Somit:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \ddot{x}\vec{b}_x + \ddot{y}\vec{b}_y + \ddot{z}\vec{b}_z \\
&= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)(\vec{b}_x \cos\varphi + \vec{b}_y \sin\varphi) + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})(-\vec{b}_x \sin\varphi + \vec{b}_y \cos\varphi) + \ddot{z}\vec{b}_z \\
&= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\vec{b}_\varrho + \frac{1}{\varrho}(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\vec{b}_\varphi + \ddot{z}'\vec{b}_{z'} \\
&= \sum_{i'=1}^{3} a^{i'}\vec{b}_{i'}
\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$a^\varrho = \ddot{\varrho} - \varrho\,\dot{\varphi}^2, \quad a^\varphi = \ddot{\varphi} + \frac{2}{\varrho}\,\dot{\varrho}\dot{\varphi}, \quad a^{z'} = \ddot{z}'.$$

- Übergang zu einem beliebigen System, $\mathcal{S} \to \Sigma'$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i\vec{b}_i = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3} \ddot{x}^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\vec{b}_{j'} = \sum_{j'=1}^{3} a^{j'}\vec{b}_{j'} \quad \Rightarrow \quad a^{j'} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Darstellung der Komponenten im System Σ':

$$\begin{aligned}
a^{j'} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\, x^i\Big(x^{k'}(t)\Big) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k'=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\dot{x}^{k'}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \sum_{k'=1}^{3} \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}\ddot{x}^{k'} + \sum_{l'=1}^{3} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'}\partial x^{k'}}\dot{x}^{l'}\dot{x}^{k'}\right].
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \delta^{j'}_{k'}$$

folgt:

$$a^{j'} = \ddot{x}^{j'} + \sum_{k'=1}^{3}\sum_{l'=1}^{3} \Gamma^{j'}_{k'l'}\dot{x}^{k'}\dot{x}^{l'}$$

mit den sogenannten *Christoffel-Symbolen*

$$\Gamma^{j'}_{k'l'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{l'}}$$

(diese spielen eine entscheidende Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie).

- Konsequenz: In allen IS ist $\sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i$ ein Vektor im Tangentialraum (der Übergang von einem IS zu einem anderen IS ist linear; daher verschwinden die Christoffel-Symbole).

- Aber Achtung: $\sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i$ ist i.a. kein Vektor in krummlinigen Koordinaten (siehe Beispiel Zylinderkoordinaten).

- Für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \vartheta, \varphi)$,

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta$$

erhält man (Übung):

$$\begin{aligned} \vec{a} \;&=\; (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\vartheta \\ &\quad +(r\sin\vartheta\ddot{\varphi} + 2\sin\vartheta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- Mitgeführte Koordinatenbasisvektoren:
  - Haben im IS:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \vec{b}_i, \qquad \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i$$

  - Wollen im IS für eine *beliebige* Bahnkurve schreiben:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\ddot{x}^i \vec{b}_i + \dot{x}^i \dot{\vec{b}}_i \right),$$

  also im IS:

$$\dot{\vec{b}}_i = 0$$

  - *Interpretation:* Im IS werden die Koordinatenbasisvektoren entlang einer beliebigen Bahnkurve unverändert mitgeführt, d.h., die $\vec{b}_i$ als Elemente der Tangentialräume werden an verschiedenen Raumpunkten miteinander identifiziert.

– Schreiben im IS auch:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x^i \vec{b}_i, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}^i \vec{b}_i \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}^i \vec{b}_i$$

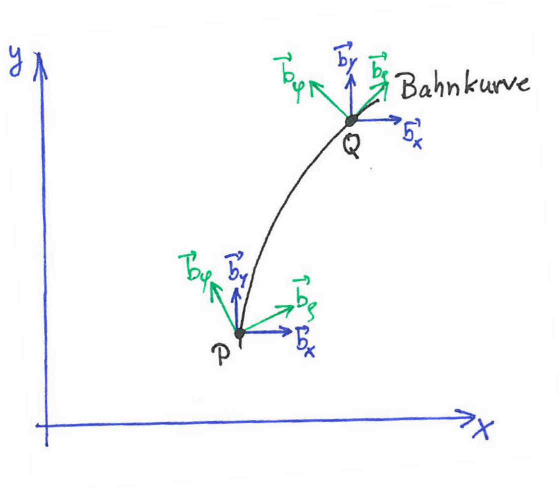
Anmerkung: $\vec{r}$ ist ein Ortsvektor in einem bestimmten Koordinatensystem und daher von dessen Ursprung abhängig (siehe Anmerkung am Ende von Kapitel 1.1.2.3).

– Im krummlinigen System Σ':

$$\vec{v} = \sum_{i'=1}^{3} \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_{i'=1}^{3} \left(\ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} + \dot{x}^{i'} \dot{\vec{b}}_{i'} \right)$$

mit:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{b}}_{i'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \vec{b}_k = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l'=1}^{3} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{l'}} \dot{x}^{l'} \vec{b}_k \\
&= \sum_{l'=1}^{3} \sum_{m'=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{l'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^{l'} \vec{b}_{m'}, \\
\dot{\vec{b}}_{i'} &= \sum_{l'=1}^{3} \sum_{m'=1}^{3} \Gamma^{m'}_{i'l'} \dot{x}^{l'} \vec{b}_{m'}
\end{aligned}$$



Veränderlichkeit der Koordinatenbasisvektoren entlang einer Bahnkurve. Für ein kartesisches IS (Koordinaten x, y) bzw. ein Polarkoordinatensystem (Koordinaten ϱ, φ) gilt:

$$\vec{b}_x(P) = \vec{b}_x(Q), \quad \vec{b}_y(P) = \vec{b}_y(Q); \qquad \vec{b}_\varrho(P) \neq \vec{b}_\varrho(Q), \quad \vec{b}_\varphi(P) \neq \vec{b}_\varphi(Q)$$

- *Interpretation:* In krummlinigen Koordinaten gibt es eine wohldefinierte Änderung der Koordinatenbasisvektoren entlang einer bestimmten Bahnkurve, d.h., die $\vec{b}_{i'}$ als Elemente der Tangentialräume werden an verschiedenen Punkten einer vorgegebenen Bahnkurve in bestimmter Weise aufeinander abgebildet.

1.2 Die Newtonschen Axiome – die Grundgesetze der Dynamik

- In der Newtonschen Mechanik gibt es ausgezeichnete kartesische Koordinatensysteme – die *Inertialsysteme* $\mathcal{S}$.

- In ihnen gelten die Newtonschen Axiome.

- Diese definieren Kräfte und Massen und beschreiben den Verlauf von Bahnkurven.

- Wir charakterisieren zunächst die Inertialsysteme und diskutieren anschließend die Axiome.

1.2.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformationen

- Es gibt eine 10-parametrige Schar von ausgezeichneten kartesischen IS $\mathcal{S}$ (Eigenschaften: siehe Kapitel 1.1).

- Diese werden durch Galilei-Transformationen (GT) ineinander überführt:

  GT sind Koordinatentransformationen (von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$) innerhalb der Newtonschen Raumzeit $M = E_3 \times \mathbb{R}$:

  $(x, y, z, t) \to (x', y', z', t')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{1'} \\ V^{2'} \\ V^{3'} \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix}, \quad t' = t + t_A$$

  - $\hat{O}$: konstante orthogonale 3×3-Matrix (3 Freiheitsgrade)

- $\vec{V} = \sum_{i'=1}^{3} V^{i'} \vec{b}_{i'}$: konstanter Vektor (3 Freiheitsgrade), beschreibt eine konstante Relativbewegung der Systeme $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$.
- Verbleibende Freiheitsgrade: vier konstante Verschiebungsparameter x'_A, y'_A, z'_A und t'_A.

- Anmerkungen:
  - GT sind Transformationen innerhalb der gesamten 4-dimensionalen Newtonschen Raum-Zeit (Zeit t ist involviert).
  - Sie sind von rein räumlichen Koordinatentransformationen $x^i = x^i(x^{k'})$ zu unterscheiden (Ausnahme: $\vec{V} = 0$, siehe Kapitel 1.1.2.5).
  - Bei raumzeitlichen Koordinatentransformationen

$$(x^{i'}, t') = (x^{i'}(x^j, t), t + t_A), \tag{1.1}$$

    bei denen die Zeit t (bis auf konstante Verschiebung t_A) nicht transformiert wird, gilt weiterhin das *räumliche* Transformationsgesetz für Basisvektoren:

$$\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$$

    Nur solche Koordinatentransformationen (1.1) werden in der Newtonschen Theorie betrachtet.
  - Die GT sind offenbar linear, es verschwinden also alle Christoffelsymbole

$$\Gamma^{m'}_{k'j'} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} = 0$$

  - Sei $\ddot{x}^i = 0$, also $\vec{a} = 0$. Dann folgt $\ddot{x}^{i'} = 0$, und wegen $\Gamma^{m'}_{k'j'} = 0$ ist $(\vec{a})^{i'} = \ddot{x}^{i'} = 0$. Damit ist eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in $\mathcal{S}$ auch in $\mathcal{S}'$ geradlinig-gleichförmig.
  - Damit das zweite Newtonsche Axiom forminvariant bleibt, muss gelten: $\mathrm{d}t / \mathrm{d}t' = 1$ (siehe Kapitel 1.2.3).

1.2.2 Das erste Axiom

- Die Newtonsche Mechanik kennt den Zustand eines *kräftefreien* Teilchens („Massenpunkt", siehe Kapitel 1.2.3), das sich ohne jeglichen äußeren Einfluss bewegt.

- Das erste Newtonsche Axiom besagt nun:

  Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich in Inertialsystemen $\mathcal{S}$ auf einer Bahnkurve mit konstanter Geschwindigkeit,

  $$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{constant},$$

  also verschwindender Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 0$. Demgemäß erfolgt die Bewegung in $\mathcal{S}$ auf einer Geraden,

  $$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0.$$

- Anmerkung: In krummlinigen Koordinaten folgt:

  $$a^{m'} = 0 : \quad \ddot{x}^{m'} + \sum_{k'=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3} \Gamma^{m'}_{k'j'}\dot{x}^{k'}\dot{x}^{j'} = 0,$$

  beispielsweise in Zylinderkoordinaten:

  $$\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2 = 0, \quad \varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{z}' = 0.$$

  In krummlinigen Koordinaten bewegt sich daher ein kräftefreier Massenpunkt i.a. *nicht* auf einer *Koordinatengeraden* $x^{i'} = v^{i'}t + x^{i'}_A$.

1.2.3 Das zweite Axiom

- Das zweite Newtonsche Axiom besagt:
  In Inertialsystemen $\mathcal{S}$ ist die Änderung der Bewegungsgröße der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \vec{F} \tag{1.2}$$

  Neu zu klärende Größen: *träge* Masse m, *Kraft* $\vec{F}$, *Impuls:* $\vec{p} = m\vec{v}$.

- Masse:

  1. ist eine i.a. unveränderliche Eigenschaft elementar angenommener punktförmiger Teilchen, die sich entlang von Bahnkurven bewegen (*Massenpunkte*)
  2. Bestimmung erfolgt über das Gesetz (1.2)
  3. Annahme des Vorhandenseins von *Standardkräften* $\vec{F}_{\mathrm{st}}$ (z.B. spezielle Federn), unabhängig vom betrachteten Massenpunkt.
  4. Ausmessen der durch diese Kräfte bewirkten Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$
  5. Bestimmung von m gemäß

  $$m = \frac{|\vec{F}_{\mathrm{st}}|}{|\ddot{\vec{r}}|}$$

  6. Masse stellt damit den Widerstand *(Trägheit)* des Massenpunktes gegen eine Änderung seines Bewegungszustandes dar.

- Kraft:

  1. Wie Geschwindigkeit und Beschleunigung ein Vektor im Tangentialraum.
  2. Superposition mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte zu einer Gesamtkraft.
  3. Wichtig: Kräfte sind immer Raumpunkten zugeordnet („greifen an ihnen an").
  4. Nicht-Standardkräfte können mittels (1.2) durch ihre Beschleunigungswirkung auf bekannte Massenpunkte gemessen werden:

  $$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

  5. I.a. kann $\vec{F}$ vom Ort und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ sowie explizit von der Zeit abhängen:

  $$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

  Annahme: *keine* Abhängigkeit von höheren Ableitungen $\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}, \ldots$
  Ausnahme: Bewegung eines strahlenden Elektrons (entspricht einer Selbstwechselwirkung)

- Bewegungsgröße Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

  Fundamentale Größe in der Physik.

1.2.4 Das dritte Axiom

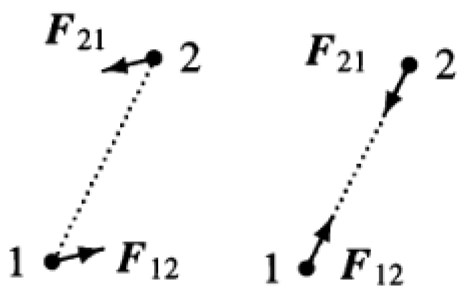
- Das dritte Newtonsche Axiom besagt:
  Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt,

$$\vec{F}_{\text{actio}} = -\vec{F}_{\text{reactio}}$$

  Kurzform: *actio = reactio*

- Wichtig: Kraft und Gegenkraft greifen an verschiedenen Raumpunkten an.

- Beispiel: Betrachte Massenpunkt an einem Faden, gehalten von einer Hand. Kraft wirkt von der Hand auf Massenpunkt (greift am Massenpunkt an), Gegenkraft wirkt vom Massenpunkt auf die Hand (greift an der Hand an).



1.3 Einfache eindimensionale Bewegungen

1.3.1 Vorbemerkungen

- In diesem Kapitel: $y = 0 = z$ im verwendeten IS. Dann folgt für (1.2) nur eine x-Komponente:

$$m\ddot{x} = F\left(x(t), \dot{x}(t), t\right)$$

- Bei bekannter Bahnkurve $x(t)$ (z.B. Vermessung): Bestimmung der Kraft möglich
- Eigentliche Aufgabe der Mechanik: Bestimmung der Bahnkurve $x(t)$, wenn F bekannt ist.
- Mathematisch: Lösen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung
- Freiheiten der Lösung: Anfangslage und -geschwindigkeit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$
- Alternativ: Anfangs- und Endlage des Massenpunktes, $x(0)$ und $x(T)$, wobei die Kurve hier im Intervall $t \in [0, T]$ betrachtet wird.

1.3.2 Freier Fall (Wurf) im homogenen Schwerefeld

- Annahme: annähernd vom Ort unabhängige Schwerkraft F auf einen Massenpunkt (mit Masse m) über der Erdoberfläche, nach unten gerichtet und der Masse proportional.
- Wählen x-Achse nach oben:

$$m\ddot{x} = F = -mg$$

  $g = 9,81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$: Schwerebeschleunigung der Erde

- Achtung:
  1. m auf der linken Seite ist Maß für Trägheit des Teilchens, Widerstand gegen eine *beliebige* Kraft, „träge Masse"
  2. m auf der rechten Seite ist Maß für „Fähigkeit" des Teilchens, der Gravitationskraft zu folgen (vgl. elektrische Ladung als „Fähigkeit" eines geladenen Teilchens, der Lorentzkraft zu folgen), „schwere Masse"
  3. Erfahrung zeigt, dass beide Massen identifiziert werden können.
- Somit folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\ddot{x} = -g \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

1.3.3 Freier Fall mit Reibung

- Annahme einer Reibungskraft bei Bewegung durch Gas oder Flüssigkeit:
$$F_{\text{Reibung}} = -r\dot{x} \quad r > 0, \text{ konstant}$$
- Dann folgt:
$$m\ddot{x} + r\dot{x} + mg = 0$$
- Lösung:

1. Setze $v = \dot{x}$ und erhalte
$$\dot{v} + \kappa v + g = 0, \qquad \text{mit} \quad \kappa = \frac{r}{m}$$
2. Ansatz für lineare Gleichungen der Form $\dot{v} + a(t)v + b(t) = 0$:
$$v(t) = c(t) \exp\left(-\int a(t)\,\mathrm{d}t\right) = c(t)\mathrm{e}^{-\kappa t}$$
3. Erhalte für $c(t)$:
$$\dot{c}\mathrm{e}^{-\kappa t} - \kappa c\mathrm{e}^{-\kappa t} + \kappa c\mathrm{e}^{-\kappa t} + g = 0,$$
also:
$$\dot{c} = -g\mathrm{e}^{\kappa t}$$
mit dem Integral:
$$c(t) = -\frac{g}{\kappa}\mathrm{e}^{\kappa t} + c_1, \qquad c_1 : \text{Integrationskonstante}$$
4. Somit:
$$x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(-\frac{g}{\kappa} + c_1\mathrm{e}^{-\kappa t}\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{g}{\kappa}t - \frac{c_1}{\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa t} + c_2$$
5. Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ liefert:
$$x(t) = -\frac{g}{\kappa}t + \frac{1}{\kappa^2}(\kappa v_0 + g)\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}\right) + x_0$$

1.3.4 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

- Annahme von drei Krafttermen:

  1. Rückstellkraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage (Federkraft):

  $$F_{\text{Feder}} = -kx, \qquad k = m\omega_0^2 \quad \text{positive Federkonstante}$$

  2. Reibungskraft:

  $$F_{\text{Reibung}} = -r\dot{x} \quad r = 2mq > 0, \text{ konstant}$$

  3. Zusätzliche äußere Antriebskraft, hier periodischer Ansatz:

  $$F_{\text{Antrieb}} = mQ \sin \omega t$$

- Wichtiger Spezialfall: harmonischer Oszillator, $F_{\text{Reibung}} = 0 = F_{\text{Antrieb}}$
- Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2q\dot{x} + \omega_0^2 x = Q \sin \omega t$$

- Lösungsschritte:

  1. Allgemeine Lösung (enthält zwei Freiheitsgrade) der homogenen Gleichung (mit $Q = 0$) durch e-Ansatz:

  $$x_{\text{hom}} = c\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2q\lambda + \omega_0^2 = 0$$

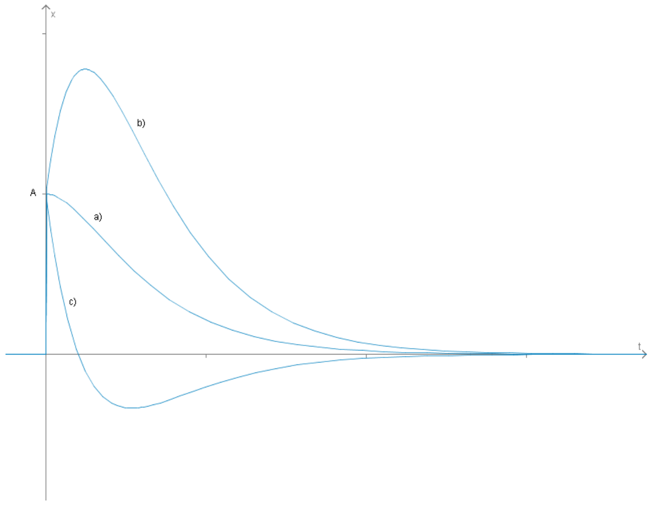
  also:

  $$x_{\text{hom}} = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1/2} = -q \pm \sqrt{q^2 - \omega_0^2}$$

  Fälle:

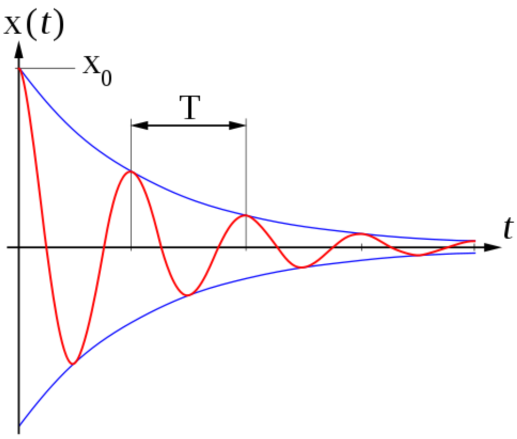
  (a) Starke Dämpfung: $q > \omega_0$, beide $\lambda_{1/2}$ sind reell und negativ, $\lambda_{1/2} = -q \pm \sqrt{q^2 - \omega_0^2} = -q \pm \mu$.

  $$x_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{-qt} \left(\frac{qx_0 + v_0}{\mu} \sinh \mu t + x_0 \cosh \mu t \right)$$



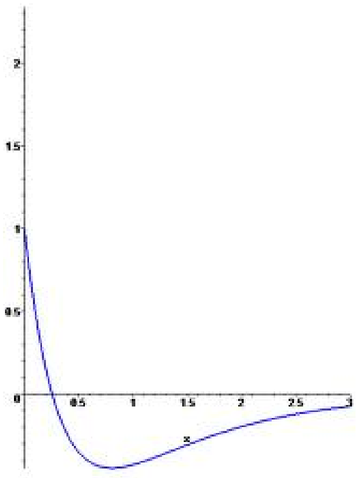
(b) Schwache Dämpfung: $q < \omega_0$, beide $\lambda_{1/2}$ sind komplex: $\lambda_{1/2} = -q \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - q^2} = -r \pm \mathrm{i}\,\mu$:

$$x_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{-qt}\left(\frac{qx_0 + v_0}{\mu}\sin\mu t + x_0\cos\mu t\right)$$



(c) Aperiodischer Grenzfall $\mu \to 0$:

$$x_{\text{hom}} = \mathrm{e}^{-qt}\left[(qx_0 + v_0)t + x_0\right]$$



2. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz:

$$x_{\text{spez}} = B\sin(\omega t+\varphi), \quad \dot{x}_{\text{spez}} = B\omega\cos(\omega t+\varphi), \quad \ddot{x}_{\text{spez}} = -\omega^2 x_{\text{spez}}$$

   (a) Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} Q\sin\omega t = \sin\omega t &\left[(\omega_0^2-\omega^2)B\cos\varphi - 2qB\omega\sin\varphi\right] \\ &+ \cos\omega t\left[(\omega_0^2-\omega^2)B\sin\varphi + 2qB\omega\cos\varphi\right] \end{aligned}$$

   (b) Koeffizientenvergleich für Terme $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ liefert:

$$\tan\varphi = \frac{2q\omega}{\omega^2-\omega_0^2}, \qquad B = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4q^2\omega^2}}$$

3. Gesamte Lösung:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{spez}}(t)$$

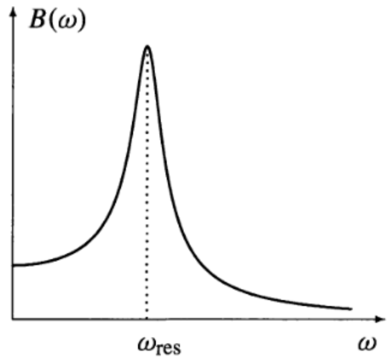
- Da die homogene Lösung exponentiell abklingt (Faktor e^{-qt}), spielt für große Zeiten (nach dem ,,Einschwingvorgang") x_{spez} die dominierende Rolle: Schwingung des Massenpunktes mit der Frequenz der äußeren Kraft.

- Für vorgegebene Werte Q, ω_0 und q wird die Amplitude $B = B(\omega)$ maximal für die *Resonanzfrequenz*:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2-2q^2}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=\omega_{\text{res}}} = 0, \quad B(\omega_{\text{res}}) = \frac{Q}{2q\sqrt{\omega_0^2-q^2}}$$

- Diskussion:

  1. Für starke Reibung $q > \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$ gibt es kein Maximum der Funktion $B(\omega)$, also keine Resonanz. $B = B(\omega)$ ist monoton fallend.
  2. Für Resonanz ist somit $\omega_0^2 - q^2 > q^2 > 0$; der Radikand in $B(\omega_{\mathrm{res}})$ ist dann positiv.
  3. $B(\omega_{\mathrm{res}})$ wird aber beliebig groß im Grenzfall $q \to 0$: *Resonanzkatastrophe*



1.3.5 Beliebige ortsabhängige Kraft

- Betrachten

$$m\ddot{x} = F(x), \qquad (m = \text{const.})$$

Multiplikation mit $\dot{x}$ liefert:

$$m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}$$

$$\text{Linke Seite:} \qquad m\ddot{x}\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2\right)$$

$$\text{Rechte Seite:} \qquad F(x)\dot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\dot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \quad \text{mit} \quad U(x) = -\int F(x)\,\mathrm{d}x$$

- Funktion U nur bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt (oft durch Forderung $U(\tilde{x}) = 0$ festgelegt, z.B. $U(0) = 0$ [harmonischer Oszillator] oder $U(\infty) = 0$ [Gravitationspotential])

- Somit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)\right) = 0, \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const.} = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$$