# Stochastik II – Übung 03

Markus Pawellek – 144645

## Aufgabe 1

Folgende konkrete Stichprobe mit Umfang $n = 21$ sei gegeben:

$(5{,}1\,;\ 6{,}78\,;\ 3{,}54\,;\ 8{,}30\,;\ 7{,}98\,;\ 6{,}82\,;\ 4{,}12\,;\ 1{,}48\,;\ 3{,}62\,;\ 9{,}00\,;\ 6{,}76\,;\ 6{,}22\,;\ 5{,}42\,;\ 5{,}32\,;\ 0{,}68\,;\ 5{,}52\,;\ 4{,}80\,;\ 5{,}30\,;\ 6{,}92\,;\ 4{,}26\,;\ 1{,}44) =: x$

Dann ist $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{109{,}48}{21} = 5\,\frac{16}{75} \approx 5{,}123$

und $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \approx 4{,}986$

a) aus Vorlesung: $\left[\bar{x} - \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\ ,\ \bar{x} + \frac{\sqrt{\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{n}}\, t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

ist $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für $\mu$

$t_{20,0{,}95} = 1{,}725 \qquad t_{20,0{,}975} = 2{,}086 \qquad t_{20,0{,}995} = 2{,}845$

$\Rightarrow [4{,}373\,;\ 6{,}054]$ 0,9 – KI

$[4{,}197\,;\ 6{,}230]$ 0,95 – KI

$[3{,}827\,;\ 6{,}600]$ 0,99 – KI

b) aus Vorlesung: $\left[\frac{(n-1)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\ ,\ \frac{(n-1)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\right]$ ist $(1-\alpha)$-KI für $\sigma^2$

$\chi^2_{20,0{,}95} = 31{,}41 \qquad \chi^2_{20,0{,}975} = 34{,}17 \qquad \chi^2_{20,0{,}995} = 40{,}00$

$\chi^2_{20,0{,}05} = 10{,}85 \qquad \chi^2_{20,0{,}025} = 9{,}591 \qquad \chi^2_{20,0{,}005} = 7{,}434$

$\Rightarrow [3{,}175,\ 9{,}190]$ 0,9 – KI

$[2{,}918,\ 10{,}397]$ 0,95 – KI

$[2{,}493,\ 13{,}413]$ 0,99 – KI

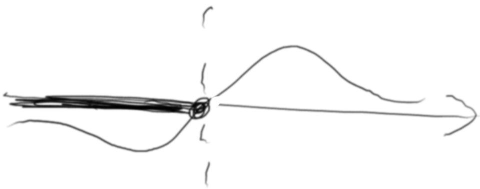
c) Fall $1-\alpha = 0{,}9 \implies \alpha = 0{,}1 \implies 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95$

(Vorlesung)
$\implies$ $[4{,}197\,,\ 6{,}230] \times [2{,}918\,,\ 10{,}397]$ ist min. 0,9-KI für $(\mu, \sigma^2)$

$\implies$ $[3{,}827\,,\ 6{,}600] \times [2{,}493\,,\ 13{,}413]$ ist min. 0,95-KI für $(\mu, \sigma^2)$

0,0025-Quantile der angegebenen Verteilungen sind nicht gegeben
$\implies$ keine Angabe möglich für 0,95-KI

$$f_\sigma(x) = \frac{2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, 1_{[0,\infty)}(x)$$



$$L(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} f_\sigma(x_j)$$

$$\ln f_\sigma(x) \overset{x>0}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - 3\ln\sigma + 2\ln x - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln L(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - 3n\ln\sigma + 2\sum_{j=1}^{n}\ln x_j - \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{=:\,\overline{X^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ln L(\sigma, x_1, \ldots, x_n) = \frac{-3n}{\sigma} + \frac{\overline{X^2}}{\sigma^3} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow\ -3n\sigma^2 + \overline{X^2} = 0 \quad \Longrightarrow\ \sigma^2 = \frac{\overline{X^2}}{3n} =: \sigma^2(x_1, \ldots, x_n)$$

---

$$\mathbb{E}\sigma^2 = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_i^2)$$

$$\varphi(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} \Longrightarrow \varphi'(x) = \frac{x}{\sigma^2}$$

$$\longrightarrow_u\ dx = \frac{\sigma^2}{x}d\varphi = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\varphi}}d\varphi \quad u$$

$$\frac{1}{\sigma^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$= \sigma^{-3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty 4\sigma^4\varphi^2 e^{\varphi}$$