$$dx' = \cosh(\psi)\,dx - \sinh(\psi)\,cdt$$
$$cdt' = -\sinh(\psi)\,dx + \cosh(\psi)\,cdt$$

$\Rightarrow dx'^2 - cdt'^2 = dx^2 - c^2dt^2$ (wegen $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$)

alle Abstände bleiben gleich, insbesondere gilt $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$

[(Abstand)^2 von $(x, 0, 0, ct)$ und $(0,0,0,0)$]

analog y-ct und z-ct Ebene

- Jede Drehung des vierd. Minkowski-Raums kann man in 6 Einzeldrehungen zerlegen (Reihenfolge wichtig!)
- Zusammenfassung dieser homogenen Koordinatentransformationen

$$\underline{x'^i = L^i_k x^k, \qquad L^i_k = \text{const.}}$$

Summenkonvention

$$ds^2 = \eta_{mn}\,dx^m dx^n = \eta_{ik}\,dx'^i dx'^k \qquad \eta_{mn} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$dx'^i = L^i_m dx^m, \quad dx'^k = L^k_n dx^n$$

$$\rightarrow \eta_{ik}\,dx'^i dx'^k = \eta_{ik} L^i_m L^k_n\, dx^m dx^n \overset{!}{=} \eta_{mn}\, dx^m dx^n$$

$$\Rightarrow \underline{\eta_{ik} L^i_m L^k_n = \eta_{mn}}$$

- Alle Transformationen L, die dieser Bedingung genügen heißen <u>Lorentz-Transformation</u>

Enthalten: räumliche Drehungen, (echte) raumzeitliche Drehungen und Spiegelung

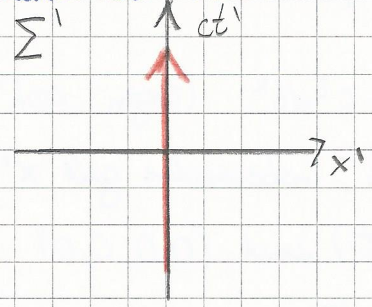
(bilden eine Gruppe)

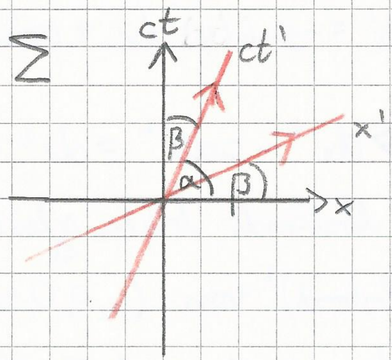
- Beispiel (*)

$$L^i_k = \begin{pmatrix} \cosh(\psi) & 0 & 0 & -\sinh(\psi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\psi) & 0 & 0 & \cosh(\psi) \end{pmatrix}$$

Betrachte in (*) die Weltlinie eines Teilchens, das in Σ' bei

$x' = y' = z' = 0$ ruht: ct'-Achse





Dieselbe Weltlinie in Σ: $y = z = 0$; $x = \tanh(\psi) \cdot ct$. D.h. das Teilchen bewegt sich in x-Richtung mit Geschwindigkeit $\underline{v = c \cdot \tanh(\psi)}$. $\left(\tan(\alpha) = \frac{1}{\tanh(\psi)} = \frac{c}{v}\right)$. Das gilt für jedes in Σ' ruhende Teilchen!

- Die Transformation (*) beschreibt also den Übergang von Σ zu einem dazu in x-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegtem System Σ'.
- Die echt raumzeitlichen Drehungen sind also die Verallgemeinerung der Galilei-Transformation.
- Für die x'-Achse: $ct' = 0 \longrightarrow ct = \tanh(\psi) \cdot x$

  $\Longrightarrow \tan(\beta) = \tanh(\psi) = \frac{1}{\tan(\alpha)} \Longrightarrow \beta = 90° - \alpha$
- Umformung: $\cosh(\psi) = \sqrt{1 - \tanh^2(\psi)}^{\,-1}$

  $\sinh(\psi) = \tan(\psi) \cosh(\psi)$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Man sieht: für $|v| << c$ gilt näherungsweise $x' = x - vt$, $t' = t$
- Bemerkungen:

  1) Transformationen nur für $|v| < c$ sinnvoll

  2) Umkehrtransformation: Umstellen

  $$\Longrightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

  also einfach $v \longrightarrow -v$

- „Lorentz-Kontraktion"

Betrachten einen in Σ' ruhenden Stab (parallel zur x'-Achse) der Länge $l_0 = l' = \Delta x' = x_2' - x_1'$

l_0 ... „Ruhelänge" oder „Eigenlänge"

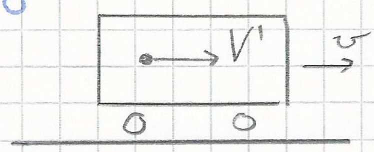
Länge desselben Stabes in Σ: $l = \Delta x = x_2 - x_1$

Müssen die Koordinaten x_2 und x_1 zu einem festen Zeitpunkt t bestimmen.

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Longrightarrow l = l_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Länge im Ruhesystem am größten!

- Da Abmessungen eines Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht verändert werden gilt für das Volumen eines Körpers ebenfalls $V = V_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (V_0: „Eigenvolumen")
- Wie ein bewegter Körper aussieht, ist eine andere Frage (Berücksichtigung der Lichtgeschwindigkeit)
- Addition von Geschwindigkeiten



$$V' = \frac{dx'}{dt'}$$

Aus der Umkehrtransformation:

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Longrightarrow V = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{V' + v}{1 + \frac{V'v}{c^2}}$$

- Für $|V'|, |v| \ll c$ folgt näherungsweise das klassische Gesetz $V = V' + v$
- Für $V' = c$ folgt $V = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c}} = c$!!
- Bemerkung: Andere Herleitung für $|V'| < c$

Betrachten noch ein System Σ'', in dem das Teilchen ruht, d.h., Σ'' bewegt sich relativ zu Σ' in x'-Richtung mit Geschwindigkeit $v_2 = V'$ (Σ' bewegt sich relativ zu Σ mit $v_1 = v$)

Hintereinanderausführung von zwei Drehungen in der x-ct-Ebene:

$\psi_{ges} = \psi_1 + \psi_2$; $v_1 = c \cdot \tanh(\psi_1)$, $v_2 = c \cdot \tanh(\psi_2)$

$$v_{ges} = c \cdot \tanh(\psi_{ges})$$

$$\tanh(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tanh(\psi_1) + \tanh(\psi_2)}{1 + \tanh(\psi_1)\tanh(\psi_2)}$$

$$\Longrightarrow v_{ges} = \frac{v_1 + v_2}{\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right)}$$

(Beweis für die Drehungen:

$$\begin{pmatrix} \cosh(\psi_1) & -\sinh(\psi_1) \\ -\sinh(\psi_1) & \cosh(\psi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\psi_2) & -\sinh(\psi_2) \\ -\sinh(\psi_2) & \cosh(\psi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1+\psi_2) & -\sinh(\psi_1+\psi_2) \\ -\sinh(\psi_1+\psi_2) & \cosh(\psi_1+\psi_2) \end{pmatrix})$$

4. Vierervektoren

- Ortsvektor im Minkowski Raum $\underline{r} = x\underline{e_x} + y\underline{e_y} + z\underline{e_z} + ct\,\underline{e_{ct}}$
  $(\underline{e_x} = \vec{e}_x, \underline{e_y} = \vec{e}_y, \underline{e_z} = \vec{e}_z)$ $= x^1\underline{e_1} + x^2\underline{e_2} + x^3\underline{e_3} + x^4\underline{e_4}$
  $= x^i \underline{e_i}$

  Auch $x^i = (x, y, z, ct) = (\vec{r}, ct)$
- Betragsquadrat $\underline{r} \cdot \underline{r} := x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = \vec{r}\cdot\vec{r} - c^2t^2$
  $= \eta_{ik}\, x^i x^k$

  = Quadrat des Abstandes zum Koordinatenursprung

  $\underline{e_i}\,\underline{e_k} = \eta_{ik}$
- Skalarprodukte der Basis-Vierervektoren $\underline{e_4}\,\underline{e_4} = -1$
- Lorentztransformation: $x'^i = L^i{}_k\, x^k$
- beliebiger Vierervektor $\underline{a} = a^i \underline{e_i}$
- Skalarprodukt zweier Vierervektoren

  $$\underline{a} \cdot \underline{b} = \eta_{ik}\, a^i b^k = \vec{a}\vec{b} - a^4 b^4$$

- Bemerkungen:

1) $ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i dx^k = \underline{dx}\,\underline{dx}$ $\underline{dx} = (d\vec{r}, c\,dt)$

2) Man schreibt auch: $\underline{a}\,\underline{b} = a_i b^i = a^i b_i$

mit $a_i := \eta_{ik}\, a^k$ $(a_i = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ mit $a_4 = -a^4)$

- raumartige Vektoren: $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$
- zeitartige Vektoren: $\underline{a} \cdot \underline{a} < 0$
- lichtartige Vektoren: $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0$
- Zwei Vierervektoren heißen senkrecht aufeinander stehend, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet
- und $\underline{a} \parallel \underline{b}$: $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ $(a^i = \lambda b^i)$
- Lorentztransformation: $a'^i = L^i_k a^k$

  Die Komponenten a^i eines Vektor $\underline{a}$ transformieren sich wie die Komponenten x^i des Ortsvektors im Minkowski-Raum

5. Relativistische Mechanik

(a) Kinematik

- Bahnkurve eines Teilchens: $x(t), y(t), z(t)$ = Weltlinie im Minkowskiraum
- Parameterdarstellung $x(\tau), y(\tau), z(\tau), ct(\tau)$

  also $x^i(\tau)$
- Wählen als Parameter die Eigenzeit τ: $ds^2 = -c^2 d\tau^2$

  $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (vgl. Kapitel 2)
- Die Eigenzeit ist invarianter Parameter!

$$\Rightarrow u^i = \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{„Vierergeschwindigkeit"}$$

ist ein Vierervektor (dx^i transformieren nach Lorentz-Trans)

$u^i = (\vec{u}, u^4)$ mit $\vec{u} = \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$, $u^4 = c\frac{dt}{d\tau}$

$$\Rightarrow u^i = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$