Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker
W. Nagel
WS 2015
Übungsaufgaben, **2.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 26.11.2015 abzugeben.** Für den Parameter b im statistischen Raum

$$\left[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{\mathrm{P}_b^{\otimes n}:\ \mathrm{P}_b \text{ ist die Gleichverteilung auf dem Intervall } (0,b);\ b>0\}\right]$$

sollen erwartungstreue Schätzungen konstruiert und bezüglich ihrer Varianz verglichen werden.

   (a) Geben Sie eine erwartungstreue Schätzung für b an, die auf dem arithmetischen Mittel basiert.

   (b) Geben Sie eine erwartungstreue Schätzung für b an, die auf dem Maximum $x_n^* = \max\{x_1, ..., x_n\}$ der Stichprobenwerte $x_1, ..., x_n$ basiert.

   (c) Vergleichen Sie die Varianzen der beiden Schätzungen aus (a) und (b).

   (d) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Scḧtzung für b.

2. Für den Parameter λ einer Poisson-Verteilung sind sowohl das Stichprobenmittel als auch die korrigierte empirische Varianz erwartungstreue Schätzungen, d.h., falls $X_1, ..., X_n$ unabhängig und Poisson-verteilt sind mit dem Parameter $\lambda > 0$, dann gilt

$$\mathbb{E}_\lambda \bar{X} = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_\lambda \hat{\sigma}^2(X_1, ..., X_n) = \lambda.$$

Es soll festgestellt werden, welche der beiden Schätzungen besser ist. Wählen Sie dazu spezielle Werte für den Parameter λ und schätzen Sie mit Hilfe von Simulationen die Varianzen der beiden Schätzungen für diese Parameterwerte. Anstelle von Simulationen können Sie die Varianzen der Schätzer hier auch explizit berechnen.

3. Gesucht ist eine erwartungstreue Schätzung für den Parameter λ einer exponentialverteilten Grundgesamtheit, wobei die Schätzung eine Funktion der Summe der Stichprobenwerte sein soll.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Erwartungswert $\mathbb{E}_\lambda \left[\sum_{i=1}^n X_i\right]^{-1}$ für eine mathematische Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus einer exponentialverteilten Grundgesamtheit.

4. (Simulation mit Hilfe von Wegwerfmethoden)

   (a) Gegeben sei ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zur Gleichverteilung auf dem Intervall $(0,1)$, der eine Folge $u_1, u_2, \ldots$ erzeugt. Es soll eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ simuliert werden, wobei Y_1 Verteilungsdichte f besitzt, die folgende Eigenschaften hat: Es existieren $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c > 0$, so dass $f(x) \le c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x < a$ und alle $x > b$.

   (b) Gegeben sei ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zu einer Verteilung mit der Dichte g, der eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ erzeugt. Außerdem erzeuge ein Pseudo-Zufallszahlengenerator zur Gleichverteilung auf dem Intervall $(0,1)$, eine Folge $u_1, u_2, \ldots$. Es soll eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ simuliert werden, wobei Y_1 Verteilungsdichte f besitzt, die folgende Eigenschaft hat: Es existiert eine Zahl $a > 1$ so dass $f(x) \le a\, g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass der folgende Algorithmus das Gewünschte leistet:

   (1) $i = 1, j = 1$;

   (2) IF $a \cdot u_i \cdot g(x_i) \le f(x_i)$ THEN $y_j = x_i$, $j := j + 1$;

   (3) $i := i + 1$, GOTO (2)