10.12.13

5.3 Berechnung von Determinanten

kennen bereits Formeln 5.1.4 und 5.1.5 für $\det A$ (über Permutationen), weitere Möglichkeiten:

Entwicklung nach einer Zeile

Def.:

(1) Determinante M_{ij}, die aus

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht, heißt Minor des Elements a_{ij}

(2) $\boxed{A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}}$ heißt Adjunkte von a_{ij}

5.3.1 Satz

$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}}$ Entwicklung nach der i-ten Zeile, $i = 1, \dots, n$

Bew.:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi(i) = j}} \operatorname{sgn} \pi \, a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} = (*)$$

(durch Komposition mit $|j-i|$ Nachbarschaftsvertausch. kann solches π auf Permutation σ mit $\sigma(i) = i$ gebracht werden, $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{|j-i|} \operatorname{sgn} \pi$, $(-1)^{|i-j|} = (-1)^{i+j} \Longrightarrow \operatorname{sgn} \pi = (-1)^{i+j} \operatorname{sgn} \sigma$

16.12.13

wenn π alle Permutationen ~~von~~ aus S_n mit $\pi(i) = j$ durchläuft, so durchläuft σ alle Permutationen aus S_n mit $\sigma(i) = i$ ~~und $\sigma(i) = i$~~ und $\sigma(k) \neq j$ für $k \neq i$ und umgekehrt

$$\Longrightarrow (*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{(**) \begin{cases} \sigma \in S_n, \\ \sigma(i) = i \\ \sigma(k) \neq j, k \neq i \end{cases}} (-1)^{i+j} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\,\sigma(i-1)} a_{ij} a_{i+1\,\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \underbrace{\sum_{(**)} \operatorname{sgn} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i-1\,\sigma(i-1)} a_{i+1\,\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)}}_{M_{ij} \text{ (Determinante für den Minor)}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overbrace{(-1)^{i+j} M_{ij}}^{= A_{ij}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \square$$

Determinanten von Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix} \in M(n \times n), \text{ wobei } B \in M(m \times m),\ C \in M(p \times p) \text{ mit } m + p = n$$

5.3.2 Folgerung

$$\boxed{\det A = \det B * \det C}$$

Bew.: (vollst. Ind. nach m)

Entwicklung von A nach 1. Zeile:

$$\det A \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{m} b_{1j} A_{1j} = \sum_{j=1}^{m} b_{1j} (-1)^{1+j} M_{1j}$$

für $m=1$ folgt Beh. aus (*), Beh. gilt für alle Zahlen $\leq m-1$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} B_j & 0 \\ D_j & C \end{vmatrix} \quad \text{mit } B_j \in M((m-1) \times (m-1))$$

$$\xRightarrow{\text{Ind. vorr.}} M_{1j} = \det B_j * \det C$$

$$\xRightarrow{\text{oben einsetzen}} \det A = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_{1j} \underbrace{(-1)^{1+j} \underbrace{\det B_j}_{M_{1j}(B)}}_{A_{1j}(B)}}_{\det B} \det C$$

$$\Rightarrow \det A = \det B \det C \qquad \square$$

Determinanten von Dreiecksmatrizen

5.3.3 Folgerung

$$\left|\begin{array}{c|cccc} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Bew.:

5.3.2 induktiv (nach n) anwenden:

$$\det A \overset{\downarrow}{=} \underbrace{a_{11}}_{\det B} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det C} \overset{\text{Ind. vor.}}{=} a_{11} (a_{22} \cdots a_{nn}) \qquad \square$$

$\Longrightarrow$ Gaußscher Algorithmus zur Berechnung von Determinanten

Jeder Matrix $A \in M(n\times n)$ lässt sich durch elementare Zeilenoperationen und Vertauschungen von Spalten zur Dreiecksgestalt bringen, Determinante ändert dabei nur Vorzeichen $\Longrightarrow$

Determinante d. Ausgangsmatrix $= (-1)^{\text{Anzahl d. Vert.}} \cdot$ Det. d. Dreiecksmat.

5.4 Anwendung auf inverse Matrizen und lineare Gleichungssysteme

5.4.1 Satz

$$\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

, wobei A_{ij} Adjunkte von A

Bew.:

setze $\tilde{A} := (A_{ji})$ (Transponierte der Adjunkten Matrix)

g. z.: $\boxed{A\tilde{A} = \det A \cdot I}$

setzen $A\tilde{A} =: B$, d.h.

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \underbrace{\tilde{a}_{kj}}_{A_{jk}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

z.: $b_{ij} = \det A \, \delta_{ij}$

$i=j$: $b_{ii} \overset{\text{(oben)}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \overset{\text{Entw. von det A nach i-ten Zeile}}{=} \det A$

$i \neq j$:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i} & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1\,1} & a_{j-1\,2} & \dots & a_{j-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1\,1} & a_{j+1\,2} & \dots & a_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. von det A nach j-ten Zeile}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = b_{ij}$$

j-te Zeile von A durch i-te ersetzt, d.h. 2 gleiche Zeilen

$\Rightarrow b_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$\square$

Explizite Darstellung der Lösung eines quadrat. lin. Gleichungss.

5.4.2 Folgerung (Cramersche Regel)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ \dots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad \text{mit } \det \underbrace{(a_{ij})}_{A} \neq 0$$

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boxed{x_i = (\det A)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j} \quad , i = 1, \dots, n$$

für die Adjunkten A_{ij} von A

Bew.:

$A \bar{x} = \bar{b}$, $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existiert

Matrizengestalt des LGS

$A^{-1} \overset{(5.4.1)}{=} (\det A)^{-1} (A_{ji})$

$\Rightarrow \underbrace{A^{-1}(A\bar{x})}_{\bar{x}} = A^{-1}\bar{b} \Rightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{b} = (\det A)^{-1} (A_{ji}) \bar{b}$

d.h. $\bar{x} = (\det A)^{-1} (A_{ji}) \bar{b} \overset{\text{komp.weise}}{\Longrightarrow}$ Beh. $\square$

Bem.:

Cramersche Regel ist numerisch aufwendiger als Gaußscher Algorithmus.

6. Affine Räume

6.1 Axiome der affinen Geometrie

euklidische Schulgeometrie: synthetischer Zugang, Punkte, Geraden u. Ebenen und Inzidenzbeziehungen und Parallelenaxiom, aber geom. Vektorrechnung entstand Beziehung zur analytischen Geometrie (Rechnen mit Zahlen)

hier: letztere ist Ausgangspunkt

- affine Geometrie (Prinzip der Parallelität steht im Vordergrund)
- euklidische Geometrie (Abstand, Winkel, Orthogonalität)

$\mathcal{A}$: Punktraum

Def.: Ein Affine Geometrie ist ein Tripel $(\mathcal{A}, V, f)$,

wobei $\mathcal{A}, V$ Mengen sind, deren Elemente Punkte

bzw. Vektoren genannt werden, und

$f: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ (Schreibweise: $f(A,B) =: \overrightarrow{AB}$,

$A, B \in \mathcal{A}\}$, auch $(\mathcal{A}, V, \vec{\cdot}))$ und folgende Eigenschaften:

$(\mathcal{A}\ I)$ V ist ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$

$(\mathcal{A}\ II)$ $\forall (A \in \mathcal{A}, v \in V)\ \exists\ B \in \mathcal{A}$ und $\overrightarrow{AB} = v$

(Jeder Vektor lässt sich an ~~von~~ jedem Punkt abholen)

$(\mathcal{A}\ III)$ $A \neq B \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq \mathcal{O}$

$(\mathcal{A}\ IV)$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Dreiecksgleichung)

Bem.:

geordneten Punktepaare AB können als Repräsentanten von

$v = \overrightarrow{AB}$ aufgefasst werden

$(\mathcal{A}\ IV)$ liefert Zusammenhang zw. Vektoraddition und

Repräsentantenaddition

Eigenschaften

6.1.1 $\boxed{\overrightarrow{AA} = \mathcal{O}}$

Bew.: $(\mathcal{A}\ IV) \Rightarrow \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} \quad | - \overrightarrow{AA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA} + (\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AA}) = \mathcal{O}$ $\square$

17.12.13

6.1.2

Punkt B in $(\mathcal{A}\ II)$ eindeutig bestimmt

Bew.: falls $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'}$ $\overset{(\mathcal{A}\ IV)}{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} \quad | - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \mathcal{O} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}}_{\mathcal{O}} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \mathcal{O} \overset{(\mathcal{A}\ III)}{\Rightarrow} B = B'$ $\square$

Bem.: oft wird anstelle der Zuordnung $f(A,B) = \overrightarrow{AB}$

die Abb. $(A, v) \mapsto B$ (Schreibweise: $A + v := B$)

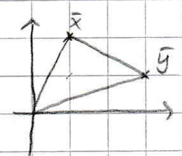
Beispiele:

1) synthetischer Zugang aus der Schulgeometrie lässt sich hier einordnen

2) Sei $A\bar{x} = \bar{b}$ beliebiges lin. Gleichungssystem mit n Unbekannten (wie in Kap. 3)

$\mathcal{A} := LM(A\bar{x} = \bar{b}) \ni \bar{x}$, $V := LM(A\bar{x} = \bar{0})$ $(= LM(\bar{0}))$
$\mathcal{A} \subseteq K^n$
ist ein Untervektorraum von K^n

$f(\underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\bar{x}}}, \underset{\mathcal{A}}{\underset{\cap}{\bar{y}}}) := \bar{y} - \bar{x}$ $(= \overrightarrow{\bar{x}\bar{y}})$



- Aufgabe: $(\mathcal{A}, V, f)$ Axiome $(\mathcal{A}\ \mathrm{I})$ - $(\mathcal{A}\ \mathrm{IV})$ überprüfen

3) V bel. Vektorraum über K

setzen $\mathcal{A} := V$, $f(\underset{V}{\underset{\cap}{u}}, \underset{V}{\underset{\cap}{v}}) := v - u$

- Aufgabe: $(\mathcal{A}\ \mathrm{I})$ - $(\mathcal{A}\ \mathrm{IV})$ überprüfen

Spezialfall: $V = K^n$, $\mathcal{A} = K^n$

Weitere Eigenschaften

6.1.3

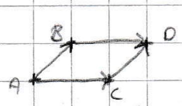
$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

Bew: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \overset{(6.1.1)}{=} 0$ $\quad | -\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ $\square$

6.1.4

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}}$



Bew: $\overrightarrow{AC} \overset{(\mathcal{A}\mathrm{IV})}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \overset{(6.1.3)}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$

$\overset{\text{Vorr.}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ $\square$

Punkte von $\mathcal{A}$ werden Ortsvektoren zugeordnet:

O: Origin $\quad O \in \mathcal{A}$ fester Bezugspunkt (Ursprung)

Definition

$\boxed{f_0(A) := \overrightarrow{OA}}$ heißt Ortsvektor des Punktes $A \in \mathcal{A}$

6.1.5 Lemma

$f_0 : \mathcal{A} \to V$ ist bijektiv

Bew.:

$(\mathcal{A}\,I) \Rightarrow \forall v \in V$ lässt sich an O abtragen, d.h. f_0 ist surjektiv

$(6.1.2) \Rightarrow$ Endpunkt A bei diesem Abtragen ist eindeutig festgelegt $\Rightarrow f_0$ ist injektiv $\square$

Punkte von $\mathcal{A}$ können demzufolge mit ihrem Ortsvektor identifiziert werden

6.2 Affine Unterräume (Ebenen)

Bez.: $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ beliebig

$V(\mathcal{M}) := \{\overrightarrow{AB} : A, B \in \mathcal{M}\}$
Von $\mathcal{M}$ erzeugte Vektormenge

Definition:

$\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ heißt affiner Unterraum (Ebene), falls

$(\mathcal{E}\,I)$ $V(\mathcal{E})$ lin. Unterraum von V ist,

$(\mathcal{E}\,II)$ Für alle $v \in V(\mathcal{E})$ und für alle $A \in \mathcal{E}$ ex. ein $B \in \mathcal{E}$ mit $\overrightarrow{AB} = v$

6.2.1 Lemma

$(\mathcal{E}, V(\mathcal{E}), fl_{\mathcal{E}\times\mathcal{E}})$ ist wieder eine affine Geometrie

Bew.:

$(\mathcal{E}\,I) \hat{=} (\mathcal{A}\,I)$, $(\mathcal{E}\,II) \hat{=} (\mathcal{A}\,II)$, $(\mathcal{A}\,III)$ & $(\mathcal{A}\,IV)$ gelten für Teilmengen, insbesondere für $\mathcal{E}$ $\square$

Definition

Ebene $\mathcal{E}$ heißt k-dimensional, falls $\dim V(\mathcal{E}) = k$

Definition

Zwei Ebenen $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ in $\mathcal{A}$ heißen parallel, falls $V(\mathcal{E}) \subset V(\mathcal{E}')$ oder $V(\mathcal{E}') \subset V(\mathcal{E})$

Erzeugungsprinzipien

6.2.2 Lemma (Durchschnitt von Ebenen)

Sei $\mathfrak{A}$ bel. System affiner Unterräume von $\mathcal{A}$,

$\mathcal{A}' := \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathfrak{A}} \mathcal{E} \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{A}'$ ist affiner Unterraum

•

$\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$

Definition

$\bigcap \{\mathcal{E} : \mathcal{E}$ affiner Unterraum, $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}\}$

(kleinster affiner Unterraum, der $\mathcal{M}$ enthält) heißt der von $\mathcal{M}$ erzeugte affine Unterraum

Sei $\mathcal{M} := \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathfrak{A}} \mathcal{E}$ (für bel. System $\mathfrak{A}$ von Ebenenen)

Definition

Der von $\mathcal{M}$ erzeugte affine Unterraum $\underset{(\text{„und“})}{=:} \bigvee \{\mathcal{E} : \mathcal{E} \in \mathfrak{A}\}$

heißt Verbindungsraum (affine Hülle) des erzeugenden Systems $\mathfrak{A}$

Spezialfall: $\mathfrak{A} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m\}$

Verbindungsraum: $\mathcal{E}_1 \vee \dots \vee \mathcal{E}_m$ (Schreibweise)

Beispiele:

1) $\{A\}$ für $A \in \mathcal{A}$ ist ein m-dimensionaler affiner Unterraum

Schreibweise für $\{A_1\} \vee \dots \vee \{A_m\} = A_1 \vee \dots \vee A_m$

(Verbindungsebene der Punkte $A_1, \dots, A_m$)

2) eindimensionale affine Unterräume heißen Geraden $\mathcal{G}$
(später durch 2 Punkte erzeugt: $\mathcal{G} = A \vee B$ für $A \neq B$)

3) $(n-1)$-dimensionale affine Unterräume $\mathcal{H}$ in n-dimensionalen affinen Räumen heißen Hyperebenen.

Charakterisierung von Ebenen mit Hilfe ihrer Ortsvektoren

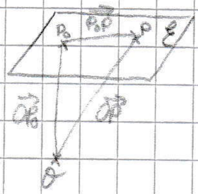
6.2.3 Satz

(1) $\mathcal{E}$ Ebenen in $\mathcal{A}$, $O \in \mathcal{A}$ Ursprung

$\Rightarrow \boxed{f_0(\mathcal{E}) = V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}}$ für ein bel. $P_0 \in \mathcal{E}$ (Verschiebung von $V(\mathcal{E})$ um den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_0}$)

(2) Sei für $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ $f_0(\mathcal{E}) = U + v_0$ für einen lin. Unterraum $U \subset V$ und ein $v_0 \in V$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ ist Ebene

Bew.:



(1) $v \in f_0(\mathcal{E}) \Rightarrow v = \overrightarrow{OP}$ für $P \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow v = \overrightarrow{OP_0} + \underbrace{\overrightarrow{P_0P}}_{\in V(\mathcal{E})}$ für bel. $P_0 \in \mathcal{E}$

$= \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{OP_0}$

$\Rightarrow v \in V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0} \Rightarrow f_0(\mathcal{E}) \subset V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0}$

umgekehrt: $v \in V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0} \Rightarrow v = u + \overrightarrow{OP_0}$ für ein $u \in V(\mathcal{E})$,

$u = \overrightarrow{P_0P}$ für ein $P \in \mathcal{E}$ ((E II))

$\Rightarrow v = \overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow v \in f_0(\mathcal{E}) \Rightarrow V(\mathcal{E}) + \overrightarrow{OP_0} \subset f_0(\mathcal{E})$

$\Rightarrow$ Gleichheit, also (1)

(2) s. Skript □

Anwendung:

Schulgeometrie: durch 2 verschiedene Punkte geht eine Gerade (genau eine), durch 3 verschiedene, nicht kollineare Punkte geht genau eine 2-dim. Ebene

Verallgemeinerung

Definition

$A_0, A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ heißen linear unabhängig, falls

$\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k}$ lin. unab.