\mathcal{B} := \{s_1, \ldots, s_{r'}\} \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{T}$.

Wir überprüfen, dass $\mathcal{B}$ eine Jordan-Basis von V ist.

Wir haben

$$\mathcal{B} = \underbrace{(\mathcal{B}_0 \sqcup \mathcal{S}_0)}_{\text{eine Basis von } \operatorname{Ker} f} \sqcup \left(\{b_1, \dots, b_{r'}\} \sqcup \{t \in \mathcal{S} \mid f(t) \neq \bar{0}\}\right).$$

Merken, $f(\mathcal{B}) = \{\bar{0}\} \cup \left(\{s_1, \dots, s_{r'}\} \sqcup f(\mathcal{S})\right)$.

Und $f(\mathcal{S}) = \{f(t) \mid t \in \mathcal{S}, f(t) \neq \bar{0}\} \sqcup \{\bar{0}\}$.

$\{f(b_1), \dots, f(b_{r'})\} \sqcup \{f(t) \mid t \in \mathcal{S}, f(t) \neq \bar{0}\} = \mathcal{S}$

ist eine Basis in $\operatorname{Im} f \Longrightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist linear unabhängig und $|\mathcal{B}| = \dim V$.

$\mathcal{B}$ ist eine Basis von V.

Wir haben gesehen, dass $f(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B} \sqcup \{0\}$.

Zu Urbilde: Sei $b \in \mathcal{B}$. Es gibt drei Möglichkeiten.

(I) $b \notin \mathcal{S}$, $b = b_i$. Hier $b \notin \operatorname{Im} f$, weil $\mathcal{S} \sqcup \{b\}$ linear unabhängig ist. Das Element b hat kein Urbild unter f.

(II) $b \in \mathcal{S}$, aber $b \notin f(\mathcal{S})$. Hier $b = s_i$ und b hat genau ein Urbild in $\mathcal{B}$, b_i.

(III) $b \in \mathcal{S}$, $b \in f(\mathcal{S})$. In $\mathcal{S}$ hat b genau ein Urbild ($\mathcal{S}$ ist eine Jordan-Basis) und $f(b_i) = s_i \neq b$ $\forall i, 1 \leq i \leq r'$. $\boxtimes$

Das Bild:

$\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_0$