Stochastik I – Übung 02

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) z.z.: $P(\emptyset) = 0$ (folgt eigentlich aus Axiomen für Maße, da P Maß ist)

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \quad \text{und alle } A_n,\, n\in\mathbb{N} \text{ sind paarw. disjunkt}$$

$$\Longrightarrow P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{(\sigma\text{-add})}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$\overset{(0\leq P(\emptyset)\leq 1)}{\Longrightarrow} 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) \leq 1 \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

b) z.z.: für alle $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$ mit $A_j \cap A_k = \emptyset$ für alle $j,k\in\mathbb{N}$ mit $j,k \leq n$ und $j \neq k$ gilt: $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

Seien $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{A}$, $n\in\mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen. Sei nun definiert

$$B_j = A_j \quad \text{für alle } j\in\mathbb{N},\ j\leq n$$
$$B_j = \emptyset \quad \text{für alle } j\in\mathbb{N},\ j> n$$

$\Longrightarrow$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$

und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right)}_{=\emptyset} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) \overset{(\sigma\text{-add})}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(B_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P(B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + \underbrace{\sum_{j=n+1}^{\infty} P(\emptyset)}_{=0} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P(A_j)
\end{aligned}$$

c) z.z.: $P(\Omega\setminus A) = 1 - P(A)$ für alle $A\in\mathcal{A}$

es gilt $A \subset \Omega$ für alle $A \in \mathcal{A}$ $\overset{(f)}{\Longrightarrow}$ $P(\Omega\setminus A) = P(\Omega) - P(A)$ für $A\in\mathcal{A}$

$\overset{(P(\Omega)=1)}{\Longrightarrow}$ $P(\Omega\setminus A) = 1 - P(A)$ für alle $A\in\mathcal{A}$

(f wird unten bewiesen)

d) z: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$

Seien $A, B \in \mathcal{A}$ beliebig. Seien nun $A_1 := A\setminus B$, $A_2 := B\setminus A$, $A_3 := A\cap B$.
Dann sind A_1, A_2, A_3 paarweise disjunkt und liegen in $\mathcal{A}$.

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A_1\cup A_2\cup A_3) \overset{(b)}{=} P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= P(A\setminus B) + P(B\setminus A) + P(A\cap B)$$
$$= P(A\setminus(A\cap B)) + P(B\setminus(A\cap B)) + P(A\cap B)$$
$$(A\cap B\subset A,\text{ wende f an}) = (P(A) - P(A\cap B)) + (P(B) - P(A\cap B)) + P(A\cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

e) z: $P(A) \leq P(B)$ für alle $A, B\in\mathcal{A}$ mit $A\subset B$

Seien $A, B\in\mathcal{A}$ mit $A\subset B$. Definiere $A_1 := A$, $A_2 := B\setminus A$.
$$\Rightarrow A_1\cap A_2 = \emptyset \text{ und } A_1, A_2\in\mathcal{A} \text{ und } A_1\cup A_2 = A\cup(B\setminus A) \overset{(A\subset B)}{=} B$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A_1\cup A_2) \overset{(b)}{=} P(A_1) + P(A_2) = P(A) + \underbrace{P(B\setminus A)}_{\geq 0} \quad (*)$$

$$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

f) z: $P(B\setminus A) = P(B) - P(A)$ für alle $A, B\in\mathcal{A}$ mit $A\subset B$

Seien $A, B\in\mathcal{A}$ mit $A\subset B$. Definiere A_1, A_2, A_3 wie in e). Dann gilt nach $(*)$:
$$P(B) = P(A) + P(B\setminus A)$$
$$\Rightarrow P(B\setminus A) = P(B) - P(A)$$

$\square$

b) Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ die Verteilungsfunktion von P und seien $a, b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Dann gilt:

$$F(x) = P((-\infty, x]) \text{ für alle } x\in\mathbb{R} \quad (\text{Definition})$$

$$\Rightarrow P((a,b]) = P((-\infty,b]\setminus(-\infty,a]) \overset{(f)}{=} P((-\infty,b]) - P((-\infty,a])$$
$$= F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow P((a,b)) = \lim_{n\to\infty} P((-\infty, b-\tfrac{1}{n}]\setminus(-\infty,a])$$
$$\overset{(f)}{=} \lim_{n\to\infty}\left[F(b-\tfrac{1}{n}) - F(a)\right]$$
$$\left(\begin{array}{l}F \text{ ist allg. nicht}\\ \text{stetig}\end{array}\right) = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) \quad \left(\begin{array}{l}F \text{ ist monoton und}\\ \text{beschränkt}\end{array}\right)$$
$$(= F(b) - F(a) \text{ wenn } F \text{ stetig})$$

$$\Rightarrow \quad P([a,b]) = \lim_{n\to\infty} P\left((-\infty, b] \setminus (-\infty, a-\tfrac{1}{n}]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(F(b) - F(a-\tfrac{1}{n})\right)$$

(F ist monoton und beschränkt) $$= F(b) - \lim_{x\to a^-} F(x) \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \quad P([a,b)) = \lim_{n\to\infty} P\left((-\infty, b-\tfrac{1}{n}] \setminus (-\infty, a-\tfrac{1}{n}]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(F(b-\tfrac{1}{n}) - F(a-\tfrac{1}{n})\right)$$

(F ist monoton und beschränkt) $$= \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^-} F(x)$$

$$\Rightarrow \quad P(\{a\}) = P([a,a]) \overset{(**)}{=} F(a) - \lim_{x\to a^-} F(x)$$