Stochastik I – Übung 04

Markus Pawellek – 144645

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsgröße (d.h.: Verteilungsdichte $f_X : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ von X ist $f_X(\omega) = 1_{(0,1)}$). Sei weiterhin $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum mit der bekannten Borelschen – σ – Algebra auf $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ Verteilungsfunktion von X: $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_X(y)\, dy = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ \omega & : \omega \in (0,1) \\ 1 & : \omega \geq 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeitsmaß von X: $P_X : \mathcal{B} \to [0,1]$, $P_X(A) = \int_A f_X(y)\, dy$

a) Sein nun $\tilde{X} := 1 - X$. $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ messbar $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ ist Zufallsgröße

Es gilt für Verteilungsfunktion $F_{\tilde{X}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ von $\tilde{X}$:

$$F_{\tilde{X}}(\omega) \overset{(Def)}{=} P_{\tilde{X}}((-\infty, \omega]) \overset{(Def)}{=} P(\tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega])) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}$$

Weiterhin gilt: $\tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega]) \overset{(Def)}{=} \{ y \in \Omega \mid \tilde{X}(y) \in (-\infty, \omega] \}$

$$= \{ y \in \Omega \mid 1 - X(y) \in (-\infty,\omega] \} = \{ y \in \Omega \mid X(y) \in [1-\omega, \infty) \}$$

$$= X^{-1}([1-\omega,\infty)) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow F_{\tilde{X}}(\omega) = P(X^{-1}([1-\omega,\infty))) = P_X([1-\omega,\infty))$$

(Menge umschr.) $\quad = P_X\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, 1-\omega-\frac{1}{n}]\right)$

(additiv) $\quad = 1 - P_X\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, 1-\omega-\frac{1}{n}]\right)$

(P_X stetig bzw. kleiner Grenzwertsatz) $\quad = 1 - \lim_{n\to\infty} P_X\left((-\infty, 1-\omega-\frac{1}{n}]\right)$

$$\overset{(Def)}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} F_X\left(1-\omega-\frac{1}{n}\right)$$

(F_X ist stetig) $\quad = 1 - F_X(1-\omega) = 1 - \begin{cases} 0 & : 1-\omega \leq 0 \\ 1-\omega & : 1-\omega \in (0,1) \\ 1 & : 1-\omega \geq 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 & : \omega \geq 1 \\ \omega & : \omega \in (0,1) \\ 0 & : \omega \leq 0 \end{cases} = F_X(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow \boxed{F_{\tilde{X}} = F_X} \Longrightarrow$ Verteilungsdichte von $\tilde{X}$: $\boxed{f_{\tilde{X}} = f_X}$

b) Sei nun $\tilde{X} := X - 1$. $\Rightarrow \tilde{X}$ messbar $\Rightarrow \tilde{X}$ ist Zufallsgröße
Sei $\omega \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt wieder (analog zu (a)):

$$F_{\tilde{X}}(\omega) = P_{\tilde{X}}((-\infty, \omega]) = P(\tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega]))$$

(siehe Bem. bei (a)) $= P(X^{-1}((-\infty, \omega+1])) = P_X((-\infty, \omega+1]) = F_X(\omega+1)$

$$= \begin{cases} 0 & : \omega+1 \leq 0 \\ \omega+1 & : \omega+1 \in (0,1) \\ 1 & : \omega+1 \geq 1 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} 0 & : \omega \leq -1 \\ \omega+1 & : \omega \in (-1,0) \\ 1 & : \omega \geq 0 \end{cases}}$$

damit ist Verteilungsfunktion nur verschoben $\Rightarrow$ Verteilungsdicht ist auch nur verschoben

mit $\boxed{f_{\tilde{X}}(\omega) = f_X(\omega+1) = 1_{(-1,0)}}$

c) Sei $\tilde{X} := X^2 \Rightarrow \tilde{X}$ messbar $\Rightarrow \tilde{X}$ ist Zufallsgröße
Sei $\omega \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt:

$$F_{\tilde{X}}(\omega) = P_{\tilde{X}}((-\infty, \omega]) = P(\tilde{X}^{-1}((-\infty, \omega]))$$

$$= P((X^2)^{-1}((-\infty, \omega]))$$

Fall $\omega < 0$: $F_{\tilde{X}}(\omega) = P((X^2)^{-1}((-\infty, \omega])) \overset{(X^2 \geq 0)}{=} P(\emptyset) = 0$

Fall $\omega \geq 0$: $F_{\tilde{X}}(\omega) = P((X^2)^{-1}((-\infty, \omega])) = P((X^2)^{-1}([0,\omega]))$

$$= P(X^{-1}([-\sqrt{\omega}, \sqrt{\omega}])) = P_X([-\sqrt{\omega}, \sqrt{\omega}])$$

(Rechenregeln) $= F_X(\sqrt{\omega}) - \lim_{y \to -\sqrt{\omega}^-} F_X(y)$

(F_X ist stetig) $= F_X(\sqrt{\omega}) - F_X(-\sqrt{\omega})$

$$= \begin{cases} 0 & : \sqrt{\omega} \leq 0 \\ \sqrt{\omega} & : \sqrt{\omega} \in (0,1) \\ 1 & : \sqrt{\omega} \geq 1 \end{cases} - \underbrace{\begin{cases} 0 & : -\sqrt{\omega} \leq 0 \\ -\sqrt{\omega} & : -\sqrt{\omega} \in (0,1) \\ 1 & : -\sqrt{\omega} \geq 1 \end{cases}}_{= 0, \text{ da } -\sqrt{\omega} \leq 0 \text{ für alle } \omega \geq 0}$$

$$= \begin{cases} 0 & : \omega = 0 \\ \sqrt{\omega} & : \omega \in (0,1) \\ 1 & : \omega \geq 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \boxed{F_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ \sqrt{\omega} & : \omega \in (0,1) \\ 1 & : \omega \geq 1 \end{cases}} \Longrightarrow \boxed{f_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ (2\sqrt{\omega})^{-1} & : \omega \in (0,1) \\ 0 & : \omega \geq 1 \end{cases}}$

e) Sei $\tilde{X} := -2\ln X \Rightarrow \tilde{X}$ messbar $\Rightarrow \tilde{X}$ Zufallsgröße
Sei $\omega \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$F_{\tilde{X}}(\omega) = P(\tilde{X}^{-1}((-\infty, \omega]))$$

$$\tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega]) \overset{(*)}{=} \{ y \in \Omega \mid -2\ln X(y) \in (-\infty, \omega] \}$$

(*) verwende (wie auch bei Definition) $\{ y \in \Omega \mid X(y) \leq 0 \} = \emptyset$

$$\Rightarrow \tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega]) = \{ y \in \Omega \mid X(y) \in [e^{-\frac{\omega}{2}}, \infty) \} = X^{-1}([e^{-\frac{\omega}{2}}, \infty))$$

$$\overset{(\text{stetig})}{\Rightarrow} \boxed{F_{\tilde{X}}(\omega) = 1 - F_X(e^{-\frac{\omega}{2}}) = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ 1-e^{-\frac{\omega}{2}} & : \text{sonst} \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\omega}{2}} & : \text{sonst} \end{cases}}$$

d) Sei $\tilde{X} := \frac{1}{X} \Rightarrow \tilde{X}$ messbar $\Rightarrow \tilde{X}$ Zufallsgröße
Sei $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\omega \neq 0$

$$F_{\tilde{X}}(\omega) = P(\tilde{X}^{-1}((-\infty,\omega])) \overset{(*)}{=} P(X^{-1}([\tfrac{1}{\omega}, \infty)))$$

$$= 1 - \lim_{y \to \frac{1}{\omega}^-} F_X(y) \overset{(F_X \text{ stetig})}{=} 1 - F_X(\tfrac{1}{\omega})$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\tilde{X}}(\omega) \overset{(**)}{=} \begin{cases} 0 & : \omega^{-1} \leq 0 \\ 1-\omega^{-1} & : \omega^{-1} \in (0,1) \\ 0 & : \omega^{-1} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ 1-\omega^{-1} & : \omega \in (1,\infty) \\ 0 & : \omega \in (0,1] \end{cases}}$$

(**) $P(X^{-1}((-\infty, 0])) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{f_{\tilde{X}}(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega \leq 0 \\ \omega^{-2} & : \omega \in (1,\infty) \\ 0 & : \omega \in (0,1] \end{cases}}$$