- d'Alembertsches Prinzip:

  Die der Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i;t) = 0$ zugeordnete Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ leistet bei virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_\alpha$ keine Arbeit:

$$\vec{Z}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

  Alternative Formulierung:

  $\vec{Z}_\alpha$ steht senkrecht auf virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_\alpha$.

- Analyse:

  1. Zum (festgehaltenen) Zeitpunkt t beschreibt die Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i;t) = 0$ eine zweidimensionale Fläche F im euklidischen Raum E_3.
  2. Der Massenpunkt muss der Zwangsbedingung genügen; er befindet sich auf dieser Fläche F. Die Koordinaten x^i des Massenpunktes erfüllen also $g_\alpha(x^i;t) = 0$.
  3. Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_\alpha$ ist eine gedachte, infinitesimale Verschiebung des Massenpunktes innerhalb von F.
  4. $\delta\vec{r}_\alpha$ ist daher ein *tangentialer* Vektor zu F.
  5. Es gibt eine ausgezeichnete Normalenrichtung an die Fläche F, beschrieben durch den Einheitsnormalenvektor:

$$\vec{n}_\alpha = \frac{\mathrm{grad}\, g_\alpha}{|\mathrm{grad}\, g_\alpha|}, \qquad \mathrm{grad}\, g_\alpha = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i} \vec{b}_i$$

     $\vec{n}_\alpha$ zeigt in Richtung größer werdender Werte von g_α. [1]
  6. Da $\delta\vec{r}_\alpha$ tangential zu F ist, gilt:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

  7. Die Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ steht nun senkrecht auf allen denkbaren (tangentialen) virtuellen Verrückung $\delta\vec{r}_\alpha$; sie muss demnach parallel zu $\vec{n}_\alpha$ gerichtet sein.

[1] Jeder tangentiale Vektor $\vec{h} = \sum_{i=1}^{3} h^i \vec{b}_i$ an F erfüllt $0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} g_\alpha(x^i + \varepsilon h^i, t) = \mathrm{grad} g_\alpha \cdot \vec{h}$; er steht also senkrecht auf $\mathrm{grad} g_\alpha$. Damit weist $\mathrm{grad} g_\alpha$ in die Normalenrichtung von F.

8. Es muss also gelten:

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \mathrm{grad}\, g_\alpha$$

mit einem unbekannten, noch zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ (kann positiv oder negativ sein), der Betrag und Richtungssinn von $\vec{Z}_\alpha$ beschreibt.

9. λ_α wird *Lagrangescher Multiplikator* genannt.

- Beispiel Räumliches mathematisches Pendel ($N_Z = 1$):

$$g_1(x, y, z; t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Es ist:

$$\mathrm{grad}\, g_1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_1}{\partial x^i} \vec{b}_i = 2 \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{b}_i = 2\vec{r}$$

Damit folgt:

$$\vec{Z}_1 = 2\lambda_1 \vec{r}$$

Die Richtung der Zwangskraft beim räumlichen mathematischen Pendel ist radial; ihr (i.a. zeitabhängiger) Betrag und Richtungssinn sind noch zu bestimmen.

- Veranschaulichung:

1. Modellierung einer Zwangsbedingung durch einen Tisch, der aus unendlich vielen infinitesimalen Federn aufgebaut ist.
2. Massenpunkt auf Tisch führt zu „Eindellung" Δz, $mg = k\Delta z$, k: Federkonstante
3. Im Grenzfall $k \to \infty$ folgt $\Delta z = mg/k \to 0$, der Massenpunkt genügt dann also der Zwangsbedingung $z = 0$.
4. In der Feder gespeicherte potentielle Energie $U = \frac{1}{2}k\Delta z^2 = \frac{mg}{2k} \to 0$ für $k \to \infty$.
5. Interpretation: Bei einer Zwangsbedingung (eine solche ergibt sich im Grenzfall $k \to \infty$) nimmt die Unterlage keine Energie auf und gibt keine ab.
6. Verallgemeinerung: d'Alembertsches Prinzip, Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ leistet bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit.

- **Wichtige Anmerkung**:
  Das d'Alembertsche Prinzip kann *nicht* mathematisch abgeleitet, sondern nur durch die Übereinstimmung mit der Erfahrung ,,bewiesen" werden.

3.3 Lagrange-Gleichungen I. Art

3.3.1 Ableitung der Gleichungen

- Die Gesamtkraft auf einen Massenpunkt in äußeren (,,eingeprägten") Kraftfeldern, dessen Bewegung den Zwangsbedingungen $g_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \ldots, N_Z$) unterliegt, ist die Summe aller Zwangskräfte und eingeprägter Kräfte:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_\alpha, \qquad \vec{F} : \text{Summe der eingeprägten Kräfte}$$

- Die Zwangskräfte $\vec{Z}_\alpha$ sind gegeben durch:

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \mathrm{grad}\, g_\alpha$$

- Somit folgen die Lagrange-Gleichungen I. Art:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \mathrm{grad}\, g_\alpha \tag{3.2}$$

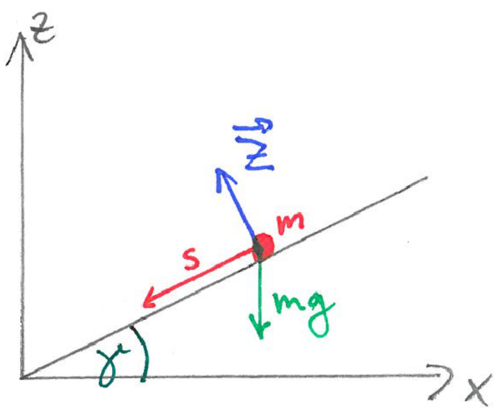
- Diese sind gemeinsam zu lösen mit den N_Z Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x^i; t) = 0. \tag{3.3}$$

- (3.2) und (3.3) ergeben $(3 + N_Z)$ Gleichungen für die $(3 + N_Z)$ Unbekannten (x^i, λ_α).

3.3.2 Lösungsmethode

Beschreibung am Beispiel des Gleitens eines Massenpunktes auf einer schiefen Ebene (siehe Abb.).



1. *Man führe ein IS $\mathcal{S}$ ein und formuliere die Zwangsbedingungen in der vorgeschriebenen Form $g_\alpha = 0$.*

   Eine schiefe Ebene wird beschrieben durch $z = x \tan\gamma$. Wir wollen ferner die Bewegung auf die (x, z)-Ebene beschränken, $y = 0$. Dann haben wir:

$$g_1(x^i; t) = x \sin\gamma - z \cos\gamma = 0, \qquad g_2(x^i; t) = y = 0$$

2. *Man schreibe die Lagrange-Gleichungen I. Art in Komponenten auf.*

   Mit der eingeprägten Kraft $\vec{F} = -mg\vec{b}_z$ folgt:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = \lambda_1 \sin\gamma \tag{3.4}$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = \lambda_2 \tag{3.5}$$

$$m\ddot{z} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - mg = -\lambda_1 \cos\gamma - mg \tag{3.6}$$

3. *Man differenziere die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit, eliminiere die entstehenden Beschleunigungen unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen I. Art und bestimme die λ_α aus den so gefundenen Gleichungen.*

   Für Beispiel ergibt sich:

$$\ddot{x} \sin\gamma - \ddot{z} \cos\gamma = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

   Einsetzen von (3.4-3.6) liefert:

$$\frac{\lambda_1}{m} \sin^2\gamma - \left(-\frac{\lambda_1}{m} \cos\gamma - g \right) \cos\gamma = 0, \qquad \lambda_2 = 0,$$

also:

$$\lambda_1 = -mg\cos\gamma, \qquad \lambda_2 = 0 \tag{3.7}$$

I.A. erhält man die λ_α als Funktionen von $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ und t.

4. *Man eliminiere die λ_α aus den Lagrange-Gleichungen I. Art und löse diese unter Beachtung der Zwangsbedingungen $g_\alpha = 0$.*

   Aus (3.4-3.6) und (3.7) folgt:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -mg\cos\gamma\sin\gamma, && (3.8)\\
m\ddot{y} &= 0, && (3.9)\\
m\ddot{z} &= mg\cos^2\gamma - mg = -mg\sin^2\gamma && (3.10)
\end{aligned}
$$

   Lösung:

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{gt^2}{2}\cos\gamma\sin\gamma + \dot{x}_0 t + x_0,\\
y &= \dot{y}_0 t + y_0,\\
z &= -\frac{gt^2}{2}\sin^2\gamma + \dot{z}_0 t + z_0
\end{aligned}
$$

   Einsetzen in Nebenbedingungen liefert:

$$
\begin{aligned}
0 &= g_1(x^i;t) = \left(-\frac{gt^2}{2}\cos\gamma\sin\gamma + \dot{x}_0 t + x_0\right)\sin\gamma - \left(-\frac{gt^2}{2}\sin^2\gamma + \dot{z}_0 t + z_0\right)\cos\gamma\\
0 &= g_2(x^i;t) = \dot{y}_0 t + y_0,
\end{aligned}
$$

   also:

$$\dot{x}_0\sin\gamma - \dot{z}_0\cos\gamma = 0, \quad x_0\sin\gamma - z_0\cos\gamma = 0; \qquad \dot{y}_0 = 0 = y_0$$

   Das sind die Zwangsbedingungen und ihre zeitliche Ableitungen zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Bewegung ist damit vollständig bestimmt.

   Alternativer Weg:

   (a) Einführung einer *angepassten* Koordinate s:

$$z = -s\sin\gamma, \qquad x = -s\cos\gamma$$

   Damit ist die Zwangsbedingung $g_1 = 0$ identisch erfüllt.

(b) Aus (3.8-3.10) folgt:

$$m\ddot{s} = -m(\ddot{z}\sin\gamma + \ddot{x}\cos\gamma) = mg\sin\gamma,$$

also:

$$s = \frac{gt^2}{s}\sin\gamma + \dot{s}_0 t + s_0$$

Bewegung des Massenpunktes erfolgt so, als ob $mg\sin\gamma$ als Schwerkraft in Bewegungsrichtung wirkt.

(c) *Anmerkung:* Angepasste Koordinaten spielen eine entscheidende Rolle beim Übergang zu den so genannten Lagrange-Gleichungen II. Art.

5. *Man bestimme die Zwangskräfte*:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \mathrm{grad}\, g_1 = -mg\cos\gamma\sin\gamma\ \vec{b}_x + mg\cos^2\gamma\ \vec{b}_z, \qquad \vec{Z}_2 = 0$$

$\vec{Z}_1$ kompensiert (unabhängig von $\dot{\vec{r}}$) die zur Bahngeraden senkrechte Komponente der Schwerkraft.

3.4 Gültigkeit der Erhaltungssätze

1. Impulsbilanz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\dot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}, \qquad \vec{Z} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N_Z} Z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \mathrm{grad}\, g_\alpha$$

Für $\vec{F} + \vec{Z} = 0$ gilt Impulserhaltung; ist i.A. nur in speziellen Fällen erfüllt.

2. Drehimpulsbilanz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{r} \times (\vec{F} + \vec{Z})$$

ist nur in Ausnahmefällen ein Erhaltungssatz (*Beispiel:* kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kugelschale).

Weist das Problem eine axiale Symmetrie auf, so ist die Drehimpulskomponente entlang der Symmetrieachse erhalten.

3. Energiebilanz bei Annahme eines Potentials U für die eingeprägten Kräfte:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) &= \vec{Z}\cdot\dot{\vec{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N_Z}\lambda_\alpha \operatorname{grad} g_\alpha \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_Z}\lambda_\alpha\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i}\dot{x}^i\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_Z}\lambda_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_\alpha[x^i(t);t] - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}\right),\end{aligned}$$

weil

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_\alpha[x^i(t);t] = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i}\dot{x}^i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}.$$

Nun ist die Zwangsbedingung $g_\alpha = 0$ entlang der gesamten Bewegung identisch erfüllt; es ist damit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_\alpha[x^i(t);t] = 0,$$

und es folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = -\sum_{\alpha=1}^{N_Z}\lambda_\alpha\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \tag{3.11}$$

Anmerkungen:

(a) Für zeitunabhängige („skleronome") Zwangsbedingungen, $\partial g_\alpha/\partial t = 0$ gilt der Energieerhaltungssatz.

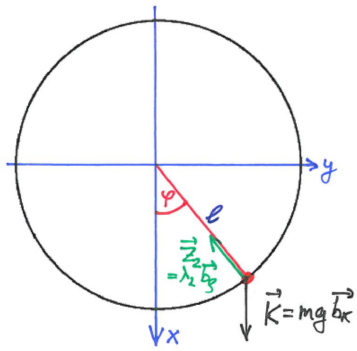
(b) Bei zeitabhängigen („rheonomen") Zwangsbedingungen leistet die Zwangskraft *reale* Arbeit und führt somit zur Veränderung der mechanischen Energie.

Beispiel: Bewegte schiefe Ebene, $z = x\tan\gamma(t)$ mit vorgegebener Funktion $\gamma = \gamma(t)$.

(c) Man beachte den Unterschied zwischen der Arbeit der Zwangskraft bei *realen* Verschiebungen (für rheonome Zwangsbedingungen) und der Gültigkeit des d'Alembertschen Prinzips für *virtuelle* Verrückungen.

3.5 Beispiele

3.5.1 Ebenes mathematisches Pendel



- Massenpunkt (Masse m) sei aufgehängt an einem Pendelstab (Länge ℓ) und schwinge im homogenen Erdschwerefeld in einer Ebene.
- Zwangsbedingungen in kartesichen Koordinaten (x, y, z) mit Ebene $z = 0$ als Bahnebene, Aufhängepunkt im Koordinatenursprung:

$$g_1 = z = 0, \qquad g_2 = \sqrt{x^2 + y^2} - \ell = 0$$

- Zwangskräfte im kartesischen System, $Z^i_\alpha = \lambda_\alpha \, \partial g_\alpha / \partial x^i$:

$$Z^x_1 = Z^y_1 = 0, \quad Z^z_1 = \lambda_1,$$

$$Z^x_2 = \lambda_2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lambda_2 \cos\varphi, \quad Z^y_2 = \lambda_2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lambda_2 \sin\varphi, \quad Z^z_2 = 0$$

Hier sind (ϱ, φ, z') Zylinderkoordinaten,

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z' = z.$$

- Eingeprägte Kraft im kartesischen System:

$$\vec{F} = mg\vec{b}_x$$

- Berechnung der Komponenten der Zwangskräfte in Zylinderkoordinaten:

$$Z^\varrho = Z^x \cos\varphi + Z^y \sin\varphi, \quad Z^\varphi = \frac{1}{\varrho} \left(-Z^x \sin\varphi + Z^y \cos\varphi \right), \quad Z^{z'} = Z^z$$

Somit:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{b}_{z'}, \qquad \vec{Z}_2 = \lambda_2 \vec{b}_\varrho$$

- Eingeprägte Kraft in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F} = mg\cos\varphi\,\vec{b}_\varrho - \frac{mg}{\varrho}\sin\varphi\,\vec{b}_\varphi$$

- Lagrange-Gleichungen I. Art in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) &= F^\varrho + Z_1^\varrho + Z_2^\varrho = mg\cos\varphi + \lambda_2 \\ m\left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\dot{\varphi}\right) &= F^\varphi + Z_1^\varphi + Z_2^\varphi = -\frac{mg}{\varrho}\sin\varphi \\ m\ddot{z}' &= F^{z'} + Z_1^{z'} + Z_2^{z'} = \lambda_1 \end{aligned}$$

- Ausnutzung der Nebenbedingung: $\varrho = \ell, \dot{\varrho} = 0 = \ddot{\varrho}, z' = \ddot{z}' = 0$:

$$\begin{aligned} -m\ell\dot{\varphi}^2 &= mg\cos\varphi + \lambda_2 \\ m\ddot{\varphi} &= -\frac{mg}{\ell}\sin\varphi, \\ \lambda_1 &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -m\ell\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = Z_2^\varrho$$

und:

$$\ell\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$$

- Lösung für kleine Ausschläge $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = A\sin(\omega t + \gamma), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \tag{3.12}$$

- Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig (skleronom). Dann gilt Energieerhaltung:

$$E = T+U = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2+\varrho^2\dot{\varphi}^2)-mgx = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2-mg\ell\cos\varphi = -mg\ell\cos\varphi_U$$

  Es ist $\dot{\varphi} = 0$ am Umkehrpunkt, d.h. für $t = t_U$, $\varphi = \varphi_U$.

- Trennung der Variablen liefert (setzen $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) > 0$):

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}\,\omega}\int_0^{\varphi(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}}{\sqrt{\cos\tilde{\varphi} - \cos\varphi_U}}$$

Elliptisches Integral; erhalten *Normalform* durch Substitution

$$\sin\tilde{u} = \frac{1}{k}\sin\frac{\tilde{\varphi}}{2}, \qquad k = \sin\frac{\varphi_U}{2},$$

also:

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^{u(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tilde{u}}} = \frac{1}{\omega}F\Big(k, u(t)\Big)$$

mit:

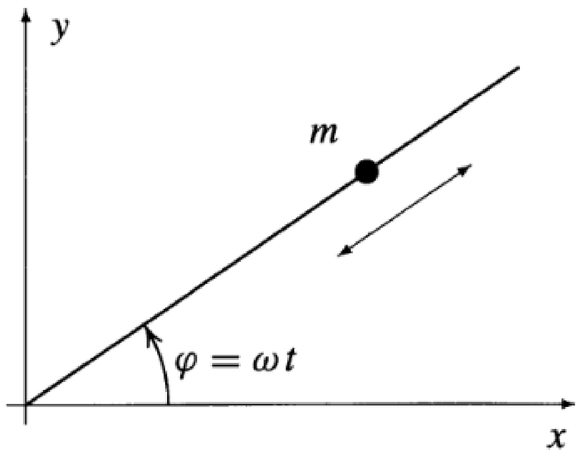
$$\varphi(t) = 2\arcsin[k\sin u(t)], \qquad k = \sin\frac{\varphi_U}{2}$$

- Abhängigkeit von k hat variable Schwingungsdauer zur Folge (im Gegensatz zur harmonischen Näherung (3.12)).

- Zwangskraft:

$$\vec{Z}_1 = 0, \qquad \vec{Z}_2 = Z_2^\varrho\vec{b}_\varrho = -m(\ell\dot{\varphi}^2+g\cos\varphi)\vec{b}_\varrho = -mg(3\cos\varphi-2\cos\varphi_U)\vec{b}_\varrho$$

3.5.2 Massenpunkt auf rotierender Stange



- Ebene Bewegung eines Massenpunktes entlang einer rotierenden Stange (siehe Abb.); keine eingeprägten Kräfte, $\vec{F} = 0$.

- Zwangsbedingungen in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z')

$$z' = 0, \quad \varphi = \omega t$$

- Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten ($x = \varrho\cos\varphi, y = \varrho\sin\varphi, z = z'$):

$$\begin{aligned} z' &= 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = z = 0, \\ \varphi &= \omega t \quad \Rightarrow \quad g_2 = x\sin(\omega t) - y\cos(\omega t) = \varrho\sin(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned}$$

- Zwangskräfte:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= \lambda_1 \vec{b}_z = \lambda_1 \vec{b}_{z'}, \\ \vec{Z}_2 &= \lambda_2[\sin(\omega t)\,\vec{b}_x - \cos(\omega t)\,\vec{b}_y] = \lambda_2[\sin\varphi\,\vec{b}_x - \cos\varphi\,\vec{b}_y] = -\frac{\lambda_2}{\varrho}\vec{b}_\varphi \end{aligned}$$

- Lagrange-Gleichungen I. Art in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2) &= Z_1^\varrho + Z_2^\varrho = 0 \\ m\left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\varrho}}{\varrho}\dot{\varphi}\right) &= Z_1^\varphi + Z_2^\varphi = -\frac{\lambda_2}{\varrho} \\ m\ddot{z}' &= Z_1^{z'} + Z_2^{z'} = \lambda_1 \end{aligned}$$

- Ausnutzung der Nebenbedingung: $\varphi = \omega t, \dot{\varphi} = \omega, \ddot{\varphi} = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho\omega^2 &= 0 \\ \lambda_2 &= -2m\dot{\varrho}\omega \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \varrho_0\cosh\omega t + \frac{\dot{\varrho}_0}{\omega}\sinh\omega t, \\ \vec{Z}_2 &= \frac{2}{\varrho}\,m\,\dot{\varrho}\,\omega\,\vec{b}_\varphi = 2\,m\dot{\varrho}\,\omega\,\vec{e}_\varphi, \\ \vec{Z}_1 &= 0. \end{aligned}$$

- Interessanter Spezialfall: $\dot{\varrho}_0 = -\varrho_0\omega$

$$\Rightarrow \qquad \varrho(t) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\omega t}$$

  Bewegung mit abnehmender Geschwindigkeit zum Zentrum hin, kommt dort zur Ruhe.

- Interpretation der Zwangskraft $\vec{Z}_2$ von einem mitrotierenden System Σ' aus: Nötig, um Coriolis-Kraft zu kompensieren und den Massenpunkt bei einem festen Winkel φ' zu halten.