Theoretische Mechanik – Übung 8

Markus Pawellek – 144645 Übung: Donnerstag 10–12

Aufgabe 1

innere Kraft im Massepunktsystem: $\vec{F_{12}} = -k(\vec{r_1} - \vec{r_2}) = -\vec{F_{21}}$
mit $k =$ konst > 0

a) – innere Kraft wirkt nur in Richtung Verbindungslinie von m_1, m_2
$\Longrightarrow$ Drehimpulserhaltung gilt, weil keine äußere Kraft angreift
– Kraft ist eine Zentralkraft, deren Betrag nur vom Abstand abhängt $\Longrightarrow$ Kraft ist konservativ $\Longrightarrow$ Potential existiert
$\Longrightarrow$ Energieerhaltung gilt
– da keine äußeren Kräfte wirken, muss sich also Schwerpunkt nicht beschleunigt bewegen $\ddot{\vec{S}} = 0$

b) Sei $\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$. $\Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_1}} - \ddot{\vec{r_2}}$

$$\overset{\text{(Newton)}}{=} \frac{\vec{F_{12}}}{m_1} - \frac{\vec{F_{21}}}{m_2} = \vec{F_{12}}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\Longrightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F_{12}} \quad \text{mit } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ als reduzierte Masse}$$

$$\Longrightarrow \mu\ddot{\vec{r}} = -k(\vec{r_1} - \vec{r_2}) = -k\vec{r}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\vec{r}} + \frac{k}{\mu}\vec{r} = 0$$

DGL für harmonischer Oszillator in allen Koordinaten

x-Koord: $x(t) = A^1 \cos\omega t + B^1 \sin\omega t$ mit $\omega^2 = \frac{k}{\mu}$

$$\Longrightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$$

$$= \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$$

mit $\vec{A} = \sum_{i=1}^{3} A^i \vec{e_i}$ $\quad \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} B^i \vec{e_i}$

es gilt: $\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F_{12}}}{\mu} = \frac{m_1}{\mu}\ddot{\vec{r_1}} = \frac{-m_2}{\mu}\ddot{\vec{r_2}}$

mit Integration folgt:

$$\vec{r_1} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} + \vec{a_1}t + \vec{b_1}$$

$$\vec{r_2} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r} + \vec{a_2}t + \vec{b_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2} = \vec{r} + (\vec{a_1} - \vec{a_2})t + (\vec{b_1} - \vec{b_2})$$

$$\Rightarrow \vec{a_1} - \vec{a_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a_1} = \vec{a_2} = \vec{a}$$
$$\Rightarrow \vec{b_1} - \vec{b_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b_1} = \vec{b_2} = \vec{b}$$

Schwerpunkt: $\vec{s} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}\right)$

$$= \frac{1}{m_1+m_2}\left((m_1+m_2)\vec{a}t + (m_1+m_2)\vec{b}\right) = \vec{a}t + \vec{b}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{s}}_0 = \dot{\vec{s}}(t=0) = \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{s}_0 = \vec{s}(t=0) = \vec{b}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r_0} = \vec{r_{10}} - \vec{r_{20}} = \vec{A} = \vec{r}(t=0)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r_0}} = \dot{\vec{r_{10}}} - \dot{\vec{r_{20}}} = \omega\vec{B} = \dot{\vec{r}}(t=0)$$

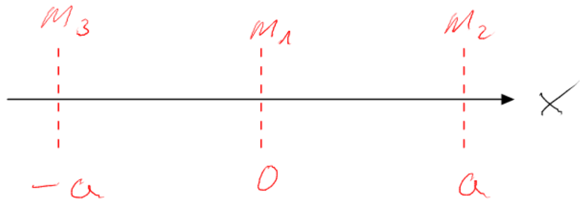
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r_1}(t) &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[(\vec{r_{10}} - \vec{r_{20}})\cos\omega t + \frac{\dot{\vec{r_{10}}} - \dot{\vec{r_{20}}}}{\omega}\sin\omega t\right] + \dot{\vec{s_0}}t + \vec{s_0} \\ \vec{r_2}(t) &= \frac{-m_1}{m_1+m_2}\left[(\vec{r_{10}} - \vec{r_{20}})\cos\omega t + \frac{\dot{\vec{r_{10}}} - \dot{\vec{r_{20}}}}{\omega}\sin\omega t\right] + \dot{\vec{s_0}}t + \vec{s_0}\end{aligned}}$$

Bewegung im Schwerpunktsystem:

- Überlagerung Sinus- bzw. Kosinusschwingung mit gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Phasenverschiebung
  $\Rightarrow$ bilden im Schwerpunktsystem zwei gleichgerichtete Ellipsenbahnen (Lissajous-Figuren) mit Extremfall von Kreis und Gerade

— Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig geradlinig
$\Longrightarrow$ überlagert sich mit Schwingung

Aufgabe 2



$m_1 = m_2 = m_3 = m$

a) $$m\ddot{x}_1 = \gamma m^2 \left[\frac{1}{(x_2-x_1)^2} - \frac{1}{(x_3-x_1)^2} \right]$$

↳ Kraft von m_2 auf m_1 in positive Richtung

↳ Kraft von m_3 auf m_1 in negative Richtung

$$\Longrightarrow \quad \ddot{x}_1 = \gamma m \left[\frac{1}{(x_2-x_1)^2} - \frac{1}{(x_3-x_1)^2} \right]$$

$\ddot{x}_2$ und $\ddot{x}_3$ ähnlich:

$$\ddot{x}_2 = \gamma m \left[\frac{-1}{(x_1-x_2)^2} + \frac{-1}{(x_3-x_2)^2} \right]$$

$$\ddot{x}_3 = \gamma m \left[\frac{1}{(x_1-x_3)^2} + \frac{1}{(x_2-x_3)^2} \right]$$

b) $\Longrightarrow \quad \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 0 \quad \overset{(\text{Int})}{\Longrightarrow} \quad \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$
(keine Anfangsgeschwindigkeiten)

$$\Longrightarrow \quad x_1 + 0 + x_2 + a + x_3 - a = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{S} = 0 = m(x_1 + x_2 + x_3)$$

$\Longrightarrow$ Schwerpunkt ruht und befindet sich im Ursprung
$\Longrightarrow$ weil Massen keine Anfangsgeschwindigkeit besitzen, bewegen sie sich auf den Schwerpunkt, also den Ursprung, zu

$\Rightarrow$ m_1 ruht, da sie schon im Ursprung ist

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$

$\Rightarrow$ $x_2 = -x_3$ $\quad$ x_2 und x_3 müssen sich symmetrisch bewegen

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = \gamma m \left[\frac{-1}{x_2^2} + \frac{-1}{4x_2^2} \right] = -\frac{5}{4} \frac{\gamma m}{x_2^2}$$

$\Rightarrow$ Kraft auf m_2: $\quad F(x) = -\frac{5}{4} \frac{\gamma m^2}{x^2}$

$\Rightarrow$ Potential existiert: $\quad U(x) = -\int F(x)\, dx = -\frac{5}{4} \frac{\gamma m^2}{x}$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung (für m_2): $\quad \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{5}{4} \frac{\gamma m^2}{x} = E = U(a) = -\frac{5}{4} \frac{\gamma m^2}{a}$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{5}{2} \gamma m \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)$$

$\Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{5}{2} \gamma m \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)}$ $\quad$ (Geschwindigkeit muss negativ sein)

$$\Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{2} \gamma m}\, t = \int_a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$= \int_a^x \sqrt{\frac{ax}{a-x}}\, dx$ $\qquad$ Sei $z := \sqrt{x}$ $\quad \frac{dx}{dz} = 2z$

$$= \int_{z(a)}^{z(x)} \sqrt{a} \cdot \frac{z}{\sqrt{a - z^2}}\, 2z\, dz = 2\sqrt{a} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{z^2\, dz}{\sqrt{a - z^2}}$$

$$= 2\sqrt{a} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{z^2 - a + a}{\sqrt{a - z^2}}\, dz = 2\sqrt{a} \left[\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{a\, dz}{\sqrt{a - z^2}} - \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{a - z^2}{\sqrt{a - z^2}}\, dz \right]$$

$$= 2\sqrt{a}\, a \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \frac{dz}{\sqrt{a - z^2}} - 2\sqrt{a} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} \sqrt{a - z^2}\, dz$$

$$= 2\sqrt{a}\,a \ \arcsin \frac{z}{\sqrt{a}}\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} - 2\sqrt{a}\left(\frac{a}{2}\arcsin\frac{z}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} z\sqrt{a-z^2}\right)\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{a}\,a\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{a}\left(a\cdot\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - a\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x(a-x)}\right)$$

$$= \sqrt{a}\,a\left(2\cdot\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{x(a-x)}}{2a}\right)$$

$$= \sqrt{a}\,a\left(\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{x(a-x)}}{2a}\right)$$

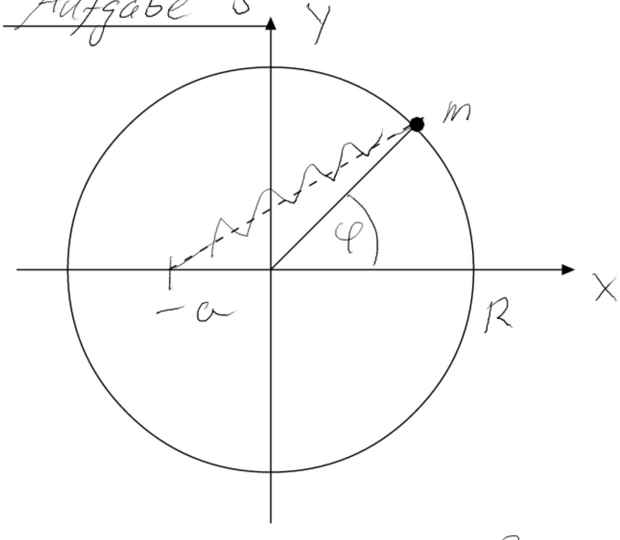
$\Longrightarrow$ implizite Darstellung:

$$\boxed{t = -\sqrt{\frac{2a^3}{5\gamma m}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{x(a-x)}}{2a}\right)}$$

c) $t(x=0) = -\left(\frac{2}{5}\frac{a^3}{\gamma m}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = t_0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{10\gamma m}}}$$

Aufgabe 3



Federkraft: $\vec{F}_H = -k(\vec{r} - \vec{r}_0)$

kartesisch:

$$\vec{F}_H = -k\left[(x+a)\vec{i} + y\vec{j}\right]$$

wegen $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$
$\vec{r}_0 = -a\vec{i}$

Zwangsbedingung: $g(\vec{r},t) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \text{grad}\, g(\vec{r},t) = 2\vec{r} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

(d'Alembert)
$$\Longrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = -k(\vec{r}-\vec{r}_0) + 2\lambda\vec{r}$$

$\Longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen (kartesisch):

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k(x+a) + 2\lambda x \\ m\ddot{y} &= -ky + 2\lambda y \\ 0 &= x^2+y^2 - R^2 \end{aligned}}$$

Polarkoordinaten:

$$\vec{F}_H = -k\vec{r} - ka\vec{i} = -k\rho\,\vec{e_\rho} - ka\,\vec{e_x}$$

$$\vec{e_x} = \cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}$$

$$\Longrightarrow \vec{F_H} = -k\rho\vec{e_\rho} - ka(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

$$= -k\left[\vec{e_\rho}(\rho + a\cdot\cos\varphi) - a\sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\right]$$

Zwangsbedingung: $g(\vec{r},t) = \rho - R = 0$

$$\Longrightarrow \operatorname{grad} g(\vec{r},t) = \vec{e_\rho}$$

$$\boxed{\begin{aligned} ma^\rho &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -k(\rho + a\cdot\cos\varphi) + \lambda \\ ma^\varphi &= m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}) = ka\sin\varphi \\ &\qquad 0 = \rho - R \end{aligned}}$$

$$\Longrightarrow \rho = R \Longrightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} -R\dot{\varphi}^2 &= -k(R + a\cos\varphi) + \lambda \\ m\rho\ddot{\varphi} &= ka\sin\varphi = mR\ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\ddot{\varphi} - \frac{ak}{Rm}\sin\varphi = 0} \quad \text{DGL für } \varphi(t)$$