Theoretische Mechanik

Übungen - Serie 7

Ausgabe: 21. Mai 2014, Abgabe: 29. Mai 2014 in der Vorlesung

1. **Bahnkurve in rotierendem Satellit** **10 Punkte**

   Ein Satellit bewege sich – mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω – auf einer kreisförmigen Umlaufbahn (Radius R) um die Erde. Gleichzeitig rotiere der Satellit um eine feste Achse (senkrecht zur Umlaufebene) mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, so daß eine Seite des Satelliten immer der Erde zugewandt bleibt.

   Im Inneren des Satelliten befinde sich ein Astronaut, der ein kleines Objekt (Massenpunkt der Masse m) um die Entfernung δr (in der Bahnebene) vom Schwerpunkt des Satelliten hin auf die Erde zubewegt.

   Jetzt wird das Objekt (aus Sicht des Astronauten ohne Anfangsgeschwindigkeit) losgelassen. Berechnen Sie die Bahnkurve, die der Massenpunkt aus Sicht des Astronauten beschreibt.

   Hinweis: Wählen Sie kartesische Koordinaten derart, daß das beschleunigte Bezugssystem fest mit dem Satelliten verbunden ist, der Schwerpunkt des Satelliten im Ursprung ruht und der Mittelpunkt der Erde sich in Richtung der y-Achse im Abstand R befindet.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung im beschleunigten Bezugssystem auf!

   (b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit aus der Tatsache, daß die Umlaufbahn eine Kreisbahn ist.

   (c) Zeigen Sie, daß die Gravitationskraft der Erde, die auf den Massenpunkt wirkt, unter der Annahme $|\vec{r}| \ll |\vec{R}|$ (wobei $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ der Ortsvektor zum Massenpunkt und $\vec{R}$ der Vektor zur Erde ist) durch

   $$\vec{F} \approx \frac{\gamma M m}{R^3}\vec{R} - \frac{\gamma M m}{R^3}\vec{r} + \frac{3\gamma M m y}{R^3}\vec{e}_y$$

   genähert werden kann.

   (d) Berechnen Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zentrifugal- und Corioliskraft und vereinfachen Sie damit und mittels c) die unter a) aufgestellte Bewegungsgleichung. Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichungen sich mit den obigen Konventionen auf

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}, \qquad \ddot{y} = 3\omega^2 y - 2\omega\dot{x}$$

reduzieren!

(e) Integrieren Sie zunächst die erste Gleichung (einmal) unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Verwenden Sie die Lösung, um die zweite Gleichung zu integrieren und benutzen Sie wiederum die Anfangsbedingungen, um alle auftretenden Konstanten zu eliminieren. Benutzen Sie nun $y(t)$, um aus der ersten Gleichung auch $x(t)$ zu bestimmen.

2. **Gravitatives N-Körperproblem** **5 Punkte**
Zeigen Sie, daß beim gravitativen N-Körperproblem ($N \geq 2$) mindestens ein Massenpunkt für $t \to \infty$ ins räumliche Unendliche läuft, falls die Gesamtenergie $E = T + U$ positiv ist!

Hinweis: Leiten Sie zunächst die Beziehung

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \vec{r}_i^{\,2} \;=\; 2T + U$$

her.

3. **Gesamtdrehimpuls eines Massenpunktsystems** **4 Punkte**
Zeigen Sie, daß der Gesamtdrehimpuls eines Massenpunktsystems von der Wahl des Bezugspunktes genau dann unabhängig ist, wenn der Schwerpunkt des Systems ruht!