Quantentheorie I – Übung 12

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 2

a) $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{4} \overset{!}{=} 0$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\lambda_{1/2} = \pm \frac{\hbar}{2}}}$ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$ als Eigenwerte)

$\Longrightarrow$ Eigenvektoren: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\pm\hbar}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow y = \pm x$

$\Longrightarrow \underline{\underline{|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)}}$ $\quad \underline{\underline{|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)}}$

b) $\Longrightarrow \underline{\underline{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x + |-\rangle_x\right)}}$, $\underline{\underline{|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_x - |-\rangle_x\right)}}$

(addieren und normieren) (subtrahieren und normieren)

c) Sei $|\varphi\rangle = |+\rangle$ der Zustand des Systems.

Messung von S_x: mögliche Ergebnisse: $\pm \frac{\hbar}{2}$ (gerade die Eigenwerte)

Wahrscheinlichkeit: $P(\hbar/2) = |{}_x\langle +|\varphi\rangle|^2 = |{}_x\langle +|+\rangle|^2$

$(\langle -|+\rangle = 0)$ $\quad = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle +| + \langle -|\right)|+\rangle\right|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$P(-\hbar/2) = |{}_x\langle -|\varphi\rangle|^2 = |\sqrt{2}^{-1}(\langle +| - \langle -|)|+\rangle|^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

d) Messung von S_x ergab $\hbar/2 \Longrightarrow$ neuer Zustand $|\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$\Longrightarrow$ Messung von S_z: $P(\hbar/2) = |\langle +|\varphi'\rangle|^2 = |\sqrt{2}^{-1}\langle +|(|+\rangle + |-\rangle)|^2$

$= \frac{1}{2}$

$P(-\frac{\hbar}{2}) = |\langle -|\varphi'\rangle|^2 \overset{\text{(analog)}}{=} \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow$ Messwert $\hbar/2$ nicht mehr sicher

Aufgabe 1

Seien $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbert-Raum und $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$, sodass $\varphi_t \in \mathcal{H}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ den Zustand des Systems (Wasserstoffatom) beschreibt mit:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(2\varphi_{100} + \varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1} \right)$$

wobei φ_{nlm} die entsprechenden Wasserstoff-Gesamtfunktionen darstellen mit $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $l < n$, $|m| \leq l$

a) ·) die Menge der φ_{nlm} bilden eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$; φ_0 ist normiert

(siehe letzte Serie) $\Longrightarrow$ $$\langle H \rangle_{\varphi_0} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} |c_{nlm}|^2 E_{nlm}$$ wobei c_{nlm} Koeffizienten von φ_0 bezügl. ONB sind und E_{nlm} Energieeigenwerte

$$\Longrightarrow E = \langle H \rangle_{\varphi_0} = \frac{4}{10} E_{100} + \frac{1}{10} E_{210} + \frac{2}{10} E_{211} + \frac{3}{10} E_{21-1}$$

(Entartung) $$= \underline{\underline{\frac{4}{10} E_1 + \frac{6}{10} E_2}}$$

b) Wahrscheinlichkeit für $l=1, m=1$ entspricht Wahrscheinl. für $m=1$ (in diesem Spezialfall von φ_t)

$\Longrightarrow$ Messung von L_z nötig; Operator ist diskret und in diesem System nicht entartet

$$\Longrightarrow P(m=1) \overset{\text{(Vorlesung)}}{=} |c_{211}|^2 = \underline{\underline{\frac{2}{10}}}$$ (ist unabhängig von der Zeit da $\exp(i\omega t)$ nichts zum Betrag beisteuert)

d) aus der dritten Übungsserie folgt:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{n,l,m} c_{nlm}(t)\, \varphi_{nlm}(\vec{r}) \quad \text{mit } c_{nlm}(t) = c_{nlm} \exp\left(\frac{-iE_n t}{\hbar}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\varphi(\vec{r}, t) = \frac{2}{\sqrt{10}} \varphi_{100} \exp(-i\omega_1 t) + \frac{1}{\sqrt{10}} \exp(-i\omega_2 t) \left[\varphi_{210} + \sqrt{2}\varphi_{211} + \sqrt{3}\varphi_{21-1} \right]}}$$

mit $\omega_i := \frac{E_i}{\hbar}$ für $i = 1, 2$ (hier wurde wieder Entartung angewendet)