Theoretische Mechanik

Übungen - Serie 4

Ausgabe: 30. April 2014, Abgabe: 7. Mai 2014 in der Vorlesung

1. **Bestimmung von Potentialen** **5 Punkte**

   Untersuchen Sie, ob die Kraftfelder

   a)
   $$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}\,,$$

   b)
   $$\vec{F} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{r})$$

   (dabei sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konstante Vektoren) ein Potential besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential. Für den Fall a) berechne man das Arbeitsintegral mit dem Vektor $\vec{a} = a\vec{e_z}$ und dem Anfangspunkt $P_1 = (1, 1, 1)$ sowie dem Endpunkt $P_2 = (2, 2, 2)$ auf den beiden Wegen

   1.) Strecke $\overline{P_1 P_2}$,

   2.) dem aus den Teilstrecken

   $$(1, 1, 1) \to (2, 1, 1)\,, \quad (2, 1, 1) \to (2, 2, 1)\,, \quad (2, 2, 1) \to (2, 2, 2)$$

   zusammengesetzten Weg.

2. **Energie- und Drehimpulsbilanz für Oszilltor** **5 Punkte**

   Stellen Sie für den isotropen harmonischen Oszillator mit Reibung (Bewegungsgleichung: $m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - \beta\dot{\vec{r}}$, k und β positive Konstanten) die Energie- und Drehimpulsbilanz auf! Welche Aussage folgt für $t \to \infty$? Geben Sie das zeitliche Verhalten des Drehimpulses an!

3. **Näherungslösung für nichtlinearen Oszillator** **5 Punkte**

Ein nichtlinearer Oszillator habe das Potential

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{m\lambda x^3}{3} \qquad (\lambda \text{ klein}).$$

Finden Sie eine Lösung der Bewegungsgleichung, die bis zur ersten Ordnung in λ korrekt ist. Dabei sei $x = 0$ für $t = 0$.

Hinweis:

Überzeugen Sie sich zunächst, daß $x_{(0)} = A\sin(\omega t)\,,\ (\omega := \sqrt{k/m})$ eine Lösung für $\lambda = 0$ ist.

Gehen Sie dann mit dem Ansatz $x_{(1)} = x_{(0)} + \lambda x_1$ in die Bewegungsgleichung ein und verifizieren Sie (bei Vernachlässigung höherer Terme in λ):

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_{(0)}^2 = \frac{A^2}{2}[1 - \cos(2\omega t)]\,.$$

Machen Sie einen geeigneten Ansatz um eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung zu finden, bestimmen Sie diese und geben Sie damit die Lösung des Problems mit Berückssichtigung der Anfangsbedingung an.