Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker
SS 2015
W. Nagel
Übungsaufgaben, **5.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 17.6.15 abzugeben.** Es seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen. Jede von ihnen habe die Verteilungsfunktion F (d.h., die Zufallsgrößen seien identisch verteilt).
   (a) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen $\max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ und $\min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ mit Hilfe von F aus.
   (b) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von Minimum und Maximum für den Fall, dass die Zufallsgrößen auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilt sind (d.h., das VG jeder dieser Zufallsgrößen ist die Gleichverteilung auf $(0, 1)$).
   (c) Bestimmen Sie die Verteilung des Minimums für den Fall, dass die Zufallsgrößen mit dem Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt sind, d.h. die Verteilungsdichte jeder dieser Zufallsgrößen ist
   $$f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Es sei $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen über dem W.-Raum $[\Omega, \mathcal{A}, P]$. Außerdem sei $g_1, g_2, ...$ eine Folge $(\mathcal{R}, \mathcal{R})$-messbarer Funktionen $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Folge $g_1(X_1), g_2(X_2), ...$ ist eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen.

3. Auf Grund längerer Erfahrungen sei bekannt, dass bei der Herstellung eines Produkts 5% Ausschuss entsteht. Der laufenden Produktion werden 'auf gut Glück' 100 Produkte entnommen und geprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 5 Ausschuss-Produkte gefunden werden? Bestimmen Sie auch eine Näherungslösung mit Hilfe des Poissonschen Grenzwertsatzes.

4. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
   a) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$,
   b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$,
   c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$.

5. Es sei X eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 3$ und der Varianz $\sigma^2 = 4$. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Tabelle
   a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X im Intervall $(-1, 2)$ liegt.
   b) ein Intervall endlicher Länge, in dem X mit Wahrscheinlichkeit 0,95 liegt.
   c) die Zahl c, für die gilt, dass X mit Wahrscheinlichkeit 0,8 in (c, ∞) liegt.
   d) Geben Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung eine Formel für den Wert a an, für den gilt, dass $P(\mu - a\sigma < X < \mu + a\sigma) = 1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Welcher Wert a ergibt sich für $\alpha = 0,05$?