- Festlegung der Integrationskonstanten durch Forderung:
  $\varphi = 0$ soll sonnennächsten Punkt der Bahn beschreiben, s wird dort maximal:

$$\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\varphi^2}\right|_{\varphi=0} < 0 \quad \Rightarrow \quad -B < 0$$

- Damit:

$$s = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos\varphi), \qquad B = \frac{\varepsilon}{p} > 0, \qquad p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$$

- Parameter ε kann beliebige positive Werte annehmen:

  1. $0 < \varepsilon < 1$: Ellipsen mit Halbachsen $a = p/(1-\varepsilon^2)$, $b = p/\sqrt{1-\varepsilon^2}$; Entartung (Grenzfall): $\varepsilon = 0$: Kreisbahn (entartete Ellipse)
  2. $\varepsilon = 1$: Parabeln
  3. $\varepsilon > 1$: Hyperbeln

- Bestimmung der Ellipsenbahnparameter p und ε aus L und E:

  1. Es ist:
  $$L^2 = \gamma m^2 M p = \gamma m^2 M \, \frac{b^2}{a}$$
  2. Betrachten Energiesatz am sonnennächsten Punkt:
  $$\varphi = 0, \quad \dot{\varrho} = 0, \quad \varrho = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon)\,,$$
  $$E = \frac{L^2}{2m\varrho^2} - \frac{\gamma m M}{\varrho} = \gamma m M \left(\frac{p}{2\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\right) = \gamma m M \frac{\varepsilon - 1}{2\varrho},$$
  3. Damit folgt:
  $$E = -\frac{\gamma m M}{2a}, \qquad \frac{L^2}{E} = -2mb^2$$
  Die Energie bestimmt eindeutig die große Halbachse a; der Quotient L^2/E die kleine Halbachse b.

- Kennzeichnung einer Hyperbelbahn durch (siehe Abb.)

1. Abstand d vom Brennpunkt zur Asymptoten
2. Ablenkwinkel ϑ

- Bestimmung von d und ϑ aus L und E:

1. $\varrho \to \infty$, $\varphi \to \varphi_\infty$, Hyperbelgleichung $\Rightarrow \cos\varphi_\infty = -\dfrac{1}{\varepsilon}$
   Zusammenhang mit ϑ (siehe Abb.):

$$\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty), \quad \frac{\vartheta}{2} = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

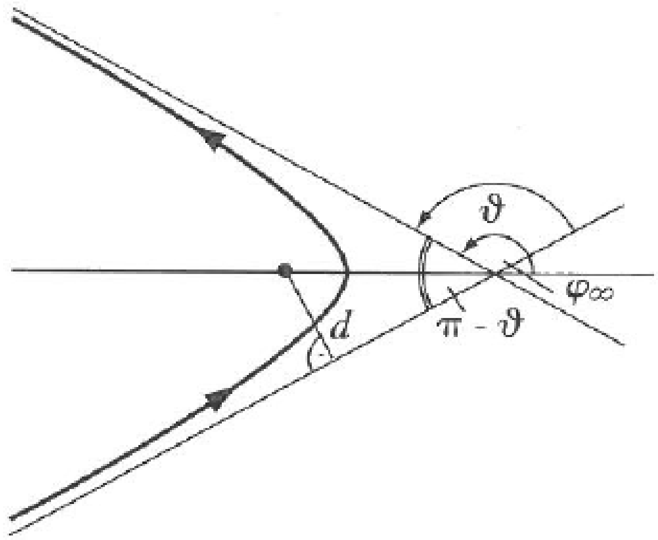


Abbildung aus Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik

2. Energiesatz am sonnennächsten Punkt:

$$E = \gamma m M \frac{\varepsilon - 1}{2\varrho}, \quad \varrho = \frac{p}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m M \frac{\varepsilon^2 - 1}{2p}$$

   Nun:

$$p = \frac{L^2}{\gamma M m^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 - 1 = \frac{2EL^2}{\gamma^2 M^2 m^3} = \cot^2\frac{\vartheta}{2}$$

3. Für kräftefreien Massenpunkt mit Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty = \vec{v}(\varrho \to \infty)$ entlang der Asymptote gilt:

$$L_\infty = m|\vec{r} \times \vec{v}_\infty| = m d v_\infty, \qquad v_\infty = |\vec{v}_\infty|$$

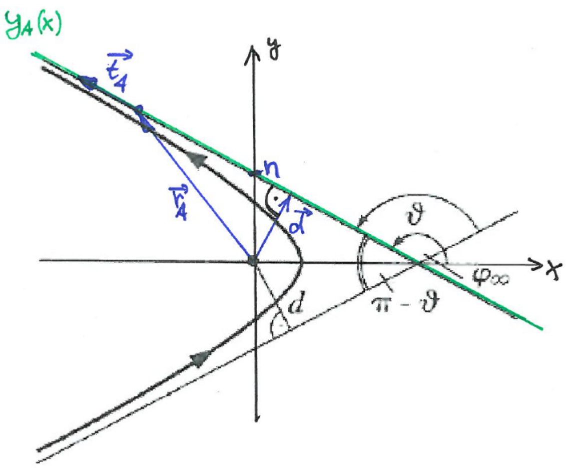
Im Unendlichen strebt Hyperbel gegen Asymptote; daher gilt:

$$L = \lim_{\varrho\to\infty} m|\vec{r}\times\vec{v}| = L_\infty = mdv_\infty$$

Energiesatz im Unendlichen:

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

4. Alternativer Weg zur Berechnung von d (siehe Abbildung):



Wir berechnen d gemäß

$$d = |\vec{r}_A \times \vec{t}_A|,$$

wobei $\vec{r}_A$ den Ortsvektor der oberen Asymptote und $\vec{t}_A$ den auf Eins normierten Tangentialvektor an diese Asymptote darstellt.

Aus der Abb. folgt:

$$d = |\vec{r}_A\times\vec{t}_A| = \left|(n\,\vec{b}_y + |\vec{r}_A - n\vec{b}_y|\,\vec{t}_A)\times\vec{t}_A\right| = n|\vec{b}_y\times\vec{t}_A|$$

(a) Berechnung von $\vec{t}_A$:

Geradengleichung der Asymptoten:

$$y_A(x) = x\tan\varphi_\infty + n \quad \Rightarrow \quad \vec{t}_A = \pm\frac{1}{\sqrt{1+[y_A'(x)]^2}}\left(\vec{b}_x + y_A'(x)\vec{b}_y\right)$$

Es folgt hier (siehe Abb.): $\qquad \vec{t}_A = \vec{b}_x\cos\varphi_\infty + \vec{b}_y\sin\varphi_\infty.$

(b) Berechnung von n:

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{\varphi\to\varphi_\infty}(y - x\tan\varphi_\infty), && x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \\
&= \lim_{\varphi\to\varphi_\infty}\frac{p\sin\varphi - p\cos\varphi\tan\varphi_\infty}{1+\varepsilon\cos\varphi} && (\text{weil } \varrho = p/(1+\varepsilon\cos\varphi)) \\
&= -\frac{p}{\varepsilon}(\cot\varphi_\infty + \tan\varphi_\infty) && (\text{nach der Regel von L'Hospital}) \\
&= \frac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} && (\text{weil } \cos\varphi_\infty = -1/\varepsilon)
\end{aligned}$$

(c) Damit folgt:

$$\begin{aligned}
d &= n|\vec{b}_y \times \vec{t}_A| = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left|\vec{b}_y \times (\vec{b}_x\cos\varphi_\infty + \vec{b}_y\sin\varphi_\infty)\right| \\
&= \frac{p\varepsilon|\cos\varphi_\infty|}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}
\end{aligned}$$

(d) Mit $\quad p = \dfrac{L^2}{\gamma M m^2} \quad$ und $\quad \varepsilon^2 - 1 = \dfrac{2EL^2}{\gamma^2 M^2 m^3} \quad$ ergibt sich:

$$d = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

1.5.3 Diskussion der Bewegungstypen im $1/r$-Potential

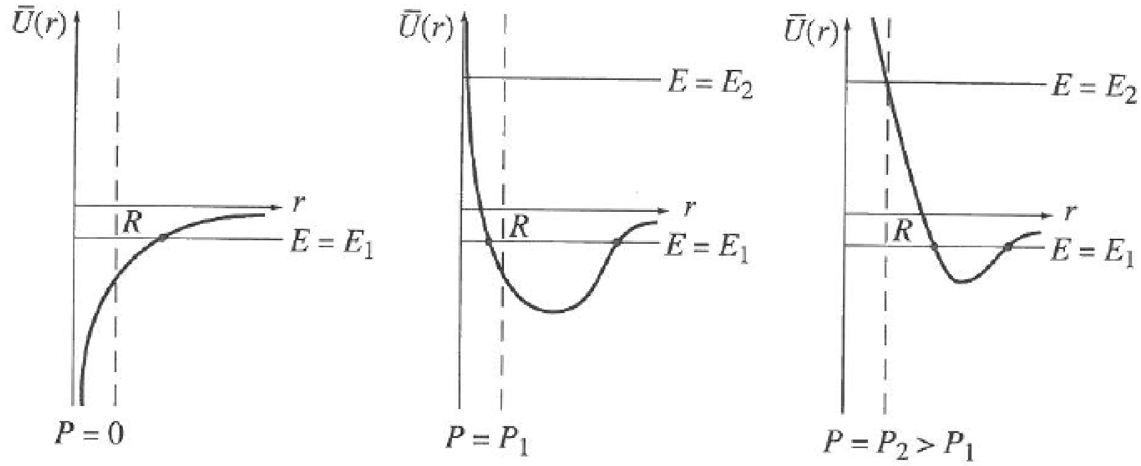


Abbildung aus Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik
(ersetze $P \to L$ und $r \to \varrho$)

- Energiesatz

$$E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = \frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \bar{U}(\varrho)$$

$\Rightarrow$ qualitative Diskussion wie in Kapitel 1.3.5 (siehe Abb.)

- Bewegung nur in solchen Bereichen möglich, in denen das *effektive* Potential $\bar{U}$ kleiner ist als die gegebene Energie E.

- Beitrag des Drehimpulses zum Potential $\bar{U}$ entspricht einer abstoßenden Kraft $\sim \varrho^{-2}$.

- Für negative Energiewerte $(E = E_1)$ ergibt sich eine gebundene Bewegung.

- 1. kosmische Geschwindigkeit v_1: Mindestgeschwindigkeit für einen Satelliten im Erdorbit

  v_1 gegeben durch:

$$\gamma\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{v_1^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} \approx 7{,}9\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

  R: Erdradius, M: Erdmasse

- 2. kosmische Geschwindigkeit v_2: Mindestgeschwindigkeit für Flucht aus Erdanziehung

  v_2 gegeben durch:

$$0 = E = \frac{m}{2}v_2^2 - \gamma\frac{mM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

- In der Abb. ist L_1 zu klein für Erdorbit: Satellit stürzt ab. L_2 ist hinreichend groß.

1.6 Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

1.6.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Betrachten Koordinatentransformation eines IS $\mathcal{S}$ (Koordinaten x^i) in ein rotierendes und beschleunigtes Bezugssystem Σ' (Koordinaten $x^{i'}$):

$$(x,y,z,t) \to (x',y',z',t') : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O}(t) \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix} \right], \quad t' = t$$

mit beliebig zeitabhängiger Verschiebung

$$\vec{r}_0(t) = x_0(t)\vec{b}_x + y_0(t)\vec{b}_y + z_0(t)\vec{b}_z = \sum_{i=1}^{3} x_0^i(t)\vec{b}_i$$

und zeitabhängiger orthogonaler Matrix

$$\hat{O}(t) = \begin{pmatrix} \underline{n}_1(t) & \underline{n}_2(t) & \underline{n}_3(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$\underline{n}_i(t) \cdot \underline{n}_j(t) = \delta_{ij}, \quad \text{also} \quad \hat{O}\hat{O}^T = \hat{O}^T\hat{O} = \hat{I} \qquad \text{für alle } t.$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \sum_{i=1}^{3} [\hat{O}]_i^{i'} (x^i - x_0^i), \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = [\hat{O}]_i^{i'}, \\ x^i &= \sum_{i'=1}^{3} [\hat{O}^T]_{i'}^i x^{i'} + x_0^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = [\hat{O}^T]_{i'}^i, \end{aligned}$$

$[\hat{O}]_i^{i'}$: Eintrag in der i'-ten Zeile und i-ten Spalte der Matrix $\hat{O}$

1. Berechnung der Zeitableitungen $\dot{\vec{b}}_{i'}$ der mitgeführten Koordinatenba-

sisvektoren im System Σ':

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{b}}_{i'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{O}^T]^i_{i'}\vec{b}_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{O}^T]^i_{i'}\left(\sum_{j'=1}^{3}[\hat{O}]^{j'}_i\vec{b}_{j'}\right) \\
&= \sum_{j'=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}[\hat{O}]^{j'}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{O}^T]^i_{i'}\right)\vec{b}_{j'} \\
\Rightarrow \quad \dot{\vec{b}}_{i'} &= \sum_{j'=1}^{3}[\hat{O}\frac{\mathrm{d}\hat{O}^T}{\mathrm{d}t}]^{j'}_{i'}\vec{b}_{j'}
\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\hat{O}\hat{O}^T = \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\hat{O}}{\mathrm{d}t}\hat{O}^T + \hat{O}\frac{\mathrm{d}\hat{O}^T}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{O}\frac{\mathrm{d}\hat{O}^T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\hat{O}}{\mathrm{d}t}\hat{O}^T = -\left(\hat{O}\frac{\mathrm{d}\hat{O}^T}{\mathrm{d}t}\right)^T$$

Mit

$$\hat{A} := \hat{O}\frac{\mathrm{d}\hat{O}^T}{\mathrm{d}t}$$

ist demnach eine *antisymmetrische* Matrix gegeben, $\hat{A} = -\hat{A}^T$.
Wir schreiben:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{3'} & \omega^{2'} \\ \omega^{3'} & 0 & -\omega^{1'} \\ -\omega^{2'} & \omega^{1'} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{b}}_{i'} = \sum_{j'=1}^{3}[\hat{A}]^{j'}_{i'}\vec{b}_{j'}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{b}}_{1'} &= \omega^{3'}\vec{b}_{2'} - \omega^{2'}\vec{b}_{3'} \\
\dot{\vec{b}}_{2'} &= \omega^{1'}\vec{b}_{3'} - \omega^{3'}\vec{b}_{1'} \\
\dot{\vec{b}}_{3'} &= \omega^{2'}\vec{b}_{1'} - \omega^{1'}\vec{b}_{2'},
\end{aligned}$$

also:

$$\dot{\vec{b}}_{i'} = \sum_{j',k'=1}^{3}\varepsilon^{k'}_{j'i'}\omega^{j'}\vec{b}_{k'}$$