

Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker

W. Nagel

SS 2015

Übungsaufgaben, 3. Serie

1. **Pflichtaufgabe.** Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 10.12.15 abzugeben. Gegeben sei die folgende Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 :

5,10; 6,78; 3,54; 8,30; 7,98; 6,92; 4,12; 1,48; 3,62; 9,00; 6,76; 6,22; 5,42; 5,32; 0,68; 5,52; 4,80; 5,30; 6,92; 4,26; 1,44 .

Berechnen Sie (zur Übung mit Ihrem Taschenrechner) Konfidenzintervalle zu verschiedenen Konfidenzniveaus (0,9; 0,95; 0,99)

- (a) für den Erwartungswert μ ,
- (b) für die Varianz σ^2 ,
- (c) für das Paar (μ, σ^2) .

2. Die Dichte der Maxwell-Verteilung mit dem Parameter $\sigma > 0$ lautet

$$f(x) = \frac{2}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \text{für } x > 0,$$

und $f(x) = 0$ für $x \leq 0$. (Anwendung z.B. in der kinetischen Gastheorie.)

- (a) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter σ^2 im statistischen Raum

$$[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{P_\sigma^{\otimes n} : P_\sigma \text{ ist die Maxwell-Verteilung mit dem Parameter } \sigma, \sigma > 0\}].$$

- (b) Stellen Sie fest, ob dieser Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu für σ^2 ist. Leiten Sie aus dem Ergebnis eine erwartungstreue Schätzung für σ^2 ab.

Hinweis: Wenn X eine Maxwell-Verteilung mit dem Parameter $\sigma > 0$ besitzt, dann ist $\frac{X^2}{\sigma^2} \sim \chi_3^2$.

3. Simulieren Sie 100 Stichproben vom Umfang n (der Wert von n soll zwischen 10 und 50 liegen) zu einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Berechnen Sie zu jeder dieser Stichproben das 0,95-Konfidenzintervall für den Erwartungswert. Gehen Sie dabei davon aus, dass beide Parameter unbekannt sind. Stellen Sie fest, in wievielen Fällen die Konfidenzintervalle jeweils den wahren Wert des Erwartungswerts überdecken.