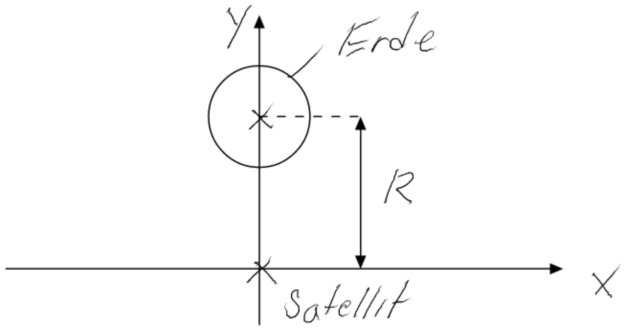
Theoretische Mechanik – Übung 7

Markus Pawellek – 144645 Übung: Donnerstag 10–12

Aufgabe 1



im beschleunigten System gilt allgemein (aus Vorlesung bekannt)

$$m\vec{a'} = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v'} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r'}$$

es gilt $\vec{\omega} = \text{konst} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\Rightarrow m\vec{a'} = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v'}$$

Umlaufgeschwindigkeit des Satelliten (bekannt)

$$v = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}} \quad \text{mit } M \text{ als Masse der Erde}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\gamma\frac{M}{R^3}}$$

Gravitationskraft: $\vec{F} = \gamma m M \dfrac{\vec{R}-\vec{r}}{|\vec{R}-\vec{r}|^3}$

es gilt $\vec{R} = R\vec{e_y} = \text{konst} \Rightarrow \vec{F} = \gamma m M \dfrac{R\vec{e_y} - x\vec{e_x} - y\vec{e_y}}{\left((R-y)^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

– x kommt im Nenner nur quadratisch vor
$\Rightarrow x^2 \approx 0$ wenn $|x| \ll 1$

– y-Komponente durch Tangente annähern:

$$F^y \approx F^y(0,0) + \frac{\partial F^y(0,0)}{\partial y}\, y$$

$$\frac{\partial F^y(0,0)}{\partial y} = \gamma m M\left[\frac{3(R-y)^2}{\left((R-y)^2+x^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{\left((R-y)^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \gamma m M \left[\frac{3R^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right]$$

$$\Rightarrow F^Y \approx \frac{\gamma m M R}{R^3} + \gamma m M \cdot y \left[\frac{3R^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right]$$

$$= m\omega^2 R + 3m\omega^2 y - m\omega^2 y$$

$$\Rightarrow \vec{F} \approx m\omega^2 \vec{R} - m\omega^2 \vec{r} + 3m\omega^2 y \vec{e_y}$$

$\vec{r_0}$ in S der Erde: $\vec{r_0} = R(\cos(\omega t)\vec{e_{x'}} + \sin(\omega t)\vec{e_{y'}})$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r_0}} = -\omega^2 R(\cos(\omega t)\vec{e_{x'}} + \sin(\omega t)\vec{e_{y'}})$$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r_0}}$ in Σ': $\ddot{\vec{r_0}} = \omega^2 R \vec{e_Y}$ (da $\vec{e_y}$ immer zur Erde zeigt)

o.E.: $\vec{\omega} = \omega \vec{e_z}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) = \omega^2 \vec{e_z} \times (\vec{e_z} \times \vec{r'})$$

$$= \omega^2 \vec{e_z} \times (-y\vec{e_x} + x\vec{e_y}) = -\omega^2 \vec{r'}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{v'} = -\omega \dot{y} \vec{e_x} + \omega \dot{x} \vec{e_y}$$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -m\omega^2 x + m\omega^2 x + 2m\omega\dot{y}$ (Einsetzen)

$$= 2m\omega\dot{y}$$

$$m\ddot{y} = m\omega^2 R - m\omega^2 y + 3m\omega^2 y - m\omega^2 R + m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$$

$$= 3m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = 2\omega\dot{y} \qquad \ddot{y} = 3\omega^2 y - 2\omega\dot{x}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = 2\omega y + C \qquad \dot{x}(0) = 0 = 2\omega\,\delta r + C$$

$$\Rightarrow \dot{x} = 2\omega y - 2\omega\,\delta r$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = 3\omega^2 y - 4\omega^2 y + 4\omega^2 \delta r$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 4\omega^2 \delta r$$

homogene Lösung: $\quad y_h = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

partikuläre Lösung: $\quad y_p = a \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_p = 0$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 a = 4\omega^2 \delta r \quad \Rightarrow \quad a = 4\delta r$$

$$\Rightarrow \quad y = y_h + y_p = A\sin(\omega t) + B\cdot\cos(\omega t) + 4\delta r$$

$$y(0) = \delta r = B + 4\delta r \quad \Rightarrow \quad B = -3\delta r$$

$$\dot{y}(0) = 0 = \omega A \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = -3\delta r \cos\omega t + 4\delta r$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = -6\omega\delta r\cos\omega t + 8\omega\delta r - 2\omega\delta r$$

$$\Rightarrow \quad x = -6\delta r\sin\omega t + 6\omega\delta r\, t + x_0 \quad (x_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= 6\delta r\,(\omega t - \sin\omega t) \\ y(t) &= \delta r\,(4 - 3\cos\omega t) \end{aligned}}$$

Aufgabe 2

z.z.: [E > 0 ⟹ (min. ein Körper läuft ins Unendliche)]

⟺ [(kein Körper läuft ins Unendliche) ⟹ $E \leq 0$]

⟹ es reicht also aus die zweite Aussage zu zeigen.

Angenommen kein Körper läuft ins räumlich unendliche!

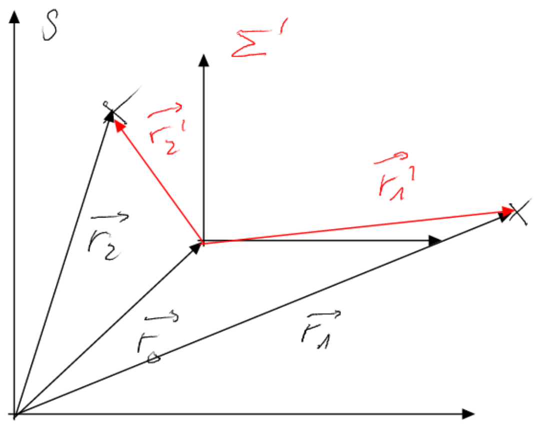
⟹ Virialsatz gilt mit $\mathcal{H} = -1$ (Gravitation)

⟹ $E = -\overline{T}$ $\qquad$ $\overline{T}$ kann aber nur größer gleich Null sein, da diese Größe nur Quadrate aufaddiert (Summe von Zahlen ≥ 0)

⟹ $\overline{T} \geq 0$ ⟹ $E \leq 0$

Dies zeigt gerade die Aussage. $\square$

Aufgabe 3



es gilt:

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r_n} \times \dot{\vec{r_n}}$$

$$\vec{L}' = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r_n}' \times \dot{\vec{r_n}}'$$

es gilt: $\vec{r_n} = \vec{r_n}' + \vec{r_0}$ ⟹ $\dot{\vec{r_n}}' = \dot{\vec{r_n}}$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n (\vec{r_n}' + \vec{r_0}) \times \dot{\vec{r_n}}' = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r_n}' \times \dot{\vec{r_n}}' + \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r_0} \times \dot{\vec{r_n}}'$$

$$= \vec{L}' + \vec{r_0} \times \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{r_n}}' = \vec{L}' + \vec{r_0} \times M \dot{\vec{s}}$$

im Allgemeinen gilt also: $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_0 \times M\dot{\vec{s}}$

$\vec{r}_0 \times M\dot{\vec{s}} = 0$ für beliebige $\vec{r}_0$ gilt nur für $\dot{\vec{s}} = 0$

$\Rightarrow \quad (\dot{\vec{s}} = 0) \quad \Rightarrow \quad (\vec{L} = \vec{L}')$

und $(\vec{L} = \vec{L}') \quad \Rightarrow \quad (\dot{\vec{s}} = 0)$

$\Rightarrow \quad (\vec{L} = \vec{L}') \Leftrightarrow (\dot{\vec{s}} = 0)$ $\square$