Stochastik I – Übung 05

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ der messbare Raum ausgestattet mit Borel-σ-Algebra. Seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Zufallsgrößen mit gleicher Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$.

Weiterhin sei definiert: $X_{max} := \max_{1 \leq j \leq n} X_j$, $X_{min} := \min_{1 \leq j \leq n} X_j$

Dann gilt: $F_{X_{max}}(x) \overset{(Def)}{=} P(X_{max} \leq x) \overset{(Def)}{=} P(\{y \in \Omega \mid \max_{1 \leq j \leq n} X_j(y) \leq x\})$

$$\begin{aligned}
\text{(Anwendung max)} &= P(\{y \in \Omega \mid X_j(y) \leq x \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}\}) \\
&= P(\cap_{j=1}^n \{y \in \Omega \mid X_j(y) \leq x\}) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\
\text{(Unabhängigkeit } X_j) &= \prod_{j=1}^n P(X_j \leq x) \\
\text{(Def)} &= \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x) \\
\text{(identisch verteilt)} &= (F(x))^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_{X_{max}} = F^n}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
F_{min}(x) &\overset{(Def)}{=} P(\{y \in \Omega \mid \min_{1 \leq j \leq n} X_j(y) \leq x\}) \\
\text{(Anwendung min)} &= P(\{y \in \Omega \mid X_j(y) \leq x \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\}\}) \\
\text{(Mengenlehre)} &= P(\Omega \setminus \{y \in \Omega \mid X_j(x) > x \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}\}) \\
\text{(Rechenregeln W.-Maß)} &= 1 - P(\cap_{j=1}^n X_j > x) \\
\text{(Unabhängigkeit } X_j) &= 1 - \prod_{j=1}^n P(X_j > x) \\
\text{(Rechenregeln W.-Maß)} &= 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P(X_j \leq x)] \\
\text{(Def)} &= 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F_{X_j}(x)] \\
\text{(identisch verteilt)} &= 1 - [1 - F(x)]^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_{X_{min}} = 1 - [1-F]^n}
\end{aligned}$$

Annahme: $X_j \sim U(0,1)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\Longrightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ x & : x \in (0,1) \\ 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{X_{max}}(x) = F^n(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ x^n & : x \in (0,1) \\ 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{X_{min}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ (1-x)^n & : x \in (0,1) \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{X_{min}}(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & : x \in (0,1) \\ 1 & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{f_{X_{max}}(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ n x^{n-1} & : x \in (0,1) \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}}} \quad , \quad \underline{\underline{f_{X_{min}}(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ n(1-x)^{n-1} & : x \in (0,1) \\ 0 & : x \geq 0 \end{cases}}}$$

Annahme: $f := f_{X_j} = \lambda e^{-\lambda \bullet} \mathbb{1}_{[0,\infty)}$, $\lambda > 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$

Dann gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$: $F(x) := F_{X_j}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$

Fall $x < 0$: $F(x) = 0$

Fall $x \geq 0$: $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y}\, dy = -e^{-\lambda y}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

$$\Longrightarrow \quad F = (1 - e^{-\lambda \bullet})\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{X_{min}} = 1 - [1 - F]^n$$

Fall $x < 0$: $F_{X_{min}}(x) = 1 - [1 - 0]^n = 0$

Fall $x \geq 0$: $F_{X_{min}}(x) = 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda x})]^n = 1 - e^{-n\lambda x}$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{F_{X_{min}} = [1 - \exp(-n\lambda \bullet)] \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}}}$$

(VD eind.) $\Longrightarrow$ X_{min} ist ebenfalls exponentiell verteilt mit $\lambda' = n\lambda$