3.6 Einseitige Bindungen

- Bindungen sind einseitig, wenn der Massenpunkt daran gehindert wird, eine Fläche nach einer Seite zu verlassen, die Bewegung bezüglich der anderen Seite aber nicht eingeschränkt ist.

- Beispiel: Massenpunkt gleitet auf einer Kugel hinunter. Es gilt die Zwangsbedingung:

  $$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$$

  Die Kugel vermag nur eine Zwangskraft nach außen auszuüben; für die zugehörige Zwangskraft $\vec{Z}_1$ gilt:

  $$Z_1^r \geq 0$$

- Das d'Alembertsche Prinzip lautet für einseitige Bindungen:

  $$\vec{Z}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \geq 0$$

  Virtuelle Verrückungen sind nun also auch in Richtung der Zwangskraft erlaubt; dann ist obiger Ausdruck positiv.

- Vorgehensweise (siehe Abb.):

  1. Sei für $t = 0$ eine nichtverschwindende Zwangskraft zur Realisierung der Zwangsbedingung nötig.
  2. Man bestimme die Bewegung gemäß den Lagrangeschen Gleichungen I. Art bis zu demjenigen Punkt, an dem die Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ verschwindet.
  3. Zu diesem Zeitpunkt verlässt der Massenpunkt die Fläche $g_\alpha = 0$ und bewegt sich auf derjenigen Seite der Fläche, wo $g_\alpha > 0$ gilt.
  4. Dann befindet sich der Massenpunkt nicht mehr unter dem Einfluss der Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$, bis zu einem eventuellen späteren Zeitpunkt, zu dem wieder $g_\alpha = 0$ genau erfüllt ist.
  5. Von diesem Zeitpunkt an ist wieder die Zwangskraft $\vec{Z}_\alpha$ im Rahmen der Lagrangeschen Gleichungen I. Art zu berücksichtigen usw.

Kapitel 4

Massenpunktsysteme mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit

4.1 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen I. Art

- Für Massenpunktsysteme (mit N Massenpunkten der Massen m_n) hängen Zwangsbedingungen g_α potentiell von allen Koordinaten x_n^i, $i = 1, \dots, 3; n = 1, \dots, N$, ab,

  $$g_\alpha = g_\alpha(x_n^i; t) = g_\alpha(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3; t) \stackrel{!}{=} 0 \tag{4.1}$$

  Hierbei sind wieder die x_n^i Koordinaten in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$.

- Jeder Zwangsbedingung g_α kann ein Satz von Zwangskräften $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ zugeordnet werden, wobei die Zwangskraft $\vec{Z}_{\alpha,n}$ auf den n-ten Massenpunkt wirkt.

- Die Kräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$,,sorgen" dafür, dass die Bedingung $g_\alpha = 0$ eingehalten wird.

- D'Alembertsches Prinzip:

  Die Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ leisten bei einer beliebigen virtuellen Verrückung $\{\delta\vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ des Massenpunktsystems, die mit der Zwangsbe-

dingung $g_\alpha = 0$ verträglich ist, keine Arbeit:

$$\sum_{n=1}^{N} \vec{Z}_{\alpha,n} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha,n} = 0.$$

- Analyse:

  1. In einem $3N$-dimensionalen *Konfigurationsraum*, der durch die $3N$ Koordinaten x_n^i aufgespannt wird, wird die Gesamtheit aller Ortskoordinaten der Massenpunkte durch einen Punkt beschrieben.
  2. Durch (4.1) wird zum festen Zeitpunkt t in diesem Konfigurationsraum eine $(3N-1)$-dimensionale Hyperfläche $\mathcal{H}$ beschrieben.
  3. Jede virtuelle Verrückung $\{\delta\vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^{N}$ liegt *tangential* in $\mathcal{H}$. Sie besteht aus infinitesimalen Verschiebungen *aller* Massenpunkte des Systems.
  4. Das d'Alembertsche Prinzip ist äquivalent zur Aussage, dass der Vektor aller Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^{N}$ im Konfigurationsraum senkrecht steht auf $\mathcal{H}$.
  5. Damit ist dieser Vektor parallel zum Gradienten von g_α an $\mathcal{H}$, d.h. :

     $$Z_{\alpha,n}^i = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \qquad \text{oder} \qquad \vec{Z}_{\alpha,n} = \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha$$

     mit einem von n und i unabhängigen *Lagrangeschen Multiplikator* λ_α.

- Lagrange-Gleichungen I. Art:

  1. Falls wieder N_Z Zwangsbedingungen beachtet werden müssen (also $\alpha = 1, \dots, N_Z \leq 3N$), sind die Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$ vektoriell zu addieren.
  2. Somit folgen die Lagrange-Gleichungen I. Art:

     $$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_{\alpha,n} = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha \tag{4.2}$$

oder in Komponenten:

$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

3. Diese sind gemeinsam zu lösen mit den N_Z Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_n^i; t) = 0. \tag{4.3}$$

4. (4.2) und (4.3) ergeben $(3N+N_Z)$ Gleichungen für die $(3N+N_Z)$ Unbekannten (x_n^i, λ_α).

4.2 Schwerpunkt-, Drehimpuls- und Energiesatz

- Aufteilung der Kräfte:
  1. innere eingeprägte Kräfte $\vec{F}_{nm}(m \neq n)$, $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm}$
  2. äußere eingeprägte Kräfte $\vec{F}_n^{(\mathrm{a})}$
  3. innere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,nm}(m \neq n)$, $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$
  4. äußere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}^{(\mathrm{a})}$

- Innere Zwangskräfte rühren von *inneren* Zwangsbedingungen g_α her, die nur Funktionen von $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$ sind, für die also gilt:

$$\vec{Z}_{\alpha,nm} = \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha = -\lambda_\alpha \mathrm{grad}_m g_\alpha = -\vec{Z}_{\alpha,mn}$$

  Oft ist

$$g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}_n g_\alpha = \frac{\partial g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)}{\partial |\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = -\mathrm{grad}_m g_\alpha$$

  Dann liegen die Zwangskräfte in Richtung des Verbindungsvektors $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

- Äußere Zwangskräfte werden auf das System durch die Umgebung ausgeübt. Sie ,,sorgen” dafür, dass das System *äußeren* Zwangsbedingungen folgt.

- *Schwerpunktsatz:*

  Wegen $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$ gilt:

$$M\ddot{\vec{s}} = \vec{F} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(\mathrm{a})}$$

  Hier ist nur über solche α zu summieren, für die $g_\alpha = 0$ einer *äußeren* Zwangsbedingung entspricht.

- *Drehimpulssatz:*

  Für innere Zwangsbedingungen der Form $g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} \left[\vec{r}_n \times \left(\vec{F}_n^{(\mathrm{a})} + \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(\mathrm{a})} \right) \right]$$

- *Energiesatz*

  Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_n$ und Summation über alle n liefert in der bekannten Weise:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^i)^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F_n^i \dot{x}_n^i + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i$$

  Falls die eingeprägten Kräfte ein Potential aufweisen, folgt:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F_n^i \dot{x}_n^i = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(x_n^i)$$

  Ferner ist:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_\alpha(x_n^i; t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t},$$

  und somit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = -\sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

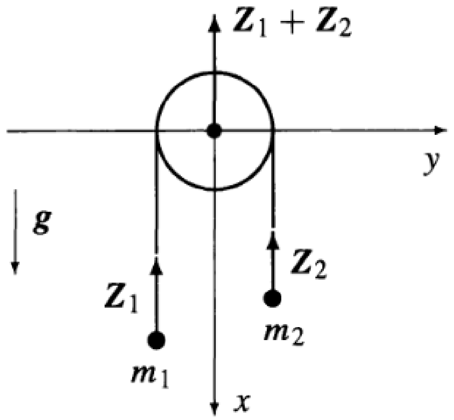
  Wenn die eingeprägten Kräfte ein Potential haben, ist die zeitliche Änderung der Energie gleich der Leistung der Zwangskräfte.

- Für skleroneome (zeitunabhängige) Zwangsbedingungen verschwindet diese Leistung. Dann gilt Energieerhaltung, $T + U = E$.

- Bei zeitabhängigen Bindungen kann Energie übertragen werden. Dann ist zwar die *virtuelle* Arbeit gemäß des d'Alembertschen Prinzips Null, nicht aber die *reale* Arbeit bei der Bewegung.

4.3 Beispiele

4.3.1 Wellrad



- Zwei Massenpunkte im Erdschwerefeld sind durch einen Faden verbunden, der über eine fest aufgehängte Rolle geführt wird (siehe Abb.).

- Zwangsbedingung:
$$g_1 = x_1 + x_2 - L = 0$$

- zugehörige Zwangskräfte:
$$Z^x_{1,1} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \lambda_1, \quad Z^x_{1,2} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \lambda_1$$

  Die Zwangskräfte auf die Massenpunkte sind gleich groß und gleich gerichtet; es handelt sich um *äußere* Zwangskräfte, hervorgebracht durch die Aufhängung.

- Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + Z^x_{1,1} = m_1 g + \lambda_1, \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + Z^x_{1,2} = m_2 g + \lambda_1$$

- Subtraktion führt auf:

$$m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)g$$

- Wegen der Zwangsbedingung ist $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$, und daher:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g.$$

  Als gesamte träge Masse geht die Summe $(m_1 + m_2)$, als Kraft die Differenz der Gewichte $(m_1 g - m_2 g)$ ein.

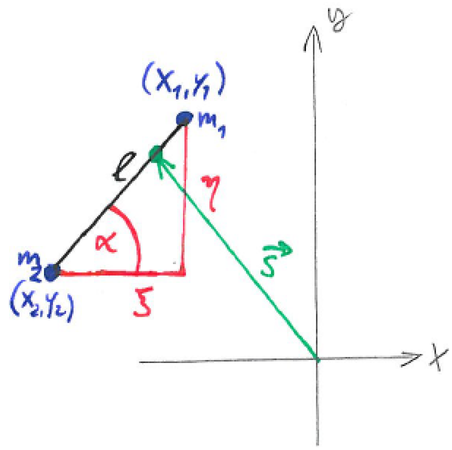
- Zwangskraft:

$$Z^x_{1,1} = \lambda_1 = m_1(\ddot{x}_1 - g) = -2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

  Von der Aufhängung aufgenommene Gesamtzwangskraft ist

$$Z^x_{1,1} + Z^x_{1,2} = 2\lambda_1, \qquad |Z^x_{1,1} + Z^x_{1,2}| \le m_1 g + m_2 g$$

4.3.2 Hantel auf Eisfläche



- Reibungsfreie Bewegung zweier durch eine masselose Stange (Länge ℓ) verbundener Massenpunkte (siehe Abb.)

- Zwangsbedingung:

$$g_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0$$

- zugehörige Zwangskräfte:

$$\begin{aligned}
Z^x_{1,1} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 2\lambda_1(x_1 - x_2), \\
Z^y_{1,1} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 2\lambda_1(y_1 - y_2), \\[1em]
Z^x_{1,2} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -2\lambda_1(x_1 - x_2), \\
Z^y_{1,2} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -2\lambda_1(y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

  sind *innere* Zwangskräfte.

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= 2\lambda_1(x_1 - x_2), & m_1\ddot{y}_1 &= 2\lambda_1(y_1 - y_2) \\
m_2\ddot{x}_2 &= -2\lambda_1(x_1 - x_2), & m_1\ddot{y}_2 &= -2\lambda_1(y_1 - y_2)
\end{aligned}$$

- Es folgt der Schwerpunktsatz:

$$M\ddot{\vec{s}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{s} = \vec{s}_0 + \dot{\vec{s}}_0 t$$

  mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und:

$$\vec{s} = s^x \vec{b}_x + s^y \vec{b}_y = \frac{1}{M}\left[(m_1x_1 + m_2x_2)\,\vec{b}_x + (m_1y_1 + m_2y_2)\,\vec{b}_y\right]$$

- Einführung von Relativkoordinaten (siehe Abb.):

$$\begin{aligned}
\xi &= x_1 - x_2 & \Rightarrow \qquad x_1 &= s^x + \frac{m_2}{M}\xi, & x_2 = s^x - \frac{m_1}{M}\xi \\
\eta &= y_1 - y_2 & \Rightarrow \qquad y_1 &= s^y + \frac{m_2}{M}\eta, & y_2 = s^y - \frac{m_1}{M}\eta
\end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\xi} = \frac{2\lambda_1}{\mu}\xi, \quad \ddot{\eta} = \frac{2\lambda_1}{\mu}\eta \qquad \text{mit reduzierter Masse } \mu = \frac{m_1m_2}{M}$$

- Die Zwangsbedingung
$$\xi^2 + \eta^2 = \ell^2$$
legt die Einführung einer Winkelkoordinate α nahe:
$$\begin{aligned} \xi &= \ell\cos\alpha, & \dot\xi &= -\ell\dot\alpha\sin\alpha, & \ddot\xi &= -\ell(\ddot\alpha\sin\alpha + \dot\alpha^2\cos\alpha) \\ \eta &= \ell\sin\alpha, & \dot\eta &= \ell\dot\alpha\cos\alpha, & \ddot\eta &= \ell(\ddot\alpha\cos\alpha - \dot\alpha^2\sin\alpha) \end{aligned}$$

- Damit folgt unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen:
$$\begin{aligned} \ell\ddot\alpha &= \ddot\eta\cos\alpha - \ddot\xi\sin\alpha &&= \frac{2\lambda_1}{\mu}(\eta\cos\alpha - \xi\sin\alpha) &&= 0 \\ \ell\dot\alpha^2 &= -\ddot\eta\sin\alpha - \ddot\xi\cos\alpha &&= -\frac{2\lambda_1}{\mu}(\eta\sin\alpha + \xi\cos\alpha) &&= -\frac{2\ell\lambda_1}{\mu}, \end{aligned}$$
also:
$$\alpha = \alpha_0 + \omega t, \qquad \lambda_1 = -\frac{\mu}{2}\omega^2 \qquad (\omega = \text{const.})$$

- Gesamtlösung:
$$\begin{aligned} x_1 &= s_0^x + \dot s_0^x t + \frac{m_2}{M}\ell\cos(\omega t + \alpha_0) \\ y_1 &= s_0^y + \dot s_0^y t + \frac{m_2}{M}\ell\sin(\omega t + \alpha_0) \\ x_2 &= s_0^x + \dot s_0^x t - \frac{m_1}{M}\ell\cos(\omega t + \alpha_0) \\ y_2 &= s_0^y + \dot s_0^y t - \frac{m_1}{M}\ell\sin(\omega t + \alpha_0) \\ \vec Z_{1,1} &= -\vec Z_{1,2} = -\mu\omega^2\ell\left[\cos(\omega t + \alpha_0)\vec b_x + \sin(\omega t + \alpha_0)\vec b_y\right] \end{aligned}$$
Im Schwerpunktsystem dreht sich die Hantel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω.

- Drehimpuls $\vec L = \sum\limits_{n=1}^{2} m_n \vec r_n \times \dot{\vec r}_n$:
$$\vec L = L^z \vec b_z, \qquad L^z = \mu\omega\ell^2 + M(s_0^x\dot s_0^y - s_0^y\dot s_0^x) = \text{const.}$$

- kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{2} m_n \dot{\vec{r}}_n^2$:

$$T = \frac{\mu}{2}\omega^2 \ell^2 + \frac{M}{2}\left[(\dot{s}_0^x)^2 + (\dot{s}_0^y)^2\right] = \text{const.}$$

4.4 Um eine Achse frei drehbarer starrer Körper

4.4.1 Modell des starren Körpers

- Ein starrer Körper besteht aus einer großen (im Grenzfall unendlichen) Anzahl von Massenpunkten

- Diese werden als starr miteinander verbunden angenommen; die gegenseitigen Abstände von je zwei Massenpunkten sind konstant.

- Die entsprechenden Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig und führen zu *inneren* Zwangskräften entlang der Verbindungsvektoren der Massenpunkte.

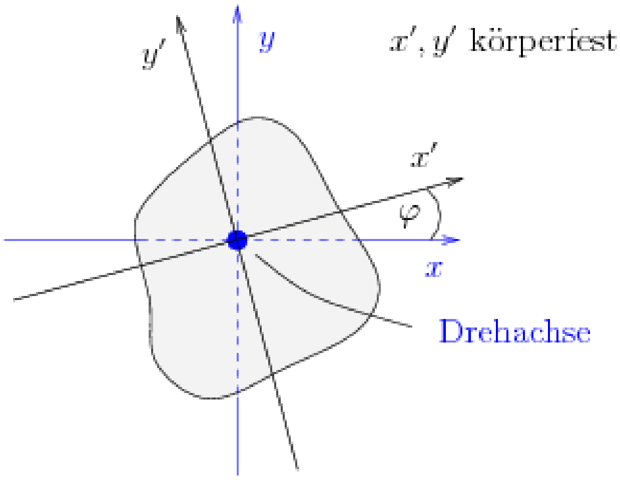
- Näherungsmodell für reale Körper.

- Starrer Körper weist 3 Rotations- und 3 Translationsfreiheitsgrade auf.

- Behandlung mit Lagrange I-Formalismus ist unzweckmäßig (N sehr groß, viele Nebenbedingungen).

- Betrachten zunächst Rotation um feste z-Achse (in einem IS); dann hat der Körper einen Rotationsfreiheitsgrad (allgemeine Behandlung kommt später).

4.4.2 Energie, Drehimpuls und Trägheitsmoment



- Starrheit des Körpers bedeutet, dass man ein mitbewegtes und mitrotierendes Koordinatensystem Σ' finden kann, in dem die Koordinaten $\{x_n^{i'}\} = \{x_n', y_n', z_n'\}$ sämtlicher Massenpunkte fest, also zeitlich konstant sind.

- Für Drehung um die z-Achse ist (siehe Abb.):

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n' \cos\varphi - y_n' \sin\varphi, & \dot{x}_n &= -\dot{\varphi}\,(x_n' \sin\varphi + y_n' \cos\varphi) &= -\dot{\varphi} y_n \\
y_n &= y_n' \cos\varphi + x_n' \sin\varphi, & \dot{y}_n &= \dot{\varphi}\,(-y_n' \sin\varphi + x_n' \cos\varphi) &= \dot{\varphi} x_n, \\
z_n &= z_n'.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Offenbar gilt: $x_n^2 + y_n^2 = \left[(x_n')^2 + (y_n')^2\right]$.

- Damit folgen für kinetische Energie und Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n\left[(x_n')^2 + (y_n')^2\right] \\
L^z &= \sum_{n=1}^{N} m_n(x_n\dot{y}_n - y_n\dot{x}_n) &= \dot{\varphi}\sum_{n=1}^{N} m_n\left[(x_n')^2 + (y_n')^2\right]
\end{aligned}$$

also:

$$T = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 \tag{4.5}$$

$$L^z = \Theta\dot{\varphi} \tag{4.6}$$

mit dem konstanten *Trägheitsmoment*:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{N} m_n \left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2 \right]$$

- Für einen ausgedehnten Körper müssen wir von der Summe zum Integral übergehen (d.h. $N \to \infty$):

  1. die Massen m_n sind durch das Produkt der (möglicherweise ortsabhängigen) Massendichte μ mit dem Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\vec{r}\,'$ zu ersetzen, $\quad m_n \to \mu(x', y', z')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$
  2. Koordinaten x'_n und y'_n sind nun kontinuierliche Größen x', y' innerhalb des vom Körper eingenommenen dreidimensionalen Gebietes K.
  3. Damit:
     $$\Theta = \int_K \mu(x', y', z')(x'^{\,2} + y'^{\,2})\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,',$$
     und die Gleichungen (4.5) und (4.6) behalten ihre Form.
  4. Beispiele für Trägheitsmomente ausgedehnter homogener Körper (M: Masse):
     - Hohlzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert (Radien R_1, R_2): $\quad \Theta = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
     - Vollzylinder (mit Radius R), der um seine Symmetrieachse rotiert: $\quad \Theta = \frac{1}{2}MR^2$
     - Vollzylinder (mit Länge ℓ und Radius R), der um eine Querachse rotiert: $\quad \Theta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}M\ell^2$
     - Massive Kugel (mit Radius R), die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert: $\Theta = \frac{2}{5}MR^2$

- Falls die äußeren Kräfte ein Potential aufweisen, kann wegen (4.4) einfach $U = U(\varphi)$ geschrieben werden.

- Der Energiesatz lautet dann:

$$\frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = E,$$