Stochastik I – Übung 01

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

a) $\Omega = \{ T \subset \{1, \dots, 49\} \mid \# T = 6 \} \subset \mathcal{P}(\{1, \dots, 49\})$

$$\Rightarrow \# \Omega = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = \underline{\underline{13'983'816}} = \binom{49}{6}$$

Ereignis: vorgegebenes Elementarereignis $w \in \Omega$

$$\Rightarrow A = \{ T \subset \{1, \dots, 49\} \mid \# T = 6, \ \#(T \cap w) = 4 \}$$

$$\Rightarrow \# A = \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = \underline{\underline{13'545}}$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. $0 =$ Obj. in Ordnung ; $1 =$ Ausschuss

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\} \quad \Rightarrow \quad \# \Omega = n+1$$

$$A = \{0, 1, \dots, 4\} \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \# A = 5$$

c) Seien $r, n \in \mathbb{N}$.

$$\Omega = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, r\}, \ \textstyle\sum_{i=1}^n a_i = r \}$$

$$\# \Omega = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

i) $A = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \Omega \mid a_1 = k \}$

$$\underbrace{\underbrace{0 \dots 0}_{k}\, 1}_{n+1} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-2 \text{ Einsen}}$$

$$n+r-1-(k+1)$$

$$\# A = \binom{n+r-k-2}{n-2}$$

ii) $A = \{ (a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \{0, 1, \dots, 8\}, \ a_1 + a_2 + a_3 = 8$, es gibt min. ein $i \in \{1,2,3\}$, sodass $a_i = 0 \}$

$$\# A = 24$$

d) $\Omega = (0,1)$

i) $A = [0{,}1 \ , \ 0{,}2)$

ii) $B = \{ x \in (0,1) \mid \lfloor 10^2 x \rfloor \bmod 10^1 = 5 \}$

iii) $C = [0{,}3^2 \ , \ 0{,}4^2) = [0{,}09 \ , \ 0{,}16)$

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ und damit Ereignisse. Sei weiterhin $\omega \in \Omega$ das Ergebnis eines Versuchs.

a) $\omega \notin A \cup B \cup C \quad (\Longleftrightarrow \omega \in \Omega \setminus (A \cup B \cup C))$

b) $\omega \in A \setminus (B \cup C) \cup B \setminus (A \cup C) \cup C \setminus (A \cup B)$

c) $\omega \in \Omega \setminus [(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)]$

d) $\omega \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

Aufgabe 3

Sei Ω eine beliebige Menge und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in Ω. Weiterhin gelte:

$$\limsup_{n \to \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \qquad \liminf_{n \to \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} A_j$$

a) Sei $a \in \liminf\limits_{n \to \infty} A_n$ beliebig.

$\Rightarrow$ es muss $k \in \mathbb{N}$ geben, sodass $a \in \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$
$\Rightarrow$ $a \in A_j$ für alle $j \geq k$ $\Rightarrow$ $a \in \bigcup_{j=l}^{\infty} A_j$ für alle $l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j = \limsup_{n \to \infty} A_n$
$\Rightarrow$ da a beliebig, muss dies für alle Elemente von $\liminf_{n \to \infty} A_n$ gelten
$\Rightarrow$ $\liminf_{n \to \infty} A_n \subset \limsup_{n \to \infty} A_n$

$\square$

b) $a \in \liminf\limits_{n \to \infty} A_n \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{N}$, sodass $a \in \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$.
$\Leftrightarrow$ a ist nur in endlich vielen A_j nicht enthalten. und damit auch in unendlichen vielen enthalten.

$a \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n \Leftrightarrow a \in \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow$ a ist also in unendlich vielen A_j enthalten, kann aber auch in unendlich vielen A_j nicht enthalten sein.

c) $$\Omega \setminus \limsup_{n \to \infty} A_n = \Omega \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \right)$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \Omega \setminus A_j = \liminf_{n \to \infty} \Omega \setminus A_n$$

$$\Omega \setminus \liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega \setminus \left(\bigcap_{j=n}^{\infty} A_j \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \Omega \setminus A_n$$
$$= \limsup_{n \to \infty} \Omega \setminus A_n$$