Quantentheorie I – Übung 10

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mi 8–10

Aufgabe 1

Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, sodass es $|\varphi\rangle : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ gibt mit $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$. $(N \in \mathbb{N})$. Seien weiterhin $p, q \in \{1, \dots, N\}$.

$$n = 1: \quad [X_p, P_q^n] = [X_p, P_q] = i\hbar \delta_{pq} = i\hbar n \delta_{pq} P_q^0 = i\hbar n \delta_{pq} P_q^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
n \Rightarrow n+1: \quad [X_p, P_q^{n+1}] &= X_p P_q^n P_q - P_q^n P_q X_p \\
\text{(Kommutator eins.)} \quad &= X_p P_q^n P_q - P_q^n (X_p P_q - [X_p, P_q]) \\
\text{(linear)} \quad &= X_p P_q^n P_q - P_q^n X_p P_q + P_q^n [X_p, P_q] \\
\text{(Def + Einsetzen)} \quad &= [X_p, P_q^n] P_q + i\hbar \delta_{pq} P_q^n \\
\text{(Induktionsvor.)} \quad &= i\hbar n \delta_{pq} P_q^{n-1} P_q + i\hbar \delta_{pq} P_q^n \\
&= i\hbar (n+1) \delta_{pq} P_q^n
\end{aligned}
$$

$\square$

Sei nun $F_q := \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_q^n$, wobei (f_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Sei weiterhin $F_q' := \sum_{n=0}^{\infty} f_n n P_q^{n-1}$.

(Bemerkung: in der Aufgabe wird nach einer Funktion von Operatoren gefragt, sowie deren Ableitung. Die Ableitung einer solchen wurde bisher nicht definiert und lässt sich damit für mich nicht anders formal beschreiben.)

$$
\begin{aligned}
[X_p, F_q] &= [X_p, \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_q^n] \overset{\text{(linear + stetig)}}{=} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n [X_p, P_q^n] \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot i\hbar n \delta_{pq} P_q^{n-1} = i\hbar \delta_{pq} \cdot \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot n P_q^{n-1} = i\hbar \delta_{pq} F_q'
\end{aligned}
$$

$\square$

Weiterhin gilt: $[P_q, X_p] = -[X_p, P_q] = -i\hbar \delta_{pq}$

$$n = 1: \text{ (analog zu vorher) } [P_q, X_p^n] = -i\hbar \delta_{pq} = -i\hbar n \delta_{pq} X^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
n \Rightarrow n+1: \quad [P_q, X_p^{n+1}] &= P_q X_p^n X_p - X_p^n X_p P_q \\
&= P_q X_p^n X_p - X_p^n (P_q X_p - [P_q, X_p]) \\
&= [P_q, X_p^n] X_p + X_p^n [P_q, X_p] \\
&= -i\hbar n \delta_{pq} X_p^{n-1} X_p - i\hbar \delta_{pq} X_p^n \\
&= -i\hbar (n+1) \delta_{pq} X_p^n
\end{aligned}
$$

Damit gilt eine analoge Formel für Vertauschungen:

$G_p := \sum_{n=0}^{\infty} g_n X_p^n$, $G_p' := \sum_{n=0}^{\infty} g_n n X_p^{n-1}$ mit (g_n) in $\mathbb{C}$.

$$\Rightarrow [P_q, G_p] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n [P_q, X_p^n] = -i\hbar \delta_{pq} \sum_{n=0}^{\infty} g_n n X_p^{n-1}$$

$$= -i\hbar \delta_{pq} G_p'$$

□

Aufgabe 2

Sei $m > 0$ und $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V = \infty \cdot 1_{\mathbb{R} \setminus (0,a)}$ (mit $a \in (0,\infty)$). Es sei dann $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, sodass $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Potential V ist. Es gilt dann: (mit $E > 0$ und φ normiert)

(*) $H\varphi = E\varphi$ mit Hamilton-Operator: $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V$

$\Rightarrow$ (Erwartungswert Hamilton-Operator) $E_0 := \langle H \rangle_\varphi = \langle \varphi | H | \varphi \rangle \overset{(*)}{=} E \langle \varphi | \varphi \rangle = E$

(Erwartungswert von H ist gerade Energie des Zustands eines Systems)

Weiterhin gilt: $\langle (\Delta P)^2 \rangle_\varphi \overset{\text{(bekannte Formel)}}{=} \langle P^2 \rangle_\varphi - \langle P \rangle_\varphi^2$

(stationärer Fall: $\langle P \rangle_\varphi = 0$) $= \langle P^2 \rangle_\varphi$

es gilt: $H = \frac{1}{2m} P^2 + V \Rightarrow E_0 = \langle \varphi | (\frac{P^2}{2m} + V) | \varphi \rangle = \frac{1}{2m} \langle P^2 \rangle$

(da $V \cdot \varphi = 0$)

$\Rightarrow \langle (\Delta P)^2 \rangle_\varphi = 2m \langle H \rangle_\varphi = 2m E_0$

Unbestimmtheitsrelation:

$$\langle (\Delta X)^2 \rangle_\varphi \cdot \langle (\Delta P)^2 \rangle_\varphi \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$\Rightarrow \boxed{E_0 \geq \frac{\hbar^2}{8m \langle (\Delta X)^2 \rangle_\varphi}}$ untere Schranke der Energie

a) Sei $\varphi = a^{-\frac{1}{2}} 1_{(0,a)}$. Dann gilt $\langle X \rangle_\varphi = \langle \varphi | X | \varphi \rangle$

$$\Rightarrow \langle X \rangle_\varphi = \int_{\mathbb{R}} \varphi^*(x)\, x\, \varphi(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{a} \int_0^a x\, dx = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle_\varphi = \langle \varphi | (X - \langle X \rangle_\varphi)^2 | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi^*(x) (x - \tfrac{a}{2})^2 \varphi(x)\, d\lambda(x)$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a (x^2 - ax + \frac{a^2}{4})\, dx = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{E_0 \geq \frac{3\hbar^2}{2ma^2}}}$$

b) Grundzustandswellenfunktion: $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[\frac{\pi}{a}x\right] \cdot 1_{(0,a)}(x)$

$$\Longrightarrow \langle X \rangle_\varphi = \frac{2}{a} \int_0^a x \cdot \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{a}{2}$$

$$\Longrightarrow \langle (\Delta X)^2 \rangle_\varphi = \frac{2}{a} \int_0^a \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{(\pi^2 - 6)a^2}{12\pi^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{E_0 \geq \frac{3\pi^2\hbar^2}{2m(\pi^2-6)a^2}}}$$