Stochastik II – Übung 02

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \{P_b^{\otimes n} \mid P_b \sim U(0,b), b \in (0,\infty)\})$ für $n \in \mathbb{N}$ ein statistischer Raum.

a) Sei $\overline{T}$ eine Schätzung mit:

$$\overline{T}(X_1,\dots,X_n) := \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{mit } X_i \sim U_{(0,b)} \text{ i.i.d}$$

Dann gilt:
$$\mathbb{E}\,\overline{T}(X_1,\dots,X_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{b}{2} = \frac{2nb}{2n} = b$$

$\Longrightarrow$ $\overline{T}$ ist erwartungstreu für Parameter b

b) Sei T^* eine Schätzung mit:

$$T^*(X_1,\dots,X_n) := \underbrace{\max\{X_1,\dots,X_n\}}_{=:X_{max}} + \underbrace{\min\{X_1,\dots,X_n\}}_{=:X_{min}} \quad \text{mit } X_i \sim U(0,b) \text{ i.i.d.}$$

Dann gilt:

$$F_{X_{max}} = F_X^n \quad \text{mit} \quad F_X(x) = \frac{x}{b} \mathbb{1}_{(0,b)}(x) + \mathbb{1}_{[b,\infty)}(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f_{X_{max}} = n F_X^{n-1} \cdot F_X' = n F_X^{n-1} \cdot f_X \quad \text{fast-überall}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_{max}) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X_{max}}(x)\, dx = \int_0^b \frac{n}{b^n} x^n\, dx = \frac{n}{n+1} b$$

$$F_{X_{min}} = 1 - (1-F_X)^n \Longrightarrow f_{X_{min}} = n(1-F_X)^{n-1} f_X \quad \text{fast überall}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_{min}) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X_{min}}(x)\, dx = \int_0^b x\, n \left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b}\, dx$$

$$\text{(part. Int.)} \overset{(*)}{=} \frac{n}{b}\left[-\frac{b}{n} x \left(1-\frac{x}{b}\right)^n \Big|_0^b - \int_0^b -\frac{b}{n}\left(1-\frac{x}{b}\right)^n dx \right]$$

$$(*) \quad \int \left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-1} dx = -\frac{b}{n}\left(1-\frac{x}{b}\right)^n$$

$$= \int_0^b \left(1-\frac{x}{b}\right)^n dx = -\frac{b}{n+1}\left(1-\frac{x}{b}\right)^{n+1}\Big|_0^b = \frac{b}{n+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\, T^*(X_1,\dots,X_n) = \mathbb{E} X_{max} + \mathbb{E} X_{min} = \frac{n}{n+1} b + \frac{1}{n+1} b = b$$

$\Longrightarrow$ T^* ist erwartungstreu für b

andere Idee: $\quad \widetilde{T}^*(X_1,\dots,X_n) := \frac{n+1}{n} \max\{X_1,\dots,X_n\}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\,\widetilde{T}^*(X_1,\dots,X_n) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} b = b \Longrightarrow \widetilde{T}^* \text{ ebenfalls erwartungstreu}$$

c) $\operatorname{var} \overline{T}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{b^2}{12} = \frac{b^2}{12n} = \frac{\operatorname{var} X_i}{n}$

$\operatorname{var} T^*(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{var} X_{max} + \operatorname{var} X_{min} + \operatorname{cov}(X_{max}, X_{min})$

$\mathbb{E}(X_{max}^2) = \int_0^b x^2 f_{X_{max}}(x)\, dx = \frac{n}{b^n} \int_0^b x^{n+1}\, dx = \frac{n}{n+2} b^2$

$\Rightarrow \operatorname{var} X_{max} = \mathbb{E}(X_{max}^2) - (\mathbb{E}X_{max})^2 = \frac{n}{n+2} b^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} b^2$

$= b^2 \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = b^2 \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

$\mathbb{E}(X_{min}^2) = \int_0^b x^2 f_{X_{min}}(x)\, dx = \frac{n}{b} \int_0^b x^2 \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{n-1} dx$

(part. Int) $= \frac{n}{b} \left[-x^2 \frac{b}{n} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^n \Big|_0^b + \int_0^b 2x \frac{b}{n} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^n dx \right]$

$= 2 \int_0^b x \left(1 - \frac{x}{b}\right)^n dx = \frac{2b^2}{n(n+1)}$

$\Rightarrow \operatorname{var} X_{min} = \frac{2b^2}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} b^2 = b^2 \frac{n+2}{n(n+1)^2}$

$\operatorname{cov}(X_{max}, X_{min})^2 \leq \operatorname{var} X_{max} \operatorname{var} X_{min}$

$\Rightarrow \operatorname{var} T^* \leq \operatorname{var} X_{max} + \operatorname{var} X_{min} + (\operatorname{var} X_{max} \operatorname{var} X_{min})^{\frac{1}{2}}$

(var T^* geht schneller gegen Null (mit n^{-2}) als $\overline{T}$ (mit n^{-1}))

$\operatorname{var} \tilde{T}^*(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \operatorname{var} X_{max}$

$= \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} b^2 = \frac{1}{n(n+2)} b^2$ (für große n besser als $\overline{T}$)

d) Likelihood-Funktion der stetigen Gleichverteilung auf $(0,b)$:

$L(b, x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^n f_b(x_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{b} 1_{(0,b)}(x_j)$

Fall es gibt $j \in \mathbb{N}, j \leq n$, sodass $x_j \notin (0,b)$: $L(b, x_1,\dots,x_n) = 0$

Fall „sonst": $L(b, x_1,\dots,x_n) = b^{-n}$ (also mit Forderung $b \geq \max\{x_1,\dots,x_n\}$)

$\Rightarrow$ L wird maximal, wenn b minimal wird

$\Rightarrow$ $b^*(x_1,\dots,x_n) = \max\{x_1,\dots,x_n\}$ (nach Forderung)