Lösung zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1. Seien $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ wie in der Aufgabenstellung definiert. Gefragt ist, ob die Abbildungen linear sind.

(1) Für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt $\boldsymbol{A}(x,y,z) \overset{def\,\boldsymbol{A}}{=} (x+2y, y-z) \overset{def\,matrixmult.}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Nach Satz 3.4.7 der Vorlesung ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ die Darstellung einer linearen Abbildung. Daher ist $\boldsymbol{A}$ linear.

(2) $\boldsymbol{B}((0,0,0)+(0,0,0)) = \boldsymbol{B}(0,0,0) \overset{def\,\boldsymbol{B}}{=} (0,1) \neq (0,1)+(0,1) = \boldsymbol{B}(0,0,0) + \boldsymbol{B}(0,0,0)$. Daher ist $\boldsymbol{B}$ nicht linear.

(3) $\boldsymbol{C}((0,1,1)+(0,1,1)) = \boldsymbol{C}(0,2,2) \overset{def\,\boldsymbol{B}}{=} (4,2) \neq (1,1)+(1,1) = \boldsymbol{C}(0,1,1) + \boldsymbol{C}(0,1,1)$. Daher ist $\boldsymbol{C}$ nicht linear.

(4) Über $\mathbb{R}$: Schreibe beliebige $\mathbb{C} \ni z = \binom{\Re z}{\Im z}$ als Spaltenvektor. Wie in (1) ist $\boldsymbol{D}\binom{\Re z}{\Im z} \overset{def\,\boldsymbol{B}}{=} \binom{\Re z}{-\Im z} \overset{def\,matrixmult.}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \binom{\Re z}{\Im z}$, und $\boldsymbol{D}$ ist $\mathbb{R}$-linear.

(5) Über $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{D}(iz) \overset{def\,\boldsymbol{D}}{=} \overline{iz} = -i\overline{z} \overset{z\neq 0}{\neq} i\overline{z} = i\boldsymbol{D}(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Daher ist $\boldsymbol{D}$ nicht $\mathbb{C}$-linear.

Aufgabe 2. Gegeben ist lineares $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch $\boldsymbol{A}(1,2) = (0,3,5)$ und $\boldsymbol{A}(1,-1) = (-3,6,8)$. Zu zeigen: $\boldsymbol{A}(x,y) = (2x-y, x+y, 3x-y)$ für $x,y \in \mathbb{R}$ und speziell $\boldsymbol{A}(1,5) = (-3,6,-2)$.

Beweis: Nach Lemma 3.4.3 ist $\boldsymbol{A}$ durch seine Werte auf einer Basis eindeutig gegeben. Entwickele (x,y) nach dem Basiskandidaten $(1,2)$, $(1,-1)$ von $\mathbb{R}^2$. Eine einfache Rechnung zeigt $(x,y) = \left[\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right](1,2) + \left[\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}\right](1,-1)$ (und beweist damit auch die Basiseigenschaft, denn ein zweielementiges Erzeugendensystem im $\mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig). Einsetzen ergibt

$$\boldsymbol{A}(x,y) = \boldsymbol{A}\left(\left[\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right](1,2) + \left[\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}\right](1,-1)\right) \overset{linear}{=} \left[\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right]\boldsymbol{A}(1,2) + \left[\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}\right]\boldsymbol{A}(1,-1)$$

$$\overset{vorgabe}{=} \left[\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right](0,3,5) + \left[\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}\right](3,0,2) = (2x-y, x+y, 3x+y)$$

und speziell $\boldsymbol{A}(1,5) = (-3,6,8)$.

Aufgabe 3. Gegeben ist lineares $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (x+2y+z, y+3z, -x-y+2z, x+3y+4z)$. Gesucht: Basen von Bild$\boldsymbol{A}$, Kern$\boldsymbol{A}$ sowie Rang$\boldsymbol{A}$, Defekt$\boldsymbol{A}$.

(1) Z.z.: $(5,-3,1)$ ist (einelementige) Basis von Kern$\boldsymbol{A}$. Beweis: Seien $x,y,z \in \mathbb{R}$ so dass $0 = \boldsymbol{A}(x,y,z)$. Die erste Zeile liefert $x = -2y-z$. Die zweite liefert $y = -3z$, und mit der ersten, $x = 5z$. Daher ist der Kern von $\boldsymbol{A}$ notwendig in $\{(5z,-3z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}((5,-3,1))$ enthalten. Andererseits ist der Kern ein linearer Unterraum. Es reicht, $\boldsymbol{A}(5,-3,1) = 0$ zu zeigen, um $\mathrm{Lin}((5,-3,1)) \subset$ Kern$\boldsymbol{A}$ zu beweisen. Einsetzen zeigt $\boldsymbol{A}(5,-3,1) = (5-6+1, -3+3, -5+3+2, 5-9+4) = 0$.
Damit erzeugt das einelementige System $(5,-3,1)$ den Kern$\boldsymbol{A}$ und ist wegen $(5,-3,1) \neq 0$ linear unabhängig.

(2) Defekt$\boldsymbol{A} \overset{def\,defekt}{=} \dim \mathrm{Kern}\boldsymbol{A} \overset{1.}{=} |\{(5,-3,1)\}| = 1$

(3) Z.z.: $(1,0,-1,1), (2,1,-1,3)$ ist Basis von Bild$\boldsymbol{A}$. Beweis: (i) Nach dem Basisaustauschsatz (und Serie 5) kann man jeden Vektor der kanonischen Basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ gegen $(5,-3,1)$ austauschen, denn keiner der Entwicklungskoeffizienten von $(5,-3,1)$ ist Null. Also ist $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(5,-3,1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
(ii) Jeder Vektor $w \in$ Bild$\boldsymbol{A}$ ist $w = \boldsymbol{A}v$ für ein $v \in \mathbb{R}^3$. Das v lässt sich entwickeln als $v = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(5,-3,1)$ mit geeigneten $\lambda_i \in \mathbb{R}$. $w = \boldsymbol{A}(v) \overset{\boldsymbol{A}\,linear}{=} \lambda_1\boldsymbol{A}(1,0,0) + \lambda_2\boldsymbol{A}(0,1,0) + \lambda_3\boldsymbol{A}(5,-3,1) \overset{kern}{=} \lambda_1\boldsymbol{A}(1,0,0) + \lambda_2\boldsymbol{A}(0,1,0)$. Also erzeugt $\boldsymbol{A}(1,0,0), \boldsymbol{A}(0,1,0)$ das Bild.
(iii) Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 = \mu_1\boldsymbol{A}(1,0,0) + \mu_2\boldsymbol{A}(0,1,0) \overset{\boldsymbol{A}\,linear}{=} \boldsymbol{A}(\mu_1(1,0,0) + \mu_2(0,1,0))$. Gemäß Charakterisierung des Kerns gibt es $\mu_3 \in \mathbb{R}$ so dass $\mu_1(1,0,0) + \mu_2(0,1,0) = \mu_3(5,-3,1)$. Wegen linearer Unabhängigkeit (i) ist $\mu_3 = \mu_2 = \mu_2 = 0$. Daher ist $\boldsymbol{A}(1,0,0), \boldsymbol{A}(0,1,0)$ linear unabhängig.
(iv) $\boldsymbol{A}(1,0,0) = (1,0,-1,1)$, $\boldsymbol{A}(0,1,0) = (2,1,-1,3)$

(4) Rang$\boldsymbol{A} \overset{def\,rang}{=} \dim \mathrm{Bild}\boldsymbol{A} \overset{3.}{=} |\{\boldsymbol{A}(1,0,0), \boldsymbol{A}(0,1,0)\}| = 2$. (NACHTRAG: (3), (4) eleganter: Formel Rang$\boldsymbol{A} = \dim \mathbb{R}^4 -$ Defekt$\boldsymbol{A}$, danach "kleinstes" Erzeugendensystem aus den Spalten von A.)

Aufgabe 4.

(1) Sei $V := W := \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,0)$ (linear da Projektion) und $S' := \{(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$. $\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{Lin}S' = \boldsymbol{A}^{-1}\{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \overset{\cap bild A}{=} \boldsymbol{A}^{-1}\{0\} = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ und $\mathrm{Lin}\boldsymbol{A}^{-1}S' = \mathrm{Lin}\varnothing = \{0\}$ sind verschieden.

(2) Seien $\boldsymbol{A}$, V, W, W', K wie in der Aufgabe. Z.z.: $\boldsymbol{A}^{-1}W'$ ist Untervektorraum. Beweis: Seien $\lambda \in K$, $u,v \in \boldsymbol{A}^{-1}W'$ beliebig. Also sind $\boldsymbol{A}(u), \boldsymbol{A}(v) \in W'$, und weil W' Unterraum ist, auch $\boldsymbol{A}(u) + \lambda\boldsymbol{A}(v) \in W'$. Wegen $\boldsymbol{A}(u+\lambda v) \overset{\boldsymbol{A}\,linear}{=} \boldsymbol{A}(u) + \lambda\boldsymbol{A}(v) \in W'$ ist $u + \lambda v \in \boldsymbol{A}^{-1}W'$. Weil u, v, λ beliebig waren, ist $\boldsymbol{A}^{-1}W'$ Unterraum.