Stochastik I – Übung 03

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A, B \in \mathcal{A}$.

a) Seien A, B unabhängig. $\Longrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} P((\Omega \setminus A) \cap B) &= P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) \\ (\text{Voraussetzung}) &= P(B) - P(B) P(A) = P(B) \cdot (1 - P(A)) \\ &= P(B) \cdot P(\Omega \setminus A) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \Omega \setminus A = A^c, B$ sind unabhängig

b) Seien A, B unabhängig. $\overset{(a)}{\Longrightarrow} A^c, B$ sind unabhängig

Sei nun $X = A^c$. Dann sind X, B unabhängig $\overset{(a)}{\Longrightarrow} X, B^c$ sind unabhängig

$\Longrightarrow A^c = X, B^c$ sind unabhängig.

c) Seien $P(A) = P(B) = 1$. Es gilt $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

$(\text{Monotonie}) \Longrightarrow P(A) \leq P(A \cup B) \Longrightarrow 1 \leq P(A \cup B)$

$(P(A \cup B) \in [0,1]) \Longrightarrow P(A \cup B) = 1$

Weiterhin gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow 1 = 2 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 1$

d) Seien $P(A) = P(B) = 0$. Es gilt $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

$(\text{Monotonie}) \Longrightarrow P(A \cap B) \leq P(A) = 0 \Longrightarrow 0 \leq P(A \cap B) \leq 0$

$\Longrightarrow P(A \cap B) = 0$

Wieder gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Longrightarrow P(A \cup B) = 0 + 0 - 0 = 0$

e) Sei $P(A \cap B) = 1$. Es gilt $A \cap B \subset A, B$.

$(\text{Monotonie}) \Longrightarrow P(A \cap B) \leq P(A), P(B) \leq 1$

$\Longrightarrow P(A) = P(B) = 1$

f) Sei $P(A \cup B) = 0$. Es gilt $A, B \subset A \cup B$.

$(\text{Monotonie}) \Longrightarrow P(A), P(B) \leq P(A \cup B) = 0$

$\Longrightarrow P(A) = P(B) = 0$

$\square$