Quantentheorie I – Übung 5

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mi 8-10

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und sei $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \subset \mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis. Seien $|\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ mit:

$$|\psi\rangle := \frac{1}{2}|e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle, \quad |\chi\rangle := \frac{1}{\sqrt{3}}|e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|e_2\rangle$$

Dann gilt: $$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle\psi|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi|e_3\rangle$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

$$\| |\chi\rangle \|^2 = \langle\chi|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\chi|e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}\langle\chi|e_2\rangle$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$\Longrightarrow$ $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ sind nicht normiert

Sei nun ein $\varphi \in \mathcal{H}$. Dann ist $\varphi = x|e_1\rangle + y|e_2\rangle + z|e_3\rangle$ für bestimmte $x, y, z \in \mathbb{C}$, da $\{|e_i\rangle \mid i = 1,2,3\}$ eine Orthonormalbasis ist.

$$\Longrightarrow P_\psi(\varphi) = \langle\psi|\psi\rangle^{-1}|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle = \frac{4}{5}|\psi\rangle\left[x\langle\psi|e_1\rangle + y\langle\psi|e_2\rangle + z\langle\psi|e_3\rangle\right]$$

$$= \frac{4}{5}|\psi\rangle\left[\frac{1}{2}x + \frac{i}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}x + \frac{i}{2\sqrt{2}}y + \frac{1}{2\sqrt{2}}z\right)|e_1\rangle$$

$$+ \frac{4}{5}\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y - \frac{i}{2}z\right)|e_2\rangle + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{i}{2}y + \frac{1}{2}z\right)|e_3\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_\psi = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$ (bezüglich gegebener Orthonormalbasis)

Für P_χ sieht dies nach analoger Vorgehensweise folgendermaßen aus:

$$\underline{\underline{P_\chi = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-i}{3} & 0 \\ \frac{i}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$ (bezüglich gegebener Orthonormalbasis)

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Seien $H: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein hermitescher Operator und $|\varphi_n\rangle \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$ dessen Eigenzustände, sodass $\{ |\varphi_n\rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$ eine Orthonormalbasis bildet. Seien weiterhin für $m, n \in \mathbb{N}$ die Operatoren $U_{mn}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiert durch: $U_{mn} :\!= |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|$.

a) Sei $U_{mn}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ der zu U_{mn} adjungierte Operator. Dann gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle U_{mn}^* x | y \rangle \overset{(Def)}{=} \langle x | U_{mn} y \rangle = \langle x | U_{mn} | y \rangle = \langle x | \varphi_m \rangle \langle \varphi_n | y \rangle$$
$$= \langle \langle x | \varphi_m \rangle^* \varphi_n | y \rangle = \langle \langle \varphi_m | x \rangle \varphi_n | y \rangle$$

(es gilt für alle $y \in \mathcal{H}$) $\Longrightarrow$ $U_{mn}^* x = \langle \varphi_m | x \rangle \varphi_n = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_m | x\rangle$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{mn}^* = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_m|}$$

b) $[H, U_{mn}](x) = (HU_{mn} - U_{mn}H)(x) = H|\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|x\rangle - |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|H|x\rangle$

(φ_m ist Eigenzustand) $= \lambda_m |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|x\rangle - |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|Hx\rangle$ $\left(\text{für } \lambda_m \in \mathbb{C}, \text{ sodass } H\varphi_m = \lambda_m \varphi_m\right)$

$$= |\varphi_m\rangle \left(\lambda_m \langle\varphi_n|x\rangle - \langle\varphi_n|Hx\rangle \right)$$

(I ist Einheitsop.) $= |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|\lambda_m x - Hx\rangle = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|\lambda_m I - H|x\rangle$

$$\Longrightarrow \boxed{[H, U_{mn}] = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|\lambda_m I - H|}$$

c) $U_{mn} U_{pq}^* = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|\varphi_q\rangle\langle\varphi_p| \overset{(*)}{=} |\varphi_m\rangle \delta_{nq} \langle\varphi_p| = \delta_{nq} U_{mp}$

$(*)$ $\langle\varphi_n|\varphi_q\rangle = \delta_{nq}$ da φ_n, φ_q Elemente einer Orthonormalbasis sind $\square$

d) $Sp(U_{mn}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle\varphi_i|U_{mn}|\varphi_i\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle\varphi_i|\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|\varphi_i\rangle$

(ONB) $= \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{im}\delta_{in} = \underline{\underline{\delta_{mn}}}$

e) Seien $A, B, C: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ beliebige lineare Operatoren. Dann gilt:

$$Sp(AB) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle\varphi_i|AB|\varphi_i\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle\varphi_i|A|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|B|\varphi_i\rangle$$

(Summen sind absolut konvergent) $= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle\varphi_k|B|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|A|\varphi_k\rangle$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle\varphi_k|BA|\varphi_k\rangle = Sp(BA) \qquad (*)$$

$\Longrightarrow$ Vertauschen des Matrix-Matrix-Produkts erlaubt

$$\Rightarrow \quad Sp(ABC) = Sp[(AB)\cdot C] \overset{(*)}{=} Sp[C\cdot(AB)]$$
$$= Sp[(CA)\cdot B] \overset{(*)}{=} Sp[BCA] \qquad (**)$$

Sei nun $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Basistransformation. Dann wird ein Wechsel der Basis durch $T^{-1}AT$ dargestellt:

$$\Sigma_{i\in\mathbb{N}} \langle \varphi_i | T^{-1}AT | \varphi_i\rangle \overset{(**)}{=} \Sigma_{i\in\mathbb{N}} \langle \varphi_i | ATT^{-1} | \varphi_i\rangle$$
$$= \Sigma_{i\in\mathbb{N}} \langle \varphi_i | A | \varphi_i\rangle = Sp(A)$$

Damit ist die Spur unabhängig bezüglich der Basis. $\square$

f) Sei $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $(A_{mn}) = (\langle \varphi_m | A | \varphi_n\rangle)$.
Dann gilt:

$$\Sigma_{m,n\in\mathbb{N}} A_{mn} U_{mn} = \Sigma_{m,n\in\mathbb{N}} \langle \varphi_m | A | \varphi_n\rangle |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|$$

(Summen abs. konv.) $= \Sigma_{n\in\mathbb{N}} \left[\Sigma_{m\in\mathbb{N}} \langle \varphi_m | A\varphi_n\rangle |\varphi_m\rangle \right] \langle \varphi_n|$

⊗ (für ONB gilt für alle $x \in \mathcal{H}$: $\Sigma_{m\in\mathbb{N}} \langle\varphi_m | x\rangle |\varphi_m\rangle = x$) $= \Sigma_{n\in\mathbb{N}} |A\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| = \Sigma_{n\in\mathbb{N}} A|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

(Linearität + abs. konv.) $= A\left[\Sigma_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\right]$

(nach ⊗ muss Klammer gerade Identitätsoperator sein) $= A$ $\square$

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = 4$ und gegebener Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_4\}$.

A, B kommutieren:

$$AB = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

Berechne durch Ausführung der Multiplikation.

$$\Rightarrow [A,B] = AB - BA = 0$$

$\Rightarrow$ A, B kommutieren

Sei nun $Av \overset{!}{=} av$, $Bv \overset{!}{=} bv$ für $a, b \in \mathbb{K}$ und alle gesuchten $v \in V$.
Dann ist $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$ für gewisse $x, y, z, t \in \mathbb{K}$.

$$\Rightarrow \text{für } A: \begin{pmatrix} x \\ (y+z)/2 \\ (y+z)/2 \\ t \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \\ at \end{pmatrix} \qquad \text{für } B: \begin{pmatrix} (y+z)/2 \\ (x+t)/2 \\ (x+t)/2 \\ (y+z)/2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} bx \\ by \\ bz \\ bt \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ für A: Fall $a=0$: $y \overset{!}{=} -z$

Fall $a=1$: $y \overset{!}{=} z$

$\Rightarrow$ für B: Fall $b=0$: $x \overset{!}{=} -t$, $y \overset{!}{=} -z$

Fall $b=1$: $x \overset{!}{=} y \overset{!}{=} z \overset{!}{=} t$

Fall $b=-1$: $x \overset{!}{=} t$, $y \overset{!}{=} z$, $x \overset{!}{=} -y$

$\Rightarrow$ $a=0, b=0$: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)\}$

$a=0, b=1$: keine Orthonormalbasis möglich

$a=0, b=-1$: keine Orthonormalbasis möglich

$a=1, b=0$: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_4)\}$

$a=1, b=1$: $\{\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\}$

$a=1, b=-1$: $\{\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)\}$

$\Rightarrow$ $\{B\}$ erfüllt Bedingungen für $b=1$ und $b=-1$
$\{A, B\}$ erfüllen Bedingungen für $a=1$, $b \in \{0, 1, -1\}$