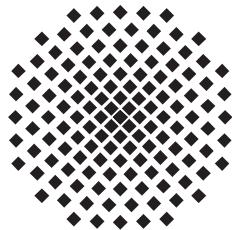


# Allgemeine Relativitätstheorie

Skript zur Vorlesung von Apl. Prof. Jörg Main  
Berbeitung von Sebastian Boblest

Vorläufige Version SS 2011



1. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57  
70550 Stuttgart

Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an:  
[sebastian.boblest@itp1.uni-stuttgart.de](mailto:sebastian.boblest@itp1.uni-stuttgart.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bewegung im Gravitationsfeld: Die Geodätengleichung der ART</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Riemannsche Geometrie</b>	<b>4</b>
2.1	Tensoralgebra . . . . .	4
2.1.1	Kontravariante Tensoren . . . . .	4
2.1.2	Kovariante Tensoren . . . . .	4
2.1.3	Tensoren höherer Stufe . . . . .	5
2.1.4	Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ . . . . .	5
2.1.5	„Herunterziehen“ von Indizes . . . . .	5
	Zweidimensionale Ebene . . . . .	6
	Dreidimensionale Ebene . . . . .	7
	Oberfläche der Einheitskugel . . . . .	7
2.1.6	Das Volumenelement . . . . .	8
2.1.7	Linearformen . . . . .	9
1)	Der Dualraum . . . . .	9
2)	Multilinearformen . . . . .	10
2.1.8	Metrische Räume . . . . .	10
2.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Räume . . . . .	10
2.2.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	10
2.2.2	Riemannsche Räume . . . . .	11
2.2.3	Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten . . . . .	11
2.2.4	Tangentialraum . . . . .	11
2.2.5	Kotangentialraum . . . . .	11
2.2.6	Koordinatentransformationen . . . . .	12
2.3	Tensoranalysis . . . . .	12
2.3.1	Parallelverschiebung und affine Zusammenhänge . . . . .	12
1)	Parallelverschiebung im zweidimensionalen Euklidischen Raum . . . . .	12
	Verschiebung entlang $r$ . . . . .	12
	Verschiebung entlang $\varphi$ . . . . .	13
	Schlussfolgerung . . . . .	13
2)	Verallgemeinerung . . . . .	13
	Berechnung der Übergangskoeffizienten . . . . .	14
2.3.2	Transformationsverhalten der Christoffelsymbole 1.Art . . . . .	15
2.3.3	Die kovariante Ableitung . . . . .	15
2.3.4	Ko- und kontravariantes Differential . . . . .	17
2.3.5	Divergenz . . . . .	18
2.3.6	Rotation eines kovarianten Tensorfeldes . . . . .	18

2.3.7	Geodätische Linien . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Die Krümmung des Raumes</b>	<b>19</b>
3.1	Krümmung bekannter Flächen . . . . .	19
3.1.1	Ebenen, bzw. allgemein flache Räume . . . . .	19
3.1.2	Zylinderoberfläche . . . . .	19
3.1.3	Kugeloberfläche . . . . .	19
3.2	Der Krümmungstensor . . . . .	19
3.2.1	Herleitung über Parallelverschiebung . . . . .	21
3.2.2	Formale Definition des Krümmungstensors . . . . .	22
3.2.3	Kovarianter Krümmungstensor . . . . .	22
3.2.4	Symmetrien des Krümmungstensors . . . . .	23
3.2.5	Ricci-Tensor und Krümmungsskalar . . . . .	23
3.2.6	Bianchi-Identität . . . . .	23
3.2.7	Trägheitssatz von Sylvester . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Physikalische Grundlagen der ART - Das Äquivalenzprinzip</b>	<b>25</b>
4.1	Äquivalenz von träger und schwerer Masse . . . . .	25
4.1.1	Träge Masse . . . . .	25
4.1.2	Schwere Masse . . . . .	25
4.2	Fahrstuhlexperimente . . . . .	27
1)	Weight-Watchers-Experiment . . . . .	27
2)	Frei-Fall-Experiment . . . . .	28
3)	Lichtablenkung im Schwerefeld . . . . .	31
4.3	Mathematische Bedeutung des Äquivalenzprinzips . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Die Einsteinschen Feldgleichungen</b>	<b>34</b>
5.1	Die Bewegungsgleichungen der ART und ihre nicht-relativistische Näherung	34
5.1.1	Kugelsymmetrische Massenverteilung . . . . .	36
5.1.2	Krümmung der Metrik für schwache Felder . . . . .	36
5.2	Formulierung der Feldgleichungen . . . . .	36
5.2.1	Der Energie-Impuls-Tensor . . . . .	36
1)	Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors . . . . .	37
2)	Ansatz für den Energie-Impuls-Tensor der Materie . . . . .	37
5.2.2	Aufstellung der Feldgleichungen . . . . .	38
1)	Forderungen an die linke Seite der Feldgleichungen . . . . .	38
	Bestimmung der Konstante $a$ . . . . .	38
	Bestimmung von $b$ und $\kappa$ . . . . .	39
	Der Einstein-Tensor . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Anwendungen der ART</b>	<b>41</b>
6.1	Die Schwarzschild-Metrik . . . . .	41

6.1.1	Aufstellung der Feldgleichungen . . . . .	41
6.1.2	Allgemeiner Ansatz für eine sphärisch-symmetrische Metrik . . . . .	41
1)	Koordinatentransformation . . . . .	42
2)	Berechnung der Christoffelsymbole . . . . .	42
3)	Komponenten des Ricci-Tensors . . . . .	42
4)	Lösung der Feldgleichungen . . . . .	43
5)	Bestimmung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ . . . . .	44
	Bestimmung von $\mathcal{C}$ . . . . .	44
	Bestimmung von $\mathcal{A}$ . . . . .	44
6.1.3	Folgerungen aus der Schwarzschild-Metrik . . . . .	44
1)	Messung der Radialkoordinate . . . . .	45
2)	Abstand von Punkten mit unterschiedlicher Radialkoordinate . . . . .	45
3)	Bedeutung der Koordinatenzeit . . . . .	46
6.1.4	Gravitationsrotverschiebung . . . . .	47
6.1.5	Periheldrehung . . . . .	50
1)	Aufstellen der Bewegungsgleichungen . . . . .	50
2)	Lösung der Bewegungsgleichungen . . . . .	51
	Formulierung in alternativer Form . . . . .	51
	Behandlung mit klassischer Störungstheorie . . . . .	51
6.1.6	Lichtablenkung im Gravitationsfeld . . . . .	54
	Untersuchung analog zur Periheldrehung . . . . .	54
	Die isotrope Schwarzschild-Metrik . . . . .	56
	Lichtablenkung außerhalb des Sonnensystems . . . . .	59
	Visualisierung von Einstein-Ringen . . . . .	59
6.1.7	Laufzeitverzögerung . . . . .	60
6.1.8	Global Positioning System . . . . .	62
6.2	Gravitationskollaps und schwarze Löcher . . . . .	62
6.2.1	Freier Fall auf ein Schwarzes Loch . . . . .	64
1)	Betrachtung für mitfallenden Beobachter . . . . .	64
2)	Betrachtung für einen weit entfernten Beobachter . . . . .	65
3)	Konsequenzen . . . . .	66
4)	Visualisierung des Falls auf ein Schwarzes Loch . . . . .	67
6.2.2	Erweiterung der Schwarzschildmetrik . . . . .	70
1)	Eddington-Finkelstein-Koordinaten . . . . .	70
2)	Kruskal-Szekeres-Koordinaten . . . . .	71



# 1 Bewegung im Gravitationsfeld: Die Geodätengleichung der ART

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie (Differentiagleichung der Geodäten) betrachten. Wir haben bereits gesehen, dass

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (1.1)$$

gilt. Wie in der SRT soll ein Teilchen auf solch einer Bahn laufen, dass die Variation

$$\delta \int ds = 0 \quad (1.2)$$

verschwindet. Wir können nun für  $ds$  Gleichung (1.1) einsetzen und noch mit  $ds$  erweitern. Für das Integral folgt dann:

$$\int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \cdot \frac{ds}{ds} \quad (1.3)$$

Zieht man jetzt das  $ds$  im Nenner des Bruches unter die Wurzel, so kann man dem Ausdruck unter dem Integral ein Funktional der Form  $\mathcal{L}(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds})$  zuordnen. Man erhält nämlich

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} ds = \delta \int \mathcal{L}\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds}\right) ds. \quad (1.4)$$

Dabei ist die Funktion  $\mathcal{L}\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds}\right)$  gleich 1 entlang des Weges. Aus der EULER-LAGRANGE-GLEICHUNG zur Variation

$$\delta \int \mathcal{L}\left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds}\right) ds = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\alpha}{ds} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (1.5)$$

folgt mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{dx^\alpha}{ds} \right)} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \left( g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \stackrel{g_{\alpha\mu} \equiv g_{\mu\alpha}}{=} \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (1.6)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (1.7)$$

die Gleichung

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right] - \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.8)$$

Unter Ausnutzung von

$$\frac{d}{ds}g_{\alpha\nu} = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \quad (1.9)$$

ergibt sich

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\alpha\nu} \frac{d^2x^\nu}{ds^2} - \frac{1}{\mathcal{L}^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.10)$$

Da  $\mathcal{L} = 1$  entlang des Weges ist, folgt  $\partial \mathcal{L}/ds = 0$ , d.h. der entsprechende Term verschwindet.

Die übrigbleibende Gleichung wird mit  $\mathcal{L}$  durchmultipliziert um auf

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\alpha\nu} \frac{d^2x^\nu}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (1.11)$$

zu kommen. Im folgenden Schritt nutzen wir aus, dass aufgrund der Symmetrie von  $g_{\mu\nu}$ , d.h.  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ , auch

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} \quad (1.12)$$

geschrieben werden kann. Da über  $\mu$  und  $\nu$  summiert wird, können wir diese Indizes im zweiten Term auch vertauschen und kommen auf

$$g_{\alpha\nu} \frac{d^2x^\nu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.13)$$

Dabei heißt der Faktor

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \stackrel{\text{Def}}{=} \Gamma_{\alpha\mu\nu} \quad (1.14)$$

CHRISTOFFELSYMBOL 1. ART. Durchmultiplizieren mit  $g^{\sigma\alpha}$  unter Berücksichtigung von  $g^{\sigma\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\sigma$  ergibt schließlich

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + g^{\sigma\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.15)$$

Führt man noch die CHRISTOFFELSYMBOLE 2. ART

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = g^{\sigma\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (1.16)$$

ein, so folgt die

---

GEODÄTENGLEICHUNG

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (1.17)$$

In der Geodätengleichung steckt die Gravitation also über den metrischen Tensor in den Christoffel-Symbolen. Es sei angemerkt, dass das Christoffelsymbol 2. Art *kein* Tensor ist, wie wir später zeigen werden!

## 2 Riemannsche Geometrie

### 2.1 Tensoralgebra

Sei  $x^\mu$  Vektor in einer beliebig gewählten  $n$ -dimensionalen Basis. Gesucht wird das Transformationsverhalten verschiedener Größen bei einer Koordinatentransformation, d.h. einem Wechsel der Basis

$$x^\mu \mapsto \bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^\mu). \quad (2.1)$$

Die Betrachtung in diesem Kapitel ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse der SRT.

#### 2.1.1 Kontravariante Tensoren

Die Differentiale  $dx^\mu$  transformieren sich über

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (2.2)$$

Jede  $n$ -komponentige Größe  $A^\mu$ , die sich wie die Differentiale transformiert, also nach der Vorschrift

$$\bar{A}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu \quad (2.3)$$

heißt KONTRAVARIANTER TENSOR 1.STUFE.

#### 2.1.2 Kovariante Tensoren

Um das Transformationsverhalten der Ableitungen  $\partial/\partial x^\mu$  zu bestimmen, betrachten wir eine Funktion  $f(\bar{x}^\nu)$ . Für diese gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} f(\bar{x}^\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x^\mu(\bar{x}^\nu)). \quad (2.4)$$

Jede  $n$ -komponentige Größe  $B_\nu$ , die sich wie die Koordinatenableitungen ( $n$ -dim. Gradient) transformiert, also nach der Vorschrift

$$\bar{B}^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} B_\mu \quad (2.5)$$

heißt KOVARIANTER TENSOR 1.STUFE.

### 2.1.3 Tensoren höherer Stufe

Das Transformationsverhalten von Tensoren höherer Stufe ergibt sich wie gehabt. Sei z.B.  $C^\mu{}_\nu$  einfach kontra- und einfach kovarianter Tensor. Dann ist

$$\bar{C}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} C^\alpha{}_\beta. \quad (2.6)$$

Das Tensorprodukt und die Tensorverjüngung (Ausspuren) sind ebenfalls analog zur SRT definiert, z.B.

$$D^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu, \quad (2.7)$$

bzw. das Skalarprodukt

$$C = A^\mu B_\mu. \quad (2.8)$$

In diesem Fall ist  $C$  TENSOR 0.STUFE bzw. ein Skalar.

### 2.1.4 Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$

Das infinitesimale Wegelement besitzt die Form

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.9)$$

In  $n$ -dimensionalen minkowskischen Koordinaten gilt  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  und damit

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.10)$$

Wir betrachten eine Koordinatentransformation  $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^\alpha)$ ,  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha$ .

Dann ist das Linienelement gegeben über

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} d\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta, \quad (2.11)$$

mit

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Allgemein gilt

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Das heißt  $g_{\mu\nu}$  ist ein symmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe!

### 2.1.5 „Herunterziehen“ von Indizes

Das herauf und herunterziehen von Indizes geschieht wie in der SRT mit Hilfe der Metrik. So ist etwa  $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$  kovarianter Tensor 1. Stufe. Für Tensoren höherer Stufe gilt

analog

$$A_{\mu\nu\dots} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\dots A^{\alpha\beta\dots}. \quad (2.14)$$

Um Indizes „heraufzuziehen“ benötigen wir  $g^{\mu\nu}$ . Um die Form dieses Tensors zu bekommen, benutzen wir, dass

$$g^{\mu\nu}A_\nu = g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}A^\alpha = A^\mu \quad (2.15)$$

gelten muss, d.h. es ist

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu. \quad (2.16)$$

Damit ist  $g^{\mu\nu}$  das „Inverse“ von  $g_{\mu\nu}$ .

### Beispiele

**Zweidimensionale Ebene** In kartesischen Koordinaten ist

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.17)$$

d.h. wir haben

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Wir gehen über zu Polarkoordinaten mit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , d.h.  $\bar{x}^1 = r$ ,  $\bar{x}^2 = \varphi$ . Der metrische Tensor in Polarkoordinaten ergibt sich über

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Es folgt also für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{11} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \\ \bar{g}_{22} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2 = r^2, \\ \bar{g}_{12} &= \bar{g}_{21} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \cos \varphi(-\sin \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Für das Linienelement folgt also:

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (d\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 (d\bar{x}^2)^2, \quad (2.21)$$

mit dem metrischen Tensor

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Koordinaten  $\bar{x}^1$  und  $\bar{x}^2$  sind *nicht* kartesisch, aber der Raum ist flach!

**Dreidimensionale Ebene** In kartesischen Koordinaten ist hier

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.23)$$

und

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Wir gehen über zu Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, y = r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta, \quad (2.25)$$

also

$$\bar{x}^1 = r, \bar{x}^2 = \vartheta, \bar{x}^3 = \varphi. \quad (2.26)$$

Daraus folgt für das Linienelement

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \\ &= (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2 (\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^1)^2 \sin^2(\bar{x}^2) (\bar{x}^3)^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{x}^1)^2 \sin^2(\bar{x}^2) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Die Koordinaten  $\bar{x}^1$ ,  $\bar{x}^2$  und  $\bar{x}^3$  sind wieder *nicht* kartesisch, aber der Raum ist flach!

**Oberfläche der Einheitskugel** Die Oberfläche der Einheitskugel ist ein zweidimensionaler gekrümmter Raum. Die Beschreibung der Kugeloberfläche *ohne* Einbettung in den dreidimensionalen Raum erfolgt durch Koordinaten  $x^1 = \vartheta$ ,  $x^2 = \varphi$  mit metrischem Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(x^1) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Das Linienelement ist also

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \sin^2(x^1) (dx^2)^2 = (d\vartheta)^2 + \sin^2(\vartheta) (d\varphi)^2. \quad (2.30)$$

**Hinweis:** Die Metrik  $g_{\mu\nu}$  ist für  $x^1 = 0$  oder  $x^1 = \pi$  nicht invertierbar! Es existieren also Koordinatensingularitäten. Die Christoffelsymbole 1. Art  $\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} \right)$  ergeben sich mit

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0 \quad \text{sonst} \quad (2.31)$$

zu

$$\begin{aligned}\Gamma_{111} &= \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = \Gamma_{222} = \Gamma_{211} = 0, \\ \Gamma_{122} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{212} &= \Gamma_{221} = \sin \vartheta \cos \vartheta.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Aus der Geodätengleichung

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0\tag{2.33}$$

folgt für  $\alpha = 1$

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0\tag{2.34}$$

und für  $\alpha = 2$

$$\sin^2 \vartheta \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0.\tag{2.35}$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lagrange'schen Gleichungen für

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.\tag{2.36}$$

## 2.1.6 Das Volumenelement

In kartesischen Koordinaten gilt

$$dV = \prod_{i=1}^n dx^i.\tag{2.37}$$

Bei Transformation der Koordinaten durch  $x^\mu = x^\mu(\bar{x}^\alpha)$  und  $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x}^\alpha$  ergibt sich für das Volumenelement

$$dV = \prod_{i=1}^n dx^i = \det \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right) \prod_{k=1}^n d\bar{x}^k = d\bar{V},\tag{2.38}$$

mit der JACOBI-MATRIX

$$\mathcal{J} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right).\tag{2.39}$$

In kartesischen Koordinaten gilt  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  und damit  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \delta_{\mu\nu}$ . Mit

$$g = \det(g_{\mu\nu})\tag{2.40}$$

folgt

$$\begin{aligned}\bar{g} &= \det(\bar{g}_{\alpha\beta}) = \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta} \eta_{\mu\nu}\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}\right) \cdot \det(\delta_{\mu\nu}) = \left[\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}\right)\right]^2\end{aligned}\tag{2.41}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die Determinante separierbar ist

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B\tag{2.42}$$

und dass  $\det(\delta_{\mu\nu}) = 1$  in kartesischen Koordinaten ist.

Damit folgt

$$d\bar{V} = \sqrt{\bar{g}} \prod_{i=1}^n d\bar{x}^i.\tag{2.43}$$

Allgemein gilt für krummlinige Koordinaten

$$d\bar{V} = \sqrt{g} \prod_\mu d\bar{x}^\mu,\tag{2.44}$$

mit  $g = \det(g_{\mu\nu})$ .

## 2.1.7 Linearformen

Sei  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $e_1, \dots, e_n$ . Eine Abbildung

$$f \mapsto \mathbb{R}\tag{2.45}$$

heißt *linear*, wenn gilt:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{und } x, y \in V.\tag{2.46}$$

Man sagt  $f$  ist Linearform über  $V$ .

### 1) Der Dualraum

Die Gesamtheit der linearen Abbildungen  $V \mapsto \mathbb{R}$  heißt DUALRAUM  $V^*$

Wenn  $(e_1, \dots, e_n)$  eine Basis in  $V$  ist, so existiert eine eindeutig bestimmte Basis  $(\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n)$  in  $V^*$  mit

$$\bar{e}^i(e_j) = \delta_j^i.\tag{2.47}$$

## 2) Multilinearformen

Ein Tensor der Stufe  $(p,q)$  ( $p$ -fach kontra-,  $q$ -fach kovariant) ist eine in allen Argumenten lineare Abbildung

$$(V_1^*, \dots, V_p^*, V_{p+1}, \dots, V_{p+q}) \mapsto \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

Mit der Basis

$$(\mathbf{e}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}) = (\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \bar{\mathbf{e}}^{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}^{j_q}) \quad (2.49)$$

ergeben sich die Komponenten des Tensor zu

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(\mathbf{e}_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}). \quad (2.50)$$

### 2.1.8 Metrische Räume

**Definition:** Eine Metrik ist ein symmetrischer Tensor vom Typ  $(0,2)$ :

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu \\ g_{\mu\nu} &= g(e_\mu, e_\nu) = g_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Umkehrung:  $g^*$  ist Tensor der Stufe  $(2,0)$  und es gilt:

$$\begin{aligned} g^*(\bar{u}, \bar{v}) &= g^{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= g^*(\bar{e}^\mu, \bar{e}^\nu) = g^{\nu\mu} \\ g^*(\bar{e}^\mu, \bar{e}^\alpha) g(e_\alpha, e_\nu) &= g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \end{aligned} \quad (2.52)$$

Das SKALARPRODUKT zwischen  $x^\mu$  und  $x^\nu$  ist definiert als

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (2.53)$$

## 2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Räume

### 2.2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Eine  $n$ -dim. Mannigfaltigkeit  $M^n$  ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Punkt besitzt eine Umgebung:

$$U \leftrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma(P) = (x^1(P), \dots, x^n(P)). \quad (2.54)$$

2. Der ganze Raum ist durch endlich viele (abzählbar viele) Umgebungen überdeckbar.

3. Zu je zwei Punkten existieren disjunkte Umgebungen (Hausdorffscher Raum).
4.  $M^n$  ist zusammenhängend.

$M^n$  heißt DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT, wenn zwei sich überlappende Koordinatensysteme ( $x^i$  und  $x^{i'}$ ) durch eine ( $r$ -fach) stetig differenzierbare Koordinatentransformation

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.55)$$

mit nicht singulärer Funktionaldeterminante verknüpft sind.

## 2.2.2 Riemannsche Räume

Eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M^n$  mit einem fest vorgegebenen und nicht singulären, positiv definiten symmetrischen kovarianten Tensorfeld 2.Stufe (Metrik) heißt  $n$ -dimensionaler RIEMANNSCHER RAUM.

## 2.2.3 Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Ist die Metrik des betrachteten Raumes nicht positiv definit, wie in der ART, so spricht man von einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit.

## 2.2.4 Tangentialraum

Sei  $f = f(x^i)$  koordinatenmäßige Darstellung einer skalaren Funktion auf  $M^n$ .

In jedem Punkt  $P$  sind  $n$  Tangentialvektoren  $\partial_i, i = 1, \dots, n$  gegeben:

$$\partial_i|_P(f) \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right| \equiv f_{,i}|_P. \quad (2.56)$$

Dabei bezeichnet  $T_P$  den Tangentialraum im Punkt  $P$ .

## 2.2.5 Kotangentialraum

Zur Definition des Kotangentialraums betrachten wir  $df$  längs einer Kurve  $x^i = x^i(s)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad (2.57)$$

mit  $\frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i} \in T_P$  und  $dx^i \in T_P^*$ , mit dem Kotangentialraum  $T_P^*$ .

### 2.2.6 Koordinatentransformationen

Für Koordinatentransformationen  $\bar{x}^\nu = \bar{x}^\nu(x^\mu)$  gilt

$$d\bar{x}^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu = \alpha_\mu{}^\nu dx^\mu \quad (2.58)$$

und

$$\bar{\partial}_\nu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \alpha^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.59)$$

mit den zueinander inversen Transformationen  $\alpha_\mu{}^\nu$  und  $\alpha^\mu{}_\nu$ .

Mit den neu eingeführten Größen  $\alpha$  lässt sich auch die Transformation des metrischen Tensors schreiben:

$$\bar{g}_{\mu'\nu'} = \alpha^\varrho{}_{\mu'} \alpha^\sigma{}_{\nu'} g_{\varrho\sigma}. \quad (2.60)$$

## 2.3 Tensoranalysis

### 2.3.1 Parallelverschiebung und affine Zusammenhänge

#### 1) Parallelverschiebung im zweidimensionalen Euklidischen Raum

Wir betrachten den zweidimensionalen Euklidischen Raum. Gegeben sei ein Vektorfeld  $F^\mu(x^\nu)$ .  $\tilde{F}$  bezeichne den parallel verschobenen Vektor. In kartesischen Koordinaten  $(x,y)$  mit Linienelement  $ds^2 = dx^2 + dy^2$  gilt einfach  $\tilde{F}^\mu = F^\mu$ . Wir möchten nun aber in Polarkoordinaten  $(r,\varphi)$  rechnen.

Für das Linienelement ergibt sich dann

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (2.61)$$

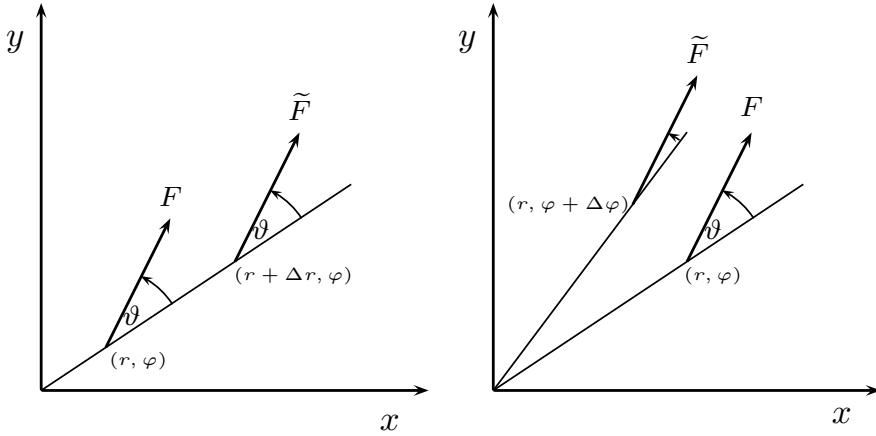
und für die Komponenten des Vektors

$$F^r = F \cos \vartheta, \quad F^\varphi = F \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (2.62)$$

Dabei ist  $F = \sqrt{g_{\mu\nu} F^\mu F^\nu}$ . Die Komponenten ergeben sich leicht aus der Invarianz von  $F$ , siehe Abbildung 2.1.

**Verschiebung entlang  $r$**  Bei Verschiebung entlang  $r$  ergibt sich nun

$$\tilde{F}^r = F^r, \quad \tilde{F}^\varphi = \frac{r}{r + \Delta r} F^\varphi \approx F^\varphi - \frac{\Delta r}{r} F^\varphi. \quad (2.63)$$



**Abbildung 2.1:** Paralleltransport eines Vektors im Euklidischen Raum entlang der  $r$  und  $\varphi$ -Koordinate.

**Verschiebung entlang  $\varphi$**  Bei Verschiebung entlang  $\varphi$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{F}^r &= F \cos(\vartheta - \Delta\varphi) \simeq F \cos \vartheta + F \sin \vartheta \Delta\varphi = F^r + F^\varphi r \Delta\varphi, \\ \tilde{F}^\varphi &= F \frac{\sin(\vartheta - \Delta\varphi)}{r} \simeq F \frac{\sin \vartheta}{r} - F \frac{\cos \vartheta}{r} = F^\varphi - F^r \frac{\Delta\varphi}{r}.\end{aligned}\quad (2.64)$$

**Schlussfolgerung** Die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte lassen sich kompakt darstellen in der Form

$$\tilde{F}^\mu(x + \Delta x) = F^\mu(x) - F^\lambda \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \Delta x^\nu, \quad (2.65)$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{rr} &= 0, & \Gamma^r_{r\varphi} &= 0, \\ \Gamma^\varphi_{rr} &= 0, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^r_{\varphi r} &= 0, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r, \\ \Gamma^\varphi_{\varphi r} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} &= 0.\end{aligned}\quad (2.66)$$

## 2) Verallgemeinerung

Wir betrachten die Parallelverschiebung eines Vektor  $A^\mu$  vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$ . Wir legen in  $P_1$  eine lokal euklidische Basis zugrunde und verschieben  $A^\mu(P_1)$  in dieser Basis parallel. Der parallel verschobene Vektor hat dann in  $P_2$  die Komponenten

$$A_\parallel^\mu(P_2) = A^\mu(P_1) + \delta A^\mu(A^\alpha, dx^\beta). \quad (2.67)$$

**Beachte:**  $A^\mu$  bleibt als geometrisches Objekt unverändert, es ändert sich nur die Projektion auf die mitgeführte Basis.  $\delta A^\mu$  wird verursacht durch Änderung der Richtung der Koordinatenlinien. Für kleine Abstände zwischen  $P_1$  bei  $x^\beta$  und  $P_2$  bei  $x^\beta + dx^\beta$  hängt  $\delta A^\mu(A^\alpha, dx^\beta)$  linear von  $A^\alpha$  und  $dx^\beta$  ab, d.h. es gilt

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta. \quad (2.68)$$

Die  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  heißen in diesem Zusammenhang ÜBERGANGSKOEFFIZIENTEN, bzw. Koeffizienten des affinen Zusammenhangs.  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  ist die  $\mu$ -te Komponente der Änderung des Basisvektors  $e_\alpha$  bei Parallelverschiebung längs eines Basisvektors  $e_\beta$ .

**Berechnung der Übergangskoeffizienten** Zur Berechnung der Übergangskoeffizienten betrachten wir den Skalar  $g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ , der sich bei Parallelverschiebung nicht ändert. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu) = g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu dx^\beta + g_{\mu\nu}(\delta A^\mu) A^\nu + g_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu \\ &= g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu dx^\beta - g_{\mu\nu} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha A^\nu dx^\beta - g_{\mu\nu} A^\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta \\ &= (g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu - g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta}) A^\mu A^\nu dx^\beta. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Da  $A^\mu$  und  $dx^\beta$  beliebig gewählt werden können, ergibt sich zur Bestimmung der  $\Gamma$  das lineare Gleichungssystem

$$g_{\mu\nu,\beta} A^\mu A^\nu - g_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu\beta} = 0. \quad (2.70)$$

Es ergibt sich als eine Lösung

$$\Gamma^\alpha_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\mu} + g_{\mu\sigma,\beta} - g_{\mu\beta,\sigma}). \quad (2.71)$$

D.h. die Übergangskoeffizienten entsprechen den Christoffelsymbolen.<sup>1</sup> Um dies zu erkennen, setzen wir diese Lösung in (2.70) ein. Unter Berücksichtigung von  $g_{\alpha\nu} g^{\alpha\sigma} = \delta_\nu^\sigma$

---

<sup>1</sup>Streng genommen sind die Christoffelsymbole und die Übergangskoeffizienten nicht allgemein dasselbe. In der mathematischen Literatur werden Christoffelsymbole in der Form  $\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$  geschrieben. Die Übergangskoeffizienten ergeben sich dann über

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} + \frac{1}{2} (T_\nu^\kappa{}_\mu + T_\mu^\kappa{}_\nu + T^\kappa_{\mu\nu}).$$

Dabei bezeichnet  $T^\kappa_{\mu\nu}$  den Torsionstensor. In allen hier betrachteten Raumzeiten verschwindet der Torsionstensor allerdings, deshalb gehen wir auf diese Unterscheidung nicht ein. Details zu diesem Thema finden sich im Buch von Nakahara.[1]

führt dies auf

$$g_{\mu\nu,\beta} - \frac{1}{2}(g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\nu,\beta} - g_{\mu\beta,\nu}) - \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\mu,\beta} - g_{\nu\beta,\mu}) = 0. \quad (2.72)$$

Wobei  $g_{\nu\mu,\beta} = g_{\mu\nu,\beta}$  benutzt wurde.

Die Lösung ist allerdings nicht eindeutig, Gleichung (2.70) liefert wegen der Symmetrie von  $g_{\mu\nu}$  nur  $n^2 \cdot (n+1)/2$  unabhängige Gleichungen für  $n^3$  unbekannte  $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ . Im Allgemeinen gilt  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \neq \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ . In der Riemannschen Geometrie bezeichnet

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \quad (2.73)$$

den TORSIONSTENSOR. In der ART werden symmetrische Übergangskoeffizienten gewählt:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}. \quad (2.74)$$

D.h. der Torsionstensor verschwindet.

### 2.3.2 Transformationsverhalten der Christoffelsymbole 1.Art

Wir schreiben die Christoffel-Symbole 1.Art mit der neuen Schreibweise aus:

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}) \quad (2.75)$$

die Christoffel-Symbole 2.Art waren über

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = g^{\mu\varrho}\Gamma_{\varrho\nu\lambda} \quad (2.76)$$

definiert und transformieren sich nach der Gleichung

$$\bar{\Gamma}^{\mu'}_{\nu'\lambda'} = \alpha_{\nu'}{}^\varrho \alpha_{\lambda'}{}^\sigma \alpha_\tau{}^{\mu'} \Gamma^\tau_{\varrho\sigma} + \frac{\partial^2 x^\varrho}{\partial \bar{x}^{\nu'} \partial \bar{x}^{\lambda'}} \frac{\partial \bar{x}^{\mu'}}{\partial x^\varrho} \quad (2.77)$$

das heißt die Christoffel-Symbole 2.Art sind *keine* Tensoren wie bereits erwähnt wurde.

### 2.3.3 Die kovariante Ableitung

Sei  $A^\nu$  ein kontravarianter Vektor, dann ist

$$\bar{A}^\nu = \alpha_\mu{}^\nu A^\mu. \quad (2.78)$$

Die Ableitungen eines kontravarianten Vektors sind gegeben über

$$A^{\mu}_{,\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (2.79)$$

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten für  $A^{\mu}_{,\nu}$ . Es ergibt sich

$$\bar{A}^{\mu'}_{,\nu'} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\nu'}} \bar{A}^{\mu'} = \alpha_{\nu'}{}^{\varrho} \frac{\partial}{\partial x^{\varrho}} \left[ \alpha_{\lambda}{}^{\mu'} A^{\lambda} \right] = \alpha_{\nu'}{}^{\varrho} \alpha_{\lambda}{}^{\mu'} \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\varrho}} + \underbrace{\alpha_{\nu'}{}^{\varrho} A^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\varrho}} \alpha_{\lambda}{}^{\mu'}}_Q. \quad (2.80)$$

Wir untersuchen den mit Q bezeichneten Term näher. Falls  $\alpha$  koordinatenabhängig ist, was wir in der ART ja explizit zulassen wollen, wird dieser nicht verschwinden. Unter Verwendung einer zu Gleichung (2.77) analogen Beziehung ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x^{\varrho}} \alpha_{\lambda}{}^{\mu'} = \frac{\partial^2 \bar{x}^{\mu'}}{\partial x^{\varrho} \partial x^{\lambda}} = \alpha_{\sigma}{}^{\mu'} \Gamma^{\sigma}{}_{\varrho \lambda} - \alpha_{\varrho}{}^{\nu'} \alpha_{\lambda}{}^{\sigma'} \Gamma^{\mu'}{}_{\nu' \sigma'}. \quad (2.81)$$

Damit transformiert sich  $A^{\mu}_{,\nu}$  nicht wie ein Tensor! Wir setzen den für Q gewonnenen Ausdruck wieder in (2.80) ein, wobei wir den Summationsindex  $\sigma$  in  $\lambda$  umbenennen um geschickt vereinfachen zu können und kommen auf

$$\bar{A}^{\mu'}_{,\nu'} = \alpha_{\nu'}{}^{\varrho} \alpha_{\lambda}{}^{\mu'} \left( \frac{\partial A^{\lambda}}{\partial x^{\varrho}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\varrho \sigma} A^{\sigma} \right) - \underbrace{\alpha_{\lambda}{}^{\sigma'} \Gamma^{\mu'}{}_{\nu' \sigma'}}_R A^{\lambda}. \quad (2.82)$$

Den mit R bezeichneten Term formen wir um zu

$$\alpha_{\lambda}{}^{\sigma'} \Gamma^{\mu'}{}_{\nu' \sigma'} A^{\lambda} = \Gamma^{\mu'}{}_{\nu' \sigma'} \bar{A}^{\sigma'}. \quad (2.83)$$

Wir setzen wieder in Gleichung (2.82) ein und sehen dann dass

$$\bar{A}^{\mu'}_{,\nu'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\nu' \sigma'} \bar{A}^{\sigma'} = \alpha_{\nu'}{}^{\varrho} \alpha_{\lambda}{}^{\mu'} \left( A^{\lambda}{}_{,\varrho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\varrho \sigma} A^{\sigma} \right) \quad (2.84)$$

gilt. Darin erkennen wir wieder ein Tensortransformationsverhalten. Wir definieren daher die KOVARIANTE ABLEITUNG über

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} \equiv A^{\mu}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu \sigma} A^{\sigma}. \quad (2.85)$$

$A^{\mu}_{;\nu}$  ist Tensor der Stufe (1,1). Entsprechend ergibt sich die kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors  $A_{\mu}$  zu

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} \equiv A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\sigma}{}_{\mu \nu} A^{\sigma} \quad (2.86)$$

und die kovariante Ableitung von Tensoren höherer Stufe zu

$$\nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \underbrace{\Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha}_{\substack{\text{alle kontra-} \\ \text{varianten Indizes}}} T_{\beta\dots}^{\lambda\dots} - \underbrace{\Gamma_{\gamma\beta}^\lambda}_{\substack{\text{alle kovarianten} \\ \text{Indizes}}} T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots}. \quad (2.87)$$

### Mehrfache kovariante Ableitung

Ein Tensor kann natürlich auch mehrfach kovariant abgeleitet werden. Sei  $A^\mu$  kontravarianter Tensor 1. Stufe, dann ist  $A^\mu_{;\beta}$  Tensor der Stufe (1,1) und

$$(A^\mu_{;\beta})_{;\gamma} = A^\mu_{;\beta\gamma} \quad (2.88)$$

Tensor der Stufe (1,2). Außerdem gilt

$$A^\mu_{,\beta\gamma} = A^\mu_{,\gamma\beta} \quad \text{aber im Allgemeinen} \quad A^\mu_{;\beta\gamma} \neq A^\mu_{;\gamma\beta} \quad (2.89)$$

### 2.3.4 Ko- und kontravariantes Differential

Sei  $A^\mu(x^\beta)$  ein kontravariantes Vektorfeld, dann ist

$$DA^\mu \equiv dA^\mu - \delta A^\mu = A^\mu_{,\beta} dx^\beta + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta = A^\mu_{;\beta} dx^\beta \quad (2.90)$$

ebenfalls ein kontravariantes Vektorfeld.

Sei weiter  $B_\mu(b^\beta)$  kovariantes Vektorfeld, dann ist auch

$$DB_\mu \equiv dB_\mu - \delta B_\mu = B_{\mu,\beta} dx^\beta - \Gamma^\alpha_{\mu\beta} B_\alpha dx^\beta = B_{\mu;\beta} dx^\beta \quad (2.91)$$

ein kovariantes Vektorfeld. Der Ausdruck für  $\delta B_\mu$  lässt sich einfach aus der Parallelverschiebung eines Skalarproduktes bestimmen. Aus  $\delta(A^\mu B_\mu) = 0$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(A^\mu B_\mu) = (\delta A^\mu) B_\mu + A^\mu \delta B_\mu \\ &= -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha dx^\beta B_\mu + A^\mu \delta B_\mu \\ &= A^\alpha (\delta B_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} B_\mu dx^\beta). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Da  $A^\alpha$  beliebig ist folgt daraus

$$\delta B_\alpha = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} B_\mu dx^\beta \quad (2.93)$$

### 2.3.5 Divergenz

Wir definieren die Divergenz eines Vektorfeldes  $A^\mu$  als

$$A^\mu_{;\mu} = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} A^\alpha. \quad (2.94)$$

Mit

$$\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\mu,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\mu} - g_{\alpha\mu,\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha}, \quad (2.95)$$

wobei die Schreibweise

$$\det(g_{\mu\nu}) = g \quad (2.96)$$

verwendet wird, ergibt sich

$$A^\mu_{;\mu} = A^\mu_{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (A^\mu \sqrt{g}). \quad (2.97)$$

### 2.3.6 Rotation eines kovarianten Tensorfeldes

Wir definieren die Rotation eines kovarianten Tensorfeldes über

$$\varphi_{\mu\nu} = B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu}. \quad (2.98)$$

Sie ist damit ein antisymmetrischer kovarianter Tensor 2. Stufe.

Bei verschwindender Torison gilt weiter

$$B_{\nu;\mu} - B_{\mu;\nu} = B_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu} B_\sigma - B_{\mu,\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} B_\sigma = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu}. \quad (2.99)$$

### 2.3.7 Geodätische Linien

Mit der kovarianten Ableitung lassen sich Geodäten einfach definieren. Sei die Vierergeschwindigkeit  $u^\mu = dx^\mu/ds$  über die Ableitung nach der Bogenlänge gegeben. Eine Geodäte ist dann in Analogie zur klassischen Mechanik (Geschwindigkeit bleibt konstant) über das Verschwinden der kovarianten Ableitung der Geschwindigkeit definiert:

$$\frac{Du^\sigma}{ds} = \frac{du^\sigma}{ds} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} u^\mu \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (2.100)$$

Die kompakte Darstellung der Geodätengleichung ist also

$$\frac{Du^\sigma}{ds} = 0. \quad (2.101)$$

---

# 3 Die Krümmung des Raumes

In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, wie wir qualitativ und quantitativ feststellen können, ob ein Raum gekrümmmt ist. Diese Aussage wird sich direkt nicht an Hand des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  oder der affinen Zusammenhänge  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  treffen lassen. Zwar steckt die Information über die Krümmung natürlich in der Metrik, sie kann an dieser aber nicht einfach abgelesen werden. Dies ist leicht einzusehen, denn auch bei Euklidischen, also flachen Räumen mit krummlinigen Koordinaten, etwa Polarkoordinaten sind die Metrik und die affinen Zusammenhänge nicht trivial.

## 3.1 Krümmung bekannter Flächen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige bekannte Flächen hinsichtlich ihrer Krümmung um ein Gefühl für diesen Begriff zu bekommen. Ob eine Fläche gekrümmmt ist oder nicht, wollen wir dabei über die Auswirkung einer Parallelverschiebung eines Vektors auf verschiedenen Wegen in der jeweiligen Fläche charakterisieren.

### 3.1.1 Ebenen, bzw. allgemein flache Räume

Sei  $F^\mu$  ein Vektor. Wird  $F^\mu$  entlang eines geschlossenen Weges parallelverschoben, so stimmen der ursprüngliche und der parallelverschobene Vektor überein, d.h. es ist  $\delta F^\mu = 0$ , siehe Abbildung 3.1.

### 3.1.2 Zylinderoberfläche

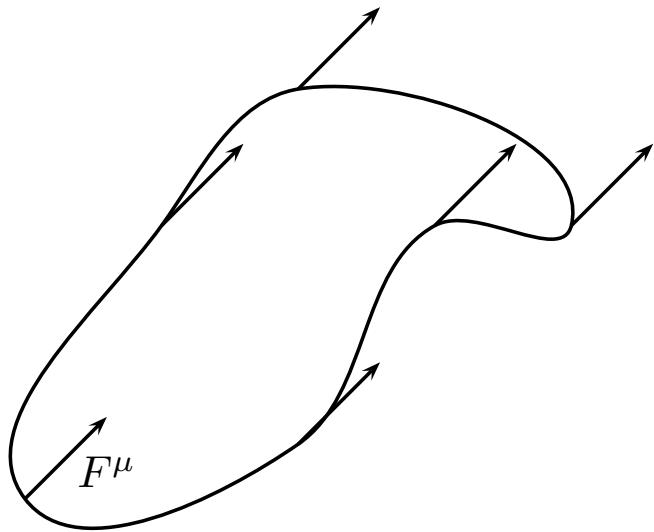
Auch beim Zylinder ist die Richtung des Vektors wegunabhängig, d.h. es gilt immer  $\delta F^\mu = 0$ .

### 3.1.3 Kugeloberfläche

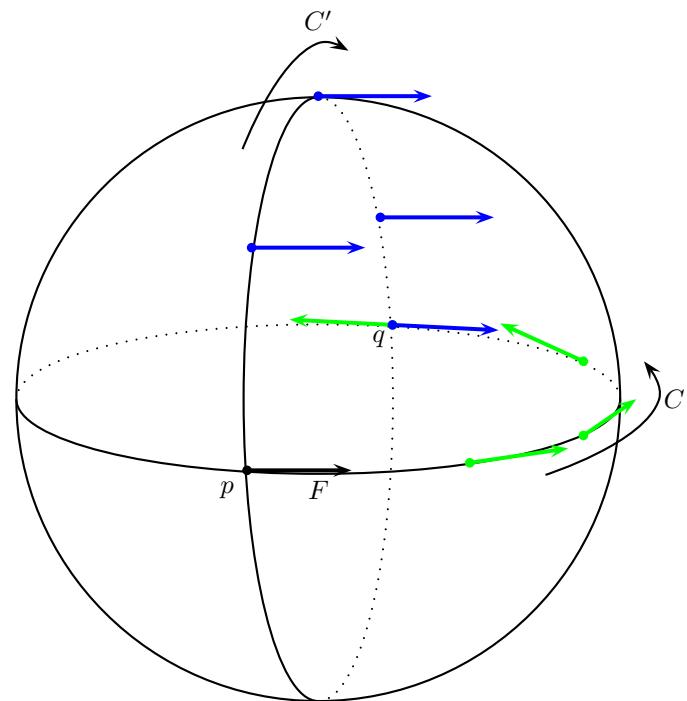
Gegeben sei nun ein Vektor  $F^\mu$  auf der Oberfläche einer Kugel (Abb. 3.2). Die natürliche Definition des Paralleltransports entlang eines Großkreises in diesem Fall ist so, dass der Winkel zwischen dem Vektor und dem Großkreis fest bleibt. Wird  $F$  entlang  $C$  und  $C'$  von  $p$  nach  $q$  paralleltransportiert, so zeigen die resultierenden Vektoren in entgegengesetzte Richtungen. Die Richtung des Vektors  $F^\mu(q)$  hängt also vom genommenen Weg ab.

## 3.2 Der Krümmungstensor

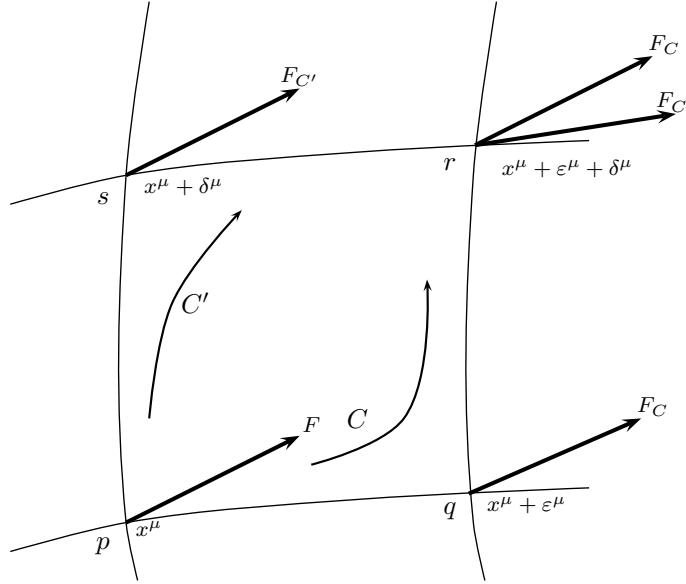
In den vorangegangenen Beispielen haben wir gesehen, dass die Wegabhängigkeit der Änderung  $\delta F^\mu$  eines Vektors bei Parallelverschiebung für verschiedene Räume unter-



**Abbildung 3.1:** Beim Paralleltransport eines Vektors in der Ebene stimmen der ursprüngliche und der parallelverschobene Vektor nach einem geschlossenen Weg überein.



**Abbildung 3.2:** Paralleltransport eines Vektors auf einer Kugeloberfläche entlang der Großkreise. Die Richtung, in die  $F^\mu$  zeigt, ist wegabhängig.



**Abbildung 3.3:** Paralleltransport eines Vektors  $F$  von  $p$  nach  $r$ .

schiedlich ist. Es liegt nahe, dass über diese Eigenschaft die Krümmung des Raumes charakterisiert werden kann.

### 3.2.1 Herleitung über Parallelverschiebung

Für eine strenge Behandlung betrachten wir ein infinitesimales Parallelogramm  $pqrs$  mit Koordinaten  $x^\mu$ ,  $x^\mu + \varepsilon^\mu$ ,  $x^\mu + \varepsilon^\mu + \delta^\mu$  und  $x^\mu + \delta^\mu$  (Abb. 3.3). Bei Paralleltransport von  $F^\mu$  entlang  $C = pqr$  erhalten wir den Vektor  $F_C^\mu(r)$ . Bei  $q$  ergibt sich

$$F_C^\mu(q) = F^\mu - F^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \varepsilon^\nu. \quad (3.1)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} F_C^\mu(r) &= F_C^\mu(q) - F_C^\kappa(q) \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(q) \delta^\nu \\ &= F_0^\mu - F_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \varepsilon^\nu - (F_0^\kappa - F_0^\rho \Gamma_{\xi\rho}^\kappa(p) \varepsilon^\xi) \times (\Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) + \Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu(p) \varepsilon^\lambda) \delta^\nu \\ &\simeq F_0^\mu - F_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - F_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu - F_0^\kappa (\Gamma_{\nu\kappa,\lambda}^\mu(p) - \Gamma_{\lambda\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\nu\rho}^\mu(p)) \varepsilon^\lambda \delta^\nu \end{aligned} \quad (3.2)$$

bei Berücksichtigung von Termen bis zweite Ordnung in  $\delta$  und  $\varepsilon$ . Analog ergibt sich

$$F_{C'}^\mu(r) \simeq F_0^\mu - F_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \delta^\nu - F_0^\kappa \Gamma_{\nu\kappa}^\mu(p) \varepsilon^\nu - F_0^\kappa (\Gamma_{\lambda\kappa,\nu}^\mu(p) - \Gamma_{\nu\kappa}^\rho(p) \Gamma_{\lambda\rho}^\mu(p)) \varepsilon^\lambda \delta^\nu. \quad (3.3)$$

### 3 Die Krümmung des Raumes

---

Für die Differenz der beiden Vektoren ergibt sich dann schließlich

$$\begin{aligned} F_{C'}(r) - F_C(r) &\simeq F_0^\kappa \left( \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda}(p) - \Gamma^\mu_{\lambda\kappa,\nu}(p) - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}(p)\Gamma^\mu_{\nu\rho}(p) + \Gamma^\rho_{\nu\kappa}(p)\Gamma^\mu_{\lambda\rho}(p) \right) \varepsilon^\lambda \delta^\nu \\ &= F_0^\kappa R^\mu_{\kappa\lambda\nu} \varepsilon^\lambda \delta^\nu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet

$$R^\mu_{\kappa\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\nu\kappa,\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\kappa,\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\kappa}\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\rho_{\nu\kappa}\Gamma^\mu_{\lambda\rho} \quad (3.5)$$

den KRÜMMUNGSTENSOR oder RIEMANN-TENSOR mit Stufe (1,3).

#### 3.2.2 Formale Definition des Krümmungstensors

Wir hatten bereits gesehen, dass kovariante Ableitungen im Allgemeinen nicht vertauschen, siehe Gleichung (2.89). Formal lässt sich der Krümmungstensor über die Differenz von zweifachen kovarianten Ableitungen definieren. Sei  $A^\mu$  ein kontravarianter Tensor 1. Stufe, dann ist

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma) A^\mu = A^\mu_{;\beta\gamma} - A^\mu_{;\gamma\beta} = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha. \quad (3.6)$$

Um dies zu sehen, rechnen wir explizit:

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\beta\gamma} &= (A^\mu_{\beta})_{,\gamma} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} A^\lambda_{;\beta} - \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} A^\mu_{\lambda} \\ &= (A^\mu_{,\beta} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} A^\lambda)_{,\gamma} + \Gamma^\mu_{\gamma\lambda} (A^\lambda_{,\beta} + \Gamma^\lambda_{\beta\sigma} A^\sigma) - \Gamma^\lambda_{\gamma\beta} (A^\mu_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} A^\sigma). \end{aligned} \quad (3.7)$$

und analog  $A^\mu_{;\gamma\beta}$ . Unter Beachtung der Vertauschbarkeit der Ableitungen  $A^\mu_{,\alpha\beta} = A^\mu_{,\beta\alpha}$  und der Symmetrie der Christoffelsymbole ergibt sich dann

$$A^\mu_{;\beta\gamma} - A^\mu_{;\gamma\beta} = -(\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^\mu_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^\mu_{\lambda\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}) A^\alpha = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha. \quad (3.8)$$

#### 3.2.3 Kovarianter Krümmungstensor

Mit Hilfe der Metrik erhält man wie üblich den vierfach kovarianten Krümmungstensor[2]

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\sigma} R^\sigma_{\beta\gamma\delta} \\ &= \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma_{\mu\alpha\delta} - \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma_{\mu\alpha\gamma} \\ &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma}) + \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma_{\mu\alpha\delta} - \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma_{\mu\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Symmetrien des Krümmungstensors

Nicht alle Komponenten des Krümmungstensors sind unabhängig. Aus der Definition (3.9) erkennt man leicht die folgenden Relationen

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\mu\alpha\gamma\beta}, \quad (3.10a)$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}, \quad (3.10b)$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha}, \quad (3.10c)$$

sowie

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0. \quad (3.11)$$

Aus diesen Relationen folgt, dass der Krümmungstensor in 4 Dimensionen nur 20 unabhängige Komponenten besitzt.

### 3.2.5 Ricci-Tensor und Krümmungsskalar

Durch Verjüngung des Krümmungstensors erhält man den RICCI-TENSOR:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha}. \quad (3.12)$$

Der Ricci-Tensor ist ein symmetrischer Tensor 2. Stufe, d.h. es gilt

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (3.13)$$

Um dies zu zeigen, benutzt man den Zusammenhang  $\Gamma^\mu_{\alpha\mu} = 1/\sqrt{g} \cdot \partial\sqrt{g}/\partial x^\alpha$  aus Gleichung (2.95). Dann erhält man

$$\Gamma^\mu_{\alpha\mu,\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\beta} \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2\sqrt{g}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\mu,\alpha}. \quad (3.14)$$

Eine weitere Verjüngung des Ricci-Tensors führt auf den KRÜMMUNGSSKALAR

$$R = R^\mu_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

### 3.2.6 Bianchi-Identität

Es gilt

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta;\gamma} + R^\mu_{\nu\gamma\alpha;\beta} + R^\mu_{\nu\beta\gamma;\alpha} = 0. \quad (3.16)$$

Um dies zu zeigen benutzen wir folgende Überlegung: Wir betrachten diese Gleichung an einem bestimmten Punkt  $P_0$  der Mannigfaltigkeit. Durch Wahl geeigneter Koordinaten können wir erreichen, dass

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P_0) = 0 \quad (3.17)$$

gilt. Dann gilt am Punkt  $P_0$  weiter

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} \quad (3.18)$$

und damit

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta;\gamma} = R^\mu_{\nu\alpha\beta,\gamma} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha\gamma} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta\gamma}. \quad (3.19)$$

Die anderen Größen ergeben sich entsprechend. Bei zyklischer Vertauschung der letzten drei Indizes heben sich diese Terme auf. Wegen der Tensoreigenschaft gilt die Bianchi-Identität dann allgemein.

### 3.2.7 Trägheitssatz von Sylvester

Für die mathematische Formulierung der ART ist der Trägheitssatz von J. J. SYLVESTER<sup>1</sup> zentral: Die Metrik  $g_{\mu\nu}$  lässt sich in einer Orthonormalbasis als Diagonalmatrix mit Einträgen  $\pm 1$  darstellen. Hat die Matrix  $r$  Einträge  $+1$  und  $s$  Einträge  $-1$ , so spricht man von einer Metrik mit Trägheit, bzw. SIGNATUR  $(r,s)$ . Beispielsweise hat die Minkowski-Metrik die Signatur  $(r,s) = (1,3)$ . Für die ART hat dieser Satz wichtige Konsequenzen:

Die Gravitation lässt sich *lokal* wegtransformieren, d.h. in einer genügend kleinen Umgebung eines Punktes existieren Koordinaten, so dass sich “kräftefreie” Teilchen auf Geraden bewegen.

Dies ist anschaulich klar, denn die obige Aussage heißt nichts anderes, als dass die Metrik  $g_{\mu\nu}$  lokal in geeigneten Koordinaten auf die Form  $\eta_{\mu\nu}$  gebracht werden kann, also in die Form der Minkowski-Metrik des flachen Raumes. Damit dies möglich ist, müssen zwei Eigenschaften der Natur postuliert werden:

1. Die Welt ist eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 4 und der Trägheit  $(r,s) = (1,3)$ .
2. Die Weltlinien von Massepunkten, die nur gravitativen Kräften unterliegen, sind zeitartige metrische Geodäten.

Wir werden noch sehen, dass diese Aussagen eng mit dem Äquivalenzprinzip zusammenhängen, das am Anfang der Entwicklung der ART stand.

---

<sup>1</sup>J. J. Sylvester, 1814 - 1897, englischer Mathematiker

---

# 4 Physikalische Grundlagen der ART

## - Das Äquivalenzprinzip

Grundlage für die Entwicklung der ART waren einfache Grundüberlegungen Einsteins, die zum Äquivalenzprinzip führten, welches in diesem Abschnitt diskutiert wird. Den Kern bilden Einsteins berühmte Fahrstuhlgedankenexperimente. Die Aussage dieses Prinzips ist die postulierte Äquivalenz von träger und schwerer Masse, die es dann erlaubt, Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Gravitation zu ziehen.

### 4.1 Äquivalenz von träger und schwerer Masse

Um eine Aussage über schwere und träge Masse machen zu können, müssen wir zunächst diese Begriffe genauer charakterisieren.

#### 4.1.1 Träge Masse

Wirke eine Kraft auf einen Massenpunkt. Durch diese Krafteinwirkung wird der Massenpunkt seinen Bewegungszustand ändern. Allerdings versucht die Masse sich gegen diese äußere Krafteinwirkung zu wehren und in ihrem Bewegungszustand zu verharren. Die Masse hemmt also gewissermaßen die Krafteinwirkung. Aus diesem Grund nennt man diese Masse, die das Trägheitsprinzip erfüllt, die träge Masse.

Wir halten also fest: Die träge Masse ist die Masse die einer Kraft einen Widerstand entgegen setzt. Je größer diese träge Masse ist, desto mehr Kraft muss aufgewendet werden, um den Bewegungszustand zu ändern.

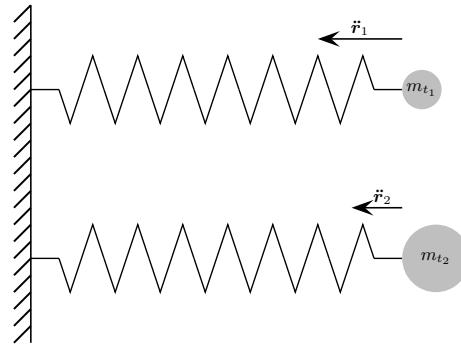
Betrachten wir als Beispiel die zwei Massen  $m_{t_1}$  und  $m_{t_2}$  in Abbildung 4.1. Wir bringen beide Massen an gleiche Federn an und dehnen die Federn um eine Strecke  $\Delta x$  aus der Ruhelage.

Wenn wir nun loslassen, so wirkt auf beide Massen die gleiche Kraft. Für die jeweiligen Beschleunigungen gilt also  $\mathbf{F} = m_{t_1} \ddot{\mathbf{r}}_1 = m_{t_2} \ddot{\mathbf{r}}_2$ , d.h.

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_{t_1}}{m_{t_2}} \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Schwere Masse

Die schwere Masse ist die Eigenschaft eines Körpers im Gravitationsfeld einer anderen Masse eine Kraft zu erfahren. Wir bezeichnen diese Masse daher in Anlehnung an die



**Abbildung 4.1:** Zwei gleiche Federn werden um die gleiche Strecke aus ihrer Ruhelage ausgelenkt. An den beiden Federn hängen die Massen  $m_{t1}$  und  $m_{t2}$ . Lässt man nun die Federn los, so werden beide Massen beschleunigt. Das Verhältnis der Beschleunigungen ist dabei  $\ddot{r}_2 = (m_{t1}/m_{t2})\ddot{r}_1$ .

Elektrodynamik als Gravitationsladung  $q$  im Gravitationsfeld der Gravitationsladung  $Q$ :

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = -\frac{qQ}{r^2} \cdot \alpha \cdot \mathbf{e}_r.$$

Die Massen  $m_{t1}$  und  $m_{t2}$  erfahren im Feld von  $Q$  eine Kraft. Sie haben also auch eine schwere Masse  $q_1, q_2$ .

Durch Fallexperimente kommt man zu folgendem experimentellem Befund: Die beiden Massen „fallen gleich schnell“, unabhängig von ihrer trügen Masse.

Genauer:

Es ist immer  $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_2$ , unabhängig von der Größe ihrer (trügen) Massen  $m_{t1}$  und  $m_{t2}$ .

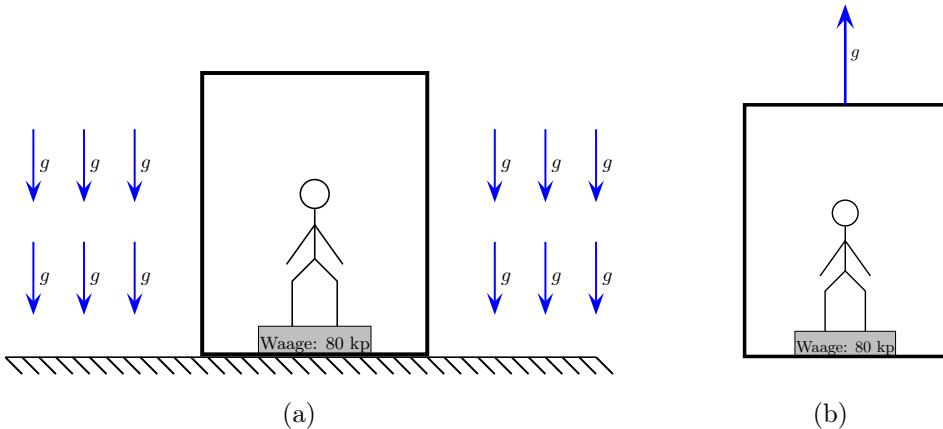
Dies kann man folgendermaßen formulieren:

$$\begin{aligned} m_{t1} |\ddot{r}_1| &= |\mathbf{F}_{Qq_1}| \\ m_{t2} |\ddot{r}_1| &= |\mathbf{F}_{Qq_2}|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Damit erhält man

$$\frac{m_{t1}}{m_{t2}} = \frac{F_{Qq_1}}{F_{Qq_2}} = \frac{q_1}{q_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_{t1}}{q_1} = \frac{m_{t2}}{q_2}. \tag{4.3}$$

Dieses Verhältnis von trüger zu „schwerer“ Masse ist für jedes Objekt dasselbe. Wenn wir die Einheit der schweren Masse geeignet wählen, können wir erreichen, dass das Verhältnis 1 ist. Wir halten als fundamentale Aussage fest:



**Abbildung 4.2:** In Abbildung a) ruht der Fahrstuhl im homogenen Schwerkraftfeld  $g$ . In Abbildung b) befindet sich der Fahrstuhl im schwerelosen Raum und wird konstant mit Beschleunigung  $\ddot{r} = g$  nach oben beschleunigt.

Objekte mit unterschiedlicher träger Masse erfahren im Schwerkraftfeld bei gleichen Anfangsbedingungen dieselbe Beschleunigung. Das Verhältnis von schwerer und träger Masse  $m_t/m_s$  ist also für alle Körper gleich und bei geeigneter Wahl der Einheiten gilt  $m_t/m_s = 1$ .

## 4.2 Fahrstuhlexperimente

Die folgenden Gedankenexperimente gehen direkt auf Einstein zurück, der diese Überlegungen selbst als “glücklichsten Einfall seines Lebens” bezeichnete.

Wir betrachten einen Experimentator (Hans) in einem geschlossenen Fahrstuhl, der sich in einem homogenen Schwerkraftfeld befindet (Einstein-Labor).

### 1) Weight-Watchers-Experiment

Im ersten Fall steht (ruht) der Fahrstuhl im Schwerkraftfeld. Eine Waage zeigt für Hans eine Kraft  $G$  von 80 kp<sup>1</sup> an.  $G$  berechnet sich zu

$$G = m_s \cdot g. \quad (4.4)$$

Im zweiten Fall wird der Fahrstuhl im leeren Raum konstant mit  $g$  beschleunigt. Auch hier zeigt die Waage für Hans eine Kraft von 80 kp an.

<sup>1</sup>Das Kilopond ist eine veraltete Einheit der Kraft. Es ist  $1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$ , d.h. die Gewichtskraft einer Masse von einem Kilogramm im Schwerkraftfeld der Erde.

Für  $G$  gilt diesmal

$$G = m_t \cdot g. \quad (4.5)$$

**Frage:** Kann Hans durch irgendein mechanisches, elektrodynamisches oder sonstiges Experiment feststellen, ob er im Schwerefeld ruht oder mit  $g$  im schwerelosen Raum beschleunigt wird?

Die Antwort lautet NEIN!

Damit erhalten wir folgende Aussage:

„Die Vorstellung eines ruhenden Koordinatensystems, in dem ein Schwerefeld herrscht, ist äquivalent mit der Vorstellung eines entsprechend beschleunigten Koordinatensystems ohne Schwerefeld“.

## 2) Frei-Fall-Experiment

Im ersten Fall ruhe der Fahrstuhl im schwerelosen Raum (Abb. 4.3(a)). Die Waage zeigt für Hans eine Kraft von 0 kp an. Im zweiten Fall falle der Fahrstuhl frei im konstanten Schwerefeld (Abb. 4.3(b)). Alles im Fahrstuhl fällt mit der gleichen Geschwindigkeit, es gibt keine Relativbewegung. Im Fahrstuhlsystem gilt

$$x(t) = x_0(t) + x' \quad \text{und} \quad m_t \ddot{x} = m_t(\ddot{x}_0 + \ddot{x}') = m_s g. \quad (4.6)$$

Wegen  $m_t = m_s$  und  $\ddot{x}_0 = g$  folgt

$$\ddot{x}' = 0. \quad (4.7)$$

Die Waage zeigt also auch hier 0 kp an.

**Frage:** Gibt es ein Experiment, dass die beiden Situationen unterscheidbar macht?

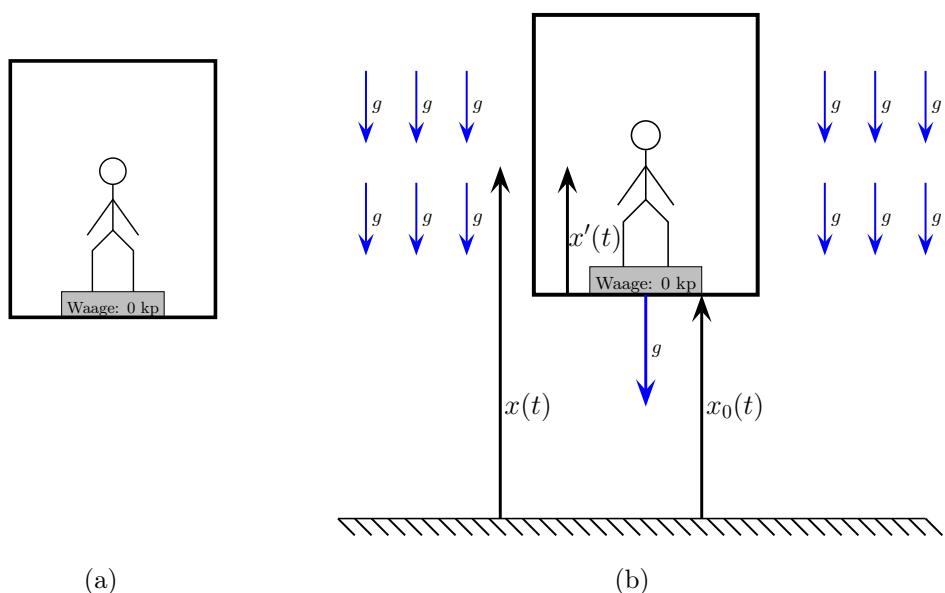
Die Antwort lautet wieder NEIN!

Diese Ergebnisse können wir im SCHWACHEN ÄQUIVALENZPRINZIP zusammenfassen:

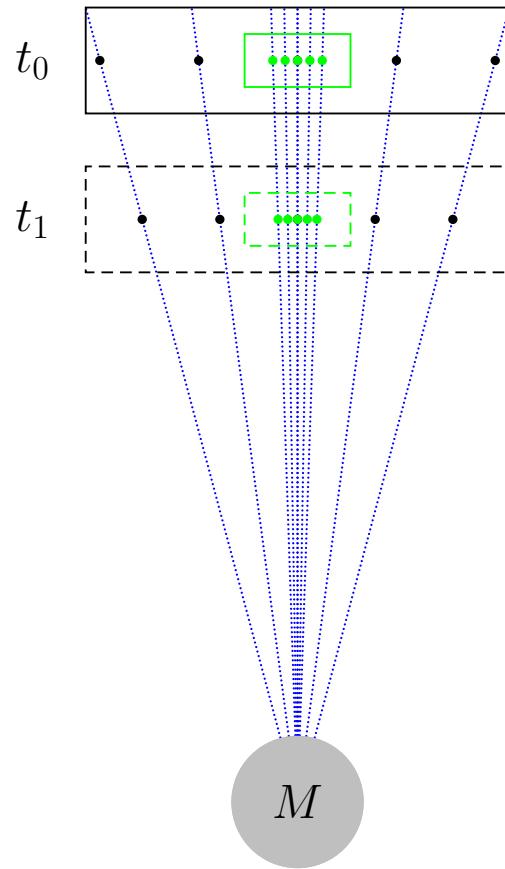
„In einem kleinen Labor, das in einem Schwerefeld fällt, sind die mechanischen Phänomene dieselben wie jene, die in Abwesenheit eines Schwerefeldes in einem Newtonschen Inertialsystem beobachtet werden.“.

Einstein ging 1907 noch weiter, indem er den Ausdruck „mechanische Phänomene“ auf „Gesetze der Physik“ erweiterte. Damit ergibt sich das STARKE ÄQUIVALENZPRINZIP:

„In einem kleinen Labor, das in einem Schwerefeld fällt, sind die Gesetze der Physik dieselben wie jene, die in Abwesenheit eines Schwerefeldes in einem Newtonschen Inertialsystem beobachtet werden.“.



**Abbildung 4.3:** In Abbildung a) ruht der Fahrstuhl im schwerelosen Raum, in Abbildung b) fällt der Fahrstuhl frei im homogenen Schwerefeld  $g$ .



**Abbildung 4.4:** Aufgrund der Inhomogenität von Gravitationsfeldern muss das betrachtete Labor so klein sein, dass die Inhomogenität vernachlässigbar ist. Das schwarze Labor ist zu groß, die schwarzen Kugeln nähern sich einander. Das grüne Labor ist klein genug, dass die Inhomogenität vernachlässigbar wird.

Wäre das anders, also das Äquivalenzprinzip verletzt, so würde die Idee, die Gravitation in eine (für alle Körper gleiche) gekrümmte Raum-Zeit zu packen, nicht funktionieren. Deshalb ist ein analoges Vorgehen bei der Elektrodynamik nicht möglich, da dort die Ladung und die träge Masse eines Teilchens unabhängig voneinander sind.

Da Gravitationsfelder inhomogen sind, muss darauf geachtet werden, dass ein der Gravitation ausgesetztes Labor relativ klein ist, so dass die Abweichung von der Homogenität keine Rolle spielt (Abb. 4.4).

Streng genommen ist nur für jeden Punkt ein infinitesimal kleines frei fallendes System definiert (lokales Inertialsystem, freifallendes Bezugssystem).

Insofern stellen diese Überlegungen eine Einschränkung gegenüber der SRT dar, bei der das Inertialsystem beliebig groß sein kann. Andererseits ist dieses Prinzip aber viel allgemeiner, weil nun auch beschleunigte Systeme behandelt werden können.

### 3) Lichtablenkung im Schwerefeld

Das Äquivalenzprinzip führt bereits direkt auf die Lichtablenkung im Schwerefeld. Betrachten wir in Abb. 4.5(a) ein frei fallendes Labor. Wird in diesem Labor auf einer Seite zum Zeitpunkt  $t_0$  ein Laserstrahl ausgesendet, so kommt er auf der anderen Seite auf dem Detektor zur Zeit  $t_1$  auf gleicher Höhe an, da dieses Labor äquivalent zu einem ruhenden Labor im schwerelosen Raum ist.

Von außen gesehen hat sich das Labor aber in der Zeit  $t_1 - t_0$  nach unten bewegt. Der Laserstrahl erscheint also gekrümmmt.

Andererseits können wir auch ein konstant beschleunigtes Labor betrachten (Abb. 4.5(b)). Wird hier ein Laserstrahl losgeschickt, so bleibt er hinter dem Labor zurück, er kommt auf der anderen Seite etwas tiefer an. Dies ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, dass dieser Laserstrahl von außen betrachtet geradlinig verlaufen muss.

Dieses beschleunigte Labor ist äquivalent zu einem im Schwerefeld ruhenden Labor. Daher muss auch dort der Lichtstrahl gekrümmmt verlaufen.

## 4.3 Mathematische Bedeutung des Äquivalenzprinzips

Mathematisch bedeutet das Äquivalenzprinzips, dass die Raum-Zeit mit Gravitation *lokal* minkowskisch ist. Wird die Raum-Zeit durch die Koordinaten  $x^\alpha$  beschrieben, so existiert für jeden Punkt  $P$  der Raum-Zeit eine Koordinatentransformation

$$x^\alpha \rightarrow \xi^\alpha \quad (4.8)$$

die von  $x^\mu$  abhängt, so dass sich die Metrik mittransformiert über

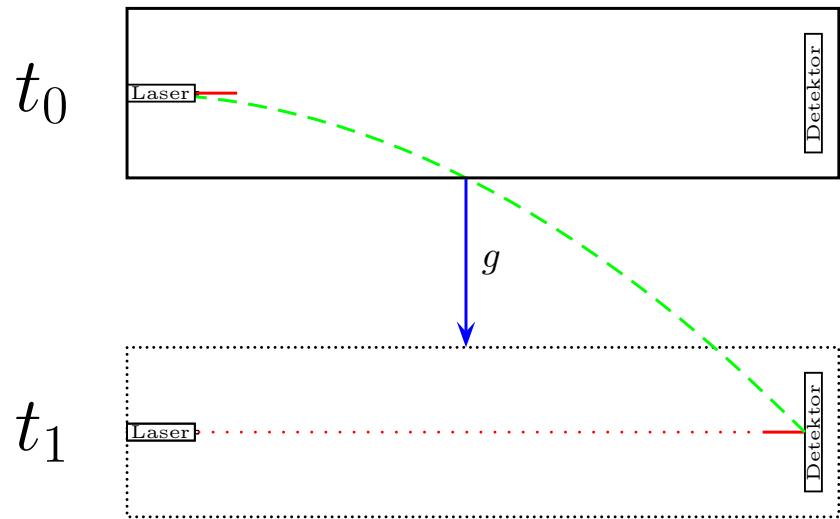
$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\xi^\alpha) \quad (4.9)$$

mit

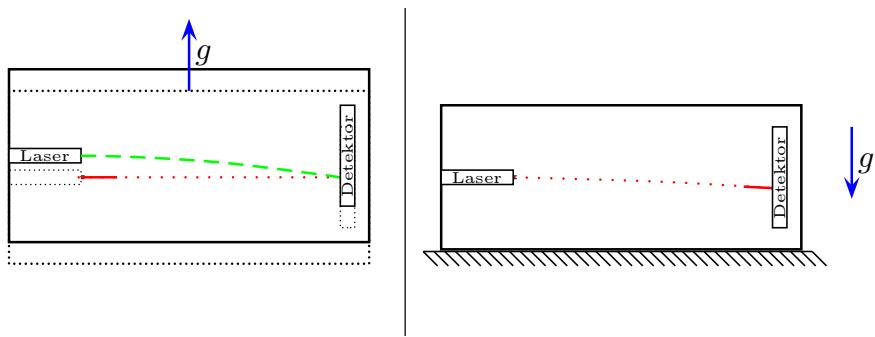
$$\bar{g}_{\mu\nu}(\xi_P^\alpha) = \eta_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

in einer Umgebung des Punktes  $P = \xi_P^\alpha$ , d.h.

$$\left. \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}(\xi^\alpha)}{\partial \xi^\beta} \right|_{\xi_P^\alpha} = 0. \quad (4.11)$$



(a) In einem frei fallenden Labor wird ein Laserstrahl zum Zeitpunkt  $t_0$  von einer Seite zur anderen geschickt (rot). Da das frei fallende Labor einem Labor im schwerelosen Raum entspricht, kommt der Laserstrahl auf der andern Seite zum Zeitpunkt  $t_1$  auf gleicher Höhe am Detektor an. Von außen gesehen wird er also abgelenkt (grün).



(b) Links: In einem konstant beschleunigten Labor wird ein Laserstrahl ausgesendet. Da er von außen gesehen eine geradlinige Bewegung ausführt und sich das Labor währenddessen nach oben bewegt, kommt er auf der anderen Seite etwas weiter unten an.  
 Rechts: Dem konstant beschleunigten Labor entspricht ein im homogenen Schwerkraftfeld ruhendes Labor. Aufgrund des Äquivalenzprinzips muss der Laserstrahl auch dort abgelenkt werden.

**Abbildung 4.5:** Aus dem Äquivalenzprinzip folgt bereits die Lichtablenkung im Schwerkraftfeld. Um dies einzusehen vergleicht man einerseits ein frei fallendes Labor mit einem im schwerelosen Raum und andererseits ein im Schwerkraftfeld ruhendes Labor mit einem konstant beschleunigten Labor.

#### 4.3 Mathematische Bedeutung des Äquivalenzprinzips

---

Höher Ableitungen verschwinden aber im Allgemeinen nicht, d.h. die Metrik hat die Form

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\xi_P^\alpha) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \right). \quad (4.12)$$

Man kann hier leicht sehen, dass die Aussage des Satzes von Sylvester zusammen mit dem Postulat, dass die Natur eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, praktisch die gleiche Aussage wie das Äquivalenzprinzip beinhaltet.

# 5 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Die Hauptaufgabe der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es, aus einer vorhandenen Massen- und Energieverteilung die entsprechende Metrik der Raumzeit berechnen zu können und umgekehrt.

Eine berühmte Zusammenfassung dieser Zusammenhänge stammt von J. A. WHEELER<sup>1</sup>

”Matter tells space how to curve and spacetime tells matter how to move!“

Dazu ist eine Gleichung nötig, die die entsprechenden Größen miteinander verknüpft. Bevor wir zur Formulierung dieser Gleichung kommen, untersuchen wir die nichtrelativistische Näherung der Bewegungsgleichungen der ART. Die Ergebnisse werden uns später dann behilflich sein.

## 5.1 Die Bewegungsgleichungen der ART und ihre nicht-relativistische Näherung

Eine Anforderung an die ART ist, dass sich die Newtonschen Bewegungsgleichungen als Grenzfall für schwache Felder aus den Geodätengleichungen erhalten lassen. Dies erscheint aufgrund der ganz unterschiedlichen Form der Gleichungen zunächst sehr schwierig.

- In der Formulierung der ART steckt die Gravitation in der Metrik  $g_{\mu\nu}$ . Die Bewegungsgleichungen für Punktteilchen im Schwerefeld sind die Geodätengleichungen

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (5.1)$$

- In der Newtonschen Theorie bewegt sich das Teilchen in einem Gravitationspotential und die Bewegungsgleichung hat die Form

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V. \quad (5.2)$$

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen folgen aus einem Variationsprinzip, dem Hamiltonschen Prinzip. Sei  $\mathcal{L} = T - V - mc^2$  die Lagrangefunktion des betrachteten Systems, wobei wir hier zur kinetischen Energie auch die Ruheenergie  $mc^2$  hinzuzählen, so gilt für

---

<sup>1</sup>John Archibald Wheeler, 1911-2008, Amerikanischer theoretischer Physiker

## 5.1 Die Bewegungsgleichungen der ART und ihre nicht-relativistische Näherung

---

die Bahn des Teilchens vom Punkt  $P_1$  zum Punkt  $P_2$

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \mathcal{L} dt = 0. \quad (5.3)$$

Für die Lagrangefunktion finden wir die explizite Form

$$\mathcal{L} = mc^2 \left( -1 + \frac{\dot{x}^2}{2c^2} - \frac{1}{c^2}\phi \right) = -mc^2 \left( 1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} + \frac{2\phi}{c^2} \right), \quad (5.4)$$

mit dem Gravitationspotential  $\phi = V/m$  und dem Zusammenhang  $1 + x/2 \approx \sqrt{1+x}$ . Einsetzen in das Variationsprinzip liefert

$$\begin{aligned} \delta \int_{P_1}^{P_2} \mathcal{L} dt &= -mc \cdot \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{(cdt)^2 - \dot{x}^2 dt^2 + 2\phi dt^2} \\ &= -mc \cdot \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{(cdt)^2 \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} \right) - dx^2 - dy^2 - dz^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

In der ART gilt auch ein Variationsprinzip:

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = \delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = 0. \quad (5.6)$$

Durch Vergleich der beiden Formeln ergibt sich für  $2\phi/c^2 \ll 1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0, \quad (5.7)$$

bzw.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + 2\phi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

D.h. die Gravitation steckt in der kleinen Störung

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2\phi/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

### 5.1.1 Kugelsymmetrische Massenverteilung

Für eine kugelsymmetrische Massenverteilung mit Gesamtmasse  $M$  ergibt sich  $\phi(r) = -GM/r$  und daher

$$g_{00} = 1 - 2\frac{GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad (5.10)$$

mit dem SCHWARZSCHILD-RADIUS  $r_s = 2GM/c^2$ . Dieser beträgt für die Sonne etwa  $r_s^\odot = 3$  km und für die Erde  $r_s^\oplus = 9$  mm. Im Vergleich zu den wirklichen Radien dieser Körper ist der Schwarzschild-Radius also sehr klein. Damit ist auch die gravitative Wirkung der Sonne und der Erde klein.

### 5.1.2 Krümmung der Metrik für schwache Felder

Für die oben berechnete Metrik ergeben sich die folgenden Christoffelsymbole und Komponenten des Krümmungstensors und Ricci-Tensors:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad \text{für } i \in \{1,2,3\}, \quad (5.11a)$$

$$R^i_{0j0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \quad \text{für } i,j \in \{1,2,3\}, \quad (5.11b)$$

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \phi, \quad (5.11c)$$

mit

$$\phi = -G \int \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}'. \quad (5.12)$$

## 5.2 Formulierung der Feldgleichungen

In diesem Abschnitt werden wir die Feldgleichungen nun "herleiten". Da diese die Metrik mit der Materie- und Energieverteilung verknüpfen sollen, benötigen wir zunächst eine Größe, die diese beschreibt. Dies führt auf den Energie-Impuls-Tensor, den wir bereits in der SRT kennengelernt haben.

### 5.2.1 Der Energie-Impuls-Tensor

Für das Gravitationspotential gilt die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (5.13)$$

Daraus folgt also

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \varrho. \quad (5.14)$$

Das Problem dieser Gleichung ist, dass  $R_{00}$  nur Komponente eines Tensors ist und die Gleichung daher nicht die richtigen Transformationseigenschaften besitzt. Gesucht wird eine Gleichung der Form  $R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$  mit einem Tensor  $T_{\mu\nu}$ , der von der Massenverteilung, aber auch der Impulsdichte abhängt. Dieser Tensor heißt dann Energie-Impuls-Tensor. In der SRT hatten wir einen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor der elektromagnetischen Felder im Minkowskiraum gefunden. Er hat die Form

$$T_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu}^{\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \begin{pmatrix} \omega & \frac{1}{c} \mathbf{S}^T \\ -\frac{1}{c} \mathbf{S} & G_i^j \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

mit dem Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$ .

### 1) Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors

Für den Energie-Impuls-Tensor der elektromagnetischen Felder gelten im Vakuum die vier Kontinuitätsgleichungen  $\partial\omega/\partial t \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$  und  $\partial S_i/\partial t/c^2 + \nabla \cdot \mathbf{T}^i = 0$ . Diese Gleichungen entsprechen der Forderung der Divergenzfreiheit von  $T^{\mu\nu}$ :

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.16)$$

Dies soll auch für den Energie-Impuls-Tensor der Materie gelten.

### 2) Ansatz für den Energie-Impuls-Tensor der Materie

Allgemein macht man für eine beliebige Massenverteilung für den Energie-Impuls-Tensor den Ansatz

$$T^{\mu\nu} = \varrho_0 u^\mu u^\nu = \varrho_0 \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & c\mathbf{v} \\ c\mathbf{v} & v^i v^j \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Für den Spezialfall ruhender Materie ergibt dies einfach

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varrho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

mit der RUHEENERGIEDICHTE  $\varrho_0 c^2$  der Materie. Mit diesem Ansatz ist die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors gewährleistet. Für gekrümmte Räume muss statt der normalen Ableitung in Gleichung (5.16) die kovariante Ableitung verwendet werden:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (5.19)$$

### 5.2.2 Aufstellung der Feldgleichungen

Für die rechte Seite der Feldgleichungen haben wir mit dem Energie-Impuls-Tensor eine geeignete Größe gefunden. Für die linke Seite kann aber nicht  $R_{\mu\nu}$  direkt verwendet werden, denn im Allgemeinen ist  $R^{\mu\nu}_{;\nu} \neq 0$ .

#### 1) Forderungen an die linke Seite der Feldgleichungen

Wir postulieren folgende Anforderungen an die linke Seite der Feldgleichungen

1. Die linke Seite ist symmetrischer Tensor 2. Stufe wie  $T_{\mu\nu}$
2. Auf der linken Seite sollen keine höheren als zweite Ableitungen von  $g_{\mu\nu}$  stehen.
3. Die zweiten Ableitungen sollen nur linear auftreten.
4. Die linke Seite soll wie  $T^{\mu\nu}$  divergenzfrei sein.
5. In der minkowskischen Raum-Zeit soll die linke Seite identisch verschwinden.

Aus den Bedingungen 1-3 folgt für die Feldgleichungen (Beweis durch HERMANN WEYL<sup>2</sup>)

$$R_{\mu\nu} + a \cdot g_{\mu\nu} R + b \cdot g_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu}, \quad (5.20)$$

wobei  $a$ ,  $b$  und  $\kappa$  freie Parameter sind. Die Bedingung 4 liefert

$$R^{\mu\nu}_{;\nu} + a (g^{\mu\nu} R)_{;\nu} + b \cdot g^{\mu\nu}_{;\nu} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.21)$$

Da die Metrik divergenzfrei ist, d.h.  $g^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , lässt sich  $b$  nicht aus dieser Bedingung bestimmen. Im Folgenden zeigen wir, dass sich  $a = -1/2$  ergibt.

**Bestimmung der Konstante  $a$**  Aus der Bianchi-Identität in Gleichung (3.16) folgt bei Verjüngung unter Verwendung der Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors

$$R^\mu_{\alpha\mu\beta;\gamma} + R^\mu_{\alpha\gamma\mu;\beta} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma;\mu} = R_{\alpha\beta;\gamma} - R_{\alpha\gamma;\beta} + R^\mu_{\alpha\beta\gamma;\mu} = 0. \quad (5.22)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $g^{\alpha\beta}$  und erhalten

$$R_{;\gamma} - R^\beta_{\gamma;\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} R^\nu_{\alpha\beta\gamma;\mu} = 0. \quad (5.23)$$

Dabei haben wir im dritten Term den Faktor  $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$  eingeschoben. Damit lässt sich der dritte Term weiter umformen über

$$g^{\alpha\beta} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} R^\nu_{\alpha\beta\gamma;\mu} = g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} R^\nu_{\gamma;\mu} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\gamma;\mu} = R^\mu_{\gamma;\mu}. \quad (5.24)$$

---

<sup>2</sup>Weyl, Hermann Klaus Hugo, 1885-1955, Deutscher Mathematiker und Physiker

Wir nennen in diesem Ausdruck  $\mu$  in  $\beta$  um und setzen ihn in Gleichung (5.23) ein. Dann haben wir

$$R_{;\gamma} - 2 \cdot R^{\beta}_{\gamma;\beta} = 0, \quad (5.25)$$

bzw. multipliziert mit  $1/2$  und mit  $\delta_{\gamma}^{\beta}$  eingeschoben:

$$R^{\beta}_{\gamma;\beta} - \frac{1}{2} (\delta_{\gamma}^{\beta} R)_{;\beta} = 0. \quad (5.26)$$

Abschließend ziehen wir  $\gamma$  hoch und kommen auf

$$R^{\beta\gamma}_{;\beta} - \frac{1}{2} (g^{\beta\gamma} R)_{;\beta} = 0. \quad (5.27)$$

Damit haben wir einen divergenzfreien Ausdruck der Form der linken Seite der Feldgleichungen (5.20) gefunden, denn es gilt

$$\left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \cdot g^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0. \quad (5.28)$$

Damit haben wir gezeigt, dass für  $a = -1/2$  die linke Seite der Feldgleichungen divergenzfrei ist.

**Bestimmung von  $b$  und  $\kappa$**  Mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes haben wir jetzt

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \cdot g_{\mu\nu} R + b \cdot g_{\mu\nu} = \kappa \cdot T_{\mu\nu}. \quad (5.29)$$

Multiplikation mit  $g^{\mu\nu}$  führt wegen

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4 \quad (5.30)$$

auf

$$-R + 4b = \kappa T, \quad \text{bzw.} \quad R = 4b - \kappa T. \quad (5.31)$$

Einsetzen in (5.29) führt auf

$$R_{\mu\nu} - bg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}^*, \quad (5.32)$$

mit

$$T_{\mu\nu}^* = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}. \quad (5.33)$$

Um nun  $b$  und  $\kappa$  zu bestimmen benutzen wir die Ergebnisse für  $g_{00}$  und  $R_{00}$  im nichtrelativistischen Grenzfall und für  $T^{\mu\nu}$  für ruhende Materie in den Gleichungen (5.8), (5.14) und (5.18). Es ergibt sich dann

$$T = \varrho c^2 \quad \text{und} \quad T_{00}^* = \frac{1}{2} \varrho c^2. \quad (5.34)$$

## 5 Die Einsteinschen Feldgleichungen

---

In diesem Fall reduzieren sich die Feldgleichungen auf

$$R_{00} - bg_{00} = \kappa T_{00}^*. \quad (5.35)$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{4\pi G}{c^2}\varrho - bg_{00} = \frac{1}{2}\kappa\varrho c^2. \quad (5.36)$$

Um die 5. Bedingung zu erfüllen muss  $b = 0$  gelten<sup>3</sup>, denn im minkowskischen Grenzfall gilt  $\varrho \rightarrow 0$ . Damit ergibt sich schließlich  $\kappa$  zu

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (5.37)$$

**Der Einstein-Tensor** Man definiert den Einstein-Tensor als

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R \cdot g_{\mu\nu}. \quad (5.38)$$

Dann lauten die Feldgleichungen ohne kosmologische Konstante

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad \text{oder} \quad R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}^*. \quad (5.39)$$

**Bemerkungen** Der Wert von  $\kappa$  ist sehr klein, es ergibt sich

$$c^2\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,86 \times 10^{-26} \frac{\text{m}}{\text{kg}}. \quad (5.40)$$

Da  $R_{\mu\nu}$  und  $R$  bzw.  $G_{\mu\nu}$  2. Ableitungen und Quadrate der 1. Ableitungen des metrischen Tensors enthalten, sind die Feldgleichungen nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Das Superpositionsprinzip gilt daher nicht.

---

<sup>3</sup>Genauer muss  $b$  sehr klein sein, so dass die Abweichung nur auf kosmologischen Skalen wichtig wird.  
Man spricht bei  $b$  der kosmologischen Konstante und verwendet gewöhnlich das Symbol  $\Lambda$ .

---

# 6 Anwendungen der ART

## 6.1 Die Schwarzschild-Metrik

Wir betrachten die exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen zuerst nur für den statischen kugelsymmetrischen Fall, da sich hier sehr einfache Folgerungen ergeben. Das Gravitationsfeld im Außenraum einer sphärisch-symmetrischen Massenverteilung mit der Gesamtmasse  $M$  ist gegeben durch

$$\phi(r) = -G \frac{M}{r}. \quad (6.1)$$

### 6.1.1 Aufstellung der Feldgleichungen

Wir suchen die zugehörige Metrik der ART. Gesucht werden also die sphärisch symmetrischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen (5.39). Im Vakuum gilt  $T_{\mu\nu} = 0$ . Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0. \quad (6.2)$$

Wegen  $T_{\mu\nu} = 0$  ist auch  $T = 0$  und mit  $R = -\kappa T$  aus Gleichung (5.31) für  $b = 0$  auch  $R = 0$ . Damit ergibt sich schließlich

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (6.3)$$

in diesem Fall.

### 6.1.2 Allgemeiner Ansatz für eine sphärisch-symmetrische Metrik

Die Metrik des flachen Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^3$  lautet

$$dx^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.4)$$

mit  $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ . Für die allgemeine sphärisch-symmetrische Metrik in der ART machen wir dann den Ansatz

$$ds^2 = a(r,t)dt^2 - b(r,t)dr^2 - c(r,t)drdt - d(r,t)d\Omega^2. \quad (6.5)$$

Wir wollen eine statische Metrik annehmen, dann muss  $c(r,t) = 0$  sein um Zeitumkehrinvarianz zu gewährleisten und die anderen Funktionen sind zeitunabhängig.

### 1) Koordinatentransformation

Wir transformieren auf geeignete Koordinaten  $r \rightarrow \tilde{r}$ , so dass  $d(r,t) = \tilde{r}^2$ , wie bei gewöhnlichen Kugelkoordinaten. Wir bezeichnen  $\tilde{r}$  direkt wieder als  $r$ , dann haben wir

$$ds^2 = f(r)c^2dt^2 - q(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (6.6)$$

wobei  $f(r)$  und  $q(r)$  dimensionslos sind. Der metrische Tensor ist dann also

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

### 2) Berechnung der Christoffelsymbole

Für die so bestimmte Metrik ergeben sich die folgenden nichtverschwindenden Christoffelsymbole

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}g^{00}(g_{01,0} + g_{00,1} - g_{01,0}) = \frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f'}{2f}, \quad (6.8a)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}(g_{10,0} + g_{01,0} - g_{00,1}) = \frac{1}{2q}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{f'}{2q}, \quad (6.8b)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = \frac{q'}{2q}, \quad (6.8c)$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(-g_{22,1}) = \frac{1}{2q}(-2r) = -\frac{r}{q}, \quad (6.8d)$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}(-g_{33,1}) = \frac{1}{2q}(-2r \sin^2 \vartheta) = -\frac{r \sin^2 \vartheta}{q}, \quad (6.8e)$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}(g_{22,1}) = \frac{1}{2r^2}(2r) = \frac{1}{r}, \quad (6.8f)$$

$$\Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}(g_{33,1}) = \frac{1}{2r^2 \sin^2 \vartheta}(2r \sin^2 \vartheta) = \frac{1}{r}, \quad (6.8g)$$

$$\Gamma^3_{32} = \Gamma^3_{23} = \cot \vartheta, \quad (6.8h)$$

### 3) Komponenten des Ricci-Tensors

Mit den Christoffelsymbolen lassen sich der Krümmungstensor und der Ricci-Tensor bestimmen. Da für die Feldgleichungen nur der Ricci-Tensor wichtig ist, geben wir nur

seine nichtverschwindenden Komponenten an:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \frac{f''}{q} - \frac{1}{4} \frac{f'}{q} \left( \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) + \frac{1}{r} \frac{f'}{q}, \quad (6.9a)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \frac{f''}{f} + \frac{1}{4} \frac{f'}{f} \left( \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) + \frac{1}{r} \frac{q'}{q}, \quad (6.9b)$$

$$R_{22} = \frac{r}{2q} \left( \frac{f'}{f} - \frac{q'}{q} \right) + \frac{1}{q} - 1, \quad (6.9c)$$

$$R_{33} = \sin^2 \vartheta \cdot R_{22}. \quad (6.9d)$$

#### 4) Lösung der Feldgleichungen

Setzt man die Ergebnisse für den Ricci-Tensor in die Gleichung  $R_{\mu\nu} = 0$  ein, so erhält man ein Differentialgleichungssystem:

$$f'' - \frac{1}{2} f' \left( \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) + \frac{2}{r} f' = 0, \quad (6.10a)$$

$$f'' - \frac{1}{2} f' \left( \frac{f'}{f} + \frac{q'}{q} \right) - \frac{2}{r} f \frac{q'}{q} = 0, \quad (6.10b)$$

$$\frac{r}{2q} \left( \frac{f'}{f} - \frac{q'}{q} \right) + \frac{1}{q} - 1 = 0. \quad (6.10c)$$

Wir bilden die Differenz der Gleichungen (6.10a) und (6.10b) und erhalten

$$\frac{f'}{f} = -\frac{q'}{q}. \quad (6.11)$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (6.10c) ein und erhalten

$$rq' - q + q^2 = 0, \quad \text{bzw.} \quad rq' = q - q^2. \quad (6.12)$$

Wir formen nochmals um und erhalten  $1/r = q'/(q - q^2)$ . Wir benutzen die Identität  $q' = dq/dr$ , multiplizieren mit  $dr$  durch und integrieren:

$$\int \frac{dr}{r} = - \int \frac{dq}{q(q-1)}. \quad (6.13)$$

Nach Ausführung der Integration haben wir dann

$$\ln(r) = \ln \frac{\mathcal{A}q}{q-1}. \quad (6.14)$$

mit der Integrationskonstante  $\mathcal{A}$ . Exponentieren auf beiden Seiten und Auflösen nach  $q$  führt uns auf

$$q(r) = \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{A}}{r}}. \quad (6.15)$$

Aus  $df/f = -dq/q$  aus Gleichung (6.11) folgt weiter  $\ln(f) = -\ln(q) + \text{const} = \ln(1/q) + \text{const}$  und daher

$$f(r) = \frac{\mathcal{C}}{q(r)} = \mathcal{C} \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{r}\right). \quad (6.16)$$

### 5) Bestimmung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$

Die Bestimmung der Konstanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{C}$  erfolgt über die Betrachtung des nichtrelativistischen Grenzfalls und des Grenzfalls  $r \rightarrow \infty$ .

**Bestimmung von  $\mathcal{C}$  aus dem Übergang zur Minkowski-Raumzeit** Für  $r \rightarrow \infty$  soll  $g_{\mu\nu}$  in den Minkowski-Raum übergehen, da im Unendlichen die Massenverteilung keinen Einfluss mehr auf die Metrik haben sollte. Es folgt dann die Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) \stackrel{!}{=} 1 \quad \text{und damit} \quad \mathcal{C} = 1. \quad (6.17)$$

Dann ist also  $f(r) = 1 - \mathcal{A}/r$ .

**Bestimmung von  $\mathcal{A}$  aus dem Newtonschen Grenzfall** Im Newtonschen Grenzfall gilt  $g_{00} = 1 + 2\phi/c^2$  mit  $\phi = -GM/r$ . Dies führt auf die Bedingung

$$f(r) = 1 - \frac{\mathcal{A}}{r} \stackrel{!}{=} 1 - 2G \frac{M}{c^2 r} \quad \text{und damit} \quad \mathcal{A} = 2G \frac{M}{c^2} = r_s. \quad (6.18)$$

Dabei bezeichnet  $r_s$  den SCHWARZSCHILD-RADIUS.

Damit ergibt sich schließlich die SCHWARZSCHILD-METRIK:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 d\Omega^2, \quad (6.19)$$

mit  $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2$ .

#### 6.1.3 Folgerungen aus der Schwarzschild-Metrik

Aus der Schwarzschild-Metrik lassen sich wichtige physikalische Konsequenzen ableiten die sich in der Nähe einer sphärisch symmetrischen Massenverteilung ergeben.

## 1) Messung der Radialkoordinate

Zur Messung der Radialkoordinate  $r$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  wollen wir annehmen, dass gilt

$$dr = 0, \quad dt = 0, \quad d\vartheta \neq 0, \quad d\varphi \neq 0. \quad (6.20)$$

D.h. wir betrachten alle Punkte mit einer festen Radialkoordinate, deren Wert wir allerdings nicht kennen. Über die Kraft, die die Massenverteilung ausübt, können wir aber erreichen, dass alle betrachteten Punkte die gleiche Radialkoordinate haben. Wir schreiben dann

$$ds_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta. \quad (6.21)$$

Für ein Flächenelement gilt wie in gewöhnlichen Kugelkoordinaten

$$dF = ds_\varphi ds_\vartheta = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (6.22)$$

Integration liefert

$$\oint dF = \oint ds_\varphi ds_\vartheta = 4\pi r^2. \quad (6.23)$$

Alternativ können wir auch eine Umfangsmessung durchführen, indem wir uns auf Punkte mit  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  beschränken:

$$ds_\varphi = r d\varphi \Leftrightarrow \oint ds_\varphi = 2\pi r. \quad (6.24)$$

Über die Messung der Fläche oder des Umfanges kann man also die Radialkoordinate bestimmen.

## 2) Abstand von Punkten mit unterschiedlicher Radialkoordinate

Nun wollen wir den Abstand von Punkten mit unterschiedlicher Radialkoordinate betrachten, d.h. es soll gelten

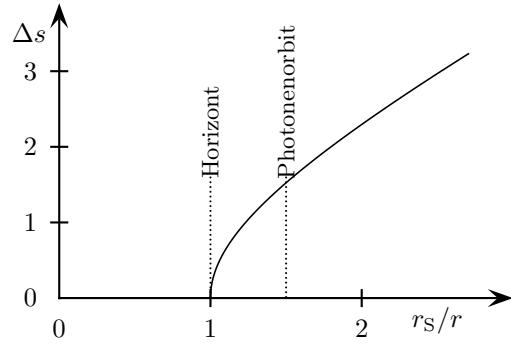
$$dr \neq 0, \quad dt = 0, \quad d\vartheta = 0, \quad d\varphi = 0. \quad (6.25)$$

Es folgt dann

$$ds_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} dr \geq dr. \quad (6.26)$$

Der Abstand solcher Punkte ist entsprechend gegeben über

$$\Delta s = \int_{r_1}^{r_2} ds_r > r_2 - r_1 \quad (6.27)$$



**Abbildung 6.1:** Eigenradiallänge  $\Delta s$  zum Ereignishorizont eines Schwarzen Loches in Abhängigkeit von der Radialkoordinate  $r$ , normiert bezüglich des Schwarzschildradius  $r_S$ . Zur Orientierung ist der Photonenorbit  $r = 1,5r_S$  eingezeichnet. Dort wird Licht bereits so stark abgelenkt, dass es auf einer Kreisbahn um das Schwarze Loch läuft.

und nicht über die Differenz der Radialkoordinaten. Wir werden im Folgenden Kapitel Schwarze Löcher behandeln, d.h. Massenansammlungen mit einer Ausdehnung kleiner als der Schwarzschildradius und dann sehen, dass sich bei  $r = r_S$  ein Ereignishorizont befindet. Für den Abstand zum Ereignishorizont ergibt sich

$$\Delta s = r_S \sqrt{\frac{r}{r_S}} + \frac{r_S}{2} \ln \left[ 2 \frac{r}{r_S} - 1 + 2 \sqrt{\frac{r}{r_S} \left( \frac{r}{r_S} - 1 \right)} \right]. \quad (6.28)$$

Damit erhalten wir die wichtige Aussage

Die Radialkoordinate  $r$  ist nicht der Abstand vom Zentrum der kugelsymmetrischen Massenverteilung.

Abbildung 6.1 zeigt die Eigenradiallänge  $\Delta s$  zum Ereignishorizont in Abhängigkeit von der Radialkoordinate  $r$  entsprechend Gleichung (6.28), normiert bezüglich des Schwarzschildradius  $r_S$ .

### 3) Bedeutung der Koordinatenzeit $t$

Man kann noch eine weitere Folgerung aus der Schwarzschild-Lösung ziehen. Wir wollen uns dazu mit der Bedeutung von  $t$  befassen. Es ist klar, dass dies die Laborzeit im Unendlichen sein muss, da dort die Schwarzschild-Metrik in die Minkowski-Metrik übergeht. Wir betrachten einen an einem festen Koordinatenpunkt ruhenden Beobachter, d.h. mit

$$dr = d\Omega = 0. \quad (6.29)$$

Für ihn folgt:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 =: c^2 d\tau^2 \quad (6.30)$$

mit der Zeit  $\tau$  im Ruhesystem des Experimentators.

Man sieht direkt, dass gilt

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} dt < dt. \quad (6.31)$$

Diese Beziehung lässt einen revolutionären Schluss zu:

Eine ruhende Uhr in einem Schwerefeld geht langsamer als eine ruhende Uhr ohne Anwesenheit eines Schwerefeldes.

### 6.1.4 Gravitationsrotverschiebung

Zur Zeitmessung benötigt man einen periodischen Vorgang. Ein solcher Vorgang ist beispielsweise ein atomarer Übergang zwischen zwei Niveaus mit  $h\nu_0 = h/T_0$ , mit der Periodendauer  $T_0$ . Bei einem solchen Übergang wird vom Atom Licht emittiert, welches im Schwerefeld durch die Zeitdehnung entsprechend Gleichung (6.31) rotverschoben werden sollte. Wir betrachten ein Atom in Ruhe bei der Radialkoordinate  $r$ . Setzen wir nun für das Eigenzeitintervall die Periode  $T_0$  eines solchen Übergangs in Gleichung (6.31) ein, so erhält man:

$$\Delta t = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} = T(r) > T_0. \quad (6.32)$$

Dann folgt für die Frequenz des empfangenen Lichtes:

$$\nu(r) = \frac{1}{T(r)} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \frac{1}{T_0} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \nu_0 < \nu_0. \quad (6.33)$$

Setzt man nun noch für die Wellenlänge des emittierten Lichtes  $\lambda = c/\nu$  ein, so ergibt sich

$$\lambda(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \lambda_0 > \lambda_0. \quad (6.34)$$

Diese Ungleichung drückt die Gravitationsrotverschiebung aus.

Zur Messung der Gravitationsrotverschiebung benötigt man zwei unterschiedliche Höhen, bei denen die Frequenz eines Lichtsignals gemessen wird. Wir definieren  $r_2 := r_1 + h$ . Wählen wir nun  $h$  klein gegen  $r_1$ , so können wir ohne großen Fehler eine Taylor-Entwicklung um  $r_1$  vornehmen, die wir nach dem in  $h$  linearen Term abbrechen:

$$\begin{aligned} \nu(r_2) &= \nu(r_1 + h) = \nu(r_1) + \frac{d\nu}{dr}(r_1) \cdot h + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}} \cdot \nu_0 - \frac{1}{2} \frac{\nu_0 r_s}{r_1^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_1}}} \cdot h. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dann ergibt sich für die Frequenzverschiebung:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\nu_0 \cdot r_S h}{r_1^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1}}}. \quad (6.36)$$

Nimmt man für  $r_1$  den Erdradius an, so kann man den Term  $\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1}}$  für den Schwarzschildradius  $r_S$  gegenüber  $r_1$  im Wurzelausdruck vernachlässigen. Es ergibt sich dann die Abschätzung:

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{2} \frac{\nu_0 \cdot r_S}{r_1^2} \cdot h. \quad (6.37)$$

Für die Erde gilt:  $r_S = 9$  mm,  $r_1 = R = 6350$  km,  $r_2 = R + h$ ,  $h = 30$  m, womit wir die Abschätzung

$$\Delta\nu = \frac{r_S}{2r_1} \frac{h}{r_1} \cong 3 \cdot 10^{-15} \quad (6.38)$$

bekommen. Die Frequenzverschiebung wurde mit Hilfe der MÖSSBAUER<sup>1</sup>-SPEKTROSKOPIE an  $^{57}\text{Fe}$  nachgewiesen. Der Mößbauer-Effekt erlaubt Messungen an Kernübergängen mit einer Genauigkeit im Bereich der natürlichen Linienbreite des Übergangs in der Größenordnung von  $z \sim 10^{-15}$ . Dabei ist die Rotverschiebung  $z$  definiert über

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (6.39)$$

Abbildung 6.2 zeigt skizzenhaft den Aufbau eines Experimentes zur Messung der Gravitationsrotverschiebung. Eine angeregte Probe  $^{57}\text{Fe}$  emittiert  $\gamma$ -Strahlung mit  $E = 14,4$  keV. Eine um die Strecke  $h$  höher gelegene Probe  $^{57}\text{Fe}$  kann die  $\gamma$ -Strahlung aufgrund der Rotverschiebung nicht resonant absorbieren. Durch Bewegen der Probe und den dadurch auftretenden Dopplereffekt kann die Rotverschiebung kompensiert und über die nötige Geschwindigkeit  $v_R$  bestimmt werden. Pound und Rebka[3] erhielten 1960 mit  $h = 22.6$  m in ihren Messungen einen Wert von  $z = (2,57 \pm 0,26) \cdot 10^{-15}$ , bzw. ein Verhältnis

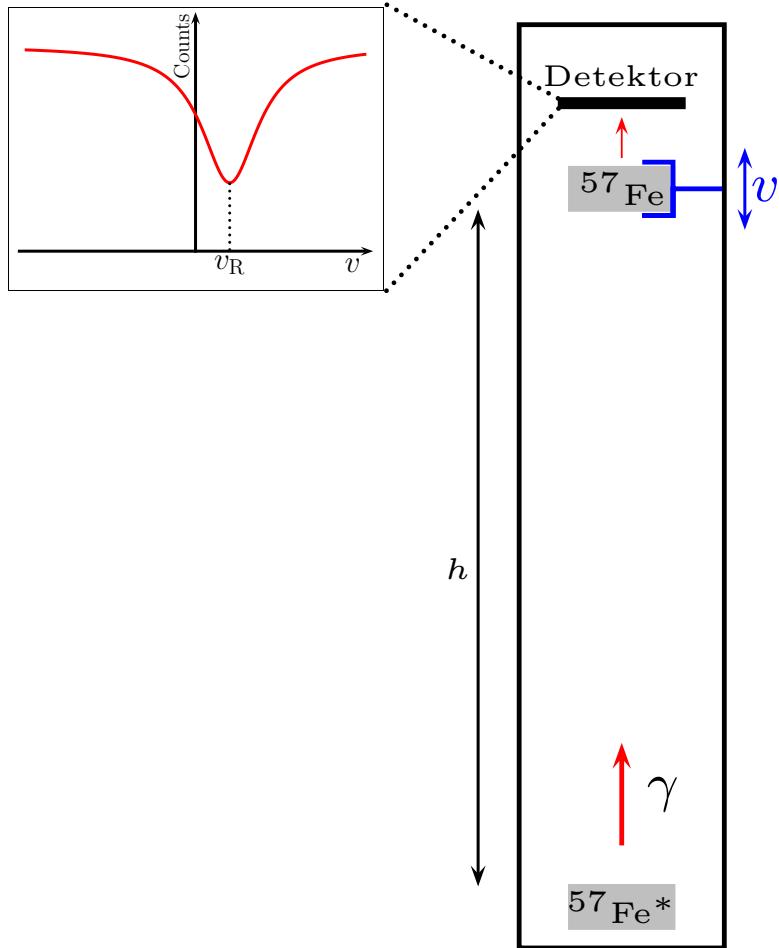
$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{theo}}} = 1,05 \pm 0,10. \quad (6.40)$$

Der Wert liegt also durchaus innerhalb der Fehlergrenzen. Eine genauere Messung von Pond und Snider 1965[4] lieferte sogar

$$\frac{\Delta\nu_{\text{exp}}}{\Delta\nu_{\text{theo}}} = 0,9990 \pm 0,0076. \quad (6.41)$$

---

<sup>1</sup>Mößbauer, Rudolf, 1929- . Deutscher Physiker. Nobelpreis 1961 für den nach ihm benannten Effekt.



**Abbildung 6.2:** Nachweis der gravitativen Rotverschiebung: Eine angeregte Probe  $^{57}\text{Fe}$  emittiert  $\gamma$ -Strahlung mit  $E = 14,4 \text{ keV}$ . Eine um die Strecke  $h$  höher gelegene Probe  $^{57}\text{Fe}$  kann die  $\gamma$ -Strahlung zuerst nur schlecht aufgrund der Rotverschiebung zuerst kaum absorbieren. Durch Bewegen der Probe und den dadurch auftretenden Dopplereffekt kann die Rotverschiebung bei einer bestimmten Geschwindigkeit  $v_R$  kompensiert und über den Wert von  $v_R$  bestimmt werden.

### 6.1.5 Periheldrehung

In der Newtonschen Mechanik sind die Bahnen von Teilchen im Zentralgravitationspotential  $\phi(r) = -GM/r$  Kegelschnitte, also z.B. Keplerellipsen. In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie sich der Bahnverlauf in der ART ändert.

#### 1) Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Eine Möglichkeit für diese Untersuchung wäre die Lösung der Geodätengleichungen für die Schwarzschild-Metrik. Wir untersuchen hier stattdessen die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrangefunktion  $\mathcal{L} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ .

Für eine Bewegung in der Äquatorebene bei  $\theta = \pi/2$  mit  $d\vartheta = 0$  erhalten wir

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \right] = \mathcal{L}(r, t, \dot{r}, \dot{\varphi}), \quad (6.42)$$

wobei wir im zweiten Schritt nach  $\tau$  abgeleitete Größen mit einem Punkt kennzeichnen:  $\dot{q} = dq/d\tau$ . Wir sehen, dass die Lagrangefunktion nicht von den Koordinaten  $t$  und  $\varphi$  abhängt<sup>2</sup> und diese also zyklisch sind. Entsprechend muss es zwei Erhaltungssätze geben.

Zum einen der Energiesatz

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c \frac{dt}{d\tau} = A = \text{const}, \quad (6.43)$$

zum anderen der Drehimpulssatz

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = B = \text{const}. \quad (6.44)$$

Als dritte Gleichung ergibt sich

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2 c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = c^2, \quad (6.45)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen  $ds = cd\tau$  für Masseteilchen gilt.

---

<sup>2</sup>Da wir  $\vartheta = \text{const}$  gewählt haben, hängt  $\mathcal{L}$  davon natürlich in jedem Fall nicht ab.

## 2) Lösung der Bewegungsgleichungen

**Formulierung in alternativer Form** Wir suchen die Bahnkurve  $r(\varphi)$ . Dazu führen wir in einem ersten Schritt die Substitutionen

$$r = \frac{1}{u}, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = Bu^2, \quad c \frac{dt}{d\tau} = \frac{A}{1 - r_S u} \quad \text{und} \quad \frac{dr}{d\tau} = -B \frac{du}{d\varphi} \quad (6.46)$$

durch.

Der Ausdruck für  $dr/d\tau$  ergibt sich aus

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\tau} = -\frac{B}{\frac{d\varphi}{d\tau}} \frac{du}{d\tau} = -B \frac{du}{d\varphi}. \quad (6.47)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.43), (6.44) und (6.47) in (6.45) führt mit der Notation  $q' = dq/d\varphi$  auf

$$A^2 - B^2 u'^2 - B^2 u^2 (1 - r_S u) = c^2 (1 - r_S u). \quad (6.48)$$

Eine weitere Ableitung nach  $\varphi$  ergibt

$$-2B^2 u' u'' - 2B^2 u u' + 3B^2 r_S u^2 u' = -c^2 r_S u'. \quad (6.49)$$

Schließlich multiplizieren wir mit  $(-2B^2 u')^{-1}$  und erhalten

$$u'' + u' = \frac{c^2 r_S}{2B^2} + \underbrace{\frac{3}{2} r_S u^2}_K = G \frac{M}{B^2} + \frac{3}{2} G \frac{M}{c^2} u^2. \quad (6.50)$$

Der mit  $K$  bezeichnete Term ist dabei eine Erweiterung im Vergleich zur Newtonschen Mechanik.

**Behandlung mit klassischer Störungstheorie** Für Planetenbewegungen gilt

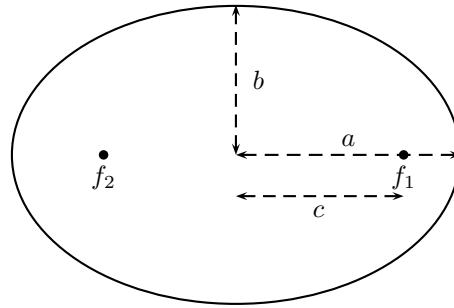
$$r_S u = \frac{r_S}{r} \ll 1, \quad (6.51)$$

der Term  $\frac{3}{2} r_S u^2$  kann daher als kleine Störung behandelt werden um dann eine Lösung mit Hilfe der klassischen Störungstheorie zu berechnen. Dazu betrachten wir zuerst die Lösung  $u_0(\varphi)$  der Gleichung

$$u_0'' + u_0 = \frac{c^2 r_S}{2B^2} \quad (6.52)$$

der Newtonschen Mechanik ohne den Zusatzterm der ART. Die Lösung ergibt sich zu

$$u_0(\varphi) = \frac{c^2 r_S}{2B^2} (1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (6.53)$$



**Abbildung 6.3:** Kenngrößen einer Ellipse: Große und kleine Halbachse  $a$  und  $b$ , sowie der Abstand  $c$  der Brennpunkte vom Mittelpunkt.

und beschreibt wie bereits erwähnt Kegelschnitte. Der Vorfaktor lässt sich auch ausdrücken über

$$\frac{c^2 r_S}{2B^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}. \quad (6.54)$$

mit der großen Halbachse  $a$  und der Exzentrizität  $\varepsilon$ . Für Ellipsen gilt  $0 \leq \varepsilon < 1$ , siehe (Abb. 6.3). Eine bessere Lösung  $u_1(\varphi)$  erhalten wir dann durch Einsetzen von  $u_0$  in den Störterm und Lösen der resultierenden Gleichung. Diese lautet

$$u_1'' + u_1 \approx \frac{c^2 r_S}{2B^2} + \frac{3}{2} r_S u_0^2 \approx \frac{c^2 r_S}{2B^2} + \frac{3c^4 r_S^3}{8B^4} (1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi). \quad (6.55)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u_1(\varphi) = u_0(\varphi) + \frac{3c^4 r_S^3}{8B^4} \left\{ 1 + \underbrace{\varepsilon \varphi \sin \varphi}_A + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right] \right\}. \quad (6.56)$$

Der mit A bezeichnete Term ist proportional zu  $\varphi$  und wächst daher bei vielen Umdrehungen an. Die anderen Zusatzterme sind dagegen vernachlässigbar. Wir setzen den Ausdruck für  $u_0(\varphi)$  ein und erhalten dann

$$\begin{aligned} u_1(\varphi) &\approx \frac{c^2 r_S}{2B^2} \left[ 1 + \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon \frac{3c^2 r_S}{4B^2} \varphi \sin \varphi + \dots \right] \\ &\approx \frac{c^2 r_S}{2B^2} \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left[ \left( 1 - \frac{3c^2 r_S}{4B^2} \right) \varphi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

wobei trigonometrische Additionstheoreme verwendet wurden. Wir betrachten das Argument des Cosinus. Dieses wird gleich  $2\pi$ , für

$$\varphi = 2\pi \left( 1 + \frac{3c^2 r_S^3}{4B^2} \right). \quad (6.58)$$

Daraus ergibt sich der Winkel der Periheldrehung für nichtrelativistische Geschwindigkeiten zu

$$\Delta\varphi = 3\pi \frac{c^2 r_S^2}{2B^2} = 3\pi \frac{r_S}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (6.59)$$

Nur das reine Coulomb-Potential  $-1/r$  führt also nichtrelativistisch auf geschlossene, periodische Bahnen; jede Störung führt zu einer Präzession der Ellipse und zu Rosettenbahnen. Die Störung durch die Wechselwirkung mit den anderen Planeten war im 19. Jahrhundert bereits quantitativ bekannt. Für Merkur beträgt sie  $531,5 \pm 0,3''$  pro Jahrhundert. Langjährige Beobachtungen lieferten aber  $574,3 \pm 0,4''$ . Die Differenz von  $42,7 \pm 0,5''$  war trotz verschiedener Erklärungsversuche nicht befriedigend zu erklären.<sup>3</sup>

Es gilt also

$$\Delta\varphi \sim \frac{\text{Schwarzschild-Radius}}{\text{Bahn-Radius}}. \quad (6.60)$$

In Abb. 6.4 ist der Effekt der Periheldrehung skizziert.  $P_i$  bezeichnen die sonnennächsten (Perihel) und  $A_i$  die sonnenfernsten (Aphel) Punkte der Bahn. Wegen der reziproken Abhängigkeit vom Bahnradius kann bei Merkur die stärkste Periheldrehung erwartet werden. Für ihn gilt

$$a_{\text{Merkur}} = 57,91 \times 10^6 \text{ km} = 0,387 \text{ AE} \quad \text{und} \quad a_{\text{Merkur}} = 0,206, \quad (6.61)$$

zum Vergleich lauten die Werte für die Erde  $a_{\text{Erde}} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$  und  $\varepsilon_{\text{Erde}} = 0,0167$ . Die allgemein-relativistische Perihelbewegung des Merkur pro Jahrhundert beträgt

$$\Delta\varphi_{\text{Merkur}} \Big|_{100 \text{ Jahre}} = 43.03'', \quad (6.62)$$

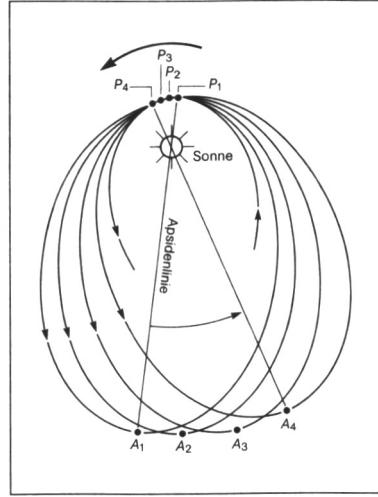
für Venus dagegen  $8.6''$  und für die Erde nur  $3.8''$ .

Die Erklärung der Differenz von beobachteter und mit der Newtonschen Theorie vorhergesagten Periheldrehung durch Einstein war der erste große Triumph der Allgemeinen Relativitätstheorie.<sup>4</sup> Einstein schrieb in einem Brief an PAUL EHRENFEST<sup>5</sup>:

<sup>3</sup>Z.B. postulierte der Astronom Urbain Le Verrier 1859 den Planeten Vulkan innerhalb der Merkur-Bahn, der für die Abweichung verantwortlich sein sollte.

<sup>4</sup>Als Einstein seine Berechnungen durchführte, war die Schwarzschild-Metrik noch nicht gefunden. Einstein verwendete daher auch für die Metrik eine Näherung für schwache Felder.

<sup>5</sup>Paul Ehrenfest, 1880-1933. Österreichischer Physiker, vor allem bekannt durch das Ehrenfest-Theorem.



**Abbildung 6.4:** Effekt der Periheldrehung: Durch die Abweichung vom  $1/r$ -Potential ist die Bahnkurve des Planeten nicht geschlossen. Die Punkte  $P_i$  sind die aufeinanderfolgenden sonnennächsten Punkte (Perihel), die Punkte  $A_i$  die sonnenfernsten (Aphel).

“Ich war einige Tage fassungslos vor freudiger Erregung.”

### 6.1.6 Lichtablenkung im Gravitationsfeld

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Lichtablenkung im Gravitationsfeld. Dazu gehen wir zuerst analog zur Periheldrehung vor und dann mit Hilfe einer anderen Form der Schwarzschild-Metrik.

**Untersuchung analog zur Periheldrehung** Zur Untersuchung der Lichtablenkung im Gravitationsfeld benutzen wir den zu Gleichung (6.45) äquivalenten Zusammenhang<sup>6</sup>

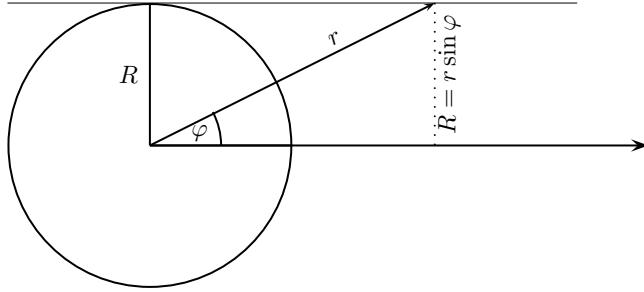
$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2 d\varphi^2 = 0, \quad (6.63)$$

wegen der Bedingung  $ds^2 = 0$  für Photonen. Die weitere Behandlung ist analog zur Betrachtung der Periheldrehung und führt auf die Differentialgleichung

$$A^2 - B^2 u'^2 - B^2 u^2 (1 - r_S u) = 0. \quad (6.64)$$

---

<sup>6</sup>Für Licht kann keine Eigenzeit definiert werden, daher verwendet man i.A. den affinen Parameter  $\lambda$ . Wir haben dieses Notationsproblem durch Multiplikation mit  $d\tau$  umgangen.



**Abbildung 6.5:** Zur Lichtablenkung im Schwerefeld: Eine in der  $\theta = \pi/2$ -Ebene laufende Gerade wird in sphärischen Polarkoordinaten durch die Gleichung  $r(\varphi) = R/\sin(\varphi)$  beschrieben.

und

$$u'' + u = \frac{3}{2}r_S u^2, \quad (6.65)$$

mit der kleinen Störung  $\frac{3}{2}r_S u^2$ . Wieder benutzen wir die klassische Störungstheorie und lösen zuerst die Gleichung

$$u_0'' + u_0 = 0 \quad (6.66)$$

ohne Störungsterm. Dies führt auf

$$u_0(\varphi) = \frac{1}{R} \sin \varphi, \quad \text{bzw.} \quad r(\varphi) = \frac{R}{\sin \varphi}, \quad (6.67)$$

also eine Gerade, wobei  $R$  den minimalen Abstand zum Zentrum bedeutet, siehe Abbildung 6.5 Einsetzen von  $u_0$  in den Störungsterm führt auf die Gleichung

$$u_1'' + u_1 = \frac{3r_S}{2R^2} \sin^2 \varphi \quad (6.68)$$

mit der Lösung

$$u_1(\varphi) = \frac{1}{R} \sin \varphi + \frac{3r_S}{4R^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right]. \quad (6.69)$$

Asymptotisch gilt  $u = 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , d.h. für einen aus dem Unendlichen kommenden Lichtstrahl gilt

$$\frac{1}{R} \sin \varphi + \frac{3r_S}{4R^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \cos(2\varphi) \right] = 0. \quad (6.70)$$

Für  $\varphi \approx 0$  gilt dann

$$\frac{\varphi}{R} + \frac{3r_S}{4R^2} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = 0, \quad (6.71)$$

d.h.

$$\varphi_\infty \approx -\frac{r_s}{R}. \quad (6.72)$$

Die Gesamtablenkung ist dann

$$\alpha = |2\varphi_\infty| = 2\frac{r_s}{R} = 4G\frac{M}{c^2 R}. \quad (6.73)$$

**Resultat in Newtonscher Theorie** Man kann für die Lichtablenkung auch in Newtonscher Theorie einen Wert berechnen, wenn man Licht als impulsbehaftetes Teilchen betrachtet, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Analog zu(6.53) haben wir dann

$$\frac{1}{r(\varphi)} = u(\varphi) = \frac{c^2 r_s}{2B^2}(1 + \varepsilon \sin \varphi). \quad (6.74)$$

wegen  $r d\varphi/dt = c$  für Photonen bei  $\vartheta = \pi/2$  gilt

$$B = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = R \left( \frac{R d\varphi}{dt} \right) = R c. \quad (6.75)$$

Einsetzen in (6.74) liefert  $R^{-1} = r_s/(2R^2)(1 + \varepsilon)$  bei  $\varphi = \pi/2$ . Aufgelöst nach  $\varepsilon$  erhält man

$$\varepsilon = 2\frac{R}{r_s} - 1 \approx 2\frac{R}{r_s}, \quad (6.76)$$

wegen  $R \gg r_s$ . Für  $r \rightarrow \infty$  in (6.74) ergibt sich

$$0 = \frac{r_s}{2R^2} (1 + \varepsilon \sin \varphi_\infty) \quad (6.77)$$

und damit für  $\varepsilon \gg 1$ , was aus (6.76) ersichtlich ist, schließlich

$$\varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon} = -\frac{r_s}{2R}. \quad (6.78)$$

Die Gesamtablenkung nach dieser Rechnung ist also

$$\alpha_{\text{Newton}} = 2|\varphi_\infty| = \frac{r_s}{R}, \quad (6.79)$$

d.h. der halbe Wert der allgemein-relativistischen Rechnung.

**Die isotrope Schwarzschild-Metrik** Ein alternativer Weg für die quantitative Untersuchung der Lichtablenkung im Gravitationsfeld führt über die ISOTROPE SCHWARZ-

SCHILD-METRIK. Um diese einzuführen definieren wir die neue Radialkoordinate  $\bar{r}$  über

$$r = \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^2 \bar{r}. \quad (6.80)$$

Dann folgt für das Quadrat des infinitesimalen Raum-Zeit-Elementes:

$$(ds)^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_s}{4\bar{r}}}{1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}}\right)^2 (d(ct))^2 - \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^4 d\bar{\mathbf{x}}^2 \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{r} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \bar{r} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \bar{r} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (6.81)$$

In der SRT ist die Lichtausbreitung charakterisiert durch  $(ds)^2 = 0$ . Dies ist die Gleichung der „Nullgeodäten“. Wegen des Äquivalenzprinzips gilt dies dann auch in der ART mit der jeweils zutreffenden Metrik. Es folgt dann

$$\left(\frac{1 - \frac{r_s}{4\bar{r}}}{1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}}\right)^2 c^2 (dt)^2 = \left(1 + \frac{r_s}{4\bar{r}}\right)^4 (d\bar{\mathbf{x}})^2. \quad (6.82)$$

Weiter ergibt sich

$$\left|\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{\bar{r}}}{1 + \frac{r_s}{\bar{r}}}} \cdot c \approx \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right) c = v_{\text{Licht}} < c. \quad (6.83)$$

Das Licht in der Schwarzschild-Metrik hat also eine geringere Geschwindigkeit, als die Lichtgeschwindigkeit in der Minkowski-Metrik<sup>7</sup>. Formal können wir diesem Sachverhalt durch die Einführung eines ortsabhängigen Brechungsindex Rechnung tragen:

$$\frac{c}{v_{\text{Licht}}} = n \approx 1 + \frac{r_s}{\bar{r}}. \quad (6.84)$$

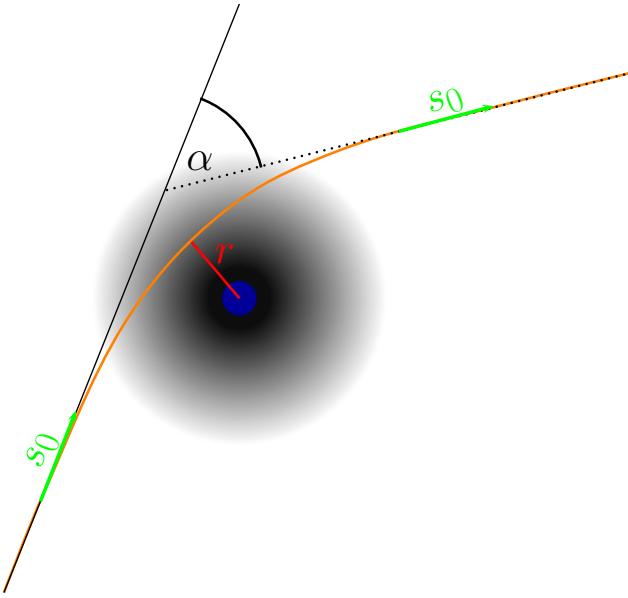
Licht wird im Gravitationsfeld also „gebeugt“. Aus der geometrischen Optik ist uns die EIKONAL-GLEICHUNG bekannt:

$$\frac{d}{ds_0}(n\mathbf{s}_0) = \nabla n. \quad (6.85)$$

Wobei  $\mathbf{s}_0$  der Tangentialvektor an die Bahnkurve des Lichtes ist (Abb. 6.6). Bezeichnet man  $\alpha$  als den Krümmungswinkel und  $R$  als den „Stoßparameter“ des Lichtes relativ zu einem Streuer (eben ein Gravitationsfeld), so folgt nach kurzer Rechnung wiederum

$$\alpha = \frac{2r_s}{R}. \quad (6.86)$$

<sup>7</sup>Bei dieser Aussage bezieht man sich auf eine globale Eigenschaft, etwa die Messung der Laufzeit des Lichts bis zu einem anderen Planeten. Es ist wichtig, dass jeder Beobachter stets lokal die Lichtgeschwindigkeit  $c$  misst!



**Abbildung 6.6:** Die Wirkung von Massen kann beschrieben werden als scheinbarer ortsabhängiger Brechungsindex der Raumzeit. Die Änderung des Tangentialvektors  $s_0$  ist durch die Eikonal-Gleichung gegeben.

Für die Sonne ist  $R = R_\odot = 7 \cdot 10^5$  km,  $r_s = 3$  km und daher

$$\alpha_\odot \approx 1.75''. \quad (6.87)$$

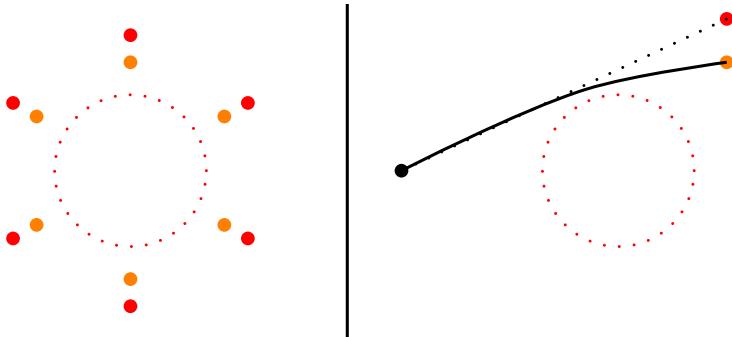
Sterne, die am Himmel der Sonne sehr nahe stehen, erscheinen aufgrund der Lichtablenkung etwas weiter von der Sonne entfernt, als ihre tatsächliche Position (Abb. 6.7). Da diese Sterne aber normalerweise von der Sonne überstrahlt werden, ist dieser Effekt nicht sichtbar. Wird während einer Sonnenfinsternis die Sonne verdeckt, so kann die scheinbare Positionsveränderung dieser Sterne bestimmt werden.

Durch Messungen während der Sonnenfinsternis am 29 Mai 1919 konnte von A. Eddington die Lichtablenkung erstmals nachgewiesen werden und die Newtonsche Vorhersage ausgeschlossen werden[5].<sup>8</sup> Die Bekanntgabe dieser Resultate erfolgte am 6.11.1919 in einer eigens dafür einberufenen Sitzung der Royal Astronomical Society in London und machte Einstein auch außerhalb der Physik weltberühmt. So schrieb etwa die New York Times am 9.11.1919:

*“Lights all askew in the Heavens - Men of science more or less agog over results of eclipse observations - Einstein Theory triumphs.”*

---

<sup>8</sup>Heutzutage gibt es Zweifel daran, ob mit Eddington's Versuchsanordnung dieser Nachweis überhaupt möglich war und er nicht bei ihm auftretende systematische Fehler weit unterschätzte.



**Abbildung 6.7:** Während einer Sonnenfinsternis erscheinen Sterne, die am Himmel der Sonne nah sind, aufgrund der Lichtablenkung scheinbar weiter entfernt von der Sonne (rot) als ihre tatsächliche Position ist (orange).

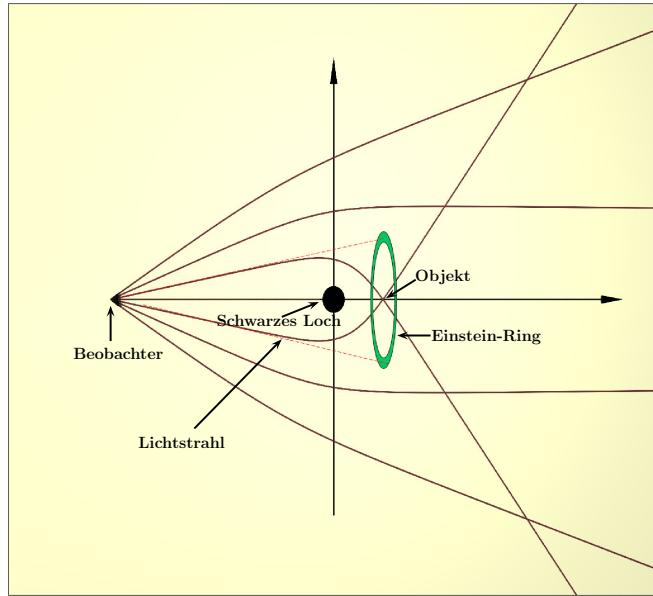
Der Effekt der Lichtablenkung wird auch als GRAVITATIONSLINSEFFEKT bezeichnet, da das massive Objekt, in diesem Fall die Sonne ähnlich wie eine Linse wirkt. Es besteht allerdings ein wichtiger Unterschied: Bei einer Linse wird das Licht umso stärker abgelenkt, je weiter es vom Mittelpunkt der Linse entfernt auf sie auftrifft. Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld dagegen wird dann immer kleiner. Eine “Gravitationslinse“ hat daher keinen Brennpunkt.

Eine sehr gute und leicht verständliche Abhandlung über die Lichtablenkung im Schwerkeld auch unter einem geschichtlichen Aspekt findet sich in [6].

**Lichtablenkung außerhalb des Sonnensystems** Mit den leistungsfähigsten Teleskopern ist es heutzutage möglich, diesen Effekt auch außerhalb des Sonnensystems zu beobachten. Läuft etwa Licht einer weit entfernten Galaxie an einem sehr massiven Objekt, etwa einem Galaxiehaufen vorbei, bevor es die Erde erreicht, so tritt hier wiederum eine Lichtablenkung auf. Durch die viel größeren Massen kann die Lichtablenkung hier noch deutlich größer sein. Licht, das vom selben Gebiet der beobachteten Galaxie in verschiedene Richtungen ausgesandt wurde, kann so abgelenkt werden, dass es bei uns aus verschiedenen Richtungen ankommt. Das betrachtete Objekt erscheint uns dann ringförmig verzerrt. Man spricht dann von einem EINSTEIN-RING.

Durch quantitative Messungen dieses Effektes kann dann wiederum Rückschluss auf die Masse des ablenkenden Objektes gezogen werden. Durch Vergleich mit Berechnungen anhand der sichtbaren Masse in diesem Objekt zeigt sich, dass viel mehr Masse für die beobachtete Lichtablenkung nötig ist, als sichtbar ist. Dies ist einer der aktuellen Hinweise auf Dunkle Materie.

**Visualisierung von Einstein-Ringen** Einstein-Ringe sind, wie viele andere Phänomene, die die ART voraussagt, nur schwer vorstellbar. Man kann sich anhand von Skizzen zwar einigermaßen klarmachen, wie die Ringstrukturen zustande kommen (Abb. 6.8),



**Abbildung 6.8:** Ein Schwarzes Loch, bzw. ein anderes sehr massives Objekt, lenkt Lichtstrahlen von dahinter befindlichen Objekten extrem ab. Aus Symmetriegründen erscheint das Objekt dem Beobachter als Ring um das Schwarze Loch.[7]

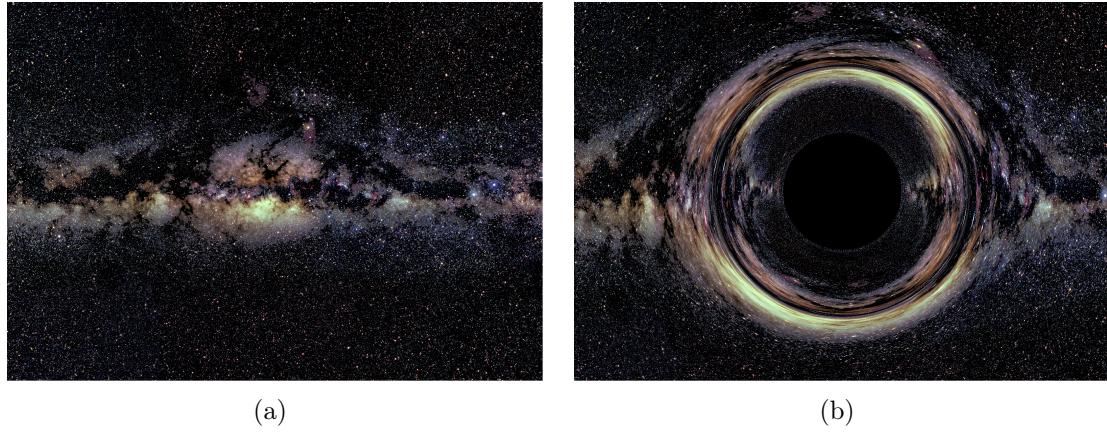
aber eine Vorstellung vom exakten Aussehen dieses Effektes kann dadurch nicht geliefert werden.

Mit Hilfe moderner Computer ist es möglich, Einstein-Ringe physikalisch korrekt zu simulieren. Am stärksten ausgeprägt ist dieser Effekt natürlich in der Nähe von Schwarzen Löchern, denn dort sind relativistische Effekte am stärksten. Durch die hohe Symmetrie der Schwarzschild-Metrik erscheint dort der Ring perfekt kreisförmig. Abbildung 6.9 zeigt ein Bild der Milchstrasse im flachen Raum im Vergleich mit der selben Situation, wenn sich ein Schwarzes Loch zwischen der Milchstrasse und dem Beobachter befindet.[8]

### 6.1.7 Laufzeitverzögerung

Aus der Krümmung der Bahn des Lichtes folgt, dass eine Zeitverzögerung für von den Planeten Merkur und Venus reflektierte Radiowellen bei Konjunktion von Erde, Sonne und jeweiligem Planet vorliegen muss, denn wegen des Gravitationseffektes läuft das Signal nicht auf direktem Wege hin und her, sondern auf einer gekrümmten Bahn (Abb. 6.10). Wiederum kann auch im Rahmen der Newtonschen Theorie für ein sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegendes, impulsbehaftetes Teilchen eine Laufzeitverzögerung berechnet werden. Die Ergebnisse der Rechnungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\Delta t = (1 + \gamma) \frac{r_s}{c} \ln \left( \frac{4r_1 r_2}{b^2} \right), \quad (6.88)$$



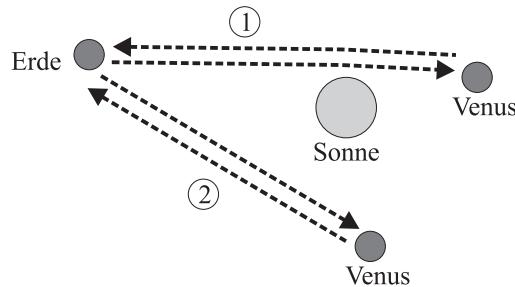
**Abbildung 6.9:** Visualisierung von Einstein-Ringen. Abbildung a): Bild der Milchstrasse im flachen Raum. Abbildung b): Bild der Milchstrasse mit Schwarzen Loch im Vordergrund. Durch die starke Lichtablenkung erscheinen Teile der Milchstrasse als Einstein-Ring um den dunklen Bereich, aus dem kein Licht den Beobachter erreicht.[7]

mit den Distanzen  $r_1$  und  $r_2$  von Erde und jeweiligem Objekt und dem Stoßparameter  $b$ . Die allgemein-relativistische Rechnung führt auf  $\gamma = 1$ , die Newtonsche auf  $\gamma = 0$ , also wieder der halbe Effekt wie bei der Lichtablenkung.

Zusätzlich zur Laufzeitverzögerung tritt auch noch eine Dopplerverschiebung des Signals auf:

$$y_{\text{gr}} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{d\Delta t}{dt} = -2(1 + \gamma) \frac{r_s}{c} \frac{1}{b} \frac{db}{dt}. \quad (6.89)$$

Im Fall ① in Abbildung 6.10 ist die Laufzeit des Radarsignals wegen des Brechungsindexeffektes größer als nach der Newtonschen Theorie für die Venus. Es ergibt sich



**Abbildung 6.10:** Laufzeitverzögerung des Lichts: Durch die Lichtablenkung durch die Sonne ist in Konstellation ① die Lichtlaufzeit größer als durch die Newtonsche Theorie vorhergesagt. In Konstellation ② ist die Abweichung der Lichtlaufzeit gering.

etwa

$$\Delta t = 240 \mu s \quad \text{bzw.} \quad \Delta t \cdot c = 36 \text{ km.} \quad (6.90)$$

In einem Experiment 1968 konnte I.I. Shapiro[9] diese Laufzeitverzögerung bis auf 3% bestätigen (d.h. Bestimmung des Abstandes Erde-Venus auf 1 km).

**Neue Messung mit Hilfe der Cassini-Raumsonde** Mit Hilfe der Cassini-Raumsonde konnte 2002, als sich die Sonde in Sonnenkonjunktion befand eine deutlich genauere Messung vorgenommen werden[10]. Die Messungen führten auf

$$\gamma = 1 + (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}. \quad (6.91)$$

Auf ihrem Weg zum Saturn befand sich die Sonde um den 6. und 7. Juli 2002 herum in Konjunktion zur Sonne, d.h. in maximaler Entfernung zur Erde hinter der Sonne, allerdings nicht exakt in der Erdebene, sodass sie nicht von der Sonne verdeckt war. Da im Gegensatz zur Messung mit Hilfe der Venus in diesem Fall das Signal nicht einfach reflektiert, sondern von der Sonde empfangen und analysiert und aktiv ein Signal zurückgeschickt werden konnte, war es möglich in diesem Fall die Größe  $y_{\text{gr}}$  sehr genau zu messen und eine viel höhere Präzision zu erreichen.

### 6.1.8 Global Positioning System

Für den Betrieb von GPS sind sowohl speziell- als allgemeinrelativistische Effekte sehr wichtig weshalb wir hier kurz darauf eingehen wollen. GPS besteht aus 24 Satelliten, die auf 6 Bahnen mit jeweils 4 Satelliten kreisen<sup>9</sup> (Abb. 6.11). Die Satelliten befinden sich in einer Höhe von etwa 20200 km über der Erdoberfläche und umkreisen die Erde zweimal pro Tag. Aufgrund der wegen der großen Entfernung zur Erde schwächeren Gravitation gehen die Uhren der Satelliten pro Tag etwa um  $45 \mu s$  vor.

Wegen der Bahngeschwindigkeit von etwa  $3 - 4 \text{ km/s}$  allerdings gehen sie um etwa  $7 \mu s$  nach. In der Summe ergibt sich eine Zeitdifferenz von  $38 \mu s$ . Da GPS die Positionen des Nutzers über Lichtsignale bestimmt, würde dies auf einen Fehler von etwa

$$38 \mu s \times 299792458 \text{ m/s} = 11,4 \text{ km} \quad (6.92)$$

pro Tag führen!

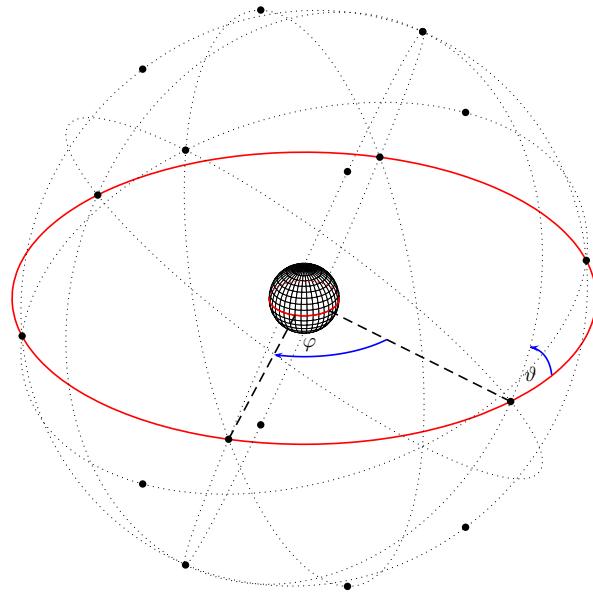
Daher ist es notwendig, dass bei GPS relativistische Effekte mitberücksichtigt werden.

## 6.2 Gravitationskollaps und schwarze Löcher

In diesem Abschnitt befassen wir uns nochmals näher mit der Schwarzschild-Metrik in Gleichung (6.19). Die Stelle  $r = r_S$  ist problematisch, denn dort gilt, wie man sofort sieht

---

<sup>9</sup>Im realen Betrieb sind es u.a. aus Reservegründen etwas mehr Satelliten.



**Abbildung 6.11:** Global Positioning System: Auf 6 Bahnen laufen jeweils 4 Satelliten, insgesamt also 24 Stück. Alle Bahnen sind um  $\vartheta = 55^\circ$  gegen den Äquator gekippt und gegeneinander um  $\varphi = 60^\circ$  verdreht. Im Bild sind wegen Positionsüberschneidungen nur 18 Satelliten gezeigt.

$g_{00} = 0$  und  $g_{11} \rightarrow -\infty$ . Wir betrachten im Folgenden eine zeitartige, radiale Geodäte der Schwarzschild-Metrik, d.h. entsprechend Gleichung (6.45), jedoch mit  $d\Omega = 0$ . Dann gilt wegen  $ds^2 = c^2 d\tau^2$

$$\mathcal{L}(t, \dot{t}, r, \dot{r}) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2. \quad (6.93)$$

Dabei bezeichnet ein Punkt die Ableitung bezüglich  $\tau$ . Die Koordinatenzeit  $t$  tritt in diesem Ausdruck nicht auf, ist also eine zyklische Koordinate und

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial \mathcal{L}(t, \dot{t}, r, \dot{r})}{\partial t} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c \frac{dt}{d\tau} = \mathcal{C} = \text{const.} \quad (6.94)$$

Die Konstante  $1/(2c)$  haben wir dabei so gewählt, dass wir diesen Ausdruck gleich geschickt verwenden können. Eine kleine Umformung von Gleichung (6.93) führt dann nämlich auf  $\mathcal{C}^2 - (dr/d\tau)^2 = c^2 (1 - r_s/r)$ , bzw.

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\mathcal{C}^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} \quad (6.95a)$$

und

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathcal{C}}{c} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \quad (6.95b)$$

Wir nehmen nun an, die Ausdehnung der Masse  $M$ , welche die Schwarzschild-Metrik erzeugt, sei kleiner als der Schwarzschild-Radius, d.h. es soll sich um ein Schwarzes Loch handeln.

### 6.2.1 Freier Fall auf ein Schwarzes Loch

In diesem Abschnitt wollen wir den freien Fall eines Teilchens in ein Schwarzes Loch untersuchen. Dabei interessieren uns besonders die unterschiedlichen Beobachtungen, eines mit dem Teilchen mitfallenden und eins weit entfernten Beobachters. In beiden Fällen soll das Teilchen bei  $r = R > r_s$  starten.

#### 1) Betrachtung für mitfallenden Beobachter

Für die Eigenzeit eines mitbewegten Beobachters folgt mit Gleichung (6.95a)

$$\tau(r) = - \int_R^r \frac{dr'}{\sqrt{\mathcal{C}^2 - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}}. \quad (6.96)$$

Einsetzen der Anfangsbedingung  $r = R$  und  $(dr/d\tau)|_{r=R} = 0$  in Gleichung (6.93) führt auf

$$\left(1 - \frac{r_s}{R}\right) c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}}. \quad (6.97)$$

Zusammen mit Gleichung (6.94) kann damit die Konstante  $\mathcal{C}$  bestimmt werden zu

$$\mathcal{C} = c \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}. \quad (6.98)$$

Einsetzen dieses Wertes in Gleichung (6.96) führt uns auf den Ausdruck

$$\tau(r) = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{dr'}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_s}{R}\right) - \left(1 - \frac{r_s}{r'}\right)}} = \frac{1}{c} \int_r^R \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r_s}{r'} - \frac{r_s}{R}}} \quad (6.99)$$

für die vergangene Eigenzeit beim Fall bis zur Radialkoordinate  $r$ . Wir verwenden zur Lösung die Substitution  $r' = R \sin^2 x$ ,  $dr' = 2R \sin x \cos x dx$  und erhalten

$$\begin{aligned}\tau(r) &= 2 \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_S}} \int_{\arcsin \sqrt{\frac{r}{R}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_S}} \left[ 2 \sqrt{\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}} + \arccos \left( 2 \frac{r}{R} - 1 \right) \right].\end{aligned}\quad (6.100)$$

Bei  $r = R$  gilt  $\tau(R) = 0$ . Wir setzen nun  $r = r_S$  in (6.100) und erhalten als Fallzeit bis zum Ereignishorizont

$$\tau(r_S) = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_S}} \left[ 2 \sqrt{\frac{r_S}{R} - \frac{r_S^2}{R^2}} + \arccos \left( 2 \frac{r_S}{R} - 1 \right) \right]. \quad (6.101)$$

Das Teilchen erreicht also nach *endlicher* Eigenzeit den Schwarzschild-Radius. Weiter gilt für  $r = 0$  wegen  $\arccos(-1) = \pi$ :

$$\tau(0) = \frac{\pi}{2} \frac{R}{c} \sqrt{\frac{R}{r_S}}. \quad (6.102)$$

Das Teilchen erreicht also auch nach endlicher Eigenzeit das Zentrum des Schwarzen Loches. Wir führen an dieser Stelle die Zykloidenkoordinate  $\eta$  über

$$r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta) \quad (6.103)$$

ein. Dann gilt  $r(\eta = 0) = R$  und  $r(\eta = \pi) = 0$  und wir erhalten den einfachen Ausdruck

$$\tau(\eta) = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{R}{r_S}} (\eta + \sin \eta). \quad (6.104)$$

Diese Funktion ist für  $\eta \in [0, \pi]$  stetig. Das Teilchen passiert in seinem Ruhesystem demnach den Schwarzschild-Radius *ohne* auf eine Singularität zu stoßen.

## 2) Betrachtung für einen weit entfernten Beobachter

Um auszuwerten, was ein weit entfernter Beobachter sieht, betrachten wir den Ausdruck

$$t(r) = \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} \frac{1}{c} \int_r^R \left( 1 - \frac{r_S}{r'} \right)^{-1} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r_S}{r'} - \frac{r_S}{R}}} \quad (6.105)$$

für die vergangene Koordinatenzeit beim Fall bis zur Radialkoordinate  $r$ . Dabei haben wir den Zusammenhang zwischen  $dt$  und  $d\tau$  in (6.95b) zusammen mit dem Ausdruck

für  $\mathcal{C}$  aus Gleichung (6.98) benutzt um von  $\tau(r)$  auf  $t(r)$  zu kommen.

Wir sehen sofort, dass der Faktor  $(1 - r_S/r')^{-1}$  bei  $r' = r_S$  singulär wird. Zur genauen Auswertung des Integrals verwenden wir wieder die Zykloidenkoordinate und erhalten nach Integration

$$t(\eta) = \frac{r_S}{c} \left\{ \ln \left[ \frac{\sqrt{\frac{R}{r_S} - 1} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R}{r_S} - 1} - \tan \frac{\eta}{2}} \right] + \sqrt{\frac{R}{r_S} - 1} \left[ \eta + \frac{R}{2r_S} (\eta + \sin \eta) \right] \right\}. \quad (6.106)$$

Dieser Ausdruck divergiert, wenn das Argument des Logarithmus divergiert, also wenn

$$\sqrt{\frac{R}{r_S} - 1} = \tan \frac{\eta}{2} \quad (6.107)$$

ist. Diese Bedingung kann umgeschrieben werden zu  $(R/r_S - 1) = (1 - \cos \eta)/(1 + \cos \eta)$ , bzw.

$$\cos \eta = 2 \frac{r_S}{R} - 1. \quad (6.108)$$

Wenn wir diesen Ausdruck jetzt wieder in (6.103) einsetzen, so ergibt sich

$$r = \frac{R}{2} (1 + \cos \eta) = r_S. \quad (6.109)$$

D.h. für  $r \rightarrow r_S$  gilt  $t \rightarrow \infty$ .

### 3) Konsequenzen

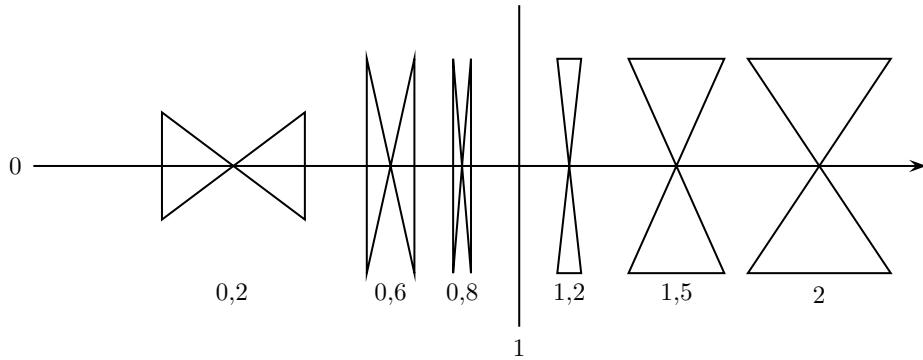
Für den Beobachter erreicht das Teilchen also *niemals* den Schwarzschild-Radius  $r_S$ . D.h. bei  $r_S$  ist ein ‘‘Ereignishorizont’’, Informationen über Ereignisse bei  $r < r_S$  können den äußeren Beobachter nicht erreichen. Dies gilt auch für Photonen, aus dem Bereich  $r < r_S$  entweicht also kein Licht, deshalb spricht man von einem ‘‘Schwarzen Loch’’. Die Beobachtung, bzw. der Nachweis Schwarzer Löcher ist daher nur indirekt möglich.

Für die Schwarzschild-Metrik ergeben sich auch mathematische Konsequenzen. Bei Annäherung an den Schwarzschild-Radius tritt eine Singularität in  $ds^2$  auf, der Bereich  $r \leq r_S$  ist in den Koordinaten  $(t, r)$  nicht zugänglich. Im Eigensystem eines radial fallenden Beobachters tritt *keine* Singularität bei  $r = r_S$  auf, die Singularität ist also koordinatenabhängig. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir einen radialen Lichtkegel mit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (6.110)$$

d.h.

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{r_S}{r}\right). \quad (6.111)$$

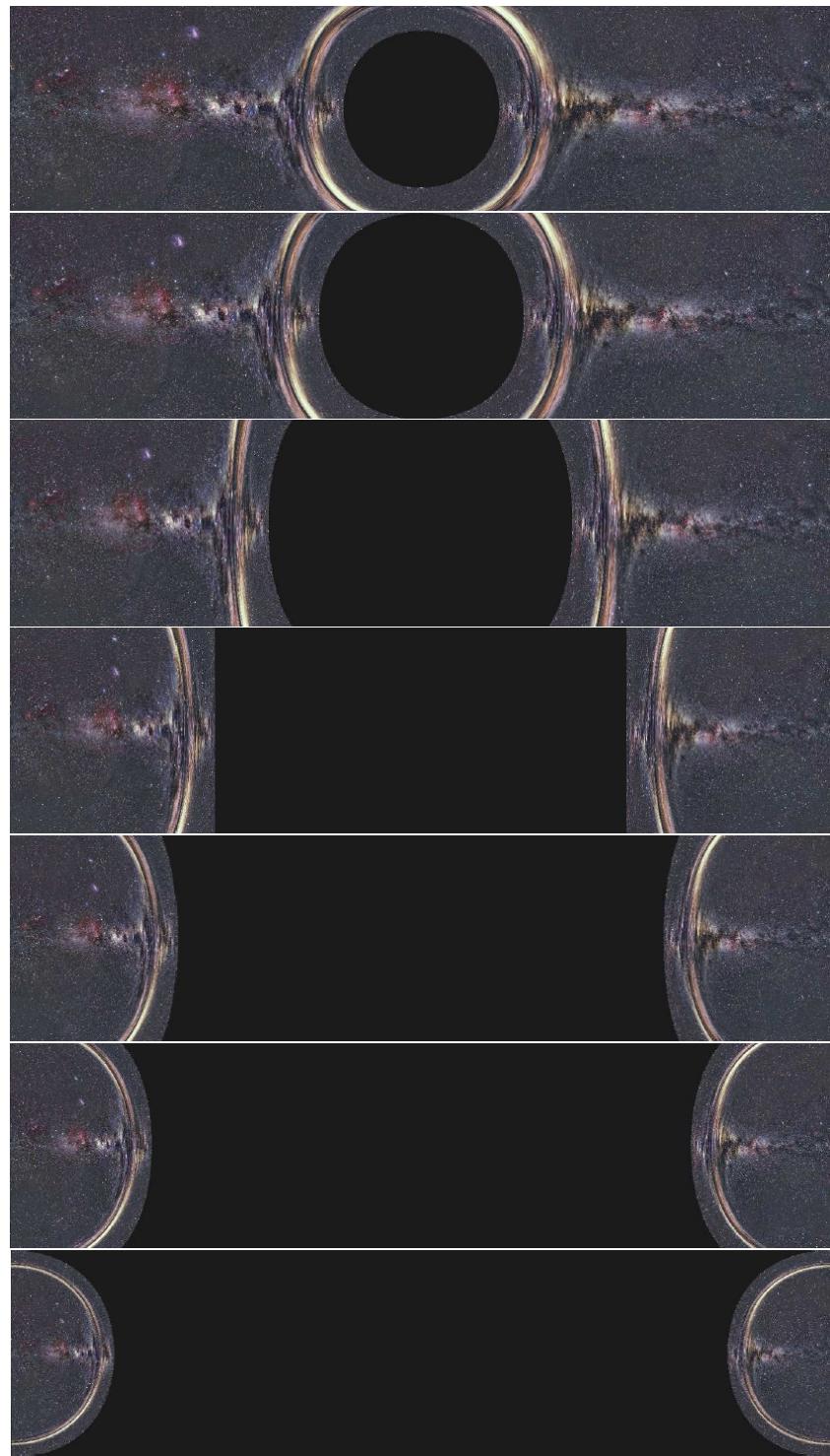


**Abbildung 6.12:** Bei Annäherung an den Schwarzschildradius verengen sich die Lichtkegel immer weiter. Am Schwarzschildradius sind sie dann zu einer Linie entartet und öffnen sich innerhalb des Schwarzschildradius entlang der Raumachse. Die Zeitkoordinate wird hier also  $r$  und  $t$  ist raumartige Koordinate.

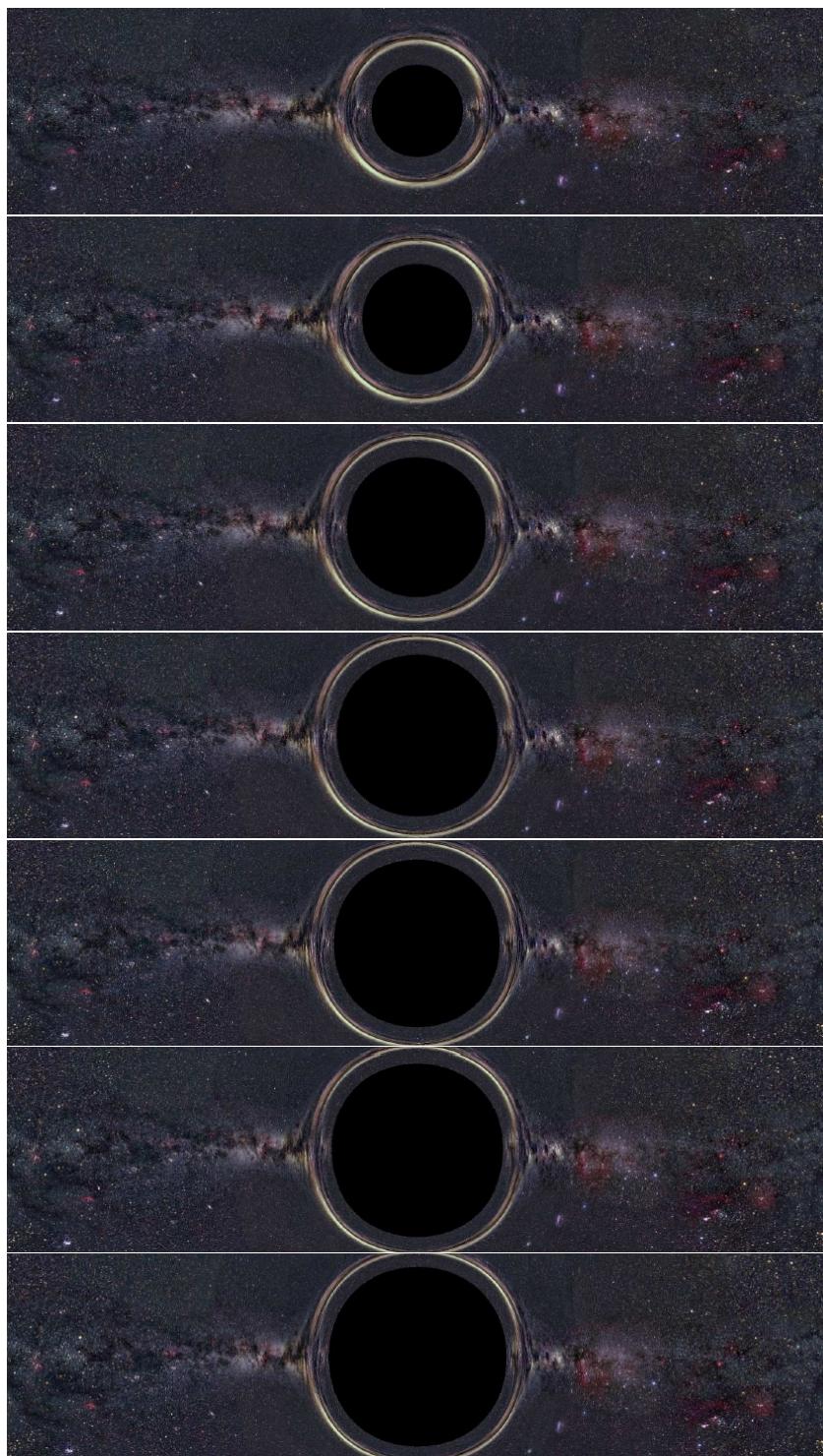
Die Lichtkegel verengen sich bei Annäherung an den Schwarzschild-Radius. Für  $r > r_s$  sind sie entlang der Zeitachse geöffnet, für  $r < r_s$  öffnen sich die Lichtkegel entlang der Raumachse, d.h.  $r$  wird eine zeitartige und  $t$  eine raumartige Koordinate. Wir werden im übernächsten Abschnitt geeignete Koordinaten zur Beschreibung geodätischer Linien einführen.

#### 4) Visualisierung des Falls auf ein Schwarzes Loch

T. Müller[11] hat in seiner Doktorarbeit visualisiert, was ein in ein Schwarzes Loch stürzender Beobachter sehen würde. Bei diesem Sturz überlagern sich zwei Effekte, zum einen die Lichtablenkung aufgrund der Gravitation und zum anderen die Aberration aufgrund der hohen Geschwindigkeit während des Sturzes. Betrachtet man zuerst einen statischen Beobachter, der sich einem Schwarzen Loch zwar nähert, aber, etwa durch den Antrieb seines Raumschiffes, seine Geschwindigkeit sehr klein hält, so ergeben sich die Bilder in Abbildung 6.13. Gezeigt ist jeweils eine Panoramadarstellung des gesamten Gesichtsfelds. Der Beobachter blickt direkt in das Schwarze Loch hinein. Je näher am Ereignishorizont sich der Beobachter befindet, desto mehr erscheint das gesamte Universum auf einen kleinen Ausschnitt des gesamten Blickfeldes gegenüber dem Schwarzen Loch zusammengedrückt. Dagegen wird dieser Effekt im freien Fall wieder größtenteils durch die Aberration aufgehoben, siehe Abbildung 6.14. In diesen Bildern sind Rot- und Blauverschiebungseffekte, sowie eine sich ändernde Intensitätsverteilung nicht berücksichtigt. Eine umfassendere Behandlung dieses Themas mit weiteren Bildern findet sich in [12].



**Abbildung 6.13:** Statische Annäherung an ein Schwarzes Loch. Im Hintergrund das Milchstrassenpanorama; Abstand (von oben nach unten):  $r_i/r_S = 4,0, 3,0, 2,0, 1,5, 1,3, 1,2$  und  $1,1$ . Darstellung mit Panoramakamera mit Sichtfeld  $360^\circ \times 90^\circ$ . Visualisierung von T. Müller[11].



**Abbildung 6.14:** Annäherung an ein Schwarzes Loch im Freien Fall. Im Hintergrund das Milchstrassenpanorama; Abstand (von oben nach unten):  $r_i/r_s = 4,0, 3,0, 2,0, 1,5, 1,3, 1,2$  und  $1,1$ . Darstellung mit Panoramakamera mit Sichtfeld  $360^\circ \times 90^\circ$ . Visualisierung von T. Müller[11].

**Tabelle 6.1:** Vergleich der in den Schwarzschildkoordinaten auftretenden Singularitäten. Die Singularität bei  $r = 0$  ist eine Eigenschaft der Metrik, während sich die Singularität bei  $r = r_s$  durch eine geeignete Koordinatentransformation beseitigen lässt.

$r$	Krümmungs-invarianten	Metrik singulär	Schwarzschildkoordinaten singulär
0	Unendlich	Ja	Ja
$r_s$	Endlich	Nein	Ja

### 6.2.2 Erweiterung der Schwarzschildmetrik

Bei Betrachtung der Schwarzschildmetrik in Gleichung (6.19) erkennt man zwei Singularitäten, eine bei  $r = r_s$  und eine bei  $r = 0$ . Andererseits haben wir in den vorangegangenen Abschnitten bereits gesehen, dass für einen Beobachter nichts besonderes passiert, wenn er den Schwarzschildradius überquert. Außerdem zeigt sich, dass die invarianten, die Krümmung ausdrückenden Größen, die sich durch Kontraktion des Riemann-tensors ergeben bei  $r = r_s$  alle einen endlichen Wert haben.[2, 13] Es liegt daher die Vermutung nahe, dass diese beiden Singularitäten sehr verschiedenen Charakter haben, wie es dann auch mehrere Autoren, unter anderen auch Einstein, in verschiedenen Arbeiten ab 1921 zeigten[14]. In Tabelle 6.1 werden die beiden auftretenden Singularitäten in Kurzform verglichen.

Man kann sich die Tatsache, dass bei  $r = r_s$  keine physikalische Singularität auftritt am besten klar machen, indem man auf Koordinaten transformiert, in denen diese Singularität nicht auftritt. Einen ersten Schritt in diese Richtung kann man durch die Einführung der Eddington-Finkelstein-Koordinaten machen.

#### 1) Eddington-Finkelstein-Koordinaten

Die ursprünglich von A. Eddington 1924 gefundenen und von D. Finkelstein 1958[15, 16] wiederentdeckten Koordinaten beruhen auf der Betrachtung frei auf das Schwarze Loch fallender Photonen. Es wird die neue Koordinate  $\mathcal{V}$  eingeführt als

$$\mathcal{V} = t + r^* \tag{6.112}$$

mit dem Ausdruck

$$r^* = r + r_s \ln \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right), \quad \text{bzw.} \quad dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} \tag{6.113}$$

ein. In den neuen Koordinaten  $(\mathcal{V}, r, \vartheta, \varphi)$  lautet die Metrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d\mathcal{V}^2 - 2d\mathcal{V}dr - r^2 d\Omega^2. \quad (6.114)$$

Man erkennt die Anpassung an radial fallende Photonen wenn man deren Lichtkegel betrachtet. Aus  $ds^2 = 0$  folgen die beiden Bedingungen

$$\frac{d\mathcal{V}}{dr} = 0 \quad \text{für nach innen laufende Photonen und} \quad (6.115a)$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad \text{für nach außen laufende Photonen.} \quad (6.115b)$$

In das Schwarze Loch fallende Photonen laufen also auf Flächen mit  $\mathcal{V} = \text{const.}$  Für radial nach außen laufende Photonen tritt allerdings bei  $r = r_s$  immer noch eine Singularität auf. Analog kann man statt  $\mathcal{V}$  die Koordinate  $\mathcal{U} = t - r^*$  zur Beschreibung radial auslaufender Photonen einführen. Hier tritt dann bei  $r = r_s$  eine Singularität für einlaufende Photonen auf.

## 2) Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Um die Probleme im letzten Abschnitt vollständig zu beseitigen wird ein sphärisch symmetrisches Koordinatensystem  $(u, v, \vartheta, \varphi)$  gesucht in dem radial verlaufende Lichtstrahlen überall die Steigung  $dx^1/dx^0 = \pm 1$  wie im flachen Raum haben. M. D. Kruskal wählte dafür den Ansatz

$$ds^2 = f^2(u, v) (dv^2 - du^2) - r^2(u, v) d\Omega^2 \quad (6.116)$$

für das Linienelement.[14] Dabei bezeichnet  $v$  die zeitartige und  $u$  die raumartige Koordinate. Die Funktion  $f$  soll nur von  $r$  abhängen und für  $v = u = 0$  endlich und ungleich Null bleiben. Die Forderung, dass

$$f^2(u, v) (dv^2 - du^2) = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (c^2 dt^2 - dr^{*2}) \quad (6.117)$$

gelten soll, führt auf die Transformationsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} u = \pm \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{ct}{2r_s} \\ v = \pm \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{ct}{2r_s} \end{array} \right\} \quad \text{für } r > r_s \quad (6.118a)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} u = \pm \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \sinh \frac{ct}{2r_s} \\ v = \pm \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{\frac{r}{2r_s}} \cosh \frac{ct}{2r_s} \end{array} \right\} \quad \text{für } r < r_s. \quad (6.118b)$$

Für die Koordinaten  $u$  und  $v$  erhält man mit diesen Resultaten die Beziehungen

$$u^2 - v^2 = \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right) e^{\frac{r}{r_s}} \quad (6.119)$$

und

$$2uv = \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right) \sinh \frac{ct}{r_s}. \quad (6.120)$$

Schließlich hat  $f^2$  dann die Form

$$f^2 = 4 \frac{r_s^3}{r} e^{-\frac{r}{r_s}}. \quad (6.121)$$

Dieser Ausdruck ist größer Null für  $r > 0$  und nur bei  $r = 0$  singulär. Das Linienelement in Kruskalkoordinaten lautet dann

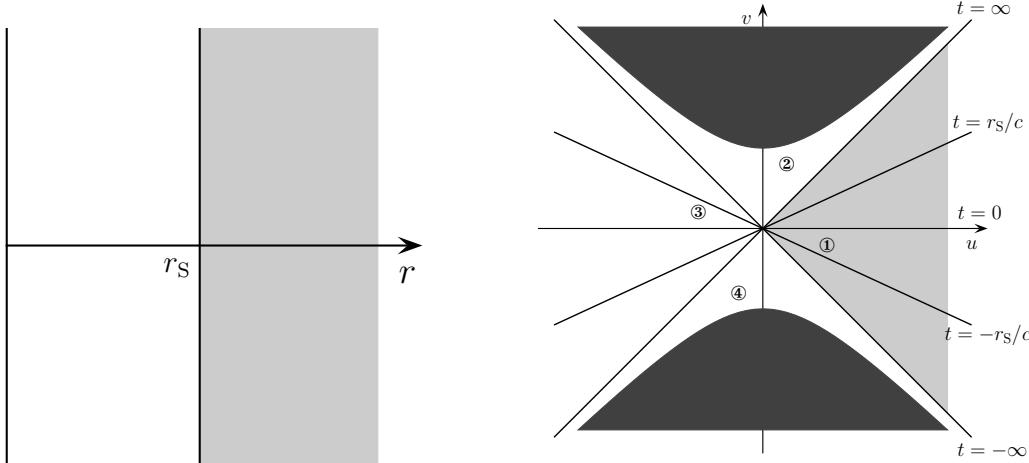
$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r} e^{\frac{r_s}{r}} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2, \quad \text{mit } r = r(u, v). \quad (6.122)$$

Dabei ist  $v/u = \tanh(ct/2r_s)$  für  $r > r_s$ . Kurven mit konstanter Zeit  $t = \text{const}$  führen also auf  $u/v = \text{const}$  und sind daher Geraden im  $(u, v)$ -Diagramm. Kurven konstanter Radialkoordinate  $r = \text{const}$  sind dagegen Hyperbeln im  $(u, v)$ -Diagramm.

Speziell gilt für  $r = r_s$  wegen (6.119)  $u^2 - v^2 = 0$ , d.h.  $u = \pm v$ , hier ergibt sich also der Spezialfall von Geraden, und für  $r = 0$  ist  $u^2 - v^2 = -1$ , bzw.  $v = \pm \sqrt{1 + u^2}$ . Für zeitartige Weltlinien gilt  $dv^2 > du^2$ , bzw.  $dv > |du|$  wegen  $ds^2 > 0$ .

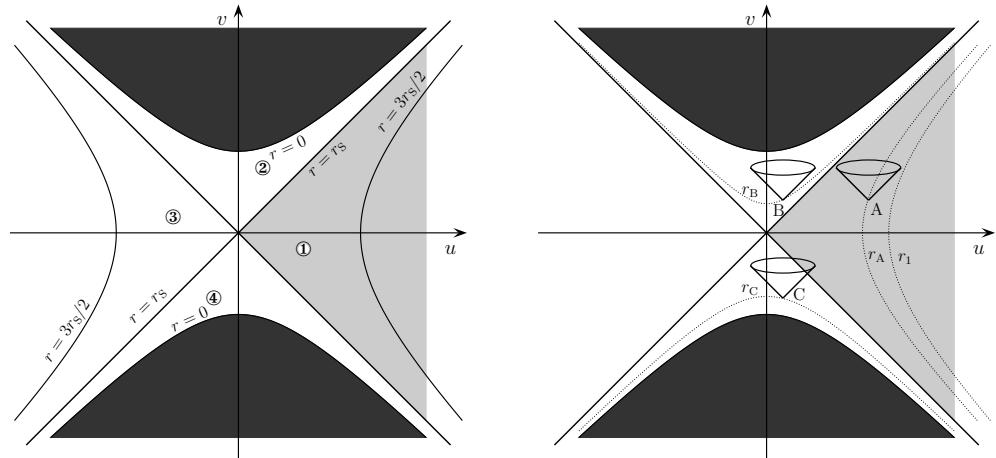
Die Kruskal-Raumzeit erweitert die Schwarzschildraumzeit. In Abbildung 6.15 werden ihre Eigenschaften genauer dargestellt. Die Kruskalraumzeit lässt sich in 4 Bereiche unterteilen. Abbildung a) zeigt den von den Schwarzschildkoordinaten abgedeckten Bereich grau markiert. Dieser Teil entspricht dem grau markierten Teil ① in den Abbildungen b) - d). Abbildung 6.15(b) zeigt Geraden konstanter Zeit  $t$ . Die Geraden mit Steigung  $\pm 1$  entsprechen  $t = \pm\infty$ . Die dunkelgrau untermalten Bereiche entsprächen  $r < 0$  und sind nicht Teil der Raumzeit. Abbildung c) zeigt die Hyperbeln konstanter Raumkoordinate  $r$ . Die Geraden  $r = r_s$  liegen im  $u - v$  Diagramm exakt auf den  $t = \pm\infty$  Geraden. Für unendliche Zeiten wird der Ereignishorizont also auf diese Geraden abgebildet, während sämtliche Punkte der Raumzeit mit  $r = r_s$  für endliche Zeiten auf den Punkt  $u = v = 0$  abgebildet werden. Abbildung d) zeigt die Lichtkegel von drei Beobachtern A, B und C. A befindet sich im Schwarzschild-Teil der Raumzeit bei  $r_A > r_s$ . Sein Zukunftslichtkegel enthält Weltlinien, die zu größeren Radialkoordinaten  $r_1$  laufen. Beobachter B dagegen befindet sich bei  $r_B < r_s$ . Alle von dort ausgehenden Weltlinien enden bei  $r = 0$  in der Singularität. Damit sind wir bei folgender wichtigen Aussage:

Jedes Teilchen, das den Schwarzschild-Radius durchquert ( $r < r_s$ ), wird *immer* in der Singularität bei  $r = 0$  enden!



(a) Von den Schwarzschildkoordinaten abgedeckter Bereich der Raumzeit.

(b) Linien konstanter Zeit  $t$ .



(c) Linien konstanter Raumkoordinate  $r$ .

(d) Zukunftslichtkegel verschiedener Beobachter

**Abbildung 6.15:** Die Schwarzschildkoordinaten decken nur den in (a) grau markierten Teil der Raumzeit ab. Dieser Bereich ist in den weiteren Abbildungen ebenfalls grau eingezeichnet. Die dunklen Bereiche entsprechen dort  $r < 0$  und liegen nicht in der Raumzeit. Kurven konstanter Zeit sind in Kruskal-Koordinaten Geraden (b), Kurven konstanter Radialkoordinate sind Hyperbeln, wobei diese für den Fall  $r = r_S$  zu Geraden entartet sind (c). Diese Geraden liegen auf den  $t = \pm\infty$ -Geraden. Der Horizont  $r = r_S$  wird für endliche Zeiten daher auf den einen Punkt  $u = v = 0$  abgebildet. Alle in (d) von Beobachter B bei  $r_B < r_S$  ausgehenden Weltlinien laufen in die Singularität. Bei A dagegen existieren auch solche Weltlinien, bei denen  $r$  größer wird. Bei C schließlich existieren nur Weltlinien mit zunehmendem  $r$ . Beobachter B befindet sich im Schwarzen Loch (Bereich ②), C im Weißen Loch (Bereich ④).

Dieser Bereich heißt deshalb SCHWARZES LOCH. Kein Objekt, dass in diesen Bereich kommt, kann ihn wieder verlassen es endet unweigerlich bei  $r = 0$ . Gleichzeitig sieht man, dass alle Objekte die in das Schwarze Loch gelangen wollen, die Zeitlinie  $t = \infty$  überqueren müssen. Dies ist konform zu der bereits gezeigten Aussage, dass ein weit entfernter Beobachter das Objekt nie hinter den Ereignishorizont laufen sieht.

Beobachter C schließlich befindet sich bei  $r_C < r_S$  in Bereich ④. Alle Weltlinien von dort laufen zu größeren Radialkoordinaten hin. In diesen Bereich kann also kein Objekt eindringen und alle dort befindlichen Objekte wandern von dort heraus. Man spricht in diesem Fall deshalb von einem WEISSEN LOCH. Die Weltlinien überqueren dabei allerdings die Zeitlinie  $t = -\infty$ . Wenn Weiße Löcher also existieren sollten, dann hätte es sie bereits vor der Entstehung des Universums geben müssen, die Anfangsbedingung für die Existenz eines Weißen Loches ist daher in einem endlich alten Universum nicht zu erfüllen. Abschließend sei erwähnt, dass Bereich ③ wiederum einer Schwarzschildraumzeit entspricht. Allerdings zeigt dort der Zeitpfeil in Richtung kleiner werdender Zeit  $t$ . Dies wird klar wenn man bedenkt, dass von Beobachter C kommende Lichtstrahlen die Gerade  $t = \infty$  überqueren um in Bereich ③ zu kommen und die Weltlinien von Objekten, die ins Schwarze Loch fallen über die Linie  $t = -\infty$  wandern.

# Literaturverzeichnis

- [1] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Taylor & Francis, zweite Auflage (2003).
- [2] W. Rindler. *Relativity - Special, General and Cosmology*. Oxford University Press, zweite Auflage (2006).
- [3] R.V. Pound und G.A. Rebka Jr. Apparent weight of photons. *Phys. Rev. Lett.* 4 (1960).
- [4] R. V. Pound und J. L. Snider. Effect of Gravity on Gamma Radiation. *Phys. Rev.* 140 (1965).
- [5] F. W. Dyson, A. S. Eddington und C. A. Davidson. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1929. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 220, 291–333 (1920).
- [6] Martin Dominik. The gravitational bending of light by stars: a continuing story of curiosity, scepticism, surprise, and fascination. *General Relativity and Gravitation* 43, 989–1006 (2011). 10.1007/s10714-010-0964-x.
- [7] F. Grave. *The Gödel Universe – Physical Aspects and Egocentric Visualizations*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart (2010).
- [8] Weitere gute Beispiele für Visualisierungen in der ART finden sich unter <http://www.vis.uni-stuttgart.de/relativity/>.
- [9] I.I. Shapiro, G. H. Pettengrill, M.E. Ash, M.L. Stone, W. B. Smith, R. P. Ingalls und R. A. Brockelman. Fourth test of general relativity: preliminary results. *Phys. Rev. Lett.* 20, 1265–1269 (1968).
- [10] B. Bertotti, L. Iess und P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. *Nature* 425 (2003).
- [11] T. Müller. *Visualisierung in der Relativitätstheorie*. Doktorarbeit, Universität Tübingen (2006).
- [12] T. Müller und S. Boblest. Visualizing circular motion around a Schwarzschild black hole. *Am. J. Phys.* 79 (2011).

## *Literaturverzeichnis*

---

- [13] T. Müller und F. Grave. Catalogue of Spacetimes. *arXiv:0904.4184v3 [gr-qc]* (2010).
- [14] M. D. Kruskal. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Phys. Rev.* 119 (1960).
- [15] D. Finkelstein. Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. *Phys. Rev.* 110 (1958).
- [16] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and company, New York (1973).