Theoretische Mechanik

Übungen - Serie 6

Ausgabe: 14. Mai 2014, Abgabe: 21. Mai 2014 in der Vorlesung

1. **Alternative Herleitung der Planetenbewegung** **10 Punkte**

Ausgangspunkt sei der Energiesatz $(m/2)\,\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho) = E$ mit dem in der Vorlesung hergeleiteten effektiven Potential

$$U_{eff}(\rho) = -\frac{\gamma m M}{\rho} + \frac{L^2}{2m\rho^2}$$

für die Planetenbewegung.

(a) Bestimmen Sie das Minimum von $U_{eff}(\rho)$, bezeichnen Sie den zugehörigen ρ-Wert mit p. Zeigen Sie, daß $U_{eff}(\rho = p) = -\gamma m M/(2p)$ gilt.

(b) Skizzieren Sie das dimensionslose Potential $U_{eff} \cdot p/(\gamma m M)$ über der dimensionslosen Größe ρ/p.

(c) Begründen Sie, daß eine gebundene Bewegung nur für

$$-1 \leq \frac{2Ep}{\gamma m M} < 0$$

möglich ist und man für $E \geq 0$ eine ungebundene Bewegung erhält.

(d) Berechnen Sie die Umkehrpunkte, indem Sie die aus $U_{eff}(\rho) - E = 0$ folgende quadratische Gleichung in $1/\rho$ lösen. Setzen Sie

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2Ep}{\gamma m M}}$$

und drücken Sie die Bedingung für eine gebundene bzw. ungebundene Bewegung nur durch ε aus. Geben Sie die beiden Umkehrpunkte (gebundene Bewegung) bzw. den Umkehrpunkt (ungebundene Bewegung) als Funktion von ε und p an.

(e) Wenden Sie die in der Vorlesung hergeleitete Integraldarstellung für φ auf das vorliegende Problem an

$$\varphi = \int_{\rho_{min}}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2 \sqrt{2m/L^2 \, [E - U_{eff}(\rho')]}} \qquad (\varphi = 0 \text{ für } \rho = \rho_{min})$$

Drücken Sie zunächst L und E durch die oben eingeführten Größen p und ε aus und zeigen Sie, daß das Integral auf die Form

$$\varphi = \frac{p}{\varepsilon} \int_{\rho_{min}}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'^2} \left\{ 1 - \left[\frac{p}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{p} \right) \right]^2 \right\}^{-1/2}$$

gebracht werden kann.

(f) Substituieren Sie

$$z = \frac{p}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{p} \right)$$

und zeigen Sie, daß man nach Integration und Invertierung die Kegelschnittgleichung

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

erhält.

2. **Dritte kosmische Geschwindigkeit** **5 Punkte**

Berechnen Sie die dritte kosmische Geschwindigkeit!

Hinweis: Als dritte kosmische Geschwindigkeit bezeichnet man die Mindestgeschwindigkeit, mit der man einen Körper von der Erdoberfläche abschießen muß, damit er das Sonnensystem verlassen kann. Die gesuchte Geschwindigkeit muß so groß sein, daß nach Verlassen des Erdfeldes noch eine von Null verschiedene Geschwindigkeit verbleibt, die zusammen mit der Umlaufgeschwindigkeit der Erde um die Sonne die „zweite kosmische Geschwindigkeit" im Schwerefeld der Sonne (für den Abstand Erde-Sonne) ergibt. (Die Erdbahn um die Sonne kann als Kreis angenommmen werden.)

Zahlenwerte :
Erdmasse: $M_e = 5,979 \cdot 10^{24}$ kg, Sonnenmasse: $M_S = 1,985 \cdot 10^{30}$ kg,
mittlerer Erdradius: $R_e = 6371$ km,
mittlerer Abstand Erde-Sonne: $R = 149,6 \cdot 10^6$ km,
Gravitationskonstante: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ kg^{-1} m^3 s^{-2}.

Zusatzfrage : In welche Richtung muß der Abschuß erfolgen?