Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker
SS 2015
W. Nagel
Übungsaufgaben, **7.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist diesmal schon am 13.7.15 abzugeben.**
   Die Zufallsgröße X sei standard-normalverteilt.
   a) Sind X und $|X|$ unabhängig?
   b) Berechnen Sie $cov(X, |X|)$.
   c) Zeigen Sie, dass $|X|$ und $sgn(X)$ unabhängig sind. Dabei ist $sgn : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ mit $sgn(x) = 1$, falls $x \geq 0$ und $sgn(x) = -1$, falls $x < 0$.

2. Es seien $X_1, ..., X_n$ i.i.d. Zufallsgrößen, deren Varianzen existieren und endlich sind.
   (a) Drücken Sie Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ durch die entsprechenden Parameter von X_1 aus.
   (b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße
   $$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

3. Es seien X eine Zufallsgröße und $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}|X|^k < \infty$. Zeigen Sie (für die beiden Fälle, dass X diskret oder stetig ist), dass dann $\mathbb{E}|X|^l < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N},\ l < k$.

4. (Zufällige eindimensionale Irrfahrt)
   Ein Teilchen bewegt sich entlang der reellen Achse in Sprüngen der Länge 1 nach rechts (d.h. um $+1$) oder nach links (d.h. um -1). In jedem Zeitintervall $(n-1, n],\ n = 1, 2, ...,$ findet genau ein Sprung statt. Unabhängig vom Zeitpunkt und unabhängig von den anderen Sprüngen seien die Wahrscheinlichkeiten in jedem der angegebenen Zeitintervalle
   P(„Sprung nach rechts“) $= p$, P(„Sprung nach links “) $= 1 - p$, $0 < p < 1$.
   Das Teilchen startet zum Zeitpunkt 0 im Ort 0.
   (a) Berechnen Sie die Verteilungen der Zufallsgrößen
   X_n... Position des Teilchens nach n Sprüngen, $n = 0, 1, 2, ...$
   (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Position des Teilchens nach n Schritten.
   (c) Wenden Sie den Zentralen Grenzwertsatz an, um für $p = 1/2$ einen zu 0 symmetrischen Bereich zu approximieren, in dem sich das Teilchen nach n Schritten ('n groß') mit einer Wahrscheinlichkeit von midestens 95% aufhält. Skizzieren Sie diesen Bereich in Abhängigkeit von n.

5. Ein Unternehmen hat $n = 1000$ Aktien ausgegeben. Die Besitzer entscheiden sich bei jeder einzelnen Aktie mit W. p zum Verkauf der Aktie. Diese Entscheidung möge bei jeder Aktie unabhängig von den anderen Entscheidungen stattfinden. Der Markt kann $s = 50$ Aktien aufnehmen, ohne dass der Kurs fällt. Wie groß darf p höchstens sein, damit der Kurs mit einer W. von 0,9 nicht fällt? Bestimmen Sie nur eine approximative Lösung mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

6. Bestimmen Sie für Aufgabe 3. der 5. Serie (Qualitätskontrolle) eine Näherungslösung mit Hlife des Zentralen Grenzwertsatzes. Prüfen Sie, ob die in der Vorlesung angegebenen Faustregeln für eine gute Approximation erfüllt sind.

7. Welche spezielle Form nimmt der Zentrale Grenzwertsatz an, wenn die summierten Zufallsgrößen exponentialverteilt sind mit Parameter $\lambda > 0$?