# Theoretische Mechanik

## Klausur

25. Juli 2012

## Teil 1

1. **Drehimpuls- und Energiesatz für einen Massenpunkt** **6 Punkte**

   (a) Leiten Sie Drehimpuls- und Energiesatz für einen Massenpunkt aus den Newtonschen Axiomen ab. Wann gilt Drehimpulserhaltung, wann Energieerhaltung? 2

   (b) Welche Konsequenzen ergeben sich aus der Erhaltung des Drehimpulses? 2

   (c) Wie kann man Energieerhaltung und Drehimpulserhaltung zur Integration der Bewegungsgleichungen verwenden? 2

2. **Lagrange II-Formalismus** **4 Punkte**

   Behandeln Sie allgemein und am Beispiel des ebenen mathematischen Pendels folgende Fragen:

   (a) Was sind generalisierte Koordinaten? Wie viele von ihnen gibt es? 1

   (b) Wie ist die Lagrange-Funktion definiert? 1

   (c) Wie lauten die Lagrange-Gleichungen II. Art? 1

   (d) Wie lauten Erhaltungssätze in der Sprache des Lagrange II-Formalismus? 1

3. **Hamiltonsche Mechanik** **5 Punkte**

   (a) Was ist ein generalisierter Impuls? 1

   (b) Wie ist die Hamilton-Funktion definiert, von welchen Variablen hängt sie ab? 1

   (c) Wie lauten die kanonischen Gleichungen? 1

   (d) Wie sind Poisson-Klammern definiert? Wie lautet die Bewegungsgleichung für eine beliebige physikalische Größe in der Sprache der Poisson-Klammern? 2

## Teil 2

1. **Rotierendes Bezugssystem** **6 Punkte**

   Ein kartesisches Koordinatensystem $\Sigma'$ rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{b}_z$ bezüglich eines Inertialsystems $\mathcal{S}$. Dabei sollen die $z'$- und $z$-Achse sowie die Ursprünge beider Systeme zusammenfallen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}\,'$ sowie die Beschleunigung $\vec{a}\,'$ vom System $\Sigma'$ aus gesehen und diskutieren Sie ferner die jeweils auftretenden Scheinkräfte für

   (a) ein kräftefreies Teilchen, das im Inertialsystem $\mathcal{S}$ ruht. 3

   (b) ein Teilchen, das in $\mathcal{S}$ innerhalb der $(x, y)$-Ebene eine gleichförmige Kreisbewegung um den Ursprung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ ausführt. 3

2. **Massenpunktsystem** **5 Punkte**

Zwei punktförmige Regentropfen gleicher Masse $m$ fallen im homogenen Schwerefeld nebeneinander mit dem Anfangsabstand $a$ und verschwindender Anfangsgeschwindigkeit. Wie lange dauert es, bis sie sich infolge ihrer Gravitationsanziehung vereinigen?

*Hinweis:* $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}$

3. **Lagrange-Gleichungen I. Art** **7 Punkte**

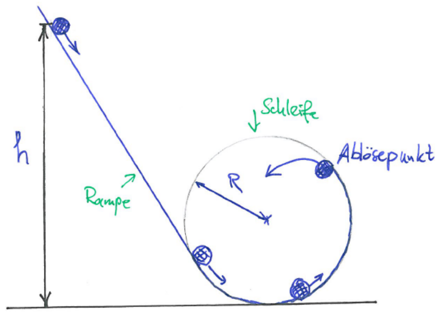
Ein Massenpunkt gleite reibungsfrei im homogenen Erdschwerefeld von einer Rampe (Höhe $h$) mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit hinunter und in eine kreisförmige Schleife („Loop") hinein (siehe Abb.). Dabei stelle die Schleife eine einseitige Bindung für die Bewegung des Massenpunktes dar. Untersuchen Sie die Bewegung des Massenpunktes nach dem Eintritt in die Schleife mittels des Lagrange-I-Formalismus:

(a) Welcher Zwangsbedingung unterliegt die Bewegung? 1

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe des Lagrange-I-Formalismus auf. 2

(c) Bestimmen Sie den Ort des Ablösepunktes in Abhängigkeit von $h$. Wie groß muss $h$ mindestens sein, damit sich der Massenpunkt in der Schleife nicht ablöst? 4

*Anmerkung:* Es darf angenommen werden, dass die Bewegung in einer Ebene verläuft und sich der Ablösepunkt im rechten oberen Quadranten der Schleife befindet.




4. **Lagrange-Gleichungen II. Art** **12 Punkte**

Ein Massenpunkt bewege sich reibungsfrei im Inneren einer Hohlkugel (Radius $R$) im homogenen Erdschwerefeld. Nehmen Sie an, dass der Massenpunkt während seiner Bewegung immer an die Hohlkugel gebunden bleibt.

(a) Man finde generalisierte Koordinaten. 1

(b) Man stelle die Lagrange-Funktion auf. 2

(c) Man stelle die Bewegungsgleichungen auf. 2

(d) Man führe die Integration der Bewegungsgleichungen auf eine Quadratur zurück. Diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bewegungen. 3

(e) Man bestimme und diskutiere Gleichgewichtslagen des Massenpunktes bezüglich eines geeigneten effektiven Potentials $\bar{U}$. 2

(f) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen um diese Gleichgewichtslagen und bestimmen Sie die entsprechende Oszillatorfrequenz kleiner Auslenkungen. 2