Kapitel 1

Mechanik eines freien Massenpunktes

1.1 Kinematik

1.1.1 Einleitung

- Aufgabe der theoretischen Mechanik: Ableitung der Bewegung von *Massenpunkten*, Massenpunktsystemen und *starren* Körpern aus wenigen einfachen Grundgesetzen
- Grundgesetze: zusammengefasste Erfahrung, logisch und mathematisch nicht beweisbar (*Axiome*)
- Mechanik ist Fundament aller anderen Theorien der Physik

1.1.2 Newtonscher Raum

1.1.2.1 Euklidischer Raum

Der mathematische Ort des Geschehens ist ein dreidimensionaler *Euklidischer* Raum E_3:

- Der Raum besteht aus überabzählbar vielen Punkten, die wir durch drei reelle Koordinaten (x^1, x^2, x^3) charakterisieren und unterscheiden können.
- Die Wahl der Koordinaten ist prinzipiell frei, z.B.:

  - kartesische Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ oder
  - Kugelkoordinaten $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \vartheta, \varphi)$

- Ein Wechsel zu anderen Koordinaten geschieht durch eine Abbildung (*Koordinatentransformation*)

$$x^i = x^i(x^{k'}),$$

  z.B.

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta.$$

- Zwischen zwei Punkten A und B kann man einen (nicht-negativen) Abstand D definieren (*metrischer* Raum).

- Es existieren ausgezeichnete kartesische Koordinatensysteme $\mathcal{S}$ („*Inertialsysteme*" Abkürzung: „IS", siehe Kapitel 1.1.2.5) mit Koordinaten $(x^i) = (x, y, z)$, in denen dieser Abstand durch

$$\begin{aligned} D(A,B) = D\Big((x^i_A),(x^i_B)\Big) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i_A - x^i_B)^2} \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \end{aligned}$$

  gegeben ist. Diese Koordinaten können sämtliche reellen Werte annehmen, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Wir betrachten den E_3 *nicht* als Vektorraum.

1.1.2.2 Kurven und Vektoren

- Kurven sind stetig-differenzierbare Abbildungen $\phi : I \to E_3$ eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ auf den euklidischen Raum.

- In einem gewählten Koordinatensystem schreiben wir:

$$x^i = x^i(\lambda), \quad \lambda \in I \quad \text{(Kurvenparameter)}$$

- Wir fordern oft zusätzlich ν-fache Differenzierbarkeit $\nu = 1; 2; 3 \ldots$, d.h. Existenz von $\dfrac{\mathrm{d}^\nu x^i}{\mathrm{d}\lambda^\nu}$.

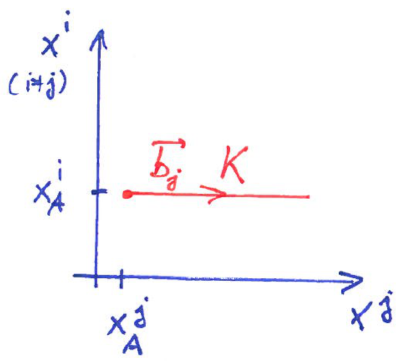
- Einer Kurve kann an jedem ihrer Punkte ein *Tangentialvektor* zugeordnet werden.

- Die Tangentialvektoren aller denkbaren Kurven durch einen Punkt A spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf.

- *Jedem* Punkt aus E_3 wird ein eigener Tangentialvektorraum ,,angeheftet".

- In einem gewählten Koordinatensystem (mit Koordinaten x^i) sind die *Koordinatenbasisvektoren* $\vec{b}_j$ am Punkt A mit Koordinatenwerten x^i_A die Tangentialvektoren an die speziellen Kurven K:

$$K: \qquad x^i(\lambda) = \begin{cases} x^i_A + \lambda & \text{für } i = j \\ x^i_A & \text{für } i \neq j \end{cases}$$



Zur Definition von Koordinatenbasisvektoren

- Den Tangentialvektor an eine *beliebige* Kurve am Punkt A drücken wir dann gemäß

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3}(\vec{v}\,)^i\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} v^i\vec{b}_i,$$

  aus.

- Die $v^i = \mathrm{d}x^i/\,\mathrm{d}\lambda$ sind die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ in den Koordinaten (x^i), d.h bezüglich der Koordinatenbasis $\{\vec{b}_i\}$.

  Insbesondere gilt: $(\vec{b}_j)^i = \delta^i_j$ (Kronecker-delta).

- In einem anderen Koordinatensystem (mit Koordinaten $x^{i'}$) schreibt sich *derselbe* Vektor $\vec{v}$ als:

$$\vec{v} = \sum_{i'=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}\lambda}\vec{b}_{i'} = \sum_{i'=1}^{3} (\vec{v})^{i'}\vec{b}_{i'} = \sum_{i'=1}^{3} v^{i'}\vec{b}_{i'},$$

Anmerkungen zur Stellung der Indizes:

1. Stellung ist prinzipiell nicht von Bedeutung in der Newtonschen Physik.

2. Allerdings sind in allen *relativistischen* Theorien Größen mit unteren von denjenigen mit oberen zu unterscheiden.

3. In dieser Vorlesung:

   - Koordinaten haben obere Indizes: $x^i, x^{j'}$
   - Komponenten von Vektoren (Elemente des Tangentialraumes) haben meist obere, zuweilen aber auch untere Indizes, Beispiel: v^i, K^i, aber auch: $K^i = -\nabla_i U = -\partial U/\partial x^i$
   - Basisvektoren werden durch untere Indizes durchnummeriert: $\vec{b}_i, \vec{b}_{k'}$,

   $$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i$$

   - Transformationsmatrizen (z.B. orthogonale Matrizen $\hat{O}$) haben einen oberen Zeilen- und einen unteren Spaltenindex, z.B.

   $$v^{i'} = \sum_{j=1}^{3} \hat{O}^{i'}_{j} v^j$$

   - Symbole wie Kronecker-delta oder Levi-Civita-epsilon haben wahlweise untere oder obere Indizes

1.1.2.3 Skalarprodukt, Vektorprodukt und Ortsvektoren

- In den Tangentialvektorräumen existiert ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$; die Multiplikation zweier Vektoren ergibt eine reelle Zahl.

- In IS $\mathcal{S}$ ist:
$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{3} v^j w^j$$
Wir schreiben:
$$(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \vec{v} \cdot \vec{w}$$

- Betrag eines Vektors:
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^{\,2}}$$

- *Koordinateneinheitsvektoren*:
$$\vec{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$$

- Ein Koordinateneinheitsvektoren eines *orthogonalen* Koordinatensystem bilden eine *Orthonormalbasis (ONB):*
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{(Kronecker-delta)}$$
Insbesondere sind die Koordinatenbasisvektoren eines IS eine ONB.

- Das *Vektorprodukt* führt zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ in einen neuen Vektor $\vec{w}$ über:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$
In einem IS gilt für die Komponenten von $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$:
$$w^i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} u^j v^k$$
Hierbei ist ε^i_{jk} das vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Symbol[1]:
$$\varepsilon^i_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123), \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
also:
$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix}$$

[1] Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita-Symbol`

- Für die Koordinatenbasisvektoren gilt die *Rechte-Hand-Regel:*

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3, \quad \vec{b}_2 \times \vec{b}_3 = \vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 = \vec{b}_2,$$

  zusammen also:

$$\vec{b}_j \times \vec{b}_k = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} \vec{b}_i$$

- Betrachten nun in einem IS $\mathcal{S}$ die Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten A und B mit den Koordinaten (x^i_A) und (x^i_B):

$$x^i(\lambda) = \lambda x^i_B + (1-\lambda) x^i_A, \quad \lambda \in [0,1]$$

  mit $x^i(0) = x^i_A, x^i(1) = x^i_B$.

- Bezeichnen den im IS $\mathcal{S}$ konstanten Tangentialvektor

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} (x^i_B - x^i_A) \vec{b}_i$$

  als *Verbindungsvektor* der Punkte B und A.

- Bezeichnung: $\vec{v} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$.

- Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 &\equiv (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \\
&= D^2\Big((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A)\Big) \\
&= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2
\end{aligned}$$

  Wir schreiben auch:

$$|\vec{x}_B - \vec{x}_A| \equiv D\Big((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A)\Big)$$

- *Ortsvektoren*: Falls $x^i_A = 0$, d.h. der Punkt A fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, dann heißt der Verbindungsvektor $\vec{x}_B \equiv \vec{x}_B - \vec{x}_A$ der Ortsvektor des Punktes B bezüglich des Systems $\mathcal{S}$.

  Anmerkung: Ortsvektoren sind Elemente des Tangentialraumes, die in Abhängigkeit eines gewählten Bezugspunktes – des Koordinatenursprungs – definiert werden, während z.B. die Geschwindigkeit unabhängig davon ist.

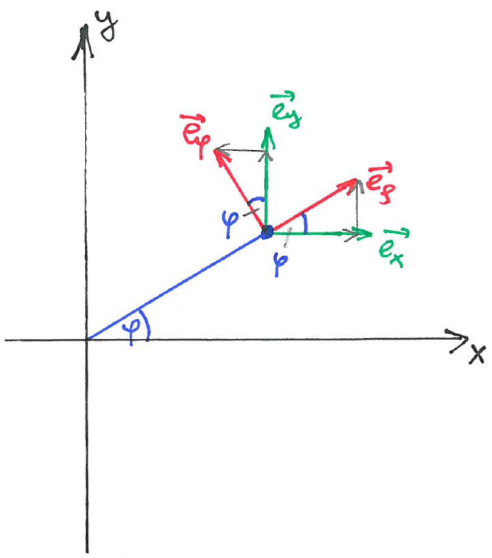
1.1.2.4 Krummlinige Koordinaten

Beispiel Zylinderkoordinaten:

- kartesische Koordinaten: $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$
- Zylinderkoordinaten: $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\varrho, \varphi, z')$
- Koordinatentransformation:

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z'$$

- Komponenten der *Koordinateneinheitsvektoren* in kartesischen Koordinaten (siehe Abb.):



1. $$(\vec{e}_x)^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_y)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_z)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $$(\vec{e}_\varrho)^i = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_\varphi)^i = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_{z'})^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

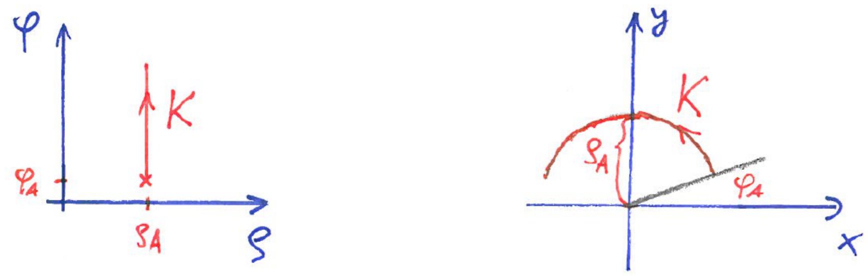
Allgemeine Koordinatentransformation zwischen einem Koordinatensystem Σ (Koordinaten x^i) und Σ' (Koordinaten $x^{i'}$):

- Betrachte Linie entlang der Koordinate $x^{k'}$ innerhalb von Σ':

$$K: \qquad x^{i'}(\lambda) = x^{i'}_A + \lambda \delta^{i'}_{k'}, \quad (x^{i'}_A = \text{const.})$$

z.B. Linie entlang der azimuthalen Winkelkoordinate in Zylinderkoordinaten:

$$\varrho = \varrho_A, \quad \varphi(\lambda) = \varphi_A + \lambda, \quad z' = z'_A$$



- Dann sind die Komponenten des Koordinatenbasisvektors $\vec{b}_{k'}$ im System Σ gegeben durch:

$$(\vec{b}_{k'})^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(x^i(x^{j'}(\lambda)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(x^i(x^{j'}_A + \lambda\delta^{j'}_{k'})\right) = \sum_{j'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\delta^{j'}_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}},$$

also:

$$\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$$

Transformationsgesetz für die Basisvektoren.

- Für Zylinderkoordinaten folgt:

$$(\vec{b}_\varrho)^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_\varrho)^i, \quad \text{also:} \quad \vec{b}_\varrho = \vec{b}_x \cos\varphi + \vec{b}_y \sin\varphi$$

$$(\vec{b}_\varphi)^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\varrho\vec{e}_\varphi)^i, \quad \text{also:} \quad \vec{b}_\varphi = \varrho(-\vec{b}_x \sin\varphi + \vec{b}_y \cos\varphi)$$

$$(\vec{b}_{z'})^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_{z'})^i, \quad \text{also:} \quad \vec{b}_{z'} = \vec{b}_z$$

- Für die Umrechnung der Komponenten eines beliebigen Vektors $\vec{v}$ gilt dann:

$$\vec{v} = \sum_{k'=1}^{3} v^{k'} \vec{b}_{k'} = \sum_{k'=1}^{3} \left(\sum_{i=1}^{3} v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{k'=1}^{3} v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i,$$

d.h.:

$$v^i = \sum_{k'=1}^{3} v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \qquad \text{bzw.} \qquad v^{i'} = \sum_{k=1}^{3} v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

Anmerkung: Die Matrizen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\right)$ und $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right)$ sind zueinander invers,

$$\sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

- Beispiel Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
v^x &= v^\varrho \frac{\partial x}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial x}{\partial z'} = v^\varrho \cos\varphi - v^\varphi \varrho \sin\varphi, \\
v^y &= v^\varrho \frac{\partial y}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial y}{\partial z'} = v^\varrho \sin\varphi + v^\varphi \varrho \cos\varphi, \\
v^z &= v^\varrho \frac{\partial z}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial z}{\partial z'} = v^{z'}
\end{aligned}
$$

1.1.2.5 Inertialsysteme

IS $\mathcal{S}$ sind nicht eindeutig bestimmt:

- Betrachten folgende *lineare* Koordinatentransformation:

$$
(x,y,z) \to (x',y',z') : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix},
$$

  die eine Drehung und eine Nullpunktsverschiebung beschreibt.

- Hierbei ist $\hat{O}$ eine konstante orthogonale Matrix, bestehend aus drei orthonormalen Spaltenvektoren $\underline{n}_i$,

$$
\hat{O} = \left(\underline{n}_1 \;\; \underline{n}_2 \;\; \underline{n}_3 \right) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}
$$

  mit

$$
\underline{n}_k = \begin{pmatrix} n_{1k} \\ n_{2k} \\ n_{3k} \end{pmatrix}, \qquad \underline{n}_k \cdot \underline{n}_m = \sum_{j=1}^{3} n_{jk} n_{jm} = \delta_{km},
$$

  d.h.:

$$
\hat{O}\hat{O}^T = \hat{O}^T\hat{O} = \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

  Wir fordern zusätzlich:

$$
\det \hat{O} = 1
$$

  Eigentliche Drehung (keine Spiegelung)

Anmerkung: Die $\underline{n}_k$ sind *keine* Vektoren im Tangentialraum; sie fassen vielmehr Komponenten der Transformationsmatrix $\hat{O}$ zusammen (daher kennzeichnen wir sie mit einem Unterstrich und nicht mit einem Vektorpfeil).

- Die Beziehungen $\underline{n}_k \cdot \underline{n}_m = \delta_{km}$ sind 6 Gleichungen für 9 unbekannte Komponenten von $\hat{O}$. Damit hat $\hat{O}$ drei reelle Freiheitsgrade.

- Mit räumlicher Nullpunktsverschiebung (x'_A, y'_A, z'_A): insgesamt also eine 6-parametrige Koordinatentransformation.

- Damit wird ein IS $\mathcal{S}$ in ein neues IS $\mathcal{S}'$ überführt, d.h. für zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt dieselbe Form des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}\sum_{i'=1}^{3} v^{i'} w^{i'} &= \sum_{i'=1}^{3} \left[\sum_{k=1}^{3} v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\right] \left[\sum_{m=1}^{3} w^m \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\right] = \sum_{k,m=1}^{3} v^k w^m \left[\sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\right] \\ &= \sum_{k,m=1}^{3} v^k w^m \left[\sum_{i'=1}^{3} [\hat{O}^T]^k_{i'} [\hat{O}]^{i'}_m\right] = \sum_{k,m=1}^{3} v^k w^m \delta_{km} = \sum_{k=1}^{3} v^k w^k = \vec{v} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

  $[\hat{O}]^{i'}_m$: Eintrag in der i'-ten Zeile und m-ten Spalte der Matrix $\hat{O}$

- Auch das Vektorprodukt besitzt dieselbe Form in $\mathcal{S}'$ (Übung):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}, \quad w^i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} u^j v^k \qquad \Leftrightarrow \qquad w^{i'} = \sum_{j',k'=1}^{3} \varepsilon^{i'}_{j'k'} u^{j'} v^{k'}$$

  und

$$\vec{b}_j \times \vec{b}_k = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} \vec{b}_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}_{j'} \times \vec{b}_{k'} = \sum_{i'=1}^{3} \varepsilon^{i'}_{j'k'} \vec{b}_{i'}$$

  mit demselben vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol.

Anmerkung: Hier haben wir eine rein räumliche Transformation betrachtet, $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$. Allgemeiner sind spezielle *raum-zeitliche* Transformationen (*Galilei-Transformationen*, siehe Kapitel 1.2.1) möglich, die ein IS auf ein neues IS abbilden.

1.1.3 Raum und Zeit

- Zeit: Reeller, universell gegebener Parameter $t \in \mathbb{R}$, der eine Abfolge von Ereignissen beschreibt
- Raumzeit M in der Newtonschen Theorie: Formale Zusammenfassung von Raum- und Zeitpunkten zu *raumzeitlichen Ereignissen*, die durch die 4 Koordinaten $(x^1, x^2, x^3, t) = (x^i, t)$ erfasst werden, $M = E_3 \times \mathbb{R}$.
- Gleichzeitigkeit: Man kann zwei beliebigen Ereignissen

  $$A = (x_A, y_A, z_A, t_A) \in M \qquad \text{und} \qquad B = (x_B, y_B, z_B, t_B) \in M$$

  ein zeitliches Vor- bzw. Nacheinander zuzuordnen:

  $t_A < t_B$: Ereignis A findet vor B statt
  $t_A = t_B$: Ereignis A findet gleichzeitig mit B statt
  $t_A > t_B$: Ereignis A findet nach B statt

- Wegen des universellen Charakters des Zeitparameters t wird die Zeit i.a. nicht transformiert, $t' = t$.

1.1.4 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

- Eine Bahnkurve ist eine Kurve im E_3, die durch die Zeit t parametrisiert ist:

  $$x^i = x^i(t) \qquad \text{Kurvenparameter } \lambda = t$$

- Die Geschwindigkeit ist der Tangentialvektor

  $$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i$$

  an die Bahnkurve, mit den Komponenten:

  $$v^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} =: \dot{x}^i, \qquad \dot{} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

  Beispiel kartesische Koordinaten (System Σ):

  $$v^1 = v^x = \dot{x}, \quad v^2 = v^y = \dot{y}, \quad v^3 = v^z = \dot{z}, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{b}_i$$

Beispiel Zylinderkoordinaten (System Σ'):

$$v^{1'} = v^{\varrho} = \dot{\varrho}, \quad v^{2'} = v^{\varphi} = \dot{\varphi}, \quad v^{3} = v^{z'} = \dot{z}', \qquad \vec{v} = \sum_{i'=1}^{3} v^{i'} \vec{b}_{i'}$$

- Die Geschwindigkeits-Komponenten transformieren sich bei einem Koordinatenwechsel $\Sigma \to \Sigma'$ gemäß:

$$v^{i'} = \sum_{k=1}^{3} v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

(siehe Kapitel 1.1.2.4)

- Beschleunigung in einem IS $\mathcal{S}$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a^i \vec{b}_i, \quad a^i = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}^i$$

Anmerkung:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Es gilt:} & \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \vec{b}_i & = & \sum_{i'=1}^{3} \dot{x}^{i'} b_{i'} \\ \text{Es ist aber i.A.:} & \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i & \neq & \sum_{i'=1}^{3} \ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} \end{array}$$

- Beispiel: Beschleunigung in Zylinderkoordinaten:
  - kartesische Koordinaten eines IS $\mathcal{S}$: $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$,
    Zylinderkoordinaten: $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\varrho, \varphi, z')$
  - Wollen schreiben: $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3} a^i \vec{b}_i = \sum_{i'=1}^{3} a^{i'} \vec{b}_{i'}$.
  - Frage: Wie lauten die $a^{i'}$?

Analyse:

$$\begin{array}{rcl} x &=& \varrho \cos\varphi, \quad \dot{x} = \dot{\varrho}\cos\varphi - \varrho\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \ddot{x} = (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\sin\varphi \\ y &=& \varrho \sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{\varrho}\sin\varphi + \varrho\dot{\varphi}\cos\varphi, \quad \ddot{y} = (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\cos\varphi \\ z &=& z', \quad \dot{z} = \dot{z}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}' \end{array}$$