Quantentheorie I – Übung 11

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mi 8-10

Aufgabe 1

Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und H der Hamilton-Operator. Sei weiterhin $\{|\varphi_n\rangle \mid n \in I\}$, I Indexmenge eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

Sei nun $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ der Zustand des Systems.

Dann gibt es Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$, $i \in I$, sodass $|\varphi\rangle = \sum_{i\in I} c_i |\varphi_i\rangle$ und alle $|\varphi_i\rangle$, $i \in I$ erfüllen die Schrödingergleichung: (stationär)

$$H|\varphi_i\rangle = E_i |\varphi_i\rangle \quad \text{mit} \quad E_i \in [0,\infty),\ i\in I$$

$$\Rightarrow \quad H|\varphi\rangle = H\sum_{i\in I} c_i|\varphi_i\rangle = \sum_{i\in I} c_i H|\varphi_i\rangle = \sum_{i\in I} c_i E_i |\varphi_i\rangle$$

Weiterhin gilt: $\langle\varphi| = \sum_{i\in I} \bar{c}_i \langle\varphi_i|$

$$\Rightarrow \quad \langle\varphi|H|\varphi\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} \bar{c}_i c_j E_j \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \sum_{i\in I} |c_i|^2 E_i$$

Außerdem: $\langle\varphi|\varphi\rangle = \| |\varphi\rangle \| = \sum_{i\in I} |c_i|^2$

und: $E_0 \leq E_i$ für alle $i\in I$, da E_0 Grundzustand

$$\Rightarrow \quad \sum_{i\in I} E_0 |c_i|^2 \leq \sum_{i\in I} E_i |c_i|^2$$

$$\Rightarrow \quad E_0 \sum_{i\in I} |c_i|^2 \leq \sum_{i\in I} E_i |c_i|^2$$

$$\Rightarrow \quad E_0 \langle\varphi|\varphi\rangle \leq \langle\varphi|H|\varphi\rangle$$

$(\langle\varphi|\varphi\rangle > 0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_0 \leq \frac{\langle\varphi|H|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle}}$$

Dies zeigt die Aussage. $\square$

Die Gleichheit folgt dann mit $|\varphi\rangle = c_0|\varphi_0\rangle$ für $c_0 \in \mathbb{C}$ (also $c_i = 0$ für alle $i \in I$, $i \neq 0$)

Aufgabe 3

Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Sei L_i, $i=1,2,3$ der Drehimpulsoperator.

$$\Rightarrow \quad L_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} X_j P_k \quad \text{für } i=1,2,3$$ und X_i als Ortsoperator und P_i als Impulsoperator

$$\Rightarrow \quad L_i = -i\hbar \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, x_j \partial_k$$

$$\Rightarrow \quad L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y),\quad L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z),\quad L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$$

Anwendung: Transformation Kugelkoordinaten

$$\Rightarrow L_x = -i\hbar\left[r\sin\vartheta\sin\varphi\left(\cos\vartheta\,\partial_r - \frac{1}{r}\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\right) - r\cos\vartheta\left(\sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r}\partial_\vartheta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\right]$$

$$= -i\hbar\left[-\sin\varphi\,\partial_\vartheta - \cot\vartheta\cos\varphi\,\partial_\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\cos\varphi\,\partial_\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow L_y = -i\hbar\left[r\cos\vartheta\left(\sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r}\partial_\vartheta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\right.$$
$$\left. - r\sin\vartheta\cos\varphi\left(\cos\vartheta\,\partial_r - \frac{\sin\vartheta}{r}\partial_\vartheta\right)\right]$$

$$= -i\hbar\left[\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \cot\vartheta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right)}$$

$$\Rightarrow L_z = -i\hbar\left[r\sin\vartheta\cos\varphi\left(\sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\sin\varphi\,\partial_\vartheta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\right.$$
$$\left. - r\sin\vartheta\sin\varphi\left(\sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cos\varphi\,\partial_\vartheta - \frac{1}{r}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\partial_\varphi\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{L_z = -i\hbar\,\partial_\varphi}$$

Sei $L_+ := L_x + iL_y$.

$$\Rightarrow L_+ = i\hbar\left(\sin\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\cos\varphi\,\partial_\varphi\right) - \hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\vartheta + \cot\vartheta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right)$$

$$= \hbar\left[e^{i\varphi}\partial_\vartheta + \cot\vartheta\left(i\cos\varphi - \sin\varphi\right)\partial_\varphi\right]$$

$$= \hbar\left[e^{i\varphi}\partial_\vartheta + i\cot\vartheta\, e^{i\varphi}\partial_\varphi\right] = \boxed{-i\hbar e^{i\varphi}\left[i\partial_\vartheta - \cot\vartheta\,\partial_\varphi\right]}$$

Sei $L_- := L_x - iL_y$.

(analog) $\Rightarrow$
$$L_- = \hbar\left[\left(i\sin\varphi - \cos\varphi\right)\partial_\vartheta + \cot\vartheta\left(i\cos\varphi + \sin\varphi\right)\partial_\varphi\right]$$

$$= \hbar\left[-e^{-i\varphi}\partial_\vartheta + i\cot\vartheta\, e^{-i\varphi}\partial_\varphi\right] = \boxed{-i\hbar e^{-i\varphi}\left[-i\partial_\vartheta - \cot\vartheta\,\partial_\varphi\right]}$$

es gilt: $L_z^2 = -\hbar^2\partial_\varphi^2$

$$L_+L_- = -\hbar^2\left[ie^{i\varphi}\partial_\vartheta\left(e^{-i\varphi}(-i)\partial_\vartheta\right) - ie^{i\varphi}\partial_\vartheta\left(e^{-i\varphi}\cot\vartheta\,\partial_\varphi\right)\right.$$
$$\left. + e^{i\varphi}\cot\vartheta\,\partial_\varphi\left(e^{-i\varphi}i\partial_\vartheta\right) + e^{i\varphi}\cot\vartheta\,\partial_\varphi\left(e^{-i\varphi}\cot\vartheta\,\partial_\varphi\right)\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\partial_\vartheta^2 - i\,\partial_\vartheta\left(\cot\vartheta\,\partial_\varphi\right) + i\cot\vartheta\,\partial_\varphi\partial_\vartheta + \cot\vartheta\,\partial_\vartheta\right.$$
$$+ \cot^2\vartheta\,\partial_\varphi^2 - i\cot^2\vartheta\,\partial_\varphi$$

$$L_- L_+ = -\hbar^2 \Big[-i e^{-i\varphi} \partial_\vartheta \left(i e^{i\varphi} \partial_\vartheta \right) - e^{-i\varphi} \cot\vartheta \, \partial_\varphi \left(i e^{i\varphi} \partial_\vartheta \right)$$

$$+ i e^{-i\varphi} \partial_\vartheta \left(e^{i\varphi} \cot\vartheta \, \partial_\varphi \right) + e^{-i\varphi} \cot\vartheta \, \partial_\varphi \left(e^{i\varphi} \cot\vartheta \, \partial_\varphi \right) \Big]$$

$$= -\hbar^2 \Big[\partial^2_\vartheta - i \cot\vartheta \, \partial_\varphi \partial_\vartheta + \cot\vartheta \, \partial_\vartheta + i \partial_\vartheta \left(\cot\vartheta \, \partial_\varphi \right)$$

$$+ \cot^2\vartheta \, \partial^2_\varphi + i \cot^2\vartheta \, \partial_\varphi \Big]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(L_+ L_- + L_- L_+ \right) = -\hbar^2 \left[\partial^2_\vartheta + \cot\vartheta \, \partial_\vartheta + \cot^2\vartheta \, \partial^2_\varphi \right]$$

$$\Rightarrow L^2 = -\hbar^2 \left[\partial^2_\vartheta + \cot\vartheta \, \partial_\vartheta + \cot^2\vartheta \, \partial^2_\varphi + \partial^2_\varphi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \partial_\vartheta \left(\sin\vartheta \, \partial_\vartheta \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \partial^2_\varphi \right]}$$