Spezielle Relativitätstheorie

Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik

·) identische Experimente in unterschiedlichen Inertialsystemen $\Longrightarrow$ identische Resultate

Übergang von einem Inertialsystem $\Sigma(x,y,z)$ zu einem anderen Inertialsystem $\Sigma'(x',y',z')$

Beispiele: ·) Verschiebung entlang x-Achse: $x' = x - l,\ y' = y,\ z' = z$

·) Drehung um z-Achse:
$$x' = x\cdot\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z$$

·) gleichförmige Bewegung entlang x-Achse: (Galilei-Transformation)

$$x' = x - vt,\quad y' = y,\quad z' = z,\quad t' = t$$

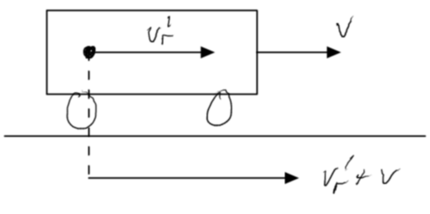
$\Longrightarrow$ Zeit wird nicht transformiert (auch: absolute Zeit)

·) für ein kräftefreies Teilchen gilt nach 1. Newtonschen Axiom $\ddot{\vec{r}} = 0$

$\Longrightarrow \ddot{\vec{r}}' = 0$ (da zum Beispiel l, α, v Konstanten sind)

Bemerkung: ·) zugrunde liegende euklidische Geometrie wird in kartesischen Koordinaten durch das „Linienelement" $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ charakterisiert
·) Form von dS^2 ändert sich nicht durch Drehung, Verschiebung

Addition von Geschwindigkeiten: $\dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - v \qquad v_r' := \dfrac{dx'}{dt'} \qquad v_r = \dfrac{dx}{dt}$



$\Longrightarrow \boxed{v_r = v_r' + v}$ (*)

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

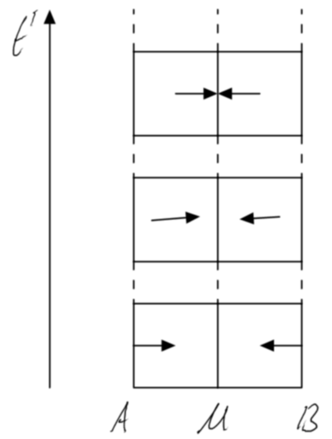
Frage: Gilt Relativitätsprinzip auch für nicht-mechanische Erscheinungen? (z.B. E-dynamik)

experimenteller Befund: Vakuumlichtgeschwindigkeit $c := c_0 = 299\,792\,458\ \mathrm{ms^{-1}}$ in allen Inertialsystemen konstant und noch dazu unabhängig von Geschwindigkeit der jeweiligen Lichtquelle

$\Longrightarrow$ Widerspruch mit (*) ↯ $\Longrightarrow$ Galilei-Transformation kann nicht richtig sein
$\Longrightarrow$ klassische Mechanik ist falsch (oder: nur näherungsweise gültig für $v \ll c$)
$\Longrightarrow$ neue Theorie: spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Bemerkung: Maxwellgleichungen sind nicht Galilei-invariant, sondern Lorentz-invariant.

Relativität der Gleichzeitigkeit



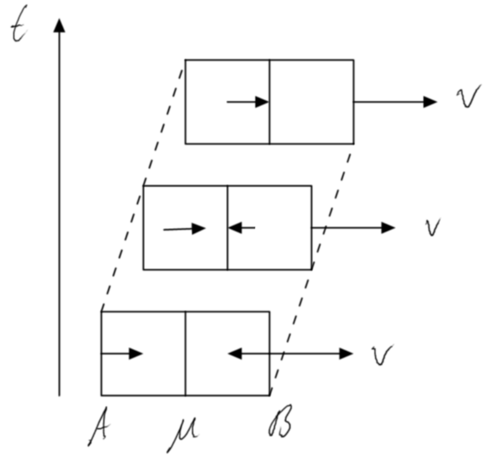
Beurteilung in Σ':

·) sende Lichtsignal von A und B in Richtung M (Mitte)

·) beide Signale kommen gleichzeitig bei M an

$\Longrightarrow$ beide Signale wurden gleichzeitig ausgesendet

Beurteilung in Σ: $(v < c)$



·) damit Signale gleichzeitig bei M ankommen, muss Signal von A eher abgesendet werden

$\Longrightarrow$ Gleichzeitigkeit an unterschiedlichen Orten hängt vom Bezugssystem ab

$\Longrightarrow$ Widerspruch für $t' = t$ ↯

$\Longrightarrow$ Konzept der absoluten Zeit muss aufgegeben werden

$\Longrightarrow$ Raum u Zeit $\longrightarrow$ Raumzeit

Der Minkowski-Raum / Raumzeit der SRT

Ereignis: charakterisiert durch Ort und Zeitpunkt (Punkt in der Raumzeit)

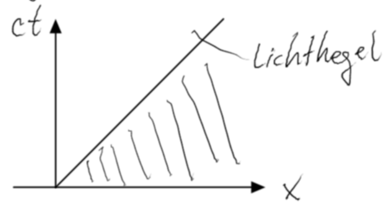
Koordinaten im Inertialsystem Σ: x, y, z, ct

·) t... Zeit, welche eine in Σ ruhende Uhr anzeigt ($x = const$, usw.)
Synchonisation von Uhren: synchronieren von zwei Uhren durch gleichzeitiges Ankommen zweier ausgesendeter Lichtsignale in Mitte der Verbindungslinie.

·) ein Teilchen beschreibt „Weltlinie" in Raumzeit

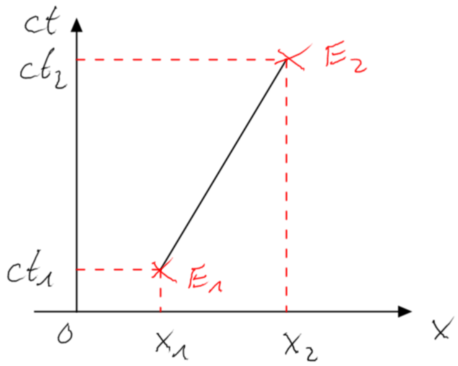
·) 1. Axiom gilt in SRT unverändert

Anstieg der Weltlinie: $\frac{d(ct)}{dx} = c\frac{dt}{dx} = \frac{c}{v_x}$ $\Longrightarrow$ für Licht $= 1$



·) Betrachtung von 2 Ereignissen (Aussenden und Empfang eines Lichtsignals) von unterschiedlichen Inertialsystemen Σ, Σ'

Ereignis i: $\Sigma(x_i, y_i, z_i, ct_i)$, $\Sigma'(x_i', y_i', z_i', ct_i')$



Σ: ·) Lichtsignal legt Strecke $c(t_2-t_1)$ zurück

$$c(t_2-t_1) = \left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \| E_2 - E_1 \|^2 = 0$$

Σ': analog zu Σ $\left(\| E_2' - E_1' \|^2 = 0 \right)$

Definition: (Abstand zweier Ereignisse – die indefinite Metrik)

Seien E_1, E_2 zwei Ereignisse. Dann $d: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$d(E_2, E_1) := \| E_2 - E_1 \| := \left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 - c^2(t_2-t_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\Longrightarrow$ verschwindet Abstand zweier Ereignisse in einem Inertialsystem, so auch in allen anderen

$\Longrightarrow$ Linienelement: $\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2}$

Bemerkung: ·) Minkowski-Raum ist ein 4-dimensionaler pseudoeuklidischer Raum

es gilt: $\boxed{ds = 0 \text{ in } \Sigma \iff ds' = 0 \text{ in } \Sigma'}$

$\Longrightarrow$ $ds^2 = a \, ds'^2$ (siehe Übung)

Raum ist homogen und isotrop $\Longrightarrow$ $a = 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{ds^2 = ds'^2}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{s_{12} = s_{12}'}$

$\Longrightarrow$ Abstand zweier Ereignisse E_1, E_2 ist in allen Inertialsystemen gleich (also invariant)

Lichtkegel und raum- und zeitartige Abstände

Seien E_1, E_2 nicht identische Ereignisse in Σ.

Frage: Gibt es ein System Σ', indem Ereignisse am selben Raumpunkt stattfinden?

Notation: $\| E_1 - E_2 \|_t := t_{12} := |t_1 - t_2|$ (zeitlicher Abstand)

$\| E_1 - E_2 \|_S^2 := S_{12}^2 := (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$ (räumlicher Abst.)

$$\Longrightarrow \quad S_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = \| E_1 - E_2 \|_S^2 - c^2 \| E_1 - E_2 \|_t^2 = \| E_1 - E_2 \|^2 = s_{12}^2$$

$\Rightarrow \quad s'_{12} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s_{12}'^{\,2} = -c^2 t_{12}'^{\,2} < 0$ (da nicht identisch)

$\Rightarrow \quad s_{12}'^{\,2} < 0$ (Abstand in Σ' ist rein imaginär)

o.E. wähle $\mathrm{Im}\, s'_{12} > 0$ immer (nur Quadrat wichtig)

<u>Notation</u>: s_{12} zeitartig $:\Longleftrightarrow$ s_{12} ist rein imaginär

$\Rightarrow$ ist $\| E_1 - E_2 \|$ zeitartig, so gibt es System Σ', sodass $\| E_1' - E_2' \|_s = 0$
$\Rightarrow$ in Σ' vergeht Zeit $t'_{12} = -i s_{12} c^{-1}$

Frage: Gibt es System Σ', sodass $\| E_1' - E_2' \|_t = 0$?

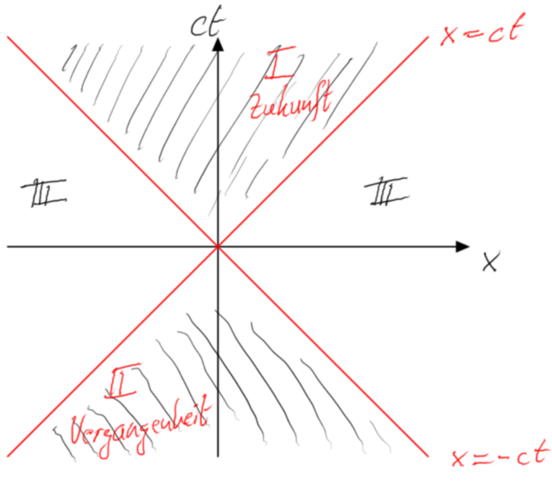
$t'_{12} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s_{12}'^{\,2} = S_{12}'^{\,2} > 0$ (nicht identisch) $\Rightarrow s'_{12} \in \mathbb{R}$

<u>Notation</u>: s_{12} raumartig $:\Longleftrightarrow$ $s_{12} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ ist $\| E_1 - E_2 \|$ raumartig, so existiert Σ' mit $\| E_1 - E_2 \|_t = 0$
$\Rightarrow$ s_{12} besitzt Bedeutung des „normalen" Abstandes

<u>Notation</u>: $s_{12} = 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad s_{12}$ lichtartig

Sei E_0 ein beliebiges Ereignis. Wähle E_0 als Ursprung des Raumes.



Bereich I: $x^2 - c^2 t^2 < 0$, $t > 0$

Bereich II: $x^2 - c^2 t^2 < 0$, $t < 0$

Bereich III: $x^2 - c^2 t^2 > 0$

$\Rightarrow$ $\| E_0 - E \|$ zeitartig für alle $E \in I \cup II$
($E \in I$ findet später statt als $E' \in II$)

Bemerkung: ·) Aussagen sind unabhängig vom Inertialsystem, da Abstand zeitartig
(Wechsel des Inertialsystems ändert zeitliche Reihenfolge nicht)
$\Rightarrow$ absolute Zukunft bzw. Vergangenheit

$\Rightarrow$ $\| E_0 - E \|$ raumartig für alle $E \in III$ $\Rightarrow$ absolut entfernt
(zeitliche Ordnung ist nicht sinnvoll definierbar für III)

Allgemein: (Lichtkegel) $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0}$

·) zwei Ereignisse mit $\| E_1 - E_2 \|$ raumartig, können nicht kausal zusammenhängen

$\Rightarrow$ keine Bewegung oder Signalübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit
$\Rightarrow$ Ereignis E_0 kann aus dem Vergangenheitslichtkegel beeinflusst werden und selbst Ereignisse im Zukunftslichtkegel beeinflussen

$\Longrightarrow$ Weltlinie eines Teilchens (mit Ruhemasse) liegt immer innerhalb des Lichtkegels (auch zeitartige Weltlinie)

Eigenzeit

·) betrachte Uhr, welche sich beliebig in einem Inertialsystem Σ bewegt mit: $x(t), y(t), z(t)$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v} = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

·) in einem infinitesimalen Zeitintervall $[t, t+dt]$ kann man Bewegung als gleichförmig geradlinig auffassen

$\Longrightarrow$ betrachte momentan mitbewegtes Inertialsystem Σ'

$\Longrightarrow$ $dx' = dy' = dz' = 0$ $\Longrightarrow$ in Σ' vergeht Zeitintervall dt' mit

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 = -c^2 dt'^2$$

$\Longrightarrow$ Zeitdifferenz dt' wird von Uhr angezeigt

es gilt: $\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2 dt'^2$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Notation: ·) Bezeichnung der Eigenzeit der Uhr mit τ (also $dt' =: d\tau$)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{d\tau = dt\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{sowie} \quad \boxed{ds^2 = -c^2 d\tau^2}$$

(auch Definition der Eigenzeit mit ds entlang Weltlinie)

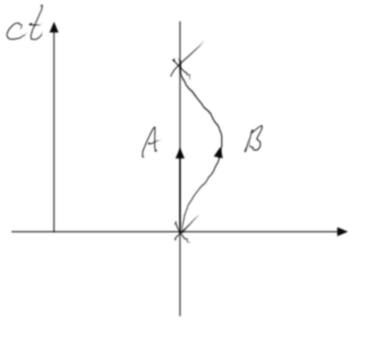
$\Longrightarrow$ entlang einer zeitartigen Weltlinie gilt: $\quad ds = ic\, d\tau$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2(t)}{c}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda(t)}$$

$\Longrightarrow$ Eigenzeit eines sich bewegenden Beobachters ist immer kleiner als entsprechendes Zeitintervall der im Inertialsystem ruhenden Uhren

$\Longrightarrow$ $\tau_2 - \tau_1 \leq t_2 - t_1$ (auch Zeitdilatation)

$\Longrightarrow$ („Zwillingsparadoxon") $A, B \ldots$ Weltlinien d. Zwillinge



$\Longrightarrow$ B altert weniger als A

Bemerkung: ·) Situation ist nicht symmetrisch! (A befindet sich in Inertialsystem, B aber nicht, da er zurückkehrt)

·) gibt es nur Zwillinge, treten Probleme mit Definition des Inertialsystems auf

Lorentz-Transformationen

Seien Σ, Σ' zwei Inertialsysteme.

$\Longrightarrow$ $ds^2 = ds'^2$ muss immer gelten für eine Transformation

raumzeitliche Translationen: (trivial) $x'_i = x_i - l_i$, $i = 1,2,3,4$

Drehungen: ·) räumliche Drehungen lassen $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ invariant

·) raumzeitliche „Drehung": es muss: $dx^2 - c^2dt^2 \stackrel{!}{=} dx'^2 - c^2dt'^2$

z.B. x-ct-Ebene:
mit $\varphi \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi \\
y' &= y \\
z' &= z \\
ct' &= -x\sinh\varphi + ct\cosh\varphi
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ jede Drehung im Minkowskiraum kann man in 6 Einzeldrehungen aufspalten

$\Longrightarrow$ für homogene Koordinatentransformation L: $\boxed{x'^i = L^i_k x^k \ , \ L^i_k = \text{const.}}$

mit $L^i_k x^k := \sum_{k=1}^4 L_{ik} x^k$ (Einsteinsche Summenkonvention)

Sei $\eta_{mn} := \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$. $\Longrightarrow$ $ds^2 = \eta_{mn}dx^m dx^n \stackrel{!}{=} \eta_{ik}dx'^i dx'^k$

es gilt: $dx'^i = L^i_m dx^m$ $\longrightarrow$ $\eta_{ik}dx'^i dx'^k = \eta_{ik}L^i_m dx^m L^k_n dx^n$

$\stackrel{!}{=} \eta_{mn}dx^m dx^n$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\eta_{ik}L^i_m L^k_n = \eta_{mn}}$ Bedingung der allgemeinen Lorentztransform.

Bemerkung: ·) Lorentz-Transformation bilden eine Gruppe

Vierergeschwindigkeit: $u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \Rightarrow u^i = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$ mit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

oder auch $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}$ (da $d\tau = dt\,[1-\frac{v^2}{c^2}]^{\frac{1}{2}}$)

Betragsquadrat: $\underline{u}\cdot\underline{u} = -c^2$

Bemerkung: $\underline{u}\cdot\underline{u} = \eta_{ik}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = \frac{\eta_{ik}\,dx^i dx^k}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -c^2$

.) $\underline{u}$ ist ein zeitartiger Vektor
.) Tangentenvektor der Weltlinie

Viererbeschleunigung: $\underline{a} := \frac{d\underline{u}}{d\tau}$ $\left(\text{oder: } a^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}\right)$

es gilt: $\eta_{ik}u^iu^k = -c^2$

$\Rightarrow \partial_\tau(\eta_{ik}u^iu^k) = 0 = \eta_{ik}a^iu^k + \eta_{ik}u^ia^k = 2\eta_{ik}u^ia^k$

$\Rightarrow \eta_{ik}a^iu^k = 0 \Rightarrow \boxed{\underline{a}\cdot\underline{u} = 0} \Rightarrow$ steht senkrecht auf $\underline{u}$

Dynamik: .) Verallgemeinerung des 2. Newtonsches Axiom, sodass Relativitätsprinzip (unter Lorentz-Transformation) erfüllt ist.

$\Rightarrow m_0\underline{a} = \underline{F}$ mit $\underline{F}$ als Viererkraft ($F^i =: (\vec{F}, F^4)$)
und m_0 als Ruhemasse

$$\Rightarrow \boxed{m_0\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = F^i}$$

Fall $F^i = 0$: $\Rightarrow \partial_\tau^2 x^i = 0 \Rightarrow u^i = \text{const} \Leftrightarrow \vec{v} = \text{const.}$

Bemerkung: .) diese „vier" Gleichungen sind nicht unabhängig, da

$\underline{a}\cdot\underline{u} = 0 \Rightarrow \underline{F}\cdot\underline{u} = 0$

Viererimpuls: $\underline{p} := m_0\underline{u}$, also auch $\frac{d\underline{p}}{d\tau} = \underline{F}$ mit $\underline{p}\cdot\underline{p} = -m_0^2c^2$

$\Rightarrow p^i = \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m_0c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) =: (\vec{p}, p^4)$

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{F}$ $\left(\frac{d\vec{p}}{dt} =: \vec{F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} =: \vec{K}\right)$ $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

aus $\underline{F} \cdot \underline{u} = 0$ folgt: $F^i = \left(\frac{\vec{K}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{K}\cdot\vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$

Beispiel: Sei ein geladenes Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld.

$\Longrightarrow \quad \vec{K} = q\,[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$ (hier auch: $F^i = q\,F^{ij} u_j$)

vierte Komponente der Bewegungsgleichung: $\frac{dp^4}{d\tau} = F^4$

$p^4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} =: \frac{E}{c}$ mit E als „Energie des Teilchens"

Fall $\vec{v} = 0$: $E = m_0 c^2$ „Ruheenergie"

Fall $\vec{v} \neq 0$: $E = m_0 c^2 + E_{kin}$ mit $E_{kin} := E - m_0 c^2$

$\Longrightarrow \quad p^i = \left(\vec{p}, \frac{E}{c} \right)$ Viererimpuls wird auch „Energie-Impuls-Vierervektor"

Beziehung zwischen Energie und Impuls:

$\underline{p} \cdot \underline{p} = -m_0^2 c^2 \Longrightarrow \vec{p}\cdot\vec{p} - \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 \Longrightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2}$

Bemerkung: •) Photonen ($|\vec{v}| = c$): $E = hf < \infty \Longrightarrow m_0 = 0$

$\Longrightarrow$ es gibt kein Ruhsystem des Photons

$\boxed{p^i = \hbar k^i}$ mit $k^i = \left(\vec{k}, \frac{\omega}{c} \right)$

Allgemeine Relativitätstheorie