Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker
SS 2015
W. Nagel
Übungsaufgaben, **3.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 20.5.15 abzugeben.** Es seien $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ ein W.-Raum und $A, B \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie:
   a) Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch A^c und B unabhängig.
   b) Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch A^c und B^c unabhängig.
   c) Wenn $P(A) = P(B) = 1$, dann ist auch $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 1$.
   d) Wenn $P(A) = P(B) = 0$, dann ist auch $P(A \cap B) = P(A \cup B) = 0$.
   e) Wenn $P(A \cap B) = 1$, dann ist $P(A) = P(B) = 1$.
   f) Wenn $P(A \cup B) = 0$, dann ist $P(A) = P(B) = 0$.

2. Gegeben seien nichtleere Mengen Ω, Ω' und eine Abbildung $g : \Omega \to \Omega'$. Dazu wird die Urbildfunktion $g^{-1} : \wp(\Omega') \to \wp(\Omega)$ definiert durch $g^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : g(\omega) \in A\}$ für alle $A \subseteq \Omega'$.

   Für eine Indexmenge I seien $A_i \subseteq \Omega'$, $i \in I$.

   Zeigen Sie, dass für die Urbilder gilt:

$$g^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} g^{-1}(A_i).$$

$$g^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} g^{-1}(A_i).$$

$$g^{-1}(A^c) = \left(g^{-1}(A)\right)^c.$$

   Prüfen Sie, welche dieser Eigenschaften in analoger Weise auch für die Bildfunktion $\tilde{g} : \wp(\Omega) \to \wp(\Omega')$ mit $\tilde{g}(C) = \{g(\omega) \in \Omega' : \omega \in C\}$ (für alle $C \subseteq \Omega$) gelten.

3. (Huyghens, 1657)
   Die Spieler A und B würfeln abwechselnd mit einem Paar von (gleichmäßigen) Würfeln. A gewinnt, wenn seine Gesamtaugenzahl bei einem Wurf genau 6 ist, bevor B bei einem Wurf die Augenzahl 7 würfelt.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A gewinnt, wenn er beginnt? Formalisieren Sie die Aufgabenstellung und Ihre Lösung!

4. *Zusatzaufgabe:* [Poisson]
   Eine Urne enthalte s schwarze und w weiße Kugeln. Es werden zunächst n Kugeln entnommen (ohne Zurücklegen) und anschließend zusätzlich m Kugeln (ebenfalls ohne Zurücklegen). Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den m Kugeln k schwarze Kugeln sind, nicht ändert, wenn die m Kugeln gleich zu Beginn (d.h. vor den n Kugeln) gezogen werden.