Stochastik I – Übung 07

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine standardnormalverteilte Zufallsgröße.

a) $X, |X|$ sind nicht unabhängig:

$$P(X \leq 1, |X| \leq 1) \overset{(*)}{=} P(|X| \leq 1) \in (0,1)$$

$(*)$ $(|X| \leq 1 \implies X \leq 1)$

aber $P(X \leq 1) \in (0,1) \implies P(X \leq 1) \cdot P(|X| \leq 1) \neq P(|X| \leq 1)$

b) es gilt: $\operatorname{cov}(X, |X|) = \mathbb{E}(X \cdot |X|) - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=0} \cdot \mathbb{E}(|X|)$

$$= \mathbb{E}(X \cdot |X|) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot |x| \, f_X(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot |x| \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 0$$ (da Funktion im Integral ungerade ist)

$$\implies \operatorname{cov}(X, |X|) = 0$$

c) Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Fall $\alpha \leq 0$: $P(|X| \leq \alpha, \operatorname{sgn} X \leq \beta) = P(\emptyset) = 0 = \underbrace{P(|X| \leq \alpha)}_{=0} \cdot P(\operatorname{sgn} X \leq \beta)$

Fall $\alpha > 0$:

Fall $\beta \geq 1$: $P(|X| \leq \alpha, \underbrace{\operatorname{sgn} X \leq \beta}_{\text{Bedingung gilt für beliebige Elemente}}) = P(|X| \leq \alpha) = P(|X| \leq \alpha) \cdot \underbrace{P(\operatorname{sgn} X \leq \beta)}_{=1}$

Fall $-1 \leq \beta < 1$: $P(|X| \leq \alpha, \operatorname{sgn} X \leq \beta) = P(X \in [-\alpha, \alpha], \operatorname{sgn} X \leq \beta)$

$$= P(X \in [-\alpha, 0)) = \phi(0) - \phi(a) = \phi(a) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\phi(a) - 1) = \underbrace{P(\operatorname{sgn} X \leq \beta)}_{= \frac{1}{2}} \cdot P(|X| \leq \alpha)$$

Fall $\beta < -1$: $P(|X| \leq \alpha, \operatorname{sgn} X \leq \beta) = P(\emptyset) = 0 = P(|X| \leq \alpha) \cdot \underbrace{P(\operatorname{sgn} X \leq \beta)}_{=0}$