2. Bilinearformen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Def. 2.1 Eine Bilinearform b auf V ist eine Abbildung $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$, $(v, w) \longmapsto b(v, w)$, die die folgende Axiome erfüllt:

$$b(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 b(v_1, w) + a_2 b(v_2, w);$$
$$b(v, a_1 w_1 + a_2 w_2) = a_1 b(v, w_1) + a_2 b(v, w_2)$$

für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.

Mögliche Bezeihnung: $b(v, w) = \langle v, w \rangle$.

Bem. Das Skalarprodukt $(v \cdot w) = v^t w$ auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Bilinearform. Hier gilt noch:
$(v \cdot w) = (w \cdot v)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$; $(v \cdot v) > 0$, falls $v \neq \bar{0}$.

Eine Bilinearform b heißt

symmetrisch, falls $b(v, w) = b(w, v)$ $\forall v, w \in V$;

schiefsymmetrisch, falls $b(v, w) = -b(w, v)$, $b(v, v) = 0$;

positiv definit, falls ($v = \bar{0} \Rightarrow b(v, v) > 0$) und die Ungleichung $a > 0$ sinnvoll in $\mathbb{K}$ ist.

Bilinearformen und Matrizen

Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$. Setzen $b_A(v, w) = v^t A w$. Dann ist b_A eine Bilinearform. Merken,

$$b_A(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = a_{ij}, \quad \bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Sei nun b eine Bilinearform auf $\mathbb{K}^n$, $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ die übliche Basis von $\mathbb{K}^n$. Setzen $a_{ij} = b(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$. Merken,

$$b\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{e}_i, \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{e}_i\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \gamma_j b(\bar{e}_i, e_j) = \sum_{i,j} \alpha_i a_{ij} \gamma_j.$$

Also $b(v,w) = v^t A w$, wo $A = (a_{ij})$. Die Matrix A ist <u>die Matrix von b</u>.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Die Bilinearformen} \\ \text{auf } \mathbb{K}^n\end{array}\right\} \xleftrightarrow[1:1]{} M_n(\mathbb{K})$$

Bem. Die Matrix von $(v \cdot w) = v^t w$ auf $\mathbb{K}^n$ ist E_n.

<u>Lemma 2.2</u> b_A ist genau dann symmetrisch, wenn $A = A^t$. $(A^t = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j)$

<u>Bew.</u> $(\Rightarrow)$ $a_{ij} = b_A(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = b_A(\bar{e}_j, \bar{e}_i) = a_{ji}$.

$(\Leftarrow)$ $b_A(v,w) = v^t A w \in \mathbb{K} \cong M_1(\mathbb{K})$. $\alpha^t = \alpha \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Also $b_A(v,w) = (v^t A w)^t = w^t A^t (v^t)^t = w^t A^t v = w^t A v$, weil $A = A^t$. Gezeigt, $b_A(v,w) = b_A(w,v)$. ▨

Aus LA I: $(AB)^t = B^t A^t \ \forall A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K}), B \in Mat_{n \times l}(\mathbb{K})$.

<u>Basiswechsel</u>

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$${}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \text{ mit } v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n.$$

Sei $\tilde{\mathcal{B}}$ noch eine Basis.

Wir haben die Übergangsmatrix ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}}$ mit der Eigenschaft ${}_{\tilde{\mathcal{B}}}[v] = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}} \, {}_{\mathcal{B}}[v]$.

Bez. der Basis $\mathcal{B}$:

$$b(v,w) = \left({}_{\mathcal{B}}[v]\right)^t \underset{\mathcal{B}}{A}\,{}_{\mathcal{B}}[w]$$

, wo $\underset{\mathcal{B}}{A}$ ist die Matrix der Bilinearform b in der Basis $\mathcal{B}$.

Sei $\tilde{A}$ die Matrix von b bez. $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann

$$b(v,w) = \left({}_{\tilde{\mathcal{B}}}[v]\right)^t \tilde{A}\,{}_{\tilde{\mathcal{B}}}[w] = \left({}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]\right)^t \tilde{A}\,{}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[w] =$$

$$= \left({}_{\mathcal{B}}[v]\right)^t \cdot C^t \tilde{A}\, C \cdot {}_{\mathcal{B}}[w], \text{ wo } C = {}_{\tilde{\mathcal{B}}}C_{\mathcal{B}}.$$

Also $\boxed{A = \underset{\mathcal{B}}{A} = C^t \tilde{A}\, C}$. ← Die Übergangsformel für Bilinearformen.

<u>Beispiel.</u> $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $b(v,w) = v^t w$,

$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{e}_2 \right\}$. ${}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

die Elemeten von $\tilde{\mathcal{B}}$ bez. $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} (u_1 \cdot u_1) & (u_1 \cdot \bar{e}_2) \\ (\bar{e}_2 \cdot u_1) & (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{A} = \left({}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}}\right)^t A\, {}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Def. 2.3.</u> Zwei Bilinearformen b_1, b_2 auf $V \cong \mathbb{K}^n$ heißen <u>äquivalent</u>, falls $\exists\, C \in GL_n(\mathbb{K})$, s.d. $A_2 = C^t A_1 C$, wo A_1, A_2 die Matrizen von b_1, b_2 bez. einer Basis $\mathcal{B}$ sind.

Kor. der Übergangformel. Eine Bilinearform b_A ist genau dann zu dem Skalarprodukt $(v\cdot w)=v^t w$ äquivalent, wenn $A=C^tC$ mit $C\in GL_n(\mathbb{K})$.
Merken, $(C^tC)^t=C^tC$ ist symmetrisch.

Def. 2.4. Eine Matrix $A\in M_n(\mathbb{R})$ heißt positiv definit, falls $v^tAv>0$ $\forall v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq\bar{0}$.

Satz 2.5. Für $A\in M_n(\mathbb{R})$ sind äquivalent:

(i) A repräsentiert bez. einer geeigneten Basis von $\mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt $(v\cdot w)=v^tw$.

(ii) $A=C^tC$ mit $C\in GL_n(\mathbb{R})$.

(iii) A ist symmetrisch und positiv definit.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii) $A=({}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}})^t E_n\, {}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}}$, wenn A bez. $\tilde{\mathcal{B}}$ das Skalarprodukt $(v\cdot w)=v^tw$ repräsentiert.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) C^tC ist symmetrisch und $v^tC^tCv=(Cv)^tCv>0$, falls $Cv\neq\bar{0}$.
Weil C invertierbar ist, haben wir
$$Cv=\bar{0}\Leftrightarrow v=\bar{0}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) [Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren] Wir suchen eine orthonormale Basis für $b=b_A$.

Induetion über n. ③

Falls $n=1$, sei $A=a$. Dann $1^t A 1 = a > 0$ und $\{v_1\}$ mit $v_1 = 1/\sqrt{a}$ ist die gesuchte Basis.

Sei $n \geq 2$. Nehmen ein $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \overline{0}$.

Dann $v^t A v = d > 0$. Setzen $v_n = v/\sqrt{d}$.

Nun $b_A(v_n, v_n) = 1$.

Weiter betrachten wir den Unterraum $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^n, \ u^t A v_n = 0\}.$$

$v_n \notin \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \neq \mathbb{R}^n$. Die Bedingung $u^t(Av_n) = 0$ ist eine lineare Gleichung.

Also $\dim \mathcal{U} = n-1$ und $\mathbb{R}^n = \mathcal{U} \oplus \mathbb{R} v_n$.

Kann man direkt sehen, $\forall v \in \mathbb{R}^n$ haben wir

$$v = b(v, v_n) v_n + u, \text{ wo } u \in \mathcal{U}.$$

Weil A symmetrisch ist, gilt es auch $v_n^t A u = 0$ für alle $u \in \mathcal{U}$.

Die Einschränkung von b auf $\mathcal{U}$ ist symmetrisch und positiv definit, folglich ist durch eine symmetrische positiv definite Matrix repräsentiert. Diese Matrix besitzt eine orthonormale Basis $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ in $\mathcal{U}$ (Annahme). $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ ist die gesuchte Basis, hier ist b durch E_n gegeben. $\boxtimes$

Gram-Schmidt kann man sich auch so vorstellen.

Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

Setzen $w_1 = \frac{v_1}{\sqrt{b_A(v_1, v_1)}}$. Dann haben wir eine Basis $\{w_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Weiter,

$\tilde{w}_2 = v_2 - b_A(v_2, w_1) w_1$. Hier $\tilde{w}_2 \perp_A w_1$, weil w_1 normiert ist.

Dann normieren wir $\tilde{w}_2$, $w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\sqrt{b_A(\tilde{w}_2, \tilde{w}_2)}}$.

Von $\{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ übergehen wir zu $\tilde{w}_k = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} b_A(v_{k+1}, w_i) w_i$ und normieren den Vektor $\tilde{w}_k$.

<u>Beispiel</u>. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, symmetrisch.

Für $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v^t A v = (a\ b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$

$= (a+b,\ a+2b) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + ab + ab + 2b^2 =$

$= (a+b)^2 + b^2 > 0$, falls $v \neq \bar{0}$. $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$

$w_1 = \bar{e}_1$, schon normiert.

$\tilde{w}_2 = \bar{e}_2 - \bar{e}_1$, $b_A(\tilde{w}_2, \tilde{w}_2) = 1$, so gut.

Orthormalbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Wann ist eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ positiv definit? (4)

Sei $A = A^t$, sinnvolle Annahme.

Falls $n=1$, wenn $a>0$.

Falls $n=2$, überlegen wir das.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$, also $v^t A v =$

$= at^2 + 2bts + ds^2$.

Wenn A positivdefinit ist, dann $a>0, d>0$.

Sei $a>0$. Dann $v^t A v = (\sqrt{a}\, t + \frac{b}{\sqrt{a}} s)^2 + (d - \frac{b^2}{a}) s^2$.

A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $a>0$, $ad - b^2 \overset{?}{=} \det(A) > 0$.

Die Antwort für $n>2$ geben wir später.

Um das Kriterium zu beweisen, benötigen wir <u>Indifinite Bilinearformen</u>.

<u>Beispiel</u> (Lorentzform) $V = \mathbb{R}^4$,

$$b\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_4 \end{pmatrix}\right) = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 - c^2 \alpha_4 \gamma_4, \quad c>0.$$

Eigentlich steht c für die Lichtgeschwindigkeit.

Die darstellende Matrix von b ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$.

Merken, $b(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$,

$b(\bar{e}_4, \bar{e}_4) = -c^2 < 0$, $b(c\bar{e}_1 + \bar{e}_4, c\bar{e}_1 + \bar{e}_4) = 0$,

der Vector $c\bar{e}_1 + \bar{e}_4$ ist bez. b <u>isotrop</u>.

<u>Lemma 2.6.</u> Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Dann $\exists v \in \mathbb{R}^n$, s.d. $b(v,v) \neq 0$.

Bew. Weil $b \neq 0$, $\exists\, u, w \in \mathbb{R}^n$ mit $b(u,w) \neq 0$. Falls $b(u,u) \neq 0$ oder $b(w,w) \neq 0$, sind wir fertig. Sonst setzen wir $v = u + w$,

$$b(v,v) = b(u,u) + b(w,w) + b(u,w) + b(w,u) =$$
$$= 2\, b(u,w) \neq 0. \qquad \boxtimes$$

Def. 2.7. Sei b eine Bilinearform auf $V = \mathbb{K}^n$, $W \leq V$ ein Unterraum. Das orthogonale Komplement von W in V bez. b ist der Unterraum

$$W_b^{\perp} = \{ v \in V \mid b(v,w) = 0 \ \forall w \in W \}.$$

Es kann passieren, dass $W \cap W_b^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$!

Lemma 2.8. Ist es $b(v,v) \neq 0$ und $W = \langle v \rangle$, dann $V = W \oplus W_b^{\perp}$.

Bew. Klar, $v \notin W_b^{\perp}$, weil $b(v,v) \neq 0$.
Weiter ist $W_b^{\perp}$ ein Unterraum von V, der durch eine lineare Gleichung $b(x,v) = 0$ gegeben ist, also $\dim W_b^{\perp} \geq \dim V - 1$. Oder direkt sehen, dass $u - \frac{b(u,v)}{b(v,v)} v \in W_b^{\perp}$ $\forall u \in V$. $\boxtimes$

Def. 2.9. Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{K}^n$.
Der Unterraum $V_b^{\perp} = \{ v \in V \mid b(v,w) = 0 \ \forall w \in V \}$ heißt das Radikal von b. Die Form b heißt nichtentartet, falls $V_b^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

Lemma 2.10. Sei $b = b_A$ mit $A = A^t$. Dann
(i) das Radikal von b ist gleich $\operatorname{Ker} A = \{v \in V \mid Av = \bar{0}\}$.
(ii) b ist nichtentartet $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Bew. Nach der Definition von b_A haben wir
$$b(v,w) = v^t A w \quad \forall v,w \in V.$$
Merken $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)\bar{e}_i = \gamma_i$, also, falls $v^t A \bar{e}_i = \bar{0}$ für jede i, dann $v^t A = \bar{0}$.
Wenn $v^t A = \bar{0}$, dann sicher $v^t A w = 0 \ \forall w$.
Nun $v^t A = (A^t v)^t = (Av)^t$. Es folgt, dass das Radikal von b gleich $\operatorname{Ker} A$ ist.
Zu (ii). Aus LAI: $\operatorname{Ker} A = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \det A \neq 0$. ☒

Satz 2.11. (i) Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $V \cong \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, s.d. $b(v_i, v_j) = 0$ für alle $i \neq j$ (Orthogonalität) und $b(v_i, v_i) \in \{1, 0, -1\} \ \forall i$.
(ii) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, dann $\exists C \in GL_n(\mathbb{R})$, s.d. CAC^t eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge nur die Werte $-1, 1$ ode 0 annehmen.

Bew. (ii) folgt aus (i), wenn wir die Form b_A betrachten. Nun zu (i).

Falls $b=0$, gibt es nichts zu zeigen.
Sonst $\exists\, v=\tilde{v}_n \in V$, s.d. $b(v,v)\neq 0$ (Lemma 2.6.).
Entweder $b(v,v)>0$ oder $b(v,v)<0$.
Setzen $v_n = \dfrac{v}{\sqrt{|b(v,v)|}}$. Nun $b(v_n,v_n)\in\{1,-1\}$.

Nach dem Lemma 2.8., $V=\langle v_n\rangle \oplus \langle v_n\rangle_b^{\perp}$.
Die Einschränkung von b auf $\langle v_n\rangle_b^{\perp}=W$ ist wieder symmetrisch, $\dim W = n-1 \underset{\text{Induction}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow$ W hat eine gesuchte Basis $\{v_1,\dots,v_{n-1}\}$. $\boxtimes$

Die Matrix CAC^t hat die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} E_p & & 0 \\ 0 & -E_q & \\ & & 0_s \end{pmatrix}.$$

Man nennt das Zahlenpaar (p,q) die <u>Signatur</u> von b_A.

<u>Satz 2.12.</u> Die Zahlen p,q,s wie oben sind durch die Bilinearform $b=b_A$ eindeutig festgelegt. Das heißt, sie hängen nicht von der Wahl der Orthogonalbasis ab.

<u>Bew.</u> Merken, $s=n-(p+q)=\dim \mathrm{Ker}(CAC^t) =$
$= \dim(\text{Radikal von } b)$. Jetzt reicht es zu zeigen, dass p eindeutig bestimmt ist.
Angenommen: $\{v_1',\dots,v_n'\}$ ist eine weitere orthonormale Basis, wo $p'<p$. Wir beweisen, dass die Vektoren $v_1,\dots,v_p,v'_{p'+1},\dots,v_n'$ linear

unabhängig sind.

Sei $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = \gamma_{p'+1} v'_{p'+1} + \ldots + \gamma_n v'_n$ eine nicht triviale Abhängigkeit. Setzen $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i$.

Eine Seite: $b(u,u) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2\, b(v_i, v_i) = \sum \alpha_i^2 \geq 0$.

Andere Seite $u = \sum_{j=p'+1}^{n} \gamma_j v'_j$ und $b(u,u) = \sum_{j=p'+1}^{q'} \gamma_j^2\, b(v'_j, v'_j) =$

$$= -\sum_{j=p'+1}^{q} \gamma_j^2 \leq 0.$$ Es folgt $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \sum_{j=p'+1}^{q'} \gamma_j^2 = 0$.

Jede α_i ist Null, $\gamma_j = 0$, falls $p'+1 \leq j \leq q'$.

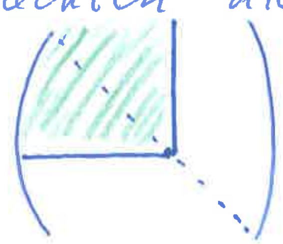
Das heißt, $\gamma_{p'+q'+1} v'_{p'+q'+1} + \ldots + \gamma_n v'_n = \bar{0}$.

Weil $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ eine Basis ist, sind alle γ_j, $j \geq p'+q'+1$ gleich Null. Die Abhängigkeit war doch trivial, die Vektoren sind linear unabhängig und damit

$$p + (n - p') \leq n \implies n + (p - p') \leq n.$$

Widerspruch! Also $p' \geq p$ und ebenfalls $p \geq p'$. Also $p = p'$, $q = n - p - s = n - p' - s' = q'$. $\boxtimes$

<u>21.04.</u> Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $1 \leq i \leq n$. Wir betrachten die Teilmatrix von A, wo $t, s \leq i$ für a_{ts}. Die neue Matrix $A_{[i]}$ liegt in $M_i(\mathbb{K})$

i 

Sei D_i die Determinante diese Teilmatrix.

Die Zahlen $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n = \det(A)$ heißen <u>Hauptminoren</u> von A, $D_i = \det A_{[i]}$.

Merken, wenn $A = \begin{pmatrix} E_p & & 0 \\ & -E_q & \\ 0 & & 0_s \end{pmatrix}$ mit $p+q+s=n$,

dann $D_1 = \dots = D_p = 1 > 0$ (wir sind über $\mathbb{R}$), aber $D_{p+1} = -1 < 0$, $D_{p+q+1} = 0$, falls $s \geq 1$.

$D_1 = a_{11}$, immer. Wenn $n=2$, dann ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ positiv definit genau dann, wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$ [Vorlesung am 15.04.].

Anders gesagt, A positiv definit $\underset{n=2,\, A=A^t}{\Longleftrightarrow}$ $D_1, D_2 > 0$.

<u>Satz 2.13.</u> Eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n > 0.$$

<u>Bew.</u> Seien $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ die übliche Basis, $\bar{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i$, $b = b_A$ die Bilinearform von A, $b(v,w) = v^t A w$. Setzen $V_i := \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i \rangle$, V_i ist die lineare Hülle der ersten i Basisvektoren.

Sei $b_{[i]}$ die Einschränkung von b auf V_i.

$b_{[i]}$ ist die Bilinearform auf V_i, die durch die i-te Teilmatrix von A gegeben ist.

Es gilt $b_{[i]} = b_{A[i]}$.

(⟹) Sei A positiv definit, $v^t A v > 0 \ \forall v \neq \bar{0}$. 7

Jede Form $b_{[i]}$ ist auch positiv definit.

Nehmen wir eine i.

Nach dem Satz 2.5, $\exists C \in GL_i(\mathbb{R})$, s.d.

$$A_{[i]} = C^t C \quad \text{Damit}$$

$$D_i = \det A_{[i]} = \det(C^t C) = \det(C^t)\det(C) =$$
$$= \det(C)\det(C) = \det(C)^2 > 0.$$

(Die Eigenschaften $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^t) = \det(A)$ sind aus AlG I-Vorlesung bekannt.)

(⟸) Gegeben: $D_i > 0 \ \forall i,\ 1 \leq i \leq n$.

Induktion über n. Falls $n = 1$, $A = (a_{11})$ ist positiv definit. Wir wissen sogar, dass die Aussage für $n = 2$ stimmt.

Sei $n \geq 3$. Nach Induktionsannahme ist $A_{[n-1]}$ positiv definit. $A_{[n-1]} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Idee: wäre A nicht positiv definit, so hätte sie Signatur $(n-1, 1)$ und dann wäre es $\det(A) < 0$, was nicht stimmt.

Ein vollständiges Argument: der Unterraum V_{n-1} besitzt eine Basis $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, s.d.

$$b(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{(Wieder Satz 2.5.)}$$

V_{n-1} ist ein echter Unterraum, $V_{n-1} \neq V$, so $\exists u \in V$, $u \notin V_{n-1}$. Wir orthogonalisieren den Vektor u, indem setzen

$$v = u - b(u, v_1)v_1 - b(u, v_2)v_2 - \dots - b(u, v_{n-1})v_{n-1}.$$

Nun $b(v, v_i) = b(u, v_i) - b(u, v_i)b(v_i, v_i) = 0$ für jede i, $1 \le i \le n-1$. Weiter, $v \notin V_{n-1}$, damit ist $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$ eine Basis von V.

Hier ist b durch $\begin{pmatrix} E_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \dots 0 & c \end{pmatrix}$ gegeben.

Sei P die Übergangsmatrix.

Weil $D_n = \det(A) = \det(P^t) \cdot c \cdot \det(P)$, ist c positiv und b_A positiv definit. $\boxtimes$

Sie können sich überlegen, wie findet man dis Signatur (p, q), wenn die Hauptminoren $D_1, \dots, D_n$ gegeben sind und $D_n \neq 0$.

Beispiele: (1) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist nicht positiv definit, $D_2 = 1 - 4 = -3 < 0$.

(2) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, $D_1 = 1$, $D_2 = 5 - 1 = 4$, zu Determinante: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow D_3 = 4$.

(Die erste Zeile ist von der 2-ten Zeile und von der 3-ten mit $\times 3$ abgezogen.)

(3) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ ist nicht ⑧

positiv definit, $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} < 0$.

Welche Signatur haben wir hier?

Der Körper $\mathbb{C}$, als Vektorraum $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$,

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. Die Addition ist wie in $\mathbb{R}^2$.

Multiplikation: $i^2 = -1$, $(a+bi)(c+di) =$

$= ac - bd + (ad+bc)i$.

Über $\mathbb{R}$ definieren wir die Länge eines Vektors v als $|v| = \sqrt{v^t v}$.

Über $\mathbb{C}$ können wir Schwierigkeiten kriegen.

z.B. $v^t v = 0$, falls $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Für $z = a+bi$ ist $\bar{z} = a - bi$, die komplexe Konjugierte Zahl von z.

Für $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ist $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$.

Merken, $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 > 0$, falls $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

So ist die Länge in $\mathbb{C}^n$: $|v|^2 = \bar{v}^t \cdot v =$

$= |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, wo $|a+bi|^2 = a^2 + b^2$.

$\bar{v}^t \cdot w$ ist das hermitesche Skalarprodukt.

Def. 2.14. Eine hermitesche Form auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung
$$H: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (v,w) \longmapsto H(v,w)$$
s.d.

$H(v, c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 H(v, w_1) + c_2 H(v, w_2)$;
(Linearität in der zweiten Variablen)

$H(c_1 v_1 + c_2 v_2, w) = \bar{c}_1 H(v_1, w) + \bar{c}_2 H(v_2, w)$;
(Konjugierte Linearität in der ersten)

$H(v,w) = \overline{H(w,v)}$ (Hermitesche Symmetrie).

$\bar{v}^t . w$ ist eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$.

Die Matrix einer hermiteschen Form H ist analog zur Matrix einer Bilinearform definiert.
$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = H(e_i, e_j).$$
Nun schreiben wir die Basisvektoren e_i.

Die Haupteigenschaft: $H_A(v,w) = \bar{v}^t A w$.

Die Matrix A ist nicht beliebig, die hermitesche Symmetrie führt zu
$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \text{ also } \bar{A}^t = A.$$
Eine solche Matrix heißt hermitesch.

Beispiele $n=1$: $a_{11} = \overline{a_{11}} \Rightarrow a_{11} \in \mathbb{R}$.

$n=2$: $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$, $\overline{a_{12}} = a_{21}$, wie z.B.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1-2i \\ 1+2i & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bem. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann hermitesch, wenn sie symmetrisch ist, $A = A^t$.

Übergangsformel im hermiteschen Fall:

$\mathcal{B} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}}$ die Matrix der Vektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$ in der Basis $\mathcal{B}$, $A, \tilde{A}$ die darstellende Matrizen von H. Dann gilt

$$\tilde{A} = \bar{C}^t A C, \text{ wo } C = {}_{\mathcal{B}}C_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Der Beweis geht genau so, wie für Bilinearformen. Das Analog einer orthogonalen Matrix ist für hermitesche Formen eine unitäre Matrix.

Def. 2.15. Eine Matrix $C \in M_n(\mathbb{C})$ heißt unitär, falls $\bar{C}^t C = E_n$, also falls $\overline{(Cv)}^t \cdot Cw = \bar{v}^t \cdot w$ $\forall v, w \in \mathbb{C}^n$. (Das hermitesche Skalarprodukt ändert sich nicht.)

Bem. Eine $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann unitär, wenn sie orthogonal ist, $A^t A = E_n$.

Ein Beispiel. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ist unitär. Hier $\bar{A}^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\bar{A}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lemma 2.16. Die unitären Matrizen bilden eine Gruppe $\mathcal{U}_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^t A = E_n\}$

(Durch $\mathcal{U}_n$ bezeichnet man mehrere Gruppen.)

Bew. Seien $A, B \in \mathcal{U}_n$. Dann

$$\overline{(AB)}^t AB = (\bar{A}\bar{B})^t AB \overset{\text{LAI}}{=} \bar{B}^t \bar{A}^t AB = \bar{B}^t B = E_n.$$

(Für die komplexe Konjugation gilt $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$)

Die Teilmenge $\mathcal{U}_n$ ist bez. „$\cdot$" abgeschlossen.

E_n ist sicher unitär.

$\mathcal{U}_n \subseteq M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow$ Multiplikation ist assoziativ.

Weil $\bar{A}^t A = E_n$ haben wir $A^{-1} = \bar{A}^t$. Nun

$$\overline{\left(\bar{A}^t\right)}^t \cdot \bar{A}^t = \left(A^t\right)^t \bar{A}^t = A\bar{A}^t = AA^{-1} = E_n. \text{ Also } A^{-1} \in \mathcal{U}_n. \blacksquare$$

$\mathcal{U}_n$ ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$.

Aus $1 = \det E_n = \det(\bar{A}^t A) = \overline{\det(A)}\det(A)$, folgt dass $\det(A) = a + bi$ mit $a^2 + b^2 = 1$ $\forall A \in \mathcal{U}_n$.

Orthogonalität von Vektoren lässt sich übertragen:

$v \perp_H w \Leftrightarrow H(v, w) = 0$ und ist wieder symmetrisch:

$v \perp_H w \Rightarrow H(w, v) = \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow w \perp_H v$.

$H(w,v)$ muss nicht in $\mathbb{R}$ liegen. Aber $H(v,v) = \overline{H(v,v)}$ liegt in $\mathbb{R}$. H ist positiv definit, falls $\forall v \in \mathbb{C}^n$ gilt: $H(v,v) > 0$.

Ist eine hermitesche Form positiv definit, so finden wir ein v mit $H(v,v) = 1$ und betrachten weiter die Zerlegung $\mathbb{C}^n = V = \langle v \rangle \oplus v_H^{\perp}$.

Am Ende kriegen wir eine Orthormalbasis: $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $H(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Damit gezeigt (oder fast gezeigt)

Satz 2.17 Eine hermitesche Form H auf $V = \mathbb{C}^n$ ist genau dann positiv definit, wenn sie eine Orthonorbasis besitzt.

Sei nun $V = \mathbb{C}^n$ ein Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Form. Nehmen wir die kanonische $\langle v, w\rangle = \bar{v}^t \cdot w$.

Wie können wir die hermiteschen Formen oder besser ihre Matrizen verstehen?

$$A = \bar{A}^t \Leftrightarrow \bar{v}^t A w = \bar{v}^t \bar{A}^t w \quad \forall v, w \in V.$$

Also $A = \bar{A}^t \Leftrightarrow \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \ \forall v, w \in V$.

Wir können solche Matrizen oder solche $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $f: V \to V$ betrachten. Für eine Abbildung ist die Eigenschaft

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Die unitäre Abbildungen sind solche, dass

$$\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Satz 2.18. (Spektralsatz.)

(1a) Sei $f: V \to V$ eine hermitesche lineare Abbildung. Dann gibs es eine Orthormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f zu reellen Eigenwerten besteht. (Alle Eigenwerte von f sind reell.)

(1b) Matrixfassung: Sei $M = \bar{M}^t$, $M \in M_n(\mathbb{C})$. Dann $\exists\, C \in U_n$, s.d. $\bar{C}^t M C$ eine reelle Diagonalmatrix ist.

Beweis.

Zu (a). Wir benutzen die Tatsach, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Den Satz beweist man in der Algebra II Vorlesung, benutzt aber oft früher.

Sei $\det(xE_n - \mathcal{U}) = x^n - tr(\mathcal{U})x^{n-1} + \gamma_{n-2}x^{n-2} + \ldots + (-1)^n \det \mathcal{U}$ das charakteristische Polynom $\chi_{\mathcal{U}}(x)$ von $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ die Matrix von f. (Kann man auch $\chi_f(x) = \chi_{\mathcal{U}}(x)$ direkt betrachten.) Das Polynom hat komplexe Koeffizienten und hat eine Nullstelle, $\lambda \in \mathbb{C}$. $\chi_f(\lambda) = 0 \underset{LA\,I}{\Longleftrightarrow} \exists v \in \mathbb{C}^n, v \neq \bar{0}: f(v) = \lambda v$.

Wir finden einen Eigenvektor von f. Wir normieren ihn und bekommen $v_1 \in V$ mit
$\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ und $f(v_1) = \lambda v_1$.

Nun $\langle f(v_1), v_1 \rangle = \langle v_1, f(v_1) \rangle$, weil f hermitesch ist und $\langle f(v_1), v_1 \rangle = \bar{\lambda}$, $\langle v_1, f(v_1) \rangle = \lambda$. D.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sei $W = v_1^{\perp} = \{ w \in V \mid \langle v_1, w \rangle = 0 \}$. Wegen $\langle v_1, f(w) \rangle = \langle f(v_1), w \rangle = \bar{\lambda} \langle v_1, w \rangle$, ist der Unterraum W f-stabil, wenn $w \in W$, dann auch $f(w) \in W$. Die Matrix von f sieht so aus
$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & f|_W & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$
Die Basis ist $\{v_1, w_2, \ldots w_n\}$ mit $w_i \in W$. Die Einschränkung $f|_W$ ist wieder hermitesch, damit (Induktion über n), existiert in W eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Induction zeigt auch, dass alle Eigenwerte von $\mathfrak{b}$ reell sind. Sei $C = {}_B C_{\tilde{B}}$ die Übergansmatrix

(11)

(6) Merken, $C^{-1} \mathcal{M} C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Die neue Basis ist orthonormal, wie die ursprungliche, und C ist unitär, $\bar{C}^t C = E_n$, $\bar{C}^t = C^{-1}$. Obwohl wir kojugieren, ändert sich $\mathcal{M}$ als die darstellende Matrix einer hermiteschen Form, $\bar{C}^t \mathcal{M} C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\boxtimes$

<u>Kor.</u> Eine hermitesche Matrix ist immer diagonalisierbar.

<u>Beispiel.</u> $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_{\mathcal{M}}(X) = (X-2)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$. Die Eigenwerte sind 1 und 3.

Die Gleichungen für die Eigenvektoren

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha + i\beta = 0$ | $\begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha - i\beta = 0$.

$v = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$, zum Beispiel. $\langle v, v \rangle = 1 + 1 = 2$.

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, -i\gamma - \delta = 0 \right\} = v_1^{\perp}$.

$W = \langle w \rangle$, wo $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und w ist ein Eigenvektor zu dem Eigenwert 3. $\langle w, w \rangle = 2$, so ist die gesuchte Basis $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ $C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$,

$\bar{C}^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = C^{-1}$. $C^{-1} \mathcal{M} C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

28.04. Auf $\mathbb{C}^n$ haben wir das kanonische hermitesche Produkt: $\bar{v}^t \cdot w = \langle v, w \rangle$.
Falls H mit der Matrix M eine hermitesche Form ist, dann $M = \bar{M}^t$ und $\langle Mv, w \rangle = \langle v, Mw \rangle$.
Spektralsatz: $\exists C \in GL_n(\mathbb{C})$, s.d. $\bar{C}^t C = E_n$ und $\bar{C}^t M C$ eine reelle Diagonalmatrix ist.
Wir behalten das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$, sein Matrix bleibt E_n, und gleichzeitig diagonalisieren die Form, sowie die lineare Abbildung $f: V \to V$ mit $f(v) = Mv$, weil $\bar{C}^t = C^{-1}$.
Die Matrix M ist diagonalisierbar, alle Eigenwerte sind reell und einige normierte Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis.
Bem. Die Eigenwerte dürfen gleich sein.
$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine hermitesche Matrix.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als Teilkörper, $1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{R}$ ist bez. „+", „·" und $a \mapsto a^{-1}$ abgeschlossen.
$M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ als Unterraum (über $\mathbb{R}$).
Falls $A \in M_n(\mathbb{R})$ symmetrisch ist, $A = A^t$, dann ist sie hermitesch, $\bar{A}^t = A^t = A$.
Nach dem Satz 2.18. sind alle Eigenwerte von A reell und A ist in $M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar.
Sei $P \in M_n(\mathbb{R})$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von P mit dem Eigenvektor $v_\lambda \in \mathbb{C}^n$.

$\lambda \in \mathbb{R} \Leftarrow v_\lambda \in \mathbb{R}^n$,

Ein Blick in der Analysis

Warum hat eine symmetrische reelle Matrix einen reellen Eigenwert?
Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir das Scalaproduct $(v \cdot w)$.
Nun betrachten wir die Menge $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| = 1\}$,
$|v|^2 = (v \cdot v) = v^t v$. S^{n-1} ist eine kompakte Teilmenge. Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$, gibt uns eine Function F_A auf S^{n-1}:
$F_A(v) = v^t A v$, die stetig (kontinuierlich) ist. So ist sie begrenzt und nimmt den maximalen Wert, L. Wo $F_A(v_0) = L$, haben wir $dF_A(v_0) = 0$ auf $T_{v_0} S^{n-1}$ „Differenzial ist gleich Null auf S^{n-1}". D.h. $w^t A v_0 + v_0^t A w = 0$ für alle w mit $(v_0 \cdot w) = 0$. Also $2 v_0^t A w = 0$; Wir haben
$((Av_0) \cdot w) = 0$ $\forall w$, s.d. $(v_0 \cdot w) = 0$.
$(Av_0)^\perp \supseteq v_0^\perp \Rightarrow Av_0$ liegt in $\{r v_0 \mid r \in \mathbb{R}\}$.
Eigentlich $Av_0 = L v_0$.

Satz 2.19. (Spektralsatz, reeller Fall).
(a) Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit $(f(v) \cdot w) = v \cdot f(w)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von f besteht.
(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$. Dann $\exists C \in O_n(\mathbb{R})$, s.d. $C^t A C$ eine Diagonalmatrix ist.

Bew. (wie für den Satz 2.18.)

Sei A die Matrix von f. Dann $(Av)^t w = v^t (Aw)$ $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ und $A = A^t$. Die kann man als eine hermitesche Matrix betrachten, $A \in M_n(\mathbb{C})$, und die hat einen reellen Eigenwert λ (Satz 2.18 oder direkt aus Analysis). Der Eigenvektor $v_\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n = \langle v_\lambda \rangle \oplus v_\lambda^\perp$ und $v_\lambda^\perp$ ist f-stabil. Mit Induktion über n und immer normieren, $v_\lambda \longmapsto v_1 = \frac{v_\lambda}{|v_\lambda|}$, kriegen wir eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Zu (b). Jede $A = A^t$ definiert eine $f = f_A$ mit $(f(v) \cdot w) = (v \cdot f(w))$. Also $\exists C \in O_n$, s.d.

$$C^{-1} A C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ wo } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Endlich merken, $C \in O_n \Leftrightarrow C^t C = E_n \Leftrightarrow C^t = C^{-1}$. ∎

<u>Beispiel</u> $n = 2$. $A = A^t \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

$\chi_A(x) = (x-a)(x-d) - b^2$ hat reelle Nullstelle.

Nehmen wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Dann $\chi_A(x) = x^2 + x - 6 =$
$= (x+3)(x-2)$. Nehmen $\lambda = -3$, dann $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_\lambda = \bar{0}$
und $v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, z.B., $|v_\lambda| = \sqrt{5}$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$v_\lambda^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Merken $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = C^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Schiefsymmetrische Bilinearformen

In einem Körper $\mathbb{K}$ darf es $2 = 1+1 = 0$ gelten.
$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ist ein Körper, wo $1+1=0$.
(Rechnen modulo 2.)

Wenn $2=0$, dann $1=-1$ und die Bedingung
$b(v,w) = -b(w,v)$ lautet $b(v,w) = b(w,v)$.

__Def. 2.20.__ Eine Bilinearform b auf $V=\mathbb{K}^n$ heißt schiefsymmetrisch, falls
$$b(v,v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

__Bem.__ $0 = b(v+w, v+w) = b(v,v) + b(v,w) + b(w,v) + b(w,w) = b(v,w) + b(w,v)$, falls b schiefsymmetrisch ist.

Wenn $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$, dann $b(v,w) = -b(w,v) \Rightarrow$
$\Rightarrow b(v,v) = -b(v,v) = 0$.

Die darstellende Matrix einer schiefsymmetrische Form erfüllt: $A = -A^t$, $a_{ii} = 0 \ \forall i$.

Wir sagen, dass b nichtentartet ist, falls
$\{w \in V \mid b(w,v) = 0 \ \forall v \in V\} = \{\bar{0}\}$, $V_b^\perp = \{\bar{0}\}$.

$b = b_A$ ist nichtentartet $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

__Satz 2.21.__ (a) Sei b eine nichtentartete schiefsymmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{K}^n$, dann ist $n = 2m$ gerade und es gibt eine Basis $\{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m\}$ von V, s.d.

$b(v_i, v_j) = b(w_i, w_j) = 0 \ \forall i, j;$

$b(v_i, w_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(b) [Matrixfassung] Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$, s.d. $A = -A^t$, $a_{ii} = 0 \ \forall i$ und $\det(A) \neq 0$. Dann ist $n = 2m$ gerade und $\exists C \in GL_n(\mathbb{K})$ mit

$$C^t A C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & -1 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0 \end{array}\right) =: J_m .$$

<u>Bew.</u> (b) folgt direkt aus (a). Nun zu (a).

$b \neq 0 \Rightarrow \exists v, w \in V$, s.d. $b(v, w) \neq 0$.

Setzen $v_1 = v$, $w_1 = \frac{w}{b(v,w)}$ und $U_1 = \langle v_1, w_1 \rangle$.
(lineare Hülle)

Jeder Vektor $u \in V$ ist eine Linearkombination:

$u = b(u, w_1) v_1 + b(v_1, u) w_1 + u_0$, wo $u_0 \in (U_1)^{\perp}_{b}$.

Überprüfen: $b(v_1, u_0) = b(v_1, u) - b(v_1, u) b(v_1, w_1) = 0,$
$b(w_1, u_0) = b(w_1, u) - b(u, w_1) b(w_1, v_1) = 0.$

D.h. $V = U_1 \oplus (U_1)^{\perp}_{b}$ und die Einschränkung von b auf $(U_1)^{\perp}_{b}$ ist eine nichtentartete schiefsymmetrische Form. Merken, $\dim (U_1)^{\perp}_{b} = n - 2$. Nach Induktion über n ist n gerade und wir konstruieren eine gewünschte Basis in $(U_1)^{\perp}_{b}$. $\boxed{\#}$

Hier spricht man von <u>symplektischen</u> Räumen, die alle isomorph sind.