5. Wählen nun die (x, y)-Ebene als Bahnebene (siehe Kapitel 1.4.3) und erhalten in Zylinderkoordinaten:

$$m\varrho^2\dot{\varphi} = L, \quad \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + U(\varrho) = E, \quad z \equiv 0,$$

weil mit $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = 0$:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2)$$

Anmerkung: In der (x, y)-Ebene ist $r = \varrho$, $U(r) = U(\varrho)$.

6. Beide Erhaltungssätze ergeben dann:

$$\frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = E$$

mit derselben mathematischen Struktur des Energiesatzes der eindimensionalen Bewegung (siehe Kapitel 1.3.5).

7. Rückführung auf Quadratur durch Trennung der Variablen:

$$t = \operatorname{sign}(\dot{\varrho}_0)\int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mathrm{d}\tilde{\varrho}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(\tilde{\varrho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\varrho}^2}\right]}} \tag{1.10}$$

8. Berechnung von φ:

Wegen $\dot{\varphi} = \dfrac{L}{m\varrho^2}$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varrho}} = \frac{L}{m\varrho^2} \cdot \frac{\operatorname{sign}(\dot{\varrho}_0)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(\varrho) - \frac{L^2}{2m\varrho^2}\right]}},$$

und somit:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\operatorname{sign}(\dot{\varrho}_0) L\,\mathrm{d}\tilde{\varrho}}{\tilde{\varrho}^2\sqrt{2m\left[E - U(\tilde{\varrho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\varrho}^2}\right]}} \tag{1.11}$$

9. *Diskussion:*

   (a) Mit (1.10) und (1.11) haben wir die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen in der Form $t = t(\varrho)$ und $\varphi = \varphi(\varrho)$ gegeben.

   (b) Daraus ermittelbar: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (analytisches oder numerisches Umstellen liefert $\varrho(t)$)

   (c) ,,nichttriviale" Integrationskonstanten E und L,

   $$E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}_0^2 + \frac{L^2}{2m\varrho_0^2} + U(\varrho_0), \qquad L = m\varrho_0^2\dot{\varphi}_0,$$

   sowie ϱ_0 (zur Vervollständigung muss noch $\mathrm{sign}(\dot{\varrho}_0)$ vorgegeben werden).

   (d) weitere Integrationskonstante φ_0 sowie Lage der Bahnebene (2 Konstanten) lassen sich durch Koordinatentransformation eliminieren

1.5 Die Planetenbewegung

- Potential $U \sim 1/r$ ist wichtigstes Zentralkraftfeld
- Bestimmt Himmelsmechanik; ist Vorstufe für das quantenmechanische Atommodell

1.5.1 Ableitung des Kraftgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen

- Die Keplerschen Gesetze lauten:

  1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
  2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
  3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen (Kuben) der großen Bahnhalbachsen.

- Übersetzung in die Sprache der Mechanik:

1. Erstes Gesetz und zweites Gesetz:
   (a) Bewegung in einer Bahnebene
   (b) Gültigkeit des Drehimpulserhaltungssatzes bezüglich eines IS, dessen Koordinatenursprung in der Sonne liegt.
2. Wir wählen die (x, y)-Ebene als die Bahnebene.
3. Drehimpuls hat nur eine z-Komponente $L^z = L = m\varrho^2\dot{\varphi}$; diese ist zeitlich konstant.
4. Kraft ist Zentralkraft, $\vec{F} = F^r\vec{b}_r$; in der Bahnebene gilt:

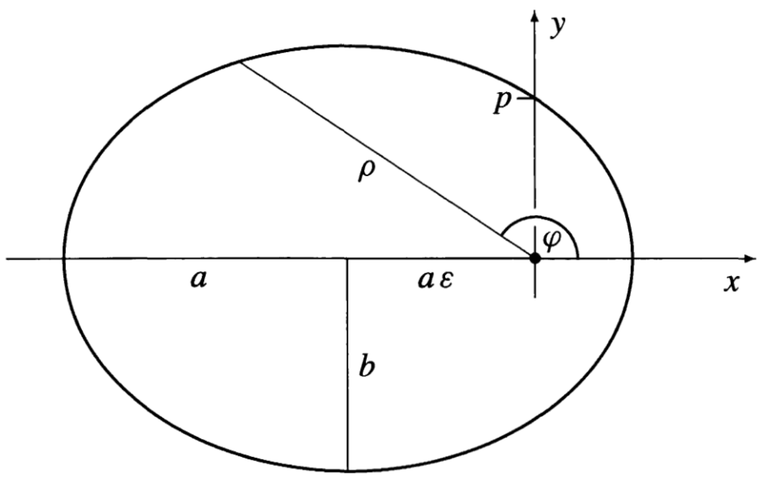
$$\vec{F} = F^\varrho\vec{b}_\varrho$$

   Zweites Newtonsches Axiom:

$$F^\varrho = ma^\varrho = m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)$$

5. Ellipsengleichung (siehe Abb.):

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}; \quad p = \frac{b^2}{a}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



6. Verwenden nun $L = m\varrho^2\dot{\varphi}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\dot{\varrho} &= \frac{p\,\varepsilon\,\dot{\varphi}\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{\varrho^2\varepsilon\,\dot{\varphi}\sin\varphi}{p} = \frac{\varepsilon L}{mp}\sin\varphi, \\
\ddot{\varrho} &= \frac{\varepsilon L}{mp}\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{\varepsilon L^2}{p\,m^2\varrho^2}\cos\varphi, \\
\varrho\dot{\varphi}^2 &= \frac{L^2}{m^2\varrho^3} \\
\Rightarrow \quad F^\varrho &= m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) = \frac{L^2}{m\varrho^2}\left(\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi - \frac{1}{\varrho}\right) \\
&= \frac{L^2}{m\varrho^2}\left(\frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi - \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}\right) = -\frac{L^2}{m\,p\,\varrho^2},
\end{aligned}$$

Damit:

$$\vec{F} = -\frac{L^2}{m\,p\,r^2}\vec{b}_r = -\frac{L^2}{m\,p\,r^3}\,\vec{r}, \qquad f(r) = -\frac{L^2}{m\,p\,r^3} \tag{1.12}$$

7. Im Kraftgesetz sind noch Bahnparameter L und p enthalten; Eliminierung mittels drittem Keplerschen Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \quad \text{mit } T\text{: Umlaufzeit}$$

Der Flächensatz lautete (siehe Kapitel 1.4.3):

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\varrho^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \qquad \Rightarrow \quad A(t) = \frac{L}{2m}t + \text{const.}$$

Für die während eines gesamten Umlaufs überstrichene Fläche gilt dann:

$$\pi ab = A(T) - A(0) = \frac{L}{2m}T,$$

und damit folgt:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m^2\pi^2a^2b^2}{L^2a^3} = \frac{4m^2\pi^2b^2}{L^2a} = \frac{4m^2\pi^2p}{L^2} = \text{const.},$$

also:

$$\frac{L^2}{p\,m^2} = \text{const.} =: f \qquad \text{universelle Konstante im Sonnensystem}$$

Es ist somit:

$$\vec{F} = F^r \vec{b}_r = -\frac{fm}{r^2}\vec{b}_r = -\frac{fm}{r^3}\vec{r}$$

mit dem Potential:

$$U(r) = -\int \left(-\frac{fm}{r^2}\right) \mathrm{d}r = -\frac{fm}{r}$$

Anmerkung: Hier haben wir die freie Integrationskonstante U_0 so gewählt, dass $\lim_{r\to\infty} U(r) = 0$.

8. **Resultat:**
Die Keplerschen Gesetze sagen aus, dass sich die Planeten in unserem Sonnensystem in einem Zentralkraftfeld mit dem Potential

$$U(r) = -\frac{fm}{r}$$

bewegen.

9. Ermittelung der Konstanten f:

(a) Schlussfolgerung aus Keplerschen Gesetzen:

Die Gravitationskraft $\vec{F}_{12}$, ausgeübt vom Massenpunkt 2 (Masse m_2) auf den Massenpunkt 1 (Masse m_1), lautet:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{f_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Analog:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{f_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

(b) Nach dem dritten Newtonschen Axiom ist

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(c) Daraus folgt:

$$f_2 m_1 = f_1 m_2, \qquad \text{also:} \qquad \frac{f_n}{m_n} = \text{const.} =: \gamma$$

γ ist die *Newtonsche Gravitationskonstante*

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11}\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}$$

(d) Im Sonnensystem:

$$f = M\gamma, \qquad M : \text{Sonnenmasse}$$

(e) Für das Gravitationsgesetz folgt:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

1.5.2 Ableitung der Planetenbewegung aus dem Gravitationsgesetz

- Ausgangspunkt:

$$\frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = E \tag{1.13}$$

- Möglicher Weg in 1.4.5 dargestellt (Übungsserie)
- Hier: Alternativer Weg, einfacher für $U(\varrho) \sim 1/\varrho$
- Neue Variable s $\quad ({}' \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi})$

$$s := \frac{1}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varrho} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{s'}{s^2} \cdot \frac{L}{m\varrho^2} = -\frac{L}{m}s'$$

- Wir schreiben $V(s) = U(\varrho) = U(1/s)$. Aus (1.13) wird dann:

$$\frac{L^2}{2m}\left(s'^2 + s^2\right) + V(s) = E$$

- Differenzieren nach φ:

$$s'' + s = -\frac{m}{L^2}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}$$

- Für das Gravitationsfeld, $V(s) = -\gamma m M s$, folgt:

$$s'' + s = \frac{\gamma m^2 M}{L^2}$$

mit der Lösung:

$$s = A\sin\varphi + B\cos\varphi + \frac{\gamma m^2 M}{L^2}$$