Lösung Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

zu finden: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so daß i) $AB \neq BA$,
ii) $BA = 0 \wedge A \neq 0 \wedge B \neq 0$

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n := 2$

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 0\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot0 \\ 1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ BA = \begin{pmatrix} 1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot0 \\ 0\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AB \neq BA \text{ und } A \neq 0, B \neq 0, BA = 0.$$

Aufgabe 2

Sei A, B, C laut Aufgabe.

Definiert sind: AC, BA, CB

Nicht definiert sind: AA, AB, BB, BC, CA, CC.

$$AC = \begin{pmatrix} 1\cdot0+2\cdot0+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot1-3\cdot1 & 1^2-2^2-3^2 & 1+2+3 \\ 4\cdot0+5\cdot0+6\cdot3 & 4\cdot2+1\cdot5-6\cdot1 & 1\cdot4-2\cdot5-3\cdot6 & 4+5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -12 & 6 \\ 18 & 7 & -24 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \dots = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad CB = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 2 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

gegeben: $\mathbb{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+2y+z \\ -x \quad +2z \end{pmatrix} \overset{\text{Matrixmult.}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

i) Laut Vorlesung sind die Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren (der Urbildraumbasis).
<u>Daher ist A die Darstellung</u> von $\mathbb{A}$ bzgl. der kanonischen Basen.

ii) Basiswechsel nach $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,
$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$U := (u_1, u_2, u_3)$ Matrix mit Spaltenvektoren u_1, u_2, u_3.
$B := (b_1\ b_2)$ analog.

Lemma 3.4.12: Darstell. A' von $\mathbb{A}$ bezüglich Basen $u_1 u_2 u_3$, $b_1 b_2$ ist gegeben durch $A' = B^{-1} A C$. (*)

B invertieren: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -1 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $+2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdot -1$ $\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' \overset{(*)}{=} (B^{-1})(AC) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe 4:

$$\text{Sei } A' := \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1r} & \cdots \\ 0 & b_{22} & & \vdots & \cdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & b_{rr} & \cdots \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{array}\right)$$

rechteckige Matrix über Körper K, und sei B Ausschnitt oberhalb der waagrechten Linie.

i) z.z.: Zeilenrang(A') = Zeilenrang(B):

<u>Bew:</u> $A' =: \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$ Zeilenvektoren. Zeilenrang(A') = größtes n, so daß $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ linear unabhängig. Es folgt $i_n \leq r$ da Nullvektor stets lin. abhängig. Das stimmt mit dem Zeilenrang von B überein.

ii) z.z.: Spaltenrang(A') = Spaltenrang von (B):

$A' =: (c_1 \dots c_n)$ Spaltenvektoren,
$B =: (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$ Spaltenvektoren.

Jedes $\tilde{c}_i$ wird „mit Nullen aufgefüllt" zu c_i.

g.z.z.: [Auswahl $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$ ist linear unabh.] $\Leftrightarrow$ [$\tilde{c}_{i_1}, \dots, \tilde{c}_{i_k}$ ist linear unabh.]

Beweis wie in Lemma 3.5.3, Spaltenrang, durch zurückführen auf Irrelevanz der zusätzlichen Vorfaktoren.

Aufgabe 5

K Körper, A ist $a \times b$-Matrix über K, B ist $b \times c$-Matrix über K. $a, b, c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

i) z.z.: $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang}(A)$:

$\operatorname{rang}(AB) \overset{\text{Folgerung 3.5.2}}{=} \dim(\operatorname{im}(AB)) \overset{\text{Korollar Basisaustauschsatz}}{=} \max\{n : \exists v_1, \dots, v_n \in K^c$ s.d. $ABv_1, \dots, ABv_n$ linear unabhängig$\}$

$\operatorname{rang}(A) \overset{\text{genauso}}{=} \max\{m : \exists w_1 \dots w_m \in K^b$ s.d. $Aw_1, \dots, Aw_m$ lin. unabh.$\}$. (**)

Wähle $v_1, \dots, v_n$ s.d. n maximal und $ABv_1 \dots ABv_n$ lin. unabhängig.

Setze $w_1 := Bv_1, \dots, w_n := Bv_n$.

Zeige: $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig in K^b.

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_n \in K$ und $0 = \sum_i \lambda_i w_i \overset{\text{def } w}{=} \sum_i \lambda_i Bv_i$
$\Rightarrow 0 = A0 \overset{\text{obig}}{=} A(\sum_i \lambda_i Bv_i) \overset{A \text{ linear}}{=} \sum_i \lambda_i ABv_i$
$\overset{ABv_i \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \forall_i (\lambda_i = 0)$.

weil $\lambda_1 \dots$ beliebig, ist $w_1 \dots w_n$ lin. unab. $\Rightarrow$ n nimmt an (**) teil $\Rightarrow \operatorname{rang} A \geq \operatorname{rang} AB$

weiter Aufg. 5:

(ii) z.z.: $\operatorname{rang}(AB) \le \operatorname{rang}(B)$: $\tilde{A} := B^T$, $\tilde{B} := A^T$, $(AB)^T \overset{\text{Rechenregel}}{=} B^T A^T$

Bew $\operatorname{rang}(B) \overset{\text{Zeilenrang = Spaltenrang}}{=} \operatorname{rang}(B^T) \overset{\text{def } \tilde{A}}{=} \operatorname{rang}(\tilde{A}) \overset{(i)}{\geq} \operatorname{rang}(\tilde{A}\tilde{B})$

$= \operatorname{rang}(B^T A^T) = \operatorname{rang}((AB)^T) \overset{\text{Zeilenrang = Spaltenr.}}{=} \operatorname{rang}(AB)$

iii) Ein einziger Vektor ist genau dann linear unabhängig, wenn er nicht null ist.

Rang ist Anzahl lin. unabh. Spalten $\Rightarrow$ Eine Matrix ist genau dann $= 0$, wenn ihr Rang 0 ist.

Seien A, B wie in Aufgabe 1.

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(0) = 0 \\ \operatorname{rang}(A) > 0 \text{ da } A \neq 0 \\ \operatorname{rang}(B) > 0 \quad \text{—"—} \end{array}\right\} \Rightarrow \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B) > 0 = \operatorname{rang}(AB)$$

Aufgabe 6:

$A^{n,k} := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$, d.h. $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \begin{cases} 1 : & i = j \le k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\operatorname{rang}(A^{n,k}) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \overset{\text{Aufg. 4}}{=} \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{array}\right) \overset{(\,)^T}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \end{pmatrix} \overset{\text{Aufg. 4}}{=}$

$= \operatorname{rang}(\mathrm{id}_{k \times k}) = k.$