Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker
SS 2015
W. Nagel
Übungsaufgaben, **6.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 1.7.15 abzugeben.**
   (a) Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Dichte der Differenz zweier stetiger Zufallsgrößen aus deren Dichten.
   (b) Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Dichte des Produkts zweier stetiger Zufallsgrößen aus deren Dichten.
   (c) Leiten Sie eine Formel her zur Berechnung der Dichte des Quotienten zweier stetiger Zufallsgrößen aus deren Dichten.

2. (a) Bestimmen Sie die Verteilung der Summe zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen.
   (b) Berechnen Sie die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsgrößen.

3. Eine Zufallsgröße X heißt gammaverteilt mit den Parametern (a, b), $a > 0,\ b > 0$, wenn sie folgende Verteilungsdichte besitzt:

$$f_X(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx} \, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Es seien $X_1,\ X_2$ unabhängige Zufallsgrößen, die gammaverteilt sind mit den Parametern (a_1, b) bzw. (a_2, b). Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$.

4. Die Zufallsgrößen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch standardnormalverteilt.
   (a) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgröße X_1^2. Zu welcher Familie von Verteilungen gehört die Verteilung von X_1^2?
   (b) Bestimmen Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgröße $\sum_{i=1}^n X_i^2$. (*Das Verteilungsgesetz dieser Summe von Quadraten heißt Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden.*)

5. Es sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger und identisch exponentialverteilter Zufallsgrößen. Der Parameter der Exponentialverteilung sei λ.
   a) Geben Sie eine Verteilungsdichte der Zufallsgrößen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, ...,$ an. (*Das Verteilungsgesetz dieser Summe heißt Erlang-Verteilung n-ter Stufe mit dem Parameter λ.*)
   b) Es seien $b \in (0, \infty)$ und $Z = \max\{n \in \mathbb{N} : S_n < b\}$. Dabei wird $Z = 0$ gesetzt, falls $X_1 \geq b$. Bestimmen Sie das Verteilungsgesetz der Zufallsgröße Z.