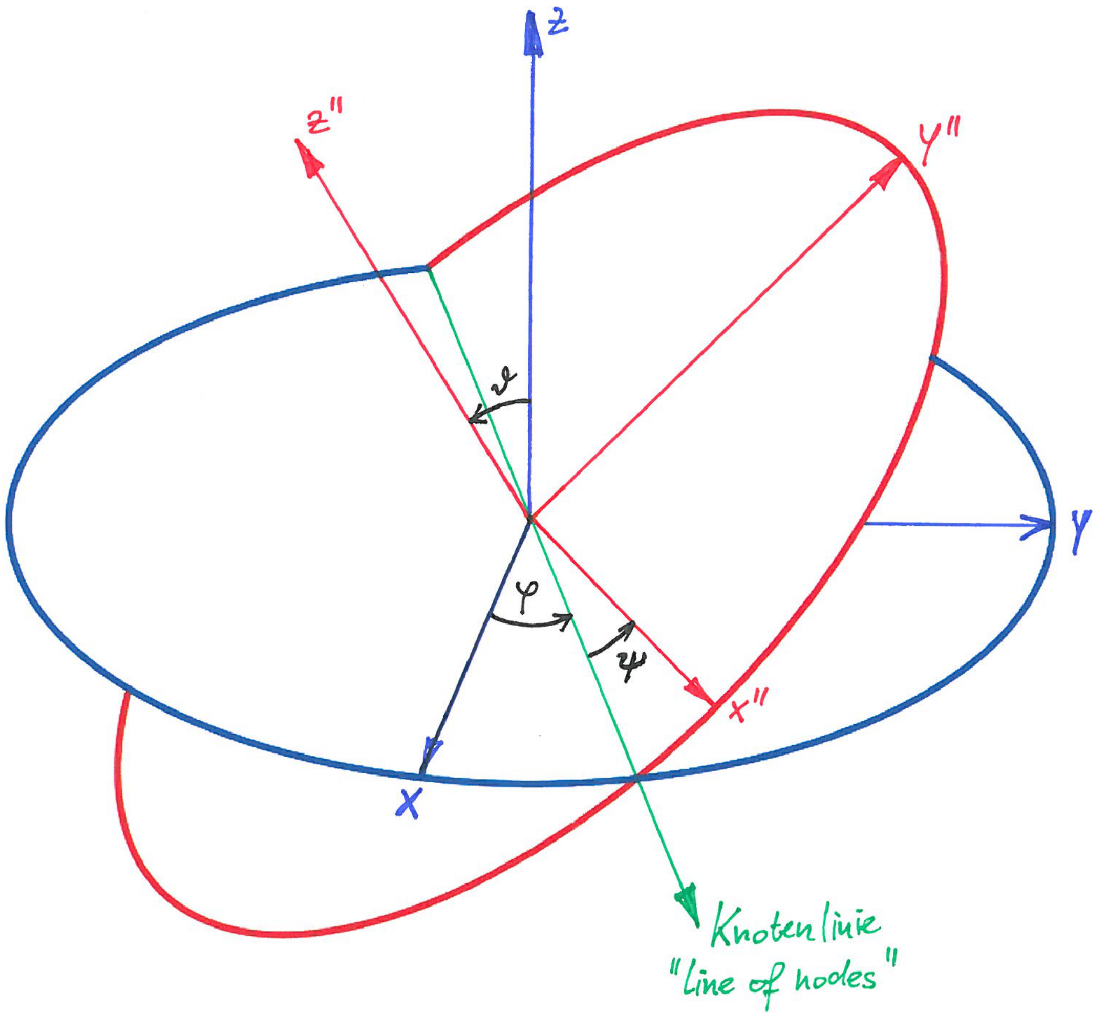
6.1.5 Die Eulerschen Winkel



- Transformation $\mathcal{S} \leftrightarrow \Sigma''$ (raumfestes IS $\leftrightarrow$ körperfestes Schwerpunkt- und Hauptachsensystem):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x(t) \\ s^y(t) \\ s^z(t) \end{pmatrix} + \hat{O}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x(t) \\ s^y(t) \\ s^z(t) \end{pmatrix} + \hat{O}^T \hat{U}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

- Beschreibung der Transformationsmatrix $\hat{V}(t) = \hat{U}\hat{O}(t)$ durch drei *Eulersche* Drehwinkel φ, ϑ, ψ.

- Wir verwenden dabei die sogenannte „x-Konvention":

  1. Drehung um die z-Achse des IS $\mathcal{S}$ (Winkel φ)
  2. Drehung um die neue x-Achse – die *Knotenlinie* (Winkel ϑ)
  3. Drehung um die aus den beiden vorherigen Drehungen resultierende neue z-Achse (Winkel ψ).

- Es ist damit (siehe Abb., dort für den Fall $\vec{s} = 0$):

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{V}(t) \begin{pmatrix} x - s^x \\ y - s^y \\ z - s^z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - s^x \\ y - s^y \\ z - s^z \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

- Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit folgt (siehe Kapitel 1.6):

$$\hat{V}\frac{\mathrm{d}\hat{V}^T}{\mathrm{d}t} = \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{z''} & \omega^{y''} \\ \omega^{z''} & 0 & -\omega^{x''} \\ -\omega^{y''} & \omega^{x''} & 0 \end{pmatrix},$$

  mit obigem Ausdruck für $\hat{V}$ also:

$$\begin{aligned} \omega^{x''} &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \\ \omega^{y''} &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi \\ \omega^{z''} &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned}$$

6.1.6 Die Lagrangefunktion für den freien starren Körpers

- Benutzen wir die (zeitabhängigen) Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ, um vom raumfesten IS $\mathcal{S}$ in das körperfeste Schwerpunkt- und Hauptachsensystem Σ'' zu wechseln, so ergibt sich die kinetische Energie zu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}\dot{\vec{s}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i'',k''=1}^{3} \omega^{i''}\omega^{k''}\Theta^{i''}_{k''} \\ &= \frac{M}{2}[(\dot{s}^x)^2 + (\dot{s}^y)^2 + (\dot{s}^z)^2] + \frac{A}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi)^2 \\ &\quad + \frac{B}{2}(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi)^2 + \frac{C}{2}(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2. \end{aligned}$$

- Befindet sich der Körper in einem äußeren Potential U, das wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x \\ s^y \\ s^z \end{pmatrix} + \hat{V}^T(t)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

effektiv eine Funktion der Schwerpunktskoordinaten s^i und der Eulerwinkel φ, ϑ, ψ ist, $U = U(s^x, s^y, s^z, \varphi, \vartheta, \psi)$, ergibt sich damit die Lagrangefunktion als:

$$L = L(s^x, s^y, s^z, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{s}^x, \dot{s}^y, \dot{s}^z, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = T - U$$

- Aus der Lagrangefunktion L können mittels Lagrange-II-Formalismus die Bewegungsgleichungen ermittelt werden.

- Beispiel: Bewegung im homogenen Erdschwerefeld, $\vec{F}^{(a)} = -\mu g \vec{b}_z$,

$$U = \int_K \mu g z \, \mathrm{d}^3\vec{r}'' = g\int_K \mu\left(s^z + \sum_{i''=1}^{3}[\hat{V}^T]^3_{i''}x^{i''}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}'' = Mgs^z$$

1. s^x und s^y sind zyklische Koordinaten; es folgen die Erhaltungssätze:

$$M\dot{s}^x = p^x, \quad M\dot{s}^y = p^y.$$

2. z-Komponente des Schwerpunktes:

$$M\ddot{s}^z = -Mg$$

Also folgt:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \dot{\vec{s}}_0 t - \frac{g}{2} t^2 \vec{b}_z$$

3. Die Gleichungen für die Eulerschen Winkel separieren von denjenigen für die Schwerpunktskoordinaten. Es ergeben sich die gleichen Gleichungen wie für den kräftefreien Kreisel (siehe Kapitel 6.2).

6.2 Der Kreisel

- Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der an einem *Unterstützungspunkt* P (nicht notwendigerweise der Schwerpunkt) festgehalten wird und sich um diesen Punkt völlig frei drehen kann.

- Wir legen nun die Koordinatenursprünge von Inertialsystem $\mathcal{S}$ sowie mitrotierenden körperfesten Hauptachsensystem Σ'' in den Punkt P.

- Damit ist hier Σ'' i.A. *kein* Schwerpunktsystem.

- Seine Achsen weisen aber nach wie vor in Richtung der Hauptträgheitsmomente, d.h. der Trägheitstensor bezüglich P hat in Σ'' eine diagonale Koeffizientenmatrix, $\Theta^{i''}_{k''}(P) = \mathrm{diag}(A, B, C)$.

- Die Transformation $\Sigma'' \leftrightarrow \mathcal{S}$ schreibt sich nun:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{V}(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit der *Eulerschen* Transformationsmatrix $\hat{V}(t)$ (siehe Kapitel 6.1.5),

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ -\cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

- Die Schritte zur Berechnung der kinetischen Energie T sowie des Drehimpulses $\vec{L}$ sind die gleichen wie in Kapitel 6.1.2 bzw. 6.1.4, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{i'',k''=1}^{3}\omega^{i''}\omega^{k''}\Theta^{i''}_{k''} = \frac{A}{2}(\omega^{x''})^2 + \frac{B}{2}(\omega^{y''})^2 + \frac{C}{2}(\omega^{z''})^2 \\ &= \frac{A}{2}(\dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \dot\vartheta\cos\psi)^2 + \frac{B}{2}(\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\sin\psi)^2 \\ &\quad + \frac{C}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{x''} &= A\omega^{x''} = A(\dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \dot\vartheta\cos\psi) \\ L^{y''} &= B\omega^{y''} = B(\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\sin\psi) \\ L^{z''} &= C\omega^{z''} = C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) \end{aligned}$$

- Befindet sich der Körper in einem äußeren Potential U, ergibt sich wegen
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \hat V^T(t)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$
effektiv eine Funktion der Eulerwinkel φ, ϑ, ψ,
$$U = U(\varphi, \vartheta, \psi).$$

- Im symmetrischen Fall $A = B$ ist T von φ und ψ unabhängig:
$$T = \frac{A}{2}(\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2$$

6.2.1 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

- Symmetrischer Kreisel: $A = B$, d.h. $\Theta^{i''}_{k''}(P) = \mathrm{diag}(A, A, C)$.
- Kräftefrei: Potential $U \equiv 0$; äußere Kraftdichte $\vec f^{(a)} \equiv 0$;
es gilt Drehimpulserhaltung, $\vec L = \overset{\leftrightarrow}{\Theta}\,\vec\omega = \text{const.}$
- Lösung des Bewegungsproblems über *Drehimpulserhaltung:*
  1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir die z-Achse des raumfesten Inertialsystems $\mathcal{S}$ in Richtung des Drehimpulses,
$$\vec L = L\vec b_z, \qquad L^i = \delta^i_3 L, \qquad L = \text{const.}$$

2. Für die Komponenten in Σ'' folgt:

$$L^{i''} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} L^i = \sum_{i=1}^{3} [\hat{V}(t)]_i^{i''} L \delta_3^i = L[\hat{V}(t)]_3^{i''},$$

$$\begin{aligned} L^{x''} &= A\omega^{x''} = A(\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi) = L\sin\psi\sin\vartheta && (6.4)\\ L^{y''} &= A\omega^{y''} = A(\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi) = L\cos\psi\sin\vartheta && (6.5)\\ L^{z''} &= C\omega^{z''} = C(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}) = L\cos\vartheta && (6.6) \end{aligned}$$

3. {Gleichung (6.4)$\cdot\cos\psi -$ Gleichung (6.5)$\cdot\sin\psi$} ergibt:

$$A\dot{\vartheta} = 0, \qquad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} \tag{6.7}$$

Damit ist $\omega^{z''} = \frac{L}{C}\cos\vartheta_0 = \text{const.}$

4. Mit $\dot{\vartheta} = 0$ folgt aus (6.4) und (6.5):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{A}, \qquad \varphi(t) = \frac{L}{A}t + \varphi_0 \tag{6.8}$$

5. Aus (6.6), (6.7) und (6.8) schließlich:

$$C\dot{\psi} = (L - C\dot{\varphi})\cos\vartheta_0, \qquad \psi = \left(L\,\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\right)t + \psi_0 \tag{6.9}$$

6. Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 = \text{const.},\\ \varphi(t) &= \frac{L}{A}t + \varphi_0,\\ \psi(t) &= \left(L\,\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\right)t + \psi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{x''}(t) &= L\sin\psi(t)\sin\vartheta_0, & \omega^{x''}(t) &= \frac{L}{A}\sin\psi(t)\sin\vartheta_0\\ L^{y''}(t) &= L\cos\psi(t)\sin\vartheta_0, & \omega^{y''}(t) &= \frac{L}{A}\cos\psi(t)\sin\vartheta_0\\ L^{z''}(t) &= L\cos\vartheta_0, & \omega^{z''}(t) &= \frac{L}{C}\cos\vartheta_0 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Komponenten im raumfesten System $\mathcal{S}$:

(a) $\vec{L} = L\vec{b}_z = \text{const.}$

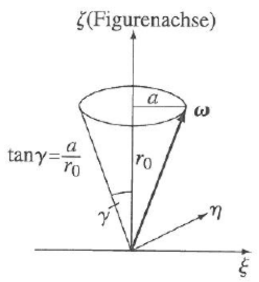
(b) Aus (6.10) sehen wir: $\vec{\omega} = \frac{1}{A}\vec{L} + L\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\vec{b}_{z''}$, also:

$$\begin{aligned} \omega^i &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0(\vec{b}_{z''})^i \\ &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\frac{\partial x^i}{\partial x^{z''}} \\ &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0[\hat{V}^T]^i_{3''}, \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} L^x(t) &= 0, & \omega^x(t) &= L\tfrac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0\sin\varphi(t) \\ L^y(t) &= 0, & \omega^y(t) &= -L\tfrac{A-C}{AC}\cos\vartheta_0\sin\vartheta_0\cos\varphi(t) \\ L^z(t) &= L, & \omega^{z''}(t) &= \tfrac{L}{C}\cos^2\vartheta_0 + \tfrac{L}{A}\sin^2\vartheta_0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

- Diskussion:



Polkegel im körperfesten System,
$(\xi, \eta, \zeta) = (x'', y'', z'')$, $r_0 = L/C\cos\vartheta_0 = \omega^{z''}$, $a = L/A\sin\vartheta_0$

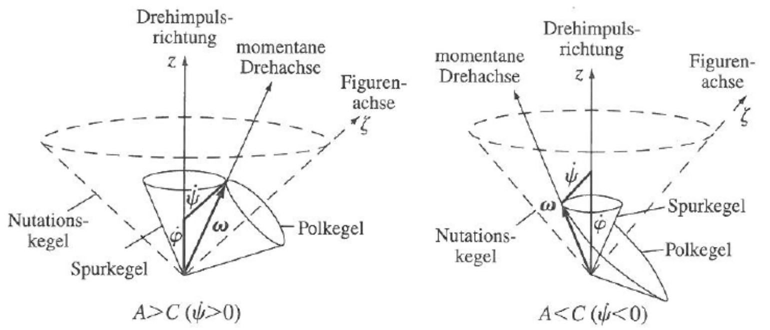
1. Die Figurenachse (Hauptträgheitsache mit Trägheitsmoment C, d.h. die z''-Achse in Σ'') bewegt sich auf einem Kreiskegel der Öffnung ϑ_0 um die z-Achse, d.h. um die Richtung des Drehimpulses; diesen Kegel nennt man *Nutationskegel* (halber Öffnungswinkel: ϑ_0). Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist $\mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}t = L/A$.
2. Dabei dreht sich der Körper (die körperfesten x'', y''-Achsen) um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}t = L(A-C)\cos\vartheta_0/(AC)$.

3. Innerhalb von Σ'' wandert $\vec{\omega}$ auf dem körperfesten *Polkegel* (halber Öffnungswinkel: γ, $\tan\gamma = \frac{C}{A}\tan\vartheta_0$) um die Figurenachse, Winkelgeschwindigkeit: $-\,\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}t$.

4. Innerhalb von $\mathcal{S}$ wandert $\vec{\omega}$ auf dem *Spurkegel* (halber Öffnungswinkel: $|\varepsilon| = |\vartheta_0 - \gamma|$) um die z-Achse (raumfeste Richtung von $\vec{L}$, Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$).

5. Der Polkegel rollt mit seiner Außenfläche (für $A > C, \dot{\psi} > 0$) bzw. Innenfläche (für $A < C, \dot{\psi} < 0$) auf dem Spurkegel ab; Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$.

6. Der Polkegel führt dabei die Figurenachse (d.h. seine Symmetrieachse) auf dem Nutationskegel.



6.2.2 Der schwere symmetrische Kreisel

- Betrachten einen symmetrischen Kreisel ($B = A$ bezüglich des Unterstützungspunktes), dessen Schwerpunkt auf der Figurenachse liegt, d.h., es gilt:

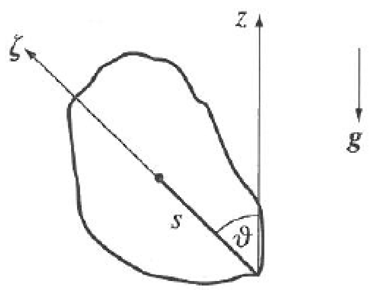
$$\int_K \mu x''\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'' = 0, \qquad \int_K \mu y''\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'' = 0.$$

- Wir schreiben

$$s = s^{z''} = \int_K \mu z''\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

- Wir legen die raumfeste z-Achse nach oben. Dann ergibt sich folgende potentielle Energie:

$$\begin{aligned}U &= \int_K \mu g z \, \mathrm{d}^3\vec{r}'' \\ &= g \int_K \mu(x'' \sin\psi \sin\vartheta + y'' \cos\psi \sin\vartheta + z'' \cos\vartheta) \, \mathrm{d}^3\vec{r}'' \\ &= Mgs\cos\vartheta\end{aligned}$$



- Es folgt:

$$L = T - U = \frac{A}{2}(\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{C}{2}(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 - Mgs\cos\vartheta$$

- Zyklische Koordinaten: ψ und φ, und somit gelten die Erhaltungssätze:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = A\dot\varphi \sin^2\vartheta + C(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)\cos\vartheta = \alpha = \text{const.} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = C(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) = \beta = \text{const.} \quad (6.13)$$

- Ferner gilt wegen $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$ Energieerhaltung, $E = T + U$.

- Wir eliminieren mittels (6.12, 6.13) $\dot\varphi$ und $\dot\psi$ im Energiesatz und gelangen mit der Substitution $u = \cos\vartheta$ zu

$$\frac{A}{2}\dot u^2 + P(u) = 0$$

mit

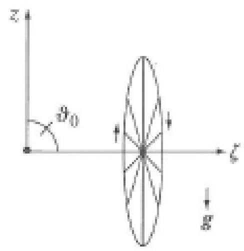
$$P(u) = \frac{(\alpha - \beta u)^2}{2A} + \left(\frac{\beta^2}{2C} - E\right)(1 - u^2) + Mgsu(1 - u^2)$$

- Lösung wie im eindimensionalen Fall durch Separation der Variablen liefert:

$$t = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{-\frac{2}{A}P(u)}}$$

Elliptisches Integral (hier nicht weiter untersucht).

6.2.3 Der schnell rotierende schwere symmetrische Kreisel



- Betrachten schweren symmetrischen Kreisel mit speziellen Anfangsbedingungen:

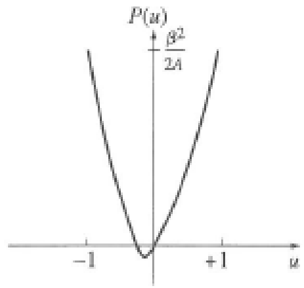
$$\begin{array}{rclrclrcl} \vartheta(0) & = & \frac{\pi}{2}, & \varphi(0) & = & 0, & \psi(0) & = & 0 \\ \dot{\vartheta}(0) & = & 0, & \dot{\varphi}(0) & = & 0, & \dot{\psi}(0) & = & \dot{\psi}_0 \end{array}$$

- $\dot{\psi}_0$ sei groß, genauer: $\quad q := \dfrac{2MgsA}{C^2\dot{\psi}_0^2} \ll 1.$

- Aus Anfangsbedingungen folgt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = C\dot{\psi}_0, \quad E = \frac{C}{2}\dot{\psi}_0^2 = \frac{\beta^2}{2C},$$

$$P(u) = \frac{\beta^2}{2A}u^2 + Mgsu(1 - u^2) = Mgs\left[\frac{u^2}{q} + u(1 - u^2)\right]$$



- Damit hat $P(u)$ die Nullstellen

$$u_0^* = 0, \quad u_-^* = \frac{1-\sqrt{4q^2+1}}{2q} \approx -q, \quad u_+^* = \frac{1+\sqrt{4q^2+1}}{2q} \gg 1$$

mit $P(u) > 0$ für $u < u_-^*$ bzw. $u \in (0,1]$ (beachte: $|u| = |\cos\vartheta| \leq 1$).

- Die Bewegung gemäß

$$\frac{A}{2}\dot{u}^2 + P(u) = 0$$

findet im kleinen Intervall $u \in [u_-^*, 0]$ statt, wo $P(u) \leq 0$ ist.

- Sie kann in einer Näherung berechnet werden:

$$0 = A\dot{u}\ddot{u} + P'(u)\dot{u} = \dot{u}\left(A\ddot{u} + Mgs\left[\frac{2u}{q} + 1 - 3u^2\right]\right) \approx \dot{u}\left(A\ddot{u} + Mgs\left[\frac{2u}{q} + 1\right]\right)$$

Die Gleichung

$$A\ddot{u} + Mgs\left[\frac{2u}{q} + 1\right] = 0$$

hat für $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ die Lösung:

$$u = \cos\vartheta = -\frac{q}{2}\left[1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{2Mgs}{Aq}}\right)\right]$$

Die Kreiselachse bewegt sich nur geringfügig nach unten (q klein), schwingt aber mit sehr hoher Frequenz vertikal zwischen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($u = 0$) und $\vartheta \approx \frac{\pi}{2} + q$ ($u = -q$) hin und her.

- Aus den Erhaltungssätzen (6.12, 6.13) folgt mit $\sin\vartheta \approx 1$:

$$0 = A\dot{\varphi} + \beta\cos\vartheta = A\dot{\varphi} + \beta u, \qquad C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta) = \beta,$$

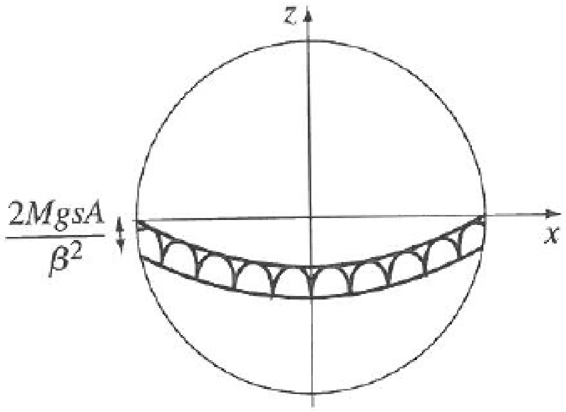
also:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\beta}{A}u = \sqrt{\frac{Mgs\,q}{2A}}\left(1 - \cos\frac{\beta}{A}t\right),$$

und schließlich mit $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(t) = t\sqrt{\frac{Mgs\,q}{2A}} - \frac{q}{2}\sin\left(t\sqrt{\frac{2Mgs}{A\,q}}\right)$$

Die Figurenachse des Kreisels bewegt sich mit kleiner mittlerer Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{Mgs\,q}{2A}}$ in der Ebene des raumfesten Systems $\mathcal{S}$. Diese Bewegung wird ,,Präzession" genannt.



Bahnkurve der Spitze der Figurenachse:
Zykloide in einer (ϑ, φ)-Ebene.

- Schließlich ist

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{C} - \dot{\varphi}\cos\vartheta \approx \frac{\beta}{C}\left(1 + \frac{C}{A}u^2\right) \approx \frac{\beta}{C} = \dot{\psi}_0$$

In erster Ordnung bezüglich q dreht sich der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_0$ um seine Figurenachse.