Stochastik II – Mathematische Statistik für Physiker
W. Nagel
WS 2015
Übungsaufgaben, **5.** Serie

1. **Pflichtaufgabe. Mindestens die schriftliche Lösung dieser Aufgabe ist am 21.1.16 abzugeben.**

   Für den Parameter μ einer normalverteilten Grundgesamtheit, d.h. im statistischen Raum

   $$\left[\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \{\mathcal{N}_{\mu,\sigma_0^2}^{\otimes n} : \ \mu \in \mathbb{R}\}\right],$$

   wobei σ_0^2 als bekannt vorausgesetzt wird, ist ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α gesucht für das Hypothesenpaar $H_0 : \ \mu \leq \mu_0 \quad H_1 : \ \mu > \mu_0$. Dabei ist μ_0 ein vorgegebener Wert.

2. Die Dichte der Rayleigh-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$ lautet

   $$f_\lambda(x) = \frac{2x}{\lambda} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\lambda}} \qquad \text{für } x > 0$$

   und $f_\lambda(x) = 0$ für $x \leq 0$.
   Gegeben seien ein Wert $\lambda_0 > 0$ und eine konkrete Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$, von der angenommen wird, dass sie aus einer Rayleigh-verteilten Grundgesamtheit stammt.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X^2 unter der Voraussetzung, dass X eine Rayleigh-Verteilung mit Parameter λ besitzt.

   (b) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test zum Signifikanzniveau α an für das Hypothesenpaar
   $H_0 : \ \lambda \leq \lambda_0$,
   $H_1 : \ \lambda > \lambda_0$.
   Verwenden Sie dabei eine Testgröße, für die Sie (mit Hilfe des Ergebnisses aus (a)) die Verteilung bestimmmen können.

3. Zeigen Sie, dass unter Verwendung der in Abschnitt 6.4 der Vorlesung verwendeten Bezeichnungen gilt

   $$P_{\vartheta_0}^{\otimes n}(R(X) = \infty) = 0.$$