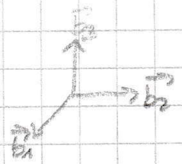
11.4.14

$\vec{v}, \vec{w}$: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$; $\vec{v} \parallel \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = 0$



> Für die Koordinatenbasisvektoren eines IS:

$(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$: $\underbrace{\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \vec{b_3},\ \vec{b_2} \times \vec{b_3} = \vec{b_1},\ \vec{b_3} \times \vec{b_1} = \vec{b_2}}_{\text{Rechte-Hand-Regel}}$

Zusammengefasst: $\vec{b_j} \times \vec{b_k} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i_{jk} \vec{b_i}$; z.B. $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \underbrace{\varepsilon^3_{12}}_{+1} \vec{b_3} = \vec{b_3}$

> Betrachten in einem IS S die Verbindungsgerade zw. 2 Punkten $\underset{\text{Koord. } x^i_A}{A}$ und $\underset{\text{Koord. } x^i_B}{B}$:

$x^i(\lambda) = \lambda x^i_B + (1-\lambda) x^i_A$; $x^i(0) = x^i_A$, $x^i(1) = x^i_B$

> Tangentialvektor: $\vec{t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx^i}{d\lambda} \vec{b_i} = \sum_{i=1}^{3} (x^i_B - x^i_A) \vec{b_i}$:

Bezeichnen den in S konstanten Tangentialvektor $\vec{t}$ als Verbindungsvektor der Punkt A und B.

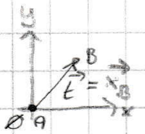
Bezeichnung: $\vec{t} = \vec{x_B} - \vec{x_A}$,

Es gilt: $(\vec{x_B} - \vec{x_A})^2 \equiv (\vec{x_B} - \vec{x_A}) \cdot (\vec{x_B} - \vec{x_A}) = D^2((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A))$

$= \sum_{i=1}^{3} (x^i_B - x^i_A)^2$

Schreibe auch: $|\vec{x_B} - \vec{x_A}| \equiv D((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A))$

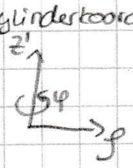
Allg.: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2}$



> Ortsvektoren:

Falls $x^i_A = 0$, d.h. der Punkt A fällt mit dem Koord.urspr. zusammen, dann heißt der Verbindungsvektor $\vec{x_B} = \vec{x_B} - \vec{x_A}$ der Ortsvektor des Punktes B bzgl. des Systems S

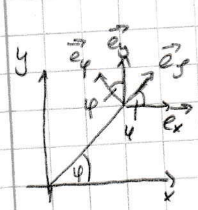
Zylinderkoord:



S: IS

Σ: bel. KOOS

1.1.2.4 Krummlinige Koordinaten



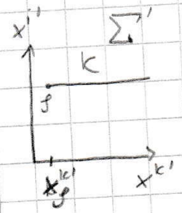
Beispiel: Zylinderkoordinaten:

kartesische Koordinaten: $\underbrace{(x^1, x^2, x^3)}_{x^i} = (x, y, z)$
Zylinderkoordinaten: $\underbrace{(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}_{x^{i'}} = (\rho, \varphi, z')$
} Koordinatentransformation: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z'$

Komponenten der Koordinateneinheitsvektoren $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_{z'})$ in kartesischen Koordinaten:

$$(\vec{e}_\rho)^i = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_\varphi)^i = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_{z'})^i = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

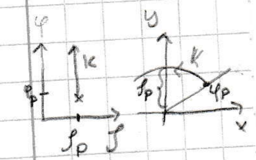
Betrachten nun allg. Koord.transformation zwischen einem KOOS Σ (mit Koord. x^i) und einem KOOS Σ' (mit Koordinaten $x^{i'}$):



- Linie entlang der Koordinate $x^{k'}$ innerhalb von Σ'

  $k: \; x^{i'}(\lambda) = x_p^{i'} + \lambda\,\delta^{i'}_{k'} \quad (x_p^{i'} = \text{const.})$

  z.B. Linie entlang der azimuthalen Winkelkoordinate in Zylinderkoordinaten



  $\rho = \rho_p, \; \varphi = \varphi_p + \lambda, \; z' = z'_p$

- Komponenten des Koordinatenvektor $\vec{b}_{k'}$ im System Σ

$$(\vec{b}_{k'})^i = \frac{d}{d\lambda}\left[x^i(x^{i'}(\lambda))\right] = \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \underbrace{\frac{dx^{i'}}{d\lambda}}_{\delta^{i'}_{k'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$$

Bsp.: $k'=1$: $(\vec{b}_{\varphi})^i = \begin{pmatrix}\partial x/\partial\varphi\\ \partial y/\partial\varphi\\ \partial z/\partial\varphi\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

$k'=1$: $(\vec{b}_\rho) = \begin{pmatrix}\partial x/\partial\rho\\ \partial y/\partial\rho\\ \partial z/\partial\rho\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

Allg. gilt also: $(\vec{b}_{k'})^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$

$$\Rightarrow \vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{b}_{k'})^i\, \vec{b}_i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\, \vec{b}_i}$$

allg. Transformationsgesetz für Koordinatenvektoren zur Notation: $\cancel{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{\text{in } \Sigma}}$ $\quad (\vec{v})^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bsp.:
$$(\vec{e}_\varsigma)^i = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{in } \Sigma'} = (\vec{e}_\varsigma)^{i'} ;$$

$$\vec{e}_\varsigma = \cos\varphi\, \vec{b}_x + \sin\varphi\, \vec{b}_y + 0\, \vec{b}_z = 1\, \vec{b}_\varsigma + 0\, \vec{b}_\varphi + 0\, \vec{b}_{z'}$$

Umrechnung der Koordinaten eines bel. Vektors:

$$\vec{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komp. in } \Sigma'}}{\sum_{k'=1}^{3} v^{k'}} \vec{b}_{k'} = \sum_{k'=1}^{3} v^{k'} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \vec{b}_i \left(\sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'} \right),$$

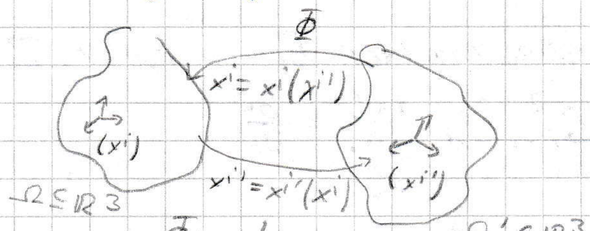
$$\vec{v} \overset{!}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{komp. in } \Sigma}}{\sum_{i=1}^{3} v^i} \vec{b}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^i = \sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} v^{k'}}$$

Transformationsgesetz von Vektorkomponenten

Analog: $\boxed{v^{i'} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} v^k}$

Anmerkung: Die Matrizen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \partial x^1/\partial x^{2'} & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \partial x^2/\partial x^{1'} & \cdots & \vdots \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \cdots & \end{pmatrix}$

und $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right)$ sind zueinander invers: $\sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta^i_j$



$\Phi: \Omega' \to \Omega$

$$J = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial x^{1'} & \cdots & \partial x^1/\partial x^{3'} \\ \vdots & & \\ \partial x^3/\partial x^{1'} & \cdots & \partial x^3/\partial x^{3'} \end{pmatrix}$$ Jacobi-Matrix von Φ

$x^{i'}(x^i(x^{k'})) = x^{i'}$ $\qquad J' = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right) = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix} = J^{-1}$

Abl. mittels Kettenregel:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}} = \delta^{i'}_{k'}$$

$$\underbrace{(J' \cdot J)}_{I}{}^{i'}_{k'} = \delta^{i'}_{k'}$$