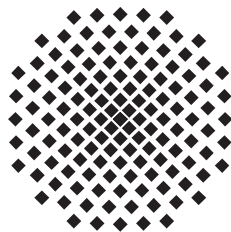


# Spezielle Relativitätstheorie

Skript zur Vorlesung von Apl. Prof. Jörg Main  
Berbeitung von Sebastian Boblest

Vorläufige Version SS 2011



1. Institut für Theoretische Physik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 57  
70550 Stuttgart

Korrekturen und Verbesserungsvorschläge bitte an:  
[sebastian.boblest@itp1.uni-stuttgart.de](mailto:sebastian.boblest@itp1.uni-stuttgart.de)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Newtonsche Mechanik . . . . .	1
1.2	Elektrodynamik . . . . .	2
1.2.1	Transformationsverhalten der Maxwellgleichungen . . . . .	2
	Möglichkeit 1 . . . . .	2
	Möglichkeit 2 . . . . .	3
	Die Lorentz-Transformation . . . . .	3
	Bemerkungen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Definitionen und Schreibweisen in der SRT</b>	<b>5</b>
2.1	Matrixdarstellung von Lorentz-Transformationen . . . . .	5
2.1.1	Spezielle Lorentz-Transformationen . . . . .	6
2.1.2	Verknüpfung von Lorentz-Transformationen . . . . .	6
2.2	Lorentz-Transformationen und klassische Mechanik . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Revolutionäre Konsequenzen der Lorentz-Transformation</b>	<b>8</b>
3.1	Lorentz-Kontraktion bewegter Maßstäbe . . . . .	8
3.1.1	Bewegte Uhren: Zeitdilatation . . . . .	9
	Beispiel: Bewegte Elementarteilchen . . . . .	9
3.1.2	Verlust der Gleichzeitigkeit . . . . .	9
3.1.3	Das Additionstheorem der Geschwindigkeit . . . . .	10
3.1.4	Raum-Zeit-Diagramme . . . . .	11
3.2	Paradoxa der SRT . . . . .	13
3.2.1	Das Stab-Rahmen-Paradoxon . . . . .	13
	Betrachtung im System $K$ . . . . .	14
	Betrachtung im System $K'$ . . . . .	14
	Fazit . . . . .	15
3.2.2	Das Uhren-Paradoxon . . . . .	15
	Erklärung . . . . .	16
3.2.3	Zwillingsparadoxon . . . . .	17
	Lösung . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Mathematischer Formalismus der SRT</b>	<b>19</b>
4.1	Der Minkowski-Raum . . . . .	20
4.1.1	Definition des Minkowski-Raumes . . . . .	20
4.1.2	Definition der Lorentz-Transformationen . . . . .	21
4.2	Kontra- und kovariante Vektoren . . . . .	23
4.2.1	Definition des kontravarianten Vierervektors . . . . .	23
4.2.2	Definition des kovarianten Vierervektors . . . . .	23

4.2.3	Transformationsverhalten der Differentiale und Koordinatenableitungen . . . . .	23
	Lorentz-Skalare . . . . .	24
4.3	Tensoralgebra . . . . .	25
4.3.1	Definition von Tensoren . . . . .	25
	1) Multilinearität . . . . .	25
	2) Indexschreibweise . . . . .	25
	3) Tensorprodukt . . . . .	26
	4) Tensorverjüngung (Kontraktion) . . . . .	26
	5) Tensor-Transformationen . . . . .	26
	6) Lorentz-Tensoren . . . . .	27
	7) Das Differential der Eigenzeit . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>29</b>
5.1	Vierer-Geschwindigkeit . . . . .	29
5.1.1	Vierer-Beschleunigung . . . . .	30
5.1.2	Vierer-Impuls . . . . .	30
5.1.3	Vierer-Kraft . . . . .	31
5.1.4	Beschreibung der kräftefreien Bewegung . . . . .	31
5.1.5	Konstant beschleunigte Rakete . . . . .	34
	1) Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen . . . . .	34
	2) Betrachtung der Eigenzeit . . . . .	36
5.1.6	Relativistische Energie . . . . .	37
	1) Photonen . . . . .	38
	2) Stöße . . . . .	39
5.2	Äquivalenz von Masse und Energie . . . . .	39
5.2.1	Konsequenzen der Äquivalenz von Masse und Energie . . . . .	40
5.2.2	Beispiele . . . . .	40
5.3	Drehimpulstensor und Drehmoment . . . . .	42
5.3.1	Klassischer Drehimpuls . . . . .	42
5.3.2	Kovarianter Drehimpuls und Drehmoment . . . . .	42
5.4	Relativistische Erhaltungssätze . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Kovariante Formulierung der Elektrodynamik</b>	<b>44</b>
6.1	Grundlagen der klassischen Elektrodynamik . . . . .	44
6.1.1	Die homogenen Maxwellgleichungen . . . . .	44
	Die inhomogenen Maxwellgleichungen . . . . .	46
	Beispiel: Spezielle Lorentz-Transformation in $x$ -Richtung . . . . .	47
6.2	Lorentz-Tensoren 2. Stufe in der Elektrodynamik . . . . .	49
6.2.1	Der Feldstärketensor . . . . .	50
	1) Der kontravariante Feldstärketensor . . . . .	51
	2) Schlussfolgerungen . . . . .	51

6.3	Kovariante Form der Erregungsgleichungen . . . . .	52
6.4	Kovariante Form der inneren Feldgleichungen . . . . .	53
6.4.1	Der duale Feldstärketensor . . . . .	53
6.4.2	Formulierung der inneren Feldgleichungen . . . . .	53
6.5	Kovariante Form der Lorentz-Kraft . . . . .	54
6.6	Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes . . . . .	55
6.6.1	Klassische Energiegrößen der Elektrodynamik . . . . .	55
6.6.2	Einführung des Energie-Impuls-Tensors . . . . .	55
6.6.3	Interpretation des Energie-Impuls-Tensors . . . . .	57
6.7	Der relativistische Doppler-Effekt . . . . .	59
6.7.1	Elektromagnetische Wellen im Vakuum . . . . .	59
6.7.2	Transformation in ein bewegtes Bezugssystem . . . . .	59
6.7.3	Der longitudinale Doppler-Effekt . . . . .	60
6.7.4	Der transversale Doppler-Effekt . . . . .	61
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>63</b>



---

# 1 Einführung

Die fundamentalsten Begriffe in der Physik sind wohl Raum und Zeit. 3 Raum- und 1 Zeitdimension sind uns vertraut.

Unsere (klassische) Vorstellung ist die folgende:

- Jeder Raumpunkt ist beschreibbar durch Koordinaten  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  in einem beliebig gewählten Koordinatensystem.
- Jeder Zeitpunkt ist beschreibbar durch die Zeit  $t$  relativ zu einem beliebig gewählten Zeitnullpunkt (z.B. Greenwichzeit).

In dieser Raumzeit werden wichtige physikalische Theorien formuliert, z.B. die Newtonsche Mechanik und die Elektrodynamik.

## 1.1 Newtonsche Mechanik

Für die Bewegung eines Partikels mit Masse  $m$  gilt

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x},t). \quad (1.1)$$

Aus dieser Differentialgleichung ergibt sich die Bahnkurve des Teilchens.

Nach dem klassischen Verständnis von Raum und Zeit gelten die Gesetze der (Newtonschen) Mechanik in jedem Inertialsystem ( $\hat{=}$  unbeschleunigtes System). Ein Wechsel des Inertialsystems in ein mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegtes System erfolgt über die Umrechnung

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot t \quad (1.2)$$

Die allgemeinst mögliche Transformation zwischen Inertialsystemen heißt GALILEI-TRANSFORMATION mit der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot t - \mathbf{x}_0 \\ t' &= t - t_0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{D}$  eine orthogonale Drehmatrix,  $\mathbf{v}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen und  $\mathbf{x}_0, t_0$  sind Verschiebungen des Raum- und Zeiteinsatzes.

Mit den jeweils drei freien Parametern von  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{v}$  und dem einen Parameter von  $t_0$  ergeben sich insgesamt 10 Parameter für eine allgemeine Galileo-Transformation. Die Menge der Galilei-Transformationen bildet daher ein 10-parametrische Gruppe.

Die klassische Mechanik ist invariant unter Galilei-Transformation.

## 1.2 Elektrodynamik

Grundgleichungen der Elektrodynamik sind die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{j}, & \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.4}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen sind ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der elektrischen und magnetischen Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  bei gegebener Verteilung der elektrischen Ladungen  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  und Ströme  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ .

Mögliche Lösungen sind statische Felder (Elektro-, Magnetostatik) oder elektromagnetische Wellen, die sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}\tag{1.5}$$

ausbreiten.

### 1.2.1 Transformationsverhalten der Maxwellgleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen sind *nicht* invariant unter Galilei-Transformationen.

Um dies klar zu machen betrachten wir die Ausbreitung einer ebenen Welle in  $x$ -Richtung. In einem bewegten System mit  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \cdot t$  breitet sich die Welle mit der Geschwindigkeit  $c' = c + v \neq c$  aus.

Diese Welle mit Geschwindigkeit  $c'$  ist *keine* Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Es sind zwei mögliche Konsequenzen dieser Feststellung denkbar.

#### Möglichkeit 1

Die Maxwell'schen Gleichungen gelten nicht in beliebigen, sondern nur in einem ausgezeichneten Inertialsystem, dem so genannten WELTÄTHER. Experimente zeigen: Es gibt keinen Weltäther. Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in jedem Inertialsystem. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich  $c$ .

Diese Möglichkeit kann daher ausgeschlossen werden!

## Möglichkeit 2

Die Maxwell'schen Gleichungen gelten in allen Inertialsystemen, aber der Wechsel zwischen Inertialsystemen erfolgt nicht über die Galilei-Transformation!

### Die Lorentz-Transformation

Vor Einstein war bereits bekannt, dass die Maxwell'schen Gleichungen invariant unter Lorentz-Transformationen sind.

Wir wollen im Folgenden eine „Herleitung“, bzw. eine Motivation der Lorentz-Transformation geben. Wir gehen aus von einem Spezialfall der Galilei-Transformation mit  $\mathbf{D} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{x}_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ , also

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.6)$$

Wir betrachten einen im Raum-Zeit-Ursprung ( $\mathbf{x} = 0, t = 0$ ) startenden Lichtstrahl. Es muss gelten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{und} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \quad (1.7)$$

also

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (1.8)$$

Dagegen führt die Galilei-Transformation führt auf

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 - 2xvt + v^2 t^2. \quad (1.9)$$

Der Term  $-2xvt + v^2 t^2$  soll jetzt durch eine Transformation der Zeit beseitigt werden. Dazu werden wir zwei Ansätze ausprobieren.

- 1. Ansatz:

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t - \alpha. \quad (1.10)$$

Einsetzen führt auf

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 - 2xvt + v^2 t^2 + 2\alpha t c^2 - c^2 \alpha^2 - c^2 t^2 \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) x^2 + y^2 + z^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 t^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dabei wurde in der letzten Zeile  $\alpha = \frac{xv}{c^2}$  gesetzt. Die Faktoren  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$  sind störend. Der Ansatz führt also nicht zum gewünschten Ergebnis.

- 2. Ansatz:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{xv}{c^2}\right). \quad (1.12)$$



Einsetzen liefert das gewünschte Ergebnis

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (1.13)$$

Wir haben in Gleichung (1.12) die spezielle Lorentz-Transformation für  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$  eingeführt.

### Bemerkungen

1. Für  $v \ll c$  geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.
2. Die Größe  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$  ist invariant unter Lorentz-Transformation.
3. Die Formeln für die spezielle Lorentz-Transformation gelten analog auch für  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ .
4. Die Maxwell'schen Gleichungen sind, wie bereits erwähnt, invariant unter der Lorentz-Transformation. In der Notation wie in Gleichung 1.4 wird diese Invarianz nicht deutlich. Die Gleichungen lassen sich aber auf eine mathematisch sehr elegante Form bringen, die kovariante Formulierung der Elektrodynamik, bei der die Lorentz-Invarianz klar zu erkennen ist.

---

## 2 Definitionen und Schreibweisen in der SRT

### 2.1 Matrixdarstellung von Lorentz-Transformationen

Im Folgenden werden wir die folgenden Abkürzungen verwenden:

$$\beta \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{v}{c}, \quad \gamma \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.1)$$

Des Weiteren werden wir von nun an Ort und Zeit zur 4-dim. Raum-Zeit zusammenfassen:

$$\left. \begin{array}{l} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{array} \right\} x^\mu \in \mathbb{R}^4. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet man  $x^\mu$  als Vierervektor und es gilt  $\mu \in \{0,1,2,3\}$ . Die spezielle Lorentz-Transformation in  $x$ -Richtung ergibt in dieser Schreibweise

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3. \quad (2.3)$$

Die Lorentz-Transformation ist also eine lineare Transformation in den Raum-Zeit-Koordinaten.

In Matrix-Schreibweise ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbf{\Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

bzw. in Kurzschreibung

$$(x'^\mu) = \mathbf{\Lambda} \cdot x^\mu. \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Spezielle Lorentz-Transformationen

Sonderfälle der Lorentz-Transformationen sind die Boosts  $\Lambda_x$ ,  $\Lambda_y$  und  $\Lambda_z$  in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung, sowie reine Drehungen  $\Lambda_R$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_x &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Lambda_y &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_z &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, & \Lambda_R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathbf{D} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.6}$$

mit einer Drehmatrix  $\mathbf{D}$ , für die gilt  $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{D} \mathbf{D}^T = \mathbf{1}$ .

### 2.1.2 Verknüpfung von Lorentz-Transformationen

Lorentz-Transformationen lassen sich miteinander verknüpfen. Seien  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$  Lorentz-Transformationen, dann ist auch

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdot \dots \cdot \Lambda_n\tag{2.7}$$

eine Lorentz-Transformation, wobei “ $\cdot$ ” die normale Matrixmultiplikation ist.

Als Beispiel betrachten wir hier die Verknüpfung einer Drehung mit einem Boost und anschließender Rückdrehung, d.h. die Form  $\mathbf{D}^{-1} \Lambda \mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_x}{v} & -\frac{v_y}{v} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{v} & \frac{v_x}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_x}{v} & \frac{v_y}{v} & 0 \\ 0 & -\frac{v_y}{v} & \frac{v_x}{v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \frac{v_x}{v} & -\beta\gamma \frac{v_y}{v} & 0 \\ -\beta\gamma \frac{v_x}{v} & 1 + (1 - \gamma) \frac{v_x^2}{v^2} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & 0 \\ -\beta\gamma \frac{v_y}{v} & (\gamma - 1) \frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + (1 - \gamma) \frac{v_y^2}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

## 2.2 Lorentz-Transformationen und klassische Mechanik

Aus den bisherigen Bemerkungen könnte man folgern, dass sich die klassische Mechanik nach der Galilei-Transformation und die Elektrodynamik nach der Lorentz-Transformation transformiert.

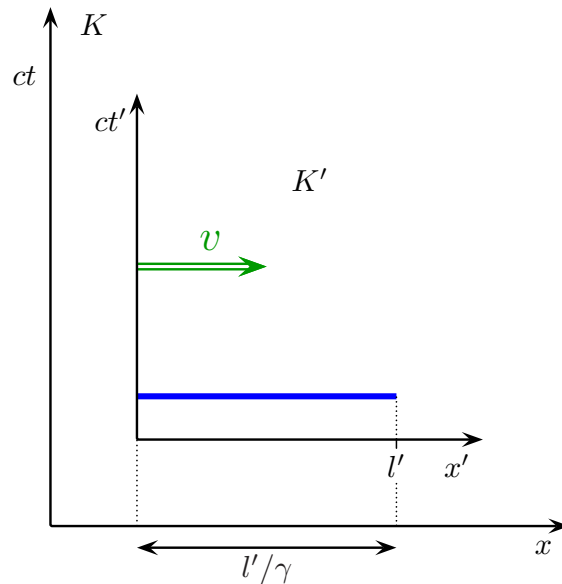
Einsteins Verdienst war es zu erkennen, dass die Lorentz-Transformationen nicht auf die Elektrodynamik beschränkt sind, sondern eine allgemeine Eigenschaft von Raum und Zeit darstellen.

Die (mit der Galilei-Transformation verbundenen) uns vertrauten Eigenschaften von Raum und Zeit (z.B. Existenz einer absoluten Zeit) gelten in der Relativitätstheorie nicht mehr.

## 3 Revolutionäre Konsequenzen der Lorentz-Transformation

### 3.1 Lorentz-Kontraktion bewegter Maßstäbe

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme  $K$  und  $K'$ , die sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$  bewegen und eine Strecke parallel zur  $x$ -Achse zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$ , die in  $K'$  ruhen, siehe Abbildung 3.1. Für die  $x$ -Koordinaten der Punkte ergibt sich



**Abbildung 3.1:** Zur Lorentz-Kontraktion: Der Stab mit Länge  $l'$  im System  $K'$  erscheint im unbewegten System  $K$  mit der verkürzten Länge  $l$ .

$$\begin{aligned} x'_A = 0 &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_A - vt) & \text{also} & \quad x_A(t) = vt, \\ x'_B = l' &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_B - vt) & \text{also} & \quad x_B(t) = \frac{1}{\gamma}l' + vt. \end{aligned} \quad (3.1)$$

In  $K$  ergibt sich der Abstand zwischen beiden Punkten zu

$$l = x_B(t) - x_A(t) = \frac{1}{\gamma}l' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l' < l' \quad (3.2)$$

für  $v \neq 0$ .

Diese Erscheinung heißt LÄNGENKONTRAKTION: Bewegte Objekte erscheinen in Bewegungsrichtung um den Faktor  $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  verkürzt.

### 3.1.1 Bewegte Uhren: Zeitdilatation

Wir positionieren zwei baugleiche Uhren in den Koordinatenursprüngen von  $K$  und  $K'$ . Die in  $K'$  ruhende Uhr zeigt die Zeit  $t'$  am Ort  $x' = 0$ . Im System  $K$  bewegt sich diese Uhr mit Geschwindigkeit  $v$ . Wir rechnen die Koordinaten wieder ins System  $K$  um:

$$\begin{aligned} x' = 0 &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x - vt) \quad \text{also} \quad x(t) = vt \quad \text{und damit} \\ t' &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(t - \frac{v^2}{c^2}t\right) = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}t < t \end{aligned} \quad (3.3)$$

für  $v \neq 0$ .

Diese Erscheinung heißt ZEITDILATATION: Bewegte Uhren gehen langsamer.

#### Beispiel: Bewegte Elementarteilchen

Viele Elementarteilchen haben (in ihrem Ruhesystem) eine kurze mittlere Lebensdauer, etwa Myonen  $\mu^-$  mit  $\tau \approx 2 \cdot 10^{-6}$  s.

Ohne Zeitdilatation ergäbe sich daraus eine mittlere Reichweite von maximal  $c \cdot \tau \approx 600$  m. Mit Zeitdilatation dagegen erhält man eine mittlere Reichweite von maximal  $c \cdot \gamma\tau \approx 6000$  m bei  $v = 0,995c$ .

Im Teilchenbeschleuniger haben kurzlebige Teilchen daher eine lange Lebensdauer. Dieser Effekt spielt beim ZWILLINGSPARADOXON eine wichtige Rolle.

### 3.1.2 Verlust der Gleichzeitigkeit

Wir betrachten zwei Systeme  $K$  und  $K'$ . In  $K'$  mögen zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Ein "Ereignis" ist dabei gegeben durch Ort und Zeit, d.h. alle vier Komponenten eines Vierervektors  $x^\mu$ :

$$P_1 : (x'_1, t'), \quad P_2 : (x'_2, t'), \quad \text{mit} \quad x'_1 \neq x'_2. \quad (3.4)$$

Uns interessieren die Zeitkoordinaten in  $K$ . Aus der Lorentz-Transformation ergibt sich

$$t'_{(1,2)} \stackrel{\text{LT}}{=} \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right). \quad (3.5)$$

Mit

$$\begin{aligned} x'_1 &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_1 - vt_1) \quad \text{und daher} \quad x_1 = \frac{1}{\gamma}x'_1 + vt_1 \quad \text{und genauso} \\ x'_2 &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_2 - vt_2), \quad \text{d.h.} \quad x_2 = \frac{1}{\gamma}x'_2 + vt_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

folgt

$$t' = \gamma t_1 - \frac{v}{c^2}x'_1 - \gamma \frac{v^2}{c^2}t_1 = \frac{1}{\gamma}t_1 - \frac{v}{c^2}x'_1 = \frac{1}{\gamma}t_1 - \frac{v}{c^2}x'_2. \quad (3.7)$$

Durch inverse Lorentz-Transformation folgt schließlich:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2}x'_1 \right) \\ t_2 &= \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2}x'_2 \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{also} \quad t_2 - t_1 = \gamma \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1) \neq 0. \quad (3.8)$$

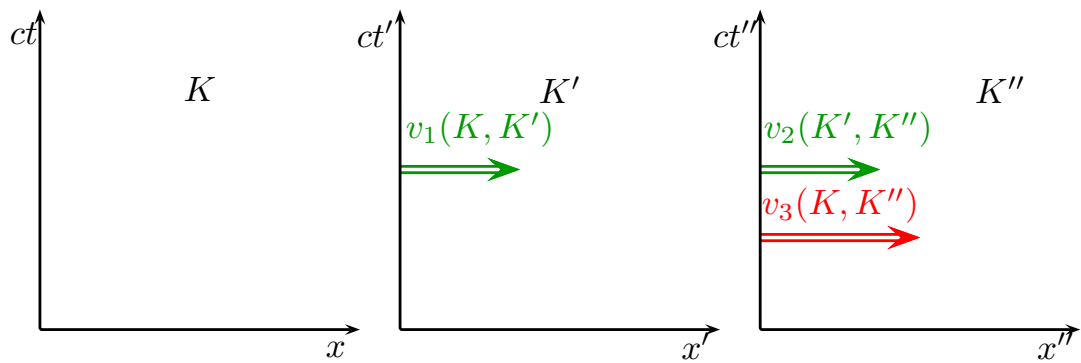
Dabei ist die inverse Lorentz-Transformation in  $x$ -Richtung gegeben durch

$$x = (x' + vt'), \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2}x \right), \quad y = y', \quad z = z', \quad (3.9)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

#### 3.1.3 Das Additionstheorem der Geschwindigkeit



**Abbildung 3.2:** Zum Geschwindigkeits-Additionstheorem: Gesucht ist die Geschwindigkeit  $v_3$  des Systems  $K''$  relativ zum System  $K$  in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten  $v_1$  von  $K'$  relativ zu  $K$  und  $v_2$  von  $K''$  relativ zu  $K'$ .

Gegeben seien drei Koordinatensysteme  $K$ ,  $K'$  und  $K''$ , die sich relativ zueinander mit

Geschwindigkeiten parallel zur  $x$ -Achse bewegen, siehe Abbildung 3.2. Zu klären ist jetzt, wie sich das System  $K''$  relativ zum System  $K$  bewegt. Laut Galilei-Transformation ergäbe sich einfach  $v_3 = v_1 + v_2$ . In der SRT dagegen gilt  $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$ . Diese Bedingung ergibt für die relevanten Koordinaten

$$\begin{aligned}\Lambda_3 &= \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 \\ -\beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1 \gamma_1 \\ -\beta_1 \gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) & -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) \\ -\gamma_1 \gamma_2 (\beta_1 + \beta_2) & \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \gamma_3 & -\beta_3 \gamma_3 \\ -\beta_3 \gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Daraus lässt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \gamma_1 \gamma_2 (1 + \beta_1 \beta_2) = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2} \sqrt{1 - \beta_2^2}} \\ &= \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + 2\beta_1 \beta_2 - 2\beta_1 \beta_2}} = \frac{1 + \beta_1 \beta_2}{\sqrt{(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}\right)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_3^2}}\end{aligned}\quad (3.12)$$

ableiten.

Damit folgt das Additionstheorem der Geschwindigkeit:

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\sqrt{1 + \beta_1 \beta_2}}, \quad v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (3.13)$$

Für  $v_1 < c$ ,  $v_2 = c$  ergibt sich z.B.:

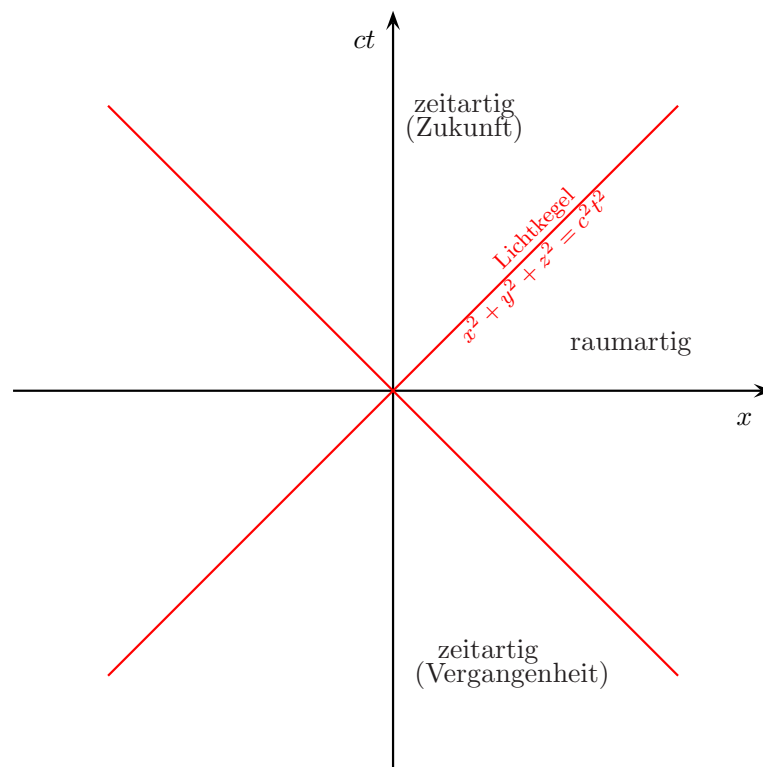
$$v_3 = \frac{v_1 + c}{1 + \frac{v_1 c}{c^2}} = \frac{v_1 + c}{\frac{v_1 + c}{c}} = c. \quad (3.14)$$

Es gilt also  $v_3 \leq c$ , wie erwartet.

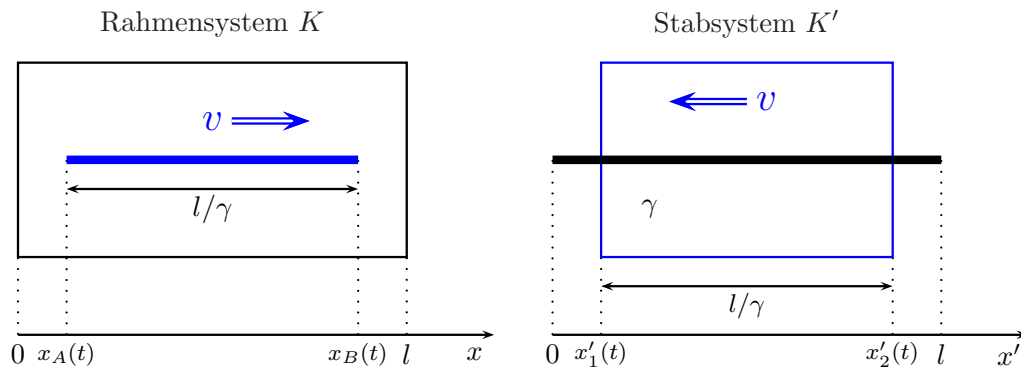
### 3.1.4 Raum-Zeit-Diagramme

Abbildung 3.3 zeigt ein Raum-Zeit-Diagramm, wie es in der SRT zur Veranschaulichung gut geeignet ist. Alle Punkte für die gilt  $s^2 > 0$  heißen ZEITARTIG, für  $s^2 < 0$  RAUMARTIG und für  $s^2 = 0$  LICHTARTIG. Raumartige Punkte können nicht kausal verbunden sein, da keine Signalausbreitung mit  $v > c$  möglich ist.





**Abbildung 3.3:** Raum-Zeit-Diagramm mit den raumartigen ( $s^2 > 0$ ) und zeitartigen Bereichen ( $s^2 < 0$ ). Der Lichtkegel mit  $s^2 = 0$  trennt diese Bereiche voneinander.



**Abbildung 3.4:** Stab-Rahmen-Paradoxon: Im Ruhesystem  $K$  des Rahmens gelte  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$  und im Ruhesystem  $K'$  des Stabes entsprechend  $x'_A = 0$  und  $x'_B = l$ . Je nach Bezugssystem erscheint entweder der Rahmen oder der Stab um den Faktor  $1/\gamma$  verkürzt.

## 3.2 Paradoxa der SRT

Die Konsequenzen der SRT (Längenkontraktion, Zeitdilatation) widersprechen unseren gewohnten Vorstellungen. Kritiker haben versucht, widersprüchliche Aussagen aus der Theorie zu gewinnen und sie so „ad absurdum“ zu führen.

### 3.2.1 Das Stab-Rahmen-Paradoxon

Wir betrachten einen bewegten Stab der Länge  $l$  und einen ruhenden Rahmen mit derselben Länge  $l$ , siehe Abbildung 3.4. Wegen der Längenkontraktion passt der Stab bequem in den Rahmen.

Kritiker wenden hier ein:

*„Im Bezugssystem des Stabes erfährt der Rahmen eine Längenkontraktion. Der Stab passt nicht in den Rahmen.“*

Damit ergibt sich ein scheinbarer Widerspruch zur Beobachtung im Bezugssystem des Rahmens!

### Erklärung des Paradoxons

Die Sprechweise: “passt in den Rahmen“ bedeutet Anfangs- und Endpunkt befinden sich *gleichzeitig* innerhalb des Rahmens. Im Folgenden bewege sich der Stab mit Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung,  $K$  sei das Ruhesystem des Rahmens. Wir wählen den Zeitnullpunkt in  $K$  so, dass der Anfangspunkt  $x_A$  des Stabes zur Zeit  $t = 0$  den Anfangspunkt des Rahmens erreicht:  $x_A(t = 0) = 0$ .

### Betrachtung im System $K$

Für den Rahmen gilt

$$x_1(t) = 0, \quad x_2(t) = l \quad (3.15)$$

und für den Stab

$$\begin{aligned} x'_A &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_A - vt) = 0 \quad \text{also} \quad x_A(t) = vt, \\ x'_B &\stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_B - vt) = l \quad \text{also} \quad x_B(t) = \frac{1}{\gamma}l + vt. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bei  $t_1 = 0$  erreicht der Anfangspunkt des Stabes den Anfangspunkt des Rahmens. Wir berechnen den Zeitpunkt  $t_2$ , zu dem die beiden Endpunkte zusammenfallen:

$$x_B(t) = \frac{1}{\gamma}l + vt = x_2 = l \quad \text{also folgt} \quad t_2 = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) l. \quad (3.17)$$

**Fazit:** Im Zeitintervall  $t_1 = 0 < t < t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{l}{v}$  befindet sich der Stab vollständig innerhalb des Rahmens.

### Betrachtung im System $K'$

Für den Stab gilt

$$x'_A(t') = 0, \quad x'_B(t') = l \quad (3.18)$$

und für den Rahmen

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{\text{inv. LT}}{=} \gamma(x'_1 + vt') = 0 \quad \text{also} \quad x'_1(t') = -vt' \\ x_2 &\stackrel{\text{inv. LT}}{=} \gamma(x'_2 + vt') = l \quad \text{also} \quad x'_2(t') = \frac{1}{\gamma}l - vt' \end{aligned} \quad (3.19)$$

Bei  $t'_1 = 0$  erreicht der Anfangspunkt des Rahmens  $x'_1$  den Anfangspunkt des Stabes  $x'_A$ . Der Endpunkt des Rahmens befindet sich zu diesem Zeitpunkt wegen der Längenkontraktion des Rahmens bei  $x'_2(t'_1 = 0) = \frac{1}{\gamma}l < l$ .

Die Endpunkte des Rahmens  $x'_2$  und des Stabes  $x'_B$  treffen aufeinander, wenn gilt

$$x'_2(t'_2) = \frac{1}{\gamma}l - vt'_2 = x'_B = l. \quad (3.20)$$

Daraus folgt

$$t'_2 = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{l}{v} < 0. \quad (3.21)$$

Das Kleinerzeichen gilt wegen  $\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) < 0$ .

### Fazit

Es gilt  $t'_2 < t'_1$ , also befindet sich der Stab zu keinem Zeitpunkt vollständig innerhalb des Rahmens. Das ist aber kein Widerspruch zur Beobachtung in  $K$ . In  $K$  erreicht der Endpunkt  $x_B$  des Stabes den Punkt  $x_2$  des Rahmens bei  $t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{l}{v} > 0$ ,  $x_2 = l$ . Wir führen wieder eine Lorentz-Transformation ins System  $K'$  durch:

$$x'_2(t) \stackrel{\text{LT}}{=} \gamma(x_2 - vt_2) = \gamma l - (\gamma - 1)l = l. \quad (3.22)$$

(Position der Stabspitze in  $K'$ , Endpunkt des Stabes)

$$t'_2 \stackrel{\text{LT}}{=} \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) = (\gamma - 1)\frac{l}{v} - \gamma\frac{v}{c^2}l = \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{l}{v} < 0 \quad (3.23)$$

Die Lösung des Paradoxons liegt in der Transformation der Zeit und einer dabei möglichen Umkehr der zeitlichen Abfolge (raumartiger) Ereignisse.

- System  $K$ :  
 Ereignis 1:  $x_A = x_1 = 0$  bei  $t_1 = 0$   
 Ereignis 2:  $x_B = x_2 = l$  bei  $t_2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{l}{v} > t_1$
- System  $K'$ : die beiden Ereignisse vertauschen die zeitliche Abfolge  
 Ereignis 2:  $x'_2 = x'_B = l$  bei  $t_2 = \left(\frac{1}{\gamma}\right) \frac{l}{v} < 0$   
 Ereignis 1:  $x'_1 = x'_A = 0$  bei  $t'_1 = 0 > t_2$

Für den “Abstand“ zwischen den Ereignissen 1 und 2 erhalten wir

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)^2 \frac{l^2}{v^2} - l^2 = -\frac{2}{\gamma + 1} l^2 < 0. \quad (3.24)$$

Der Abstand ist also *raumartig*, d.h. es besteht kein kausaler Zusammenhang zwischen den beiden Ereignissen.

### 3.2.2 Das Uhren-Paradoxon

Wir betrachten zwei (baugleiche) Uhren. Uhr 1 ruht, Uhr 2 bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$ . Uhr 2 läuft dann also langsamer als Uhr 1 (Zeitdilatation) (siehe Abbildung 3.5).



**Abbildung 3.5:** Uhrenparadoxon: Im Ruhesystem von Uhr 1 läuft die mit Geschwindigkeit  $v$  bewegte Uhr 2 langsamer als Uhr 1.

Kritiker bemerkten nun:

„Im Ruhesystem von Uhr 2 bewegt sich Uhr 1 und erfährt eine Zeitdilatation, es läuft also Uhr 1 langsamer als Uhr 2, dies ist ein Widerspruch.“

### Erklärung

Im Ruhesystem  $K$  von Uhr 1 ruht diese bei  $x_1(t) = l$ , Uhr 2 bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  auf Uhr 1 zu, also gilt  $x_2(t) = vt$ . Für Uhr 1 gilt in  $K$  genauer

$$E_1 : (x = l, t = 0), \quad E_2 : \left(x = l, t = \frac{l}{v}\right), \quad \Delta t_1 = \frac{l}{v}. \quad (3.25)$$

mit der Anzeige  $\Delta t_1$  der Uhr 1 bei Kollision.

Für Uhr 2 gilt in  $K$

$$E_1 : (x = 0, t = 0), \quad E_2 : \left(x = l, t = \frac{l}{v}\right), \quad \Delta t_2 = \frac{l}{v}. \quad (3.26)$$

Jetzt führen wir die Lorentz-Transformation  $x' = \gamma(x - vt)$  und  $t' = \gamma\left(t - \frac{xv}{c^2}\right)$  von  $K$  nach  $K'$  durch.

Für Uhr 1 in  $K'$  erhalten wir

$$\begin{aligned} E_1 : \left(x' = \gamma l, t' = -\gamma \frac{vl}{c^2}\right), \quad E_2 : \left(x' = 0, t' = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{v}\right), \\ \Delta t'_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{v} + \gamma \frac{vl}{c^2} = \frac{l}{v} \gamma \left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) = \frac{l}{v} \gamma. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für Uhr 2 gilt in  $K'$

$$E_1 : (x' = 0, t' = 0), \quad E_2 : \left( x' = 0, t' = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{v} \right), \quad \Delta t'_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{v}, \quad (3.28)$$

mit der Anzeige  $\Delta t'_2$  der Uhr 2 bei Kollision.

Wir berechnen die Zeitdilatation von Uhr 2 im System  $K$ . Diese ist definiert über

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t'_2}{\Delta t_2} &= \frac{\text{Eigenzeit der in } K' \text{ ruhenden Uhr 2}}{\text{Zeitdifferenz der Ereignisse für Uhr 2 in System } K} \\ &= \frac{1}{\gamma} = \frac{\Delta t'_2}{\Delta t_1} = \frac{1}{\gamma} \\ &= \frac{\text{Anzeige Uhr 2 bei Kollision}}{\text{Anzeige Uhr 1 bei Kollision}} < 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die bewegte Uhr 2 geht also langsamer.

Analog betrachten wir die Zeitdilatation von Uhr 1 im System  $K'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t_1}{\Delta t'_1} &= \frac{\text{Eigenzeit der in } K \text{ ruhenden Uhr 1}}{\text{Zeitdifferenz der Ereignisse für Uhr 1 in System } K'} \\ &= \frac{1}{\gamma} < 1 \neq \frac{\text{Anzeige Uhr 1}}{\text{Anzeige Uhr 2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die bewegte Uhr 1 geht also langsamer.

Die in  $K'$  vergangene Zeit zwischen den Ereignissen  $E_1$  und  $E_2$  ist *nicht* die von Uhr 2 angezeigte Zeit.

Welche Uhr schneller oder langsamer geht, hängt also von der Wahl des Bezugssystems ab!

### 3.2.3 Zwillingsparadoxon

Ein Zwilling bleibt auf der Erde, der andere reist mit hoher Geschwindigkeit und kehrt zur Erde zurück. Auf der Erde ist mehr Zeit vergangen als im Raumschiff.

Das Paradoxon bei dieser Situation ergibt sich, wenn man sie aus der Sicht des anderen Zwillings betrachtet:

*Vom Raumschiff aus betrachtet bewegt sich der Zwilling auf der Erde mit hoher Geschwindigkeit. Kommt es also Zeitdilatation auf der Erde?*

#### **Lösung**

Start und Ende der Reise ist die Erde, diese ist das gewählte Bezugssystem, wobei im Raumschiff die Zeitdilatation auftritt. Der reisende Zwilling ist nicht während der gesamten Reise im gleichen Inertialsystem, da er um zurückzukehren beschleunigen muss. Wir betrachten das Zwillingsparadoxon nochmals im Kapitel zur relativistischen Mechanik.

---

## 4 Mathematischer Formalismus der SRT

Wir hatten bereits Vierervektoren  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$  und die Lorentz-Transformation  $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  kennengelernt. Die Lorentz-Transformation entspricht hier einer Matrix-Vektor-Multiplikation, wobei wir die EINSTEINSCHES SUMMENKONVENTION benutzen, das heißt über mehrfach vorkommende Indizes wird summiert:

$$x'^\mu \equiv \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \quad (4.1)$$

Als Beispiel sei nochmals der Lorentz-Boost in  $x$ -Richtung gezeigt, d.h. die Transformation in ein mit  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$  bewegtes System:

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Unter Lorentz-Transformationen ist die Größe

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (4.3)$$

invariant, d.h. es gilt  $s^2 = s'^2$ , bzw.

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (4.4)$$

Bei nur positiven Vorzeichen in Gleichung (4.4) würde

$$||x'||^2 = ||x||^2 \quad (4.5)$$

gelten, d.h.  $\Lambda$  würde als Drehmatrix die Norm des Vektors erhalten, wie in der Euklidischen Geometrie.

In diesem Kapitel werden wir die Mathematik zur Formulierung der SRT genauer diskutieren. Insbesondere die Struktur des Minkowski-Raumes und die mathematische Behandlung von Tensoren sind hier wichtig, insbesondere auch um später die kovariante Formulierung der Elektrodynamik besprechen zu können. Darüberhinaus ist dieser Formalismus notwendig, um leichter die Verallgemeinerung hin zur Allgemeinen Relativitätstheorie vornehmen zu können.



	Euklidischer Raum	Minkowski-Raum
Skalarprodukt	$(a,b) = \sum_i a_i b_i$	$a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$
Matrix-Vektor-Multiplikation	$y = \mathbf{D} \cdot x$ $y_i = \sum_j A_{ij} x_j$	$y^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$
Matrizenmultiplikation	$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$	$C^\mu_\nu = A^\mu_\lambda B^\lambda_\nu$
Transponierte Matrix	$\mathbf{A}^T = (A^T)_{ij}$ $= A_{ji}$	$(A^\mu_\nu) = A_\nu^\mu$ $= \eta_{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} A^\alpha_\beta$

**Tabelle 4.1:** Vergleich von Schreibweisen im Euklidischen und im Minkowski-Raum.

## 4.1 Der Minkowski-Raum

### 4.1.1 Definition des Minkowski-Raumes

Der Minkowski-Raum ist ein vierdimensionaler, reeller Vektorraum mit folgendem Skalarprodukt: Seien  $a^\mu$  und  $b^\mu$  Vierervektoren. Das Skalarprodukt  $(a,b)$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= a_\mu b^\mu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3 \\
&= a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \\
&= \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

mit  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , dem KONTRAVARIANTEN VEKTOR  $b^\mu = (b^0, b^1, b^2, b^3)$  mit hochgestelltem Index und dem KOVARIANTEN VEKTOR  $a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = \eta_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3)$  mit tiefgestelltem Index.

Im Euklidischen Raum gilt

$$(x,x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{und} \quad (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{4.7}$$

Das Skalarprodukt ist hier also positiv definit. Im Gegensatz dazu folgt aus der Definition des Skalarproduktes im Minkowski-Raum:

Das Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist **nicht** positiv definit!

Die verschiedenen Schreibweisen im Euklidischen Raum und im Minkowski-Raum mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention sind in Tabelle 4.1 verglichen.

Die Matrix  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$  ermöglicht im Minkowski-Raum das Herauf- und Herunterziehen von Indizes.

### 4.1.2 Definition der Lorentz-Transformationen

Die Lorentz-Transformationen sind die Drehungen (orthogonalen Transformationen) im Minkowski-Raum:

$$\Lambda_\lambda^\mu \Lambda_\nu^\lambda = \delta_\nu^\mu, \quad (4.8)$$

mit

$$\Lambda_\lambda^\mu = (\Lambda^\mu_\lambda)^T, \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_\lambda^\mu = \eta_{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} \Lambda^\alpha_\beta. \quad (4.9)$$

#### Beispiele

- Als erstes betrachten wir wieder den Lorentz-Boost in  $x$ -Richtung:

$$\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Hochziehen des zweiten Index geschieht über

$$\Lambda^{\alpha\mu} = \eta^{\beta\mu} \Lambda^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\beta \eta^{\beta\mu}. \quad (4.11)$$

In Matrixdarstellung ausgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} \Lambda^{\alpha\mu} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Herunterziehen des ersten Index erfolgt weiter durch

$$\Lambda_\lambda^\mu = \eta_{\lambda\alpha} \Lambda^{\alpha\mu}. \quad (4.13)$$

Diese Gleichung können wir wiederum auch in Matrixschreibweise darstellen:

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda^\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned}\Lambda_\lambda^\mu \Lambda^\lambda_\nu &= \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_\nu^\mu,\end{aligned}\tag{4.15}$$

wie gefordert.

Bei diesen Beispielen wird auch erkennbar, dass in Einsteinscher Summenkonvention dargestellte mathematische Operationen nicht immer oder nicht direkt als Matrixgleichung dargestellt werden können. So muss in Gleichung (4.11) die Reihenfolge vertauscht werden um eine gültige Matrixmultiplikation zu finden.

- Sei eine Lorentz-Transformation durch eine reine Drehung gegeben, also

$$\Lambda^\mu_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{1}.\tag{4.16}$$

Dann ergibt sich ebenfalls

$$\Lambda_\lambda^\mu \Lambda^\lambda_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \delta_\nu^\mu.\tag{4.17}$$

## 4.2 Kontra- und kovariante Vektoren

Sei  $a^\mu \in V$  ein kontravarianter Vektor. Dann ist  $a_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\nu \in V^*$  ein kovarianter Vektor und ein Element des Dualraumes  $V^*$  der 1-Formen, d.h.

$$\begin{aligned} \varphi_a : V &\mapsto \mathbb{R} \quad \text{ist lineare Abbildung mit} \\ a_\mu : b^\mu &\rightarrow (a, b) = a_\mu b^\mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

### 4.2.1 Definition des kontravarianten Vierervektors

Jede vierkomponentige Größe  $a^\mu$ , die sich unter Lorentz-Transformation mit der Lorentz-Matrix transformiert gemäß

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \alpha^\nu, \tag{4.19}$$

nennt man einen KONTRAVARIANTEN TENSOR 1. STUFE.

### 4.2.2 Definition des kovarianten Vierervektors

Sei  $a^\mu$  kontravarianter Vektor mit  $a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \alpha^\nu$ , dann gilt

$$a'_\mu = \eta_{\mu\alpha} a'^\alpha = \eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\nu \underbrace{a^\nu}_{\eta^{\nu\beta} \alpha_\beta} = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \Lambda^\alpha_\nu a_\beta = \Lambda_\mu^\beta a_\beta, \tag{4.20}$$

mit der inversen Lorentz-Transformation  $\Lambda_\mu^\beta$ . Jede vierkomponentige Größe, die sich mit der inversen Lorentz-Matrix transformiert gemäß

$$a'_\mu = \Lambda_\mu^\nu a_\nu \tag{4.21}$$

heißt KOVARIANTER TENSOR 1. STUFE.

### 4.2.3 Transformationsverhalten der Differentiale und Koordinatenableitungen

Sei  $x^\mu$  kontravarianter Vektor. Es gilt dann

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{also auch} \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \tag{4.22}$$

Die Differentiale  $dx^\mu$  transformieren sich wie kontravariante Vektoren.

Sei  $f = f(x^\mu)$  skalare Funktion, dann gilt für  $df$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{4.23}$$

Mit

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \text{also} \quad x^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} x'^{\mu} \quad (4.24)$$

folgt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} = \left[ (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right] f dx'^{\mu} \quad (4.25)$$

mit der inversen Lorentz-Transformation  $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu}$ . Ein Vergleich liefert folgendes wichtige Resultat:

Die Koordinatenableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu} \quad (4.26)$$

transformieren sich wie kovariante Vektoren.

## Lorentz-Skalare

Ein Lorentz-Skalar ist eine reelle Größe, die *invariant* bleibt unter Lorentz-Transformation. Wir betrachten zwei Beispiele:

- Das Skalarprodukt zwischen Lorentz-Vektoren:

$$S = a_{\mu} b^{\mu}, \quad S' = a'_{\mu} b'^{\mu} = a_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\mu}_{\beta} b^{\beta} = a_{\alpha} b^{\beta} \delta^{\alpha}_{\beta} = a_{\mu} b^{\mu} = S. \quad (4.27)$$

- Die Eigenzeit  $\tau$ : Das differentielle Linienelement  $ds^2 = dx_{\mu} dx^{\mu} = c^2 dt'^2 - (d\mathbf{x})^2$  ist invariant unter Lorentz-Transformation.

Dann ist auch

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \frac{1}{c} \sqrt{dx_{\mu} dx^{\mu}} \quad (4.28)$$

invariant unter Lorentz-Transformation und damit schließlich die Eigenzeit

$$\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \quad (4.29)$$

ein Lorentz-Skalar.

## 4.3 Tensoralgebra

### 4.3.1 Definition von Tensoren

Ein Tensor vom Typ  $(r,s)$  ist eine multilineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 T : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ mal}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{s \text{ mal}} &\mapsto \mathbb{R} \\
 (\underbrace{\varphi, \chi, \dots, \omega}_{r \text{ mal}}; \underbrace{u, v, \dots, w}_{s \text{ mal}}) &\rightarrow T(\varphi, \chi, \dots, \omega; u, v, \dots, w) \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dabei bezeichnen griechische Buchstaben Elemente von  $V^*$  und lateinische Buchstaben Elemente von  $V$ .  $T$  heißt  $r$ -fach kontra und  $s$ -fach kovarianter Tensor.

#### 1) Multilinearität

Unter Multilinearität versteht man die Eigenschaft, linear in jedem Argument (bei Festhalten der übrigen) zu sein. Es lässt sich zerlegen:

$$\chi = a\chi_1 + b\chi_2 + \dots \tag{4.31}$$

Die Menge aller Tensoren des Typs  $(r,s)$  bildet einen Vektorraum  $V_s^r$ .

#### 2) Indexschreibweise

In Indexschreibweise kann diese Abbildung in der Form

$$T^{\overbrace{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{r \text{ mal}}} \underbrace{\varphi_{\alpha_1} \chi_{\alpha_2} \dots \omega_{\alpha_r}}_{\overbrace{\beta_1 \dots \beta_s}^{s \text{ mal}}} u^{\beta_1} v^{\beta_2} \dots w^{\beta_s} \in \mathbb{R} \tag{4.32}$$

dargestellt werden.

### 3) Tensorprodukt

Seien  $T \in V_s^r$  und  $S \in V_{s'}^{r'}$ , dann gilt

$$T \otimes S \in V_s^r \times V_{s'}^{r'} = V_{s+s'}^{r+r'},$$

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} S^{\alpha'_1 \dots \alpha'_{r'}}_{\beta'_1 \dots \beta'_{s'}} = U^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}{}^{\alpha'_1 \dots \alpha'_{r'}}_{\beta'_1 \dots \beta'_{s'}}. \quad (4.33)$$

Die Operation “ $\otimes$ ” heißt Tensorprodukt oder direktes Produkt.

### 4) Tensorverjüngung (Kontraktion)

Sei  $\mathbf{T} \in V_s^r$  ein Tensor vom Typ  $(r, s)$ . Indem in Komponentenschreibweise der  $k$ -te kovarianter und der  $j$ -te kontravarianter Index das gleiche Symbol bekommen und über diese zwei Indizes aufsummiert wird, erhält man einen Tensor aus  $V_{s-1}^{r-1}$ :

$$T^{\alpha_1 \dots \beta_j \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_s} \in V_s^r = \text{Sp}_j^k T \in V_{s-1}^{r-1}. \quad (4.34)$$

Diese Operation heißt Tensorverjüngung oder Kontraktion.

#### Beispiele

Seien  $a^\mu$  und  $b^\mu \in V_0^1$  kontravariante Vierervektoren. Dann ist

- $\eta_{\mu\nu} a^\nu = a_\mu \in V_1^0$  ein kovarianter Vektor
- $a^\mu b^\nu \in V_0^2$  ein direktes Produkt und kontravarianter Tensor 2. Stufe
- $c^\mu{}_\nu = a^\mu b_\nu \in V_1^1$  ein direktes Produkt und einfach kontra-, einfach kovarianter Tensor
- $c^\mu{}_\mu = a^\mu b_\mu \in V_0^0 = \mathbb{R}$  eine Kontraktion und Tensor 0. Stufe, d.h. ein Skalar

### 5) Tensor-Transformationen

Sei die Transformation der kovarianten, bzw. kontravarianten Basisvektoren gegeben durch

$$e_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} e_\alpha \quad \text{und} \quad \omega^{\beta'} = A_\beta^{\beta'} \omega^\beta. \quad (4.35)$$

Weiter gilt

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_r} \omega^{\beta_1} \dots \omega^{\beta_s} = T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} e_{\alpha'_1} \dots e_{\alpha'_r} \omega^{\beta'_1} \dots \omega^{\beta'_s}. \quad (4.36)$$

Dies führt dann auf

$$T^{\alpha'_1 \dots \alpha'_r}_{\beta'_1 \dots \beta'_s} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s} A^{\alpha'_1}_{\alpha_1} \dots A^{\alpha'_r}_{\alpha_r} A^{\beta_1}_{\beta'_1} \dots A^{\beta_s}_{\beta'_s}. \quad (4.37)$$

Das heißt also  $A$ , bzw.  $A^{-1}$  kommt für jeden ko-, bzw. kontravarianten Index einmal vor.

## 6) Lorentz-Tensoren

Folgende Tensoren spielen in der SRT wichtige Rollen

- Vektoren aus  $\mathbb{R}^4$  (Vierervektoren)
- $A^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$  ist Lorentz-Transformation

- Metrischer Tensor ist  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  mit  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ . Damit ergibt sich das infinitesimale Wegelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu. \quad (4.38)$$

- Der Differentialoperator:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.39)$$

heißt VIERERGRADIENT.

- Anwendung auf Lorentz-Skalar  $\varphi$ :

$$\partial_\mu \varphi \equiv \varphi_\mu \quad (4.40)$$

ist kovarianter Vektor.

- Anwendung auf Vierervektor  $a^\mu$ :

$$\partial_\mu a^\mu \quad (4.41)$$

ist ein Lorentz-Skalar und heißt VIERERDIVERGENZ. Weiter ist

$$\partial_\nu a_\mu - \partial_\mu a_\nu \quad (4.42)$$

ein antisymmetrischer, kovarianter Tensor 2. Stufe und heißt VIERERROTATION.



## 7) Das Differential der Eigenzeit

Im Ruhesystem eines in einem Inertialsystem *ungleichförmig* bewegten Teilchens gilt:

$$dx = dy = dz = 0 \Rightarrow (ds)^2 = c^2(d\tau)^2 \quad (4.43)$$

mit der Eigenzeit  $\tau$  im Ruhesystem des Teilchens. Das infinitesimale Wegelement  $(ds)^2$  ist Lorentz-invariant, im Inertialsystem lautet es:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= dx_\mu dx^\mu = c^2(dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 = c^2(dt)^2 - \mathbf{v}(t)^2(dt)^2 \\ &= c^2 \left( 1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right) (dt)^2 = c^2(1 - \beta(t)^2)(dt)^2 \stackrel{!}{=} c^2(d\tau)^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Daraus folgt

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta(t)^2} dt = \frac{1}{\gamma(t)} dt \quad (4.45)$$

Integration liefert die EIGENZEIT

$$\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta(t)^2} dt < t_2 - t_1. \quad (4.46)$$

Die Eigenzeit ist Lorentz-Skalar aber wegababhängig!

---

## 5 Relativistische Mechanik

Wie wir bereits gesehen haben ist die Newtonsche Mechanik nicht kovariant unter Lorentz-Transformation, zum Beispiel führt eine konstante Beschleunigung  $a$  auf  $v(t) = at > c$  für  $t > \frac{c}{a}$ . Unser Ziel ist die Formulierung einer Lorentz-kovarianten Mechanik, die bei kleinen Geschwindigkeiten in die Newtonsche Mechanik übergeht. Wir betrachten dazu ein Punktteilchen in der 4-dimensionalen Raum-Zeit. Die Größe

$$x^\mu = x^\mu(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

ist kontravarianter Vierervektor, wie wir bereits gesehen haben.

### 5.1 Vierer-Geschwindigkeit

Bei der Definition einer Vierergeschwindigkeit haben wir das Problem, dass  $t$  kein Lorentz-Skalar ist, deshalb ist  $dx^\mu/dt$  nicht Lorentz-kovariant. Wir haben aber bereits gesehen, dass die Eigenzeit  $\tau$  ein Lorentz-Skalar ist. Deshalb ist

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.2)$$

ein kontravarianter Vierervektor und heißt VIERERGESCHWINDIGKEIT. Mit der Definition des Eigenzeitdifferentials folgt

$$u^\mu = \gamma(t) \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(t) \begin{pmatrix} c \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \gamma(t) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (5.3a)$$

$$u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = \gamma(t) \begin{pmatrix} c \\ -\dot{\mathbf{x}} \\ -\dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix} = \gamma(t) \begin{pmatrix} c \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (5.3b)$$

Kontraktion der Vierergeschwindigkeit liefert dann ein Lorentz-Skalar:

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \mathbf{v}^2 = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2 > 0 \quad (5.4)$$

Es ist also  $u_\mu u^\mu > 0$  und daher ist  $u^\mu$  ein zeitartiger Vektor.

### 5.1.1 Vierer-Beschleunigung

Analoges Vorgehen führt zur Vierer-Beschleunigung

$$b^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (5.5)$$

Eine explizite Rechnung führt auf

$$b^\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \left[ \gamma \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \right] = \gamma \dot{\gamma} \begin{pmatrix} c \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Mit

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma^3 \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = \gamma^3 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \quad (5.7)$$

folgt dann

$$b^\mu = \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} \\ \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Im Grenzfall  $v \ll c$  gilt damit  $b^\mu \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ , wie verlangt.

### 5.1.2 Vierer-Impuls

Die Ruhemasse eines Teilchens ist Lorentz-Skalar. Damit lässt sich schreiben:

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Achtung:

Es gilt *nicht*

$$m(\gamma) = m_0 \cdot \gamma \quad \text{bzw.} \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.10)$$

Die Ruhemasse eines Teilchens ist ein Lorentz-Skalar und nicht geschwindigkeitsabhängig.

Das  $\gamma$  in Gleichung (5.9) gehört zur Vierer-Geschwindigkeit und nicht zur Masse.

### 5.1.3 Vierer-Kraft

Bei Newton gilt

$$\mathbf{F}^N = \dot{\mathbf{p}}. \quad (5.11)$$

Also führen wir analog ein:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = mb^\mu = \begin{pmatrix} \frac{m}{c} \gamma^4 \cdot \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \\ m\gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + m\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{c} \gamma^4 \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \\ \gamma \mathbf{F}^N \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Identifikation  $F^\mu = dp^\mu/d\tau$  nicht beweisbar ist, die Identifikation  $m\gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + m\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \cdot \mathbf{v} = \gamma \mathbf{F}^N$  ist die kritische Stelle der SRT.

Weiter ergibt sich

$$\frac{1}{c} \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^N = \gamma^2 \frac{m}{c} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \gamma^4 \frac{v^2}{c^2} \frac{m}{c} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \underbrace{[\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2]}_{\gamma^4} \frac{m}{c} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \gamma^4 \frac{m}{c} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = F^0 \quad (5.13)$$

und damit

$$F^\mu = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^N}{c} \\ \mathbf{F}^N \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} mb^\mu. \quad (5.14)$$

Mit der eingeführten Vierer-Kraft lassen sich dann die relativistischen Bewegungsgleichungen formulieren. Über

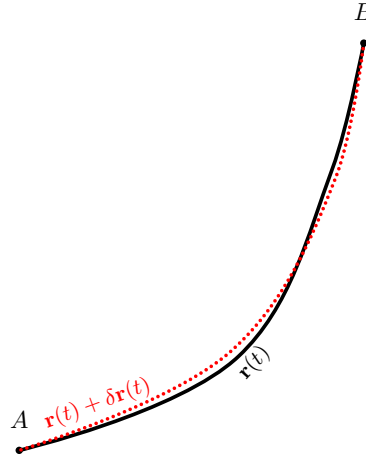
$$\mathbf{F}^N = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (5.15)$$

folgt eine Differentialgleichung für  $x(t)$ .

### 5.1.4 Beschreibung der kräftefreien Bewegung

Eine kräftefreie Bewegung ist beschreibbar als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Raum-Zeit-Ereignissen  $A$  und  $B$ . Die Berechnung erfolgt über Variation des Weges (Abb. 5.1), d.h.

$$\delta \int_B^A ds \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.16)$$



**Abbildung 5.1:** Variation des Weges: Betrachtet werden kleine Variationen  $\delta \mathbf{r}(t)$  des Weges  $\mathbf{r}(t)$  von Ereignis  $A$  zu Ereignis  $B$ , mit der Bedingung, dass  $\delta \mathbf{r}(t_A) = \delta \mathbf{r}(t_B) = 0$ .

Wobei wir den Weg über die Zeit  $t$  parametrisieren. Nach Einsetzen der Definition des Linienelementes folgt

$$\begin{aligned} \delta \int_A^B \sqrt{-(dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 + c^2(dt)^2} \\ = \delta \int_A^B dt \sqrt{-\dot{\mathbf{r}}^2 + c^2} = - \int_A^B dt \frac{\dot{\mathbf{r}} \delta \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Zur Auswertung des Integrals wenden wir die Produktintegration an. Wir setzen

$$u = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} \quad \text{und} \quad dv = \delta \dot{\mathbf{r}} \cdot dt \quad (5.18)$$

und erhalten nach Differentiation bzw. Integration

$$du = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} \cdot dt \quad \text{und} \quad v = \delta \mathbf{r}. \quad (5.19)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass gilt

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}, \quad (5.20)$$

d.h. die Differentiationen sind vertauschbar.

Wir setzen diese Ergebnisse ein und erhalten

$$-\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_A^B + \int_A^B \delta \mathbf{r}(t) \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - \dot{\mathbf{r}}^2}} \cdot dt = 0. \quad (5.21)$$

Da  $\delta \mathbf{r}(A) = \delta \mathbf{r}(B) = 0$  verschwindet der erste Term. Wir wollen auch noch  $\dot{\mathbf{r}}^2$  durch  $v^2$  ersetzen. Jetzt haben wir

$$\int_A^B \delta \mathbf{r}(t) \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - v^2}} \cdot dt = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r}(t). \quad (5.22)$$

Diese Gleichung läßt sich für beliebige  $\delta \mathbf{r}(t)$  nur erfüllen, wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0 \quad (5.23)$$

gilt.

Wir führen die Ableitung aus und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\ddot{\mathbf{r}} v^2}{(c^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{(c^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot [c^2 - v^2 + v^2] \\ &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{c^2}{(c^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Das bedeutet

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{const} = \mathbf{v}. \quad (5.25)$$

Durch Multiplikation der rechten Seite der Gleichung (5.23) mit der Masse  $m_0$  erhalten wir eine Aussage über den relativistischen Impuls  $p$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (5.26)$$

Dabei ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine Konstante und wird von der Ableitung nicht beeinflusst. Dann folgt also:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{m_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.27)$$

Dies ist die Gleichung für den relativistischen Impuls für den Fall, dass eine kräftefreie Bewegung vorliegt. Er ist dann eine Erhaltungsgröße. Für den relativistischen Impuls allgemein gilt:

$$\mathbf{p}_{\text{rel}} = \frac{m_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \mathbf{p}_{\text{klass}}, \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.28)$$

Wie in der klassischen Mechanik gilt also auch in der relativistischen Mechanik:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}}. \quad (5.29)$$

### 5.1.5 Konstant beschleunigte Rakete

Wir betrachten eine Rakete die in ihrem Ruhesystem konstant mit  $a = g$  in  $x$ -Richtung beschleunigt wird.

#### 1) Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen

Inertialsystem  $K$  sei die Erde, das Ruhesystem der Rakete  $K'$ .  
Dann folgt:

$$b'^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{inv LT}} b^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot b'^{\mu} \quad (5.30)$$

und damit wegen  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$

$$b_x = \gamma g = \frac{d}{d\tau} u_x = \frac{d}{d\tau} (\gamma v) = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma v) \quad (5.31)$$

und damit

$$g = \frac{d}{dt} (\gamma v). \quad (5.32)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $x(t=0) = 0$  und  $v(t=0) = 0$ , sowie  $dx(t)/dt = v(t)$  folgt

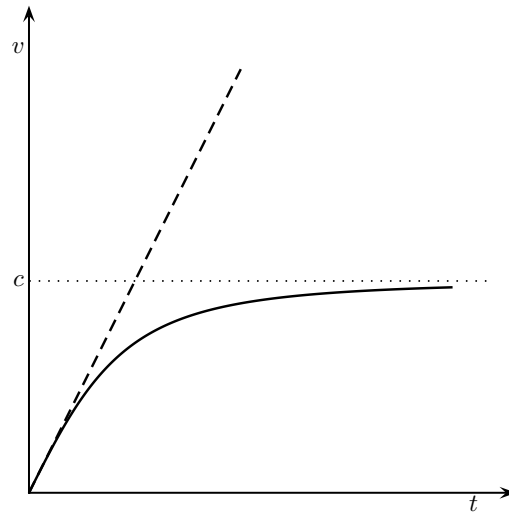
$$\gamma v = gt = \gamma \frac{dx}{dt} \quad \text{und weiter} \quad \frac{dx}{dt} = v = c\beta = \sqrt{1 - \beta^2} gt. \quad (5.33)$$

Mit

$$c^2 \beta^2 = (1 - \beta^2) g^2 t^2 \quad \text{also} \quad (c^2 + g^2 t^2) \beta^2 = g^2 t^2 \quad (5.34)$$

folgt

$$\beta = \frac{gt}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}} = \frac{v}{c} \quad \text{und damit} \quad v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}} < c. \quad (5.35)$$



**Abbildung 5.2:** Relativistische Bewegungsgleichung der Rakete: Während in der Newtonschen Mechanik die Geschwindigkeit der Rakete über alle Grenzen wächst (gestrichelte Linie), ist in der SRT die Lichtgeschwindigkeit  $c$  die obere Schranke (durchgezogene Linie).

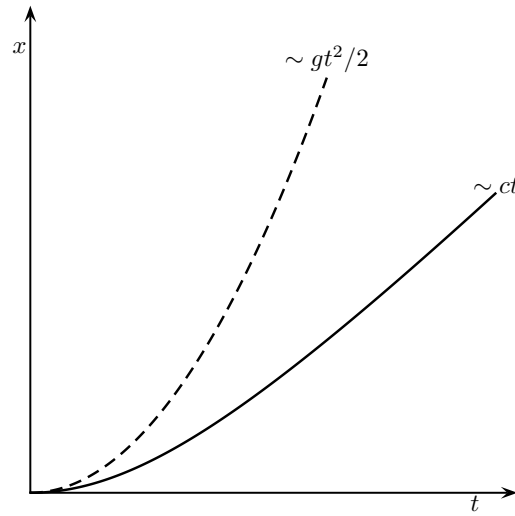
Siehe auch Abbildung 5.2.

Integration der Geschwindigkeit liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t') dt' = c \sqrt{t'^2 + \frac{c^2}{g^2}} \Big|_0^t \\ &= c \sqrt{t^2 + \frac{c^2}{g^2}} - \frac{c^2}{g^2} = \frac{c^2}{g} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

für kleine  $t$  gilt also  $x(t) \approx \frac{g}{2}t^2$  wie in der Newtonschen Mechanik, für große Zeiten dagegen ist  $x(t) \approx ct$ , unabhängig vom Wert der Beschleunigung, siehe Abbildung 5.3.





**Abbildung 5.3:** Relativistische Bewegungsgleichung der Rakete: Während in der Newtonschen Mechanik der zurückgelegte Weg  $x$  für alle Zeit mit  $\frac{g}{2}t^2$  pro Zeit  $t$  zunimmt (gestrichelte Linie), ändert er sich in der SRT für große  $t$  proportional zu  $ct$ , unabhängig von der Beschleunigung  $g$ .

## 2) Betrachtung der Eigenzeit

Für die Eigenzeit  $\tau$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \tau &= \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2(t')} dt' = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{g^2 t'^2}{c^2 + g^2 t'^2}} dt' \\
 &= \frac{c}{g} \ln \left[ \frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \left( \frac{gt}{c} \right)^2} \right] \\
 &= \frac{c}{g} \operatorname{arsinh} \frac{gt}{c}.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Auflösen nach  $t$  ergibt

$$t(\tau) = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} \tag{5.38}$$

Diese Ergebnisse erlauben uns eine genauere Betrachtung des Zwillingsparadoxons.

## Zwillingsparadoxon

Wir nehmen an, einer der beiden Zwillinge reise 5 Jahre in seiner Eigenzeit mit Beschleunigung  $g$ , dann 10 Jahre mit Beschleunigung  $-g$  und schließlich wieder 5 Jahre mit Beschleunigung  $g$ , d.h. er kehrt nach 20 Jahren Eigenzeit zur Erde zurück. Für den Zwilling auf der Erde ergibt sich aus Gleichung (5.38)

$$t(5 \text{ Jahre}) = 84,4 \text{ Jahre.} \quad (5.39)$$

Der reisende Zwilling kehrt für ihn also erst nach  $4t(5 \text{ Jahre}) = 337,4$  Jahren wieder zurück. Die maximale Entfernung zwischen den beiden Zwillingen ergibt sich aus Gleichung (5.36) zu 167 Lichtjahren. Eine umfassende Betrachtung des Zwillingsparadoxons findet sich in [1].

### 5.1.6 Relativistische Energie

Schauen wir uns nochmal die Vierer-Kraft an:

$$F^\mu = \gamma \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^N}{c} \right) \quad (5.40)$$

Für die nullte Komponente gilt:

$$F^0 = m \frac{du^0}{d\tau} = m\gamma \frac{d}{dt}(\gamma c) = \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^N}{c}. \quad (5.41)$$

Daraus ersehen wir den Zusammenhang

$$\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^N = \frac{\mathbf{F}^N \cdot d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dW}{dt}. \quad (5.42)$$

Dabei ist zu beachten das  $dW = \mathbf{F}^N \cdot d\mathbf{x}$  auch relativistisch gilt. Damit ist die RELATIVISTISCHE ENERGIE

$$W = \gamma mc^2 = E \quad (5.43)$$

eingeführt. Die auftretende Integrationskonstante haben wir so gewählt, dass die Energie des ruhenden Teilchens  $E = mc^2$  ist. Weiter folgt

$$E = \gamma mc^2 = cp^0 \quad \text{bzw.} \quad p^0 = \frac{E}{c}, \quad (5.44)$$

also ist der ENERGIE-IMPULS-VEKTOR gegeben durch

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, m\gamma \mathbf{v} \right) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right). \quad (5.45)$$

Für ihn gilt

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2, \quad (5.46)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen in das Ruhesystem des Teilchens führt, wo  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  und  $\gamma = 1$  gelten. Da  $p_\mu p^\mu$  Lorentz-Skalar ist gilt schließlich

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2 \quad \text{bzw.} \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2} \quad (5.47)$$

Damit ist der RELATIVISTISCHE ENERGIESATZ eingeführt. Für kleine Impulse lässt sich der Ausdruck für  $E$  in Gleichung (5.47) in eine Taylorreihe entwickeln:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 \left( 1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2 c^2} + \dots \right) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mc^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4), \quad (5.48)$$

mit der Ruheenergie  $mc^2$  und der kinetischen Energie  $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4)$ . Wichtig ist zu erkennen, dass für  $m > 0$  gilt

$$E \mapsto \infty \quad \text{für} \quad |\mathbf{v}| \mapsto c \quad (5.49)$$

Daraus folgt, dass sich Teilchen mit nicht verschwindender Ruheenergie langsamer als Licht bewegen!

## 1) Photonen

Photonen haben keine Ruhemasse. Deswegen gilt

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 = 0. \quad (5.50)$$

Daraus folgt dann

$$E = c|\mathbf{p}| = \hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda}. \quad (5.51)$$

Mit den Zusammenhängen

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad \text{und} \quad E = \hbar\nu = \hbar\omega \quad (5.52)$$

zwischen Impuls und Wellenvektor, bzw. Energie und Frequenz für Photonen haben wir dann

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar \mathbf{k} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \hbar k^\mu, \quad (5.53)$$

mit dem RELATIVISTISCHEN WELLENVEKTOR  $k^\mu$ .

## 2) Stöße

Ohne äußere Kräfte ist der Viererimpuls erhalten, also ist

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = F^\mu = 0. \quad (5.54)$$

Für Stöße zwischen zwei Teilchen gilt

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu. \quad (5.55)$$

Dieser Zusammenhang gilt auch für Photonen (Compton-Streuung).

## 5.2 Äquivalenz von Masse und Energie

Wir betrachten noch einmal den Vierer-Impuls:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

mit  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ . Da  $p^\mu$  Vierer-Vektor ist gelten die Lorentz-Transformationen (wie für  $x^\mu$ ). Wir betrachten wie immer die spezielle Lorentz-Transformation in  $x$ -Richtung. Für  $x^\mu$  gilt:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad x = \gamma(x' + \beta ct'). \quad (5.57)$$

Für  $p^\mu$  gilt entsprechend

$$\frac{E}{c} = \gamma \left( \frac{E'}{c} + \beta p'_x \right), \quad p_x = \gamma \left( p'_x + \beta \frac{E'}{c} \right). \quad (5.58)$$

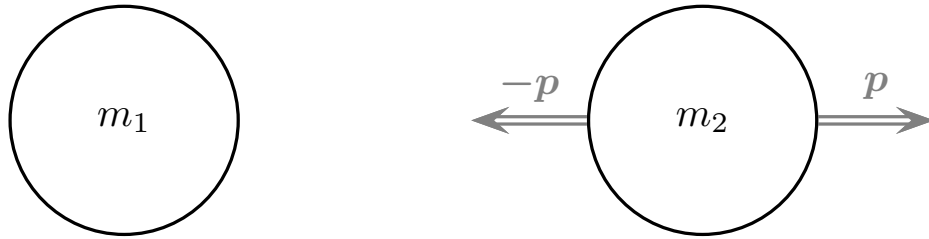
Im Ruhesystem des Teilchens gilt  $p'_x = 0$  und  $E' = E'_0 = E_0$ . Daraus folgt

$$E = \gamma E_0 \quad \text{und} \quad p_x = \gamma \beta \frac{E_0}{c} = \gamma \frac{v E_0}{c^2} \stackrel{\text{rel. Imp.}}{=} m\gamma v \quad (5.59)$$

und damit

$$E_0 = mc^2 \quad (5.60)$$

für die Ruhenergie im Ruhesystem. Es ist also *keine* Integrationskonstante möglich!



**Abbildung 5.4:** Zur Äquivalenz von Masse und Energie: Ein Teilchen, das 2 Photonen gleicher Energie in entgegengesetzte Richtung emittiert, ändert seinen Impuls und entsprechend auch seine kinetische Energie nicht, es muss also seine Ruhemasse verringern.

### 5.2.1 Konsequenzen der Äquivalenz von Masse und Energie

Wir betrachten ein Teilchen mit Masse  $m_1$ , das zwei Photonen in entgegengesetzter Richtung emittiert (so dass kein Rückstoss erfolgt) (siehe Abbildung 5.4). Erhaltung des Gesamt-Viererimpulses:

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\mathbf{p}| \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Daraus folgt für  $E_2$

$$E_2 = E_1 - 2c|\mathbf{p}| \quad \text{bzw.} \quad m_2 c^2 = m_1 c^2 - 2c|\mathbf{p}|. \quad (5.62)$$

Daher können wir schliessen, dass weiter

$$m_2 = m_1 - 2 \frac{|\mathbf{p}|}{c} = m_1 - 2 \frac{E_{\text{Photon}}}{c^2} \quad (5.63)$$

gilt.

Abgestrahlte Energie, d.h. Photonen bzw. elektromagnetische Strahlung, verringert also die Ruhemasse des Teilchens (z.B. ein angeregtes Atom).

Zusammengefasst haben wir damit die Äquivalenz von Masse und Energie:

Jeder Form von Energie kann eine träge Masse zugeordnet werden, nach der Vorschrift

$$E = mc^2. \quad (5.64)$$

### 5.2.2 Beispiele

Bei den folgenden Situationen wird die Äquivalenz von Masse und Energie deutlich:

1. Angeregte Atome oder Moleküle sind schwerer als Atome oder Moleküle im Grundzustand. Wir betrachten das Wasserstoffatom. Die Massen von Proton und Elektron ergeben zusammen

$$m_p + m_e = 1,67261 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 1,67352 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (5.65)$$

Für Wasserstoff im Grundzustand findet man

$$\begin{aligned} m_H &= m_p + m_e - \frac{13,6 \text{ eV}}{c^2} = 1,67352 \cdot 10^{-27} \text{ kg} - 2,42 \cdot 10^{-35} \text{ kg} \\ &\approx 1,67352 \cdot 10^{-27} \text{ kg} - 10^{-8} m_p \end{aligned} \quad (5.66)$$

Die Masse des Wasserstoffatoms ist also kleiner als die Masse von Proton plus Elektron. Man spricht vom MASSENDEFEKT, hier verursacht von der negativen Bindungsenergie von Elektron und Proton. Für das Wasserstoffatom ist dieser Effekt sehr klein.

2. Atomkerne zeigen ebenfalls einen Massendefekt. Die Gesamtmasse von Atomkernen ist kleiner als die Summe der Massen der Protonen und Neutronen. Der Massendefekt ergibt sich aus der Bindungsenergie  $E_B/c^2$  aufgrund der starken Wechselwirkung. Die Masse des Atomkernes ist also

$$m(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{E_B}{c^2} \quad (5.67)$$

wobei  $E_B < 0$  ist. Wir betrachten als Beispiel das Nuklid  $^{12}\text{C}$ . Hier ist  $A = 12$  und  $Z = 6$ . Die atomare Masseneinheit ist

$$\frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (5.68)$$

Im Vergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} (6m_p + 6m_n) &= \frac{1}{2} (1,67261 \cdot 10^{-27} \text{ kg} + 1,67482 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \\ &= 1,67372 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Das heißt etwa 0,8% der Masse der Protonen und Neutronen geht in die Bindungsenergie.

3. Teilchen und Antiteilchen können paarweise erzeugt oder vernichtet werden, z.B. in der Reaktion

$$e^+ + e^- \longleftrightarrow 2\gamma. \quad (5.70)$$

Aus Elektron und Positron entstehen also zwei Photonen. Es gilt:

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad \text{also} \quad E_\gamma \geq m_e c^2 = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 512 \text{ keV}. \quad (5.71)$$

Hier werden 100% der Masse in Energie umgewandelt.

## 5.3 Drehimpulstensor und Drehmoment

### 5.3.1 Klassischer Drehimpuls

In der klassischen Mechanik gilt für den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (5.72)$$

In Komponentenschreibweise ergibt dies

$$L^i = x^j p^k - x^k p^j \quad \text{mit} \quad (i,j,k) = (1,2,3) \quad \text{und zyklischen Permutationen}. \quad (5.73)$$

### 5.3.2 Kovarianter Drehimpuls und Drehmoment

Wir definieren einen Lorentz-kovarianten Drehimpuls über

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = -L^{\nu\mu}. \quad (5.74)$$

$L^{\mu\nu}$  ist also antisymmetrischer Tensor 2. Stufe. In der klassischen Mechanik gilt weiter für das Drehmoment

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}^N. \quad (5.75)$$

In kovariante Formulierung erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} L^{\mu\nu} &= \frac{d}{d\tau} (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) = u^\mu p^\nu + x^\mu \frac{dp^\nu}{d\tau} - u^\nu p^\mu - x^\nu \frac{dp^\mu}{d\tau} \\ &= x^\mu F^\nu - x^\nu F^\mu = M^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass sich die Terme  $u^\mu p^\nu$  und  $-u^\nu p^\mu$  zu Null addieren.

## 5.4 Relativistische Erhaltungssätze

Wir betrachten ein System von  $N$  Massepunkten, die keinen äußeren Kräften unterliegen.

Erhaltungsgrößen in der klassischen Mechanik sind für solch ein System der Gesamtimpuls, der Gesamtdrehimpuls und die Gesamtenergie.

In der SRT gilt entsprechend

$$\sum_{i=1}^N p_i^\mu = \text{const}, \quad (5.77)$$

also

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \text{const}, \quad (5.78a)$$

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \gamma_i \mathbf{v}_i = \text{const}, \quad (5.78b)$$

mit den relativistischen Energien  $E_i$ .



## 6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Die Newtonsche Mechanik ist Galilei-invariant. Deshalb mussten wir im vorherigen Kapitel eine kovariante Formulierung für eine relativistische Mechanik finden. Dies führte zu einer Modifikation der Bewegungsgleichungen.

Im Gegensatz dazu ist die Elektrodynamik, d.h. die Maxwell'schen Gleichungen, bereits Lorentz-invariant. Dies kommt jedoch bei der Formulierung mit  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{j}, \varrho)$  nicht explizit zum Ausdruck, insbesondere sind  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{j}$  keine Vierervektoren und  $\varrho$  kein Lorentz-Skalar.

In diesem Kapitel wollen wir daher die Maxwell'schen Gleichungen in einer kovarianten Formulierung darstellen. Dies wird es uns möglich machen, direkt zu sehen, wie sich die elektrischen und magnetischen Felder, sowie Ladungen und Ströme transformieren.

### 6.1 Grundlagen der klassischen Elektrodynamik

Das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  ist definiert über die Kraft  $\mathbf{F}_{\text{el}}$ , die auf eine (ruhende) kleine Probeladung  $q$  wirkt:

$$\mathbf{F}_{\text{el}}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

Die magnetische Induktion ist definiert über die Kraft  $\mathbf{F}_{\text{m}}$ , die auf eine sich mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegende Ladung  $q$  wirkt:

$$\mathbf{F}_{\text{m}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (6.2)$$

Daraus ergibt sich die Lorentzkraft, die Kraft auf eine Probeladung  $q$  im elektromagnetischen Feld, zu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \quad (6.3)$$

#### 6.1.1 Die homogenen Maxwellgleichungen

Für das elektrische und magnetische Feld gelten Nebenbedingungen (innere Feldgleichungen), die homogenen Maxwellgleichungen. Zum einen

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0. \quad (6.4)$$

Daraus ergibt sich das Induktionsgesetz

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{f} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial F} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = U_{\text{ind}} = - \int_F \dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{f} = -\dot{\Phi}. \quad (6.5)$$

mit dem magnetischen Fluss  $\Phi = \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}$  durch die Fläche  $F$ . Zum anderen haben wir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.6)$$

Gleichung (6.6) besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Mit Ergebnissen der Vektoranalysis folgt, dass  $\mathbf{B}$  darstellbar ist als Rotation eines Vektorpotentials:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Damit folgt:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \dot{\mathbf{A}} = \nabla \times (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0. \quad (6.8)$$

In der Vektoranalysis wird weiter gezeigt, dass sich ein Vektorfeld als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lässt, falls seine Rotation verschwindet. Also können wir schreiben

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla\varphi, \quad (6.9)$$

mit dem elektrodynamischen Potential  $\varphi$ . Aufgelöst nach dem elektrischen Feld ergibt sich

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.10)$$

Das skalare Potential und das Vektorpotential sind nicht eindeutig, man spricht in diesem Zusammenhang von EICHFREIHEIT. Setzt man etwa

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \text{so folgt daraus} \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla\chi)}_0 = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (6.11a)$$

Für das elektrische Feld ergibt sich dann

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \dot{\mathbf{A}}' + \nabla\dot{\chi} = -\nabla \underbrace{(\varphi - \chi')}_{\varphi'} - \dot{\mathbf{A}}', \quad (6.11b)$$

dabei ist  $\chi(\mathbf{r}, t)$  ein beliebiges skalares Feld und heißt EICHFUNKTION. Weiter wurde ausgenutzt, dass die Rotation des Gradienten eines beliebigen skalaren Feldes verschwindet. Die Operation

$$(\mathbf{A}, \varphi) \mapsto (\mathbf{A}', \varphi') \quad (6.12)$$

heißt EICHTRANSFORMATION.

## Die inhomogenen Maxwellgleichungen

Die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen oder Erregungsgleichungen lauten

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}}), \quad (6.13a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.13b)$$

Einsetzen der Potentiale und Umformen liefert

$$\nabla \times \left( \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{A} \right) + \varepsilon_0 (\nabla \dot{\varphi} + \ddot{\mathbf{A}}) = \mathbf{j}, \quad (6.14a)$$

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \varphi - \dot{\mathbf{A}} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.14b)$$

Mit der Relation

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (6.15)$$

kann Gleichung (6.14a) weiter umgeformt werden zu

$$\nabla \left( \nabla \cdot \frac{1}{\mu_0} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{A} + \varepsilon_0 \nabla \dot{\varphi} + \varepsilon_0 \cdot \ddot{\mathbf{A}} = \mathbf{j}. \quad (6.16)$$

Nutzt man nun die Eichfreiheit aus, so können die Potentiale so gewählt werden, dass

$$\varepsilon_0 \mu_0 \dot{\varphi} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.17)$$

gilt. Dabei ist

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (6.18)$$

Diese Eichung heißt LORENTZ-EICHUNG. Die Eichfunktion  $\chi(\mathbf{r}, t)$  ist hier Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\chi} - \Delta \chi = g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} + \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (6.19)$$

Mit Lorentz-Eichung gilt

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6.20)$$

Wir führen das VIERER-POTENTIAL

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

ein. Zusammen mit der kovarianten Ableitung  $\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$  gilt dann in Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (6.22)$$

Die Lorentz-Eichung kann in *jedem* Bezugssystem gewählt werden. Damit ist  $\partial_\mu A^\mu$  ein Lorentz-Skalar. Dementsprechend ist  $A^\mu$  ein kontravarianter Lorentz-Tensor 1.Stufe, transformiert sich also wie die Koordinaten mit der Lorentz-Transformation.

### Beispiel: Spezielle Lorentz-Transformation in $x$ -Richtung

Bei einer speziellen Lorentz-Transformation in  $x$ -Richtung von System  $K$  nach System  $K'$  mit Relativgeschwindigkeit  $v$  transformieren sich die Koordinaten über

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (6.23)$$

Also gilt für das Viererpotential bei diesem Koordinatenübergang

$$\frac{1}{c}\varphi' = \gamma \left( \frac{1}{c}\varphi - \beta A_x \right), \quad A'_x = \gamma \left( A_x - \beta \frac{1}{c}\varphi \right), \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z. \quad (6.24)$$

In System  $K$  existiere nur ein statisches elektrisches Feld  $\mathbf{E} = \nabla\varphi$  und kein Magnetfeld, also  $\mathbf{A} = 0$ .

Der Beobachter im System  $K'$  sieht dann auch ein Magnetfeld  $\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}'$ , falls  $\varphi$  von  $y$  oder  $z$  abhängt.

Gelte z.B. für das elektrodynamische Potential und Vektorpotential, sowie das elektrische Feld in  $K$

$$\varphi = -E_0 z, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E} = E_0 \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{und} \quad \mathbf{A} = 0. \quad (6.25)$$

In  $K'$  ergibt sich dann

$$A'_x = -\gamma\beta\frac{1}{c}\varphi = \frac{v}{c^2}\gamma E_0 z \stackrel{z \equiv z'}{=} \frac{v}{c^2}\gamma E_0 z' \quad (6.26a)$$

und damit erhält man das Magnetfeld

$$\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' = \gamma \frac{v}{c^2} E_0 \cdot \mathbf{e}_y = \frac{v E_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \mathbf{e}_y. \quad (6.26b)$$

Aus Gleichung (6.14b) folgt

$$-\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} - \Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (6.27)$$

Aus  $\partial_\mu A^\mu$  folgt durch Zeitableitung weiter

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.28)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (6.27) und (6.28) finden wir schließlich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\varphi}{c} - \Delta \frac{\varphi}{c} = \partial_\mu \partial^\mu \frac{\varphi}{c} = \square \frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c \varepsilon_0} \varrho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \varrho. \quad (6.29)$$

Im letzten Schritt haben wir dabei Gleichung (6.18) eingesetzt.  
In dieser Gleichung haben wir den D'ALEMBERT-OPERATOR

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (6.30)$$

eingeführt. Unter Verwendung der Gleichungen (6.16), (6.18) und (6.20) können wir den d'Alembert-Operator nun auf  $\mathbf{A}$  anwenden und finden

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \varphi + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (6.31)$$

Insgesamt haben wir dann die zu den vier Maxwellgleichungen äquivalente Gleichung

$$\square A^\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \varrho \\ \mu_0 \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} c \varrho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \mu_0 j^\mu, \quad (6.32)$$

mit dem VIERERSTROM  $j^\mu$ , der ein kontravarianter Tensor 1. Stufe ist.  
Daraus ergibt sich weiter, dass

$$\partial_\mu j^\mu = \dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (6.33)$$

ein Lorentz-Skalar ist.

Wegen  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}})$  aus Gleichung (6.13a) gilt

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{j} + \dot{\varrho}). \quad (6.34)$$

Da der hintere Teil von Gleichung (6.34) ein Lorentz-Skalar ist, muss diese Gleichung in allen Bezugssystemen gelten.

Damit ist die KONTINUITÄTSGLEICHUNG

$$\partial_\mu j^\mu = \dot{\varrho} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.35)$$

begründet, die in *allen* Inertialsystemen gilt.

Wir betrachten wieder die Beziehung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu = \mu_0 j^\nu \quad (6.36)$$

in Gleichung (6.32).

Im Vakuum gilt  $j^\mu = 0$  und damit ergibt sich die WELLENGLEICHUNG

$$\square A = 0 \quad (6.37)$$

deren Lösung eine Superposition ebener Wellen darstellt:

$$f(x^\mu) = e^{(-ik_\mu x^\mu)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (6.38)$$

mit dem kovarianten Wellenvektor

$$k_\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (6.39)$$

Damit ergibt sich für  $f$  die Gleichung:

$$\square f(x^\mu) = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta \right) f(x^\mu) = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right) f(x^\mu) \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.40)$$

Um diese Bedingung zu erfüllen muss

$$\omega = c|\mathbf{k}| \quad (6.41)$$

gelten. Also ist  $k_\mu$  ein lichtartiger Vektor ist.

Es folgt dann

$$A^\nu(x^\mu) = \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{A}^\nu(k^\mu) \delta[(k^0)^2 - \mathbf{k}^2] e^{-ik_\mu x^\mu} d^4k \quad (6.42)$$

wobei  $\tilde{A}^\nu(k^\mu)$  frei wählbar ist.

## 6.2 Lorentz-Tensoren 2. Stufe in der Elektrodynamik

Das elektrische Feld und das Magnetfeld sind wie bereits diskutiert *nicht* Lorentz-kovariant. Es stellt sich nun die Frage, ob die Maxwell-Gleichungen auch für die Felder in kovarianter Form geschrieben werden können.

Es zeigt sich, dass dies möglich ist, allerdings werden dann Lorentz-Tensoren 2. Stufe benötigt. Wir werden diese Tensoren nicht herleiten, sondern direkt einführen und dann ihre Eigenschaften betrachten.

### 6.2.1 Der Feldstärketensor

Die zentrale Größe zur kovarianten Formulierung der Elektrodynamik ist der Feldstärketensor. Um ihn zu erhalten bilden wir die Vierer-Rotation des Vektorpotentials:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.43)$$

$F_{\mu\nu}$  ist also ein antisymmetrischer kovarianter Lorentz-Tensor 2.Stufe, wobei gilt

$$A_\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{c} \\ -\mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Für die einzelnen Komponenten ergibt sich

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0, \quad (6.45a)$$

$$F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \dot{A}_i = -\frac{1}{c} E_i = -F_{0i}, \quad (6.45b)$$

$$F_{12} = -\frac{\partial A_2}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -B_3 = -F_{21}, \quad (6.45c)$$

$$F_{13} = B_2 = -F_{31}, \quad (6.45d)$$

$$F_{23} = -B_1 = -F_{32}, \quad (6.45e)$$

und damit in Matrixschreibweise

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

Die Transformation des Feldstärketensors erfolgt über

$$F'_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})_\mu^\alpha (\Lambda^{-1})_\nu^\beta F_{\alpha\beta}. \quad (6.47)$$

Beim Wechsel zwischen Bezugssystemen (Inertialsystemen) transformieren sich also die elektrischen *und* die magnetischen Felder zusammen. Eine getrennte Betrachtung ist daher nicht sinnvoll.

### 1) Der kontravariante Feldstärketensor

Weiter lässt sich der kontravariante Feldstärketensor über den allgemeinen Zusammenhang zwischen ko- und kontravarianten Tensoren definieren:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

Außerdem gilt, zunächst ohne Beweis

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{2}{c^2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) \quad \text{ist Lorentz-Skalar und} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad \text{ist ein Pseudo-Skalar.} \quad (6.49)$$

Dabei verhält sich ein Pseudo-Skalar abgesehen von einem Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelungen wie ein gewöhnlicher Skalar.

### 2) Schlussfolgerungen

Mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnittes erhalten wir folgende wichtige Aussagen:

1. Gilt  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , bzw.  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  in einem Inertialsystem, dann ist  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , bzw.  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  in *allen* Inertialsystemen.
2. Gilt zusätzlich  $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2 > 0$ , dann gibt es ein System mit  $\mathbf{B}' = 0$ , d.h. das Magnetfeld lässt sich wegtransformieren. Gilt  $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2 < 0$ , dann gibt es ein System mit  $\mathbf{E}' = 0$  und das elektrische Feld lässt sich wegtransformieren.
3. Gilt  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$  in einem System, dann gilt es in allen Systemen, d.h. keines der Felder lässt sich wegtransformieren.
4. Gilt  $\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2 = 0$  in einem System, dann ist  $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$  in *allen* Systemen. Gilt zusätzlich  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ , dann bilden  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{k}$  ein Orthogonalsystem.



## 6.3 Kovariante Form der Erregungsgleichungen

Mit Hilfe des Feldstärketensors lässt sich

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu \quad (6.50)$$

schreiben.

Um zu zeigen, dass diese Gleichung erfüllt ist, werten wir sie im Einzelnen aus.

Für  $\mu = 0$  haben wir

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{0\nu} &= -\mu_0 j^0, \quad \text{mit} \quad \partial_\nu F^{0\nu} = -\frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mu_0 c \varrho, \\ \text{bzw.} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \mu_0 c^2 \varrho = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (6.51a)$$

Für  $\mu = 1$  ergibt sich

$$\partial_\nu F^{1\nu} = \frac{1}{c^2} \dot{E}_x + \left( \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{c^2} \dot{E}_x - (\nabla \times \mathbf{B})_x, \quad (6.51b)$$

bzw. insgesamt für  $\mu = i \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{i\nu} &= \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} - (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \mathbf{j}, \\ \text{bzw.} \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (6.51c)$$

Wir kommen damit zu folgendem wichtigen Ergebnis:

Die Gleichung  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu$  ist die kovariante Form der *beiden* Erregungsgleichungen  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho/\varepsilon_0$  und  $\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}$ .

## 6.4 Kovariante Form der inneren Feldgleichungen

Wir definieren zunächst den total antisymmetrischen LEVI-CIVITA-TENSOR:

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \{\kappa\lambda\mu\nu\} \text{ gerade Permutation von } 1,2,3,4 \text{ ist,} \\ -1 & \text{wenn } \{\kappa\lambda\mu\nu\} \text{ ungerade Permutation von } 1,2,3,4 \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.52)$$

Der Levi-Civita-Tensor ist Pseudo-Tensor 4. Stufe. Bei einem Koordinatenwechsel gilt also wie üblich

$$\Lambda^\alpha_\kappa \Lambda^\beta_\lambda \Lambda^\gamma_\mu \Lambda^\delta_\nu \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (6.53)$$

bei Raumspiegelungen verhält sich  $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$  aber anders als normale Tensoren, es tritt ein Vorzeichenwechsel auf.

### 6.4.1 Der duale Feldstärketensor

Mit Hilfe des Levi-Civita-Tensor kann man den DUALEN FELDSTÄRKETENSOR definieren als

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

$\hat{F}^{\mu\nu}$  ist auch ein Pseudo-Tensor, hat also einen Vorzeichenwechsel bei Raumspiegelungen. Man erhält außerdem

$$F_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.55)$$

Damit ist gezeigt, dass  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$  ein Pseudo-Skalar ist, wie wir es bei der Einführung des kontravarianten Feldstärketensors bereits ohne Beweis angemerkt hatten.

### 6.4.2 Formulierung der inneren Feldgleichungen

Die inneren Feldgleichungen lassen sich nun schreiben als

$$\partial_\nu \hat{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (6.56)$$

Wir betrachten diese Gleichung wieder im Einzelnen:

Für  $\mu = 0$  ergibt sich

$$\partial_\nu \widehat{F}^{0\nu} = -\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.57a)$$

Für  $\mu = 1$  haben wir

$$\partial_\nu \widehat{F}^{1\nu} = \frac{1}{c} \dot{B}_x + \frac{1}{c} \left( -\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{c} \left[ \dot{B}_x + (\nabla \times \mathbf{E})_x \right], \quad (6.57b)$$

und insgesamt für  $\mu = i \neq 0$ :

$$\partial_\nu \widehat{F}^{i\nu} = \frac{1}{c} \left( \dot{\mathbf{B}} + \nabla \times \mathbf{E} \right)_i = 0. \quad (6.57c)$$

Insgesamt ergibt sich als kovariante Form der Maxwellgleichungen also

$$\partial_\nu \widehat{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (6.58a)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\mu. \quad (6.58b)$$

## 6.5 Kovariante Form der Lorentz-Kraft

Mit dem Feldstärketensor lässt sich die Lorentz-Kraft kovariant formulieren:

$$\frac{d}{d\tau} p_\mu = q \cdot F_{\mu\nu} u^\nu. \quad (6.59)$$

Für  $\mu = i \in \{1,2,3\}$  ergibt sich

$$\frac{d}{d\tau} p_i = \gamma \frac{d}{dt} p_i = -\gamma q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i = -\frac{d}{d\tau} p^i, \quad (6.60a)$$

und für  $\mu = 0$

$$\frac{d}{d\tau} p_0 = \frac{d}{d\tau} (m\gamma c) = \gamma \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (6.60b)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} E_{\text{rel}} = \frac{d}{dt} W = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}.$$

Es gilt also

$$dW = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad (6.61)$$

d.h. der Energiezuwachs ist gleich der vom elektrischen Feld geleisteten Arbeit.  
Alternativ lässt sich schreiben:

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = F^\mu = q\eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}u^\nu, \quad (6.62)$$

mit der MINKOWSKI-KRAFT  $F^\mu$ . Wir definieren zusätzlich die MINKOWSKI-KRAFT-DICHTE  $f^\mu$ , indem wir die Ersetzungen  $q \rightarrow \varrho_0$ ,  $qu^\nu \rightarrow \varrho u^\nu = j^\nu$  vornehmen. Wir erhalten dann

$$f^\mu \stackrel{\text{Def.}}{=} \eta^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}j^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ \varrho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (6.63)$$

## 6.6 Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

### 6.6.1 Klassische Energiegrößen der Elektrodynamik

In der klassischen Elektrodynamik sind die nicht Lorentz-kovarianten Größen Feldenergie  $w$  als

$$w = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \quad (6.64)$$

und der POYNTING-VEKTOR (Energiestrom)  $\mathbf{S}$  als

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (6.65)$$

definiert.

### 6.6.2 Einführung des Energie-Impuls-Tensors

Als entsprechende Lorentz-kovariante Grösse definieren wir den ENERGIE-IMPULS-TENSOR über

$$T_\mu{}^\nu = \frac{1}{\mu_0} \left( F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta_\mu^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (6.66a)$$

bzw.

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left( \eta^{\mu\beta} F_{\beta\alpha} F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (6.66b)$$

Dabei ist

$$\eta_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (6.67)$$

und  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -2 \left( \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right)$  nach Gleichung (6.49). Wir werten nun die Komponenten von  $F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$  aus.

Für  $\mu = \nu = 0$  ergibt sich einfach

$$F_{0\alpha} F^{\alpha 0} = \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}, \quad (6.68a)$$

und für  $\mu = 0, \nu = i$

$$F_{0\alpha} F^{\alpha i} = \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i = \frac{\mu_0}{c} (\mathbf{S})_i \quad (6.68b)$$

Mit diesen Ergebnissen können wir nun die Komponenten von  $T_\mu^\nu$  bestimmen:

$$T_0^0 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} - \mathbf{B}^2 \right) \right] = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2 \right) = w, \quad (6.69a)$$

$$T_0^i = \frac{1}{c} (\mathbf{S})_i = -T_i^0, \quad (6.69b)$$

$$T_i^j = G_i^j. \quad (6.69c)$$

Dabei ist  $G_i^j$  der MAXWELLSCHE SPANNUNGSTENSOR. Insgesamt erhalten wir in Matrixschreibweise:

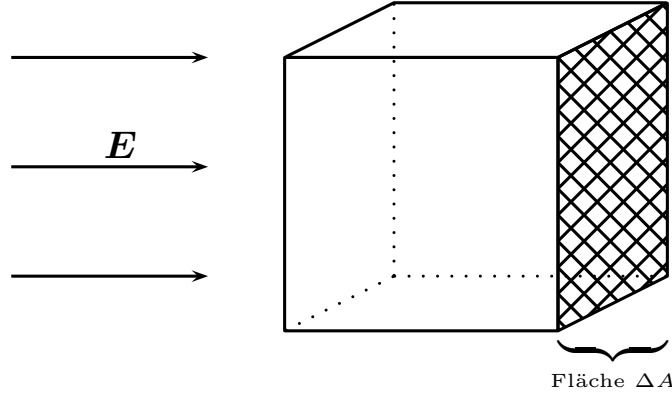
$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c} \mathbf{S}^T \\ -\frac{1}{c} \mathbf{S} & G_i^j \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & \frac{1}{c} \mathbf{S}^T \\ \frac{1}{c} \mathbf{S} & G^{ij} \end{pmatrix}. \quad (6.70)$$

Dabei gilt

$$G^{ij} = -G_i^j. \quad (6.71)$$

Der Tensor  $T_\mu^\nu$  ist außerdem spurfrei:

$$T_\mu^\mu = \text{Sp } T_\mu^\nu = 0. \quad (6.72)$$



**Abbildung 6.1:** Zur Interpretation des Energie-Impuls-Tensor: Betrachtet wird ein kleiner Quader im elektromagnetischen Feld

### 6.6.3 Interpretation des Energie-Impuls-Tensors

Um die Bedeutung des Energie-Impuls-Tensors klar zu machen, betrachten wir einen kleinen Quader in einer elektromagnetischen Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet, d.h. für den Poynting-Vektor ergibt sich  $\mathbf{S} = S_x \mathbf{e}_x$ . Siehe auch Abbildung 6.1. Dann gilt:

$$\Delta W = S_x \Delta A \cdot \Delta t \stackrel{!}{=} F_x \Delta x = F_x c \cdot \Delta t. \quad (6.73a)$$

bzw. umgeformt

$$\frac{F_x}{\Delta A} = p_S = \frac{1}{c} S_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta A \cdot \Delta t} = c \frac{\Delta p_x}{\Delta V}, \quad (6.73b)$$

wobei  $p_S$  den STRAHLUNGSDRUCK bezeichnet. Weiter gilt

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta V} = \Pi_x, \quad (6.74)$$

mit der Impulsdichtekomponente  $\Pi_x$ . Allgemein ist die IMPULSDICHTE definiert über

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (6.75)$$

Der Maxwellsche Spannungstensor  $G_{ij}$  bestimmt den Druck, den eine elektromagnetische Kraft auf ein Volumenelement, hier der kleine Quader, ausübt:

$$\frac{\mathbf{F}}{\Delta A} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}, \quad (6.76)$$

mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  senkrecht zum Flächenelement  $\Delta A$ . Daraus folgt

$$\mathbf{F} = -\mathbf{G} d\mathbf{f}, \quad (6.77)$$

mit  $d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A}$ . Die Dimension von  $T^{\mu\nu}$  ist also gleich Energie durch Volumen, bzw. Kraft pro Fläche also Druck. Aus  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$  folgt

$$\partial_\nu T_\mu{}^\nu = \frac{1}{\mu_0} (-\mu_0 F_{\mu\alpha} j^\alpha) = -F_{\mu\alpha} j^\alpha, \quad (6.78a)$$

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -\eta^{\mu\beta} F_{\beta\alpha} j^\alpha = -f^\mu, \quad (6.78b)$$

mit der Minkowski-Kraft-Dichte  $f^\mu$ . In Komponenten führt dies auf

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad \text{für } \mu = 0, \quad (6.79a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G}^i = \varrho E_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i \quad \text{für } \mu = i. \quad (6.79b)$$

dabei steht der Index  $i$  in  $G^i$  für die entsprechende Zeile.

## Betrachtung im Vakuum

Im Vakuum ist  $j^\mu = 0$ , also auch  $f^\mu = 0$  und daher  $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ . Es existieren dann insgesamt vier Kontinuitätsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{G}^i &= 0, \end{aligned} \quad (6.80)$$

mit  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}$ .  $G^{ij}$  beschreibt also eine Impulsstromdichte. Man kann  $T^{\mu\nu}$  aufspalten über

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{em}}^{\mu\nu} + T_{\text{mat}}^{\mu\nu}, \quad (6.81)$$

wobei  $T_{\text{em}}^{\mu\nu}$  nur elektromagnetische Felder beschreibt und  $T_{\text{mat}}^{\mu\nu}$  Materie, also Ladungen und Ströme und auch andere Beiträge, etwa Teilchenfelder und Gravitationsfelder.

## 6.7 Der relativistische Doppler-Effekt

### 6.7.1 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

Elektromagnetische Wellen im Vakuum werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}\tag{6.82}$$

beschrieben, dabei gilt für diese ebenen Wellen

$$\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}.\tag{6.83}$$

Mit dem Vierer-Wellenvektor

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hbar} p^\mu \quad \text{bzw.} \quad k_\mu = \eta_{\mu\nu} k^\nu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ -\mathbf{k} \end{pmatrix}\tag{6.84}$$

gilt

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mapsto e^{-ik_\mu k^\mu}.\tag{6.85}$$

### 6.7.2 Transformation in ein bewegtes Bezugssystem

Es stellt sich die Frage, welche Welle ein Beobachter in einem bewegten Bezugssystem sieht. Wir betrachten dazu ein entlang der  $x$ -Achse bewegtes System. Eine Lorentz-Transformation des Vierer-Wellenvektors ergibt

$$\begin{aligned}k'^0 &= \gamma(k^0 - \beta k^1), \\ k'^1 &= \gamma(k^1 - \beta k^0), \\ k'^2 &= k^2, \\ k'^3 &= k^3,\end{aligned}\tag{6.86}$$

bzw.

$$\omega' = \gamma(\omega - v \cdot k_x) = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega \frac{1 - \beta n_x}{\sqrt{1 - \beta^2}},\tag{6.87}$$

mit

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}.\tag{6.88}$$



Der Zusammenhang  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$  folgt dabei direkt aus  $k_\mu k^\mu = 0$ , siehe auch Gleichung (6.41). Es gilt also

$$k'_x = \frac{k_x - \beta \frac{\omega}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.89)$$

### 6.7.3 Der longitudinale Doppler-Effekt

Sei

$$\mathbf{k} = \pm k \cdot \mathbf{e}_x, \quad \text{d.h.} \quad n_x = \pm 1. \quad (6.90)$$

Dann gilt

$$\omega' = \omega \frac{1 \mp \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \omega \frac{1 \mp \beta}{\sqrt{1 - \beta} \sqrt{1 + \beta}} = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}, \quad (6.91a)$$

und

$$\pm k' = \frac{\pm k - \beta \omega/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{bzw.} \quad k' = k \frac{1 \mp \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = k \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} = \frac{\omega'}{c}. \quad (6.91b)$$

Daraus folgt für die Frequenzverschiebung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}} - 1. \quad (6.92)$$

Für die Wellenlängenverschiebung ergibt sich wegen

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (6.93)$$

dann

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} - 1. \quad (6.94)$$

Für die nichtrelativistische Näherung für  $v \ll c$ ,  $\beta \ll 1$  folgt:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \left( 1 \mp \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \mp \dots \right) - 1 \approx \mp \beta + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (6.95a)$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \left( 1 \pm \beta + \frac{1}{2}\beta^2 \pm \dots \right) - 1 \approx \pm \beta + \mathcal{O}(\beta^2). \quad (6.95b)$$

In der Kosmologie heißt

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \quad (6.96)$$

ROTVERSCHIEBUNGSPARAMETER.

### 6.7.4 Der transversale Doppler-Effekt

Sei  $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$ , d.h.  $n_x = 0$ . Dann gilt

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega \left( 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4) \right). \quad (6.97)$$

Wir nehmen an es gelte

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_z. \quad (6.98)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} k'_x &= -\frac{\beta k}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ k'_y &= k_y = 0, \\ k'_z &= k_z = k. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Für einen bewegten Beobachter erscheint die Wellenfront gekippt um den Winkel  $\alpha$ , gegeben durch:

$$\tan(\alpha) = \frac{k'_x}{k'_z} = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.100)$$

Diese Erscheinung heißt ABERRATION. Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt

$$\tan(\alpha) \simeq -\beta = -\frac{v}{c}. \quad (6.101)$$



# Literaturverzeichnis

- [1] T. Müller, A. King und D. Adis. A trip to the end of the universe and the twin “paradox“. *Am. J. Phys.* 76 (2008).
- [2] H. Ruder und M. Ruder. *Die Spezielle Relativitätstheorie*. Vieweg-Studium (1993).
- [3] W. Rindler. *Relativity - Special, General and Cosmology*. Oxford University Press, zweite Auflage (2006).



# Index

- Aberration, 61
- d'Alembert-Operator, 48
- Eichfreiheit, 45
- Eichfunktion, 45
- Eichtransformation, 45
- Eigenzeit, 28
- Einsteinsche Summenkonvention, 19
- Energie-Impuls-Tensor, 55
- Energie-Impuls-Vektor, 37
- Feldstärketensor
  - dualer, 53
- Galilei-Transformation, 1
- Impulsdichte, 57
- Kontinuitätsgleichung, 48
- kontravarianter Tensor 1. Stufe
  - SRT, 23
- kovarianter Tensor 1. Stufe
  - SRT, 23
- Längenkontraktion, 9
- Levi-Civita-Tensor, 53
- Lichtartigkeit, 11
- Lorentz-Eichung, 46
- Massendefekt, 41
- Maxwellsches Spannungstensor, 56
- Minkowski-Kraft, 55
- Minkowski-Kraft-Dichte, 55
- Poynting-Vektor, 55
- Raumartigkeit, 11
- relativistische Energie, 37
- relativistischer Energiesatz, 38
- relativistischer Wellenvektor, 38
- Rotverschiebungsparameter, 61
- Strahlungsdruck, 57
- Vektor
  - kontravariant, 20
  - kovariant, 20
- Vierer-Potential, 46
- Viererddivergenz, 27
- Vierergeschwindigkeit, 29
- Vierergradient, 27
- Viererrotation, 27
- Viererstrom, 48
- Wellengleichung, 49
- Weltäther, 2
- Zeitartigkeit, 11
- Zeitdilatation, 9
- Zwillingsparadoxon, 9