Prof. Dr. Oksana Yakimova
Dipl.-Math. Rico Besteher

24.6.2016

Algebra/Geometrie II, Probeklausur

Jede Aufgabe ist 4 Punkte wert und es gibt 4 Aufgaben.
Abgabetermin: freiwillig in der Vorlesung am Donnerstag den 30.06.

Aufgabe 1. Unten sehen Sie drei symmetrische reellen Matrizen $A_i \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Wir betrachten die zugehörigen Bilinearformen $b_i(v,w) = v^t A_i w$ auf $\mathbb{R}^3$. Genau eine Form davon ist entartet, genau eine ist positiv definit. Berechnen Sie:
(a) die Signatur der Form, die nicht positiv definit und nicht entartet ist;
(b) den Kern der entarteten Form;
(c) die Eigenwerte von A_i und eine orthogonale Matrix C, s.d. $C^t A_i C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ im Fall der positiv definiten Form b_i.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Sind die Matrizen A und A' in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ zueinander konjugiert?

(a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum des euklidischer Raums $V = \mathbb{R}^4$, der durch das LGS $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ gegeben ist (als die Lösungsmenge). Berechnen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp \subseteq V$ von U und die Abstände $d(v, U)$, $d(v, U^\perp)$ für $v = (2, 4, 0, -1)$.

Aufgabe 4. Unten sehen Sie einige Aussagen, die nicht alle wahr sind. Wählen Sie **zwei richtige** Aussagen und beweisen Sie die; wählen Sie weiter **eine falsche** Aussage und widerlegen Sie die (bzw. geben ein Gegenbeispiel an).

(i) Sei $V = \mathbb{K}^n$, $f : V \to V$ linear und $f^* : V^* \to V^*$ die duale Abbildung. Ist f diagonalisierbar, so ist auch f^* diagonalisierbar.

(ii) Die Eigenwerte einer schiefsymmetrischen reellen Matrix sind immer reell.

(iii) Die Teilmenge $T = \{(a, b) \mid |b| \leq |a|\} \subset \mathbb{R}^2$ ist ein konvexer Kegel.

(iv) Die Gleichung $x^2 + 2xy + 3y^2 - 5x + y + 7 = 0$ definiert eine Ellipse in $\mathbb{R}^2$.

(v) Sei $V = \mathbb{K}^n$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann nilpotent, wenn die induzierte Abbildung

$$\tilde{f} \colon V/\mathrm{Ker} f \to V/\mathrm{Ker} f \ \text{ mit } \ \tilde{f}(v + \mathrm{Ker} f) = f(v) + \mathrm{Ker} f$$

nilpotent ist.