Theoretische Mechanik – Übung 4

Markus Pawellek – 144645 Übung: Donnerstag 10–12

Aufgabe 1

a) $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$ mit $\vec{a}$ = konst.

$$\Rightarrow \quad F^x = a^y z - a^z y$$
$$F^y = a^z x - a^x z$$
$$F^z = a^x y - a^y x$$

– existiert ein Potential gilt: $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})^x = \frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z} = a^x - (-a^x) = 2a^x$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})^y = \frac{\partial F^x}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial x} = a^y - (-a^y) = 2a^y$$

$$(\operatorname{rot} F)^z = \frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} = a^z - (-a^z) = 2a^z$$

$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 2\vec{a} \neq 0$ (im Allgemeinen)

$\Rightarrow$ es existiert kein Potential

b) $\vec{F} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})$ mit $\vec{a}, \vec{b}$ konst

$$\overset{\text{(bac-cab)}}{=} \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\Rightarrow (\operatorname{rot} \vec{F})^i = (a^y b^z - a^z b^y,\ a^z b^x - a^x b^z,\ a^x b^y - a^y b^x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{a} \times \vec{b} \neq 0 \text{ (im Allgemeinen)}$$

$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \quad$ für $\quad \vec{b} = \lambda \vec{a} \quad$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann gilt: $\quad \vec{F} = -\operatorname{grad} U$

mit $\quad \vec{F} = \lambda \vec{a}\,(\vec{a} \cdot \vec{r}) - \lambda \vec{r}\, \vec{a}^{\,2} \qquad a^2 := \vec{a}^{\,2}$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} F^x &= \lambda a^x (a^x x + a^y y + a^z z) - \lambda a^2 x \\ F^y &= \lambda a^y (a^x x + a^y y + a^z z) - \lambda a^2 y \\ F^z &= \lambda a^z (a^x x + a^y y + a^z z) - \lambda a^2 z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = -\int F^x \, dx = -\lambda \left[a^x \left(a^x \frac{x^2}{2} + a^y xy + a^z xz \right) - a^2 \frac{x^2}{2} \right] + g(y,z)$$

$$\Rightarrow F^y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda a^x a^y x - \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = \lambda a^y (a^y y + a^z z) - \lambda a^2 y$$

$$\Rightarrow g(y,z) = \int -\lambda \left(a^y a^y y + a^y a^z z - a^2 y \right) dy$$

$$= -\lambda \left(a^y a^y \frac{y^2}{2} + a^y a^z yz - a^2 \frac{y^2}{2} \right) + h(z)$$

$$F^z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \lambda a^x a^z x - \frac{\partial g(y,z)}{\partial z}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = \lambda a^z (a^y y + a^z z) - \lambda a^2 z$$

$$\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} = -\lambda a^y a^z y + \frac{dh(z)}{dz} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dh(z)}{dz} = \lambda a^z a^z z - \lambda a^2 z$$

$$\Rightarrow h(z) = \int -\lambda \left(a^z a^z z - a^2 z \right) dz = -\lambda \left(a^z a^z \frac{z^2}{2} - a^2 \frac{z^2}{2} \right) + C$$

$$\Rightarrow g(y,z) = -\lambda\left[\, a^y a^y \frac{y^2}{2} + a^z a^z \frac{z^2}{2} + a^y a^z yz - a^2 \frac{y^2}{2} - a^2 \frac{z^2}{2}\right] + C$$

$$\Rightarrow U = -\lambda\left[\frac{1}{2}\left(a^x a^x x^2 + a^y a^y y^2 + a^z a^z z^2\right) + a^x a^y xy + a^x a^z xz + a^y a^z yz - \frac{a^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] + C$$

Potential für $\vec{F} = \lambda \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$

$\Rightarrow$ es existiert im Allgemeinen kein Potential

Arbeitsintegral: $\vec{a} = a\vec{e}_z \Rightarrow (\vec{F})^i = (-ay, ax, 0)$

$P_1 = (1,1,1) \quad P_2 = (2,2,2)$

1.) für $\overline{P_1P_2}$: $\Rightarrow \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

für $\lambda \in [0,1]$

$$\Rightarrow W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda}\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \Big(-a(1+\lambda) + a(1+\lambda)\Big) d\lambda = \underline{\underline{0}}$$

2.)
$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1(\lambda) &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ \vec{r}_2(\lambda) &= \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ \vec{r}_3(\lambda) &= \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ für } \lambda \in [0,1]$$

$$\Rightarrow W = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_1(\lambda)) \frac{d\vec{r}_1}{d\lambda}\, d\lambda + \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_2(\lambda)) \frac{d\vec{r}_2}{d\lambda}\, d\lambda$$

$$+ \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}_3(\lambda)) \frac{d\vec{r}_3}{d\lambda}\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 -a\, d\lambda + \int_0^1 2a\, d\lambda = -a + 2a = \underline{\underline{a}}$$

Aufgabe 2

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \beta\dot{\vec{r}} \qquad k,\beta > 0 \text{ und konst.}$$

$$\Rightarrow m\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}\times\vec{r} - \beta\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \qquad \text{(Vektorprodukt mit } \vec{r}\text{)}$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{\beta}{m}\vec{L} \qquad \text{(wegen } \vec{L} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\text{)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{\beta}{m}\vec{L} = 0} \quad \text{Drehimpulsbilanz}$$

Lösen durch Trennung der Variablen für x-Komponente:

$$\frac{dL^x}{dt} + \frac{\beta}{m}L^x = 0 \Rightarrow \int \frac{dL^x}{L^x} = \int -\frac{\beta}{m}\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|L^x| = -\frac{\beta}{m}t + C$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L^x(t) = K e^{-\frac{\beta}{m}t}}} \qquad \text{(Vorzeichen und } e^C \text{ fallen in } K \text{ hinein)}$$

$\Rightarrow$ Drehimpuls fällt exponentiell ab

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \vec{L}(t) = 0$$

Energiebilanz: $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \beta\dot{\vec{r}}$ (Skalarprodukt mit $\dot{\vec{r}}$)

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)}_{T} = -\underbrace{k\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}_{\frac{d}{dt}U} - \underbrace{\beta\dot{\vec{r}}^2}_{\frac{2\beta}{m}T}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} - \frac{2\beta}{m}T$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(T + U\right) = -\frac{2B}{m} T} \quad \text{Energiebilanz}$$

es muss hier gelten: $\lim_{t \to \infty} T = 0$ (siehe Drehimpuls)

Aufgabe 3

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2 - \lambda \frac{m}{3} x^3 \quad \text{mit} \quad x(0) = 0$$

Fall $\lambda = 0$: $\quad U(x) = \frac{k}{2} x^2$

$$\Rightarrow F = -\frac{d}{dx} U(x) = -kx$$

(Newton II)

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$\Rightarrow$ DGL für harmonischen Oszillator

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{für} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$x(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \sin \omega t \quad \text{ist Lösung}$$

Fall $\lambda \neq 0$: $\quad x_{(0)} = x(t)$

Ansatz: $\quad x_{(1)} = x_{(0)} + \lambda x_1$, wobei x_1 eine partikuläre Lösung ist

$$\Rightarrow F = -\frac{dU(x)}{dx} = -kx + \lambda m x^2$$

(Newton II)

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx - \lambda m x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \lambda x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_{(1)} + \frac{k}{m}x_{(1)} - \lambda x_{(1)}^2$$

$$= \underbrace{\ddot{x}_{(0)} + \frac{k}{m}x_{(0)}}_{\substack{=0 \text{ aufgrund} \\ \text{der ersten Lösung}}} + \lambda\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}\lambda x_1 - \lambda^2 x_1^2 - \lambda x_{(0)}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \lambda x_1^2 = x_{(0)}^2 = \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \lambda x_1^2$$

$(\lambda \ll 1)$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_{(0)}^2 = A^2 \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{A^2}{2}(1 - \cos 2\omega t) \quad \left(\text{Theorem für } \sin^2 x: \ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)$$

$$\Rightarrow \text{DGL:} \quad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{A^2}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$x_1(t) = a \sin 2\omega t + b \cos 2\omega t + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1(t) = -4a\omega^2 \sin 2\omega t - 4b\omega^2 \cos 2\omega t$$

$$\Rightarrow \quad -4a\omega^2 \sin 2\omega t - 4b\omega^2 \cos 2\omega t + a\omega^2 \sin 2\omega t + b\omega^2 \cos 2\omega t + c = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos 2\omega t$$

$$\Rightarrow \quad -3a\omega^2 \sin 2\omega t - 3b\omega^2 \cos 2\omega t + c = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos 2\omega t$$

$\Rightarrow$ Koeffizientenvergleich: $(I)\quad -3a\omega^2 = 0$

$(II)\quad -3b\omega^2 = -\frac{1}{2}A^2$

$(III)\quad c = \frac{1}{2}A^2$

$$\Rightarrow \quad a = 0 \qquad b = \frac{A^2}{6\omega^2} \qquad c = \frac{A^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}\cos 2\omega t + 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_{(1)}(t) = A\sin\omega t + \lambda\frac{A^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}\cos 2\omega t + 1\right)}}$$