Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker

W. Nagel

WS 2015

Übungsaufgaben, **1.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 29.10.15 abzugeben.**
   Gegeben sei eine konkrete Stichprobe $x_1, ..., x_n$ aus einer 0 - 1 -verteilten Grundgesamtheit (d.h. die Stichprobenwerte sind entweder 0 oder 1) mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p für den Wert 1 ('Erfolgswahrscheinlichkeit'); vgl. Vorlesung, Beispiel (1.1) für statistische Räume.

   a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der folgenden Statistiken (Punktschätzungen):
   $\hat{p}_1(X_1, ..., X_n) = \bar{X}$, (arithmetisches Mittel)
   $\hat{p}_2(X_1, ..., X_n) = X_1$,
   $\hat{p}_3(X_1, ..., X_n) = X_1^*$, (Minimum der $X_1, \ldots, X_n$)
   $\hat{p}_4(X_1, ..., X_n) = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$.

   b) Vergleichen Sie die Varianzen der Schätzer aus a), deren Erwartungswert p ist.

   c) Geben Sie je einen Schätzer (d.h. eine Stichprobenfunktion) für $p(1-p)$ und für p^2 an, dessen Erwartungswert (für die mathematische Stichprobe) gleich $p(1-p)$ bzw. p^2 ist.

2. Gegeben sei die konkrete Stichprobe: 5, 7, 3, 12, 6, 8, 6, 4, 7, 10.
   Es wird angenommen, dass sie aus einer Poisson-verteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ stammt. Bestimmen Sie alle Werte von λ, für welche die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Stichprobe maximal wird.

3. Simulieren Sie Folgen von (Pseudo-)Zufallszahlen mit Hilfe eines Computers und bestimmen Sie dazu die Folgen der Stichprobenmittel und der korrigierten empirischen Varianzen der ersten n Werte für $n = 2, 3, ...$

   Führen Sie dies für unterschiedliche Verteilungen durch, z.B. für die Gleichverteilung auf $[0, 1]$, die Standard-Normalverteilung, <u>die Standard-Cauchy-Verteilung</u>, eine Poisson-Verteilung.