Lineare Algebra und Analytische Geometrie II
Übungsserie 03

Markus Pawellek
144645
markuspawellek@gmail.com

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus Linearer Algebra I ist bereits bekannt, dass die Menge $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ der $n \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen ein reeller Vektorraum ist. Für die Menge der hermiteschen Matrizen gilt offenbar

$$\mathrm{H}_n := \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \overline{A}^{\mathrm{T}} = A \right\} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

Es reicht damit zu zeigen, dass H_n einen linearen Unterraum von $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ darstellt.

Es ist klar, dass $\mathrm{H}_n \neq \emptyset$, da $\mathrm{I} \in \mathrm{H}_n$. Seien nun $A, B \in \mathrm{H}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (das heißt $\overline{\lambda} = \lambda$).

$$\overline{(A + \lambda B)}^{\mathrm{T}} = \left(\overline{A} + \overline{\lambda}\,\overline{B}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{A}^{\mathrm{T}} + \lambda \overline{B}^{\mathrm{T}} = A + \lambda B$$

$$\implies \quad A + \lambda B \in \mathrm{H}_n$$

H_n ist also abgeschlossen unter Linearkombinationen und damit ein linearer Unterraum von $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ bezüglich der reellen Zahlen. □

Seien jetzt $E_{ij} := \left(e_{pq}^{ij}\right)_{1 \leq p,q \leq n}$ für $i, j \in \mathbb{N},\ i, j \leq n, j \geq i$ mit

$$e_{pq}^{ij} := \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \delta_{ij}\delta_{ip}\delta_{jq}$$

und $\tilde{E}_{km} := \left(\tilde{e}_{pq}^{km}\right)_{1 \leq p,q \leq n}$ für $k, m \in \mathbb{N},\ k, m \leq n,\ m > k$ mit

$$\tilde{e}_{pq}^{km} := \delta_{kp}\delta_{mq} - \delta_{kq}\delta_{mp}$$

Dann bildet die folgende Menge (i steht hier für die imaginäre Einheit) eine Basis von H_n.

$$\{E_{km} \mid k, m \in \mathbb{N},\ k, m \leq n,\ m \geq k\} \cup \left\{ i\tilde{E}_{km} \;\middle|\; k, m \in \mathbb{N},\ k, m \leq n,\ m > k \right\}$$

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ positiv definite hermitesche Matrizen.

Matrix $A + B$:

In Aufgabe 1 wurde gezeigt, dass dann auch $A + B$ eine hermitesche Matrix bildet (Abgeschlossenheit der Linearkombination). Weiterhin gilt für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$

$$\overline{v}^{\mathrm{T}}(A + B)v = \overline{v}^{\mathrm{T}}(Av + Bv) = \underbrace{\overline{v}^{\mathrm{T}} Av}_{>0} + \underbrace{\overline{v}^{\mathrm{T}} Bv}_{>0} > 0$$

$A + B$ ist damit auch eine positiv hermitesche Matrix. □

Matrix A^{-1}:
Für die Inverse einer Matrix (sofern diese existiert) gilt

$$\mathrm{I} = A^{-1}A = AA^{-1} = \overline{(AA^{-1})}^{\mathrm{T}} = \left(\overline{A}\;\overline{A^{-1}}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{A^{-1}}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A^{-1}}^{\mathrm{T}}A$$

Die Inverse ist eindeutig bestimmt. Es muss also $\overline{A^{-1}}^{\mathrm{T}} = A^{-1}$ gelten. Da die Inverse von A existiert, ist die zugehörige lineare Abbildung eine bijektive Abbildung. Für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gibt es also ein eindeutig bestimmtes $w \in \mathbb{C}^n$ mit $v = Aw$. Es folgt also für alle $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit dem zugehörigen $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ (das heißt $Aw = v$)

$$\overline{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}v = \overline{(Aw)}^{\mathrm{T}}A^{-1}(Aw) = \overline{w}^{\mathrm{T}}\underbrace{\overline{A}^{\mathrm{T}}}_{=A}\underbrace{A^{-1}A}_{=\mathrm{I}}w = \overline{w}^{\mathrm{T}}Aw > 0$$

A^{-1} ist hermitesch und positiv definit. □

Matrix A^2:
Es folgt direkt, dass A^2 hermitesch ist.

$$\overline{A^2}^{\mathrm{T}} = \left(\overline{A}\,\overline{A}\right)^{\mathrm{T}} = \overline{A}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = AA = A^2$$

Weiterhin gilt nach bekannten Rechenregeln

$$\overline{v}^{\mathrm{T}}A^2v = \left(A^{\mathrm{T}}\overline{v}\right)^{\mathrm{T}}(Av) = \overline{\left(\overline{A}^{\mathrm{T}}v\right)}^{\mathrm{T}}(Av) = \overline{(Av)}^{\mathrm{T}}(Av)$$

Im Allgemeinen muss A nicht invertierbar sein. Es gibt also für bestimmte A ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, sodass $Av = 0$. Für dieses v folgt dann auch

$$\overline{v}^{\mathrm{T}}A^2v = \overline{(Av)}^{\mathrm{T}}(Av) = 0$$

A^2 ist im Allgemeinen also nicht positiv definit. □

Matrix AB:
Seien A, B so gewählt, dass $AB \neq BA$, wie zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach bekannten Rechenregeln gilt

$$\overline{AB}^{\mathrm{T}} = \overline{B}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}} = BA \neq AB$$

AB ist also nicht hermitesch (theoretisch gesehen, ist nun nicht sicher gestellt, ob positive Definitheit überhaupt Sinn ergibt). AB muss auch nicht positiv definit sein. Dafür wählt man A mit $\det A = 0$ und $B = A$. Nach der vorherigen Aussage $AB = A^2$ dann nicht positiv definit. □

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ die folgende hermitesche Matrix und χ das zugehörige charakteristische Polynom.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow \quad \chi(\lambda) = \det(A - \lambda\mathrm{I}) = (1-\lambda)^2 - 1$$

Für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \lambda(A)$ folgt also (durch Setzen von $\chi(\lambda) = 0$)

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 0$$

Die Eigenvektoren $x \in \mathbb{C}^2$ bezüglich λ_1 ergeben sich durch

$$x_1 + ix_2 = 2x_1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = ix_2$$

Man wähle nun $x_2 = 1$ und normiere den dadurch entstehenden Eigenvektor. Dieser Vektor soll hier b_1 genannt werden. Analog geht man für einen normierten Eigenvektor bezüglich λ_2 vor.

$$\Longrightarrow \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem bekannten Spektralsatz sind diese beiden Vektoren orthogonal zueinander. Die Matrix $C := (b_1, b_2)$ stellt dem zufolge eine unitäre Matrix dar. Man bestätigt nun durch Rechnung

$$\overline{C}^{\mathrm{T}} AC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Das Vorgehen in dieser Aufgabe ist vollkommen analog zu Aufgabe 3. Aus diesem Grund sei auch die Benennung aller Variablen die gleiche.

(a):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$\Longrightarrow \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C}^{\mathrm{T}} AC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3 - \lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = 3$$

$$\Longrightarrow \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C}^{\mathrm{T}} AC = \frac{1}{2}\overline{C}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Longrightarrow \qquad -1 + 2\lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + \lambda + 1\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{2}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C}^{\mathrm{T}} A C = \frac{1}{2} \overline{C}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_{21} & b_{31} \\ 1 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$