3. Dann folgt auch $\sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{\vec{r}}'_n = 0$ und damit:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} &= \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{s} + \vec{r}'_n) \times (\ddot{\vec{s}} + \ddot{\vec{r}}'_n) \\
&= M\vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}'_n \times \ddot{\vec{r}}'_n, \\
\vec{M} &= \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(\mathrm{a})} = \sum_{n=1}^{N} (\vec{s} + \vec{r}'_n) \times \vec{F}_n^{(\mathrm{a})} = \vec{s} \times \vec{F} + \sum_{n=1}^{N} \vec{r}'_n \times \vec{F}_n^{(\mathrm{a})}
\end{aligned}$$

4. Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{M},\ M\ddot{\vec{s}} = \vec{F}$ folgt schließlich:

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}'_n \times \ddot{\vec{r}}'_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{r}'_n \times \vec{F}_n^{(\mathrm{a})}$$

Der Drehimpulssatz gilt unverändert im Schwerpunktsystem.

2.4 Der Energiesatz

- Multiplikation der Bewegungsgleichung $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n$ mit $\dot{\vec{r}}_n$ und Summation ergibt:

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Linke Seite ergibt Zeitableitung der gesamten kinetischen Energie T:

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Rechte Seite ergibt ebenfalls Zeitableitung, falls es ein *Potential* $U = U(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i)$ gibt mit:

$$\sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i$$

  also:

$$F_n^i = -\frac{\partial U}{\partial x_n^i}, \qquad \vec{F}_n = -\mathrm{grad}_n U$$

- Notwendig für Existenz des Potentials ist:

$$\frac{\partial F_n^i}{\partial x_m^j} = \frac{\partial F_m^j}{\partial x_n^i} \ : \qquad -\frac{\partial^2 U}{\partial x_m^j \partial x_n^i} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^i \partial x_m^j}$$

- Teilen wie beim einzelnen Massenpunkt die Kräfte in konservative (besitzen ein Potential) und dissipative Kräfte $\vec{F}_{n\mathrm{Diss}}$ ein.

- Es folgt der *Energiesatz*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_{n\mathrm{Diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Der *Energieerhaltungssatz* folgt, falls $\vec{F}_{n\mathrm{Diss}} = 0$:

$$T + U = E$$

- Aufteilung in innere und äußere Potentiale:

  1. Äußeres Potential $U_n^{(\mathrm{a})}$ hängt nur von $\vec{r}_n$ ab (nicht von den Koordinaten der anderen Massenpunkte.)
  2. Kräfte $\vec{F}_{nm}$ hängen nur von $\vec{r}_n, \vec{r}_m$ ab; das Wechselwirkungspotential U_{nm} ist dem Massepunkte-Paar (n, m) zugeordnet, $m > n$.
  3. Wegen $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm}$ folgt:

  $$F_{mn}^i = -\frac{\partial U_{nm}}{\partial x_m^i} = -F_{nm}^i = \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_n^i}$$

  Führen wir (für feste m, n) die Hilfsvariablen

  $$\xi^i = x_n^i - x_m^i, \qquad \eta^i = x_n^i + x_m^i$$

  ein, so folgt:

  $$0 = \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_m^i} + \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_n^i} = 2\frac{\partial U_{nm}}{\partial \eta^i}$$

  U_{nm} ist damit eine reine Funktion von ξ^i, also:

  $$U_{nm} = U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m).$$

4. Oft hängt U_{nm} nur von $r_{nm} \equiv |\vec{r}_n - \vec{r}_m|$ ab; dann gilt: $\vec{F}_{nm} \parallel (\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

5. Aufsummierung:

$$\begin{aligned} U = U(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_N^i) &= \sum_{\text{Paare}\,(n,m)} U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) + \sum_{n=1}^{N} U_n^{(\mathrm{a})} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n+1}^{N} U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) + \sum_{n=1}^{N} U_n^{(\mathrm{a})} \end{aligned}$$

6. Einfaches Beispiel: Wechselwirkungspotential beim *Zweikörperproblem*,

$$U_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

2.5 Allgemeine Sätze und Integration der Bewegungsgleichungen

- Allgemeine Sätze geben uns 10 Konstanten der Bewegung: die Gesamtenergie E, die drei Komponenten des Gesamtdrehimpulses L^i und die 6 Orts- und Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes, s^i und $\dot{s}^i$.

- Aber: System wird durch $6N$ Integrationskonstanten bestimmt ($3N$ für Anfangslagen $x_n^i(0)$ und $3N$ für Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}_n^i(0)$).

- System ist damit i.A. nicht komplett durch die allgemeinen Sätze beschreibbar.

- Beispiel: Dreikörperproblem, siehe Zitat Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik, S. 57:

Während sich für das Zweikörperproblem das Defizit von 2 Konstanten noch als überbrückbar erweist (es handelt sich um unwesentliche Integrationskonstanten), ist dies schon beim Dreikörperproblem der Himmelsmechanik nicht mehr der Fall: Wie mathematisch bewiesen wurde, ist es beim Dreikörperproblem unmöglich, die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen durch algebraische Funktionen auszudrücken. Ein geschlossener analytischer Ausdruck für die Lösung ist (auch bei Zulassung anderer Funktionen) nicht bekannt: Das Dreikörperproblem ist nicht integrabel, vgl. Abschnitt 7.7 Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei hervorgehoben, daß eine Lösung mit vorgeschriebenen Anfangsbedingungen natürlich numerisch berechnet werden kann und daß exakte Lösungen für Spezialfälle des Dreikörperproblems bekannt sind, so z. B. für 3 Punkte gleicher Masse, die an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen, das um seinen Mittelpunkt rotiert.

2.6 Reduzierte Masse

- Im Falle $\vec{F} = 0$ (keine äußeren Kräfte) ist für zwei Massenpunkte:

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{12} \ , \qquad m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

- Für den *Verbindungsvektor* $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12} \ , \quad \mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{12}$$

- $\vec{r}$ bewegt sich also wie ein Teilchen der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

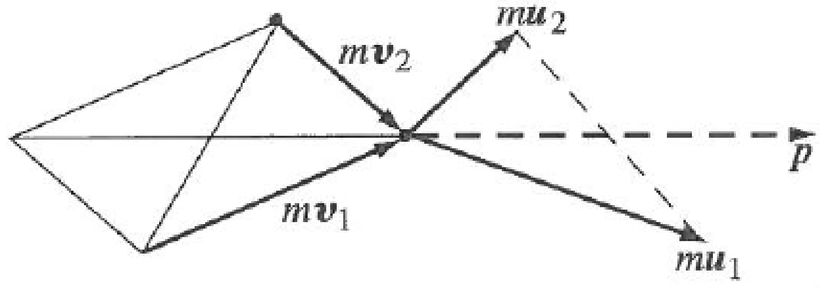
unter dem Einfluss der Kraft $\vec{F}_{12}$.

2.7 Elastischer Stoß zweier gleicher Massenpunkte

- Wenden Schwerpunktsatz (Impulssatz) und Energieerhaltungssatz an:

$$\begin{aligned} m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 &= m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 = \vec{p} \\ \frac{m}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\vec{v}_2^{\,2} &= \frac{m}{2}\vec{u}_1^{\,2} + \frac{m}{2}\vec{u}_2^{\,2} = E \end{aligned}$$

$\vec{v}_{1/2}, \vec{u}_{1/2}$: Geschwindigkeit der Massenpunkte vor bzw. nach dem Stoß; m: Masse der Massenpunkte.



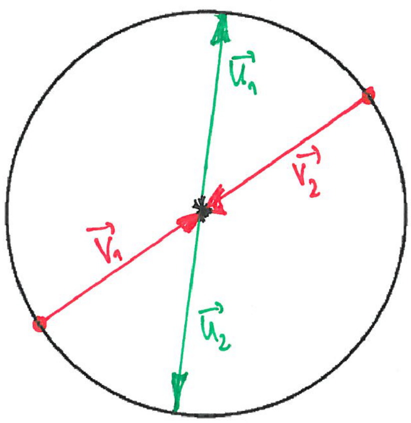
Elastischer Stoß im Nicht-Schwerpunktsystem.

- Im Schwerpunktsystem $\vec{s} = \dot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}} = 0$:

$$\vec{p} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\dot{\vec{s}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

- Aus Schwerpunkt- und Energieerhaltungssatz folgt dann:

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2, \qquad \vec{u}_1^{\,2} = \vec{v}_1^{\,2}$$



Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem.

- Beträge der Geschwindigkeitsvektoren ändern sich nicht, nur die Richtungen sind verdreht.

2.8 Zweikörperproblem der Himmelsmechanik

- Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Massen m_1, m_2), keine äußeren Kräfte.

- Wählen Schwerpunktsystem $\vec{s} = \dot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}} = 0$:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

- Wechselwirkungspotential

$$U_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\mathrm{grad}_1 U_{12} = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{2.1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\mathrm{grad}_2 U_{12} = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{2.2}$$

- Einführung von *Relativkoordinaten*:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- Aus (2.1, 2.2) folgt dann:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -(m_1 + m_2)\gamma \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- Es folgt:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\gamma\mu(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{2.3}$$

  Gemäß Kapitel 2.6 bewegt sich der Verbindungsvektor $\vec{r}$ wie ein Teilchen der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Gravitationskraft eines zentralen Körpers der Masse $(m_1 + m_2)$ (Kraft K_{12}).

- Die Lösung von (2.3) sind die im Kapitel (1.5.2) dargestellten Kegelschnitte. Der Vektor $\vec{r}$ beschreibt also eine Ellipse, und da aus dem Schwerpunktsatz sowie $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ die Gleichungen:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

  folgen, bewegen sich die Massenpunkte auf geometrisch ähnlichen, gleichsinnig durchlaufenen Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt (Abb.).

- Die Achsenlängen der Ellipsen sind den Massen umgekehrt proportional, da
$$\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Falls $m_1 \gg m_2$, dann folgt $|\vec{r}_1| \ll |\vec{r}|$, $\vec{r}_2 \approx \vec{r}$. Im Grenzfall $m_2/m_1 \to 0$ ruht der schwere Körper im Brennpunkt; der leichte vollführt die Bewegung des Einkörperproblems.

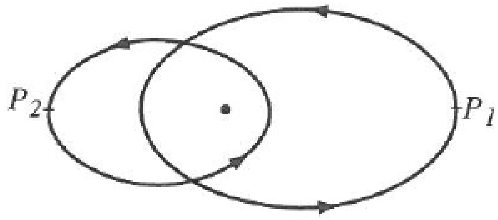


Abb.: Bahnellipsen beim Zweikörperproblem; P_1 und P_2 werden gleichzeitig durchlaufen.

2.9 Der Virialsatz

- Virialsatz macht Aussage darüber, wie groß im *zeitlichen* Mittel die Beiträge von kinetischer und potentieller Energie zur Gesamtenergie sind.

- Wir multiplizieren die Bewegungsgleichungen skalar mit dem Ortsvektor $\vec{r}_n$ und summieren über alle Massenpunkte:
$$\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \cdot \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n$$

- Umformung:
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_n \vec{r}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n) - \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{\vec{r}}_n^{\,2} = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n = -\sum_{n=1}^{N} \mathrm{grad}_n U \cdot \vec{r}_n \quad (2.4)$$

- Definition zeitliches Mittel einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$:
$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Anwendung auf ersten Term in (2.4):

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n\right]\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n\right]_0^\tau$$

- Dieser Ausdruck verschwindet, falls der Term in Klammern beschränkt bleibt. Dies ist gewährleistet, wenn die Bewegungen mit beschränkten Geschwindigkeiten in einem beschränkten Raumgebiet verlaufen (gebundene Bewegungen). Ausgeschlossen sind z.B. hyperbolische Kometenbahnen.

- Dann folgt:

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_{n=1}^{N} \mathrm{grad}_n U \cdot \vec{r}_n}$$

- Weitere Annahme: U sei eine *positiv homogene Funktion vom Grad κ in den x_n^i*, d.h. für alle reellen $\alpha > 0$ gilt:

$$U(\alpha x_1^1, \ldots, \alpha x_N^3) = \alpha^\kappa U(x_1^1, \ldots, x_N^3) \tag{2.5}$$

  Beispiele:

  1. Harmonische Oszillatoren:

  $$U = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N} \frac{k_{nm}}{2}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 2$$

  2. Gravitierende Massenpunkte:

  $$U = -\gamma \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=n+1}^{N} \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \quad \Rightarrow \quad \kappa = -1$$

- Für solche Funktionen gilt der *Eulersche Satz*:

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{grad}_n U \cdot \vec{r}_n = \kappa U \tag{2.6}$$

Beweis:
Wir differenzieren für feste x_n^i die Gleichung (2.5) nach α:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}U(\alpha x_n^i) &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial U}{\partial x_n^i}(\alpha x_n^i)\cdot x_n^i = \sum_{n=1}^{N}\vec{r}_n\cdot(\mathrm{grad}\,U_n)(\alpha x_n^i)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\alpha^\kappa U(x_n^i) &= \kappa\alpha^{\kappa-1}U(x_n^i)\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\alpha = 1$ und erhalten (2.6).

- Damit folgt:
$$\overline{T} - \frac{\kappa}{2}\overline{U} = 0 \qquad \text{Virialsatz}$$
- Speziell für die Astrophysik (Gravitationspotential, $\kappa = -1$):
$$E = \overline{T} + \overline{U} = -\overline{T}$$
- Die Gesamtenergie des Systems ist negativ; ihr Betrag ist gleich dem Mittelwert der kinetischen Energie.

2.10 Raketengleichung

- Beispiel für Anwendung des 2. Newtonschen Axioms auf Körper mit veränderlicher Masse:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{F}$$
- Rakete: Masse verringert sich durch Ausstoß von Brennstoff, $\dot{m} < 0$.
- Zum Zeitpunkt t betrachten wir die Rakete (Masse $m(t)$) und die im Zeitintervall $(t + \mathrm{d}t)$ ausgestoßene Masse $\mathrm{d}m_\mathrm{a} = -\,\mathrm{d}m = -\dot{m}\,\mathrm{d}t$ als Gesamtsystem, auf das die Gravitationskraft $\vec{F}$ wirkt.
- Impuls zum Zeitpunkt t:
$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$$
- Der Impuls dieses Gesamtsystems zum Zeitpunkt $t + \mathrm{d}t$ besteht aus zwei Anteilen (Vernachlässigung in $\mathrm{d}t$ quadratischer Glieder):

1. Raketenimpuls $\vec{p}_\mathrm{R}(t+\,\mathrm{d}t) = m(t+\,\mathrm{d}t)\vec{v}(t+\,\mathrm{d}t)$
2. Impuls der ausgestoßenen Masse $\mathrm{d}\vec{p}_\mathrm{a} = \,\mathrm{d}m_\mathrm{a}\Big(\vec{v}_\mathrm{a} + \vec{v}(t)\Big)$, wobei $\vec{v}_\mathrm{a}$ die von der Rakete aus gesehene Ausstoßgeschwindigkeit des Brennstoffs ist.

Somit:

$$\begin{aligned}
\vec{p}(t+\,\mathrm{d}t) &= m(t+\,\mathrm{d}t)\vec{v}(t+\,\mathrm{d}t) + \,\mathrm{d}m_\mathrm{a}\Big(\vec{v}_\mathrm{a} + \vec{v}(t)\Big) \\
&= \vec{p}(t) + \Big(\dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}}\Big)\,\mathrm{d}t - \dot{m}\,\mathrm{d}t\Big(\vec{v}_\mathrm{a} + \vec{v}\Big) \\
&= \vec{p}(t) + \Big(m\dot{\vec{v}} - \dot{m}\vec{v}_\mathrm{a}\Big)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Es folgt:

$$m\dot{\vec{v}} - \dot{m}\vec{v}_\mathrm{a} = \vec{F}$$

- Eindimensionales Anwendungsbeispiel:

1. Betrachte im homogenen Schwerefeld senkrecht nach oben steigende Feuerwerksrakete.
2. Die z-Achse zeige nach oben, dann:

$$\vec{F} = -mg\,\vec{b}_z, \quad \vec{v} = v\,\vec{b}_z, \quad \vec{v}_\mathrm{a} = -v_\mathrm{a}\,\vec{b}_z \quad \text{mit} \quad v_\mathrm{a} > 0, \text{const.}$$

3. Dann folgt:

$$\dot{v} = -g - \frac{\dot{m}}{m}v_\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad v = -gt + v_\mathrm{a}\ln\frac{m_0}{m}$$

4. Am Ende der Brenndauer T erreichte Endgeschwindigkeit

$$v_\mathrm{E} = -gT + v_\mathrm{a}\ln\frac{m_0}{m_T}$$

ist groß, wenn T klein, m_T klein gegen m_0 und v_a groß ist.

5. Falls $\dot{m} = \text{const.}$ folgt:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_\mathrm{a}t - a\left(\frac{m_0}{\dot{m}} + t\right)\ln\left(1 + \frac{\dot{m}}{m_0}t\right),$$

mit $\dot{m} = \text{const.} < 0$ für $t \le T$ und $\dot{m} = 0$ für $t > T$.

6. Es gilt keine Energieerhaltung (Umwandlung von chemischer in mechanische Energie).

Kapitel 3

Massenpunkt mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit

3.1 Zwangsbedingungen

- Betrachten Massenpunkt, dessen Bewegungsfreiheit durch eine Forderung
$$g(x^i;t) = 0 \tag{3.1}$$
eingeschränkt ist.

  Beispiel: (Räumliches) mathematisches Pendel:
$$g(x, y, z; t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

- Massenpunkt bewege sich also auf der durch (3.1) vorgegebenen zweidimensionalen Fläche.

- Bei zwei einzuhaltenden *Zwangsbedingungen* $g_1(x^i;t) = 0$, $g_2(x^i;t) = 0$ findet die Bewegung auf einer Kurve – der Schnittkurve der Flächen g_1 und g_2 – statt.

  Beispiel: Bewegung auf einer Schraubenlinie,
$$g_1(x, y, z; t) = x^2+y^2-R^2 = 0, \quad g_2(x, y, z; t) = y\cos(\mu z)-x\sin(\mu z) = 0.$$

  (Anmerkung: Statt *Zwangsbedingung* sagt man auch *Nebenbedingung*.)

- *Frage:*

  Wie erfasst man die Bewegung eines Massenpunktes in einem äußeren Kraftfeld $\vec{F}$, wenn die Bewegung Zwangsbedingungen unterliegt?

- *Antwort:*

  1. Jeder Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i;t) = 0$ kann eine Kraft $\vec{Z}_\alpha$ zugeordnet werden, die auf den Massenpunkt wirkt und dafür „sorgt", dass die Bedingung eingehalten wird.
  2. Das so genannte *d'Alembertsche Prinzip* gibt uns die Richtung, nicht jedoch den Betrag der Kraft $\vec{Z}_\alpha$.
  3. Unterliegt ein Massenpunkt N_Z Zwangsbedingungen ($0 \leq N_Z \leq 3$), dann gibt die Bewegungsgleichung

     $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_\alpha$$

     zusammen mit allen Zwangsbedingungen

     $$g_\alpha(x^i;t) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, N_Z$$

     genügend Informationen, um das Problem vollständig zu lösen.

3.2 Virtuelle Verrückungen und das d'Alembertsche Prinzip

- Virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^{3} \delta x^i_\alpha \vec{b}_i$ bezüglich einer Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i;t) = 0$ sind:

  1. gedachte, infinitesimale Verschiebungen des Massenpunktes
  2. verträglich mit der Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i;t) = 0$
  3. instantan, d.h. zu jedem Zeitpunkt sind es *rein räumliche* Verschiebungen im euklidischen Raum