- Methode ist Anwendung des *Energiesatzes* (später), Integrationskonstante E: Energie, U: Potential der Kraft F.

- Lösen durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}} = \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\left[U(x_0) - U(x)\right]}}$$

Wegen $\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \frac{1}{v_0}$ stimmt das zu wählende Vorzeichen mit demjenigen von v_0 überein, also:

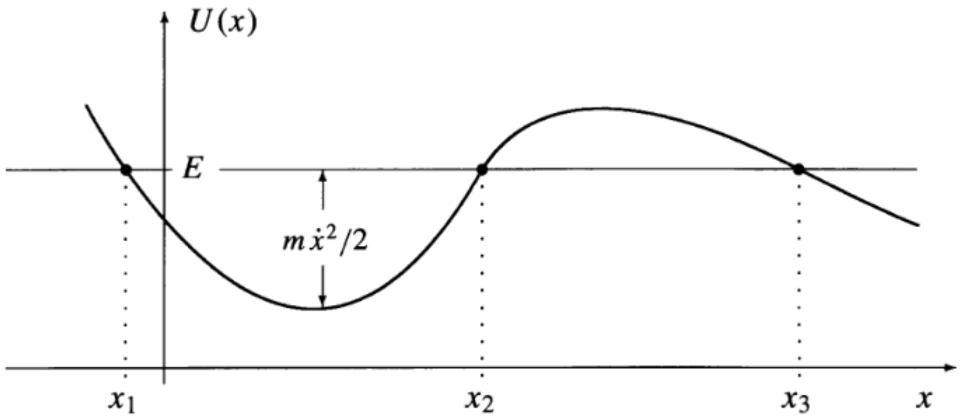
$$t = \mathrm{sign}(v_0)\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(\xi)\right]}} = \mathrm{sign}(v_0)\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\left[U(x_0) - U(\xi)\right]}} \tag{1.3}$$

- Diskussion:

  1. Sei der Verlauf von $U(x)$ wie in der Abbildung skizziert und $E = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$ durch die Anfangsbedingungen fixiert.
  2. Dann findet die Bewegung bezüglich x nur in solchen Intervallen statt, in denen $U(x) \leq E$ ist.
  3. Falls $U(x) > E$ wäre, dann gälte für diesen Punkt: $\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - U(x) < 0$, was auszuschließen ist.
  4. Mögliche Bewegung:
     (a) Periodische Schwingung im Intervall $[x_1, x_2]$, falls $U(x) > E$ für $x < x_1$ und $x > x_2$.
     (b) Bewegung verläuft ins Unendliche oder kommt von dort, falls $U(x) \leq E$ für $x \geq x_3$. Umkehrpunkt bei $x = x_3$, wo $U(x_3) = E$ gilt.
     (c) Formel (1.3) ist immer gültig bis zum Erreichen des ersten Intervallendes (Umkehrpunkt).
     (d) Ruhelagen: Extrema des Potentials U, stabil für Minimum, instabil für Maximum.

(e) Näherung des Potentials in der Umgebung eines Minimums durch Parabel $U(x) \approx U(x_{\min}) + \frac{1}{2}k(x - x_{\min})^2$: Potential eines harmonischen Oszillators:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U(x_{\min}) + \frac{1}{2}k(x - x_{\min})^2\right) = -k(x - x_{\min})$$



1.4 Allgemeine Sätze und Begriffe

1.4.1 Vorbemerkungen

- Newtonsche Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in drei Raumdimensionen sind drei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
- Keine allgemeine Lösungstheorie bekannt.
- Aber: Lösungverfahren existieren für spezielle, in der Natur vorkommende Kräfte
- Verfahren benutzen zunächst mathematisch definierte Größen (Energie, Potential, Drehimpuls), die dann aber in der gesamten Physik Bedeutung erlangen.

1.4.2 Impulssatz

- Impulssatz ist äquivalent zum 2. Newtonschen Axiom:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F}$$

- Impulserhaltung: Falls Kraft verschwindet gilt:

$$\vec{p} = \text{const.}$$

Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf Geraden (1. Axiom)

1.4.3 Drehimpulssatz und Flächensatz

- Vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\vec{r}$:

$$m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Wegen $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

- Erhalten somit den *Drehimpulssatz:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{M}$$

mit:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p} : \text{Drehimpuls} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} : \text{Drehmoment}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment.

- *Anmerkung:* Drehimpuls ist (wie der Ortsvektor $\vec{r}$) vom Koordinatenursprung abhängige Größe; bei Übergang in ein verschobenes IS $\mathcal{S}'$ mit $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}_0$ ($\vec{r}_0 = \text{const.}$) folgt:

$$\vec{L}' = \vec{r}\,' \times \vec{p}\,' = (\vec{r} + \vec{r}_0) \times \vec{p} = \vec{L} + \vec{r}_0 \times \vec{p}$$

- Falls $\vec{M}$ verschwindet, erhalten wir den *Drehimpulserhaltungssatz:*

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Folgerungen:

1. $\vec{M} = 0$ bedeutet $\vec{F} \parallel \vec{r}$,

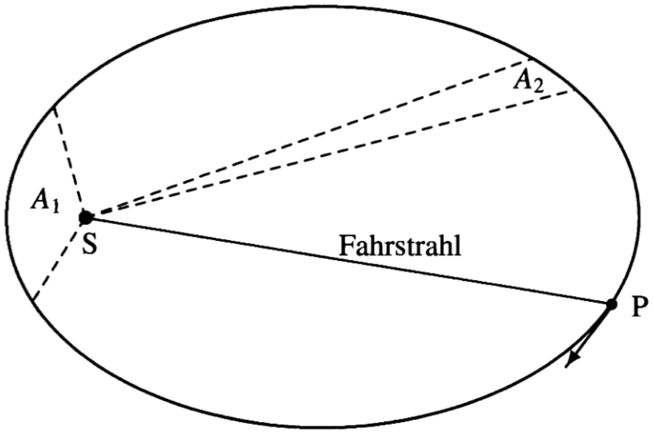
$$\vec{F} = \vec{r} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \qquad \text{Zentralkraft}$$

2. Da $(\vec{r} \times \vec{p}) \perp \vec{r}$, folgt:
$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$$
Für konstantes $\vec{L}$ ist dies die Gleichung einer Ebene durch den Koordinatenursprung, in Komponenten:
$$xL^x + yL^y + zL^z = 0, \quad (L^x, L^y, L^z) : \text{const.}$$

3. Konsequenz: Wenn $\vec{L} = \text{const.}$, dann bewegt sich der Massenpunkt auf der zum Drehimpuls senkrechten Ebene, die den Nullpunkt enthält.

4. Wählen diese Ebene als (x, y)-Ebene und erhalten mit $z = 0 = \dot{z}$:
$$L^x = 0 = L^y, \qquad L^z = |\vec{L}| = L = m(\vec{r} \times \vec{v})^z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$
Umrechnung auf Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) mit
$$x = \varrho \cos\varphi, \qquad y = \varrho \sin\varphi$$
d.h. :
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\varrho}\cos\varphi - \dot{\varphi}\varrho\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{\varrho}\sin\varphi + \dot{\varphi}\varrho\cos\varphi, \end{aligned}$$
Es folgt:
$$L = m[\varrho\cos\varphi(\dot{\varrho}\sin\varphi + \dot{\varphi}\varrho\cos\varphi) - \varrho\sin\varphi(\dot{\varrho}\cos\varphi - \dot{\varphi}\varrho\sin\varphi)],$$
also:
$$L = m\varrho^2\dot{\varphi} \tag{1.4}$$

- *Interpretation:* Die Fläche $\mathrm{d}A$ des infinitesimalen Dreiecks, das der Radiusvektor vom Nullpunkt zum Massenpunkt in der Zeit $\mathrm{d}t$ überstreicht, ist laut Abb. $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\varrho^2\,\mathrm{d}\varphi$. Es folgt somit:
$$\varrho^2\dot{\varphi} = 2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{const.}$$
Der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Massenpunktes überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen ($A_1 = A_2$).



1.4.4 Energiesatz

- Skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{1.5}$$

Nun ist:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2\right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

T: kinetische Energie („Bewegungsenergie") des Massenpunktes

- *Energieerhaltungssatz:* Wenn man die rechte Seite der Gleichung (1.5) als totales Differential schreibt:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(\vec{r}), \tag{1.6}$$

dann ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T + U = E = \text{const} \tag{1.7}$$

- *Frage:* Wann gilt (1.6)?

Antwort: In einem IS $\mathcal{S}$ werde ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet, in dem die Bewegung des Teilchens stattfindet. Ist $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (nur ortsabhängig) und gilt ferner in G:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \operatorname{rot} \vec{F} := \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \vec{b}_i = 0,$$

so lässt sich ein zugeordnetes *Potential* $U = U(\vec{r})$ finden, das (1.6) erfüllt, und dann gilt der Energieerhaltungssatz (1.7).

Beweis:

1. Stokescher Integralsatz:
   Für eine zweidimensionale Fläche $\Omega \subset G$ gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{1.8}$$

   – Hierbei steht der differentielle Flächennormalenvektor $\mathrm{d}\vec{A}$ senkrecht auf Ω.
   – Die Integration entlang $\partial\Omega$ ist gemäß der ,,Rechte-Hand-Regel" auszuführen: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalen $\mathrm{d}\vec{A}$, so zeigen die Finger in Richtung des Durchlaufsinns, in dem man die Randkurve $\partial\Omega$ zu durchlaufen hat.

   Beweisskizze:

   (a) Betrachten Dreieck in der (x, y)-Ebene, siehe Abb. unten. Wir schreiben $\dfrac{\partial F^k}{\partial x^j} =: F^k_{,j}$ und finden:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{A} &= \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{F})^z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_F (F^y_{,x} - F^x_{,y}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^b \int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} F^y_{,x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_0^a \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} F^x_{,y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^b \left[F^y\left(a\left(1-y/b\right), y\right) - F^y(0,y)\right] \mathrm{d}y \\
&\quad - \int_0^a \left[F^x\left(x, b\left(1-x/a\right)\right) - F^x(x,0)\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Wir schreiben:

$$-\int_0^a F^x\left(x, b\left(1-x/a\right)\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^b F^x(a(1-y/b), y)\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)\,\mathrm{d}y,$$

wobei wir $x = a(1-y/b)$ substituiert haben. Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{A} &= \int_0^a F^x(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_b^0 F^y(0,y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_0^b \begin{pmatrix} F^x(a(1-\lambda/b),\lambda) \\ F^y(a(1-\lambda/b),\lambda)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\lambda \\ \mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\lambda\end{pmatrix}\mathrm{d}\lambda \\ &= \oint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

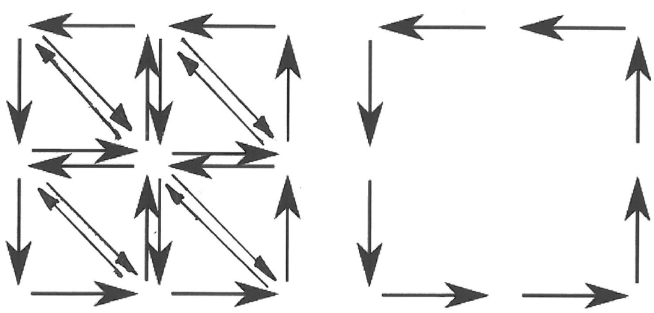
Hier haben wir das Randstück Γ dargestellt als:

$$\Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = a(1-\lambda/b),\ y=\lambda,\ \lambda\in[0,b]\}$$

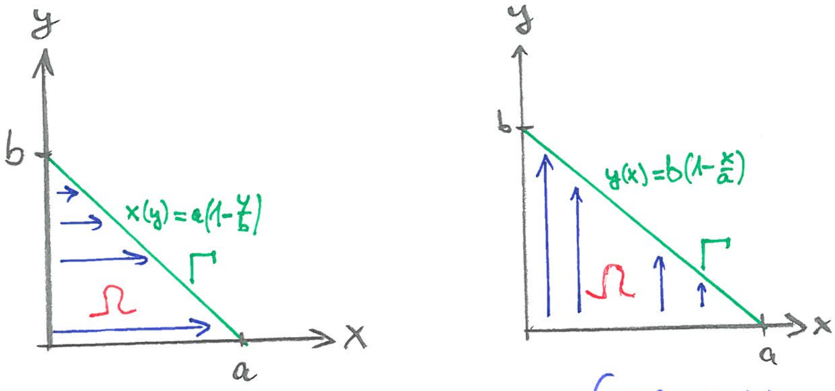
(b) Gültigkeit von (1.8) kann auf beliebig verschobenes und verdrehtes Dreieck ausgedehnt werden.

(c) Wir teilen die Fläche Ω in infinitesimale Dreiecke auf.

(d) Bei der Aufsummation heben sich Beiträge benachbarter interner Randkurven auf, da diese zweimal durchlaufen werden, und zwar entsprechend der Orientierung in gegensätzlicher Richtung, siehe Abb.



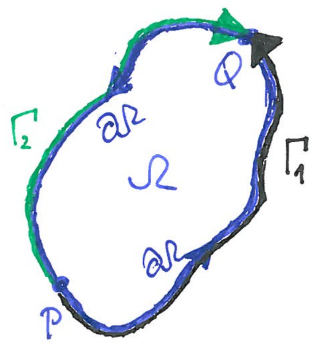
(e) *Anmerkung:* (1.8) gilt auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete (Beispiel: Kreisring)



zur Integration von $\int_\Omega F(x,y)\,dA$:

links: $\int_\Omega F(x,y)\,dA = \int_0^b \int_0^{a[1-y/b]} F(x,y)\,dx\,dy$

rechts: $\int_\Omega F(x,y)\,dA = \int_0^a \int_0^{b[1-x/a]} F(x,y)\,dy\,dx$



Wegunabhängigkeit von $\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r}$:

Wegen rot $\vec{F} = 0$ ist:

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Somit: $\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Zum Stokeschen Satz

2. Wegen $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ ist nach dem Stokeschen Satz

$$\int_{\vec{r}_P}^{\vec{r}_Q} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} \vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

   unabhängig von der Wahl der Verbindungskurve $\vec{r}(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} x^i(\lambda)\vec{b}_i$ (innerhalb G gelegen) zwischen den Punkten P und Q (mit Ortsvektoren $\vec{r}_P = \vec{r}(\lambda_P)$ und $\vec{r}_Q = \vec{r}(\lambda_Q)$), siehe Abb.

3. Definieren *Potential* U:

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

   mit beliebig wählbarem, aber festem Aufpunkt $\vec{r}_0$. Dann gilt (benutze Mittelwertsatz der Integralrechnung):

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(\vec{r}) = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+h\vec{b}_i} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h F^i(\vec{r}+\lambda\vec{b}_i)\,\mathrm{d}\lambda = -F^i(\vec{r})$$

4. *Zusammenfassung:*
   Falls $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ innerhalb G gilt, so existiert ein (*skalares*) Potential U mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\operatorname{grad}U = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x^i}\vec{b}_i,$$

   und es gilt der Energieerhaltungssatz (1.7), weil dann:

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x^i}\dot{x}^i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U[\vec{r}(t)]$$

   Wir nennen dann die Kraft *konservativ.*

5. *Anmerkung:* Falls $\vec{F} \perp \dot{\vec{r}}$, so ist $\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = 0$ und somit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = 0$, $T = \text{const.}$ Beispiel: magnetischer Anteil der Lorentzkraft in der E-Dynamik, $q\vec{v}\times\vec{B}$.

- Oft ist Gesamtkraft eine Summe von *konservativen* Kräften (die ein Potential aufweisen) und dissipativen Kräften: kein Potential (Beispiel Reibungskraft).

- Wir schreiben:
$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{Kons}} + \vec{F}_{\text{Diss}}$$
und erhalten:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = \vec{F}_{\text{Diss}} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{1.9}$$

- Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie U nennen wir kurz Energie. (1.9) ist der Energiesatz.

- Energie ist hier immer mechanische Energie. Umwandlungen in andere Energieformen entsprechen dissipativen Kräften, die zur Verringerung der mechanischen Energie E führen.

- Arbeit und Leistung:

  1. Bei Bewegung zwischen den Punkten P (Koordinaten $x^i_P = x^i(t_P)$) und Q (Koordinaten $x^i_Q = x^i(t_Q)$) leistet die Kraft $\vec{F}$ am Massenpunkt die Arbeit:
  $$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \mathrm{d}t,$$
  also: $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.
  2. Bei konservativen Kräften ist
  $$A = U(x^i_Q) - U(x^i_P)$$
  und damit allein durch die Punkte P und Q festgelegt (also nicht durch die Bahnkurve $x^i(t)$.)
  3. Leistung:
  $$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$
  ist ,,Arbeit pro Zeit".
  4. Energiesatz (1.9) sagt also, dass die Änderung der mechanischen Energie durch die Leistung der dissipativen Kräfte bewirkt wird.

1.4.5 Erhaltungssätze und Integration der Bewegungsgleichungen

- Erhaltungssätze sind „erste Integrale der Bewegung" (Differentialgleichungen erster Ordnung)
- Drehimpuls: $m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} = \text{const.}$: 3 Gleichungen
- Energie: $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = E = \text{const.}$: 1 Gleichung

Falls beide Erhaltungssätze gelten:

1. $\vec{F}$ ist ein Zentralkraftfeld, $\vec{F} = \vec{r} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
2. $\vec{F}$ ist nur von $\vec{r}$ abhängig (wegen Existenz des Potentials), also: $f = f(\vec{r})$
3. $f = f(|\vec{r}|) = f(r)$, weil (Übung):

   $$0 = \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(f\vec{r}) = f \operatorname{rot}(\vec{r}) + \operatorname{grad} f \times \vec{r} = \operatorname{grad} f \times \vec{r}$$

   Hinweis: Wertet man $\operatorname{grad} f \times \vec{r} = 0$ in Kugelkoordinaten aus (Übung), so zeigt sich, dass $\partial f/\partial\vartheta = 0 = \partial f/\partial\varphi$ gilt.

4. Konsequenz: r-abhängiges Potential U:

   Wir beschreiben eine beliebige Kurve in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) parametrisch durch $\big(r(\lambda), \vartheta(\lambda), \varphi(\lambda)\big)$ und erhalten entlang dieser Kurve:

   $$\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = r\vec{b}_r \cdot \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\vec{b}_r + \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\lambda}\vec{b}_\vartheta + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\vec{b}_\varphi\right)\mathrm{d}\lambda = r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = r\,\mathrm{d}r$$

   Es folgt also:

   $$U(r) = -\int f(r)\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int f(r) r\,\mathrm{d}r$$

   Potential U ist bis auf eine Integrationskonstante U_0 eindeutig bestimmt.