Theoritische Mechanik – Übung 6

Markus Pawellek – 144645   Übung: Donnerstag 10-12

Aufgabe 1

– es ist $\frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + U(\varrho) = E$

mit $U(\varrho) = -\frac{\gamma m M}{\varrho} + \frac{L^2}{2m\varrho^2}$

a) Minimum von $U(\varrho)$

$$\frac{dU(\varrho)}{d\varrho} = \frac{\gamma m M}{\varrho^2} - \frac{L^2}{m\varrho^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU(\varrho_{min} = p)}{d\varrho} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\gamma m M}{p^2} - \frac{L^2}{mp^3} \quad \Rightarrow \quad \underline{p = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}}$$

(p beschreibt Minimum wegen $\lim_{\varrho \to 0^+} U(\varrho) = \infty$ und $\lim_{\varrho \to \infty} U(\varrho) = 0$)

$$\Rightarrow \quad U_{min} = U(p) = -\frac{\gamma m M}{\frac{L^2}{\gamma m^2 M}} + \frac{L^2}{2m\frac{L^4}{\gamma^2 m^4 M^2}}$$

$$= -\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{L^2} + \frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2L^2} = -\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2L^2}$$

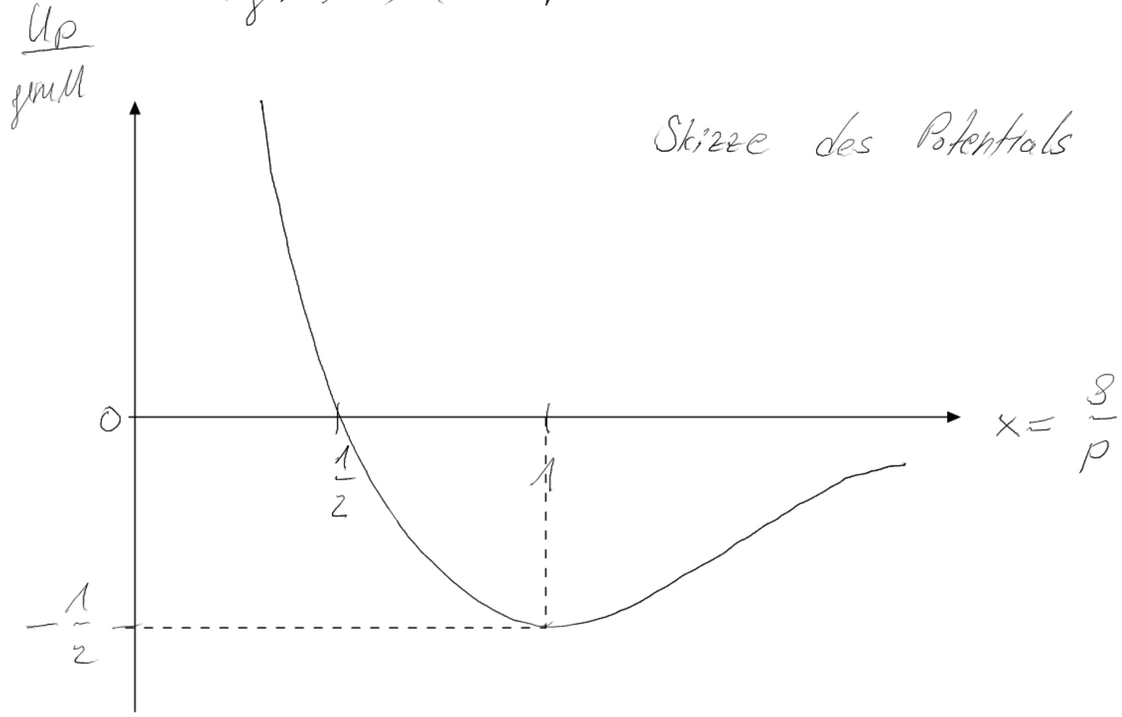
$$\Rightarrow \quad \underline{U_{min} = -\frac{\gamma m M}{2p}}$$

b) $$U(\varrho) \cdot \frac{p}{\gamma m M} = -\frac{p}{\varrho} + \frac{L^2 p}{2m\varrho^2} \cdot \frac{1}{\gamma m M}$$

$$= -\frac{p}{\varrho} + \frac{p^2}{2\varrho^2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{U(s)\cdot \rho}{\gamma m M}\right)\left(x=\frac{s}{\rho}\right) = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}$$

Skizze des Potentials



c) – Skizze zeigt, dass $\frac{E\rho}{\gamma m M}$ nicht unter $-\frac{1}{2}$ fallen kann.

(sonst gäbe es keine Lösung der Bewegung)

– für $x<1$ tritt eine Kraft in s-Richtung auf und für $x>1$ tritt eine Kraft in $-s$-Richtung auf

$\Longrightarrow$ aufgrund Energieerhaltung muss für eine „Schwingung" $\frac{E\rho}{\gamma m M}<0$ gelten, da sowohl für $x<1$ als auch $x>1$ die Amplitude erreicht werden muss

– für $\frac{E\rho}{\gamma m M}>0$ ist dies nicht für $x>1$ möglich, da

das einheitslose Potential für $x>1$ immer kleiner 0 ist

$\Longrightarrow$ gebundene Bewegung: $-\frac{1}{2}\leq \frac{E\rho}{\gamma m M}<0$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \frac{2Ep}{\gamma m M} < 0$$

$\Rightarrow$ ungebundene Bewegung: $\frac{2Ep}{\gamma m M} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad E \geq 0$

d) Umkehrpunkte: $U(s_k) - E = 0$

Lösung: $x = \frac{1}{s_k}$

$$\Rightarrow \quad U(x) = -\gamma m M x + \frac{L^2}{2m} x^2 = E$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - \frac{2\gamma m^2 M}{L^2} x = \frac{2mE}{L^2}$$

$$= x^2 - 2\frac{x}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{2Ep}{\gamma m M}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = = \frac{1}{p} \pm \frac{1}{p}\sqrt{1 + \frac{2Ep}{\gamma m M}} = \frac{1}{p}(1 \pm \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{s_k = \frac{p}{1 \pm \varepsilon}}$$

gebundene Bewegung: $0 \leq \varepsilon < 1$

ungebundene Bewegung: $\varepsilon \geq 1 \quad \Rightarrow$ nur sinnvoll für $s > 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{s_k = \frac{p}{1 + \varepsilon}}$$

e) für L und E gilt: $L^2 = \gamma m^2 M p$

$$E = \frac{\gamma m M}{2p}(\varepsilon^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2m}{L^2}\left(E + \frac{\gamma m M}{s'} - \frac{L^2}{2ms'^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\gamma m M p}\left(\frac{\gamma m M}{2p}(\varepsilon^2 - 1) + \frac{\gamma m M}{s'} - \frac{\gamma m M p}{2s'^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p\varrho'} - \frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{p^2}\left(1 - \left[\frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{p}\right)^2\right]\right)$$

$$\Longrightarrow \varphi = \int \frac{d\varrho'}{\varrho'^2}\,\frac{p}{\varepsilon}\left[1 - \frac{p^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{p}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

f) Sei $z = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{dz}{d\varrho'} = -\frac{p}{\varepsilon}\frac{1}{\varrho'^2}$

$$\Longrightarrow \varphi = \int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arccos z + C$$

$$\Longrightarrow z = \cos\varphi - C = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{p}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{p}{\varrho} = 1 + \varepsilon\cos\varphi - C$$

$$\Longrightarrow \varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi - C}$$

$\varrho(\varphi = 0) = \varrho_{min}$

$\Longrightarrow \cos - C = 1$

$\Longrightarrow C = 0$

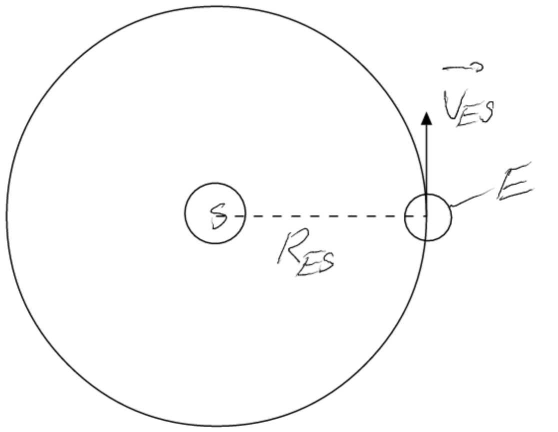
$$\Longrightarrow \boxed{\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}}$$

Aufgabe 2

$$F_{Gr} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \Rightarrow U(r) = -\int_R^\infty F(r)\,dr$$

$$U(r) = \gamma \frac{mM}{R}$$ potentielle Energie, um Gravitationsfeld von M im Abstand R zu verlassen

$\Rightarrow$ Körper muss potentielle Energie für Erde und Sonne überwinden



$\Rightarrow$ hat er das Erdfeld verlassen, so besitzt er durch die Rotation der Erde um die Sonne eine Geschwindigkeit v_{ES}

$\Rightarrow$ Damit ist die eigentliche Geschwindigkeit relativ zur Erde um das Sonnenfeld zu verlassen

$$v_S' = v_S - v_{ES}$$

mit v_S als Geschwindigkeit zum Verlassen des Sonnenfeldes

$\Rightarrow$ kinetische Energie: $\frac{m}{2} v_3^2$ mit v_3 als 3. kosm. Geschw.

$\Rightarrow$ Energie zum Verlassen der Gravitationsfelder:

$$\frac{m}{2} v_E^2 + \frac{m}{2}(v_S - v_{ES})^2 = \frac{m}{2} v_3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_3 = \sqrt{v_E^2 + (v_S - v_{ES})^2}}$$

mit $v_E = \sqrt{2\gamma \frac{M_E}{R_E}}$ 2. kosmische Geschwindigkeit für Erde

$\approx 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

mit $v_S = \sqrt{2\gamma \frac{M_S}{R_{ES}}}$ 2. kosmische Geschwindigkeit Sonne

$\approx 42{,}1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

$$v_{E\odot} = \frac{2\pi R_{ES}}{T} \approx 29{,}8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{(11{,}2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1})^2 + (42{,}1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} - 29{,}8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1})^2}$$

$$\underline{\underline{\approx 16{,}6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}}$$