# Kapitel 4

# Massenpunktsysteme mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit

## 4.1 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen I. Art

- Für Massenpunktsysteme (mit $N$ Massenpunkten der Massen $m_n$) hängen Zwangsbedingungen $g_\alpha$ potentiell von allen Koordinaten $x_n^i$, $i = 1, \ldots, 3; n = 1, \ldots, N$, ab,

$$g_\alpha = g_\alpha(x_n^i; t) = g_\alpha(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3; t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (4.1)$$

  Hierbei sind wieder die $x_n^i$ Koordinaten in einem Inertialsystem $\mathcal{S}$.

- Jeder Zwangsbedingung $g_\alpha$ kann ein Satz von Zwangskräften $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ zugeordnet werden, wobei die Zwangskraft $\vec{Z}_{\alpha,n}$ auf den $n$-ten Massenpunkt wirkt.

- Die Kräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$ ,,sorgen" dafür, dass die Bedingung $g_\alpha = 0$ eingehalten wird.

- D'Alembertsches Prinzip:

  *Die Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ leisten bei einer beliebigen virtuellen Verrückung $\{\delta\vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ des Massenpunktsystems, die mit der Zwangsbe-*

*dingung $g_\alpha = 0$ verträglich ist, keine Arbeit:*

$$\sum_{n=1}^{N} \vec{Z}_{\alpha,n} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha,n} = 0.$$

- Analyse:

  1. In einem $3N$-dimensionalen *Konfigurationsraum*, der durch die $3N$ Koordinaten $x_n^i$ aufgespannt wird, wird die Gesamtheit aller Ortskoordinaten der Massenpunkte durch einen Punkt beschrieben.
  2. Durch (4.1) wird zum festen Zeitpunkt $t$ in diesem Konfigurationsraum eine $(3N-1)$-dimensionale Hyperfläche $\mathcal{H}$ beschrieben.
  3. Jede virtuelle Verrückung $\{\delta\vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ liegt *tangential* in $\mathcal{H}$. Sie besteht aus infinitesimalen Verschiebungen *aller* Massenpunkte des Systems.
  4. Das d'Alembertsche Prinzip ist äquivalent zur Aussage, dass der Vektor aller Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ im Konfigurationsraum senkrecht steht auf $\mathcal{H}$.
  5. Damit ist dieser Vektor parallel zum Gradienten von $g_\alpha$ an $\mathcal{H}$, d.h. :

$$Z_{\alpha,n}^i = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \qquad \text{oder} \qquad \vec{Z}_{\alpha,n} = \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha$$

     mit einem von $n$ und $i$ unabhängigen *Lagrangeschen Multiplikator* $\lambda_\alpha$.

- Lagrange-Gleichungen I. Art:

  1. Falls wieder $N_Z$ Zwangsbedingungen beachtet werden müssen (also $\alpha = 1, \ldots, N_Z \leq 3N$), sind die Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$ vektoriell zu addieren.
  2. Somit folgen die Lagrange-Gleichungen I. Art:

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_{\alpha,n} = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha \tag{4.2}$$

oder in Komponenten:

$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

3. Diese sind gemeinsam zu lösen mit den $N_Z$ Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_n^i; t) = 0. \tag{4.3}$$

4. (4.2) und (4.3) ergeben $(3N+N_Z)$ Gleichungen für die $(3N+N_Z)$ Unbekannten $(x_n^i, \lambda_\alpha)$.

## 4.2 Schwerpunkt-, Drehimpuls- und Energiesatz

- Aufteilung der Kräfte:
  1. innere eingeprägte Kräfte $\vec{F}_{nm}(m \neq n)$, $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm}$
  2. äußere eingeprägte Kräfte $\vec{F}_n^{(\mathrm{a})}$
  3. innere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,nm}(m \neq n)$, $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$
  4. äußere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}^{(\mathrm{a})}$

- Innere Zwangskräfte rühren von *inneren* Zwangsbedingungen $g_\alpha$ her, die nur Funktionen von $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$ sind, für die also gilt:

  $$\vec{Z}_{\alpha,nm} = \lambda_\alpha \mathrm{grad}_n g_\alpha = -\lambda_\alpha \mathrm{grad}_m g_\alpha = -\vec{Z}_{\alpha,mn}$$

  Oft ist

  $$g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}_n g_\alpha = \frac{\partial g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)}{\partial |\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = -\mathrm{grad}_m g_\alpha$$

  Dann liegen die Zwangskräfte in Richtung des Verbindungsvektors $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

- Äußere Zwangskräfte werden auf das System durch die Umgebung ausgeübt. Sie „sorgen" dafür, dass das System *äußeren* Zwangsbedingungen folgt.

- *Schwerpunktsatz:*

  Wegen $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$ gilt:

$$M\ddot{\vec{s}} = \vec{F} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\alpha} \vec{Z}^{(\mathrm{a})}_{\alpha,n}$$

  Hier ist nur über solche $\alpha$ zu summieren, für die $g_\alpha = 0$ einer *äußeren* Zwangsbedingung entspricht.

- *Drehimpulssatz:*

  Für innere Zwangsbedingungen der Form $g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} \left[ \vec{r}_n \times \left( \vec{F}^{(\mathrm{a})}_n + \sum_{\alpha} \vec{Z}^{(\mathrm{a})}_{\alpha,n} \right) \right]$$

- *Energiesatz*

  Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_n$ und Summation über alle $n$ liefert in der bekannten Weise:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_n (\dot{x}^i_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F^i_n \dot{x}^i_n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i_n} \dot{x}^i_n$$

  Falls die eingeprägten Kräfte ein Potential aufweisen, folgt:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} F^i_n \dot{x}^i_n = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(x^i_n)$$

  Ferner ist:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_\alpha(x^i_n; t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i_n} \dot{x}^i_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t},$$

  und somit folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = -\sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

  *Wenn die eingeprägten Kräfte ein Potential haben, ist die zeitliche Änderung der Energie gleich der Leistung der Zwangskräfte.*

- Für skleronome (zeitunabhängige) Zwangsbedingungen verschwindet diese Leistung. Dann gilt Energieerhaltung, $T + U = E$.

- Bei zeitabhängigen Bindungen kann Energie übertragen werden. Dann ist zwar die *virtuelle* Arbeit gemäß des d'Alembertschen Prinzips Null, nicht aber die *reale* Arbeit bei der Bewegung.

## 4.3 Um eine Achse frei drehbarer starrer Körper

### 4.3.1 Modell des starren Körpers

- sehr große (im Grenzfall unendliche) Anzahl von Massenpunkten

- starr miteinander verbunden: konstante gegenseitige Abstände (zeitunabhängige innere Zwangsbedingungen)

- Innere Zwangskräfte wirken entlang der Verbindungsvektoren der Massenpunkte.

- Näherungsmodell für reale Körper.

- Insgesamt 6 Freiheitsgrade: 3 Rotations- und 3 Translationsfreiheitsgrade.

- Behandlung mit Lagrange I-Formalismus ist unzweckmäßig ($N$ sehr groß, viele Nebenbedingungen).

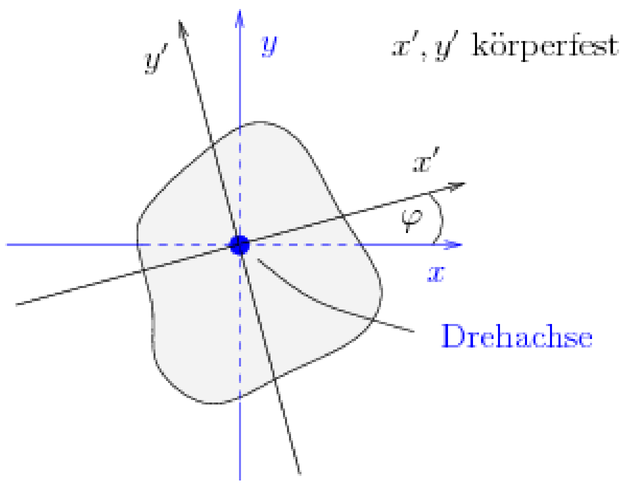
- Betrachten hier zunächst Rotation um feste $z$-Achse (in einem IS); dann gibt es nur einen Rotationsfreiheitsgrad (allgemeine Behandlung kommt später).

### 4.3.2 Energie, Drehimpuls und Trägheitsmoment

- Starrheit des Körpers bedeutet, dass man ein mitbewegtes und mitrotierendes Koordinatensystem $\Sigma'$ finden kann, in dem die Koordinaten $\{x_n^{i'}\} = \{x'_n, y'_n, z'_n\}$ sämtlicher Massenpunkte fest, also zeitlich konstant sind.

- Für Drehung um die $z$-Achse ist (siehe Abb.):

$$\begin{aligned} x_n &= x'_n\cos\varphi - y'_n\sin\varphi, & \dot{x}_n &= -\dot{\varphi}\,(x'_n\sin\varphi + y'_n\cos\varphi) &=& -\dot{\varphi}y_n \\ y_n &= y'_n\cos\varphi + x'_n\sin\varphi, & \dot{y}_n &= \dot{\varphi}\,(-y'_n\sin\varphi + x'_n\cos\varphi) &=& \dot{\varphi}x_n, \\ z_n &= z'_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$




Offenbar gilt: $x_n^2 + y_n^2 = (x'_n)^2 + (y'_n)^2$.

- Damit folgen für kinetische Energie und Drehimpuls:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) &=& \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\sum_{n=1}^{N} m_n\left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2\right] \\ L^z &= \sum_{n=1}^{N} m_n(x_n\dot{y}_n - y_n\dot{x}_n) &=& \dot{\varphi}\sum_{n=1}^{N} m_n\left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2\right] \end{aligned}$$

also:

$$T = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 \tag{4.5}$$

$$L^z = \Theta\dot{\varphi} \tag{4.6}$$

mit dem konstanten *Trägheitsmoment*:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{N} m_n\left[(x'_n)^2 + (y'_n)^2\right]$$

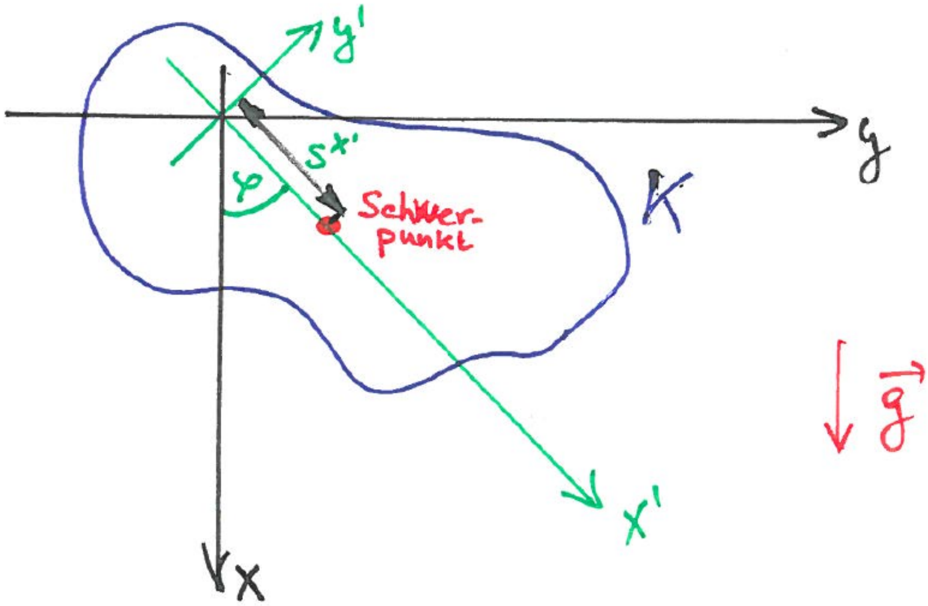
- Für einen ausgedehnten Körper müssen wir von der Summe zum Integral übergehen (d.h. $N \to \infty$):

  1. die Massen $m_n$ sind durch das Produkt der (möglicherweise ortsabhängigen) Massendichte $\mu$ mit dem Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^3\vec{r}\,'$ zu ersetzen, $\quad m_n \to \mu(x', y', z')\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$
  2. Koordinaten $x'_n$ und $y'_n$ sind nun kontinuierliche Größen $x', y'$ innerhalb des vom Körper eingenommenen dreidimensionalen Gebietes $K$.
  3. Damit:
  $$\Theta = \int_K \mu(x', y', z')(x'^{\,2} + y'^{\,2})\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,',$$
  und die Gleichungen (4.5) und (4.6) behalten ihre Form.
  4. Beispiele für Trägheitsmomente ausgedehnter homogener Körper ($M$: Masse):
     - Hohlzylinder, der um seine Symmetrieachse rotiert (Radien $R_1, R_2$): $\quad \Theta = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
     - Vollzylinder (mit Radius $R$), der um seine Symmetrieachse rotiert: $\quad \Theta = \frac{1}{2}MR^2$
     - Vollzylinder (mit Länge $\ell$ und Radius $R$), der um eine Querachse rotiert: $\quad \Theta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}M\ell^2$
     - Massive Kugel (mit Radius $R$), die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert: $\Theta = \frac{2}{5}MR^2$

- Falls die äußeren Kräfte ein Potential aufweisen, kann wegen (4.4) einfach $U = U(\varphi)$ geschrieben werden.

- Der Energiesatz lautet dann:
$$\frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = E,$$
und das Bewegungsproblem kann wie ein eindimensionales Problem durch Quadratur gelöst werden:
$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\tilde{\varphi}}{\sqrt{\frac{2}{\Theta}\left[E - U(\tilde{\varphi})\right]}}$$

- Beispiel *physisches Pendel* (siehe Abb.):




1. Legen die $x'$-Achse durch Schwerpunkt; dann ist:

$$s^{y'} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^{N} m_n y'_n = 0 \quad \text{bzw.} \quad s^{y'} = \frac{1}{M} \int_K \mu y' \, \mathrm{d}^3\vec{r} = 0.$$

2. Potentielle Energie im homogenen Erdschwerefeld:

$$U(\varphi) = -\sum_{n=1}^{N} m_n g x_n = -g \sum_{n=1}^{N} m_n (x'_n \cos\varphi - y'_n \sin\varphi) = -Mgs^{x'} \cos\varphi$$

(für einen ausgedehnten Körper folgt der gleiche Ausdruck).

3. Es folgt:

$$\frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 - gMs^{x'} \cos\varphi = E$$

Das physische Pendel schwingt wie ein mathematischen Pendel der Fadenlänge

$$\ell = \frac{\Theta}{Ms^{x'}}.$$

# Kapitel 5

# Lagrange-Gleichungen II. Art

## 5.1 Aufgabenstellung

- Betrachten ein System mit sehr vielen Massenpunkten.

- Behandlung mittels Lagrange-I-Gleichungen sehr kompliziert: viele Gleichungen für relativ wenige Freiheitsgrade

- Idealisiert: starrer Körper: $N \to \infty$, aber nur 6 Freiheitsgrade (3 Schwerpunkts- und drei Rotationsfreiheitsgrade)

- Erhaltungssätze liefern gesamte Lösung nur in Spezialfällen (z.B. Energiesatz für einen verbleibenden Freiheitsgrad)

- Daher Aufgabenstellung:

  Man finde Bewegungsgleichungen, die nach Art und Anzahl genau den Freiheitsgraden des Systems entsprechen und in denen Zwangskräfte und Nebenbedingungen nicht mehr vorkommen.

- Diese Überlegungen führen zu den *Lagrange-Gleichungen II. Art.*

## 5.2 Generalisierte Koordinaten

- Betrachten Massenpunktsystem bestehend aus $N$ Massenpunkten, das $N_Z$ (holonomen) Zwangsbedingungen unterliegt:

  $$g_\alpha(x_n^i;t) = 0, \qquad \alpha = 1,\dots,N_Z, \quad i = 1,\dots,3, \quad n = 1,\dots,N.$$

  Hierbei sind die $x_n^i$ die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte in einem IS $\mathcal{S}$.

- Einführung von $N_F = 3N - N_Z$ *generalisierten* Koordinaten $q_A$, $(A = 1,\dots,N_F)$ derart, dass die Zwangsbedingungen für beliebige Wahl der $q_A$ (innerhalb deren Definitionsbereich) immer erfüllt sind:

  1. die kartesischen Koordinaten $x_n^i$ des IS $\mathcal{S}$ schreiben sich als *bekannte* Funktionen der $q_A$:

     $$x_n^i = x_n^i(q_A;t), \qquad A = 1,\dots,N_F, \quad N_F = 3N - N_Z$$

     für alle $i = 1,\dots,3, \quad n = 1,\dots,N$.
  2. Setzen wir diese Funktionen in die Zwangsbedingungen ein, so verschwinden diese identisch:

     $$g_\alpha\Big(x_n^i(q_A;t);t\Big) \equiv 0$$

- Beispiel:
  Räumliches Pendel für einen Massenpunkt,

  $$g_1(x,y,z;t) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \qquad (\ell \text{ fest vorgegeben})$$

  Generalisierte Koordinaten $\vartheta, \varphi$ (Kugelkoordinaten auf der Kugelschale):

  $$x = \ell \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = \ell \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = \ell \cos\vartheta.$$

  Damit ist die Zwangsbedingung $g_1 = 0$ für eine beliebige Wahl der Winkel $\vartheta, \varphi$ identisch erfüllt.

- Damit erübrigt sich die Betrachtung der Zwangsbedingungen nach Einführung angepasster generalisierter Koordinaten; sie sind dann automatisch erfüllt.

## 5.3 Ableitung der Lagrange-Gleichungen II. Art

- Wegen

  $$0 \equiv \tilde{g}_\alpha(q_A;t) = g_\alpha\Big(x_n^i(q_A;t);t\Big)$$

  folgt auch für alle $A = 1, \dots N_F$:

  $$0 \equiv \frac{\partial \tilde{g}_\alpha}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}\frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \tag{5.1}$$

- Multiplizieren nun die Lagrange-Gleichungen I. Art,

  $$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

  mit $\dfrac{\partial x_n^i}{\partial q_A}$ und summieren über $i$ und $n$:

  $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \left( \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}\frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \right)$$

- Wegen (5.1) verschwindet der Klammerterm, und es folgt für alle $A = 1, \dots, N_F$:

  $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} \left( m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} - F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \right) = 0 \tag{5.2}$$

- Nun ist die kinetische Energie gegeben durch:

  $$T = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{2} \left(\dot{x}_n^i\right)^2$$

  Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A;t)$ ist

  $$\dot{x}_n^i = \dot{x}_n^i(q_A, \dot{q}_A;t) = \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_B}\dot{q}_B + \frac{\partial x_n^i}{\partial t},$$

und damit:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial q_A} &= \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial t} \\
\frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial \dot{q}_A} &= \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Beziehungen folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial q_A} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{x}_n^i \left( \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial t} \right) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial \dot{q}_A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} \left[ m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + m_n \dot{x}_n^i \left( \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_B \partial q_A} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial t \partial q_A} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + \frac{\partial T}{\partial q_A}
\end{aligned}
$$

- Damit ist der erste Term in (5.2) gleich:

$$
\sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A}
$$

- Definieren wir die *generalisierten* Kräfte

$$
Q_A := \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A},
$$

so ergibt sich als Vorstufe zu den Lagrange-Gleichungen II. Art:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A} = Q_A \tag{5.3}
$$

1. Die sind Bewegungsgleichungen, in denen Zwangskräfte und Zwangsbedingungen nicht mehr explizit vorkommen.

2. Gültig für Probleme mit *und* ohne Zwangsbedingungen.
3. Liefern für $N_Z = 0$ (und Wahl der kartesischen Koordinaten $x_n^i$ als generalisierte Koordinaten $q_A$) genau die Newtonschen Gleichungen
$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i$$

- Übergang zu den eigentlichen Lagrange-Gleichungen II. Art:

1. Kräfte $F_n^i$ weisen ein Potential $U = U(x_n^i)$ auf:
$$F_n^i = -\frac{\partial U}{\partial x_n^i}.$$

2. Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A; t)$ ist:
$$U(q_A; t) = U\Big(x_n^i(q_A; t)\Big),$$
mit:
$$\frac{\partial U}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}$$

3. Somit folgt:
$$Q_A = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = -\sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = -\frac{\partial U}{\partial q_A}$$

4. Ferner hängt das Potential nicht von den *generalisierten Geschwindigkeiten* ab,
$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} = 0,$$
und damit folgt aus (5.3):
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial U}{\partial q_A},$$
oder die *Lagrange-Gleichungen II. Art*:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0 \tag{5.4}$$
mit der *Lagrange-Funktion* $L$ des Systems, die sich schreibt

(a) als Differenz von kinetischer und potentieller Energie und

(b) als Funktion der generalisierten Koordinaten $q_A$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_A$ sowie der Zeit $t$:

$$L(q_A, \dot{q}_A; t) = T(q_A, \dot{q}_A; t) - U(q_A; t)$$

- *Anmerkungen*:

1. Die Lagrange-Gleichungen II. Art sind ein System von $N_F$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der $N_F$ Funktionen $q_A(t)$.
2. Zwangsbedingungen und -kräfte sind eliminiert.
3. Gleichungen sind anwendbar auf Systeme mit *holonomen* Zwangsbedingungen (in denen keine explizite Geschwindigkeitsabhängigkeit vorliegt) und eingeprägten Kräften, die ein Potential aufweisen.
4. Gleichungen geben die einfachste und übersichtlichste Formulierung der Bewegungsgleichungen; sie sollten bevorzugt für Probleme der Punktmechanik benutzt werden.

## 5.4 Energiesatz im Lagrange-II-Formalismus

Berechnung der zeitlichen Änderung der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial q_A}\dot{q}_A + \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\ddot{q}_A + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} + \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\ddot{q}_A + \frac{\partial L}{\partial t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A\right) + \frac{\partial L}{\partial t},
\end{aligned}$$

also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{5.5}$$

Gleichung (5.5) ist die Energiebilanzgleichung in der Sprache der Lagrange-Funktion:

1. Für skleronome Zwangsbedingungen hängen die $x_n^i$ nicht explizit von der Zeit ab (nur von den generalisierten Koordinaten $q_A$), $x_n^i = x_n^i(q_A)$.

2. Dann sind auch $T$ und $U$ und mithin $L$ nicht explizit zeitabhängig,
$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{5.6}$$

3. Es folgt
$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A - L = \text{const.} \tag{5.7}$$
(Erinnerung: nur zeitabhängige Bindungen können Energie des Systems ändern.)

4. Größe auf der linken Seite von (5.7) ist tatsächlich Gesamtenergie:

   - Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A)$ (nicht explizit zeitabhängig), folgt:
$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{2}\left(\dot{x}_n^i\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{2}\left(\sum_{A=1}^{N_F}\frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}\dot{q}_A\right)^2 \\ &= \sum_{A,B=1}^{N_F}\dot{q}_A\dot{q}_B\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{2}\frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}\frac{\partial x_n^i}{\partial q_B}\right). \end{aligned}$$

   - Die kinetische Energie $T$ ist somit eine *positiv homogene Funktion vom Grad 2 in den* $\dot{q}_A$ (siehe Kapitel (2.9), Virialsatz). Es gilt daher der *Eulersche Satz*:
$$\sum_{A=1}^{N_F}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A = 2T$$

   - Weil aber $U = U(q_A)$, also $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} = 0$, folgt:
$$\sum_{A=1}^{N_F}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A = \sum_{A=1}^{N_F}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A = 2T$$

und somit:

$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}\dot{q}_A - L = 2T - (T-U) = T + U = E$$

5. *Folgerung:* Die Energie ist eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrange-Funktion $L$ invariant gegenüber zeitlichen Translationen ist, also (5.6) gilt.

6. Andere Formulierung: Man kann bei Kenntnis des Kraftgesetzes durch Beobachtung von Bahnkurven nicht auf den Zeitnullpunkt schließen.

7. Zusammenhang zwischen Symmetrieeigenschaften und Erhaltungssätzen spielt in allen Gebieten der modernen Physik eine große Rolle (*Noether-Theorem).*

## 5.5 Zyklische Koordinaten

- Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von einer bestimmten generalisierten Koordinate $q_B$ abhängt, so gilt ein zugehöriger Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = \text{const.}$$

- Damit ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen gegeben.

- Die zugehörige Koordinate $q_B$ wird *zyklisch* genannt.

- Man wird immer versuchen, möglichst viele zyklische Koordinaten einzuführen.

- Beispiel:

  Freier Massenpunkt im Zentralkraftfeld (Potential $U, \vec{F} = -\operatorname{grad} U$), mit Kugelkoordinaten $(r, \vartheta, \varphi)$ um das Kraftzentrum als generalisierte Koordinaten:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

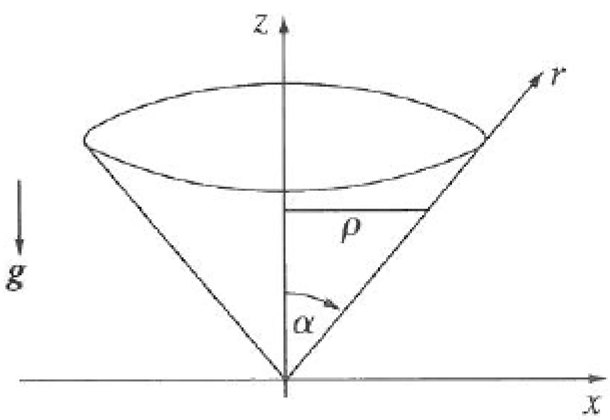
Lagrange-Funktion hängt offenbar nicht von $\varphi$ ab:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}, \quad mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = m\varrho^2 \dot{\varphi} = L^z = \text{const.}$$

mit der Zylinderkoordinate $\varrho = r \sin \vartheta$. Damit entspricht der zyklischen Koordinate $\varphi$ die Erhaltung der $z$-Komponente des Drehimpulses.

- Ein System kann mehr Symmetrien haben als es zyklische Koordinaten gibt:
  - Im obigen Beispiel sind auch $L^x$ und $L^y$ konstant; diesen entsprechen bei unserer Wahl der generalisierten Koordinaten keine zyklischen Koordinaten.
  - Der Konstanz der Drehimpulskomponenten $L^x, L^y, L^z$ entspricht die Symmetrie bezüglich dreiparametriger räumlicher Drehungen; $L^z$: Drehung um die $z$-Achse ($\varphi$-Invarianz).
  - Maximale Anzahl der zyklischen Koordinaten ist gegeben durch die Maximalzahl *vertauschbarer* Symmetrieoperationen (die Drehungen sind nicht vertauschbar; deshalb gibt es im Beispiel nur eine zyklische Koordinate).

## 5.6 Beispiel: Massenpunkt auf einem Kreiskegel im Erdschwerefeld



Lösungsschritte im Lagrange-II-Formalismus:

1. Man führe geeignete generalisierte Koordinaten ein, die die Zwangsbedingungen erfüllen und den Symmetrien des Problems angepasst sind:

   - Kegelgleichung: $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$
   - Generalisierte Koordinaten: Kugelkoordinaten $(r, \varphi)$,

   $$x = r \sin \alpha \cos \varphi, \qquad y = r \sin \alpha \sin \varphi, \qquad z = r \cos \alpha$$

   Es ist $\vartheta = \alpha = \text{const.}$; Bewegung ist durch die beiden Koordinaten $(r, \varphi)$ festgelegt.

2. Man schreibe kinetische und potentielle Energie sowie die Lagrange-Funktion $L$ als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten:

   $$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) \\ U &= mgz = mgr \cos \alpha \\ L &= T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha \end{aligned}$$

3. Man schreibe die Lagrange-Gleichungen II. Art auf, stelle die zyklischen Koordinaten fest und formuliere geltende Erhaltungssätze (einschließlich Energieerhaltung, falls geltend):

   $$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \alpha) = 0 \end{aligned}$$

   Einzige zyklische Koordinate ist $\varphi$, zugeordneter Erhaltungsgröße ist

   $$L^z = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \alpha. \tag{5.8}$$

   Wegen $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$ gilt Energieerhaltung:

   $$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) + mgr \cos \alpha \tag{5.9}$$

4. Man löse die Lagrange-Gleichungen II. Art unter Ausnutzung der Erhaltungssätze und diskutiere die Ergebnisse:

   Einsetzen von (5.8) in (5.9) liefert:

   $$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{(L^z)^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha = E.$$

   Lösung wie beim eindimensionalen Bewegungsproblem im Ersatzpotential

   $$\bar{U}(r) = \frac{(L^z)^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$$

   durch Trennung der Variablen,

   $$t = \mathrm{sign}(\dot{r}_0)\int_{r_0}^{r(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - \bar{U}(\xi)\right]}}$$

   Anschauliche Diskussion:

   - Für $L^z = 0$ rollt der Massenpunkt mit der Beschleunigung $g\cos\alpha$ in die Kegelspitze hinein.
   - Für $L^z \neq 0$ geht die Bewegung ständig zwischen zwei festen Werten $r_1$ und $r_2$ hin und her.
   - Der Massenpunkt rollt dann in auf- und absteigenden Spiralen zwischen den Kreisen der Höhe $z_{1/1} = r_{1/2}\cos\alpha$ mit gleichbleibendem Umlaufsinn auf dem Kegelmantel.
   - Massenpunkt kann Spitze nie erreichen (*keine Reibung*).