Quantentheorie I – Übung 02

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mittwoch 8 – 10

Aufgabe 1

Sei $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(kx - \omega(k)t)} \hat{\varphi}(k)\, dk$

mit $k \in \mathbb{R}$, $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ausreichend glatt und schnell fallend.
Weiterhin sei gefordert:

$$\varphi(x,0) = A \exp\left(\frac{-x^2}{2b^2}\right) e^{ik_0 x}$$, wobei $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b, k_0 \in \mathbb{R}$

a) freie (eindimensionale) Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}$

es gilt: $\partial_t \varphi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} -i\omega(k)\, f(k)\, dk$ $\qquad f(k) := e^{i(kx - \omega t)} \hat{\varphi}(k)$

$\partial_x^2 \varphi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} -k^2 f(k)\, dk$

(einsetzen)
$$\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \omega(k)\hbar\, f(k)\, dk = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} f(k)\, dk$$

es gilt nun: $f(k) = \hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t}\, e^{ikx} \Longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \sqrt{2\pi}\, F^{-1}(\hat{\varphi}(\cdot)\, e^{-i\omega t})$

$\Longrightarrow \hat{\varphi}(\cdot)\, e^{-i\omega t} \in \mathcal{S}$ (Schwartzraum), da sonst keine Fourier-transformation möglich

durch $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ (Fouriertransformation) entsteht eine bijektive Abbildung.
$\Longrightarrow$ gilt $F(f_1) = F(f_2)$ folgt $f_1 = f_2$

$\Longrightarrow$ Einsetzen in Schrödingergleichung kann als Fouriertransformation gesehen werden

$\Longrightarrow \hbar\, \omega(k) \cdot \hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \cdot \hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t}$ für alle $k \in \mathbb{R}$
(nur möglich, wenn Koeffizienten gleich)

$\Longrightarrow \hbar\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Longrightarrow \boxed{\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}}$ Dispersionsrelation

b) da φ eine Wellenfunktion der Schrödingergleichung ist, muss für alle $t \in \mathbb{R}$
$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x,t)|^2\, dx = 1$ gelten.

$$\Longrightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x,0)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |A|^2 \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \underbrace{|e^{ik_0 x}|}_{=1}\, dx$$

$$= A^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) dx = A^2 b \sqrt{\pi} \Longrightarrow \boxed{A = \left(\frac{1}{b^2 \pi}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

c) $\tilde{\varphi}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,t)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(k')\, e^{-i\omega t} e^{ik'x}\, dk' \right) e^{-ikx}\, dx$

$= F\left(\sqrt{2\pi}\, F^{-1}\left(\hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t} \right) \right) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t}$

$\Longrightarrow \boxed{\tilde{\varphi}(k,t) = F(\varphi(\cdot,t)) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi}(k)\, e^{-i\omega t}}$

es gilt: $\varphi(x,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\, \hat{\varphi}(k)\, dk = \sqrt{2\pi}\, F^{-1}(\hat{\varphi})$

$\Longrightarrow F(\varphi(\cdot,0)) = \sqrt{2\pi}\, \hat{\varphi} = F\left(A \exp\left(\frac{-\cdot^2}{2b^2} \right) e^{ik_0 \cdot} \right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot A \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2b^2}} e^{ik_0 x} e^{-ikx}\, dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2} + i(k_0-k)x \right) dx$

$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}\, b \cdot e^{-\frac{(k_0-k)^2}{2} b^2} = b^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot b \cdot \exp\left(-\frac{(k_0-k)^2}{2} b^2 \right)$

$\Longrightarrow \boxed{\hat{\varphi}(k) = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{b^2}{2} (k_0-k)^2 \right)}$ $\hat{\varphi}(k)$ hat damit die Gestalt einer verschoben Glockenkurve

d) $|\hat{\varphi}(k)|^2 = \frac{b}{2} \pi^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-b^2 (k_0-k)^2 \right) \overset{!}{=} \frac{b}{2} \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-1}$

$\Longrightarrow -b^2 (k_0-k)^2 = -1 \Longrightarrow k_\pm = k_0 \pm \frac{1}{b}$ (Lösung der quadratischen Gl.)

$\boxed{\Delta k = k_+ - k_- = \frac{2}{b}}$