Stochastik I – Wahrscheinlichkeitstheorie für Physiker
SS 2015
W. Nagel
Übungsaufgaben, **4.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 3.6.15 abzugeben.** Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt auf dem Intervall $(0,1)$, d.h. $P_X = U(0,1)$ (man schreibt auch $X \sim U(0,1)$). Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichten folgender Zufallsgrößen:
   $1-X,\ X-1,\ X^2,\ \frac{1}{X},\ -2\ln X$.
   Hinweis: Die Aufgabe lässt sich gut lösen, wenn man zunächst nur die Verteilungsfunktionen von X und von der transformierten Zufallsgröße in Beziehung setzt.

2. Zeigen Sie: Wenn X eine Standard-Cauchy-verteilte Zufallsgröße ist, dann ist auch die Zufallsgröße $1/X$ Cauchy-verteilt.

3. Für ein Produkt sei bekannt folgendes bekannt: Von der Gesamtproduktion habe 5% das Merkmal D (z.B. 'Defekt'). Die angewendete Untersuchungsmethode liefert in 80% der Fälle die richtige Diagnose, wenn das untersuchte Produkt nicht das Merkmal D hat und in 90% der Fälle die richtige Diagnose, wenn das Produkt das Merkmal D hat.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Produkt das Merkmal D hat, wenn die Diagnosemethode das Ergebnis liefert: 'Produkt hat Merkmal D'? Geben Sie einen passenden W.-Raum an und verwenden Sie die Bayessche Formel!

4. (*Bertrandsches Paradoxon*) Auf einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 wird zufällig eine Gerade geworfen. Dabei entsteht eine Sehne mit einer zufälligen Länge L. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $L > \sqrt{3}$. (Die Größe $\sqrt{3}$ ist die Seitenlänge eines in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks. Der Abstand der Seiten dieser gleichseitigen Dreiecke von 0 ist $1/2$.) Man kann es (auf den ersten Blick) als paradox empfinden, dass die folgenden drei Lösungswege auf drei unterschiedliche Werte für die gesuchte Wahrscheinlichkeit führen.

   (i) Die Sehne und damit ihre Länge sind bereits eindeutig durch die Lage ihres Mittelpunktes bestimmt. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn der Mittelpunkt in den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $1/2$ fällt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist offenbar $1/4$.

   (ii) Die Sehne und damit ihre Länge sind eindeutig durch die Lage der beiden Schnittpunkte mit dem Rand des Kreises bestimmt. Jeder Punkt auf dem Rand des Kreises lässt sich durch einen Winkel aus $[0,2\pi)$ beschreiben. Das zufällige Werfen zweier Schnittpunkte auf den Kreisrand entspricht also dem Werfen eines zufälligen Punktes in das Quadrat $[0,2\pi) \times [0,2\pi)$. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn bei gegebener Lage des ersten Schnittpunktes auf der Kreislinie der zweite Schnittpunkt 'in das gegenüberliegende Drittel' der Kreislinie fällt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit als $1/3$.

   (iii) Die Sehne und damit ihre Länge sind eindeutig durch den Abstand der Sehne von 0 und durch ihre Richtung (oder den Winkel mit der positiven Abszissenachse des Lots von 0 auf die Sehne) gegeben. Das genannte Ereignis tritt genau dann ein, wenn der Abstand der Sehne kleiner als $1/2$ ist. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit also $1/2$.

   Also folgt $\frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Oder doch nicht?
   Berechnen Sie eine Verteilungsdichte des Abstands der zufälligen Sehne von 0 für jeden der drei Lösungsansätze.