Stochastik II – Übung 01

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $x_1, \dots, x_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine konkrete Stichprobe einer 0-1-verteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$.

a) $X_1, \dots, X_n$ bildet zugehörige mathematische Stichprobe

$\Rightarrow$ $X_1, \dots, X_n$ beschreiben n-gliedriges Bernoullischema

$\Longrightarrow$ $\mathbb{E}X_i = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $i \leq n$

$\hat{p}_1: \quad \mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = \frac{np}{n} = \underline{\underline{p}}$

$\hat{p}_2: \quad \mathbb{E}X_1 = \underline{\underline{p}}$

$$\hat{p}_3: \quad \mathbb{E}X_1^4 = \mathbb{E}(\min\{X_1, \dots, X_n\}) = P\left(\min_{1\leq i\leq n} X_i = 1\right)$$

$$= P(X_1 = 1, \dots, X_n = 1) \overset{(\text{unab}).}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i = 1)$$

$$= \underline{\underline{p^n}}$$

$\hat{p}_4: \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_n) = \underline{\underline{p}}$

b) es gilt nach bekannten Sätzen: $\operatorname{var} X_i = p(1-p)$ für $i \in \mathbb{N}, i \leq n$

$$\hat{p}_1: \quad \operatorname{var}\overline{X} = \operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i$$

$$= \frac{1}{n^2} n \cdot p \cdot (1-p) = \underline{\underline{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}}$$

$\hat{p}_2: \quad \operatorname{var} X_1 = \underline{\underline{p\cdot(1-p)}}$

$\hat{p}_4: \quad \operatorname{var}\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_n)\right] = \frac{1}{4}\cdot 2p(1-p) = \underline{\underline{\frac{p(1-p)}{2}}}$

$\Longrightarrow$ (für $n > 2$) $\operatorname{var}\hat{p}_1(\dots) < \operatorname{var}\hat{p}_4(\dots) < \operatorname{var}\hat{p}_2(\dots)$

c) $\tilde{p}_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - p)^2 \quad \Rightarrow \mathbb{E}\tilde{p}_1(\dots) = p(1-p)$

$$\tilde{p}_2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^n X_i X_j \quad \Longrightarrow \mathbb{E}\tilde{p}_2(\dots) = p^2$$