Theoretische Mechanik – Übung 5

Markus Pawellek – 144645 Übung: Donnerstag 10-12

Aufgabe 1

- Koordinatensystem so drehen, dass $\vec{B}$ nur in z-Richtung zeigt

$$\Longrightarrow \text{o.E.}: \quad \vec{B} = B\vec{e_z} \quad \text{mit } B>0 \text{ und } B=\text{konst.}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{F} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{mit } \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

$$\overset{\text{(Newton)}}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

$$(\vec{v} \times \vec{B})^i = (v^y B, -v^x B, 0)$$

$$\Longrightarrow (\dot{\vec{v}})^i = \omega(v^y, -v^x, 0) \quad \text{mit } \omega := \frac{eB}{m}$$

$$\Longrightarrow \frac{dv^z}{dt} = 0 \Longrightarrow v^z = v_0^z \Longrightarrow z(t) = v_0^z t + z_0$$

Weiterhin gilt: $\frac{d}{dt}v^x = \omega v^y \qquad \frac{d}{dt}v^y = -\omega v^x$

$$\Longrightarrow v^x = \int \omega v^y \, dt = \omega y + C_y \qquad v^y = -\omega x + C_x$$

$$v^x(0) = v_0^x = \omega y_0 + C_y \Longrightarrow C_y = v_0^x - \omega y_0$$

$$v^y(0) = v_0^y = -\omega x_0 + C_x \Longrightarrow C_x = v_0^y + \omega x_0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}v^x = \omega v^y = \omega\left(-\omega x + v_0^y + \omega x_0\right) = \ddot{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2(x - x_0) = \omega v_0^y = \frac{d^2}{dt^2}(x - x_0) + \omega^2(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} v^y = -\omega\left(\omega y + v_0^x - \omega y_0\right) = \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 (y - y_0) = -\omega v_0^x = \frac{d^2}{dt^2}(y-y_0) + \omega^2 (y-y_0)$$

$\Rightarrow$ DGL für harmonischen Oszillator mit konstantem Glied

$$\Rightarrow x - x_0 = A_x \sin\omega t + B_x \cos\omega t + \frac{v_0^y}{\omega}$$

$$\Rightarrow y - y_0 = A_y \sin\omega t + B_y \cos\omega t - \frac{v_0^x}{\omega}$$

$$(x - x_0)(t=0) = 0 = B_x + \frac{v_0^y}{\omega} \Rightarrow B_x = -\frac{v_0^y}{\omega}$$

$$(y - y_0)(t=0) = 0 = B_y - \frac{v_0^x}{\omega} \Rightarrow B_y = \frac{v_0^x}{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}(x - x_0)(t=0) = v_0^x = A_x \omega \Rightarrow A_x = \frac{v_0^x}{\omega}$$

$$\frac{d}{dt}(y - y_0)(t=0) = v_0^y = A_y \omega \Rightarrow A_y = \frac{v_0^y}{\omega}$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{v_0^x}{\omega}\sin\omega t - \frac{v_0^y}{\omega}\cos\omega t + \frac{v_0^y}{\omega}$$

$$y = y_0 + \frac{v_0^y}{\omega}\sin\omega t + \frac{v_0^x}{\omega}\cos\omega t - \frac{v_0^x}{\omega}$$

(Additionstheorem)

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{\omega}\left[v_0^y + \sqrt{{v_0^x}^2 + {v_0^y}^2}\,\sin\left(\omega t - \arctan\frac{v_0^y}{v_0^x}\right)\right]$$

$$y = y_0 + \frac{1}{\omega}\left[v_0^x + \sqrt{{v_0^x}^2 + {v_0^y}^2}\,\cos\left(\omega t - \arctan\frac{v_0^y}{v_0^x}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ in xy-Ebene verschobene Kreisbahn

$\Rightarrow$ Spiralbahn in z-Richtung (wenn $v_0^z \neq 0$)

$\Rightarrow$ allgemein: Spiralbahn in $\vec{B}$-Richtung

Arbeit: $W = \int F(\vec{r})\, d\vec{r} = \int m\omega \vec{v}\, d\vec{r}$

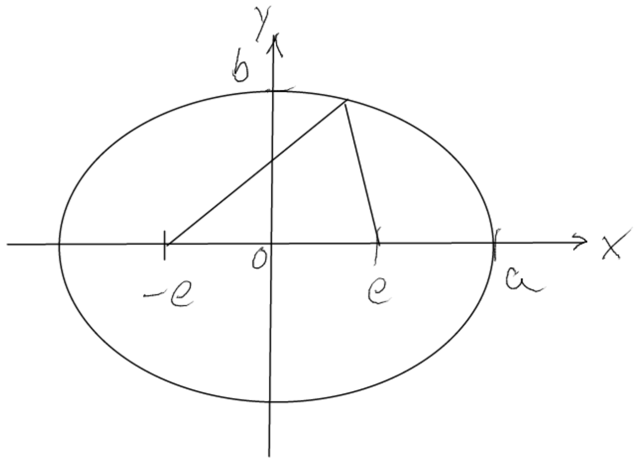
$= m\omega \int \vec{v}\, d\vec{r}$ $\quad \vec{v}$ bewegt sich entlang einer Kreisbahn

$\Rightarrow \vec{v} \perp d\vec{r} \Rightarrow \vec{v}\, d\vec{r} = 0$

$\Rightarrow W = 0 \Rightarrow$ verrichtet keine Kraft

Aufgabe 2

a)



Summe der Entfernungen:

$S = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \text{konst.}$

$\Rightarrow (a-e) + (a+e) = S$

$\Rightarrow S = 2a$

für b gilt: $\sqrt{e^2 + b^2} + \sqrt{e^2 + b^2} = 2\sqrt{e^2+b^2} = S = 2a$

$\Rightarrow b = \sqrt{a^2 - e^2}$

Ellipsengleichung: $\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a$

$\Rightarrow (x-e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x+e)^2 + y^2$

$= x^2 - 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + x^2 + 2xe + e^2 + y^2$

$\Rightarrow -4xe - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+e)^2 + y^2}$

$\Rightarrow \left(a + \frac{e}{a}x\right)^2 = (x+e)^2 + y^2$

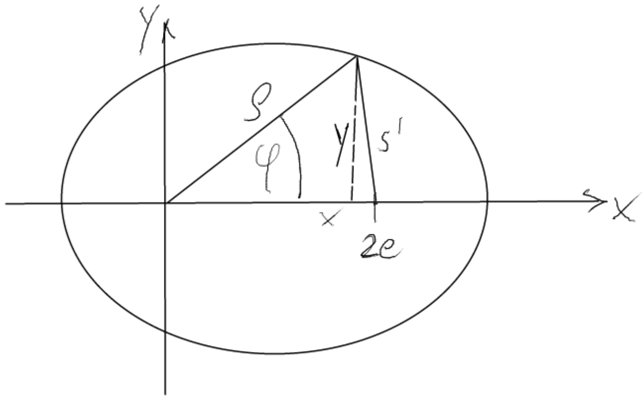
$= a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xe + e^2 + y^2$

$\Rightarrow a^2 - e^2 = \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \quad b^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 \qquad \text{wegen } b^2 = a^2 - e^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{Ellipsengleichung in kart. Koordinaten}$$

b)



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \quad 2a = \rho + \underbrace{\sqrt{(2e - \rho\cos\varphi)^2 + \rho^2 \sin^2\varphi}}_{= s' = \sqrt{(2e-x)^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = 4e^2 - 4e\rho\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi$$
$$= 4e^2 - 4e\rho\cos\varphi + \rho^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho\,(4e\cos\varphi - 4a) = 4(e^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{e^2 - a^2}{e\cos\varphi - a} = \frac{-b^2}{e\cos\varphi - a} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}} \qquad \text{Ellipsengleichung in Polarkoordinaten}$$

Aufgabe 3

Sei $\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$ mit $r = |\vec{r}|$.
Gilt $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, dann ist $\vec{F}$ konservativ.

$$(\operatorname{rot}\vec{F})^x = \frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F^z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f(r)\,z\right) = \frac{df(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}\,z = f'(r)\,\frac{y}{r}\,z$$

$$\Rightarrow (\operatorname{rot}\vec{F})^x = f'(r)\,\frac{y}{r}\,z - f'(r)\,\frac{z}{r}\,y = 0$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})^y = f'(r)\,\frac{x}{r}\,z - f'(r)\,\frac{z}{r}\,x = 0$$

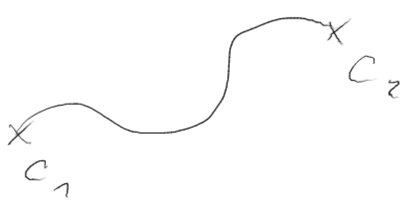
$$(\operatorname{rot}\vec{F})^z = f'(r)\,\frac{x}{r}\,y - f'(r)\,\frac{y}{r}\,x = 0$$

Damit gilt: $(\vec{F} = f(r)\,\vec{r}) \Rightarrow (\operatorname{rot}\vec{F} = 0) \Rightarrow F$ ist konservativ

Sei nun eine Zentralkraft $\vec{F} = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\,\vec{r}$.

$\vec{F}$ ist genau dann konservativ, wenn $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r} = 0$ gilt.

Ist $\vec{F}$ also von der Geschwindigkeit abhängig, so kann man einen Weg C zwischen den Punkten C_1 und C_2 einmal mit v_1 zurücklegen und zurück dann mit v_2 zurücklegen.



$$\Rightarrow \oint \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}(v_1)\,d\vec{r} + \int_{C_2}^{C_1} \vec{F}(v_2)\,d\vec{r}$$

$$= \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}(v_1)\,d\vec{r} - \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}(v_2)\,d\vec{r}$$

– wegen $\vec{F}(v_1) \neq \vec{F}(v_2)$ ist dies im Allgemeinen ungleich 0 und damit $\vec{F}$ auch nicht konservativ

$\Longrightarrow$ ähnliches gilt für die Zeit (zu verschiedenen Zeiten gelten verschiedene Kräfte $\Rightarrow$ Addition der Integrale wird i.A. nicht Null)

Sei nun $\vec{F} = f(\vec{r})\,\vec{r}$. $\Longrightarrow$ in gleichen Abständen r wirkt eine unterschiedliche Kraft.