Theoretische Mechanik

Übungen - Serie 1

Ausgabe: 9. April 2014, Abgabe: 16. April 2014 in der Vorlesung

1. **Kugelkoordinaten** **5 Punkte**

   Betrachten Sie den Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten:

   - kartesische Koordinaten: $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$, Inertialsystem $\mathcal{S}$
   - Kugelkoordinaten: $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \vartheta, \varphi)$, System Σ'
   - Koordinatentransformation:

   $$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

   Berechnen Sie mit Hilfe der Beziehungen aus der Vorlesung:

   (a) die Koordinatenbasisvektoren $\vec{b}_{i'}$ im System Σ' als Linearkombination der $\vec{b}_i$ im System $\mathcal{S}$. Wie schreiben sich die Koordinateneinheitsvektoren $\vec{e}_{i'}$?

   (b) die Koordinatenbasisvektoren $\vec{b}_i$ im System $\mathcal{S}$ als Linearkombination der $\vec{b}_{i'}$ im System Σ'.

   (c) die Komponenten $v^{i'}$ eines Vektors $\vec{v}$ im System Σ' in Abhängigkeit der Komponenten v^i im System $\mathcal{S}$.

2. **Levi-Civita-Symbol und „Bac-cab"-Regel** **7 Punkte**

   (a) Zeigen Sie, dass für das Levi-Civita-Symbol ε_{ijk},

   $$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von (123),} \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von (123),} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   die auf der Rückseite angegebenen 4 Beziehungen gelten.

Hinweise:
1) Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben in der angegebenen Reihenfolge und bauen Sie auf das jeweils vorangegangene Resultat auf.
2) Überlegen Sie bei Relation (1) welche möglichen Werte auf der linken Seite überhaupt nur entstehen können. Vermeiden Sie lange Determinantenrechnungen, argumentieren Sie statt dessen mit Eigenschaften von Determinanten (z.B. Verhalten bei Zeilentausch).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} && (1) \\
\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} && (2) \\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} &= 2\,\delta_{kn} && (3) \\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6 && (4)
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie mittels Relation (2) aus Teilaufgabe (a) die für Vektorprodukte geltende „Bac-cab"-Regel:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$