

Kapitel 1

Mechanik eines freien Massenpunktes

1.1 Kinematik

1.1.1 Einleitung

- Aufgabe der theoretischen Mechanik: Ableitung der Bewegung von *Massenpunkten*, Massenpunktsystemen und *starren* Körpern aus wenigen einfachen Grundgesetzen
- Grundgesetze: zusammengefasste Erfahrung, logisch und mathematisch nicht beweisbar (*Axiome*)
- Mechanik ist Fundament aller anderen Theorien der Physik

1.1.2 Newtonscher Raum

1.1.2.1 Euklidischer Raum

Der mathematische Ort des Geschehens ist ein dreidimensionaler *Euklidischer* Raum E_3 :

- Der Raum besteht aus überabzählbar vielen Punkten, die wir durch drei reelle Koordinaten (x^1, x^2, x^3) charakterisieren und unterscheiden können.
- Die Wahl der Koordinaten ist prinzipiell frei, z.B.:

- kartesische Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ oder
- Kugelkoordinaten $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \vartheta, \varphi)$

- Ein Wechsel zu anderen Koordinaten geschieht durch eine Abbildung (*Koordinatentransformation*)

$$x^i = x^i(x^{k'}),$$

z.B.

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

- Zwischen zwei Punkten A und B kann man einen (nicht-negativen) Abstand D definieren (*metrischer Raum*).
- Es existieren ausgezeichnete kartesische Koordinatensysteme \mathcal{S} („*Inertialsysteme*“ Abkürzung: „IS“, siehe Kapitel 1.1.2.5) mit Koordinaten $(x^i) = (x, y, z)$, in denen dieser Abstand durch

$$\begin{aligned} D(A, B) = D\left((x_A^i), (x_B^i)\right) &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_A^i - x_B^i)^2} \\ &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \end{aligned}$$

gegeben ist. Diese Koordinaten können sämtliche reellen Werte annehmen, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Wir betrachten den E_3 *nicht* als Vektorraum.

1.1.2.2 Kurven und Vektoren

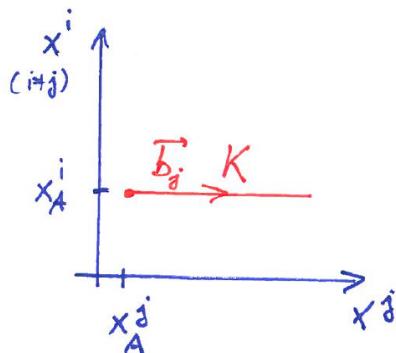
- Kurven sind stetig-differenzierbare Abbildungen $\phi : I \rightarrow E_3$ eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ auf den euklidischen Raum.
- In einem gewählten Koordinatensystem schreiben wir:

$$x^i = x^i(\lambda), \quad \lambda \in I \quad (\text{Kurvenparameter})$$

- Wir fordern oft zusätzlich ν -fache Differenzierbarkeit $\nu = 1; 2; 3 \dots$, d.h. Existenz von $\frac{d^\nu x^i}{d\lambda^\nu}$.

- Einer Kurve kann an jedem ihrer Punkte ein *Tangentialvektor* zugeordnet werden.
- Die Tangentialvektoren aller denkbaren Kurven durch einen Punkt A spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf.
- *Jedem* Punkt aus E_3 wird ein eigener Tangentialvektorraum „angeheftet“.
- In einem gewählten Koordinatensystem (mit Koordinaten x^i) sind die *Koordinatenbasisvektoren* \vec{b}_j am Punkt A mit Koordinatenwerten x_A^i die Tangentialvektoren an die speziellen Kurven K :

$$K : \quad x^i(\lambda) = \begin{cases} x_A^i + \lambda & \text{für } i = j \\ x_A^i & \text{für } i \neq j \end{cases}$$



Zur Definition von Koordinatenbasisvektoren

- Den Tangentialvektor an eine *beliebige* Kurve am Punkt A drücken wir dann gemäß

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx^i}{d\lambda} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 (\vec{v})^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i,$$

aus.

- Die $v^i = dx^i / d\lambda$ sind die Komponenten des Vektors \vec{v} in den Koordinaten (x^i) , d.h bezüglich der Koordinatenbasis $\{\vec{b}_i\}$.

Insbesondere gilt: $(\vec{b}_j)^i = \delta_j^i$ (Kronecker-delta).

- In einem anderen Koordinatensystem (mit Koordinaten $x^{i'}$) schreibt sich *dieselbe* Vektor \vec{v} als:

$$\vec{v} = \sum_{i'=1}^3 \frac{dx^{i'}}{d\lambda} \vec{b}_{i'} = \sum_{i'=1}^3 (\vec{v})^{i'} \vec{b}_{i'} = \sum_{i'=1}^3 v^{i'} \vec{b}_{i'},$$

Anmerkungen zur Stellung der Indizes:

1. Stellung ist prinzipiell nicht von Bedeutung in der Newtonschen Physik.
2. Allerdings sind in allen *relativistischen* Theorien Größen mit unteren von denjenigen mit oberen zu unterscheiden.
3. In dieser Vorlesung:

- Koordinaten haben obere Indizes: $x^i, x^{j'}$
- Komponenten von Vektoren (Elemente des Tangentialraumes) haben meist obere, zuweilen aber auch untere Indizes, Beispiel: v^i, K^i , aber auch: $K^i = -\nabla_i U = -\partial U / \partial x^i$
- Basisvektoren werden durch untere Indizes durchnummeriert: $\vec{b}_i, \vec{b}_{k'}$,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i$$

- Transformationsmatrizen (z.B. orthogonale Matrizen \hat{O}) haben einen oberen Zeilen- und einen unteren Spaltenindex, z.B.

$$v^{i'} = \sum_{j=1}^3 \hat{O}_j^{i'} v^j$$

- Symbole wie Kronecker-delta oder Levi-Civita-epsilon haben wahlweise untere oder obere Indizes

1.1.2.3 Skalarprodukt, Vektorprodukt und Ortsvektoren

- In den Tangentialvektorräumen existiert ein Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ; die Multiplikation zweier Vektoren ergibt eine reelle Zahl.

- In IS \mathcal{S} ist:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{j=1}^3 v^j w^j$$

Wir schreiben:

$$(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \vec{v} \cdot \vec{w}$$

- Betrag eines Vektors:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$$

- Koordinateneinheitsvektoren:

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{b}_i}{|\vec{b}_i|}$$

- Ein Koordinateneinheitsvektoren eines *orthogonalen* Koordinatensystems bilden eine *Orthonormalbasis (ONB)*:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{Kronecker-delta})$$

Insbesondere sind die Koordinatenbasisvektoren eines IS eine ONB.

- Das *Vektorprodukt* führt zwei Vektoren \vec{u}, \vec{v} in einen neuen Vektor \vec{w} über:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

In einem IS gilt für die Komponenten von \vec{u}, \vec{v} und \vec{w} :

$$w^i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk}^i u^j v^k$$

Hierbei ist ε_{jk}^i das vollständig antisymmetrische Levi-Civita-Symbol¹:

$$\varepsilon_{jk}^i = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123), \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix}$$

¹Siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita-Symbol>

- Für die Koordinatenbasisvektoren gilt die *Rechte-Hand-Regel*:

$$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3, \quad \vec{b}_2 \times \vec{b}_3 = \vec{b}_1, \quad \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 = \vec{b}_2,$$

zusammen also:

$$\vec{b}_j \times \vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{jk}^i \vec{b}_i$$

- Betrachten nun in einem IS \mathcal{S} die Verbindungsgerade zwischen zwei Punkten A und B mit den Koordinaten (x_A^i) und (x_B^i) :

$$x^i(\lambda) = \lambda x_B^i + (1 - \lambda)x_A^i, \quad \lambda \in [0, 1]$$

mit $x^i(0) = x_A^i, x^i(1) = x_B^i$.

- Bezeichnen den im IS \mathcal{S} konstanten Tangentialvektor

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx^i}{d\lambda} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 (x_B^i - x_A^i) \vec{b}_i$$

als *Verbindungsvektor* der Punkte B und A .

- Bezeichnung: $\vec{v} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{x}_B - \vec{x}_A)^2 &\equiv (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot (\vec{x}_B - \vec{x}_A) \\ &= D^2((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A)) \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \end{aligned}$$

Wir schreiben auch:

$$|\vec{x}_B - \vec{x}_A| \equiv D((x_B, y_B, z_B), (x_A, y_A, z_A))$$

- *Ortsvektoren*: Falls $x_A^i = 0$, d.h. der Punkt A fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, dann heißt der Verbindungsvektor $\vec{x}_B \equiv \vec{x}_B - \vec{x}_A$ der Ortsvektor des Punktes B bezüglich des Systems \mathcal{S} .

Anmerkung: Ortsvektoren sind Elemente des Tangentialraumes, die in Abhängigkeit eines gewählten Bezugspunktes – des Koordinatenur sprungs – definiert werden, während z.B. die Geschwindigkeit unabhängig davon ist.

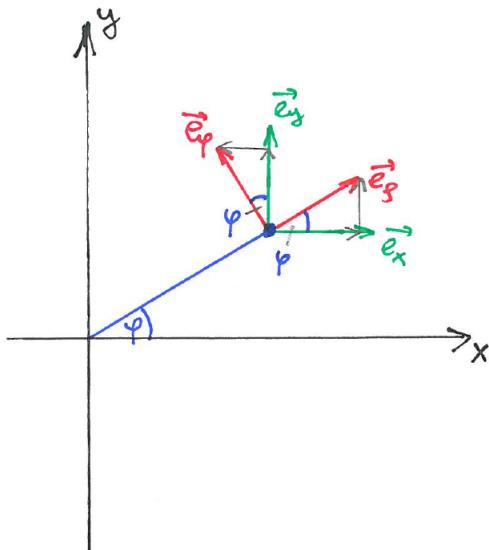
1.1.2.4 Krummlinige Koordinaten

Beispiel Zylinderkoordinaten:

- kartesische Koordinaten: $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$
- Zylinderkoordinaten: $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\varrho, \varphi, z')$
- Koordinatentransformation:

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z'$$

- Komponenten der *Koordinateneinheitsvektoren* in kartesischen Koordinaten (siehe Abb.):



1.

$$(\vec{e}_x)^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_y)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_z)^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$(\vec{e}_\varrho)^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_\varphi)^i = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{e}_{z'})^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

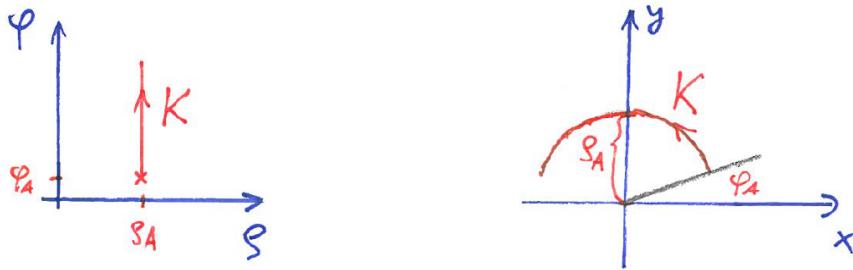
Allgemeine Koordinatentransformation zwischen einem Koordinatensystem Σ (Koordinaten x^i) und Σ' (Koordinaten $x^{i'}$):

- Betrachte Linie entlang der Koordinate $x^{k'}$ innerhalb von Σ' :

$$K : \quad x^{i'}(\lambda) = x_A^{i'} + \lambda \delta_{k'}^{i'}, \quad (x_A^{i'} = \text{const.})$$

z.B. Linie entlang der azimuthalen Winkelkoordinate in Zylinderkoordinaten:

$$\varrho = \varrho_A, \quad \varphi(\lambda) = \varphi_A + \lambda, \quad z' = z'_A$$



- Dann sind die Komponenten des Koordinatenbasisvektors $\vec{b}_{k'}$ im System Σ gegeben durch:

$$(\vec{b}_{k'})^i = \frac{d}{d\lambda} \left(x^i(x^{j'}(\lambda)) \right) = \frac{d}{d\lambda} \left(x^i(x_A^{j'} + \lambda \delta_{k'}^{j'}) \right) = \sum_{j'=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \delta_{k'}^{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}},$$

also:

$$\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$$

Transformationsgesetz für die Basisvektoren.

- Für Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned}
 (\vec{b}_\varrho)^i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_\varrho)^i, \quad \text{also: } \vec{b}_\varrho = \vec{b}_x \cos \varphi + \vec{b}_y \sin \varphi \\
 (\vec{b}_\varphi)^i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = (\varrho \vec{e}_\varphi)^i, \quad \text{also: } \vec{b}_\varphi = \varrho (-\vec{b}_x \sin \varphi + \vec{b}_y \cos \varphi) \\
 (\vec{b}_{z'})^i &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\vec{e}_{z'})^i, \quad \text{also: } \vec{b}_{z'} = \vec{b}_z
 \end{aligned}$$

- Für die Umrechnung der Komponenten eines beliebigen Vektors \vec{v} gilt dann:

$$\vec{v} = \sum_{k'=1}^3 v^{k'} \vec{b}_{k'} = \sum_{k'=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k'=1}^3 v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i,$$

d.h.:

$$v^i = \sum_{k'=1}^3 v^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \quad \text{bzw.} \quad v^{i'} = \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

Anmerkung: Die Matrizen $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right)$ und $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right)$ sind zueinander invers,

$$\sum_{k'=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

- Beispiel Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} v^x &= v^\varrho \frac{\partial x}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial x}{\partial z'} = v^\varrho \cos \varphi - v^\varphi \varrho \sin \varphi, \\ v^y &= v^\varrho \frac{\partial y}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial y}{\partial z'} = v^\varrho \sin \varphi + v^\varphi \varrho \cos \varphi, \\ v^z &= v^\varrho \frac{\partial z}{\partial \varrho} + v^\varphi \frac{\partial z}{\partial \varphi} + v^{z'} \frac{\partial z}{\partial z'} = v^{z'} \end{aligned}$$

1.1.2.5 Inertialsysteme

IS \mathcal{S} sind nicht eindeutig bestimmt:

- Betrachten folgende *lineare* Koordinatentransformation:

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z') : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix},$$

die eine Drehung und eine Nullpunktsverschiebung beschreibt.

- Hierbei ist \hat{O} eine konstante orthogonale Matrix, bestehend aus drei orthonormalen Spaltenvektoren \underline{n}_i ,

$$\hat{O} = (\underline{n}_1 \ \underline{n}_2 \ \underline{n}_3) = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\underline{n}_k = \begin{pmatrix} n_{1k} \\ n_{2k} \\ n_{3k} \end{pmatrix}, \quad \underline{n}_k \cdot \underline{n}_m = \sum_{j=1}^3 n_{jk} n_{jm} = \delta_{km},$$

d.h.:

$$\hat{O} \hat{O}^T = \hat{O}^T \hat{O} = \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir fordern zusätzlich:

$$\det \hat{O} = 1$$

Eigentliche Drehung (keine Spiegelung)

Anmerkung: Die \underline{n}_k sind *keine* Vektoren im Tangentialraum; sie fassen vielmehr Komponenten der Transformationsmatrix \hat{O} zusammen (daher kennzeichnen wir sie mit einem Unterstrich und nicht mit einem Vektorpfeil).

- Die Beziehungen $\underline{n}_k \cdot \underline{n}_m = \delta_{km}$ sind 6 Gleichungen für 9 unbekannte Komponenten von \hat{O} . Damit hat \hat{O} drei reelle Freiheitsgrade.
- Mit räumlicher Nullpunktsverschiebung (x'_A, y'_A, z'_A) : insgesamt also eine 6-parametrische Koordinatentransformation.
- Damit wird ein IS \mathcal{S} in ein neues IS \mathcal{S}' überführt, d.h. für zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} gilt dieselbe Form des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} \sum_{i'=1}^3 v^{i'} w^{i'} &= \sum_{i'=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \right] \left[\sum_{m=1}^3 w^m \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \right] = \sum_{k,m=1}^3 v^k w^m \left[\sum_{i'=1}^3 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \right] \\ &= \sum_{k,m=1}^3 v^k w^m \left[\sum_{i'=1}^3 [\hat{O}^T]_{i'}^k [\hat{O}]_m^{i'} \right] = \sum_{k,m=1}^3 v^k w^m \delta_{km} = \sum_{k=1}^3 v^k w^k = \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

$[\hat{O}]_m^{i'}:$ Eintrag in der i' -ten Zeile und m -ten Spalte der Matrix \hat{O}

- Auch das Vektorprodukt besitzt dieselbe Form in \mathcal{S}' (Übung):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}, \quad w^i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{jk}^i u^j v^k \quad \Leftrightarrow \quad w^{i'} = \sum_{j',k'=1}^3 \varepsilon_{j'k'}^{i'} u^{j'} v^{k'}$$

und

$$\vec{b}_j \times \vec{b}_k = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{jk}^i \vec{b}_i \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}_{j'} \times \vec{b}_{k'} = \sum_{i'=1}^3 \varepsilon_{j'k'}^{i'} \vec{b}_{i'}$$

mit demselben vollständig antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol.

Anmerkung: Hier haben wir eine rein räumliche Transformation betrachtet, $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$. Allgemeiner sind spezielle *raum-zeitliche* Transformationen (*Galilei-Transformationen*, siehe Kapitel 1.2.1) möglich, die ein IS auf ein neues IS abbilden.

1.1.3 Raum und Zeit

- Zeit: Reeller, universell gegebener Parameter $t \in \mathbb{R}$, der eine Abfolge von Ereignissen beschreibt
- Raumzeit M in der Newtonschen Theorie: Formale Zusammenfassung von Raum- und Zeitpunkten zu *raumzeitlichen Ereignissen*, die durch die 4 Koordinaten $(x^1, x^2, x^3, t) = (x^i, t)$ erfasst werden, $M = E_3 \times \mathbb{R}$.
- Gleichzeitigkeit: Man kann zwei beliebigen Ereignissen

$$A = (x_A, y_A, z_A, t_A) \in M \quad \text{und} \quad B = (x_B, y_B, z_B, t_B) \in M$$

ein zeitliches Vor- bzw. Nacheinander zuzuordnen:

- $t_A < t_B$: Ereignis A findet vor B statt
- $t_A = t_B$: Ereignis A findet gleichzeitig mit B statt
- $t_A > t_B$: Ereignis A findet nach B statt

- Wegen des universellen Charakters des Zeitparameters t wird die Zeit i.a. nicht transformiert, $t' = t$.

1.1.4 Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung

- Eine Bahnkurve ist eine Kurve im E_3 , die durch die Zeit t parametrisiert ist:

$$x^i = x^i(t) \quad \text{Kurvenparameter } \lambda = t$$

- Die Geschwindigkeit ist der Tangentialvektor

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i$$

an die Bahnkurve, mit den Komponenten:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} =: \dot{x}^i, \quad \cdot \equiv \frac{d}{dt}$$

Beispiel kartesische Koordinaten (System Σ):

$$v^1 = v^x = \dot{x}, \quad v^2 = v^y = \dot{y}, \quad v^3 = v^z = \dot{z}, \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i$$

Beispiel Zylinderkoordinaten (System Σ'):

$$v^{1'} = v^\varrho = \dot{\varrho}, \quad v^{2'} = v^\varphi = \dot{\varphi}, \quad v^3 = v^{z'} = \dot{z}', \quad \vec{v} = \sum_{i'=1}^3 v^{i'} \vec{b}_{i'}$$

- Die Geschwindigkeits-Komponenten transformieren sich bei einem Koordinatenwechsel $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ gemäß:

$$v^{i'} = \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

(siehe Kapitel 1.1.2.4)

- Beschleunigung in einem IS \mathcal{S} :

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{b}_i, \quad a^i = \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \ddot{x}^i$$

Anmerkung:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad & \sum_{i=1}^3 \dot{x}^i \vec{b}_i = \sum_{i'=1}^3 \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} \\ \text{Es ist aber i.A.:} \quad & \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i \neq \sum_{i'=1}^3 \ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} \end{aligned}$$

- Beispiel: Beschleunigung in Zylinderkoordinaten:

– kartesische Koordinaten eines IS \mathcal{S} : $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$,

Zylinderkoordinaten: $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (\varrho, \varphi, z')$

– Wollen schreiben: $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 a^i \vec{b}_i = \sum_{i'=1}^3 a^{i'} \vec{b}_{i'}$.

– Frage: Wie lauten die $a^{i'}$?

Analyse:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \quad \dot{x} = \dot{\varrho} \cos \varphi - \varrho \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{x} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi}) \sin \varphi \\ y &= \varrho \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{\varrho} \sin \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{y} = (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho} \dot{\varphi}) \cos \varphi \\ z &= z', \quad \dot{z} = \dot{z}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}' \end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \ddot{x}\vec{b}_x + \ddot{y}\vec{b}_y + \ddot{z}\vec{b}_z \\
 &= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)(\vec{b}_x \cos \varphi + \vec{b}_y \sin \varphi) + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})(-\vec{b}_x \sin \varphi + \vec{b}_y \cos \varphi) + \ddot{z}\vec{b}_z \\
 &= (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\vec{b}_\varrho + \frac{1}{\varrho}(\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\vec{b}_\varphi + \ddot{z}'\vec{b}_{z'} \\
 &= \sum_{i'=1}^3 a^{i'}\vec{b}_{i'}
 \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$a^\varrho = \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2, \quad a^\varphi = \ddot{\varphi} + \frac{2}{\varrho}\dot{\varrho}\dot{\varphi}, \quad a^z' = \ddot{z}'.$$

- Übergang zu einem beliebigen System, $\mathcal{S} \rightarrow \Sigma'$:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j'=1}^3 \ddot{x}^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \vec{b}_{j'} = \sum_{j'=1}^3 a^{j'} \vec{b}_{j'} \Rightarrow a^{j'} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}$$

Darstellung der Komponenten im System Σ' :

$$\begin{aligned}
 a^{j'} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{d^2}{dt^2} x^i(x^{k'}(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k'=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \dot{x}^{k'} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \sum_{k'=1}^3 \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \ddot{x}^{k'} + \sum_{l'=1}^3 \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{l'} \partial x^{k'}} \dot{x}^{l'} \dot{x}^{k'} \right].
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \delta_{k'}^{j'}$$

folgt:

$$a^{j'} = \ddot{x}^{j'} + \sum_{k'=1}^3 \sum_{l'=1}^3 \Gamma_{k'l'}^{j'} \dot{x}^{k'} \dot{x}^{l'}$$

mit den sogenannten *Christoffel-Symbolen*

$$\Gamma_{k'l'}^{j'} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{l'}}$$

(diese spielen eine entscheidende Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie).

- Konsequenz: In allen IS ist $\sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i$ ein Vektor im Tangentialraum (der Übergang von einem IS zu einem anderen IS ist linear; daher verschwinden die Christoffel-Symbole).
- Aber Achtung: $\sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i$ ist i.a. kein Vektor in krummlinigen Koordinaten (siehe Beispiel Zylinderkoordinaten).
- Für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) = (r, \vartheta, \varphi)$,

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

erhält man (Übung):

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\vartheta \\ & + (r \sin \vartheta \ddot{\varphi} + 2 \sin \vartheta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \vartheta \dot{\vartheta}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- Mitgeführte Koordinatenbasisvektoren:

- Haben im IS:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}^i \vec{b}_i, \quad \vec{a} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i$$

- Wollen im IS für eine *beliebige* Bahnkurve schreiben:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \sum_{i=1}^3 \left(\ddot{x}^i \vec{b}_i + \dot{x}^i \dot{\vec{b}}_i \right),$$

also im IS:

$$\dot{\vec{b}}_i = 0$$

- *Interpretation:* Im IS werden die Koordinatenbasisvektoren entlang einer beliebigen Bahnkurve unverändert mitgeführt, d.h., die \vec{b}_i als Elemente der Tangentialräume werden an verschiedenen Raumpunkten miteinander identifiziert.

- Schreiben im IS auch:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{b}_i, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}^i \vec{b}_i \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}^i \vec{b}_i$$

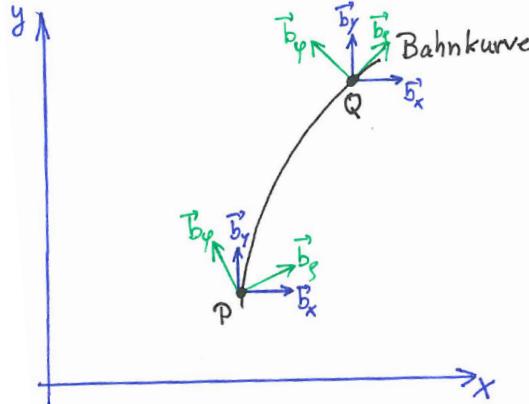
Anmerkung: \vec{r} ist ein Ortsvektor in einem bestimmten Koordinatensystem und daher von dessen Ursprung abhängig (siehe Anmerkung am Ende von Kapitel 1.1.2.3).

- Im krummlinigen System Σ' :

$$\vec{v} = \sum_{i'=1}^3 \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_{i'=1}^3 \left(\ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} + \dot{x}^{i'} \dot{\vec{b}}_{i'} \right)$$

mit:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{b}}_{i'} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \vec{b}_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{l'=1}^3 \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{l'}} \dot{x}^{l'} \vec{b}_k \\ &= \sum_{l'=1}^3 \sum_{m'=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{l'}} \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^{l'} \vec{b}_{m'}, \\ \dot{\vec{b}}_{i'} &= \sum_{l'=1}^3 \sum_{m'=1}^3 \Gamma_{i'l'}^{m'} \dot{x}^{l'} \vec{b}_{m'} \end{aligned}$$



Veränderlichkeit der Koordinatenbasisvektoren entlang einer Bahnkurve. Für ein kartesisches IS (Koordinaten x, y) bzw. ein Polarkoordinatensystem (Koordinaten ϱ, φ) gilt:

$$\vec{b}_x(P) = \vec{b}_x(Q), \quad \vec{b}_y(P) = \vec{b}_y(Q); \quad \vec{b}_\varrho(P) \neq \vec{b}_\varrho(Q), \quad \vec{b}_\varphi(P) \neq \vec{b}_\varphi(Q)$$

- *Interpretation:* In krummlinigen Koordinaten gibt es eine wohldefinierte Änderung der Koordinatenbasisvektoren entlang einer bestimmten Bahnkurve, d.h., die \vec{b}_i als Elemente der Tangentialräume werden an verschiedenen Punkten einer vorgegebenen Bahnkurve in bestimmter Weise aufeinander abgebildet.

1.2 Die Newtonschen Axiome – die Grundgesetze der Dynamik

- In der Newtonschen Mechanik gibt es ausgezeichnete kartesische Koordinatensysteme – die *Inertialsysteme* \mathcal{S} .
- In ihnen gelten die Newtonschen Axiome.
- Diese definieren Kräfte und Massen und beschreiben den Verlauf von Bahnkurven.
- Wir charakterisieren zunächst die Inertialsysteme und diskutieren anschließend die Axiome.

1.2.1 Inertialsysteme und Galilei-Transformationen

- Es gibt eine 10-parametrische Schar von ausgezeichneten kartesischen IS \mathcal{S} (Eigenschaften: siehe Kapitel 1.1).
- Diese werden durch Galilei-Transformationen (GT) ineinander überführt:

GT sind Koordinatentransformationen (von \mathcal{S} nach \mathcal{S}') innerhalb der Newtonschen Raumzeit $M = E_3 \times \mathbb{R}$:

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t') :$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^{1'} \\ V^{2'} \\ V^{3'} \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix}, \quad t' = t + t_A$$

- \hat{O} : konstante orthogonale 3×3 -Matrix (3 Freiheitsgrade)

- $\vec{V} = \sum_{i'=1}^3 V^{i'} \vec{b}_{i'}$: konstanter Vektor (3 Freiheitsgrade), beschreibt eine konstante Relativbewegung der Systeme \mathcal{S} und \mathcal{S}' .
- Verbleibende Freiheitsgrade: vier konstante Verschiebungsparameter x'_A, y'_A, z'_A und t'_A .

• Anmerkungen:

- GT sind Transformationen innerhalb der gesamten 4-dimensionalen Newtonschen Raum-Zeit (Zeit t ist involviert).
- Sie sind von rein räumlichen Koordinatentransformationen $x^i = x^i(x^{k'})$ zu unterscheiden (Ausnahme: $\vec{V} = 0$, siehe Kapitel 1.1.2.5).
- Bei raumzeitlichen Koordinatentransformationen

$$(x^{i'}, t') = (x^{i'}(x^j, t), t + t_A), \quad (1.1)$$

bei denen die Zeit t (bis auf konstante Verschiebung t_A) nicht transformiert wird, gilt weiterhin das *räumliche* Transformationsgesetz für Basisvektoren:

$$\vec{b}_{k'} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \vec{b}_i$$

Nur solche Koordinatentransformationen (1.1) werden in der Newtonschen Theorie betrachtet.

- Die GT sind offenbar linear, es verschwinden also alle Christoffelsymbole

$$\Gamma_{k'j'}^{m'} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} = 0$$

- Sei $\ddot{x}^i = 0$, also $\vec{a} = 0$. Dann folgt $\ddot{x}^{i'} = 0$, und wegen $\Gamma_{k'j'}^{m'} = 0$ ist $(\vec{a})^{i'} = \dot{x}^{i'} = 0$. Damit ist eine geradlinig-gleichförmige Bewegung in \mathcal{S} auch in \mathcal{S}' geradlinig-gleichförmig.
- Damit das zweite Newtonsche Axiom forminvariant bleibt, muss gelten: $dt/dt' = 1$ (siehe Kapitel 1.2.3).

1.2.2 Das erste Axiom

- Die Newtonsche Mechanik kennt den Zustand eines *kräftefreien* Teilchens („Massenpunkt“, siehe Kapitel 1.2.3), das sich ohne jeglichen äußereren Einfluss bewegt.
- Das erste Newtonsche Axiom besagt nun:

Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich in Inertialsystemen \mathcal{S} auf einer Bahnkurve mit konstanter Geschwindigkeit,

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{constant},$$

also verschwindender Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = 0$. Demgemäß erfolgt die Bewegung in \mathcal{S} auf einer Geraden,

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}_0.$$

- Anmerkung: In krummlinigen Koordinaten folgt:

$$a^{m'} = 0 : \quad \ddot{x}^{m'} + \sum_{k'=1}^3 \sum_{j'=1}^3 \Gamma_{k'j'}^{m'} \dot{x}^{k'} \dot{x}^{j'} = 0,$$

beispielsweise in Zylinderkoordinaten:

$$\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2 = 0, \quad \varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{z}' = 0.$$

In krummlinigen Koordinaten bewegt sich daher ein kräftefreier Massenpunkt i.a. *nicht* auf einer *Koordinatengeraden* $x^{i'} = v^{i'}t + x_A^{i'}$.

1.2.3 Das zweite Axiom

- Das zweite Newtonsche Axiom besagt:
In Inertialsystemen \mathcal{S} ist die Änderung der Bewegungsgröße der einwirkenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F} \quad (1.2)$$

Neu zu klärende Größen: *träge Masse m , Kraft \vec{F} , Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$.*

- Masse:

1. ist eine i.a. unveränderliche Eigenschaft elementar angenommener punktförmiger Teilchen, die sich entlang von Bahnkurven bewegen (*Massenpunkte*)
2. Bestimmung erfolgt über das Gesetz (1.2)
3. Annahme des Vorhandenseins von *Standardkräften* \vec{F}_{st} (z.B. spezielle Federn), unabhängig vom betrachteten Massenpunkt.
4. Ausmessen der durch diese Kräfte bewirkten Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$
5. Bestimmung von m gemäß

$$m = \frac{|\vec{F}_{\text{st}}|}{|\ddot{\vec{r}}|}$$

6. Masse stellt damit den Widerstand (*Trägheit*) des Massenpunktes gegen eine Änderung seines Bewegungszustandes dar.

- Kraft:

1. Wie Geschwindigkeit und Beschleunigung ein Vektor im Tangentialraum.
2. Superposition mehrerer an einem Punkt angreifender Kräfte zu einer Gesamtkraft.
3. Wichtig: Kräfte sind immer Raumpunkten zugeordnet („greifen an ihnen an“).
4. Nicht-Standardkräfte können mittels (1.2) durch ihre Beschleunigungswirkung auf bekannte Massenpunkte gemessen werden:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}$$

5. I.a. kann \vec{F} vom Ort und der Geschwindigkeit \vec{v} sowie explizit von der Zeit abhängen:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Annahme: *keine* Abhängigkeit von höheren Ableitungen $\ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}, \dots$
 Ausnahme: Bewegung eines strahlenden Elektrons (entspricht einer Selbstwechselwirkung)

- Bewegungsgröße Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Fundamentale Größe in der Physik.

1.2.4 Das dritte Axiom

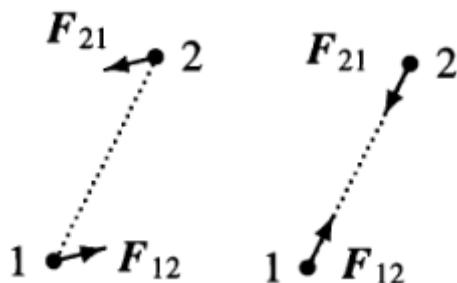
- Das dritte Newtonsche Axiom besagt:

Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt,

$$\vec{F}_{\text{actio}} = -\vec{F}_{\text{reactio}}$$

Kurzform: *actio = reactio*

- Wichtig: Kraft und Gegenkraft greifen an verschiedenen Raumpunkten an.
- Beispiel: Betrachte Massenpunkt an einem Faden, gehalten von einer Hand. Kraft wirkt von der Hand auf Massenpunkt (greift am Massenpunkt an), Gegenkraft wirkt vom Massenpunkt auf die Hand (greift an der Hand an).



1.3 Einfache eindimensionale Bewegungen

1.3.1 Vorbemerkungen

- In diesem Kapitel: $y = 0 = z$ im verwendeten IS. Dann folgt für (1.2) nur eine x -Komponente:

$$m\ddot{x} = F(x(t), \dot{x}(t), t)$$

- Bei bekannter Bahnkurve $x(t)$ (z.B. Vermessung): Bestimmung der Kraft möglich
- Eigentliche Aufgabe der Mechanik: Bestimmung der Bahnkurve $x(t)$, wenn F bekannt ist.
- Mathematisch: Lösen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung
- Freiheiten der Lösung: Anfangslage und -geschwindigkeit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$
- Alternativ: Anfangs- und Endlage des Massenpunktes, $x(0)$ und $x(T)$, wobei die Kurve hier im Intervall $t \in [0, T]$ betrachtet wird.

1.3.2 Freier Fall (Wurf) im homogenen Schwerefeld

- Annahme: annähernd vom Ort unabhängige Schwerkraft F auf einen Massenpunkt (mit Masse m) über der Erdoberfläche, nach unten gerichtet und der Masse proportional.
- Wählen x -Achse nach oben:

$$m\ddot{x} = F = -mg$$

$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: Schwerebeschleunigung der Erde

- Achtung:
 1. m auf der linken Seite ist Maß für Trägheit des Teilchens, Widerstand gegen eine *beliebige* Kraft, „träge Masse“
 2. m auf der rechten Seite ist Maß für „Fähigkeit“ des Teilchens, der Gravitationskraft zu folgen (vgl. elektrische Ladung als „Fähigkeit“ eines geladenen Teilchens, der Lorentzkraft zu folgen), „schwere Masse“
 3. Erfahrung zeigt, dass beide Massen identifiziert werden können.
- Somit folgt unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\ddot{x} = -g \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

1.3.3 Freier Fall mit Reibung

- Annahme einer Reibungskraft bei Bewegung durch Gas oder Flüssigkeit:

$$F_{\text{Reibung}} = -r\dot{x} \quad r > 0, \text{ konstant}$$

- Dann folgt:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + mg = 0$$

- Lösung:

1. Setze $v = \dot{x}$ und erhalte

$$\dot{v} + \kappa v + g = 0, \quad \text{mit } \kappa = \frac{r}{m}$$

2. Ansatz für lineare Gleichungen der Form $\dot{v} + a(t)v + b(t) = 0$:

$$v(t) = c(t) \exp\left(-\int a(t) dt\right) = c(t)e^{-\kappa t}$$

3. Erhalte für $c(t)$:

$$\dot{c}e^{-\kappa t} - \kappa ce^{-\kappa t} + \kappa ce^{-\kappa t} + g = 0,$$

also:

$$\dot{c} = -ge^{\kappa t}$$

mit dem Integral:

$$c(t) = -\frac{g}{\kappa}e^{\kappa t} + c_1, \quad c_1 : \text{Integrationskonstante}$$

4. Somit:

$$x(t) = \int v(t) dt = \int \left(-\frac{g}{\kappa} + c_1 e^{-\kappa t}\right) dt = -\frac{g}{\kappa}t - \frac{c_1}{\kappa}e^{-\kappa t} + c_2$$

5. Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ liefert:

$$x(t) = -\frac{g}{\kappa}t + \frac{1}{\kappa^2}(\kappa v_0 + g)(1 - e^{-\kappa t}) + x_0$$

1.3.4 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

- Annahme von drei Krafttermen:
 1. Rückstellkraft proportional zur Auslenkung aus der Ruhelage (Federkraft):

$$F_{\text{Feder}} = -kx, \quad k = m\omega_0^2 \quad \text{positive Federkonstante}$$

2. Reibungskraft:

$$F_{\text{Reibung}} = -r\dot{x} \quad r = 2mq > 0, \text{ konstant}$$

3. Zusätzliche äußere Antriebskraft, hier periodischer Ansatz:

$$F_{\text{Antrieb}} = mQ \sin \omega t$$

- Wichtiger Spezialfall: harmonischer Oszillator, $F_{\text{Reibung}} = 0 = F_{\text{Antrieb}}$
- Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2q\dot{x} + \omega_0^2 x = Q \sin \omega t$$

- Lösungsschritte:

1. Allgemeine Lösung (enthält zwei Freiheitsgrade) der homogenen Gleichung (mit $Q = 0$) durch e-Ansatz:

$$x_{\text{hom}} = ce^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 2q\lambda + \omega_0^2 = 0$$

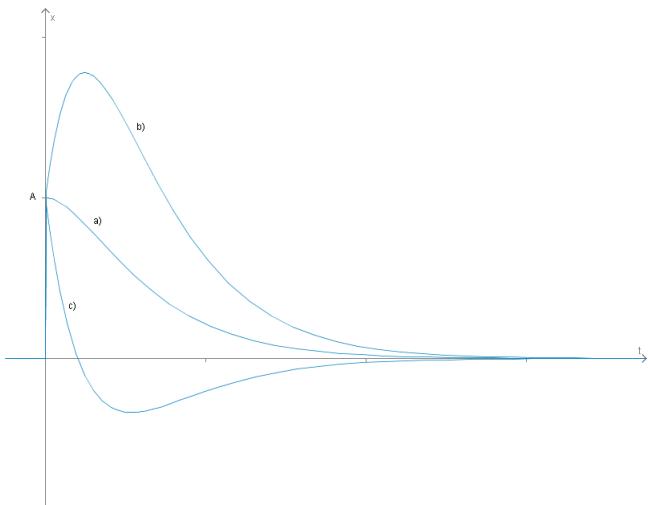
also:

$$x_{\text{hom}} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1/2} = -q \pm \sqrt{q^2 - \omega_0^2}$$

Fälle:

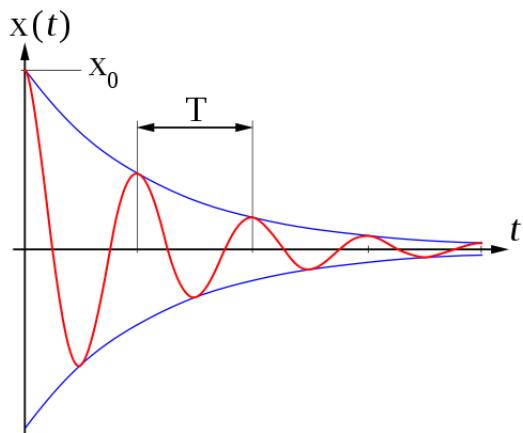
- (a) Starke Dämpfung: $q > \omega_0$, beide $\lambda_{1/2}$ sind reell und negativ, $\lambda_{1/2} = -q \pm \sqrt{q^2 - \omega_0^2} = -q \pm \mu$.

$$x_{\text{hom}} = e^{-qt} \left(\frac{qx_0 + v_0}{\mu} \sinh \mu t + x_0 \cosh \mu t \right)$$



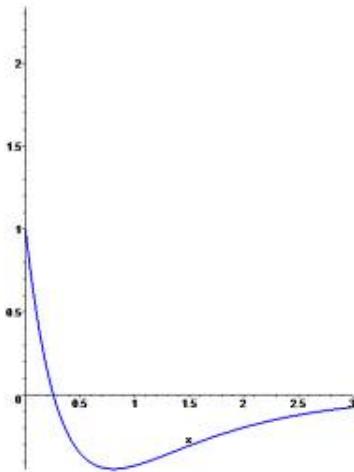
- (b) Schwache Dämpfung: $q < \omega_0$, beide $\lambda_{1/2}$ sind komplex:
 $\lambda_{1/2} = -q \pm i\sqrt{\omega_0^2 - q^2} = -r \pm i\mu$:

$$x_{\text{hom}} = e^{-qt} \left(\frac{qx_0 + v_0}{\mu} \sin \mu t + x_0 \cos \mu t \right)$$



- (c) Aperiodischer Grenzfall $\mu \rightarrow 0$:

$$x_{\text{hom}} = e^{-qt} [(qx_0 + v_0)t + x_0]$$



2. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch Ansatz:

$$x_{\text{spez}} = B \sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}_{\text{spez}} = B\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad \ddot{x}_{\text{spez}} = -\omega^2 x_{\text{spez}}$$

(a) Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} Q \sin \omega t &= \sin \omega t [(\omega_0^2 - \omega^2)B \cos \varphi - 2qB\omega \sin \varphi] \\ &\quad + \cos \omega t [(\omega_0^2 - \omega^2)B \sin \varphi + 2qB\omega \cos \varphi] \end{aligned}$$

(b) Koeffizientenvergleich für Terme $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ liefert:

$$\tan \varphi = \frac{2q\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad B = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4q^2\omega^2}}$$

3. Gesamte Lösung:

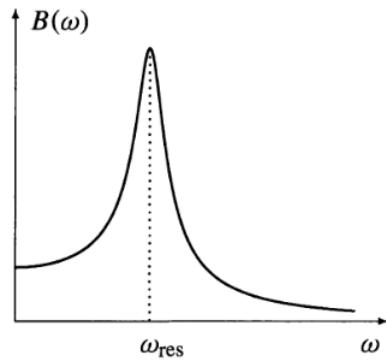
$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{spez}}(t)$$

- Da die homogene Lösung exponentiell abklingt (Faktor e^{-qt}), spielt für große Zeiten (nach dem „Einschwingvorgang“) x_{spez} die dominierende Rolle: Schwingung des Massenpunktes mit der Frequenz der äußeren Kraft.
- Für vorgegebene Werte Q, ω_0 und q wird die Amplitude $B = B(\omega)$ maximal für die *Resonanzfrequenz*:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2q^2}, \quad \left. \frac{dB}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{\text{res}}} = 0, \quad B(\omega_{\text{res}}) = \frac{Q}{2q\sqrt{\omega_0^2 - q^2}}$$

- Diskussion:

1. Für starke Reibung $q > \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0$ gibt es kein Maximum der Funktion $B(\omega)$, also keine Resonanz. $B = B(\omega)$ ist monoton fallend.
2. Für Resonanz ist somit $\omega_0^2 - q^2 > q^2 > 0$; der Radikand in $B(\omega_{\text{res}})$ ist dann positiv.
3. $B(\omega_{\text{res}})$ wird aber beliebig groß im Grenzfall $q \rightarrow 0$: *Resonanzkatastrophe*



1.3.5 Beliebige ortsabhängige Kraft

- Betrachten

$$m\ddot{x} = F(x), \quad (m = \text{const.})$$

Multiplikation mit \dot{x} liefert:

$$m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}$$

$$\text{Linke Seite: } m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 \right)$$

$$\text{Rechte Seite: } F(x)\dot{x} = -\frac{dU}{dx}\dot{x} = -\frac{dU}{dt} \quad \text{mit} \quad U(x) = - \int F(x) dx$$

- Funktion U nur bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt (oft durch Forderung $U(\tilde{x}) = 0$ festgelegt, z.B. $U(0) = 0$ [harmonischer Oszillator] oder $U(\infty) = 0$ [Gravitationspotential])
- Somit:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) \right) = 0, \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const.} = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$$

- Methode ist Anwendung des *Energiesatzes* (später), Integrationskonstante E : Energie, U : Potential der Kraft F .
- Lösen durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$

$$\Rightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} [U(x_0) - U(x)]}}$$

Wegen $\frac{dt}{dx}\Big|_{t=0} = \frac{1}{v_0}$ stimmt das zu wählende Vorzeichen mit demjenigen von v_0 überein, also:

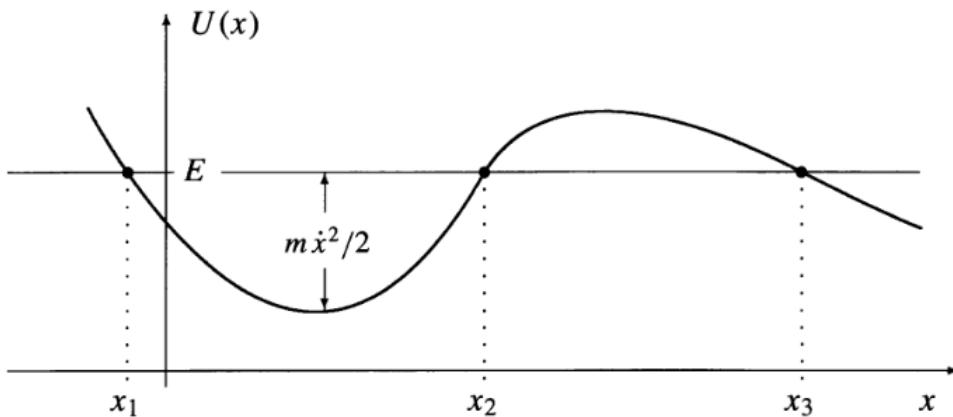
$$t = \text{sign}(v_0) \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(\xi)]}} = \text{sign}(v_0) \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} [U(x_0) - U(\xi)]}} \quad (1.3)$$

- Diskussion:

1. Sei der Verlauf von $U(x)$ wie in der Abbildung skizziert und $E = \frac{m}{2}v_0^2 + U(x_0)$ durch die Anfangsbedingungen fixiert.
2. Dann findet die Bewegung bezüglich x nur in solchen Intervallen statt, in denen $U(x) \leq E$ ist.
3. Falls $U(x) > E$ wäre, dann gälte für diesen Punkt: $\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - U(x) < 0$, was auszuschließen ist.
4. Mögliche Bewegung:
 - (a) Periodische Schwingung im Intervall $[x_1, x_2]$, falls $U(x) > E$ für $x < x_1$ und $x > x_2$.
 - (b) Bewegung verläuft ins Unendliche oder kommt von dort, falls $U(x) \leq E$ für $x \geq x_3$. Umkehrpunkt bei $x = x_3$, wo $U(x_3) = E$ gilt.
 - (c) Formel (1.3) ist immer gültig bis zum Erreichen des ersten Intervallendes (Umkehrpunkt).
 - (d) Ruhelagen: Extrema des Potentials U , stabil für Minimum, instabil für Maximum.

- (e) Näherung des Potentials in der Umgebung eines Minimums durch Parabel $U(x) \approx U(x_{\min}) + \frac{1}{2}k(x - x_{\min})^2$: Potential eines harmonischen Oszillators:

$$F(x) = -\frac{d}{dx} \left(U(x_{\min}) + \frac{1}{2}k(x - x_{\min})^2 \right) = -k(x - x_{\min})$$



1.4 Allgemeine Sätze und Begriffe

1.4.1 Vorbemerkungen

- Newtonsche Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in drei Raumdimensionen sind drei gekoppelte Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
- Keine allgemeine Lösungstheorie bekannt.
- Aber: Lösungverfahren existieren für spezielle, in der Natur vorkommende Kräfte
- Verfahren benutzen zunächst mathematisch definierte Größen (Energie, Potential, Drehimpuls), die dann aber in der gesamten Physik Bedeutung erlangen.

1.4.2 Impulssatz

- Impulssatz ist äquivalent zum 2. Newtonschen Axiom:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

- Impulserhaltung: Falls Kraft verschwindet gilt:

$$\vec{p} = \text{const.}$$

Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit auf Geraden (1. Axiom)

1.4.3 Drehimpulssatz und Flächensatz

- Vektorielle Multiplikation der Bewegungsgleichung mit \vec{r} :

$$m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Wegen $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ gilt:

$$\frac{d}{dt} (m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

- Erhalten somit den *Drehimpulssatz*:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

mit:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p} : \text{Drehimpuls} \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} : \text{Drehmoment}$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment.

- *Anmerkung*: Drehimpuls ist (wie der Ortsvektor \vec{r}) vom Koordinatenursprung abhängige Größe; bei Übergang in ein verschobenes IS S' mit $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_0$ ($\vec{r}_0 = \text{const.}$) folgt:

$$\vec{L}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (\vec{r} + \vec{r}_0) \times \vec{p} = \vec{L} + \vec{r}_0 \times \vec{p}$$

- Falls \vec{M} verschwindet, erhalten wir den *Drehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L} = \text{const.}$$

Folgerungen:

1. $\vec{M} = 0$ bedeutet $\vec{F} \parallel \vec{r}$,

$$\vec{F} = \vec{r} f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \text{Zentralkraft}$$

2. Da $(\vec{r} \times \vec{p}) \perp \vec{r}$, folgt:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$$

Für konstantes \vec{L} ist dies die Gleichung einer Ebene durch den Koordinatenursprung, in Komponenten:

$$xL^x + yL^y + zL^z = 0, \quad (L^x, L^y, L^z) : \text{const.}$$

- 3. Konsequenz: Wenn $\vec{L} = \text{const.}$, dann bewegt sich der Massenpunkt auf der zum Drehimpuls senkrechten Ebene, die den Nullpunkt enthält.
- 4. Wählen diese Ebene als (x, y) -Ebene und erhalten mit $z = 0 = \dot{z}$:

$$L^x = 0 = L^y, \quad L^z = |\vec{L}| = L = m(\vec{r} \times \vec{v})^z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Umrechnung auf Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) mit

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi$$

d.h. :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\varrho} \cos \varphi - \varphi \varrho \sin \varphi, \\ \dot{y} &= \dot{\varrho} \sin \varphi + \varphi \varrho \cos \varphi, \end{aligned}$$

Es folgt:

$$L = m[\varrho \cos \varphi (\dot{\varrho} \sin \varphi + \varphi \varrho \cos \varphi) - \varrho \sin \varphi (\dot{\varrho} \cos \varphi - \varphi \varrho \sin \varphi)],$$

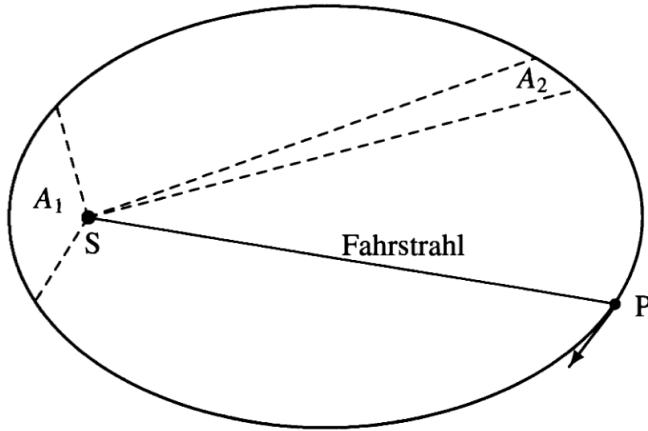
also:

$$L = m\varrho^2 \dot{\varphi} \quad (1.4)$$

- *Interpretation:* Die Fläche dA des infinitesimalen Dreiecks, das der Radiusvektor vom Nullpunkt zum Massenpunkt in der Zeit dt überstreicht, ist laut Abb. $dA = \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi$. Es folgt somit:

$$\varrho^2 \dot{\varphi} = 2 \frac{dA}{dt} = \text{const.}$$

Der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Massenpunktes überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen ($A_1 = A_2$).



1.4.4 Energiesatz

- Skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (1.5)$$

Nun ist:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{dT}{dt}$$

T : kinetische Energie („Bewegungsenergie“) des Massenpunktes

- *Energieerhaltungssatz*: Wenn man die rechte Seite der Gleichung (1.5) als totales Differential schreibt:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{d}{dt} U(\vec{r}), \quad (1.6)$$

dann ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + U = E = \text{const} \quad (1.7)$$

- *Frage*: Wann gilt (1.6)?

Antwort: In einem IS \mathcal{S} werde ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet, in dem die Bewegung des Teilchens stattfindet. Ist $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (nur ortsabhängig) und gilt ferner in G :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \text{rot } \vec{F} := \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{jk}^i \frac{\partial F^k}{\partial x^j} \vec{b}_i = 0,$$

so lässt sich ein zugeordnetes *Potential* $U = U(\vec{r})$ finden, das (1.6) erfüllt, und dann gilt der Energieerhaltungssatz (1.7).

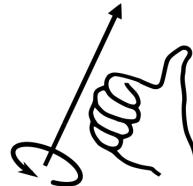
Beweis:

1. Stokescher Integralsatz:

Für eine zweidimensionale Fläche $\Omega \subset G$ gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.8)$$

- Hierbei steht der differentielle Flächennormalenvektor $d\vec{A}$ senkrecht auf Ω .
- Die Integration entlang $\partial\Omega$ ist gemäß der „Rechte-Hand-Regel“ auszuführen: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung der Flächennormalen $d\vec{A}$, so zeigen die Finger in Richtung des Durchlaufsinns, in dem man die Randkurve $\partial\Omega$ zu durchlaufen hat.



Beweisskizze:

- (a) Betrachten Dreieck in der (x, y) -Ebene, siehe Abb. unten.

Wir schreiben $\frac{\partial F^k}{\partial x^j} =: F_{,j}^k$ und finden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{F})^z dx dy = \int_F (F_{,x}^y - F_{,y}^x) dx dy \\ &= \int_0^b \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} F_{,x}^y dx dy - \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} F_{,y}^x dy dx \\ &= \int_0^b [F^y(a(1-y/b), y) - F^y(0, y)] dy \\ &\quad - \int_0^a [F^x(b(1-x/a), 0) - F^x(x, 0)] dx \end{aligned}$$

Wir schreiben:

$$-\int_0^a F^x(x, b(1 - x/a)) \, dx = \int_0^b F^x(a(1 - y/b), y) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \, dy,$$

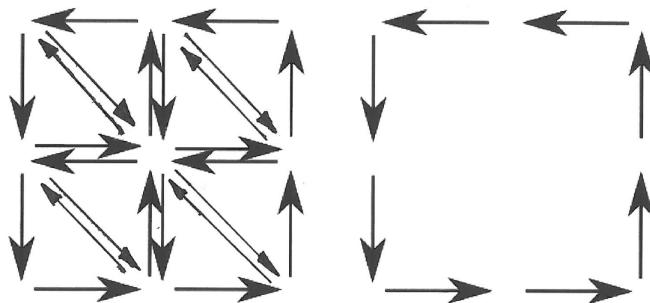
wobei wir $x = a(1 - y/b)$ substituiert haben. Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^a F^x(x, 0) \, dx + \int_b^0 F^y(0, y) \, dy \\ &\quad + \int_0^b \begin{pmatrix} F^x(a(1 - \lambda/b), \lambda) \\ F^y(a(1 - \lambda/b), \lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx/d\lambda \\ dy/d\lambda \end{pmatrix} \, d\lambda \\ &= \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

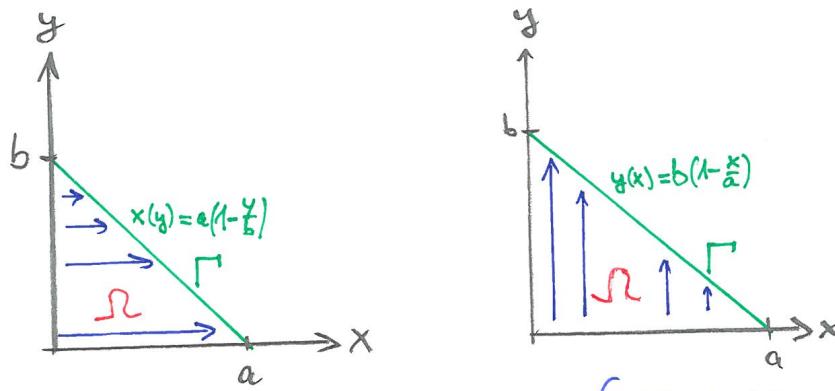
Hier haben wir das Randstück Γ dargestellt als:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a(1 - \lambda/b), y = \lambda, \lambda \in [0, b]\}$$

- (b) Gültigkeit von (1.8) kann auf beliebig verschobenes und verdrehtes Dreieck ausgedehnt werden.
- (c) Wir teilen die Fläche Ω in infinitesimale Dreiecke auf.
- (d) Bei der Aufsummation heben sich Beiträge benachbarter innerer Randkurven auf, da diese zweimal durchlaufen werden, und zwar entsprechend der Orientierung in gegensätzlicher Richtung, siehe Abb.



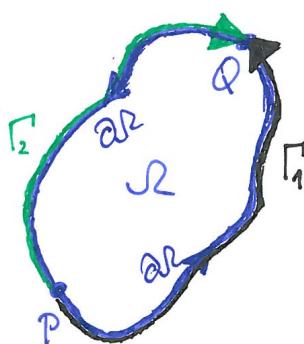
- (e) *Anmerkung:* (1.8) gilt auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete (Beispiel: Kreisring)



zur Integration von $\int \int F(x,y) dA$:

links: $\int \int F(x,y) dA = \int_0^b \int_0^{a[1-y/b]} F(x,y) dx dy$

rechts: $\int \int F(x,y) dA = \int_0^a \int_0^{b[1-x/a]} F(x,y) dy dx$



Wegunabhängigkeit von

$$\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} :$$

Wegen rot $\vec{F} = 0$ ist:

$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Somit:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

2. Wegen $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ ist nach dem Stokeschen Satz

$$\int_{\vec{r}_P}^{\vec{r}_Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda_P}^{\lambda_Q} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda$$

unabhängig von der Wahl der Verbindungskurve $\vec{r}(\lambda) = \sum_{i=1}^3 x^i(\lambda) \vec{b}_i$ (innerhalb G gelegen) zwischen den Punkten P und Q (mit Ortsvektoren $\vec{r}_P = \vec{r}(\lambda_P)$ und $\vec{r}_Q = \vec{r}(\lambda_Q)$), siehe Abb.

3. Definieren *Potential* U :

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit beliebig wählbarem, aber festem Aufpunkt \vec{r}_0 . Dann gilt (benutze Mittelwertsatz der Integralrechnung):

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(\vec{r}) = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+h\vec{b}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F^i(\vec{r} + \lambda \vec{b}_i) d\lambda = - F^i(\vec{r})$$

4. *Zusammenfassung*:

Falls $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ innerhalb G gilt, so existiert ein (*skalares*) Potential U mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\operatorname{grad} U = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x^i} \vec{b}_i,$$

und es gilt der Energieerhaltungssatz (1.7), weil dann:

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x^i} \dot{x}^i = - \frac{d}{dt} U[\vec{r}(t)]$$

Wir nennen dann die Kraft *konservativ*.

5. *Anmerkung*: Falls $\vec{F} \perp \dot{\vec{r}}$, so ist $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ und somit $\frac{d}{dt} T = 0$, $T = \text{const}$. Beispiel: magnetischer Anteil der Lorentzkraft in der E-Dynamik, $q\vec{v} \times \vec{B}$.

- Oft ist Gesamtkraft eine Summe von *konservativen* Kräften (die ein Potential aufweisen) und dissipativen Kräften: kein Potential (Beispiel Reibungskraft).

- Wir schreiben:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{Kons}} + \vec{F}_{\text{Diss}}$$

und erhalten:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \vec{F}_{\text{Diss}} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (1.9)$$

- Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie U nennen wir kurz Energie. (1.9) ist der Energiesatz.
- Energie ist hier immer mechanische Energie. Umwandlungen in andere Energieformen entsprechen dissipativen Kräften, die zur Verringerung der mechanischen Energie E führen.
- Arbeit und Leistung:

1. Bei Bewegung zwischen den Punkten P (Koordinaten $x_P^i = x^i(t_P)$) und Q (Koordinaten $x_Q^i = x^i(t_Q)$) leistet die Kraft \vec{F} am Massenpunkt die Arbeit:

$$A = \int_{t_P}^{t_Q} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} dt,$$

also: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

2. Bei konservativen Kräften ist

$$A = U(x_Q^i) - U(x_P^i)$$

und damit allein durch die Punkte P und Q festgelegt (also nicht durch die Bahnkurve $x^i(t)$.)

3. Leistung:

$$N = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

ist „Arbeit pro Zeit“.

4. Energiesatz (1.9) sagt also, dass die Änderung der mechanischen Energie durch die Leistung der dissipativen Kräfte bewirkt wird.

1.4.5 Erhaltungssätze und Integration der Bewegungsgleichungen

- Erhaltungssätze sind „erste Integrale der Bewegung“ (Differentialgleichungen erster Ordnung)
- Drehimpuls: $m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} = \text{const.}$: 3 Gleichungen
- Energie: $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r}) = E = \text{const.}$: 1 Gleichung

Falls beide Erhaltungssätze gelten:

1. \vec{F} ist ein Zentralkraftfeld, $\vec{F} = \vec{r}f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
2. \vec{F} ist nur von \vec{r} abhängig (wegen Existenz des Potentials), also: $f = f(\vec{r})$
3. $f = f(|\vec{r}|) = f(r)$, weil (Übung):

$$0 = \text{rot } \vec{F} = \text{rot } (f\vec{r}) = f \text{rot } (\vec{r}) + \text{grad } f \times \vec{r} = \text{grad } f \times \vec{r}$$

Hinweis: Wertet man $\text{grad } f \times \vec{r} = 0$ in Kugelkoordinaten aus (Übung), so zeigt sich, dass $\partial f / \partial \vartheta = 0 = \partial f / \partial \varphi$ gilt.

4. Konsequenz: r -abhängiges Potential U :

Wir beschreiben eine beliebige Kurve in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) parametrisch durch $(r(\lambda), \vartheta(\lambda), \varphi(\lambda))$ und erhalten entlang dieser Kurve:

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = r \vec{b}_r \cdot \left(\frac{dr}{d\lambda} \vec{b}_r + \frac{d\vartheta}{d\lambda} \vec{b}_\vartheta + \frac{d\varphi}{d\lambda} \vec{b}_\varphi \right) d\lambda = r \frac{dr}{d\lambda} d\lambda = r dr$$

Es folgt also:

$$U(r) = - \int f(r) \vec{r} \cdot d\vec{r} = - \int f(r) r dr$$

Potential U ist bis auf eine Integrationskonstante U_0 eindeutig bestimmt.

5. Wählen nun die (x, y) -Ebene als Bahnebene (siehe Kapitel 1.4.3) und erhalten in Zylinderkoordinaten:

$$m\varrho^2\dot{\varphi} = L, \quad \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2) + U(\varrho) = E, \quad z \equiv 0,$$

weil mit $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = 0$:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2)$$

Anmerkung: In der (x, y) -Ebene ist $r = \varrho$, $U(r) = U(\varrho)$.

6. Beide Erhaltungssätze ergeben dann:

$$\frac{m}{2}\dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = E$$

mit derselben mathematischen Struktur des Energiesatzes der eindimensionalen Bewegung (siehe Kapitel 1.3.5).

7. Rückführung auf Quadratur durch Trennung der Variablen:

$$t = \text{sign}(\dot{\varrho}_0) \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\tilde{\varrho}}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(\tilde{\varrho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\varrho}^2} \right]}} \quad (1.10)$$

8. Berechnung von φ :

Wegen $\dot{\varphi} = \frac{L}{m\varrho^2}$ folgt:

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varrho}} = \frac{L}{m\varrho^2} \cdot \frac{\text{sign}(\dot{\varrho}_0)}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(\varrho) - \frac{L^2}{2m\varrho^2} \right]}},$$

und somit:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\text{sign}(\dot{\varrho}_0)L d\tilde{\varrho}}{\tilde{\varrho}^2 \sqrt{2m \left[E - U(\tilde{\varrho}) - \frac{L^2}{2m\tilde{\varrho}^2} \right]}} \quad (1.11)$$

9. *Diskussion:*

- (a) Mit (1.10) und (1.11) haben wir die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen in der Form $t = t(\varrho)$ und $\varphi = \varphi(\varrho)$ gegeben.
- (b) Daraus ermittelbar: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (analytisches oder numerisches Umstellen liefert $\varrho(t)$)
- (c) „nichttriviale“ Integrationskonstanten E und L ,

$$E = \frac{m}{2}\dot{\varrho}_0^2 + \frac{L^2}{2m\varrho_0^2} + U(\varrho_0), \quad L = m\varrho_0^2\dot{\varphi}_0,$$

sowie ϱ_0 (zur Vervollständigung muss noch $\text{sign}(\dot{\varrho}_0)$ vorgegeben werden).

- (d) weitere Integrationskonstante φ_0 sowie Lage der Bahnebene (2 Konstanten) lassen sich durch Koordinatentransformation eliminieren

1.5 Die Planetenbewegung

- Potential $U \sim 1/r$ ist wichtigstes Zentralkraftfeld
- Bestimmt Himmelsmechanik; ist Vorstufe für das quantenmechanische Atommodell

1.5.1 Ableitung des Kraftgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen

- Die Keplerschen Gesetze lauten:
 1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
 2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener „Fahrstrahl“ überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
 3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen (Kuben) der großen Bahnhalbachsen.
- Übersetzung in die Sprache der Mechanik:

1. Erstes Gesetz und zweites Gesetz:
 - (a) Bewegung in einer Bahnebene
 - (b) Gültigkeit des Drehimpulserhaltungssatzes bezüglich eines IS, dessen Koordinatenursprung in der Sonne liegt.
2. Wir wählen die (x, y) -Ebene als die Bahnebene.
3. Drehimpuls hat nur eine z -Komponente $L^z = L = m\varrho^2\dot{\varphi}$; diese ist zeitlich konstant.
4. Kraft ist Zentralkraft, $\vec{F} = F^r \vec{b}_r$; in der Bahnebene gilt:

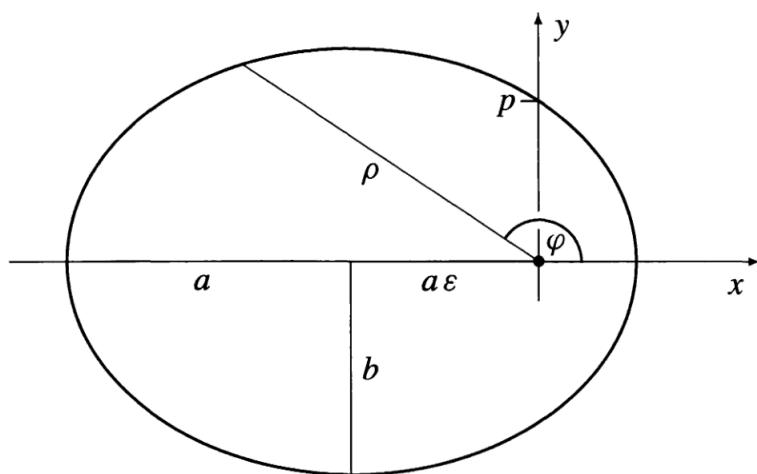
$$\vec{F} = F^\varrho \vec{b}_\varrho$$

Zweites Newtonsches Axiom:

$$F^\varrho = ma^\varrho = m(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)$$

5. Ellipsengleichung (siehe Abb.):

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad p = \frac{b^2}{a}; \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$



6. Verwenden nun $L = m\varrho^2\dot{\varphi}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\dot{\varrho} &= \frac{p \varepsilon \dot{\varphi} \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{\varrho^2 \varepsilon \dot{\varphi} \sin \varphi}{p} = \frac{\varepsilon L}{mp} \sin \varphi, \\ \ddot{\varrho} &= \frac{\varepsilon L}{mp} \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{\varepsilon L^2}{p m^2 \varrho^2} \cos \varphi, \\ \varrho \dot{\varphi}^2 &= \frac{L^2}{m^2 \varrho^3} \\ \Rightarrow F^\varrho &= m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) = \frac{L^2}{m \varrho^2} \left(\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1}{\varrho} \right) \\ &= \frac{L^2}{m \varrho^2} \left(\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \right) = -\frac{L^2}{m p \varrho^2},\end{aligned}$$

Damit:

$$\vec{F} = -\frac{L^2}{m p r^2} \vec{b}_r = -\frac{L^2}{m p r^3} \vec{r}, \quad f(r) = -\frac{L^2}{m p r^3} \quad (1.12)$$

7. Im Kraftgesetz sind noch Bahnpараметer L und p enthalten; Eliminierung mittels drittem Keplerschen Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \quad \text{mit } T: \text{Umlaufzeit}$$

Der Flächensatz lautete (siehe Kapitel 1.4.3):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\varrho^2 \dot{\varphi}}{2} = \frac{L}{2m} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad A(t) = \frac{L}{2m} t + \text{const.}$$

Für die während eines gesamten Umlaufs überstrichene Fläche gilt dann:

$$\pi ab = A(T) - A(0) = \frac{L}{2m} T,$$

und damit folgt:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m^2 \pi^2 a^2 b^2}{L^2 a^3} = \frac{4m^2 \pi^2 b^2}{L^2 a} = \frac{4m^2 \pi^2 p}{L^2} = \text{const.},$$

also:

$$\frac{L^2}{p m^2} = \text{const.} =: f \quad \text{universelle Konstante im Sonnensystem}$$

Es ist somit:

$$\vec{F} = F^r \vec{b}_r = -\frac{fm}{r^2} \vec{b}_r = -\frac{fm}{r^3} \vec{r}$$

mit dem Potential:

$$U(r) = - \int \left(-\frac{fm}{r^2} \right) dr = -\frac{fm}{r}$$

Anmerkung: Hier haben wir die freie Integrationskonstante U_0 so gewählt, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$.

8. Resultat:

Die Keplerschen Gesetze sagen aus, dass sich die Planeten in unserem Sonnensystem in einem Zentralkräftefeld mit dem Potential

$$U(r) = -\frac{fm}{r}$$

bewegen.

9. Ermittelung der Konstanten f :

(a) Schlussfolgerung aus Keplerschen Gesetzen:

Die Gravitationskraft \vec{F}_{12} , ausgeübt vom Massenpunkt 2 (Masse m_2) auf den Massenpunkt 1 (Masse m_1), lautet:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{f_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Analog:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{f_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

(b) Nach dem dritten Newtonschen Axiom ist

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

(c) Daraus folgt:

$$f_2 m_1 = f_1 m_2, \quad \text{also:} \quad \frac{f_n}{m_n} = \text{const.} =: \gamma$$

γ ist die *Newton'sche Gravitationskonstante*

$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

(d) Im Sonnensystem:

$$f = M\gamma, \quad M : \text{Sonnenmasse}$$

(e) Für das Gravitationsgesetz folgt:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

1.5.2 Ableitung der Planetenbewegung aus dem Gravitationsgesetz

- Ausgangspunkt:

$$\frac{m}{2} \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = E \quad (1.13)$$

- Möglicher Weg in 1.4.5 dargestellt (Übungsserie)
- Hier: Alternativer Weg, einfacher für $U(\varrho) \sim 1/\varrho$
- Neue Variable s ($' \equiv \frac{d}{d\varphi}$)

$$s := \frac{1}{\varrho} \Rightarrow \dot{\varrho} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{s} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{s'}{s^2} \cdot \frac{L}{m\varrho^2} = -\frac{L}{m}s'$$

- Wir schreiben $V(s) = U(\varrho) = U(1/s)$. Aus (1.13) wird dann:

$$\frac{L^2}{2m} (s'^2 + s^2) + V(s) = E$$

- Differenzieren nach φ :

$$s'' + s = -\frac{m}{L^2} \frac{dV}{ds}$$

- Für das Gravitationsfeld, $V(s) = -\gamma mMs$, folgt:

$$s'' + s = \frac{\gamma m^2 M}{L^2}$$

mit der Lösung:

$$s = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \frac{\gamma m^2 M}{L^2}$$

- Festlegung der Integrationskonstanten durch Forderung:
 $\varphi = 0$ soll sonnennächsten Punkt der Bahn beschreiben, s wird dort maximal:

$$\frac{ds}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad \frac{d^2s}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=0} < 0 \quad \Rightarrow \quad -B < 0$$

- Damit:

$$s = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi), \quad B = \frac{\varepsilon}{p} > 0, \quad p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$$

- Parameter ε kann beliebige positive Werte annehmen:

1. $0 < \varepsilon < 1$: Ellipsen mit Halbachsen $a = p/(1 - \varepsilon^2)$, $b = p/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$; Entartung (Grenzfall): $\varepsilon = 0$: Kreisbahn (entartete Ellipse)
2. $\varepsilon = 1$: Parabeln
3. $\varepsilon > 1$: Hyperbeln

- Bestimmung der Ellipsenbahnpараметer p und ε aus L und E :

1. Es ist:

$$L^2 = \gamma m^2 M p = \gamma m^2 M \frac{b^2}{a}$$

2. Betrachten Energiesatz am sonnennächsten Punkt:

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varrho} = 0, \quad \varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon),$$

$$E = \frac{L^2}{2m\varrho^2} - \frac{\gamma m M}{\varrho} = \gamma m M \left(\frac{p}{2\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \right) = \gamma m M \frac{\varepsilon - 1}{2\varrho},$$

3. Damit folgt:

$$E = -\frac{\gamma m M}{2a}, \quad \frac{L^2}{E} = -2mb^2$$

Die Energie bestimmt eindeutig die große Halbachse a ; der Quotient L^2/E die kleine Halbachse b .

- Kennzeichnung einer Hyperbelbahn durch (siehe Abb.)

1. Abstand d vom Brennpunkt zur Asymptoten
 2. Ablenkungswinkel ϑ
- Bestimmung von d und ϑ aus L und E :

1. $\varrho \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow \varphi_\infty$, Hyperbelgleichung $\Rightarrow \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$
Zusammenhang mit ϑ (siehe Abb.):

$$\pi - \vartheta = 2(\pi - \varphi_\infty), \quad \frac{\vartheta}{2} = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\varepsilon}$$

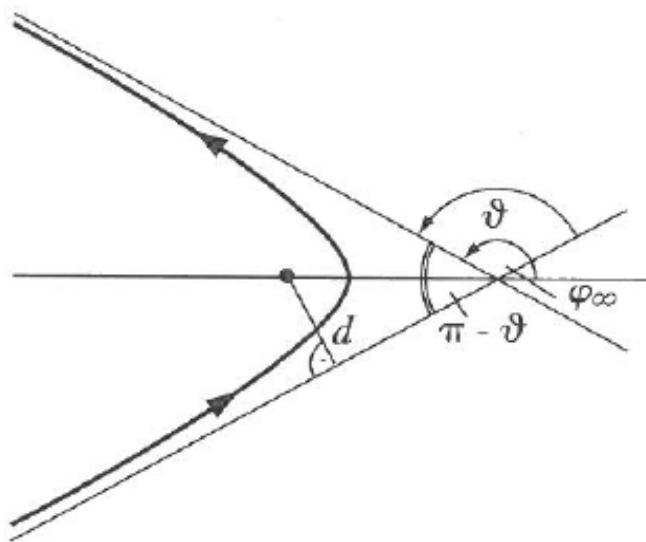


Abbildung aus Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik

2. Energiesatz am sonnennächsten Punkt:

$$E = \gamma m M \frac{\varepsilon - 1}{2\varrho}, \quad \varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m M \frac{\varepsilon^2 - 1}{2p}$$

Nun:

$$p = \frac{L^2}{\gamma M m^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 - 1 = \frac{2 E L^2}{\gamma^2 M^2 m^3} = \cot^2 \frac{\vartheta}{2}$$

3. Für kräftefreien Massenpunkt mit Geschwindigkeit $\vec{v}_\infty = \vec{v}(\varrho \rightarrow \infty)$ entlang der Asymptote gilt:

$$L_\infty = m |\vec{r} \times \vec{v}_\infty| = m d v_\infty, \quad v_\infty = |\vec{v}_\infty|$$

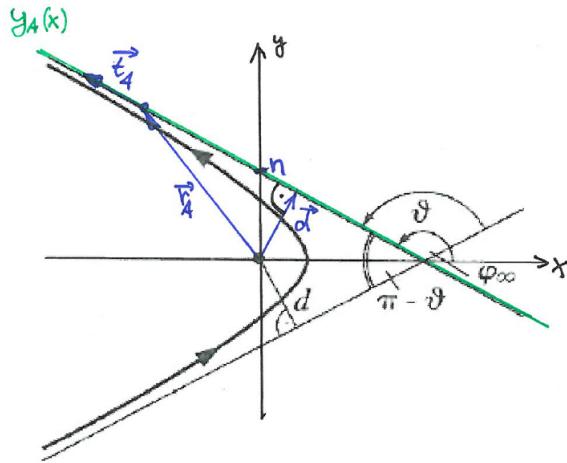
Im Unendlichen strebt Hyperbel gegen Asymptote; daher gilt:

$$L = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} m|\vec{r} \times \vec{v}| = L_\infty = mdv_\infty$$

Energiesatz im Unendlichen:

$$E = \frac{m}{2}v_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

4. Alternativer Weg zur Berechnung von d (siehe Abbildung):



Wir berechnen d gemäß

$$d = |\vec{r}_A \times \vec{t}_A|,$$

wobei \vec{r}_A den Ortsvektor der oberen Asymptote und \vec{t}_A den auf Eins normierten Tangentialvektor an diese Asymptote darstellt.

Aus der Abb. folgt:

$$d = |\vec{r}_A \times \vec{t}_A| = \left| (n \vec{b}_y + |\vec{r}_A - n \vec{b}_y| \vec{t}_A) \times \vec{t}_A \right| = n |\vec{b}_y \times \vec{t}_A|$$

(a) Berechnung von \vec{t}_A :

Geradengleichung der Asymptoten:

$$y_A(x) = x \tan \varphi_\infty + n \quad \Rightarrow \quad \vec{t}_A = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + [y'_A(x)]^2}} \left(\vec{b}_x + y'_A(x) \vec{b}_y \right)$$

Es folgt hier (siehe Abb.): $\vec{t}_A = \vec{b}_x \cos \varphi_\infty + \vec{b}_y \sin \varphi_\infty$.

(b) Berechnung von n :

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_\infty} (y - x \tan \varphi_\infty), & x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_\infty} \frac{p \sin \varphi - p \cos \varphi \tan \varphi_\infty}{1 + \varepsilon \cos \varphi} & (\text{weil } \varrho = p/(1 + \varepsilon \cos \varphi)) \\
 &= -\frac{p}{\varepsilon} (\cot \varphi_\infty + \tan \varphi_\infty) & (\text{nach der Regel von L'Hospital}) \\
 &= \frac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} & (\text{weil } \cos \varphi_\infty = -1/\varepsilon)
 \end{aligned}$$

(c) Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 d &= n |\vec{b}_y \times \vec{t}_A| = \frac{p\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left| \vec{b}_y \times (\vec{b}_x \cos \varphi_\infty + \vec{b}_y \sin \varphi_\infty) \right| \\
 &= \frac{p\varepsilon |\cos \varphi_\infty|}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

(d) Mit $p = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$ und $\varepsilon^2 - 1 = \frac{2E L^2}{\gamma^2 M^2 m^3}$ ergibt sich:

$$d = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$$

1.5.3 Diskussion der Bewegungstypen im $1/r$ -Potential

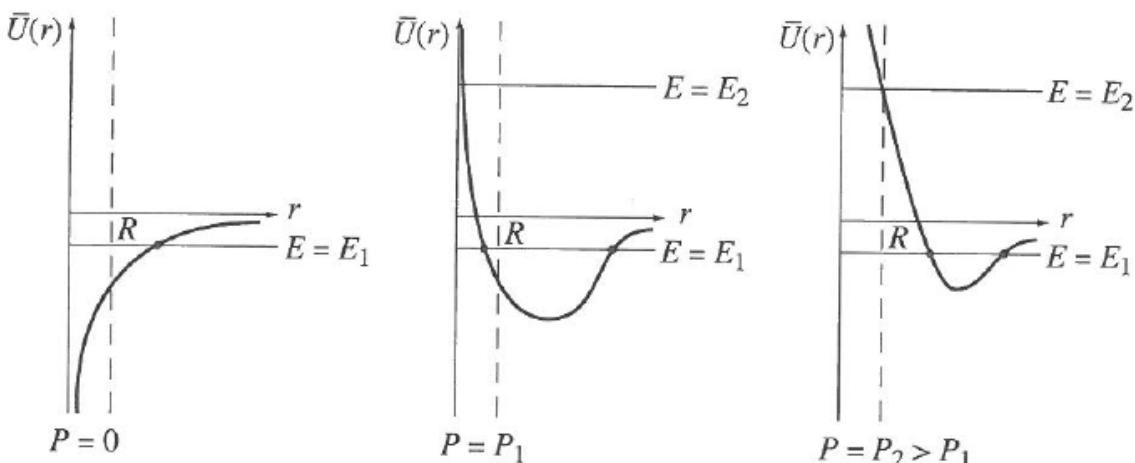


Abbildung aus Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik
(ersetze $P \rightarrow L$ und $r \rightarrow \varrho$)

- Energiesatz

$$E = \frac{m}{2} \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2m\varrho^2} + U(\varrho) = \frac{m}{2} \dot{\varrho}^2 + \bar{U}(\varrho)$$

\Rightarrow qualitative Diskussion wie in Kapitel 1.3.5 (siehe Abb.)

- Bewegung nur in solchen Bereichen möglich, in denen das *effektive* Potential \bar{U} kleiner ist als die gegebene Energie E .
- Beitrag des Drehimpulses zum Potential \bar{U} entspricht einer abstoßenden Kraft $\sim \varrho^{-2}$.
- Für negative Energiewerte ($E = E_1$) ergibt sich eine gebundene Bewegung.
- 1. kosmische Geschwindigkeit v_1 : Mindestgeschwindigkeit für einen Satelliten im Erdorbit

v_1 gegeben durch:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R = m \frac{v_1^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} = \sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

R : Erdradius, M : Erdmasse

- 2. kosmische Geschwindigkeit v_2 : Mindestgeschwindigkeit für Flucht aus Erdanziehung

v_2 gegeben durch:

$$0 = E = \frac{m}{2} v_2^2 - \gamma \frac{mM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

- In der Abb. ist L_1 zu klein für Erdorbit: Satellit stürzt ab. L_2 ist hinreichend groß.

1.6 Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

1.6.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Betrachten Koordinatentransformation eines IS \mathcal{S} (Koordinaten x^i) in ein rotierendes und beschleunigtes Bezugssystem Σ' (Koordinaten $x^{i'}$):

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t') : \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{O}(t) \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix} \right], \quad t' = t$$

mit beliebig zeitabhängiger Verschiebung

$$\vec{r}_0(t) = x_0(t)\vec{b}_x + y_0(t)\vec{b}_y + z_0(t)\vec{b}_z = \sum_{i=1}^3 x_0^i(t)\vec{b}_i$$

und zeitabhängiger orthogonaler Matrix

$$\hat{O}(t) = (\underline{n}_1(t) \ \underline{n}_2(t) \ \underline{n}_3(t))$$

mit

$$\underline{n}_i(t) \cdot \underline{n}_j(t) = \delta_{ij}, \quad \text{also} \quad \hat{O}\hat{O}^T = \hat{O}^T\hat{O} = \hat{I} \quad \text{für alle } t.$$

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} x^{i'} &= \sum_{i=1}^3 [\hat{O}]_i^{i'} (x^i - x_0^i), \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = [\hat{O}]_i^{i'}, \\ x^i &= \sum_{i'=1}^3 [\hat{O}^T]_{i'}^i x^{i'} + x_0^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = [\hat{O}^T]_{i'}^i, \end{aligned}$$

$[\hat{O}]_i^{i'}$: Eintrag in der i' -ten Zeile und i -ten Spalte der Matrix \hat{O}

1. Berechnung der Zeitableitungen $\dot{\vec{b}}_{i'}$ der mitgeführten Koordinatenba-

sisvektoren im System Σ' :

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{b}}_{i'} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} [\hat{O}^T]_{i'}^i \vec{b}_i \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} [\hat{O}^T]_{i'}^i \left(\sum_{j'=1}^3 [\hat{O}]_i^{j'} \vec{b}_{j'} \right) \\
 &= \sum_{j'=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 [\hat{O}]_i^{j'} \frac{d}{dt} [\hat{O}^T]_{i'}^i \right) \vec{b}_{j'} \\
 \Rightarrow \quad \dot{\vec{b}}_{i'} &= \sum_{j'=1}^3 [\hat{O}]_{i'}^{j'} \frac{d[\hat{O}^T]}{dt} \vec{b}_{j'}
 \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\hat{O}\hat{O}^T = \hat{I} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{O}}{dt}\hat{O}^T + \hat{O}\frac{d\hat{O}^T}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{O}\frac{d\hat{O}^T}{dt} = -\frac{d\hat{O}}{dt}\hat{O}^T = -\left(\hat{O}\frac{d\hat{O}^T}{dt}\right)^T$$

Mit

$$\hat{A} := \hat{O}\frac{d\hat{O}^T}{dt}$$

ist demnach eine *antisymmetrische* Matrix gegeben, $\hat{A} = -\hat{A}^T$.

Wir schreiben:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{3'} & \omega^{2'} \\ \omega^{3'} & 0 & -\omega^{1'} \\ -\omega^{2'} & \omega^{1'} & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{b}}_{i'} = \sum_{j'=1}^3 [\hat{A}]_{i'}^{j'} \vec{b}_{j'}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{b}}_{1'} &= \omega^{3'} \vec{b}_{2'} - \omega^{2'} \vec{b}_{3'} \\
 \dot{\vec{b}}_{2'} &= \omega^{1'} \vec{b}_{3'} - \omega^{3'} \vec{b}_{1'} \\
 \dot{\vec{b}}_{3'} &= \omega^{2'} \vec{b}_{1'} - \omega^{1'} \vec{b}_{2'},
 \end{aligned}$$

also:

$$\dot{\vec{b}}_{i'} = \sum_{j', k'=1}^3 \varepsilon_{j'i'}^{k'} \omega^{j'} \vec{b}_{k'}$$

Definieren nun den Vektor der *Winkelgeschwindigkeit*:

$$\vec{\omega} = \sum_{j'=1}^3 \omega^{j'} \vec{b}_{j'}$$

und erhalten:

$$\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'} = \sum_{j'=1}^3 \omega^{j'} (\vec{b}_{j'} \times \vec{b}_{i'}) = \sum_{j'=1}^3 \omega^{j'} \sum_{k'=1}^3 \varepsilon_{j'i'}^{k'} \vec{b}_{k'},$$

also:

$$\dot{\vec{b}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{b}_{i'}$$

2. Für die zweite Ableitung folgt:

$$\ddot{\vec{b}}_{i'} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{b}_{i'} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{b}}_{i'} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{b}_{i'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'})$$

3. Definieren Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens bezüglich Σ' :

$$\vec{r}' = \sum_{i'=1}^3 x^{i'} \vec{b}_{i'} = \vec{r} - \vec{r}_0, \quad \vec{v}' = \sum_{i'=1}^3 \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}, \quad \vec{a}' = \sum_{i'=1}^3 \ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}$$

4. Zusammenhang mit Größen in Σ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_0 + \sum_{i'=1}^3 x^{i'} \vec{b}_{i'} \right) = \dot{\vec{r}}_0 + \sum_{i'=1}^3 \left(\dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} + x^{i'} \dot{\vec{b}}_{i'} \right) \\ &= \dot{\vec{r}}_0 + \vec{v}' + \sum_{i'=1}^3 x^{i'} (\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'}) \\ \Rightarrow \vec{v} &= \vec{v}' + \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\vec{r}_0 + \sum_{i'=1}^3 x^{i'} \vec{b}_{i'} \right) = \ddot{\vec{r}}_0 + \sum_{i'=1}^3 \left(\ddot{x}^{i'} \vec{b}_{i'} + 2\dot{x}^{i'} \dot{\vec{b}}_{i'} + x^{i'} \ddot{\vec{b}}_{i'} \right) \\ &= \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{a}' + 2 \sum_{i'=1}^3 \dot{x}^{i'} (\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'}) + \sum_{i'=1}^3 x^{i'} \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{b}_{i'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b}_{i'}) \right] \\ \Rightarrow \vec{a} &= \vec{a}' + \ddot{\vec{r}}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \end{aligned} \tag{1.15}$$

Achtung:

Es ist also gemäß den obigen Definitionen:

$$\vec{v}' \neq \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_0, \quad \vec{a}' \neq \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0$$

5. Interpretation des Vektors $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit:

- (a) Betrachten ein in \mathcal{S} ruhendes Teilchen, $\vec{v} = 0$; dieses hat in Σ' die Geschwindigkeit $\vec{v}' = -\vec{\omega} \times \vec{r}'$ (Annahme: $\vec{r}_0 \equiv 0$).
- (b) Andererseits verläuft seine Bewegung bezüglich Σ' in einer Ebene senkrecht zur momentanen Rotationsachse, und in dieser auf einer momentanen Kreisbahn mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}'| = \omega \varrho$, wobei ϱ den Abstand des Teilchens zur momentanen Rotationsachse darstellt.
- (c) Die Rechte-Hand-Regel für Vektorprodukte zeigt nun, dass der Vektor $\vec{\omega}$ damit gerade in Richtung der Rotationsachse zeigt und den Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω aufweist.

1.6.2 Scheinkräfte

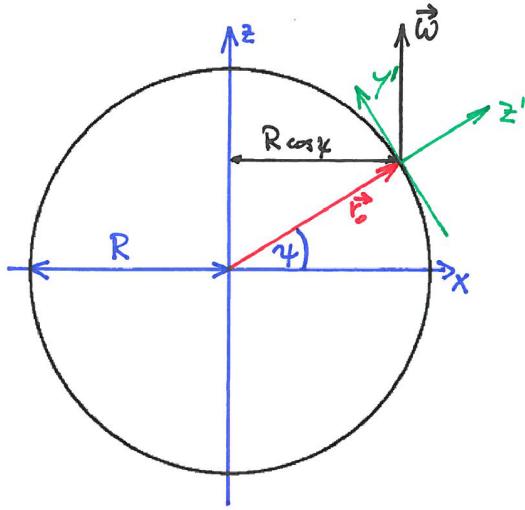
Bewegungsgleichung im System Σ' :

Wegen $m\vec{a} = \vec{F}$ folgt:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

- Der Term $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ wird *Zentrifugalkraft* genannt
- Der Term $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ wird *Corioliskraft* genannt (senkrecht zur Geschwindigkeit \vec{v}' im System Σ').
- Der Term $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$ wird gelegentlich *Eulerkraft* genannt (senkrecht zum Ortsvektor \vec{r}'). Sie tritt in ungleichmäßig rotierenden Bezugssystemen auf.
- Scheinkräfte verursachen die komplizierte Bewegung eines kräftefreien Massepunktes, von einem beliebig rotierenden Koordinatensystem Σ' aus gesehen.
- Der reine Koordinateneffekt führt dazu, dass Scheinkräfte allein auf Trägheit des Massepunktes zurückzuführen sind (daher auch die Bezeichnung „Trägheitskraft“).

1.6.3 Bewegung auf der rotierenden Erde



- Betrachtung der Bewegung auf der Erde von einem mitbewegten System Σ' aus gesehen.
- Legen Ursprung von Σ' auf die Erdoberfläche (geografische Breite ψ , Erdradius R).
- Die z' -Achse zeige vom Erdmittelpunkt weg, die y' -Achse nach Norden und die x' -Achse nach Osten.
- Gemäß Abb. ist:

$$\begin{aligned}x_0 &= \varrho_0 \cos \varphi_0(t) = R \cos \psi \cos \omega t, \\y_0 &= \varrho_0 \sin \varphi_0(t) = R \cos \psi \sin \omega t, \\z_0 &= R \sin \psi = \text{const.}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = -\omega^2 R \cos \psi (\cos \omega t \vec{b}_x + \sin \omega t \vec{b}_y)$$

- Berechnung der Transformationsmatrix \hat{O} :

1. Kugelkoordinaten: $(r, \vartheta, \varphi) = (x^{1''}, x^{2''}, x^{3''})$, $b_{i''} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{i''}} \vec{b}_i$,

$$\begin{aligned}\vec{b}_r &= \sin \vartheta \cos \varphi \vec{b}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \vec{b}_y + \cos \vartheta \vec{b}_z, & \vec{e}_r &= \vec{b}_r \\ \vec{b}_\vartheta &= r \cos \vartheta \cos \varphi \vec{b}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \vec{b}_y - r \sin \vartheta \vec{b}_z, & \vec{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \vec{b}_\vartheta \\ \vec{b}_\varphi &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \vec{b}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \vec{b}_y, & \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{b}_\varphi\end{aligned}$$

2. Es ist zum Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned}\vec{b}_{z'} &= \vec{e}_r(r = R, \vartheta = \pi/2 - \psi, \varphi = \omega t) \\ &= \cos \psi \cos \omega t \vec{b}_x + \cos \psi \sin \omega t \vec{b}_y + \sin \psi \vec{b}_z, \\ \vec{b}_{y'} &= -\vec{e}_\vartheta(r = R, \vartheta = \pi/2 - \psi, \varphi = \omega t) \\ &= -\sin \psi \cos \omega t \vec{b}_x - \sin \psi \sin \omega t \vec{b}_y + \cos \psi \vec{b}_z, \\ \vec{b}_{x'} &= \vec{e}_\varphi(r = R, \vartheta = \pi/2 - \psi, \varphi = \omega t) \\ &= -\sin \omega t \vec{b}_x + \cos \omega t \vec{b}_y\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \omega^2 R \cos \psi (\sin \psi \vec{b}_{y'} - \cos \psi \vec{b}_{z'})$$

3. Wegen $\vec{b}_{i'} = \sum_{i=1}^3 [\hat{O}^T]_{i'}^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 [\hat{O}]_i^{i'} \vec{b}_i$ folgt:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\sin \psi \cos \omega t & -\sin \psi \sin \omega t & \cos \psi \\ \cos \psi \cos \omega t & \cos \psi \sin \omega t & \sin \psi \end{pmatrix}$$

- Berechnung von $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{O} \frac{d\hat{O}^T}{dt} = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\sin \psi \cos \omega t & -\sin \psi \sin \omega t & \cos \psi \\ \cos \psi \cos \omega t & \cos \psi \sin \omega t & \sin \psi \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} -\cos \omega t & \sin \psi \sin \omega t & -\cos \psi \sin \omega t \\ -\sin \omega t & -\sin \psi \cos \omega t & \cos \psi \cos \omega t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \sin \psi & \omega \cos \psi \\ \omega \sin \psi & 0 & 0 \\ -\omega \cos \psi & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

also:

$$\vec{\omega} = \omega \sin \psi \vec{b}_{z'} + \omega \cos \psi \vec{b}_{y'} = \omega \vec{b}_z$$

Für die Erde gilt: $\omega \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$

- Bewegungsgleichungen in Σ' unter Vernachlässigung der Zentrifugalkraft $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (ω^2 sowie der Abstand von der Erdoberfläche sind klein):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= \bar{F}^{x'} & -2m\omega(\dot{z}' \cos \psi - \dot{y}' \sin \psi), \\ m\ddot{y}' &= \bar{F}^{y'} - m\omega^2 R \cos \psi \sin \psi & -2m\omega \dot{x}' \sin \psi, \\ m\ddot{z}' &= \bar{F}^{z'} + m\omega^2 R \cos^2 \psi & +2m\omega \dot{x}' \cos \psi & -mg, \end{aligned}$$

Hier haben wir die Kraft als $\vec{F} = \bar{F}^{x'} \vec{b}_{x'} + \bar{F}^{y'} \vec{b}_{y'} + (\bar{F}^{z'} - mg) \vec{b}_{z'}$ geschrieben.

- Erde ist abgeplattet; Grund ist die von $\ddot{\vec{r}}_0$ herrührende Trägheitskraft.
- Erdoberfläche stellt sich so ein, dass $(\vec{g} - \ddot{\vec{r}}_0)$ senkrecht zu ihr steht; hier ist \vec{g} der Vektor der Erdbeschleunigung.
- Legen nun die z' -Richtung senkrecht zur realen Erdoberfläche. Dann hat $(m\vec{g} - m\ddot{\vec{r}}_0)$ nur die z' -Komponente $m\bar{g}(\psi)$ (breitenabhängige Schwerkraftbeschleunigung $\bar{g} = \bar{g}(\psi)$ wegen des Anteils mit $\ddot{\vec{r}}_0$)
- Mit dieser Näherung erhalten wir:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= \bar{F}^{x'} & -2m\omega(\dot{z}' \cos \psi - \dot{y}' \sin \psi), \\ m\ddot{y}' &= \bar{F}^{y'} & -2m\omega \dot{x}' \sin \psi, \\ m\ddot{z}' &= \bar{F}^{z'} & +2m\omega \dot{x}' \cos \psi & -m\bar{g}, \end{aligned}$$

- *Diskussion:*

1. Ruhender Körper wird aus der Höhe H frei fallen gelassen, $\dot{x}'(0) = 0 = \dot{y}'(0)$. Für hinreichend kleine \dot{x}', \dot{y}' gilt dann:

$$m\ddot{x}' = -2m\omega \dot{z}' \cos \psi, \quad m\ddot{z}' = -m\bar{g}, \quad \dot{y}' = 0$$

Lösung dieser Gleichung mit den Anfangsbedingungen ($t = 0$): $x' = y' = 0, z' = H, \dot{x}' = \dot{y}'(0) = \dot{z}'(0) = 0$ lautet:

$$z' = H - \frac{g}{2}t^2, \quad x' = \frac{\omega \bar{g}}{3}t^3 \cos \psi, \quad y' = 0$$

Wegen $\cos \psi > 0$, verursacht die Erdrotation eine Ostabweichung proportional zu t^3 bzw. (am Erdboden gemessen) $H^{3/2}$

2. Bei horizontaler Bewegung (Flüsse, Luftströmungen, Eisenbahn) gilt $z' = 0$; wir haben dann:

$$m\ddot{x}' = \bar{F}^{x'} + 2m\omega\dot{y}' \sin \psi, \quad m\ddot{y}' = \bar{F}^{y'} - 2m\omega\dot{x}' \sin \psi,$$

also:

$$m\vec{a}' = (\bar{F}^{x'} \vec{b}_{x'} + \bar{F}^{y'} \vec{b}_{y'}) - 2m\vec{\omega}_h \times \vec{v}', \quad \omega_h = \omega \sin \psi \vec{b}_{z'}$$

- Breitenabhängige Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_h$.
- Rechtsablenkung auf der Nordhalbkugel ($\psi > 0$); Linksablenkung auf der Südhalbkugel ($\psi < 0$)

Kapitel 2

Systeme freier Massenpunkte

2.1 Bewegungsgleichungen

- Für jeden Massenpunkt (Masse m_n , Ortsvektor \vec{r}_n) eines Systems (bestehend aus N Massenpunkten) gilt die Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n, \quad n = 1, \dots, N$$

- \vec{F}_n beschreibt sowohl *innere* Kräfte der Massenpunkte untereinander sowie *äußere* Kräfte auf das System,

$$\vec{F}_n = \vec{F}_n^{(i)} + \vec{F}_n^{(a)} = \sum_{k=1, k \neq n}^N \vec{F}_{nk} + \vec{F}_n^{(a)}$$

Hierbei ist \vec{F}_{nm} die von Massenpunkt m auf Massenpunkt n wirkende Kraft (Annahme von „Zweikörperkräften“).

- Gemäß dem dritten Newtonschen Axiom gilt:

$$\vec{F}_{nk} = -\vec{F}_{kn}$$

2.2 Schwerpunktsatz

- Wir wollen den *Schwerpunkt* \vec{s} eines Systems definieren:

$$M = \sum_{n=1}^N m_n, \quad \vec{s} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n$$

- *Frage:* Was bedeutet die Summe von Vektoren aus unterschiedlichen Tangentialvektorräumen?
- *Antwort:*

1. Formal können wir einen gegebenen Vektor $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i$ gemäß

$$0 = \frac{d\vec{v}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \sum_{i=1}^3 v^i \vec{b}_i = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dv^i}{d\lambda} + \sum_{j,k=1}^3 \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{\lambda} v^k \right) \vec{b}_i = 0$$

entlang einer Kurve $x^i = x^i(\lambda)$ zu einem beliebigen Punkt transportieren („parallel verschieben“).

2. Paralleltransport ist unabhängig von gewählter Kurve.
 3. In IS'en \mathcal{S} wird \vec{v} einfach kopiert.
 4. Verschieben nun Vektoren aus den Tangentialräumen an den \vec{r}_n in denjenigen Tangentialraum, der am Schwerpunkt \vec{s} angeheftet ist (wir sammeln die Vektoren in diesem Punkt).
 5. Anschließend: Superposition aller Vektoren im Tangentialraum des Schwerpunktes
- Vorgehensweise ist sinnvoll für folgende Vektoren:

1. Ortsvektor \vec{s} , Geschwindigkeit $\dot{\vec{s}}$ und Beschleunigung $\ddot{\vec{s}}$ des Schwerpunktes:

$$\vec{s} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n, \quad \dot{\vec{s}} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n, \quad \ddot{\vec{s}} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}_n$$

2. Gesamtimpuls des Systems

$$\vec{p} = \sum_{n=1}^N \vec{p}_n = \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n = M \dot{\vec{s}}$$

3. Gesamtkraft auf das System:

$$\vec{F} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n^{(a)}$$

4. Gesamtdrehimpuls des Systems:

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n)$$

5. gesamtes äußeres Drehmoment:

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)}$$

- Die „Gesamtvektoren“ verstehen wir als Vektoren, die im Tangentialvektorraum des Schwerpunkts enthalten sind. Sie charakterisieren das System.
- Die Newtonschen Bewegungsgleichungen geben wichtige Aussagen über $\vec{s}, \vec{p}, \vec{L}$.
- Aber: Zur vollständigen Bestimmung der komplexen inneren Dynamik des System sind alle Gleichungen

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n, \quad n = 1, \dots, N$$

(und nicht nur deren Superposition) zu betrachten.

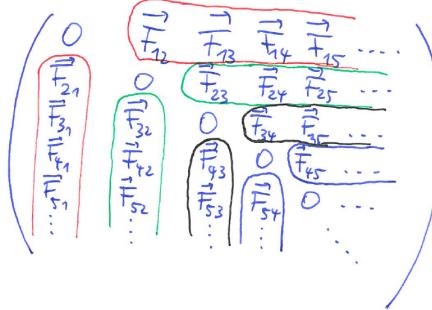
- *Anmerkung:* Obige Vorgehensweise ist *nicht* sinnvoll für (z.B.)

$$\sum_{n=1}^N \vec{r}_n, \quad \sum_{n=1}^N \dot{\vec{r}}_n, \quad \sum_{n=1}^N \ddot{\vec{r}}_n$$

- **Schwerpunktsatz:**

1. Betrachten die Summe

$$\sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1, m \neq n}^N \vec{F}_{nm} + \vec{F}$$



2. Bilden die Doppelsumme in der farblich gekennzeichneten Weise (siehe Abb.), d.h. erst Addition der Elemente in den roten Blöcken, dann der in den grünen, der in den schwarzen usf. Wegen $\vec{F}_{nm} = -\vec{F}_{mn}$ verschwindet die Doppelsumme.

3. Es folgt der *Schwerpunktsatz*:

$$M \ddot{\vec{s}} = \vec{F}$$

- Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt ist und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen.
- Oft nützlich: Verwendung eines Schwerpunktsystems, in dem $\vec{s} \equiv 0$ (kein IS, falls $\vec{F} \neq 0$).

2.3 Drehimpulssatz

- Bilden analog:

$$\sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

- Es folgt:

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)} + \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \left(\sum_{k=1, k \neq n}^N \vec{F}_{nk} \right)$$

- Bilden die Doppelsumme wieder in der farblich gekennzeichneten Weise mit $\vec{F}_{nk} = -\vec{F}_{kn}$ (siehe Abb.):

$$\sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \left(\sum_{k=1, k \neq n}^N \vec{F}_{nk} \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^N (\vec{r}_n - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{nk}$$

- Für Zweipunktkräfte \vec{F}_{nk} , die entlang der Verbindungsgeraden wirken (z.B. Gravitationskräfte), ist $(\vec{r}_n - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{nk} = 0$. Dann verschwindet wieder die Doppelsumme, und es folgt der *Drehimpulssatz*:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M} \quad \text{mit} \quad \vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n), \quad \vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)}$$

- *Anmerkung:* Der Drehimpulssatz ist eine generelle Erfahrungstatsache: Durch innere Kräfte kann der Drehimpuls nicht verändert werden. In der Kontinuumsmechanik wird der Drehimpulssatz durch die Forderung der Symmetrie des sog. Spannungstensors gewährleistet.
- In abgeschlossenen Systemen (keine äußeren Kräfte, $\vec{F}_n^{(a)} = 0$) gilt der *Drehimpulserhaltungssatz*:

$$\vec{L} = \text{const.}$$

- Drehimpulssatz im Schwerpunktsystem:

1. Ortskoordinaten \vec{r}'_n im Schwerpunktsystem:

$$\vec{r}_n = \vec{s} + \vec{r}'_n$$

2. Es gilt:

$$M\vec{s} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n = \sum_{n=1}^N m_n \vec{s} + \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}'_n \Rightarrow \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}'_n = 0$$

3. Dann folgt auch $\sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}'_n = 0$ und damit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L} &= \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times m_n \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{s} + \vec{r}'_n) \times (\ddot{\vec{s}} + \ddot{\vec{r}}'_n) \\ &= M \vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}'_n \times \ddot{\vec{r}}'_n, \\ \vec{M} &= \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)} = \sum_{n=1}^N (\vec{s} + \vec{r}'_n) \times \vec{F}_n^{(a)} = \vec{s} \times \vec{F} + \sum_{n=1}^N \vec{r}'_n \times \vec{F}_n^{(a)}\end{aligned}$$

4. Wegen $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$, $M \ddot{\vec{s}} = \vec{F}$ folgt schließlich:

$$\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}'_n \times \ddot{\vec{r}}'_n = \sum_{n=1}^N \vec{r}'_n \times \vec{F}_n^{(a)}$$

Der Drehimpulssatz gilt unverändert im Schwerpunktsystem.

2.4 Der Energiesatz

- Multiplikation der Bewegungsgleichung $m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n$ mit $\dot{\vec{r}}_n$ und Summation ergibt:

$$\sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Linke Seite ergibt Zeitableitung der gesamten kinetischen Energie T :

$$T = \sum_{n=1}^N \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{n=1}^N m_n \ddot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Rechte Seite ergibt ebenfalls Zeitableitung, falls es ein *Potential* $U = U(x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i)$ gibt mit:

$$\sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n = -\frac{dU}{dt} = -\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i$$

also:

$$F_n^i = -\frac{\partial U}{\partial x_n^i}, \quad \vec{F}_n = -\text{grad}_n U$$

- Notwendig für Existenz des Potentials ist:

$$\frac{\partial F_n^i}{\partial x_m^j} = \frac{\partial F_m^j}{\partial x_n^i} : \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial x_m^j \partial x_n^i} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^i \partial x_m^j}$$

- Teilen wie beim einzelnen Massenpunkt die Kräfte in konservative (besitzen ein Potential) und dissipative Kräfte $\vec{F}_{n\text{Diss}}$ ein.
- Es folgt der *Energiesatz*:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \sum_{n=1}^N \vec{F}_{n\text{Diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_n$$

- Der *Energieerhaltungssatz* folgt, falls $\vec{F}_{n\text{Diss}} = 0$:

$$T + U = E$$

- Aufteilung in innere und äußere Potentiale:

1. Äußeres Potential $U_n^{(a)}$ hängt nur von \vec{r}_n ab (nicht von den Koordinaten der anderen Massenpunkte.)
2. Kräfte \vec{F}_{nm} hängen nur von \vec{r}_n, \vec{r}_m ab; das Wechselwirkungspotential U_{nm} ist dem Massepunkte-Paar (n, m) zugeordnet, $m > n$.
3. Wegen $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm}$ folgt:

$$F_{mn}^i = -\frac{\partial U_{nm}}{\partial x_m^i} = -F_{nm}^i = \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_n^i}$$

Führen wir (für feste m, n) die Hilfsvariablen

$$\xi^i = x_n^i - x_m^i, \quad \eta^i = x_n^i + x_m^i$$

ein, so folgt:

$$0 = \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_m^i} + \frac{\partial U_{nm}}{\partial x_n^i} = 2 \frac{\partial U_{nm}}{\partial \eta^i}$$

U_{nm} ist damit eine reine Funktion von ξ^i , also:

$$U_{nm} = U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m).$$

4. Oft hängt U_{nm} nur von $r_{nm} \equiv |\vec{r}_n - \vec{r}_m|$ ab; dann gilt: $\vec{F}_{nm} \parallel (\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

5. Aufsummierung:

$$\begin{aligned} U = U(x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i) &= \sum_{\text{Paare } (n,m)} U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) + \sum_{n=1}^N U_n^{(a)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N U_{nm}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) + \sum_{n=1}^N U_n^{(a)} \end{aligned}$$

6. Einfaches Beispiel: Wechselwirkungspotential beim *Zweikörperproblem*,

$$U_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

2.5 Allgemeine Sätze und Integration der Bewegungsgleichungen

- Allgemeine Sätze geben uns 10 Konstanten der Bewegung: die Gesamtenergie E , die drei Komponenten des Gesamtdrehimpulses L^i und die 6 Orts- und Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes, s^i und \dot{s}^i .
- Aber: System wird durch $6N$ Integrationskonstanten bestimmt ($3N$ für Anfangslagen $x_n^i(0)$ und $3N$ für Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{x}_n^i(0)$).
- System ist damit i.A. nicht komplett durch die allgemeinen Sätze beschreibbar.
- Beispiel: Dreikörperproblem, siehe Zitat Stephani/Kluge: Theoretische Mechanik, S. 57:

Während sich für das Zweikörperproblem das Defizit von 2 Konstanten noch als überbrückbar erweist (es handelt sich um unwesentliche Integrationskonstanten), ist dies schon beim Dreikörperproblem der Himmelsmechanik nicht mehr der Fall: Wie mathematisch bewiesen wurde, ist es beim Dreikörperproblem unmöglich, die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen durch algebraische Funktionen auszudrücken. Ein geschlossener analytischer Ausdruck für die Lösung ist (auch bei Zulassung anderer Funktionen) nicht bekannt: Das Dreikörperproblem ist nicht integrierbar, vgl. Abschnitt 7.7 Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei hervorgehoben, daß eine Lösung mit vorgeschriebenen Anfangsbedingungen natürlich numerisch berechnet werden kann und daß exakte Lösungen für Spezialfälle des Dreikörperproblems bekannt sind, so z. B. für 3 Punkte gleicher Masse, die an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen, das um seinen Mittelpunkt rotiert.

2.6 Reduzierte Masse

- Im Falle $\vec{F} = 0$ (keine äußeren Kräfte) ist für zwei Massenpunkte:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

- Für den *Verbindungsvektor* $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ergibt sich:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12}, \quad \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

- \vec{r} bewegt sich also wie ein Teilchen der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

unter dem Einfluss der Kraft \vec{F}_{12} .

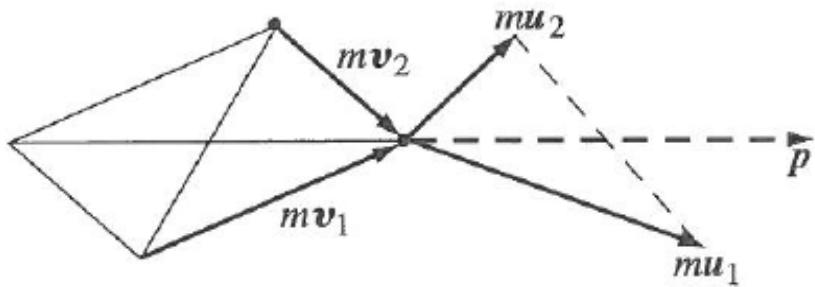
2.7 Elastischer Stoß zweier gleicher Massenpunkte

- Wenden Schwerpunktsatz (Impulssatz) und Energieerhaltungssatz an:

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 = \vec{p}$$

$$\frac{m}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m}{2}\vec{v}_2^2 = \frac{m}{2}\vec{u}_1^2 + \frac{m}{2}\vec{u}_2^2 = E$$

$\vec{v}_{1/2}, \vec{u}_{1/2}$: Geschwindigkeit der Massenpunkte vor bzw. nach dem Stoß;
 m : Masse der Massenpunkte.



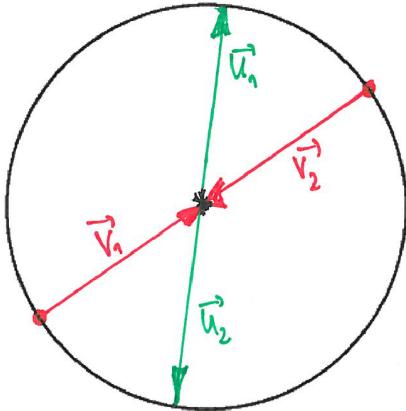
Elastischer Stoß im Nicht-Schwerpunktsystem.

- Im Schwerpunktsystem $\vec{s} = \dot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}} = 0$:

$$\vec{p} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\dot{\vec{s}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

- Aus Schwerpunkt- und Energieerhaltungssatz folgt dann:

$$\vec{u}_1 = -\vec{u}_2, \quad \vec{u}_1^2 = \vec{v}_1^2$$



Elastischer Stoß im Schwerpunktsystem.

- Beträge der Geschwindigkeitsvektoren ändern sich nicht, nur die Richtungen sind verdreht.

2.8 Zweikörperproblem der Himmelsmechanik

- Gravitationskraft zwischen zwei Himmelskörpern (Massen m_1, m_2), keine äußeren Kräfte.

- Wählen Schwerpunktsystem $\vec{s} = \dot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}} = 0$:

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$$

- Wechselwirkungspotential

$$U_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\text{grad}_1 U_{12} = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\text{grad}_2 U_{12} = \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (2.2)$$

- Einführung von *Relativkoordinaten*:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- Aus (2.1, 2.2) folgt dann:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -(m_1 + m_2) \gamma \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- Es folgt:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\gamma \mu (m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.3)$$

Gemäß Kapitel 2.6 bewegt sich der Verbindungsvektor \vec{r} wie ein Teilchen der reduzierten Masse μ unter dem Einfluss der Gravitationskraft eines zentralen Körpers der Masse $(m_1 + m_2)$ (Kraft K_{12}).

- Die Lösung von (2.3) sind die im Kapitel (1.5.2) dargestellten Kegelschnitte. Der Vektor \vec{r} beschreibt also eine Ellipse, und da aus dem Schwerpunktsatz sowie $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ die Gleichungen:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

folgen, bewegen sich die Massenpunkte auf geometrisch ähnlichen, gleichsinnig durchlaufenden Ellipsen um den gemeinsamen Schwerpunkt (Abb.).

- Die Achsenlängen der Ellipsen sind den Massen umgekehrt proportional, da

$$\frac{|\vec{r}_1|}{|\vec{r}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Falls $m_1 \gg m_2$, dann folgt $|\vec{r}_1| \ll |\vec{r}|$, $\vec{r}_2 \approx \vec{r}$. Im Grenzfall $m_2/m_1 \rightarrow 0$ ruht der schwere Körper im Brennpunkt; der leichte vollführt die Bewegung des Einkörperproblems.

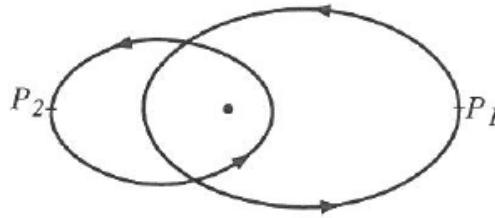


Abb.: Bahnellipsen beim Zweikörperproblem; P_1 und P_2 werden gleichzeitig durchlaufen.

2.9 Der Virialsatz

- Virialsatz macht Aussage darüber, wie groß im *zeitlichen* Mittel die Beiträge von kinetischer und potentieller Energie zur Gesamtenergie sind.
- Wir multiplizieren die Bewegungsgleichungen skalar mit dem Ortsvektor \vec{r}_n und summieren über alle Massenpunkte:

$$\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \cdot \ddot{\vec{r}}_n = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n$$

- Umformung:

$$\sum_{n=1}^N \frac{d}{dt} (m_n \vec{r}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n) - \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2 = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n = - \sum_{n=1}^N \text{grad}_n U \cdot \vec{r}_n \quad (2.4)$$

- Definition zeitliches Mittel einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$:

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

- Anwendung auf ersten Term in (2.4):

$$\overline{\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n \right] dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left[\sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \dot{\vec{r}}_n \right]_0^\tau$$

- Dieser Ausdruck verschwindet, falls der Term in Klammern beschränkt bleibt. Dies ist gewährleistet, wenn die Bewegungen mit beschränkten Geschwindigkeiten in einem beschränkten Raumgebiet verlaufen (gebundene Bewegungen). Ausgeschlossen sind z.B. hyperbolische Kometenbahnen.
- Dann folgt:

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_{n=1}^N \text{grad}_n U \cdot \vec{r}_n}$$

- Weitere Annahme: U sei eine *positiv homogene Funktion vom Grad κ* in den x_n^i , d.h. für alle reellen $\alpha > 0$ gilt:

$$U(\alpha x_1^1, \dots, \alpha x_N^3) = \alpha^\kappa U(x_1^1, \dots, x_N^3) \quad (2.5)$$

Beispiele:

1. Harmonische Oszillatoren:

$$U = \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{k_{nm}}{2} (\vec{r}_n - \vec{r}_m)^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 2$$

2. Graviterende Massenpunkte:

$$U = -\gamma \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{m_n m_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \quad \Rightarrow \quad \kappa = -1$$

- Für solche Funktionen gilt der *Eulersche Satz*:

$$\sum_{n=1}^N \text{grad}_n U \cdot \vec{r}_n = \kappa U \quad (2.6)$$

Beweis:

Wir differenzieren für feste x_n^i die Gleichung (2.5) nach α :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha}U(\alpha x_n^i) &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_n^i}(\alpha x_n^i) \cdot x_n^i = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \cdot (\text{grad } U_n)(\alpha x_n^i) \\ \frac{d}{d\alpha} \alpha^\kappa U(x_n^i) &= \kappa \alpha^{\kappa-1} U(x_n^i)\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\alpha = 1$ und erhalten (2.6).

- Damit folgt:

$$\bar{T} - \frac{\kappa}{2} \bar{U} = 0 \quad \text{Virialsatz}$$

- Speziell für die Astrophysik (Gravitationspotential, $\kappa = -1$):

$$E = \bar{T} + \bar{U} = -\bar{T}$$

- Die Gesamtenergie des Systems ist negativ; ihr Betrag ist gleich dem Mittelwert der kinetischen Energie.

2.10 Raketengleichung

- Beispiel für Anwendung des 2. Newtonschen Axioms auf Körper mit veränderlicher Masse:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt}(m \vec{v}) = \vec{F}$$

- Rakete: Masse verringert sich durch Ausstoß von Brennstoff, $\dot{m} < 0$.
- Zum Zeitpunkt t betrachten wir die Rakete (Masse $m(t)$) und die im Zeitintervall $(t + dt)$ ausgestoßene Masse $dm_a = -dm = -\dot{m} dt$ als Gesamtsystem, auf das die Gravitationskraft \vec{F} wirkt.
- Impuls zum Zeitpunkt t :

$$\vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

- Der Impuls dieses Gesamtsystems zum Zeitpunkt $t + dt$ besteht aus zwei Anteilen (Vernachlässigung in dt quadratischer Glieder):

1. Raketenimpuls $\vec{p}_R(t + dt) = m(t + dt)\vec{v}(t + dt)$
2. Impuls der ausgestoßenen Masse $d\vec{p}_a = dm_a(\vec{v}_a + \vec{v}(t))$, wobei \vec{v}_a die von der Rakete aus gesehene Ausstoßgeschwindigkeit des Brennstoffs ist.

Somit:

$$\begin{aligned}\vec{p}(t + dt) &= m(t + dt)\vec{v}(t + dt) + dm_a(\vec{v}_a + \vec{v}(t)) \\ &= \vec{p}(t) + (\dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}})dt - \dot{m}dt(\vec{v}_a + \vec{v}) \\ &= \vec{p}(t) + (\dot{m}\vec{v} - \dot{m}\vec{v}_a)dt\end{aligned}$$

- Es folgt:

$$m\dot{\vec{v}} - \dot{m}\vec{v}_a = \vec{F}$$

- Eindimensionales Anwendungsbeispiel:

1. Betrachte im homogenen Schwerefeld senkrecht nach oben steigende Feuerwerksrakete.
2. Die z -Achse zeige nach oben, dann:

$$\vec{F} = -mg\vec{b}_z, \quad \vec{v} = v\vec{b}_z, \quad \vec{v}_a = -v_a\vec{b}_z \quad \text{mit } v_a > 0, \text{ const.}$$

3. Dann folgt:

$$\dot{v} = -g - \frac{\dot{m}}{m}v_a \quad \Rightarrow \quad v = -gt + v_a \ln \frac{m_0}{m}$$

4. Am Ende der Brenndauer T erreichte Endgeschwindigkeit

$$v_E = -gT + v_a \ln \frac{m_0}{m_T}$$

ist groß, wenn T klein, m_T klein gegen m_0 und v_a groß ist.

5. Falls $\dot{m} = \text{const.}$ folgt:

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_a t - a \left(\frac{m_0}{\dot{m}} + t \right) \ln \left(1 + \frac{\dot{m}}{m_0} t \right),$$

mit $\dot{m} = \text{const.} < 0$ für $t \leq T$ und $\dot{m} = 0$ für $t > T$.

6. Es gilt keine Energieerhaltung (Umwandlung von chemischer in mechanische Energie).

Kapitel 3

Massenpunkt mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit

3.1 Zwangsbedingungen

- Betrachten Massenpunkt, dessen Bewegungsfreiheit durch eine Forderung

$$g(x^i; t) = 0 \quad (3.1)$$

eingeschränkt ist.

Beispiel: (Räumliches) mathematisches Pendel:

$$g(x, y, z; t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

- Massenpunkt bewege sich also auf der durch (3.1) vorgegebenen zweidimensionalen Fläche.
- Bei zwei einzuhaltenden *Zwangsbedingungen* $g_1(x^i; t) = 0$, $g_2(x^i; t) = 0$ findet die Bewegung auf einer Kurve – der Schnittkurve der Flächen g_1 und g_2 – statt.

Beispiel: Bewegung auf einer Schraubenlinie,

$$g_1(x, y, z; t) = x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad g_2(x, y, z; t) = y \cos(\mu z) - x \sin(\mu z) = 0.$$

(Anmerkung: Statt *Zwangsbedingung* sagt man auch *Nebenbedingung*.)

- *Frage:*

Wie erfasst man die Bewegung eines Massenpunktes in einem äußeren Kraftfeld \vec{F} , wenn die Bewegung Zwangsbedingungen unterliegt?

- *Antwort:*

1. Jeder Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i; t) = 0$ kann eine Kraft \vec{Z}_α zugeordnet werden, die auf den Massenpunkt wirkt und dafür „sorgt“, dass die Bedingung eingehalten wird.
2. Das so genannte *d'Alembertsche Prinzip* gibt uns die Richtung, nicht jedoch den Betrag der Kraft \vec{Z}_α .
3. Unterliegt ein Massenpunkt N_Z Zwangsbedingungen ($0 \leq N_Z \leq 3$), dann gibt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_\alpha$$

zusammen mit allen Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x^i; t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N_Z$$

genügend Informationen, um das Problem vollständig zu lösen.

3.2 Virtuelle Verrückungen und das d'Alembertsche Prinzip

- Virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \delta x_\alpha^i \vec{b}_i$ bezüglich einer Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i; t) = 0$ sind:
 1. gedachte, infinitesimale Verschiebungen des Massenpunktes
 2. verträglich mit der Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i; t) = 0$
 3. instantan, d.h. zu jedem Zeitpunkt sind es *rein räumliche* Verschiebungen im euklidischen Raum

- d'Alembertsches Prinzip:

Die der Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i; t) = 0$ zugeordnete Zwangskraft \vec{Z}_α leistet bei virtuellen Verrückungen $\delta \vec{r}_\alpha$ keine Arbeit:

$$\vec{Z}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

Alternative Formulierung:

\vec{Z}_α steht senkrecht auf virtuellen Verrückungen $\delta \vec{r}_\alpha$.

- Analyse:

1. Zum (festgehaltenen) Zeitpunkt t beschreibt die Zwangsbedingung $g_\alpha(x^i; t) = 0$ eine zweidimensionale Fläche F im euklidischen Raum E_3 .
2. Der Massenpunkt muss der Zwangsbedingung genügen; er befindet sich auf dieser Fläche F . Die Koordinaten x^i des Massenpunktes erfüllen also $g_\alpha(x^i; t) = 0$.
3. Eine virtuelle Verrückung $\delta \vec{r}_\alpha$ ist eine gedachte, infinitesimale Verschiebung des Massenpunktes innerhalb von F .
4. $\delta \vec{r}_\alpha$ ist daher ein *tangentialer* Vektor zu F .
5. Es gibt eine ausgezeichnete Normalenrichtung an die Fläche F , beschrieben durch den Einheitsnormalenvektor:

$$\vec{n}_\alpha = \frac{\operatorname{grad} g_\alpha}{|\operatorname{grad} g_\alpha|}, \quad \operatorname{grad} g_\alpha = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i} \vec{b}_i$$

\vec{n}_α zeigt in Richtung größer werdender Werte von g_α .¹

6. Da $\delta \vec{r}_\alpha$ tangential zu F ist, gilt:

$$\vec{n}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0$$

7. Die Zwangskraft \vec{Z}_α steht nun senkrecht auf allen denkbaren (tangentialen) virtuellen Verrückung $\delta \vec{r}_\alpha$; sie muss demnach parallel zu \vec{n}_α gerichtet sein.

¹Jeder tangentiale Vektor $\vec{h} = \sum_{i=1}^3 h^i \vec{b}_i$ an F erfüllt $0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g_\alpha(x^i + \varepsilon h^i, t) = \operatorname{grad} g_\alpha \cdot \vec{h}$; er steht also senkrecht auf $\operatorname{grad} g_\alpha$. Damit weist $\operatorname{grad} g_\alpha$ in die Normalenrichtung von F .

8. Es muss also gelten:

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \operatorname{grad} g_\alpha$$

mit einem unbekannten, noch zu bestimmenden Proportionalitätsfaktor $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ (kann positiv oder negativ sein), der Betrag und Richtungssinn von \vec{Z}_α beschreibt.

9. λ_α wird *Lagrangescher Multiplikator* genannt.

- Beispiel Räumliches mathematisches Pendel ($N_Z = 1$):

$$g_1(x, y, z; t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Es ist:

$$\operatorname{grad} g_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_1}{\partial x^i} \vec{b}_i = 2 \sum_{i=1}^3 x^i \vec{b}_i = 2\vec{r}$$

Damit folgt:

$$\vec{Z}_1 = 2\lambda_1 \vec{r}$$

Die Richtung der Zwangskraft beim räumlichen mathematischen Pendel ist radial; ihr (i.a. zeitabhängiger) Betrag und Richtungssinn sind noch zu bestimmen.

- Veranschaulichung:

1. Modellierung einer Zwangsbedingung durch einen Tisch, der aus unendlich vielen infinitesimalen Federn aufgebaut ist.
2. Massenpunkt auf Tisch führt zu „Eindellung“ Δz , $mg = k\Delta z$, k : Federkonstante
3. Im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ folgt $\Delta z = mg/k \rightarrow 0$, der Massenpunkt genügt dann also der Zwangsbedingung $z = 0$.
4. In der Feder gespeicherte potentielle Energie $U = \frac{1}{2}k\Delta z^2 = \frac{mg}{2k} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.
5. Interpretation: Bei einer Zwangsbedingung (eine solche ergibt sich im Grenzfall $k \rightarrow \infty$) nimmt die Unterlage keine Energie auf und gibt keine ab.
6. Verallgemeinerung: d'Alembertsches Prinzip, Zwangskraft \vec{Z}_α leistet bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit.

- **Wichtige Anmerkung:**

Das d'Alembertsche Prinzip kann *nicht* mathematisch abgeleitet, sondern nur durch die Übereinstimmung mit der Erfahrung „bewiesen“ werden.

3.3 Lagrange-Gleichungen I. Art

3.3.1 Ableitung der Gleichungen

- Die Gesamtkraft auf einen Massenpunkt in äußereren („eingeprägten“) Kraftfeldern, dessen Bewegung den Zwangsbedingungen $g_\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, N_Z$) unterliegt, ist die Summe aller Zwangskräfte und eingeprägter Kräfte:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_\alpha, \quad \vec{F} : \text{Summe der eingeprägten Kräfte}$$

- Die Zwangskräfte \vec{Z}_α sind gegeben durch:

$$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \text{grad } g_\alpha$$

- Somit folgen die Lagrange-Gleichungen I. Art:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \text{grad } g_\alpha \quad (3.2)$$

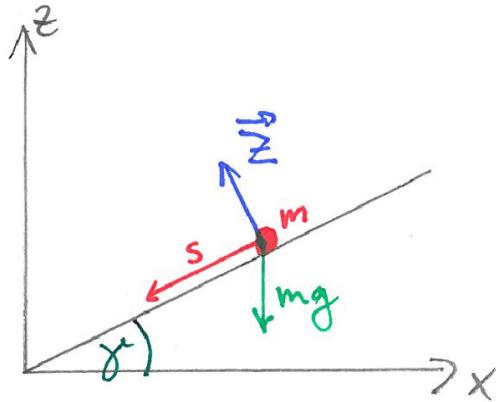
- Diese sind gemeinsam zu lösen mit den N_Z Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x^i; t) = 0. \quad (3.3)$$

- (3.2) und (3.3) ergeben $(3 + N_Z)$ Gleichungen für die $(3 + N_Z)$ Unbekannten (x^i, λ_α) .

3.3.2 Lösungsmethode

Beschreibung am Beispiel des Gleitens eines Massenpunktes auf einer schießen Ebene (siehe Abb.).



1. Man führe ein IS S ein und formuliere die Zwangsbedingungen in der vorgeschriebenen Form $g_\alpha = 0$.

Eine schiefe Ebene wird beschrieben durch $z = x \tan \gamma$. Wir wollen ferner die Bewegung auf die (x, z) -Ebene beschränken, $y = 0$. Dann haben wir:

$$g_1(x^i; t) = x \sin \gamma - z \cos \gamma = 0, \quad g_2(x^i; t) = y = 0$$

2. Man schreibe die Lagrange-Gleichungen I. Art in Komponenten auf.

Mit der eingeprägten Kraft $\vec{F} = -mg\vec{b}_z$ folgt:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} = \lambda_1 \sin \gamma \quad (3.4)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} = \lambda_2 \quad (3.5)$$

$$m\ddot{z} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} - mg = -\lambda_1 \cos \gamma - mg \quad (3.6)$$

3. Man differenziere die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit, eliminiere die entstehenden Beschleunigungen unter Verwendung der Lagrange-Gleichungen I. Art und bestimme die λ_α aus den so gefundenen Gleichungen.

Für Beispiel ergibt sich:

$$\ddot{x} \sin \gamma - \ddot{z} \cos \gamma = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

Einsetzen von (3.4-3.6) liefert:

$$\frac{\lambda_1}{m} \sin^2 \gamma - \left(-\frac{\lambda_1}{m} \cos \gamma - g \right) \cos \gamma = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$

also:

$$\lambda_1 = -mg \cos \gamma, \quad \lambda_2 = 0 \quad (3.7)$$

I.A. erhält man die λ_α als Funktionen von \vec{r} , $\dot{\vec{r}}$ und t .

4. Man eliminiere die λ_α aus den Lagrange-Gleichungen I. Art und löse diese unter Beachtung der Zwangsbedingungen $g_\alpha = 0$.

Aus (3.4-3.6) und (3.7) folgt:

$$m\ddot{x} = -mg \cos \gamma \sin \gamma, \quad (3.8)$$

$$m\ddot{y} = 0, \quad (3.9)$$

$$m\ddot{z} = mg \cos^2 \gamma - mg = -mg \sin^2 \gamma \quad (3.10)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{gt^2}{2} \cos \gamma \sin \gamma + \dot{x}_0 t + x_0, \\ y &= \dot{y}_0 t + y_0, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} \sin^2 \gamma + \dot{z}_0 t + z_0 \end{aligned}$$

Einsetzen in Nebenbedingungen liefert:

$$0 = g_1(x^i; t) = \left(-\frac{gt^2}{2} \cos \gamma \sin \gamma + \dot{x}_0 t + x_0 \right) \sin \gamma - \left(-\frac{gt^2}{2} \sin^2 \gamma + \dot{z}_0 t + z_0 \right) \cos \gamma$$

$$0 = g_2(x^i; t) = \dot{y}_0 t + y_0,$$

also:

$$\dot{x}_0 \sin \gamma - \dot{z}_0 \cos \gamma = 0, \quad x_0 \sin \gamma - z_0 \cos \gamma = 0; \quad \dot{y}_0 = 0 = y_0$$

Das sind die Zwangsbedingungen und ihre zeitliche Ableitungen zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Bewegung ist damit vollständig bestimmt.

Alternativer Weg:

- (a) Einführung einer *angepassten* Koordinate s :

$$z = -s \sin \gamma, \quad x = -s \cos \gamma$$

Damit ist die Zwangsbedingung $g_1 = 0$ identisch erfüllt.

(b) Aus (3.8-3.10) folgt:

$$m\ddot{s} = -m(\ddot{z} \sin \gamma + \ddot{x} \cos \gamma) = mg \sin \gamma,$$

also:

$$s = \frac{gt^2}{s} \sin \gamma + \dot{s}_0 t + s_0$$

Bewegung des Massenpunktes erfolgt so, als ob $mg \sin \gamma$ als Schwerkraft in Bewegungsrichtung wirkt.

- (c) *Anmerkung:* Angepasste Koordinaten spielen eine entscheidende Rolle beim Übergang zu den so genannten Lagrange-Gleichungen II. Art.

5. Man bestimme die Zwangskräfte:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \text{grad } g_1 = -mg \cos \gamma \sin \gamma \vec{b}_x + mg \cos^2 \gamma \vec{b}_z, \quad \vec{Z}_2 = 0$$

\vec{Z}_1 kompensiert (unabhängig von $\dot{\vec{r}}$) die zur Bahngeraden senkrechte Komponente der Schwerkraft.

3.4 Gültigkeit der Erhaltungssätze

1. Impulsbilanz:

$$\frac{d}{dt} m\dot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}, \quad \vec{Z} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N_Z} Z_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_{\alpha} \text{grad } g_{\alpha}$$

Für $\vec{F} + \vec{Z} = 0$ gilt Impulserhaltung; ist i.A. nur in speziellen Fällen erfüllt.

2. Drehimpulsbilanz:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{r} \times (\vec{F} + \vec{Z})$$

ist nur in Ausnahmefällen ein Erhaltungssatz (*Beispiel:* kräftefreie Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kugelschale).

Weist das Problem eine axiale Symmetrie auf, so ist die Drehimpulskomponente entlang der Symmetriearchse erhalten.

3. Energiebilanz bei Annahme eines Potentials U für die eingeprägten Kräfte:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(T + U) &= \vec{Z} \cdot \dot{\vec{r}} = \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \operatorname{grad} g_\alpha \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i} \dot{x}^i \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \left(\frac{d}{dt} g_\alpha[x^i(t); t] - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \right),\end{aligned}$$

weil

$$\frac{d}{dt} g_\alpha[x^i(t); t] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}.$$

Nun ist die Zwangsbedingung $g_\alpha = 0$ entlang der gesamten Bewegung identisch erfüllt; es ist damit:

$$\frac{d}{dt} g_\alpha[x^i(t); t] = 0,$$

und es folgt:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = - \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \quad (3.11)$$

Anmerkungen:

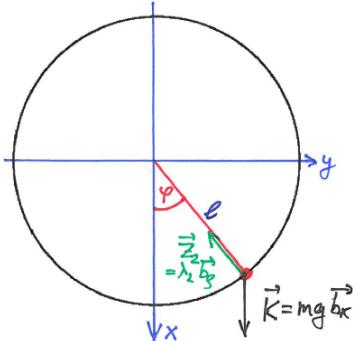
- (a) Für zeitunabhängige („skleronome“) Zwangsbedingungen, $\partial g_\alpha / \partial t = 0$ gilt der Energieerhaltungssatz.
- (b) Bei zeitabhängigen („rheonomen“) Zwangsbedingungen leistet die Zwangskraft *reale* Arbeit und führt somit zur Veränderung der mechanischen Energie.

Beispiel: Bewegte schiefe Ebene, $z = x \tan \gamma(t)$ mit vorgegebener Funktion $\gamma = \gamma(t)$.

- (c) Man beachte den Unterschied zwischen der Arbeit der Zwangskraft bei *realen* Verschiebungen (für rheonome Zwangsbedingungen) und der Gültigkeit des d'Alembertschen Prinzips für *virtuelle* Verrückungen.

3.5 Beispiele

3.5.1 Ebenes mathematisches Pendel



- Massenpunkt (Masse m) sei aufgehängt an einem Pendelstab (Länge ℓ) und schwingt im homogenen Erdschwerefeld in einer Ebene.
- Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten (x, y, z) mit Ebene $z = 0$ als Bahnebene, Aufhängepunkt im Koordinatenursprung:

$$g_1 = z = 0, \quad g_2 = \sqrt{x^2 + y^2} - \ell = 0$$

- Zwangskräfte im kartesischen System, $Z_\alpha^i = \lambda_\alpha \partial g_\alpha / \partial x^i$:

$$Z_1^x = Z_1^y = 0, \quad Z_1^z = \lambda_1,$$

$$Z_2^x = \lambda_2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lambda_2 \cos \varphi, \quad Z_2^y = \lambda_2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lambda_2 \sin \varphi, \quad Z_2^z = 0$$

Hier sind (ϱ, φ, z') Zylinderkoordinaten,

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z' = z.$$

- Eingeprägte Kraft im kartesischen System:

$$\vec{F} = mg \vec{b}_x$$

- Berechnung der Komponenten der Zwangskräfte in Zylinderkoordinaten:

$$Z^\varrho = Z^x \cos \varphi + Z^y \sin \varphi, \quad Z^\varphi = \frac{1}{\varrho} (-Z^x \sin \varphi + Z^y \cos \varphi), \quad Z^{z'} = Z^z$$

Somit:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{b}_{z'}, \quad \vec{Z}_2 = \lambda_2 \vec{b}_\varrho$$

- Eingeprägte Kraft in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F} = mg \cos \varphi \vec{b}_\varphi - \frac{mg}{\varrho} \sin \varphi \vec{b}_\varphi$$

- Lagrange-Gleichungen I. Art in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) &= F^\varrho + Z_1^\varrho + Z_2^\varrho = mg \cos \varphi + \lambda_2 \\ m \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\varphi} \right) &= F^\varphi + Z_1^\varphi + Z_2^\varphi = -\frac{mg}{\varrho} \sin \varphi \\ m \ddot{z}' &= F^{z'} + Z_1^{z'} + Z_2^{z'} = \lambda_1 \end{aligned}$$

- Ausnutzung der Nebenbedingung: $\varrho = \ell, \dot{\varrho} = 0 = \ddot{\varrho}, z' = \ddot{z}' = 0$:

$$\begin{aligned} -m\ell \dot{\varphi}^2 &= mg \cos \varphi + \lambda_2 \\ m \ddot{\varphi} &= -\frac{mg}{\ell} \sin \varphi, \\ \lambda_1 &= 0, \end{aligned}$$

also:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -m\ell \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi = Z_2^\varrho$$

und:

$$\ell \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

- Lösung für kleine Ausschläge $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = A \sin(\omega t + \gamma), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (3.12)$$

- Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig (skleronom). Dann gilt Energieerhaltung:

$$E = T+U = \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2) - mgx = \frac{m}{2}\ell^2 \dot{\varphi}^2 - mg\ell \cos \varphi = -mg\ell \cos \varphi_U$$

Es ist $\dot{\varphi} = 0$ am Umkehrpunkt, d.h. für $t = t_U, \varphi = \varphi_U$.

- Trennung der Variablen liefert (setzen $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) > 0$):

$$t = \frac{1}{\sqrt{2} \omega} \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{\cos \tilde{\varphi} - \cos \varphi_U}}$$

Elliptisches Integral; erhalten *Normalform* durch Substitution

$$\sin \tilde{u} = \frac{1}{k} \sin \frac{\tilde{\varphi}}{2}, \quad k = \sin \frac{\varphi_U}{2},$$

also:

$$t = \frac{1}{\omega} \int_0^{u(t)} \frac{d\tilde{u}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tilde{u}}} = \frac{1}{\omega} F(k, u(t))$$

mit:

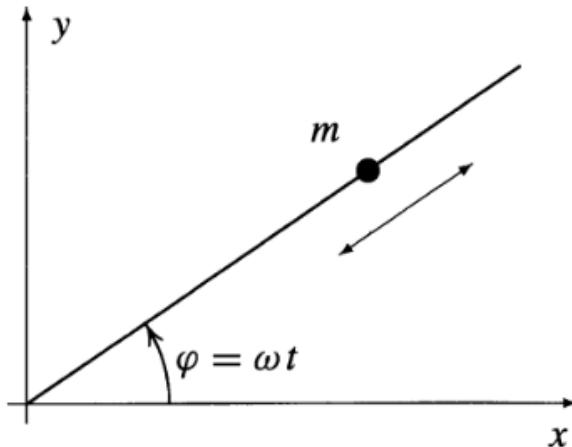
$$\varphi(t) = 2 \arcsin[k \sin u(t)], \quad k = \sin \frac{\varphi_U}{2}$$

- Abhängigkeit von k hat variable Schwingungsdauer zur Folge (im Gegensatz zur harmonischen Näherung (3.12)).

- Zwangskraft:

$$\vec{Z}_1 = 0, \quad \vec{Z}_2 = Z_2^\varrho \vec{b}_\varrho = -m(\ell \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi) \vec{b}_\varrho = -mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_U) \vec{b}_\varrho$$

3.5.2 Massenpunkt auf rotierender Stange



- Ebene Bewegung eines Massenpunktes entlang einer rotierenden Stange (siehe Abb.); keine eingeprägten Kräfte, $\vec{F} = 0$.
- Zwangsbedingungen in Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z')

$$z' = 0, \quad \varphi = \omega t$$

- Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten ($x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi, z = z'$):

$$\begin{aligned} z' &= 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = z = 0, \\ \varphi &= \omega t \quad \Rightarrow \quad g_2 = x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t) = \varrho \sin(\omega t - \varphi) = 0 \end{aligned}$$

- Zwangskräfte:

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 &= \lambda_1 \vec{b}_z = \lambda_1 \vec{b}_{z'}, \\ \vec{Z}_2 &= \lambda_2 [\sin(\omega t) \vec{b}_x - \cos(\omega t) \vec{b}_y] = \lambda_2 [\sin \varphi \vec{b}_x - \cos \varphi \vec{b}_y] = -\frac{\lambda_2}{\varrho} \vec{b}_\varphi \end{aligned}$$

- Lagrange-Gleichungen I. Art in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) &= Z_1^\varrho + Z_2^\varrho = 0 \\ m \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \dot{\varphi} \right) &= Z_1^\varphi + Z_2^\varphi = -\frac{\lambda_2}{\varrho} \\ m \ddot{z}' &= Z_1^{z'} + Z_2^{z'} = \lambda_1 \end{aligned}$$

- Ausnutzung der Nebenbedingung: $\varphi = \omega t, \dot{\varphi} = \omega, \ddot{\varphi} = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho \omega^2 &= 0 \\ \lambda_2 &= -2m \dot{\varrho} \omega \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= \varrho_0 \cosh \omega t + \frac{\dot{\varrho}_0}{\omega} \sinh \omega t, \\ \vec{Z}_2 &= \frac{2}{\varrho} m \dot{\varrho} \omega \vec{b}_\varphi = 2 m \dot{\varrho} \omega \vec{e}_\varphi, \\ \vec{Z}_1 &= 0. \end{aligned}$$

- Interessanter Spezialfall: $\dot{\varrho}_0 = -\varrho_0 \omega$

$$\Rightarrow \quad \varrho(t) = \varrho_0 e^{-\omega t}$$

Bewegung mit abnehmender Geschwindigkeit zum Zentrum hin, kommt dort zur Ruhe.

- Interpretation der Zwangskraft \vec{Z}_2 von einem mitrotierenden System Σ' aus: Nötig, um Coriolis-Kraft zu kompensieren und den Massenpunkt bei einem festen Winkel φ' zu halten.

3.6 Einseitige Bindungen

- Bindungen sind einseitig, wenn der Massenpunkt daran gehindert wird, eine Fläche nach einer Seite zu verlassen, die Bewegung bezüglich der anderen Seite aber nicht eingeschränkt ist.
- Beispiel: Massenpunkt gleitet auf einer Kugel hinunter. Es gilt die Zwangsbedingung:

$$g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0$$

Die Kugel vermag nur eine Zwangskraft nach außen auszuüben; für die zugehörige Zwangskraft \vec{Z}_1 gilt:

$$Z_1^r \geq 0$$

- Das d'Alembertsche Prinzip lautet für einseitige Bindungen:

$$\vec{Z}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha \geq 0$$

Virtuelle Verrückungen sind nun also auch in Richtung der Zwangskraft erlaubt; dann ist obiger Ausdruck positiv.

- Vorgehensweise (siehe Abb.):

- Sei für $t = 0$ eine nichtverschwindende Zwangskraft zur Realisierung der Zwangsbedingung nötig.
- Man bestimme die Bewegung gemäß den Lagrangeschen Gleichungen I. Art bis zu demjenigen Punkt, an dem die Zwangskraft \vec{Z}_α verschwindet.
- Zu diesem Zeitpunkt verlässt der Massenpunkt die Fläche $g_\alpha = 0$ und bewegt sich auf derjenigen Seite der Fläche, wo $g_\alpha > 0$ gilt.
- Dann befindet sich der Massenpunkt nicht mehr unter dem Einfluss der Zwangskraft \vec{Z}_α , bis zu einem eventuellen späteren Zeitpunkt, zu dem wieder $g_\alpha = 0$ genau erfüllt ist.
- Von diesem Zeitpunkt an ist wieder die Zwangskraft \vec{Z}_α im Rahmen der Lagrangeschen Gleichungen I. Art zu berücksichtigen usw.

Kapitel 4

Massenpunktsysteme mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit

4.1 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen I. Art

- Für Massenpunktsysteme (mit N Massenpunkten der Massen m_n) hängen Zwangsbedingungen g_α potentiell von allen Koordinaten x_n^i , $i = 1, \dots, 3; n = 1, \dots, N$, ab,

$$g_\alpha = g_\alpha(x_n^i; t) = g_\alpha(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3; t) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.1)$$

Hierbei sind wieder die x_n^i Koordinaten in einem Inertialsystem \mathcal{S} .

- Jeder Zwangsbedingung g_α kann ein Satz von Zwangskräften $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ zugeordnet werden, wobei die Zwangskraft $\vec{Z}_{\alpha,n}$ auf den n -ten Massenpunkt wirkt.
- Die Kräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$ „sorgen“ dafür, dass die Bedingung $g_\alpha = 0$ eingehalten wird.
- D'Alembertsches Prinzip:

*Die Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ leisten bei einer beliebigen virtuellen Ver-
rückung $\{\delta \vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ des Massenpunktsystems, die mit der Zwangsbe-*

dingung $g_\alpha = 0$ verträglich ist, keine Arbeit:

$$\sum_{n=1}^N \vec{Z}_{\alpha,n} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha,n} = 0.$$

- Analyse:

1. In einem $3N$ -dimensionalen *Konfigurationsraum*, der durch die $3N$ Koordinaten x_n^i aufgespannt wird, wird die Gesamtheit aller Ortskoordinaten der Massenpunkte durch einen Punkt beschrieben.
2. Durch (4.1) wird zum festen Zeitpunkt t in diesem Konfigurationsraum eine $(3N-1)$ -dimensionale Hyperfläche \mathcal{H} beschrieben.
3. Jede virtuelle Verrückung $\{\delta \vec{r}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ liegt *tangential* in \mathcal{H} . Sie besteht aus infinitesimalen Verschiebungen *aller* Massenpunkte des Systems.
4. Das d'Alembertsche Prinzip ist äquivalent zur Aussage, dass der Vektor aller Zwangskräfte $\{\vec{Z}_{\alpha,n}\}_{n=1}^N$ im Konfigurationsraum senkrecht steht auf \mathcal{H} .
5. Damit ist dieser Vektor parallel zum Gradienten von g_α an \mathcal{H} , d.h. :

$$Z_{\alpha,n}^i = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \quad \text{oder} \quad \vec{Z}_{\alpha,n} = \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha$$

mit einem von n und i unabhängigen *Lagrangeschen Multiplikator* λ_α .

- Lagrange-Gleichungen I. Art:

1. Falls wieder N_Z Zwangsbedingungen beachtet werden müssen (also $\alpha = 1, \dots, N_Z \leq 3N$), sind die Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}$ vektoriell zu addieren.
2. Somit folgen die Lagrange-Gleichungen I. Art:

$$m_n \ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \vec{Z}_{\alpha,n} = \vec{F}_n + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha \quad (4.2)$$

oder in Komponenten:

$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

3. Diese sind gemeinsam zu lösen mit den N_Z Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_n^i; t) = 0. \quad (4.3)$$

4. (4.2) und (4.3) ergeben $(3N+N_Z)$ Gleichungen für die $(3N+N_Z)$ Unbekannten (x_n^i, λ_α) .

4.2 Schwerpunkt-, Drehimpuls- und Energiesatz

- Aufteilung der Kräfte:

1. innere eingeprägte Kräfte \vec{F}_{nm} ($m \neq n$), $\vec{F}_{mn} = -\vec{F}_{nm}$
2. äußere eingeprägte Kräfte $\vec{F}_n^{(a)}$
3. innere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,nm}$ ($m \neq n$), $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$
4. äußere Zwangskräfte $\vec{Z}_{\alpha,n}^{(a)}$

- Innere Zwangskräfte röhren von *inneren* Zwangsbedingungen g_α her, die nur Funktionen von $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$ sind, für die also gilt:

$$\vec{Z}_{\alpha,nm} = \lambda_\alpha \text{grad}_n g_\alpha = -\lambda_\alpha \text{grad}_m g_\alpha = -\vec{Z}_{\alpha,mn}$$

Oft ist

$$g_\alpha = g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|) \Rightarrow \text{grad}_n g_\alpha = \frac{\partial g_\alpha(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)}{\partial |\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_m}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} = -\text{grad}_m g_\alpha$$

Dann liegen die Zwangskräfte in Richtung des Verbindungsvektors $(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$.

- Äußere Zwangskräfte werden auf das System durch die Umgebung ausgeübt. Sie „sorgen“ dafür, dass das System *äußeren* Zwangsbedingungen folgt.

- *Schwerpunktsatz:*

Wegen $\vec{Z}_{\alpha,mn} = -\vec{Z}_{\alpha,nm}$ gilt:

$$M \ddot{\vec{s}} = \vec{F} + \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(a)}$$

Hier ist nur über solche α zu summieren, für die $g_{\alpha} = 0$ einer äußeren Zwangsbedingung entspricht.

- *Drehimpulssatz:*

Für innere Zwangsbedingungen der Form $g_{\alpha} = g_{\alpha}(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{n=1}^N \left[\vec{r}_n \times \left(\vec{F}_n^{(a)} + \sum_{\alpha} \vec{Z}_{\alpha,n}^{(a)} \right) \right]$$

- *Energiesatz*

Multiplikation mit $\dot{\vec{r}}_n$ und Summation über alle n liefert in der bekannten Weise:

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_n (\dot{x}_n^i)^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 F_n^i \dot{x}_n^i + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i$$

Falls die eingeprägten Kräfte ein Potential aufweisen, folgt:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 F_n^i \dot{x}_n^i = -\frac{d}{dt} U(x_n^i)$$

Ferner ist:

$$0 = \frac{d}{dt} g_{\alpha}(x_n^i; t) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x_n^i} \dot{x}_n^i + \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t},$$

und somit folgt:

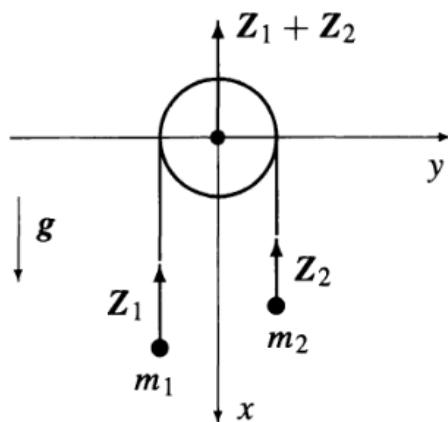
$$\frac{d}{dt} (T + U) = - \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_{\alpha} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial t}$$

Wenn die eingeprägten Kräfte ein Potential haben, ist die zeitliche Änderung der Energie gleich der Leistung der Zwangskräfte.

- Für skleroneome (zeitunabhängige) Zwangsbedingungen verschwindet diese Leistung. Dann gilt Energieerhaltung, $T + U = E$.
- Bei zeitabhängigen Bindungen kann Energie übertragen werden. Dann ist zwar die *virtuelle* Arbeit gemäß des d'Alembertschen Prinzips Null, nicht aber die *reale* Arbeit bei der Bewegung.

4.3 Beispiele

4.3.1 Wellrad



- Zwei Massenpunkte im Erdschwerefeld sind durch einen Faden verbunden, der über eine fest aufgehängte Rolle geführt wird (siehe Abb.).
- Zwangsbedingung:

$$g_1 = x_1 + x_2 - L = 0$$

- zugehörige Zwangskräfte:

$$Z_{1,1}^x = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = \lambda_1, \quad Z_{1,2}^x = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \lambda_1$$

Die Zwangskräfte auf die Massenpunkte sind gleich groß und gleich gerichtet; es handelt sich um *äußere* Zwangskräfte, hervorgebracht durch die Aufhängung.

- Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1g + Z_{1,1}^x = m_1g + \lambda_1, \quad m_2\ddot{x}_2 = m_2g + Z_{1,2}^x = m_2g + \lambda_1$$

- Subtraktion führt auf:

$$m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)g$$

- Wegen der Zwangsbedingung ist $\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$, und daher:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g.$$

Als gesamte träge Masse geht die Summe $(m_1 + m_2)$, als Kraft die Differenz der Gewichte $(m_1g - m_2g)$ ein.

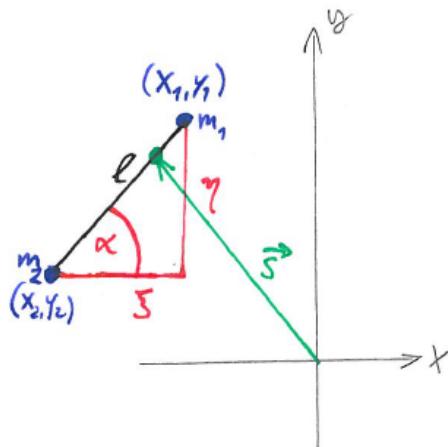
- Zwangskraft:

$$Z_{1,1}^x = \lambda_1 = m_1(\ddot{x}_1 - g) = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Von der Aufhängung aufgenommene Gesamtzwangskraft ist

$$Z_{1,1}^x + Z_{1,2}^x = 2\lambda_1, \quad |Z_{1,1}^x + Z_{1,2}^x| \leq m_1g + m_2g$$

4.3.2 Hantel auf Eisfläche



- Reibungsfreie Bewegung zweier durch eine masselose Stange (Länge ℓ) verbundener Massenpunkte (siehe Abb.)

- Zwangsbedingung:

$$g_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0$$

- zugehörige Zwangskräfte:

$$Z_{1,1}^x = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 2\lambda_1(x_1 - x_2),$$

$$Z_{1,1}^y = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 2\lambda_1(y_1 - y_2),$$

$$Z_{1,2}^x = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -2\lambda_1(x_1 - x_2),$$

$$Z_{1,2}^y = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = -2\lambda_1(y_1 - y_2)$$

sind *innere* Zwangskräfte.

- Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= 2\lambda_1(x_1 - x_2), & m_1 \ddot{y}_1 &= 2\lambda_1(y_1 - y_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -2\lambda_1(x_1 - x_2), & m_1 \ddot{y}_2 &= -2\lambda_1(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

- Es folgt der Schwerpunktsatz:

$$M \ddot{\vec{s}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{s}} = \ddot{\vec{s}}_0 + \dot{\vec{s}}_0 t$$

mit Gesamtmasse $M = m_1 + m_2$ und:

$$\ddot{\vec{s}} = s^x \ddot{\vec{b}}_x + s^y \ddot{\vec{b}}_y = \frac{1}{M} \left[(m_1 x_1 + m_2 x_2) \ddot{\vec{b}}_x + (m_1 y_1 + m_2 y_2) \ddot{\vec{b}}_y \right]$$

- Einführung von Relativkoordinaten (siehe Abb.):

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 - x_2 & \Rightarrow & \quad x_1 = s^x + \frac{m_2}{M} \xi, & x_2 &= s^x - \frac{m_1}{M} \xi \\ \eta &= y_1 - y_2 & \Rightarrow & \quad y_1 = s^y + \frac{m_2}{M} \eta, & y_2 &= s^y - \frac{m_1}{M} \eta \end{aligned}$$

- Bewegungsgleichungen:

$$\ddot{\xi} = \frac{2\lambda_1}{\mu} \xi, \quad \ddot{\eta} = \frac{2\lambda_1}{\mu} \eta \quad \text{mit reduzierter Masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

- Die Zwangsbedingung

$$\xi^2 + \eta^2 = \ell^2$$

legt die Einführung einer Winkelkoordinate α nahe:

$$\begin{aligned}\xi &= \ell \cos \alpha, & \dot{\xi} &= -\ell \dot{\alpha} \sin \alpha, & \ddot{\xi} &= -\ell(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \\ \eta &= \ell \sin \alpha, & \dot{\eta} &= \ell \dot{\alpha} \cos \alpha, & \ddot{\eta} &= \ell(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha)\end{aligned}$$

- Damit folgt unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\ell \ddot{\alpha} &= \ddot{\eta} \cos \alpha - \ddot{\xi} \sin \alpha = \frac{2\lambda_1}{\mu}(\eta \cos \alpha - \xi \sin \alpha) = 0 \\ \ell \dot{\alpha}^2 &= -\ddot{\eta} \sin \alpha - \ddot{\xi} \cos \alpha = -\frac{2\lambda_1}{\mu}(\eta \sin \alpha + \xi \cos \alpha) = -\frac{2\ell\lambda_1}{\mu},\end{aligned}$$

also:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega t, \quad \lambda_1 = -\frac{\mu}{2}\omega^2 \quad (\omega = \text{const.})$$

- Gesamtlösung:

$$\begin{aligned}x_1 &= s_0^x + \dot{s}_0^x t + \frac{m_2}{M} \ell \cos(\omega t + \alpha_0) \\ y_1 &= s_0^y + \dot{s}_0^y t + \frac{m_2}{M} \ell \sin(\omega t + \alpha_0) \\ x_2 &= s_0^x + \dot{s}_0^x t - \frac{m_1}{M} \ell \cos(\omega t + \alpha_0) \\ y_2 &= s_0^y + \dot{s}_0^y t - \frac{m_1}{M} \ell \sin(\omega t + \alpha_0) \\ \vec{Z}_{1,1} &= -\vec{Z}_{1,2} = -\mu \omega^2 \ell \left[\cos(\omega t + \alpha_0) \vec{b}_x + \sin(\omega t + \alpha_0) \vec{b}_y \right]\end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem dreht sich die Hantel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω .

- Drehimpuls $\vec{L} = \sum_{n=1}^2 m_n \vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n$:

$$\vec{L} = L^z \vec{b}_z, \quad L^z = \mu \omega \ell^2 + M(s_0^x \dot{s}_0^y - s_0^y \dot{s}_0^x) = \text{const.}$$

- kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 m_n \dot{\vec{r}}_n^2$:

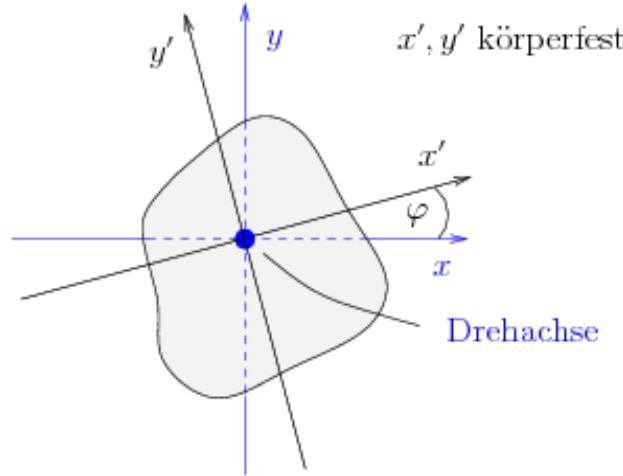
$$T = \frac{\mu}{2} \omega^2 \ell^2 + \frac{M}{2} [(\dot{s}_0^x)^2 + (\dot{s}_0^y)^2] = \text{const.}$$

4.4 Um eine Achse frei drehbarer starrer Körper

4.4.1 Modell des starren Körpers

- Ein starrer Körper besteht aus einer großen (im Grenzfall unendlichen) Anzahl von Massenpunkten
- Diese werden als starr miteinander verbunden angenommen; die gegenseitigen Abstände von je zwei Massenpunkten sind konstant.
- Die entsprechenden Zwangsbedingungen sind zeitunabhängig und führen zu *inneren* Zwangskräften entlang der Verbindungsvektoren der Massenpunkte.
- Näherungsmodell für reale Körper.
- Starrer Körper weist 3 Rotations- und 3 Translationsfreiheitsgrade auf.
- Behandlung mit Lagrange I-Formalismus ist unzweckmäßig (N sehr groß, viele Nebenbedingungen).
- Betrachten zunächst Rotation um feste z -Achse (in einem IS); dann hat der Körper einen Rotationsfreiheitsgrad (allgemeine Behandlung kommt später).

4.4.2 Energie, Drehimpuls und Trägheitsmoment



- Starrheit des Körpers bedeutet, dass man ein mitbewegtes und mitrotierendes Koordinatensystem Σ' finden kann, in dem die Koordinaten $\{x_n^{i'}\} = \{x'_n, y'_n, z'_n\}$ sämtlicher Massenpunkte fest, also zeitlich konstant sind.
- Für Drehung um die z -Achse ist (siehe Abb.):

$$\begin{aligned} x_n &= x'_n \cos \varphi - y'_n \sin \varphi, & \dot{x}_n &= -\dot{\varphi} (x'_n \sin \varphi + y'_n \cos \varphi) = -\dot{\varphi} y_n \\ y_n &= y'_n \cos \varphi + x'_n \sin \varphi, & \dot{y}_n &= \dot{\varphi} (-y'_n \sin \varphi + x'_n \cos \varphi) = \dot{\varphi} x_n, \\ z_n &= z'_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Offenbar gilt: $x_n^2 + y_n^2 = [(x'_n)^2 + (y'_n)^2]$.

- Damit folgen für kinetische Energie und Drehimpuls:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2) = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \sum_{n=1}^N m_n [(x'_n)^2 + (y'_n)^2] \\ L^z &= \sum_{n=1}^N m_n (x_n \dot{y}_n - y_n \dot{x}_n) = \dot{\varphi} \sum_{n=1}^N m_n [(x'_n)^2 + (y'_n)^2] \end{aligned}$$

also:

$$T = \frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 \tag{4.5}$$

$$L^z = \Theta \dot{\varphi} \tag{4.6}$$

mit dem konstanten *Trägheitsmoment*:

$$\Theta = \sum_{n=1}^N m_n [(x'_n)^2 + (y'_n)^2]$$

- Für einen ausgedehnten Körper müssen wir von der Summe zum Integral übergehen (d.h. $N \rightarrow \infty$):

1. die Massen m_n sind durch das Produkt der (möglicherweise ortsabhängigen) Massendichte μ mit dem Volumenelement $dV = d^3\vec{r}'$ zu ersetzen, $m_n \rightarrow \mu(x', y', z') d^3\vec{r}'$
2. Koordinaten x'_n und y'_n sind nun kontinuierliche Größen x', y' innerhalb des vom Körper eingenommenen dreidimensionalen Gebietes K .
3. Damit:

$$\Theta = \int_K \mu(x', y', z') (x'^2 + y'^2) d^3\vec{r}',$$

und die Gleichungen (4.5) und (4.6) behalten ihre Form.

4. Beispiele für Trägheitsmomente ausgedehnter homogener Körper (M : Masse):

- Hohlzylinder, der um seine Symmetriearchse rotiert (Radien R_1, R_2): $\Theta = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
- Vollzylinder (mit Radius R), der um seine Symmetriearchse rotiert: $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$
- Vollzylinder (mit Länge ℓ und Radius R), der um eine Querachse rotiert: $\Theta = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{2}M\ell^2$
- Massive Kugel (mit Radius R), die um eine Achse durch den Mittelpunkt rotiert: $\Theta = \frac{2}{5}MR^2$

- Falls die äußeren Kräfte ein Potential aufweisen, kann wegen (4.4) einfach $U = U(\varphi)$ geschrieben werden.
- Der Energiesatz lautet dann:

$$\frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = E,$$

und das Bewegungsproblem kann wie ein eindimensionales Problem durch Quadratur gelöst werden:

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{\frac{2}{\Theta} [E - U(\tilde{\varphi})]}}$$

- Der Drehimpulssatz für die z -Komponente lautet (N Massenpunkte):

$$\frac{dL^z}{dt} = \Theta \ddot{\varphi} = \sum_{n=1}^N \left(\vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)} \right)^z$$

- Für einen ausgedehnten Körper schreibt sich die äußere Kraft als

$$d\vec{F}^{(a)} = \vec{f}^{(a)} d^3 \vec{r}',$$

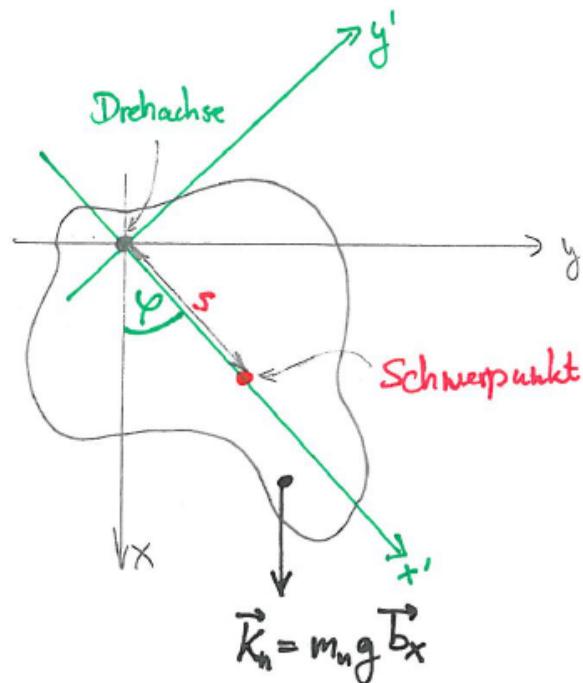
wobei $\vec{f}^{(a)}$ die äußere *Kraftdichte* darstellt. Dann haben wir folgenden Übergang:

$$\sum_{n=1}^N \left(\vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)} \right)^z \rightarrow \int_K \left(\vec{r} \times \vec{f}^{(a)} \right)^z d^3 \vec{r}'$$

und:

$$\frac{dL^z}{dt} = \Theta \ddot{\varphi} = \int_K \left(\vec{r} \times \vec{f}^{(a)} \right)^z d^3 \vec{r}'$$

- Beispiel *physisches Pendel* (siehe Abb.):



1. Potentielle Energie im homogenen Erdschwerefeld:

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= -\sum_{n=1}^N m_n g x_n = -g \sum_{n=1}^N m_n (x'_n \cos \varphi - y'_n \sin \varphi) \\ &= -g M (s^{x'} \cos \varphi - s^{y'} \sin \varphi) \end{aligned}$$

mit den (festen) Schwerpunktkoordinaten im Ruhesystem \$\Sigma'\$,

$$s^{x'} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n x'_n, \quad s^{y'} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^N m_n y'_n, \quad M = \sum_{n=1}^N m_n$$

Für einen ausgedehnten Körper folgt (analog zu oben):

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= - \int_K \mu g x \, d^3 \vec{r}' = -g \int_K \mu (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \, d^3 \vec{r}' \\ &= -g M (s^{x'} \cos \varphi - s^{y'} \sin \varphi) \end{aligned}$$

mit

$$s^{x'} = \frac{1}{M} \int_K \mu x' \, d^3 \vec{r}', \quad s^{y'} = \frac{1}{M} \int_K \mu y' \, d^3 \vec{r}', \quad M = \int_K \mu \, d^3 \vec{r}'$$

Legen wir die x' -Achse durch den Schwerpunkt, so ist $s^{y'} = 0$. Setzen wir ferner $s^{x'} \equiv s$, dann folgt:

$$\frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 - gMs \cos \varphi = E$$

Das physische Pendel schwingt wie ein mathematischen Pendel der Fadenlänge

$$\ell = \frac{\Theta}{Ms}.$$

2. Drehimpulsbilanz:

Es ist:

$$\begin{aligned} d\vec{F}^{(a)} = \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}' &= dm g \vec{b}_x = \mu g \vec{b}_x d^3\vec{r}' \\ \int_K (\vec{r} \times \vec{f}^{(a)})^z d^3\vec{r}' &= \int_K \mu g \left(\sum_{i=1}^3 x^i \vec{b}_i \times \vec{b}_x \right)^z d^3\vec{r}' \\ &= -g \int_K \mu y d^3\vec{r}' \\ &= -g \int_K \mu (y' \cos \varphi + x' \sin \varphi) d^3\vec{r}' \\ &= -Mgs \sin \varphi, \end{aligned}$$

und es folgt die Bewegungsgleichung:

$$\Theta \ddot{\varphi} = -Mgs \sin \varphi$$

4.4.3 Abrollende starre Körper

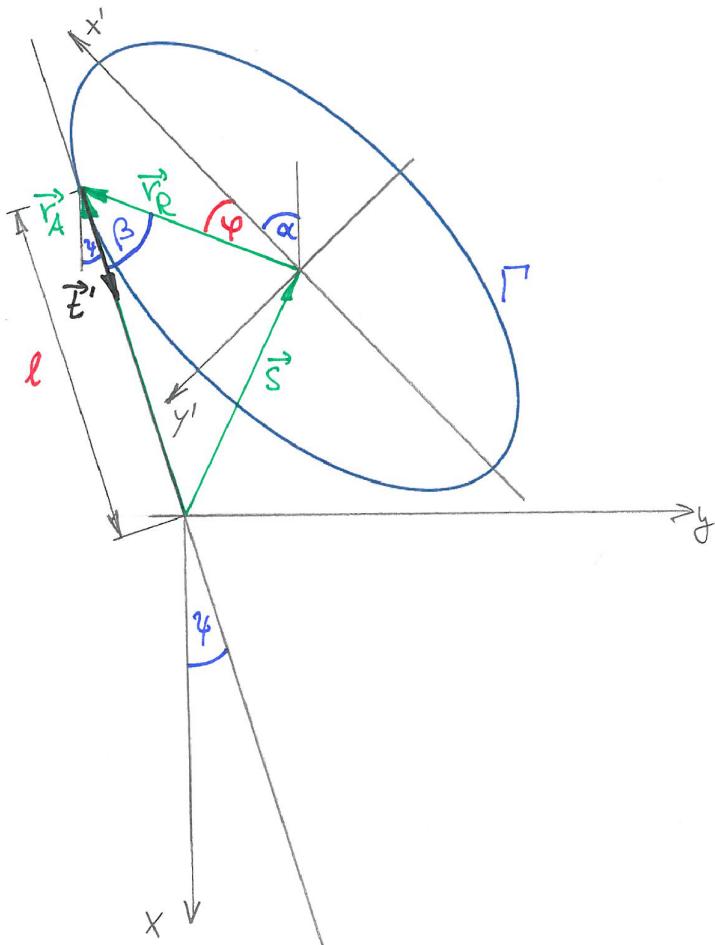


Abb.: Abrollender starrer Körper. Es ist $\dot{\ell} > 0$ und $\dot{\varphi} > 0$ während der Bewegung, und damit $\ell < 0$ für die Situation in der Abb.

- Wir untersuchen die Bewegung eines auf einer geneigten Ebene abrollenden Zylinders mit beliebig konvexem (z.B. elliptischem) Grundriss.
- Betrachtung im raumfesten Inertialsystem (Koordinaten $x^i = (x, y, z)$) und einem körperfesten, mitbewegten und rotierenden Schwerpunktssystem Σ' (Koordinaten $x^{i'} = (x', y', z')$, Schwerpunkt liegt im Ursprung).
- In Σ' werde die konvexe Berandung Γ der Zylindergrundrissfläche durch eine 2π -periodische Funktion $R = R(\varphi)$ beschrieben, d.h. Γ ist parametrisch gegeben durch

$$\Gamma = \{(x', y') : x' = R(\varphi) \cos \varphi, y' = R(\varphi) \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

- Berechnungsschritte:

1. *Koordinatentransformation (siehe Abb.):*

$$\begin{aligned}x &= s^x(t) - x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\y &= s^y(t) - y' \cos \alpha - x' \sin \alpha \\z &= z'\end{aligned}$$

Schwerpunkt in der (x, y) -Ebene: $\vec{s}(t) = s^x(t)\vec{b}_x + s^y(t)\vec{b}_y$

2. *Transformation der Koordinatenbasisvektoren, $\vec{b}_{i'} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \vec{b}_i$:*

$$\begin{aligned}\vec{b}_{x'} &= -\cos \alpha \vec{b}_x - \sin \alpha \vec{b}_y \\ \vec{b}_{y'} &= \sin \alpha \vec{b}_x - \cos \alpha \vec{b}_y \\ \vec{b}_{z'} &= \vec{b}_z\end{aligned}$$

3. *Kinetische Energie:*

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \int_K \mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) d^3\vec{r}' \\&= \frac{1}{2} \int_K \mu [(\dot{s}^x + \dot{\alpha}x' \sin \alpha + \dot{\alpha}y' \cos \alpha)^2 \\&\quad + (\dot{s}^y + \dot{\alpha}y' \sin \alpha - \dot{\alpha}x' \cos \alpha)^2] d^3\vec{r}' \\&= \frac{1}{2} \int_K \mu [(\dot{s}^x)^2 + (\dot{s}^y)^2 + \dot{\alpha}^2[(x')^2 + (y')^2]] d^3\vec{r}' \\&= \frac{M}{2} \dot{\vec{s}}^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\alpha}^2,\end{aligned}$$

weil für das Schwerpunktsystem gilt:

$$\int_K \mu x' d^3\vec{r}' = 0 = \int_K \mu y' d^3\vec{r}'.$$

4. *Potentielle Energie:*

$$\begin{aligned}U &= -g \int_K \mu x d^3\vec{r}' = -g \int_K \mu(s^x - x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) d^3\vec{r}' \\&= -Mgs^x\end{aligned}$$

5. Energieerhaltung:

$$T + U = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\alpha}^2 - M g s^x = E \quad (4.7)$$

Energieerhaltung gilt, da wir keine explizit zeitabhängigen Bindungen haben.

6. *Abrollbedingung*: Die auf der geneigten Ebene durch den Auflagepunkt im Zeitelement dt zurückgelegte Strecke $d\ell$ ist gleich derjenigen auf der Körperoberfläche:

$$d\ell = d\varphi \sqrt{\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 + R^2(\varphi)}.$$

(φ beschreibt den Polarwinkel des Auflagepunktes bezüglich Σ'). Durch Integration ergibt sich:

$$\ell(\varphi) = \ell_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{R'^2(\tilde{\varphi}) + R^2(\tilde{\varphi})} d\tilde{\varphi}. \quad (4.8)$$

Damit ist $\ell(\varphi)$ die (gegebene) Bogenlänge der Kurve Γ (wir haben $R' \equiv \frac{dR}{d\varphi}$ geschrieben).

7. Geometrische Beziehungen:

Darstellung der Schwerpunktskoordinaten s^x und s^y sowie des Drehwinkels α durch ℓ und φ :

- (a) Gemäß Abb. sind $(\alpha + \varphi)$ und $(\beta + \psi)$ Wechselwinkel,

$$\alpha + \varphi = \beta + \psi$$

Der Winkel $\beta \in (0, \pi)$ ist dabei eine gegebene Funktion von φ , denn wir haben:

$$\cos \beta = \frac{(-\vec{r}_R) \cdot \vec{t}'}{|\vec{r}_R| |\vec{t}'|}$$

mit:

$$\begin{aligned} \vec{r}_R &= R \cos \varphi \vec{b}_{x'} + R \sin \varphi \vec{b}_{y'} \\ \vec{t}' &= \frac{d}{d\varphi} (R \cos \varphi) \vec{b}_{x'} + \frac{d}{d\varphi} (R \sin \varphi) \vec{b}_{y'} \end{aligned}$$

(\vec{t}' ist Tangentialvektor an Γ .)

Damit folgt:

$$\cos \beta = -\frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2}}, \quad \beta(\varphi) = \pi - \arccos \frac{R'}{\sqrt{R^2 + (R')^2}}$$

β ist damit eine *a priori* bekannte Funktion von φ .

(b) Schwerpunktskoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{r}_A - \vec{r}_R = \\ &= \ell \cos \psi \vec{b}_x + \ell \sin \psi \vec{b}_y - R \cos \varphi \vec{b}_{x'} - R \sin \varphi \vec{b}_{y'} \\ &= [\ell \cos \psi + R \cos(\alpha + \varphi)] \vec{b}_x + [\ell \sin \psi + R \sin(\alpha + \varphi)] \vec{b}_y \\ &= [\ell \cos \psi + R \cos(\psi + \beta)] \vec{b}_x + [\ell \sin \psi + R \sin(\psi + \beta)] \vec{b}_y \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\dot{s}^2 = \dot{\ell}^2 + [R'^2 + R^2 \beta'^2] \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\ell}\dot{\varphi}[R' \cos \beta - R \beta' \sin \beta]$$

8. Zusammenfassung:

Mit $\dot{\alpha} = (\psi + \beta - \varphi)$ und $\dot{\ell} = \ell' \dot{\varphi}$ ergibt der Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(M \ell'^2 + 2M \ell' [R' \cos \beta - R \beta' \sin \beta] \right. \\ &\quad \left. + M [R'^2 + R^2 \beta'^2] + \Theta[\beta' - 1]^2 \right) \\ &\quad - Mg [\ell \cos \psi + R \cos(\psi + \beta)] \end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen $R(\varphi)$ und $\beta(\varphi) = \pi - \arccos[R'/\sqrt{R^2 + R'^2}]$ sowie $\ell(\varphi) = \ell_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{R'^2(\tilde{\varphi}) + R^2(\tilde{\varphi})} d\tilde{\varphi}$ vorgegeben; $' \equiv \frac{d}{d\varphi}$.

9. Mathematische Struktur: Energieerhaltungssatz ist von der Form:

$$\dot{\varphi}^2 A(\varphi) = B(\varphi)$$

mit bekannten Funktionen $A(\varphi)$ und $B(\varphi)$.

Lösung dieser Gleichung durch Separation der Variablen;

$$t = \int \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \int \sqrt{\frac{A(\varphi)}{B(\varphi)}} d\varphi$$

Damit lässt sich das Problem auf eine Quadratur zurückführen.

- Lösung im Falle eines Kreiszylinders, $R = \text{const.}$, $\beta = \pi/2 = \text{const.}$, $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$:

$$\ell = \ell_0 + R\varphi, \quad A = \frac{3}{4}MR^2, \quad B(\varphi) = E + Mg[(\ell_0 + R\varphi) \cos \psi - R \sin \psi]$$

Aus $\dot{\varphi}^2 A = B(\varphi)$ folgt $2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}A = B'\dot{\varphi}$, also $\frac{3}{2}MR^2\ddot{\varphi} = MgR \cos \psi$
oder:

$$\ddot{\ell} = \frac{2}{3}g \cos \psi$$

Die Beschleunigung eines abrollenden Kreiszylinders beträgt nur zwei Drittel der Beschleunigung eines Körpers, der auf einer Ebene reibungsfrei gleitet.

4.4.4 Der Steinersche Satz

- Sei das Trägheitsmoment Θ' eines starren Körpers bezüglich einer Achse \mathcal{A}' durch den Schwerpunkt gegeben:

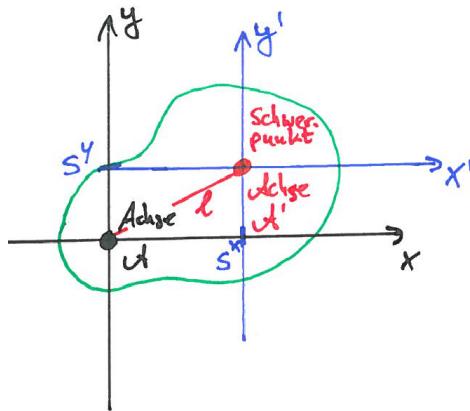
$$\Theta' = \sum_{n=1}^N m_n (x'_n{}^2 + y'_n{}^2) = \int_K \mu (x'{}^2 + y'{}^2) d^3 \vec{r}'$$

Wir verwenden hier \mathcal{A}' als z' -Achse.

- Es gilt dann:

$$s^{x'} = \sum_{n=1}^N m_n x'_n = \int_K \mu x' d^3 \vec{r}' = 0, \quad s^{y'} = \sum_{n=1}^N m_n y'_n = \int_K \mu y' d^3 \vec{r}' = 0$$

- Der Steinersche Satz gibt das Trägheitsmoment Θ des Körpers bezüglich einer Achse \mathcal{A} , die parallel zu \mathcal{A}' verläuft.
- Wir verwenden \mathcal{A} als z -Achse eines Koordinatensystems (x, y, z) , in dem die Achse \mathcal{A}' die (x, y) -Ebene bei den Koordinaten (s^x, s^y) durchstößt.
- Es ist (siehe Abb.):



$$\begin{aligned}
 \Theta &= \sum_{n=1}^N m_n(x_n^2 + y_n^2) = \sum_{n=1}^N m_n[(s^x + x'_n)^2 + (s^y + y'_n)^2] \\
 &= \sum_{n=1}^N m_n[(s^x)^2 + (s^y)^2] + \Theta' \\
 &= \Theta' + M\ell^2
 \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment Θ bezüglich einer beliebigen Achse ist gleich dem Trägheitsmoment Θ' bezüglich der zu ihr parallelen Achse durch den Schwerpunkt plus dem Trägheitsmoment der im Schwerpunkt vereinigten Masse M um die ursprüngliche Achse.

- Von einer Schar paralleler Achsen hat diejenige durch den Schwerpunkt das kleinste Trägheitsmoment.

4.4.5 Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung

Ort	x	Drehwinkel	φ
Masse	m	Trägheitsmoment	Θ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Impuls	$m\dot{x}$	Drehimpuls	$\Theta\dot{\varphi}$
Kraft	F	Drehmoment	M
kinetische Energie	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$		$\frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2$
Bewegungsgleichung	$m\ddot{x} = F$		$\Theta\ddot{\varphi} = M$

4.5 Anholonome Systeme

4.5.1 Typen der Zwangsbedingungen

- Holonome Zwangsbedingungen $g_\alpha = g_\alpha(x_n^i; t)$

1. skleronom: zeitunabhängig, $\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$

2. rheonom: zeitabhängig, $\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \neq 0$

- Anholonome Zwangsbedingungen:

Lassen sich nur in Form von Differentialgleichungen formulieren:

$$g_\alpha = g_\alpha(\dot{x}_n^i, x_n^i; t) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{x}_n^i f_{\alpha,in}(x_m^j; t) + h_\alpha(x_n^i; t) = 0 \quad (4.9)$$

Die Funktionen $f_{\alpha,in}$ und h_α sind so beschaffen, dass keine Funktion $f_\alpha = f_\alpha(x_n^i; t)$ existiert, so dass

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{x}_n^i \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_n^i} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$$

zu (4.9) äquivalent ist.

4.5.2 Behandlung anholonomer Zwangsbedingungen

- Erinnerung:

1. Virtuelle Verrückungen $\delta \vec{r}_{\alpha,n} = \sum_{i=1}^3 \delta x_{\alpha,n}^i \vec{b}_i$ für holonome Zwangsbedingungen $g_\alpha(x_n^i; t) = 0$ erfüllen:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \delta x_n^i = 0$$

2. Aus $g_\alpha(x_n^i; t) = 0$ folgt:

$$\frac{dg_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 \dot{x}_n^i \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = 0$$

3. D'Alembertsches Prinzip hatte zur Folge:

$$Z_{\alpha,n}^i = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

- Wir setzen in Analogie zu (4.9):

1. Virtuelle Verrückungen erfüllen:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 f_{\alpha,in}(x_m^j; t) \delta x_n^i = 0$$

2. Die Zwangskräfte erfüllen

$$Z_{\alpha,n}^i = \lambda_\alpha f_{\alpha,in}(x_m^j; t)$$

Damit ist das D'Alembertsche Prinzip wieder erfüllt,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 Z_{\alpha,n}^i \delta x_n^i = 0$$

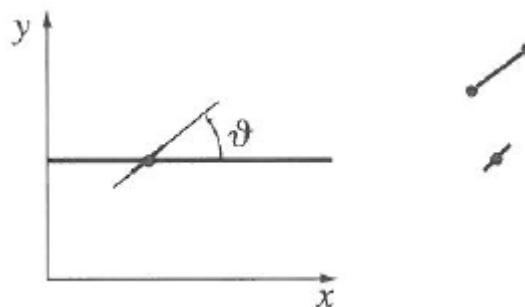
3. Weitere Behandlung wie im Falle holonomer Zwangsbedingungen.

- Beispiel: Der Schlittschuhläufer (siehe Abb.):

Zwangbedingungen:

1. holonom (skleronom): $g_1 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2 = 0$
2. anholonom: $g_2 = \frac{\dot{s}^y}{\dot{s}^x} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$

Erläuterung: Die Bewegung des Schlittschuhschwerpunktes $\vec{s} = s^x \vec{b}_x + s^y \vec{b}_y$ kann nur in Richtung der Schneide erfolgen.



Kapitel 5

Lagrange-Gleichungen II. Art

5.1 Aufgabenstellung

- Betrachten ein System mit sehr vielen Massenpunkten.
- Behandlung mittels Lagrange-I-Gleichungen sehr kompliziert: viele Gleichungen für relativ wenige Freiheitsgrade
- Idealisiert: starrer Körper: $N \rightarrow \infty$, aber nur 6 Freiheitsgrade (3 Schwerpunkts- und drei Rotationsfreiheitsgrade)
- Lösung der Bewegungsgleichungen im vorigen Kapitel durch Ausnutzung des Energiesatzes.
- Aber: Erhaltungssätze liefern gesamte Lösung nur in Spezialfällen (z.B. die ebene Abrollbewegung eines Zylinders)
- Daher Aufgabenstellung:
Man finde Bewegungsgleichungen, die nach Art und Anzahl genau den Freiheitsgraden des Systems entsprechen und in denen Zwangskräfte und Nebenbedingungen nicht mehr vorkommen.
- Diese Überlegungen führen zu den *Lagrange-Gleichungen II. Art.*

5.2 Generalisierte Koordinaten

- Betrachten Massenpunktsystem bestehend aus N Massenpunkten, das N_Z (holonomen) Zwangsbedingungen unterliegt:

$$g_\alpha(x_n^i; t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N_Z, \quad i = 1, \dots, 3, \quad n = 1, \dots, N.$$

Hierbei sind die x_n^i die kartesischen Koordinaten der Massenpunkte in einem IS \mathcal{S} .

- Einführung von $N_F = 3N - N_Z$ generalisierten Koordinaten q_A , ($A = 1, \dots, N_F$) derart, dass die Zwangsbedingungen für beliebige Wahl der q_A (innerhalb deren Definitionsbereich) immer erfüllt sind:

- die kartesischen Koordinaten x_n^i des IS \mathcal{S} schreiben sich als *bekannte* Funktionen der q_A :

$$x_n^i = x_n^i(q_A; t), \quad A = 1, \dots, N_F, \quad N_F = 3N - N_Z$$

für alle $i = 1, \dots, 3, \quad n = 1, \dots, N$.

- Setzen wir diese Funktionen in die Zwangsbedingungen ein, so verschwinden diese identisch:

$$g_\alpha\left(x_n^i(q_A; t); t\right) \equiv 0$$

- Beispiel:

Räumliches Pendel für einen Massenpunkt,

$$g_1(x, y, z; t) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \quad (\ell \text{ fest vorgegeben})$$

Generalisierte Koordinaten ϑ, φ (Kugelkoordinaten auf der Kugelschale):

$$x = \ell \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \ell \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \ell \cos \vartheta.$$

Damit ist die Zwangsbedingung $g_1 = 0$ für eine beliebige Wahl der Winkel ϑ, φ identisch erfüllt.

- Damit erübrigert sich die Betrachtung der Zwangsbedingungen nach Einführung angepasster generalisierter Koordinaten; sie sind dann automatisch erfüllt.

5.3 Ableitung der Lagrange-Gleichungen II. Art

- Wegen

$$0 \equiv \tilde{g}_\alpha(q_A; t) = g_\alpha(x_n^i(q_A; t); t)$$

folgt auch für alle $A = 1, \dots, N_F$:

$$0 \equiv \frac{\partial \tilde{g}_\alpha}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \quad (5.1)$$

- Im Pendelbeispiel mit $q_A = \vartheta$:

$$2x \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + 2y \frac{\partial y}{\partial \vartheta} + 2z \frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 2\ell^2(\sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta) = 0$$

- Multiplizieren nun die Lagrange-Gleichungen I. Art,

$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i}$$

mit $\frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}$ und summieren über i und n :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + \sum_{\alpha=1}^{N_Z} \lambda_\alpha \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \right)$$

- Wegen (5.1) verschwindet der Klammerterm, und es folgt für alle $A = 1, \dots, N_F$:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \left(m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} - F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \right) = 0 \quad (5.2)$$

- Nun ist die kinetische Energie gegeben durch:

$$T = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (\dot{x}_n^i)^2$$

Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A; t)$ ist

$$\dot{x}_n^i = \dot{x}_n^i(q_A, \dot{q}_A; t) = \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial x_n^i}{\partial t},$$

und damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial q_A} &= \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial t} \\ \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial \dot{q}_A} &= \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_A} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \dot{x}_n^i \left(\sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial q_B} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_A \partial t} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial \dot{x}_n^i}{\partial \dot{q}_A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \dot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \left[m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + m_n \dot{x}_n^i \left(\sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial q_B \partial q_A} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 x_n^i}{\partial t \partial q_A} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} + \frac{\partial T}{\partial q_A} \end{aligned}$$

- Damit ist der erste Term in (5.2) gleich:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n \ddot{x}_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A}$$

- Definieren wir die *generalisierten Kräfte*

$$Q_A := \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A},$$

so ergibt sich als Vorstufe zu den Lagrange-Gleichungen II. Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A} = Q_A \tag{5.3}$$

1. Die sind Bewegungsgleichungen, in denen Zwangskräfte und Zwangsbedingungen nicht mehr explizit vorkommen.
2. Gültig für Probleme mit *und* ohne Zwangsbedingungen.
3. Liefern für $N_Z = 0$ (und Wahl der kartesischen Koordinaten x_n^i als generalisierte Koordinaten q_A) genau die Newtonschen Gleichungen

$$m_n \ddot{x}_n^i = F_n^i$$

- Übergang zu den eigentlichen Lagrange-Gleichungen II. Art:

1. Kräfte F_n^i weisen ein Potential $U = U(x_n^i)$ auf:

$$F_n^i = -\frac{\partial U}{\partial x_n^i}.$$

2. Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A; t)$ ist:

$$U(q_A; t) = U\left(x_n^i(q_A; t)\right),$$

mit:

$$\frac{\partial U}{\partial q_A} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A}$$

3. Somit folgt:

$$Q_A = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N F_n^i \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = - \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_n^i} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} = -\frac{\partial U}{\partial q_A}$$

4. Ferner hängt das Potential nicht von den *generalisierten Geschwindigkeiten* ab,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} = 0,$$

und damit folgt aus (5.3):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial T}{\partial q_A} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial U}{\partial q_A},$$

oder die *Lagrange-Gleichungen II. Art*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} - \frac{\partial L}{\partial q_A} = 0 \quad (5.4)$$

mit der *Lagrange-Funktion* L des Systems, die sich schreibt

- (a) als Differenz von kinetischer und potentieller Energie und
- (b) als Funktion der generalisierten Koordinaten q_A und Geschwindigkeiten \dot{q}_A sowie der Zeit t :

$$L(q_A, \dot{q}_A; t) = T(q_A, \dot{q}_A; t) - U(q_A; t)$$

- *Anmerkungen:*

1. Die Lagrange-Gleichungen II. Art sind ein System von N_F gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung der N_F Funktionen $q_A(t)$.
2. Zwangsbedingungen und -kräfte sind eliminiert.
3. Gleichungen sind anwendbar auf Systeme mit *holonomen* Zwangsbedingungen und eingeprägten Kräften, die ein Potential aufweisen.
4. Gleichungen geben die einfachste und übersichtlichste Formulierung der Bewegungsgleichungen; sie sollten bevorzugt für Probleme der Punktmechanik benutzt werden.

5.4 Energiesatz im Lagrange-II-Formalismus

Berechnung der zeitlichen Änderung der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial q_A} \dot{q}_A + \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \ddot{q}_A + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} + \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \ddot{q}_A + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A \right) + \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.5)$$

Gleichung (5.5) ist die Energiebilanzgleichung in der Sprache der Lagrange-Funktion:

1. Für skleronome Zwangsbedingungen hängen die x_n^i nicht explizit von der Zeit ab (nur von den generalisierten Koordinaten q_A), $x_n^i = x_n^i(q_A)$.
2. Dann sind auch T und U und mithin L nicht explizit zeitabhängig,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (5.6)$$

3. Es folgt

$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A - L = \text{const.} \quad (5.7)$$

(Erinnerung: nur zeitabhängige Bindungen können Energie des Systems ändern.)

4. Größe auf der linken Seite von (5.7) ist tatsächlich Gesamtenergie:

- Wegen $x_n^i = x_n^i(q_A)$ (nicht explizit zeitabhängig), folgt:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (\dot{x}_n^i)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \dot{q}_A \right)^2 \\ &= \sum_{A,B=1}^{N_F} \dot{q}_A \dot{q}_B \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_A} \frac{\partial x_n^i}{\partial q_B} \right). \end{aligned}$$

- Die kinetische Energie T ist somit eine *positiv homogene Funktion vom Grad 2 in den \dot{q}_A* (siehe Kapitel (2.9), Virialsatz). Es gilt daher der *Eulersche Satz*:

$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A = 2T$$

- Weil aber $U = U(q_A)$, also $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_A} = 0$, folgt:

$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A = \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A = 2T$$

und somit:

$$\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A - L = 2T - (T - U) = T + U = E$$

5. *Folgerung:* Die Energie ist eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrange-Funktion L invariant gegenüber zeitlichen Translationen ist, also (5.6) gilt.
6. Andere Formulierung: Man kann bei Kenntnis des Kraftgesetzes durch Beobachtung von Bahnkurven nicht auf den Zeitnullpunkt schließen.
7. Zusammenhang zwischen Symmetrieeigenschaften und Erhaltungssätzen spielt in allen Gebieten der modernen Physik eine große Rolle (*Noether-Theorem*).

5.5 Zyklische Koordinaten

- Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von einer bestimmten generalisierten Koordinate q_B abhängt, so gilt ein zugehöriger Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial L}{\partial q_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = \text{const.}$$

- Damit ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen gegeben.
- Die zugehörige Koordinate q_B wird *zyklisch* genannt.
- Man wird immer versuchen, möglichst viele zyklische Koordinaten einzuführen.
- Beispiel:

Freier Massenpunkt im Zentralkraftfeld (Potential $U, \vec{F} = -\text{grad } U$), mit Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) um das Kraftzentrum als generalisierte Koordinaten:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Lagrange-Funktion hängt offenbar nicht von φ ab:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}, \quad mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = m\varrho^2 \dot{\varphi} = L^z = \text{const.}$$

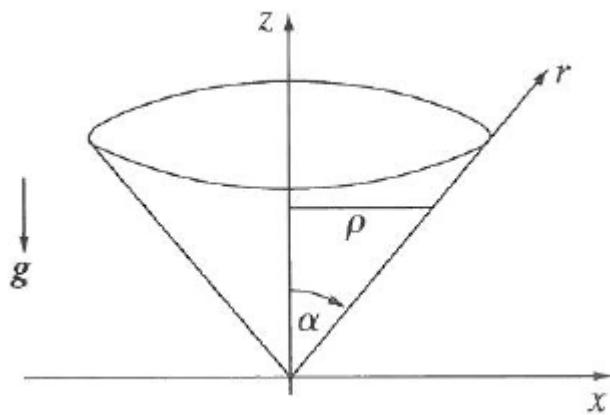
mit der Zylinderkoordinate $\varrho = r \sin \vartheta$. Damit entspricht der zyklischen Koordinate φ die Erhaltung der z -Komponente des Drehimpulses.

- Ein System kann mehr Symmetrien haben als es zyklische Koordinaten gibt:

- Im obigen Beispiel sind auch L^x und L^y konstant; diesen entsprechen bei unserer Wahl der generalisierten Koordinaten keine zyklischen Koordinaten.
- Der Konstanz der Drehimpulskomponenten L^x, L^y, L^z entspricht die Symmetrie bezüglich dreiparametrischer räumlicher Drehungen; L^z : Drehung um die z -Achse (φ -Invarianz).
- Maximale Anzahl der zyklischen Koordinaten ist gegeben durch die Maximalzahl *vertauschbarer* Symmetrieeoperationen (die Drehungen sind nicht vertauschbar; deshalb gibt es im Beispiel nur eine zyklische Koordinate).

5.6 Beispiele

5.6.1 Massenpunkt auf einem Kreiskegel im Erdschweerefeld



Lösungsschritte im Lagrange-II-Formalismus:

1. Man führe geeignete generalisierte Koordinaten ein, die die Zwangsbedingungen erfüllen und den Symmetrien des Problems angepasst sind:

- Kegelgleichung: $x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \alpha = 0$
- Generalisierte Koordinaten: Kugelkoordinaten (r, φ) ,

$$x = r \sin \alpha \cos \varphi, \quad y = r \sin \alpha \sin \varphi, \quad z = r \cos \alpha$$

Es ist $\vartheta = \alpha = \text{const.}$; Bewegung ist durch die beiden Koordinaten (r, φ) festgelegt.

2. Man schreibe kinetische und potentielle Energie sowie die Lagrange-Funktion L als Funktionen der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) \\ U &= mgz = mgr \cos \alpha \\ L &= T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) - mgr \cos \alpha \end{aligned}$$

3. Man schreibe die Lagrange-Gleichungen II. Art auf, stelle die zyklischen Koordinaten fest und formuliere geltende Erhaltungssätze (einschließlich Energieerhaltung, falls geltend):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \alpha) = 0 \end{aligned}$$

Einige zyklische Koordinate ist φ , zugeordneter Erhaltungsgröße ist

$$L^z = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \alpha. \quad (5.8)$$

Wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ gilt Energieerhaltung:

$$E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha) + mgr \cos \alpha \quad (5.9)$$

4. Man löse die Lagrange-Gleichungen II. Art unter Ausnutzung der Erhaltungssätze und diskutiere die Ergebnisse:

Einsetzen von (5.8) in (5.9) liefert:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{(L^z)^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha = E.$$

Lösung wie beim eindimensionalen Bewegungsproblem im Ersatzpotential

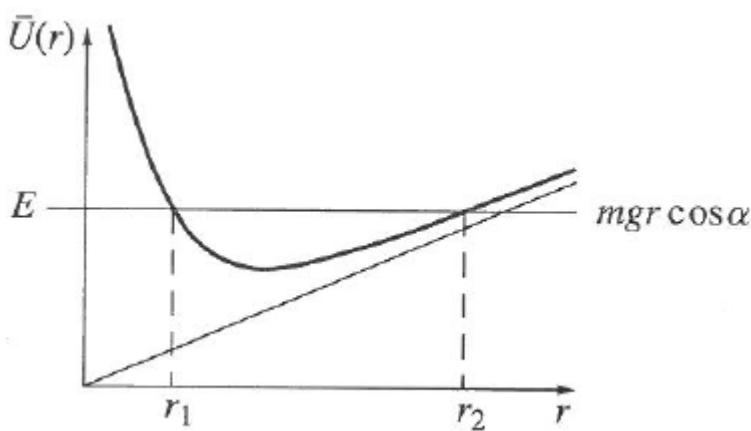
$$\bar{U}(r) = \frac{(L^z)^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha$$

durch Trennung der Variablen,

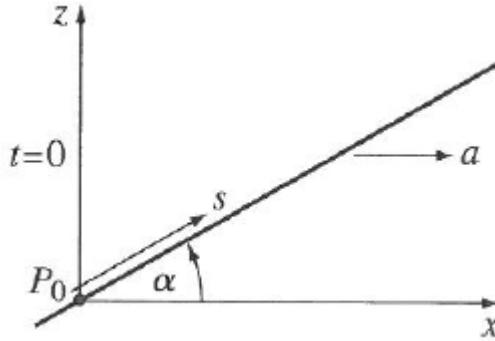
$$t = \text{sign}(\dot{r}_0) \int_{r_0}^{r(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - \bar{U}(\xi)]}}$$

Anschauliche Diskussion:

- Für $L^z = 0$ rollt der Massenpunkt mit der Beschleunigung $g \cos \alpha$ in die Kegelspitze hinein.
- Für $L^z \neq 0$ geht die Bewegung ständig zwischen zwei festen Werten r_1 und r_2 hin und her.
- Der Massenpunkt rollt dann in auf- und absteigenden Spiralen zwischen den Kreisen der Höhe $z_{1/2} = r_{1/2} \cos \alpha$ mit gleichbleibendem Umlaufsinn auf dem Kegelmantel.
- Massenpunkt kann Spitze nie erreichen (*keine Reibung*).



5.6.2 Bewegte schiefe Ebene ohne äußeres Kraftfeld



- Beschleunigte Bewegung einer schiefen Ebene gemäß:

$$z - \left(x - \frac{a}{2}t^2 \right) \tan \alpha = 0$$

- Generalisierte Koordinaten: s (Abstand von einem festen Punkt P_0 der Ebene) und y :

$$x = \frac{a}{2}t^2 + s \cos \alpha, \quad z = s \sin \alpha$$

- Lagrange-Funktion ($U = 0$: kein äußeres Kraftfeld)

$$L = T - U = T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{s}at \cos \alpha + a^2t^2)$$

- L hängt weder von s noch von y explizit ab. Beide Koordinaten sind daher zyklisch:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = p^y = \text{const.}$$

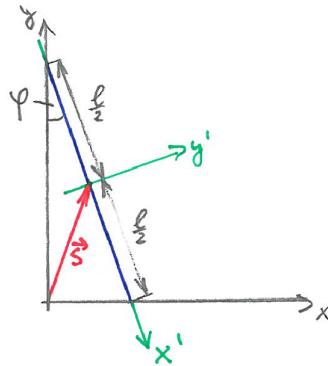
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m(\dot{s} + at \cos \alpha) = m\dot{s}_0 = \text{const.}$$

Lösung:

$$y = y_0 + \frac{p^y}{m}t, \quad s = s_0 + \dot{s}_0 t - \frac{a}{2}t^2 \cos \alpha$$

- Massenpunkt bewegt sich relativ zur schiefen Ebene so, als ob eine Beschleunigung $-a \cos \alpha$ wirkt.
- Wegen $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0$ gilt *keine* Energieerhaltung.

5.6.3 An einer Wand abgleitender Stab



- Betrachten homogenen Stab der Länge ℓ und Masse M .
- Koordinatentransformation zwischen den Systemen \mathcal{S} (raumfestes Inertialsystem) und Σ' (körperfestes Schwerpunktsystem):

$$x = s^x + y' \cos \varphi + x' \sin \varphi, \quad y = s^y - x' \cos \varphi + y' \sin \varphi, \quad z = z'$$

(siehe Abb.)

- Schwerpunktskoordinaten:

$$s^x = \frac{\ell}{2} \sin \varphi, \quad s^y = \frac{\ell}{2} \cos \varphi$$

Damit:

$$x = \left(\frac{\ell}{2} + x' \right) \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad y = \left(\frac{\ell}{2} - x' \right) \cos \varphi + y' \sin \varphi$$

- Betrachten φ als einzige generalisierte Koordinate; die Koordinaten x_n^i jedes Massenpunktes des Stabes sind dann gegeben in Abhängigkeit von φ und den (festen) Koordinaten $x_n^{i'}$ innerhalb von Σ' .
- Kinetische Energie des Stabes:
Es ist:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varphi}^2 \left[\frac{\ell^2}{4} + (x'^2 + y'^2) + \ell(x' \cos 2\varphi - y' \sin 2\varphi) \right],$$

und damit:

$$T = \frac{1}{2} \int_K \mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) d^3\vec{r}' = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left(\frac{M\ell^2}{4} + \Theta \right),$$

da im Schwerpunktsystem Σ' die Ausdrücke $\int_K \mu x' d^3\vec{r}'$ und $\int_K \mu y' d^3\vec{r}'$ verschwinden.

Das Trägheitsmoment eines dünnen Stabes (Masse pro Länge M/ℓ) um den Mittelpunkt lautet:

$$\Theta = \frac{M}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} {x'}^2 dx' = \frac{M}{\ell} \left[\frac{{x'}^3}{3} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{M\ell^2}{12}$$

Somit:

$$T = \frac{M\ell^2 \dot{\varphi}^2}{6}$$

- Potentielle Energie:

$$U = \int_K \mu g y d^3\vec{r}' = \frac{Mg\ell}{2} \cos \varphi$$

- Lagrange-Funktion:

$$L = T - U = \frac{M\ell^2 \dot{\varphi}^2}{6} - \frac{Mg\ell}{2} \cos \varphi$$

- Lagrange-Gleichung II. Art:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{M\ell^2 \ddot{\varphi}}{3} - \frac{Mg\ell}{2} \sin \varphi$$

führt auf

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2\ell} \sin \varphi$$

- Diskussion:

1. Stab fällt mit wachsender Beschleunigung, bis er bei $\varphi = \pi/2$ aufschlägt.
2. Übergang in Schwingungsgleichung des mathematischen Pendels durch Substitution $\varphi = \pi + \chi$ (siehe Kapitel 3.5.1); kein Schwingen wegen Aufschlagen des Stabes auf Boden.

5.7 Weitere Beispiele für Lagrange-Funktionen

1. Allgemeine eindimensionale Bewegung in einem Potential:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x)$$

2. Harmonischer Oszillatör:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

3. Fall und Wurf im homogenen Schwerefeld (dreidimensional):

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

4. Planetenbewegung:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \gamma \frac{mM}{r}$$

5. Mathematisches Kreispendel:

$$L = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell \cos \varphi$$

6. Physisches Pendel:

$$L = \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2 + Mgs \cos \varphi$$

Kapitel 6

Starrer Körper und Kreiseltheorie

- Die allgemeine Bewegung des starren Körpers hat 6 Freiheitsgrade: 3 Schwerpunktkoordinaten und 3 Rotationsfreiheitsgrade (beschrieben durch 3 Drehwinkel).
- Falls Körper an einem Punkt festgehalten wird, sprechen wir von einem *Kreisel*.
- Bei Rotation um eine feste Achse, handelt es sich um ein *physisches Pendel* (ein Freiheitsgrad).
- Wir behandeln zunächst die allgemeine Bewegung des starren Körpers und daran anschließend den Kreisel (das physische Pendel haben wir bereits in (4.4.2) untersucht).

6.1 Die allgemeine Bewegung des freien starren Körpers

6.1.1 Koordinatensysteme

- Wir betrachten den starren Körper
 1. in einem *erdfesten* Inertialsystem \mathcal{S} mit kartesischen Koordinaten $x^i = (x, y, z)$

- 2. in einem *körperfesten* Schwerpunktsystem Σ' mit kartesischen Koordinaten $x^{i'} = (x', y', z')$.
- Die Massenpunkte weisen in Σ' feste, zeitunabhängige Koordinatenwerte $x^{i'}$ auf.
- Der Ursprung von Σ' liegt im Schwerpunkt, d.h. es verschwinden die Schwerpunktkoordinaten

$$Ms^{i'} = \int_K \mu x^{i'} d^3\vec{r}' = 0, \quad M = \int_K \mu d^3\vec{r}' \quad (6.1)$$

K bezeichne hier wie früher das feste, zeitunabhängige Integrationsgebiet innerhalb von Σ' , das vom Körper ausgefüllt wird.

- Koordinatentransformation $\Sigma' \leftrightarrow \mathcal{S}$ (siehe Kapitel 1.6):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x(t) \\ s^y(t) \\ s^z(t) \end{pmatrix} + \hat{O}^T(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

mit zeitabhängigen Schwerpunktkoordinaten $s^i(t)$ bezüglich \mathcal{S} und *orthogonaler* Transformationsmatrix

$$\hat{O} = \hat{O}(t), \quad \hat{O}^T \hat{O} = \hat{O} \hat{O}^T = \hat{I} \quad \text{für alle Zeiten } t.$$

- In Indexschreibweise:

$$x^i = s^i(t) + \sum_{i'=1}^3 [\hat{O}^T]_{i'}^i x^{i'}$$

- Wir werden darüber hinaus ein weiteres körperfestes System Σ'' einführen, in dem in Matrixschreibweise die Komponenten des sogenannten *Trägheitstensors* $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ Diagonalgestalt annehmen (*Hauptachsentransformation*).

6.1.2 Kinetische Energie

- Um die Lagrange-Funktion L aufzustellen und den starren Körpern mit dem Lagrange-II-Formalismus behandeln zu können, benötigen wir

wir die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int_K \mu \vec{v}^2 d^3 \vec{r}'$$

- Nach den im Kapitel 1.6, „Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen“ hergeleiteten Formeln ist:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{s}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Hierbei ist $\vec{\omega}$ der i.A. zeitabhängige Vektor der Winkelgeschwindigkeit von Σ' bezüglich \mathcal{S} mit

$$[\hat{O} \frac{d\hat{O}^T}{dt}]_{j'}^{i'} = [\hat{A}]_{j'}^{i'} = - \sum_{k'=1}^3 \varepsilon_{j'k'}^{i'} \omega^{k'}, \quad \vec{\omega} = \sum_{i'=1}^3 \omega^{i'} \vec{b}_{i'}$$

- Die Geschwindigkeit $\vec{v}' = \sum_{i'=1}^3 \dot{x}^{i'} \vec{b}_{i'}$ der Massenpunkte verschwindet im körperfesten Systems Σ' (der Körper ruht in Σ'), also $\vec{v}' = 0$.
- Dann folgt:

$$T = \frac{1}{2} \int_K \mu \left(\dot{\vec{s}}^2 + 2 \dot{\vec{s}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}') + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 \right) d^3 \vec{r}'$$

- Das Integral über den mittleren Term verschwindet wegen (6.1).
- Sei nun γ der von den Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{r}' eingeschlossene Winkel, $\vec{\omega} \cdot \vec{r}' = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}'| \cos \gamma$. Dann ist:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = (|\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}'| \sin \gamma)^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}'^2 (1 - \cos^2 \gamma) = \vec{\omega}^2 \vec{r}'^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}')^2,$$

In Komponenten:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \sum_{i', k'=1}^3 \omega^{i'} \omega^{k'} \left[\vec{r}'^2 \delta_{k'}^{i'} - x^{i'} x^{k'} \right]$$

- Damit folgt für die kinetische Energie:

$$T = \frac{M}{2} \dot{\vec{s}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i', k'=1}^3 \omega^{i'} \omega^{k'} \Theta_{k'}^{i'} = \frac{M}{2} \dot{\vec{s}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}) \quad (6.2)$$

mit den Komponenten $\Theta_{k'}^{i'}$ des Trägheitstensors $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$,

$$\Theta_{k'}^{i'} = \int_K \mu \left[\vec{r}'^2 \delta_{k'}^{i'} - x^{i'} x^{k'} \right] d^3 \vec{r}'$$

6.1.3 Der Trägheitstensor

Die Koeffizientenmatrix

$$\Theta_{k'}^{i'} = \begin{pmatrix} \int_K \mu(y'^2 + z'^2) d^3 \vec{r}' & -\int_K \mu x' y' d^3 \vec{r}' & -\int_K \mu x' z' d^3 \vec{r}' \\ -\int_K \mu x' y' d^3 \vec{r}' & \int_K \mu(x'^2 + z'^2) d^3 \vec{r}' & -\int_K \mu y' z' d^3 \vec{r}' \\ -\int_K \mu x' z' d^3 \vec{r}' & -\int_K \mu y' z' d^3 \vec{r}' & \int_K \mu(x'^2 + y'^2) d^3 \vec{r}' \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

stellt die Komponenten des sogenannten *Trägheitstensors* $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ im Koordinatensystem Σ' dar.

- *Tensoren zweiter Stufe:*

Ein Tensor zweiter Stufe ist eine lineare Abbildung des Tangentialvektorraumes in sich, d.h. jedem Vektor \vec{v} wird ein Vektor \vec{w} zugeordnet. Wir schreiben:

$$\vec{w} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{v}$$

In Komponenten (innerhalb von Σ') ist

$$\vec{w} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{v} \Leftrightarrow w^{i'} = \sum_{k'=1}^3 \Theta_{k'}^{i'} v^{k'}$$

- *Transformationsgesetz für Tensoren zweiter Stufe:*

Da sich bei einem Übergang in ein anderes System Σ'' mit Koordinaten $x^{i''} = x^{i''}(x^{i'})$ die Vektorkomponenten gemäß

$$w^{i''} = \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} w^{i'}, \quad w^{k'} = \sum_{k''=1}^3 \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} w^{k''}$$

transformieren, folgt:

$$w^{i''} = \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \sum_{k'=1}^3 \Theta_{k'}^{i'} v^{k'} = \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \sum_{k'=1}^3 \Theta^{i'k'} \sum_{k''=1}^3 \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} v^{k''} = \sum_{k''=1}^3 \Theta_{k''}^{i''} v^{k''}$$

Die Komponenten von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ in Σ'' ergeben sich also zu:

$$\Theta_{k''}^{i''} = \sum_{i', k'=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \Theta_{k'}^{i'}$$

Anmerkung: Orthonormale Transformationsmatrizen \hat{O} sind *keine* Tensoren. Im Gegensatz zu \hat{O} stellt $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ eine physikalische Größe des betrachteten Körpers dar.

- *Symmetrie von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$:*

Weil die Koeffizientenmatrix (6.3) symmetrisch ist, $\Theta_{k'}^{i'} = \Theta_{i'}^{k'}$, folgt für das Skalarprodukt:

$$\vec{w} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{v}) = \sum_{i', k'=1}^3 w^{i'} \Theta_{k'}^{i'} v^{k'} = \sum_{i', k'=1}^3 w^{i'} \Theta_{i'}^{k'} v^{k'} = \sum_{k'=1}^3 v^{k'} (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w})^{k'} = \vec{v} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w}),$$

also:

$$\vec{w} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w}) \quad \text{oder} \quad (\vec{v}, \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w}) = (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{v}, \vec{w})$$

- *Positive Definitheit:*

Da für beliebiges $\vec{\omega} \neq 0$ stets $T > 0$ gilt (kinetische Energie ist stets positiv), folgt positive Definitheit von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$:

$$\text{für alle Vektoren } \vec{\omega} \neq 0 \text{ gilt : } \vec{\omega} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}) > 0, \quad (\vec{\omega}, \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}) > 0$$

- *Eigenschaften positiv-definiter, symmetrischer Tensoren:*

1. $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ besitzt 3 reelle und positive *Eigenwerte*

$$\lambda_1 = A > 0, \quad \lambda_2 = B > 0, \quad \lambda_3 = C > 0,$$

für die die *Eigenwertgleichung*

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w} = \lambda \vec{w}$$

eine Lösung $\vec{w} \neq 0$ besitzt.

2. Man findet zugehörige *Eigenvektoren* $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$, die normiert und orthogonal sind, $\vec{w}_i \cdot \vec{w}_j = \delta_{ij}$, $\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{w}_i = \lambda_i \vec{w}_i$.

- *Hauptachsentransformation:*

Ausgehend vom körperfesten System Σ' führen wir ein neues körperfestes System Σ'' gemäß

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \hat{U}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

ein, wobei wir die (zeitunabhängige) orthogonale Transformationsmatrix \hat{U} aus den Komponenten der Eigenvektoren bilden:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} (\vec{w}_1)^{1'} & (\vec{w}_1)^{2'} & (\vec{w}_1)^{3'} \\ (\vec{w}_2)^{1'} & (\vec{w}_2)^{2'} & (\vec{w}_2)^{3'} \\ (\vec{w}_3)^{1'} & (\vec{w}_3)^{2'} & (\vec{w}_3)^{3'} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}^T = \begin{pmatrix} (\vec{w}_1)^{1'} & (\vec{w}_2)^{1'} & (\vec{w}_3)^{1'} \\ (\vec{w}_1)^{2'} & (\vec{w}_2)^{2'} & (\vec{w}_3)^{2'} \\ (\vec{w}_1)^{3'} & (\vec{w}_2)^{3'} & (\vec{w}_3)^{3'} \end{pmatrix}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \Theta_{k''}^{i''} &= \sum_{i', k'=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \Theta_{k'}^{i'} = \sum_{i', k'=1}^3 [\hat{U}]_{i'}^{i''} [\hat{U}^T]_{k''}^{k'} \Theta_{k'}^{i'} \\ &= \sum_{i'=1}^3 [\vec{w}_{i''}]^{i'} \left(\sum_{k'=1}^3 \Theta_{k'}^{i'} [\vec{w}_{k''}]^{k'} \right) \\ &= \sum_{i'=1}^3 [\vec{w}_{i''}]^{i'} \lambda_{k''} [\vec{w}_{k''}]^{i'} = \lambda_{k''} \delta_{k''}^{i''}, \end{aligned}$$

also:

$$\Theta_{k''}^{i''} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

- Im Koordinatensystem Σ'' ist die Koeffizientenmatrix des Trägheitstensors $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ diagonal, und die positiven Eigenwerte A, B, C sitzen auf der Hauptdiagonale.
- Man bezeichnet A, B, C als die *Hauptträgheitsmomente* des Körpers, die Richtungen der Eigenvektoren \vec{w}_i als *Trägheitsachsen* und das System Σ'' als *Hauptachsensystem*.

- *Einteilung:*

1. Unsymmetrischer Kreisel: alle drei Hauptträgheitsmomente sind verschieden.
2. Symmetrischer Kreisel: zwei Hauptträgheitsmomente stimmen überein. Die Achse in Richtung des dritten Hauptträgheitsmomentes (das verschieden von den anderen beiden ist) wird *Figurenachse* genannt.
3. Kugelkreisel: alle drei Hauptträgheitsmomente stimmen überein.

- *Trägheitsmoment und Trägheitstensor:*

- In Kapitel 4.4.2 haben wir das Trägheitsmoment $\Theta_{\vec{n}}$ eines Körpers um eine Drehachse mit Richtungseinheitsvektor \vec{n} kennengelernt (wir haben dort $\vec{n} = \vec{b}_z$ gesetzt).
- Dabei ist das Abstandsquadrat eines Punktes mit Ortsvektor \vec{r}' zur Drehachse gegeben durch $(\vec{n} \times \vec{r}')^2$, und wir erhalten somit:

$$\Theta_{\vec{n}} = \int_K \mu(\vec{n} \times \vec{r}')^2 d^3 \vec{r}' = \vec{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{n}),$$

vergleiche Ausdrücke in 6.1.2, Punkt 4.

- *Trägheitsellipsoid:*

- Durch den biquadratischen Ausdruck

$$1 = \vec{r}' \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}') = \sum_{i',k'=1}^3 x^{i'} x^{k'} \Theta_{k'}^{i'}$$

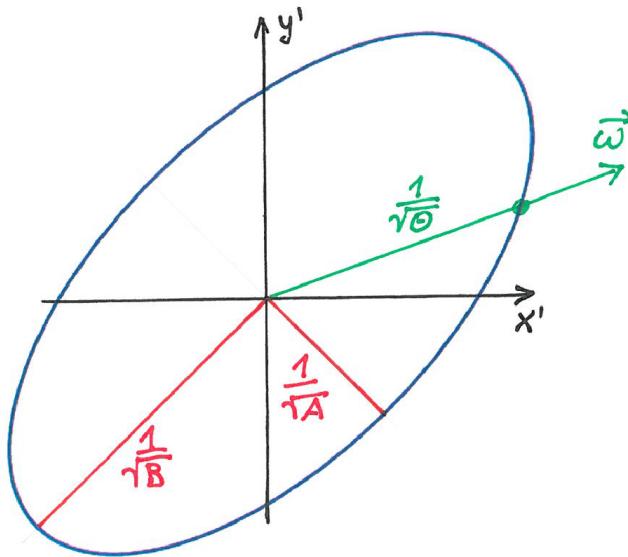
wird eine Fläche 2. Ordnung definiert, $f(\vec{r}') = \vec{r}' \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}') - 1 = 0$.

- Wegen der positiven Definitheit von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ ist diese Fläche ein (i.A. verdrehtes) Ellipsoid, das sogenannte *Trägheitsellipsoid*.
- Die Drehachse mit Richtungseinheitsvektor \vec{n} durchstoßt diese Fläche im Punkt mit den Koordinaten $x_{\vec{n}}^{i'}$, wobei:

$$1 = \vec{r}'_{\vec{n}} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}'_{\vec{n}}) = |\vec{r}'_{\vec{n}}|^2 \vec{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{n}) = |\vec{r}'_{\vec{n}}|^2 \Theta_{\vec{n}}.$$

Also hat der Durchstoßpunkt vom Nullpunkt den Abstand $1/\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}$ (siehe Abb.)

- Die Achsen des Ellipsoids weisen in Richtung der Trägheitsachsen, d.h. im Hauptachsensystem Σ'' ist das Ellipsoid nicht verdreht, die Achsen des Ellipsoids stimmen mit den Koordinatenachsen überein.



- *Verallgemeinerter Steinerscher Satz:*

- Oben eingeführter Trägheitstensor $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ ist dem Schwerpunkt zugeordnet (betrachtet werden Drehachsen durch den Schwerpunkt).
- Man kann Trägheitstensoren mit Komponenten (6.3) einem beliebigen Punkt innerhalb und außerhalb des Körpers zuordnen.
- Der dem Punkt mit Ortsvektor $\vec{r}' = \vec{\ell}'$ zugeordnete Trägheitstensor $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\vec{\ell}'}$ beschreibt dabei Trägheitsmomente $\Theta_{\vec{n}, \vec{\ell}'} = \vec{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\vec{\ell}'} \vec{n})$ für Drehachsen durch den fraglichen Punkt.
- Es gilt:

$$\begin{aligned}
 (\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\vec{\ell}'})^{i'}_{k'} &= \int_K \mu \left[(\vec{r}' - \vec{\ell}')^2 \delta^{i'}_{k'} - (x^{i'} - \ell^{i'}) (x^{k'} - \ell^{k'}) \right] d^3 \vec{r}' \\
 &= \int_K \mu \left[\vec{r}'^2 \delta^{i'}_{k'} - x^{i'} x^{k'} + \vec{\ell}'^2 \delta^{i'}_{k'} - \ell^{i'} \ell^{k'} \right] d^3 \vec{r}' \\
 &= \Theta^{i'}_{k'} + M(\vec{\ell}'^2 \delta^{i'}_{k'} - \ell^{i'} \ell^{k'}),
 \end{aligned}$$

also:

$$(\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\vec{\ell}})^{i'}_{k'} = \Theta^{i'}_{k'} + M \begin{pmatrix} (l^{y'})^2 + (l^{z'})^2 & -l^{x'} l^{y'} & -l^{x'} l^{z'} \\ -l^{x'} l^{y'} & (l^{x'})^2 + (l^{z'})^2 & -l^{y'} l^{z'} \\ -l^{x'} l^{z'} & -l^{y'} l^{z'} & (l^{x'})^2 + (l^{y'})^2 \end{pmatrix}$$

- Die Trägheitsachsen von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\vec{\ell}}$ und $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ stimmen i.A. nicht überein.

6.1.4 Drehimpuls

- Wir benutzen wieder die Formeln aus Kapitel 1.6,

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{s}, \quad \vec{v} = \vec{v}' + \dot{\vec{s}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \dot{\vec{s}} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (\vec{v}' = 0)$$

und schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_K \mu \vec{r} \times \vec{v} \, d^3 \vec{r}' = \int_K \mu(\vec{s} + \vec{r}') \times (\dot{\vec{s}} + \vec{\omega} \times \vec{r}') \, d^3 \vec{r}' \\ &= \int_K \mu \vec{s} \times \dot{\vec{s}} \, d^3 \vec{r}' + \int_K \mu \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \, d^3 \vec{r}' \\ &\quad + \int_K \mu \vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \, d^3 \vec{r}' + \int_K \mu \vec{r}' \times \dot{\vec{s}} \, d^3 \vec{r}' \end{aligned}$$

- Die Integranden der letzten beiden Terme sind linear in den $x^{i'}$ und verschwinden daher wegen (6.1). Daher folgt:

$$\vec{L} = M \vec{s} \times \dot{\vec{s}} + \int_K \mu \vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \, d^3 \vec{r}'$$

- Das doppelte Kreuzprodukt schreiben wir mittels *bac-cab-Formel* um:

$$\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{r}'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}') \vec{r}'$$

In Komponenten:

$$[\vec{r}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')]^{i'} = \vec{r}'^2 \vec{\omega}^{i'} - \sum_{k'=1}^3 \omega^{k'} x^{k'} x^{i'} = \sum_{k'=1}^3 \left(\vec{r}'^2 \delta_{k'}^{i'} - x^{k'} x^{i'} \right) \omega^{k'}$$

- Damit wird:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= M\vec{s} \times \dot{\vec{s}} + \sum_{i',k'=1}^3 \left[\int_K \mu \left(\vec{r}'^2 \delta_{k'}^{i'} - x^{k'} x^{i'} \right) d^3 \vec{r}' \right] \omega^{k'} \vec{b}_{i'} \\ &= M\vec{s} \times \dot{\vec{s}} + \sum_{i',k'=1}^3 \Theta_{k'}^{i'} \omega^{k'} \vec{b}_{i'},\end{aligned}$$

also:

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{transl}} + \vec{L}_{\text{rot}} = M\vec{s} \times \dot{\vec{s}} + \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}$$

- Der Rotationsanteil $\vec{L}_{\text{rot}} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}$ weist damit nur dann in Richtung von $\vec{\omega}$, wenn $\vec{\omega}$ ein Eigenvektor von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ ist, also entlang der Trägheitsachsen gerichtet ist.
- Im Hauptachsensystem Σ'' :

$$(L_{\text{rot}}^{i''}) = \begin{pmatrix} A\omega^{x''} \\ B\omega^{y''} \\ C\omega^{z''} \end{pmatrix}, \quad \vec{L}_{\text{rot}} = A\omega^{x''} \vec{b}_{x''} + B\omega^{y''} \vec{b}_{y''} + C\omega^{z''} \vec{b}_{z''}$$

- *Zusammenhang mit Trägheitsellipsoid:*

Der Gradient an die das Trägheitsellipsoid beschreibende Fläche

$$f(\vec{r}') = \vec{r}' \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}') - 1 = 0$$

lautet:

$$\text{grad}_{\vec{r}'} f = 2 \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}'$$

Am Durchstoßpunkt $x_n^{i'}$ der Drehachse (Richtungseinheitsvektor $\vec{n} = \vec{\omega}/|\vec{\omega}|$) durch das Trägheitsellipsoid ist der Gradient somit:

$$\text{grad}_{\vec{r}'} f = 2 \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}'_n = 2 |\vec{r}'_n| \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{n} = \frac{2}{|\omega| \sqrt{\Theta_n}} \vec{L}_{\text{rot}}$$

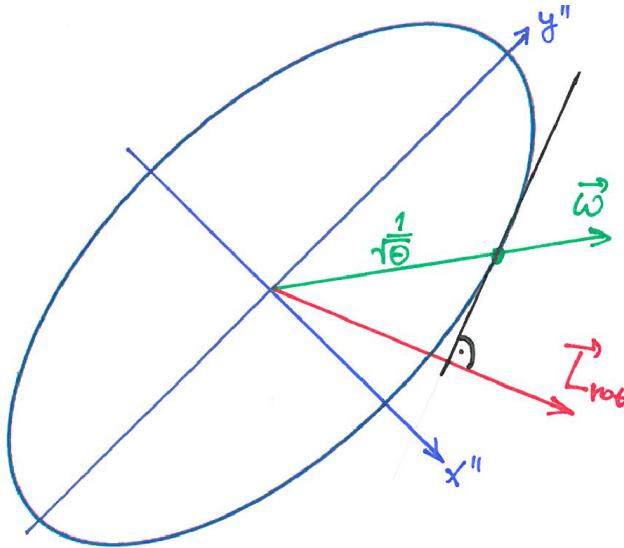
Damit steht der Drehimpuls \vec{L}_{rot} senkrecht auf der Tangentialebene am Durchstoßpunkt der Drehachse durch das Trägheitsellipsoid.

- Es gilt:

$$\vec{L}_{\text{rot}} \cdot \vec{\omega} = (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} = |\omega|^2 (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{n}) \cdot \vec{n} = \Theta_n |\omega|^2$$

Die Komponente von \vec{L}_{rot} in Richtung von ω ist damit:

$$\vec{L}_{\text{rot}} \cdot \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \Theta_{\vec{n}} |\omega|$$



6.1.5 Die Eulerschen Kreiselgleichungen

- Betrachten Drehimpulssatz $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ im körperfesten Schwerpunktssystem Σ' :

1. Linke Seite:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(M\vec{s} \times \dot{\vec{s}} + \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} \right) = \frac{d}{dt} \left(M\vec{s} \times \dot{\vec{s}} \right) + \frac{d}{dt} \sum_{i',k'=1}^3 \Theta^{i'}_{k'} \omega^{k'} \vec{b}_{i'} \\ &= M\vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \sum_{i',k'=1}^3 \Theta^{i'}_{k'} \left(\dot{\omega}^{k'} \vec{b}_{i'} + \omega^{k'} \dot{\vec{b}}_{i'} \right) \end{aligned}$$

Nun ist $\dot{\vec{b}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{b}_{i'}$ (siehe Kapitel 1.6), und damit folgt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M\vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \sum_{i',k'=1}^3 \Theta^{i'}_{k'} \dot{\omega}^{k'} \vec{b}_{i'} + \vec{\omega} \times \sum_{i',k'=1}^3 \Theta^{i'}_{k'} \omega^{k'} \vec{b}_{i'},$$

also:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M\vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega})$$

2. Rechte Seite:

Wegen $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{s}$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \int_K \vec{r} \times \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}' = \int_K (\vec{r}' + \vec{s}) \times \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}' \\ &= \vec{s} \times \vec{F} + \int_K \vec{r}' \times \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}' \\ &= M\vec{s} \times \ddot{\vec{s}} + \int_K \vec{r}' \times \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}'\end{aligned}$$

Hierbei ist $\vec{F} = \int_K \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}'$ die gesamte auf den Körper wirkende äußere Kraft und $M\ddot{\vec{s}} = \vec{F}$ gemäß Schwerpunktsatz (M : Gesamtmasse).

- Somit lautet der Drehimpulssatz:

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \left(\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} \right) = \int_K \vec{r}' \times \vec{f}^{(a)} d^3\vec{r}' = \vec{M}' \quad (6.4)$$

Die Größe \vec{M}' stellt dabei ein bezüglich des Koordinatenursprungs von Σ' berechnetes Drehmoment dar, $\vec{M}' \neq \vec{M}$.

- Wir schreiben Gleichung (6.4) in den Komponenten bezüglich des Hauptachsensystems Σ'' auf. Dort hat die Koeffizientenmatrix die Form $\Theta_{k''}^{i''} = \text{diag}(A, B, C)$. Deshalb folgt:

$$\begin{aligned}A\dot{\omega}^{x''} + (C - B)\omega^{y''}\omega^{z''} &= M'^{x''} \\ B\dot{\omega}^{y''} + (A - C)\omega^{x''}\omega^{z''} &= M'^{y''} \\ C\dot{\omega}^{z''} + (B - A)\omega^{x''}\omega^{y''} &= M'^{z''}\end{aligned}$$

Das sind die *Eulerschen Kreiselgleichungen*.

6.1.6 Rotation um freie Achsen

- Die Rotation um eine *freie Achse* ist gegeben, falls $\dot{\vec{\omega}} = 0$ und $\vec{M}' = 0$.
- Für den unsymmetrischen Kreisel (A, B, C alle verschieden) folgt dann aus den Eulerschen Kreiselgleichungen, dass zwei der Komponenten $(\omega^{x''}, \omega^{y''}, \omega^{z''})$ verschwinden.

- Damit sind nur die Hauptträgheitsachsen freie Achsen; \vec{L} und $\vec{\omega}$ haben dann die gleiche Richtung.
- Das heißt, ein starrer Körper, der um eine freie Achse rotiert, torkelt nicht.
- Stabilitätsverhalten:

1. Für eine Rotation um eine Achse in der Nähe der x'' -Achse sind ω^y'', ω^z'' klein und $\omega^{x''} \approx \omega_0^{x''}$ näherungsweise konstant, d.h. es gilt: $\omega^y''\omega^{x''} \approx \omega^y''\omega_0^{x''}, \quad \omega^y''\omega^{z''} \approx 0$.

2. Dann folgt:

$$B\dot{\omega}^{y''} + (A - C)\omega^{z''}\omega_0^{x''} = 0, \quad C\dot{\omega}^{z''} + (B - A)\omega^{y''}\omega_0^{x''} = 0,$$

$$\implies \ddot{\omega}^{y''} + H\omega^{y''} = 0, \quad H = \frac{A - C}{B} \frac{A - B}{C} (\omega_0^{x''})^2$$

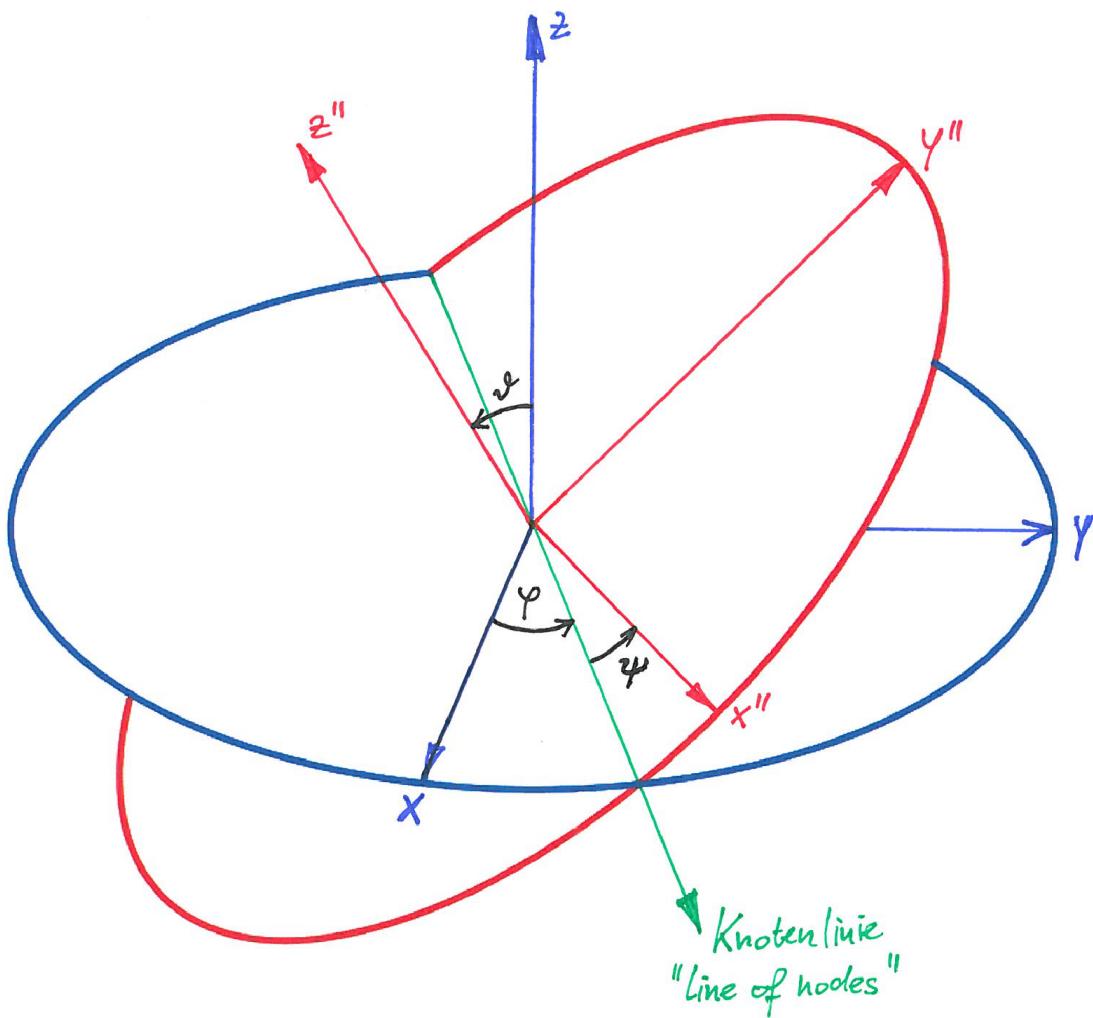
3. Dies beschreibt eine harmonische Schwingung für $H > 0$, also $A > C, A > B$ oder $A < C, A < B$. Dann ist die Rotationsachse stabil.
4. Andernfalls (A liegt zwischen B und C , H ist negativ) ist die Lösung exponentiell und die Rotationsachse instabil.
5. Nur die Rotationen um die Achsen des größten und des kleinsten Hauptträgheitsmomentes sind stabil; die Rotation um die Achse des mittleren ist instabil.

6.1.7 Die Eulerschen Winkel

- Transformation $\mathcal{S} \leftrightarrow \Sigma''$ (raumfestes IS \leftrightarrow körperfestes Schwerpunkt- und Hauptachsensystem):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x(t) \\ s^y(t) \\ s^z(t) \end{pmatrix} + \hat{O}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x(t) \\ s^y(t) \\ s^z(t) \end{pmatrix} + \hat{O}^T \hat{U}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

- Beschreibung der Transformationsmatrix $\hat{V}(t) = \hat{U}\hat{O}(t)$ durch drei Eulersche Drehwinkel φ, ϑ, ψ .
- Wir verwenden dabei die sogenannte „x-Konvention“:
 1. Drehung um die z -Achse des IS \mathcal{S} (Winkel φ)
 2. Drehung um die neue x -Achse – die *Knotenlinie* (Winkel ϑ)
 3. Drehung um die aus den beiden vorherigen Drehungen resultierende neue z -Achse (Winkel ψ).



- Es ist damit (siehe Abb., dort für den Fall $\vec{s} = 0$):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} &= \hat{V}(t) \begin{pmatrix} x - s^x \\ y - s^y \\ z - s^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - s^x \\ y - s^y \\ z - s^z \end{pmatrix}, \\ \hat{V}(t) &= \\ &\begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit folgt (siehe Kapitel 1.6):

$$\hat{V} \frac{d\hat{V}^T}{dt} = \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{z''} & \omega^{y''} \\ \omega^{z''} & 0 & -\omega^{x''} \\ -\omega^{y''} & \omega^{x''} & 0 \end{pmatrix},$$

mit obigem Ausdruck für \hat{V} also:

$$\begin{aligned} \omega^{x''} &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \omega^{y''} &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \omega^{z''} &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}. \end{aligned}$$

6.1.8 Die Lagrangefunktion für den freien starren Körpers

- Benutzen wir die (zeitabhängigen) Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ , um vom raumfesten IS S in das körperfeste Schwerpunkt- und Hauptachsensystem Σ'' zu wechseln, so ergibt sich die kinetische Energie zu:

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2} \dot{\vec{s}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i'', k''=1}^3 \omega^{i''} \omega^{k''} \Theta_{k''}^{i''} \\ &= \frac{M}{2} [(\dot{s}^x)^2 + (\dot{s}^y)^2 + (\dot{s}^z)^2] + \frac{A}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 \\ &\quad + \frac{B}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 + \frac{C}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \end{aligned}$$

- Befindet sich der Körper in einem äußeren Potential U , das wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^x \\ s^y \\ s^z \end{pmatrix} + \hat{V}^T(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

effektiv eine Funktion der Schwerpunktskoordinaten s^i und der Eulerwinkel φ, ϑ, ψ ist, $U = U(s^x, s^y, s^z, \varphi, \vartheta, \psi)$, ergibt sich damit die Lagrangefunktion als:

$$L = L(s^x, s^y, s^z, \varphi, \vartheta, \psi, \dot{s}^x, \dot{s}^y, \dot{s}^z, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = T - U$$

- Aus der Lagrangefunktion L können mittels Lagrange-II-Formalismus die Bewegungsgleichungen ermittelt werden.
- Beispiel: Bewegung im homogenen Erdschwerefeld, $\vec{F}^{(a)} = -\mu g \vec{b}_z$,

$$U = \int_K \mu g z \, d^3 \vec{r}'' = g \int_K \mu \left(s^z + \sum_{i''=1}^3 [\hat{V}^T]_{i''}^3 x^{i''} \right) \, d^3 \vec{r}'' = M g s^z$$

1. s^x und s^y sind zyklische Koordinaten; es folgen die Erhaltungssätze:

$$M \dot{s}^x = p^x, \quad M \dot{s}^y = p^y.$$

2. z -Komponente des Schwerpunktes:

$$M \ddot{s}^z = -Mg$$

Also folgt:

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \dot{\vec{s}}_0 t - \frac{g}{2} t^2 \vec{b}_z$$

3. Die Gleichungen für die Eulerschen Winkel separieren von denjenigen für die Schwerpunktskoordinaten. Es ergeben sich die gleichen Gleichungen wie für den kräftefreien Kreisel (siehe Kapitel 6.2).

6.2 Der Kreisel

- Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der an einem *Unterstützungspunkt* P (nicht notwendigerweise der Schwerpunkt) festgehalten wird und sich um diesen Punkt völlig frei drehen kann.

- Wir legen nun die Koordinatenursprünge von Inertialsystem \mathcal{S} sowie mitrotierenden körperfesten Hauptachsensystem Σ'' in den Punkt P .
- Damit ist hier Σ'' i.A. *kein* Schwerpunktsystem.
- Seine Achsen weisen aber nach wie vor in Richtung der Hauptträgheitsmomente, d.h. der Trägheitstensor bezüglich P hat in Σ'' eine diagonale Koeffizientenmatrix, $\Theta_{k''}^{i''}(P) = \text{diag}(A, B, C)$.
- Die Transformation $\Sigma'' \leftrightarrow \mathcal{S}$ schreibt sich nun:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \hat{V}(t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit der *Eulerschen* Transformationsmatrix $\hat{V}(t)$ (siehe Kapitel 6.1.7),

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi & \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ -\cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

- Die Schritte zur Berechnung der kinetischen Energie T sowie des Drehimpulses \vec{L} sind die gleichen wie in Kapitel 6.1.2 bzw. 6.1.4, und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i'', k''=1}^3 \omega^{i''} \omega^{k''} \Theta_{k''}^{i''} = \frac{A}{2} (\omega^{x''})^2 + \frac{B}{2} (\omega^{y''})^2 + \frac{C}{2} (\omega^{z''})^2 \\ &= \frac{A}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi)^2 + \frac{B}{2} (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi)^2 \\ &\quad + \frac{C}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{x''} &= A \omega^{x''} = A(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) \\ L^{y''} &= B \omega^{y''} = B(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) \\ L^{z''} &= C \omega^{z''} = C(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \end{aligned}$$

- Befindet sich der Körper in einem äußeren Potential U , ergibt sich

wegen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \hat{V}^T(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

effektiv eine Funktion der Eulerwinkel φ, ϑ, ψ ,

$$U = U(\varphi, \vartheta, \psi).$$

- Im symmetrischen Fall $A = B$ ist T von φ und ψ unabhängig:

$$T = \frac{A}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2$$

6.2.1 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

- Symmetrischer Kreisel: $A = B$, d.h. $\Theta_{k''}^{i''}(P) = \text{diag}(A, A, C)$.
 - Kräftefrei: Potential $U \equiv 0$; äußere Kraftdichte $\vec{f}^{(a)} \equiv 0$;
es gilt Drehimpulserhaltung, $\vec{L} = \vec{\Theta} \overset{\leftrightarrow}{\omega} = \text{const.}$
 - Lösung des Bewegungsproblems über *Drehimpulserhaltung*:
1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen wir die z -Achse des raumfesten Inertialsystems \mathcal{S} in Richtung des Drehimpulses,

$$\vec{L} = L \vec{b}_z, \quad L^i = \delta_3^i L, \quad L = \text{const.}$$

2. Für die Komponenten in Σ'' folgt:

$$L^{i''} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} L^i = \sum_{i=1}^3 [\hat{V}(t)]_i^{i''} L \delta_3^i = L [\hat{V}(t)]_3^{i''},$$

$$L^{x''} = A \omega^{x''} = A(\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) = L \sin \psi \sin \vartheta \quad (6.5)$$

$$L^{y''} = A \omega^{y''} = A(\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) = L \cos \psi \sin \vartheta \quad (6.6)$$

$$L^{z''} = C \omega^{z''} = C(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = L \cos \vartheta \quad (6.7)$$

3. {Gleichung (6.5) · cos ψ – Gleichung (6.6) · sin ψ } ergibt:

$$A \dot{\vartheta} = 0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} \quad (6.8)$$

Damit ist $\omega^{z''} = \frac{L}{C} \cos \vartheta_0 = \text{const.}$

4. Mit $\dot{\vartheta} = 0$ folgt aus (6.5) und (6.6):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{A}, \quad \varphi(t) = \frac{L}{A}t + \varphi_0 \quad (6.9)$$

5. Aus (6.7), (6.8) und (6.9) schließlich:

$$C\dot{\psi} = (L - C\dot{\varphi}) \cos \vartheta_0, \quad \psi = \left(L \frac{A - C}{AC} \cos \vartheta_0 \right) t + \psi_0 \quad (6.10)$$

6. Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 = \text{const.}, \\ \varphi(t) &= \frac{L}{A}t + \varphi_0, \\ \psi(t) &= \left(L \frac{A - C}{AC} \cos \vartheta_0 \right) t + \psi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{x''}(t) &= L \sin \psi(t) \sin \vartheta_0, & \omega^{x''}(t) &= \frac{L}{A} \sin \psi(t) \sin \vartheta_0 \\ L^{y''}(t) &= L \cos \psi(t) \sin \vartheta_0, & \omega^{y''}(t) &= \frac{L}{A} \cos \psi(t) \sin \vartheta_0 \\ L^{z''}(t) &= L \cos \vartheta_0, & \omega^{z''}(t) &= \frac{L}{C} \cos \vartheta_0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Komponenten im raumfesten System \mathcal{S} :

(a) $\vec{L} = L\vec{b}_z = \text{const.}$

(b) Aus (6.11) sehen wir: $\vec{\omega} = \frac{1}{A}\vec{L} + L\frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 \vec{b}_{z''}$, also:

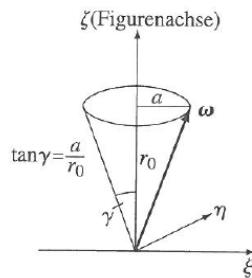
$$\begin{aligned} \omega^i &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 (\vec{b}_{z''})^i \\ &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 \frac{\partial x^i}{\partial x^{z''}} \\ &= \frac{L}{A}\delta_3^i + L\frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 [\hat{V}^T]_{3''}^i, \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} L^x(t) &= 0, & \omega^x(t) &= L \frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0 \sin \varphi(t) \\ L^y(t) &= 0, & \omega^y(t) &= -L \frac{A-C}{AC} \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0 \cos \varphi(t) \\ L^z(t) &= L, & \omega^{z''}(t) &= \frac{L}{C} \cos^2 \vartheta_0 + \frac{L}{A} \sin^2 \vartheta_0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

• Diskussion:

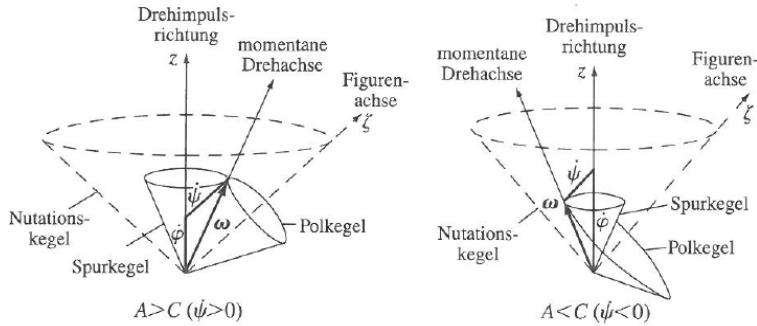
1. Die Figurenachse (Hauptträgheitsachse mit Trägheitsmoment C , d.h. die z'' -Achse in Σ'') bewegt sich auf einem Kreiskegel der Öffnung ϑ_0 um die z -Achse, d.h. um die Richtung des Drehimpulses; diesen Kegel nennt man *Nutationskegel* (halber Öffnungswinkel: ϑ_0). Die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist $d\varphi/dt = L/A$.
2. Dabei dreht sich der Körper (die körperfesten x'', y'' -Achsen) um die Figurenachse mit der Winkelgeschwindigkeit $d\psi/dt = L(A-C) \cos \vartheta_0 / (AC)$.
3. Innerhalb von Σ'' wandert $\vec{\omega}$ auf dem körperfesten *Polkegel* (halber Öffnungswinkel: γ , $\tan \gamma = \frac{C}{A} \tan \vartheta_0$) um die Figurenachse, Winkelgeschwindigkeit: $-d\psi/dt$.



Polkegel im körperfesten System,
 $(\xi, \eta, \zeta) = (x'', y'', z'')$, $r_0 = L/C \cos \vartheta_0 = \omega^{z''}$, $a = L/A \sin \vartheta_0$

4. Innerhalb von \mathcal{S} wandert $\vec{\omega}$ auf dem *Spurkegel* (halber Öffnungswinkel: $|\varepsilon| = |\vartheta_0 - \gamma|$) um die z -Achse (raumfeste Richtung von \vec{L} , Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$).
5. Der Polkegel rollt mit seiner Außenfläche (für $A > C, \dot{\psi} > 0$) bzw. Innenfläche (für $A < C, \dot{\psi} < 0$) auf dem Spurkegel ab; Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$.

6. Der Polkegel führt dabei die Figurenachse (d.h. seine Symmetriearchse) auf dem Nutationskegel.



6.2.2 Der schwere symmetrische Kreisel

- Betrachten einen symmetrischen Kreisel ($B = A$ bezüglich des Unterstützungs punktes), dessen Schwerpunkt auf der Figurenachse liegt, d.h., es gilt:

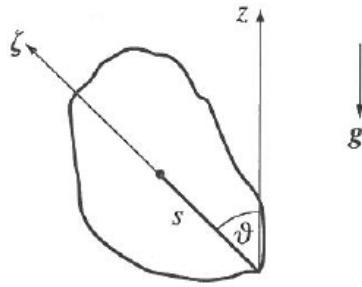
$$\int_K \mu x'' d^3 \vec{r}'' = 0, \quad \int_K \mu y'' d^3 \vec{r}'' = 0.$$

- Wir schreiben

$$s = s^{z''} = \int_K \mu z'' d^3 \vec{r}'$$

- Wir legen die raumfeste z -Achse nach oben. Dann ergibt sich folgende potentielle Energie:

$$\begin{aligned} U &= \int_K \mu g z d^3 \vec{r}'' \\ &= g \int_K \mu (x'' \sin \psi \sin \vartheta + y'' \cos \psi \sin \vartheta + z'' \cos \vartheta) d^3 \vec{r}'' \\ &= M g s \cos \vartheta \end{aligned}$$



- Es folgt:

$$L = T - U = \frac{A}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - Mgs \cos \vartheta$$

- Zyklische Koordinaten: ψ und φ , und somit gelten die Erhaltungssätze:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cos \vartheta = \alpha = \text{const.} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = C(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) = \beta = \text{const.} \quad (6.14)$$

- Ferner gilt wegen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ Energieerhaltung, $E = T + U$.
- Wir eliminieren mittels (6.13, 6.14) $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ im Energiesatz und gelangen mit der Substitution $u = \cos \vartheta$ zu

$$\frac{A}{2}\dot{u}^2 + P(u) = 0$$

mit

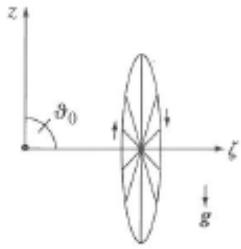
$$P(u) = \frac{(\alpha - \beta u)^2}{2A} + \left(\frac{\beta^2}{2C} - E \right) (1 - u^2) + Mgsu(1 - u^2)$$

- Lösung wie im eindimensionalen Fall durch Separation der Variablen liefert:

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{2}{A}P(u)}}$$

Elliptisches Integral (hier nicht weiter untersucht).

6.2.3 Der schnell rotierende schwere symmetrische Kreisel



- Betrachten schweren symmetrischen Kreisel mit speziellen Anfangsbedingungen:

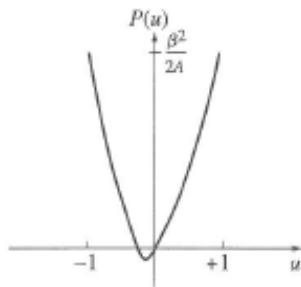
$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= \frac{\pi}{2}, & \varphi(0) &= 0, & \psi(0) &= 0 \\ \dot{\vartheta}(0) &= 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\psi}(0) &= \dot{\psi}_0\end{aligned}$$

- $\dot{\psi}_0$ sei groß, genauer: $q := \frac{2MgsA}{C^2\dot{\psi}_0^2} \ll 1$.

- Aus Anfangsbedingungen folgt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = C\dot{\psi}_0, \quad E = \frac{C}{2}\dot{\psi}_0^2 = \frac{\beta^2}{2C},$$

$$P(u) = \frac{\beta^2}{2A}u^2 + Mgsu(1 - u^2) = Mgs \left[\frac{u^2}{q} + u(1 - u^2) \right]$$



- Damit hat $P(u)$ die Nullstellen

$$u_0^* = 0, \quad u_-^* = \frac{1 - \sqrt{4q^2 + 1}}{2q} \approx -q, \quad u_+^* = \frac{1 + \sqrt{4q^2 + 1}}{2q} \gg 1$$

mit $P(u) > 0$ für $u < u_-^*$ bzw. $u \in (0, 1]$ (beachte: $|u| = |\cos \vartheta| \leq 1$).

- Die Bewegung gemäß

$$\frac{A}{2}\dot{u}^2 + P(u) = 0$$

findet im kleinen Intervall $u \in [u_-^*, 0]$ statt, wo $P(u) \leq 0$ ist.

- Sie kann in einer Näherung berechnet werden:

$$0 = A\dot{u}\ddot{u} + P'(u)\dot{u} = \dot{u} \left(A\ddot{u} + Mgs \left[\frac{2u}{q} + 1 - 3u^2 \right] \right) \approx \dot{u} \left(A\ddot{u} + Mgs \left[\frac{2u}{q} + 1 \right] \right)$$

Die Gleichung

$$A\ddot{u} + Mgs \left[\frac{2u}{q} + 1 \right] = 0$$

hat für $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ die Lösung:

$$u = \cos \vartheta = -\frac{q}{2} \left[1 - \cos \left(t \sqrt{\frac{2Mgs}{Aq}} \right) \right]$$

Die Kreiselachse bewegt sich nur geringfügig nach unten (q klein), schwingt aber mit sehr hoher Frequenz vertikal zwischen $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ($u = 0$) und $\vartheta \approx \frac{\pi}{2} + q$ ($u = -q$) hin und her.

- Aus den Erhaltungssätzen (6.13, 6.14) folgt mit $\sin \vartheta \approx 1$:

$$0 = A\dot{\varphi} + \beta \cos \vartheta = A\dot{\varphi} + \beta u, \quad C(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) = \beta,$$

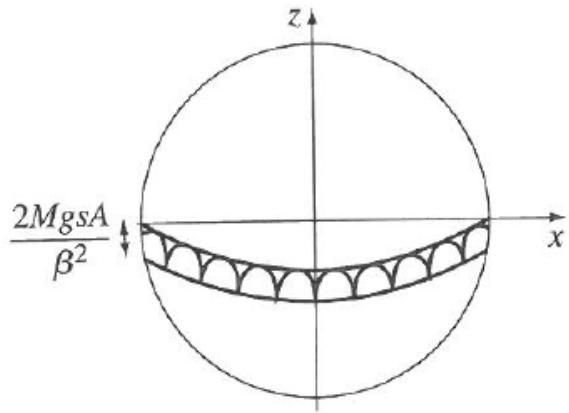
also:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\beta}{A}u = \sqrt{\frac{Mgsq}{2A}} \left(1 - \cos \frac{\beta}{A}t \right),$$

und schließlich mit $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(t) = t \sqrt{\frac{Mgsq}{2A}} - \frac{q}{2} \sin \left(t \sqrt{\frac{2Mgs}{Aq}} \right)$$

Die Figurenachse des Kreisels bewegt sich mit kleiner mittlerer Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{Mgsq}{2A}}$ in der Ebene des raumfesten Systems \mathcal{S} . Diese Bewegung wird „Präzession“ genannt.



Bahnkurve der Spitze der Figurenachse:
Zykloide in einer (ϑ, φ) -Ebene.

- Schließlich ist

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{C} - \dot{\varphi} \cos \vartheta \approx \frac{\beta}{C} \left(1 + \frac{C}{A} u^2 \right) \approx \frac{\beta}{C} = \dot{\psi}_0$$

In erster Ordnung bezüglich q dreht sich der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}_0$ um seine Figurenachse.

Kapitel 7

Hamiltonsche Mechanik

7.1 Das Hamiltonsche Prinzip

- Wir werden zeigen:

Die Lagrange-Gleichungen II. Art sind die sogenannten *Euler-Lagrange-Gleichungen* des Variationsproblems

$$S = S\{q_A\} = \int_{t_1}^{t_2} L(q_A, \dot{q}_A, t) dt \stackrel{!}{=} \text{stationär} \quad (7.1)$$

- Hierbei ist S das durch (7.1) definierte sogenannte *Wirkungsfunktional* mit der Lagrange-Funktion $L = L(q_A, \dot{q}_A, t)$ als Integrand:
 - Jeder Bahnkurve $q_A = q_A(t)$ ($t \in [t_1, t_2]$) im Konfigurationsraum aller N_F generalisierten Koordinaten (d.h. $A = 1, \dots, N_F$) wird durch (7.1) eine reelle Zahl zugeordnet.
 - Betrachtet werden dabei nur Bahnen mit gleichen, festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten,

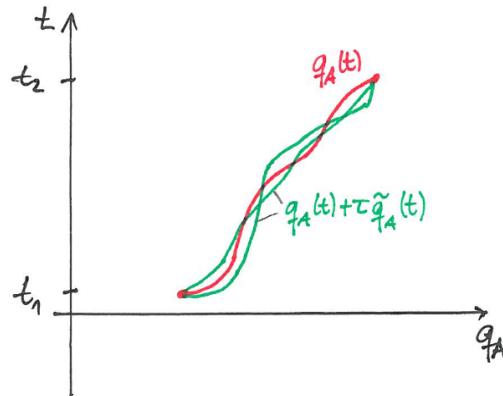
$$q_A(t_1) = q_{A(1)}, \quad q_A(t_2) = q_{A(2)} \quad (7.2)$$

- *Stationarität:*

Die Bahnkurve $q_A(t)$ heißt stationärer Punkt des Funktionals S , falls für alle Funktionen $\tilde{q}_A : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{q}_A(t_1) = \tilde{q}_A(t_2) = 0$ die Funktion

$$\phi_{\tilde{q}_A} = \phi_{\tilde{q}_A}(\tau) := S\{q_A + \tau \tilde{q}_A\}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

am Punkt $\tau = 0$ stationär ist, d.h. falls gilt: $\frac{d\phi_{\tilde{q}_A}}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = 0$.



Erläuterung:

- Bei gegebenen Funktionen \tilde{q}_A stellen $q_A + \tau \tilde{q}_A$ für $\tau \in \mathbb{R}$ benachbarte Vergleichsbahnen dar.
- Stationarität heißt, dass eine beliebige infinitesimale Abweichung von der Bahn $q_A(t)$ bei festgehaltenen Endpunkten [siehe (7.2)] den Wert S des Funktionalen in erster Ordnung bezüglich τ nicht ändert.
- Extremwerte: In der Variationsrechnung wird oft das Extremum eines Integralausdruckes gesucht. In Analogie zur Analysis im \mathbb{R}^n (dort verschwindet der Gradient der Funktion am Extremwertpunkt) sind die Extrema von Integralfunktionalen stationäre Punkte (notwendige Bedingung).

- *Hamilton-Prinzip der stationären Wirkung:*

Die wirkliche, von einem mechanischen System durchlaufene Bahnkurve $q_A = q_A(t)$ ist ein stationärer Punkt des Wirkungsfunktionalen S , das durch (7.1) gegeben ist.

- *Ableitung der „Euler-Lagrangeschen“ Differentialgleichungen:*

- Wir betrachten:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{\tilde{q}_A}}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau} \int_{t_1}^{t_2} L(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t) dt \\ &= \sum_{B=1}^{N_F} \int_{t_1}^{t_2} \left[\tilde{q}_B \frac{\partial L}{\partial q_B} \Big|_{(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t)} + \dot{\tilde{q}}_B \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} \Big|_{(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t)} \right] dt \end{aligned}$$

- Den zweiten Term integrieren wir partiell:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{\tilde{q}}_B, \quad u = \tilde{q}_B, \quad v = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B}, \quad \dot{v} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} : \\ &\int_{t_1}^{t_2} \tilde{q}_B \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} dt \\ &= \left[\tilde{q}_B \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} \right]_{(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t)}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \tilde{q}_B \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} dt \end{aligned}$$

- Der erste Term verschwindet wegen $\tilde{q}_B(t_1) = \tilde{q}_B(t_2) = 0$. Wir erhalten:

$$\frac{d\phi_{\tilde{q}_A}}{d\tau} = \sum_{B=1}^{N_F} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{q}_B \left[\frac{\partial L}{\partial q_B} \Big|_{(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} \Big|_{(q_A + \tau \tilde{q}_A, \dot{q}_A + \tau \dot{\tilde{q}}_A, t)} \right] dt$$

- Definitionsgemäß verschwindet dieser Ausdruck für beliebige Funktionen $\tilde{q}_A : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{q}_A(t_1) = \tilde{q}_A(t_2) = 0$ an der Stelle $\tau = 0$.
- Dies kann aber nur gewährleistet werden, wenn der Klammerausdruck für alle B verschwindet.
- Somit erfüllen stationäre Punkte q_A des Wirkungsfunktionalen S die *Euler-Lagrangeschen* Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_B} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = 0,$$

die mit den Lagrange-Gleichungen II. Art übereinstimmen.

- Diskussion:

- In der Physik wird nicht untersucht, ob der stationäre Punkt des Wirkungsintegrals einem Extremum oder eher einem Sattelpunkt entspricht.
- Sehr viele wichtige Gleichungen der Physik lassen sich als Euler-Lagrange-Gleichungen eines Variationsproblems für ein zugehöriges *Wirkungsfunktional* ableiten.

- Insbesondere werden in der modernen Quantenfeldtheorie die Feldgleichungen auf diese Weise mittels einer *Lagrangedichte* bestimmt.
- Ein Wirkungsprinzip ist die kürzeste („stenogrammatische“) Zusammenfassung von Naturgesetzen.

7.2 Generalisierte Impulse, Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen

- In den kartesischen Koordinaten x^i eines IS \mathcal{S} lautet die Lagrange-Funktion für N freie Teilchen unter dem Einfluss eingeprägter Kräfte (mit Potential):

$$L = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{2} (\dot{x}_n^i)^2 - U(x_n^i)$$

- Die in den Lagrange-Gleichungen II. Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} = \frac{\partial L}{\partial x_n^i}$$

auf tretenden Größen $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} = m_n \dot{x}_n^i = p_n^i$ sind dann offenbar die Impulse der Teilchen.

- In Anlehnung daran nennen wir die den generalisierten Koordinaten q_A zugeordneten Größen

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}, \quad A = 1, \dots, N_F \tag{7.3}$$

die *generalisierten Impulse*.

- Das Paar (q_A, p_A) heißt kanonisch konjugiert.
- Beispielsweise sind Winkelkoordinaten und entsprechende Drehimpulsgrößen kanonisch konjugiert (φ und L^z).
- *Hamilton-Funktion*:

1. Definition:

$$H(q_B, p_B, t) = \sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A(q_B, p_B, t) p_A - L\left(q_B, \dot{q}_B(q_C, p_C, t), t\right)$$

2. **Wichtig hierbei:** Die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_A sind mit Hilfe der Gleichungen (7.3) durch die generalisierten Impulse p_A auszudrücken:

$$\dot{q}_A = \dot{q}_A(q_B, p_B, t),$$

und das muss sowohl im Summenterm als auch im zweiten Argument der Lagrange-Funktion getan werden.

3. Auf diese Weise wird die *Hamilton-Funktion* H eine Funktion der q_A und p_A ; es treten keine \dot{q}_A mehr auf,

$$H = H(q_A, p_A, t)$$

4. Wegen des Energiesatzes:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \dot{q}_A - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (7.4)$$

hängt H eng mit der Energie des Systems in Beziehung.

- *Die kanonischen Gleichungen:*

Wir verwenden obige Definitionen und berücksichtigen die Lagrange-Gleichungen II. Art:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_B} &= \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial q_B} p_A - \frac{\partial L}{\partial q_B} - \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial q_B} = -\frac{\partial L}{\partial q_B} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_B} = -\dot{p}_B \\ \frac{\partial H}{\partial p_B} &= \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial p_B} p_A + \dot{q}_B - \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial p_B} = \dot{q}_B \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial t} p_A - \sum_{A=1}^{N_F} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A} \frac{\partial \dot{q}_A}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Diskussion:

Diskussion:

- Die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_B = \frac{\partial H}{\partial p_B}, \quad \dot{p}_B = -\frac{\partial H}{\partial q_B} \quad (7.5)$$

sind $2N_F$ Differentialgleichungen 1. Ordnung für die kanonisch konjugierten Größen (q_A, p_A) , die abstrakt in einem $2N_F$ -dimensionalen Raum, dem sogenannten *Phasenraum* definiert sind.

- Sie sind den N_F Lagrange-Gleichungen II. Art (zweiter Ordnung) völlig äquivalent.
- Hohe Symmetrie in den Gleichungen.

- *Energiesatz:*

Wegen (7.4) und $\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$ folgt: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

Energieerhaltung ist also gegeben, wenn H nicht explizit zeitabhängig ist; dann ist H die Gesamtenergie, $H = T + U$.

- *Zyklische Koordinaten:*

Falls L nicht explizit von einer Koordinaten q_B abhängt, $\frac{\partial L}{\partial q_B} = 0$, so ist wegen $\frac{\partial H}{\partial q_B} = -\frac{\partial L}{\partial q_B} = 0$ auch H nicht explizit von q_B abhängig.

Dann ist der zugehörige kanonisch konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_B} = -\dot{p}_B \quad \Rightarrow \quad p_B = \text{const.}$$

Die Koordinate q_B wird zyklisch genannt (wie früher).

- *Anmerkungen:*

- Die Hamilton-Funktion wird beim Übergang zur *Quantenmechanik* in den sogenannten *Hamilton-Operator* überführt. Das bedeutet, dass nur im Hamilton-Formalismus die Brücke von klassischer und Quantenmechanik geschlagen werden kann.
- Der Hamilton-Formalismus ist entscheidende Grundlage für die statistische Physik (Betrachtung in hoch-dimensionalen Phasenräumen).

7.3 Beispiele

Generelle Herangehensweise zum Aufstellen der kanonischen Gleichungen:

1. Man stelle die Lagrange-Funktion $L = L(q_A, \dot{q}_A, t) = T - U$ auf.
2. Man bestimme die kanonischen Impulse:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_A}$$

3. Man löse diese Gleichungen nach den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_A auf und schreibe diese als Funktionen der q_B, p_B, t ,

$$\dot{q}_A = \dot{q}_A(q_B, p_B, t)$$

4. Damit gehe man in die Definitionsgleichung der Hamilton-Funktion ein und bestimme $H = H(q_B, p_B, t)$,

$$H(q_B, p_B, t) = \sum_{A=1}^{N_F} \dot{q}_A(q_B, p_B, t) p_A - L\left(q_B, \dot{q}_B(q_C, p_C, t), t\right)$$

Man achte darauf, dass wirklich alle \dot{q}_A zugunsten der p_A eliminiert sind.

5. Man stelle die kanonischen Gleichungen auf,

$$\dot{q}_B = \frac{\partial H}{\partial p_B}, \quad \dot{p}_B = -\frac{\partial H}{\partial q_B}$$

Beispiele:

1. Harmonischer Oszillator:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} \\ H &= \dot{x}(x, p, t)p - L\left(x, \dot{x}(x, p, t), t\right) = \frac{p^2}{m} - \left(\frac{m}{2} \left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2\right) \end{aligned}$$

Es folgt:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

2. Keplerproblem in Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) + \frac{\gamma m}{r} \\
 p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\
 p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \\
 p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \vartheta \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \vartheta} \\
 H &= T + U = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) - \frac{\gamma m}{r}
 \end{aligned}$$

7.4 Poisson-Klammern

- Poisson-Klammern der klassischen Mechanik übersetzen sich in sogenannte Kommutatorrelationen in der Quantenmechanik.
- Die Poisson-Klammer

$$\{F, G\} = \sum_{A=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial q_A} \frac{\partial G}{\partial p_A} - \frac{\partial F}{\partial p_A} \frac{\partial G}{\partial q_A} \right) = -\{G, F\} \quad (7.6)$$

weist zwei Funktionen $F = F(q_A, p_A, t)$ und $G = G(q_A, p_A, t)$, die auf dem Phasenraum definiert sind, eine neue Phasenraumfunktion zu.

- Hierin werden (wie in der Hamilton-Funktion) die q_A und p_A als unabhängige Variablen angesehen.
- Für $G = q_B$ bzw. $G = p_B$ folgt:

$$\{F, q_B\} = -\frac{\partial F}{\partial p_B}, \quad \{F, p_B\} = \frac{\partial F}{\partial q_B}$$

Speziell: $F = q_C$ bzw. $F = p_C$:

$$\{q_C, q_B\} = 0, \quad \{p_C, p_B\} = 0, \quad \{q_C, p_B\} = \delta_{BC}$$

- Totale Zeitableitung einer Phasenraumfunktion $F = F(q_A, p_A, t)$:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{A=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial F}{\partial p_A} \dot{p}_A \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Mit den kanonischen Gleichungen $\dot{q}_B = \frac{\partial H}{\partial p_B}$, $\dot{p}_B = -\frac{\partial H}{\partial q_B}$ folgt:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{A=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial q_A} \frac{\partial H}{\partial p_A} - \frac{\partial F}{\partial p_A} \frac{\partial H}{\partial q_A} \right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

also:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

- Mit $F = q_A$ bzw. $F = p_A$ schreiben sich die kanonischen Gleichungen in der Form:

$$\dot{q}_A = \{q_A, H\}, \quad \dot{p}_A = \{p_A, H\}$$

- Eine Erhaltungsgröße F ist gegeben durch $\frac{dF}{dt} = 0$, also:

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Falls $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, gilt $\{F, H\} = 0$, und man sagt, dass die Größen F und H vertauschen.

7.5 Kanonische Transformationen

7.5.1 Definition

1. Kanonische Transformationen sind Koordinatentransformationen innerhalb des $2N_F$ -dimensionalen Phasenraums (von den q_A, p_A aufgespannt),

$$Q_A = Q_A(q_B, p_B, t), \quad P_A = p_A(q_B, p_B, t), \quad A = 1, \dots, N_F,$$

d.h. es werden neue kanonisch konjugierte Variablen Q_A, P_A in Abhängigkeit der alten q_A, p_A eingeführt.

2. Jeder Hamilton-Funktion $H = H(q_A, p_A, t)$ wird dabei eine neue Hamilton-Funktion $H' = H'(Q_A, P_A, t)$ zugeordnet.

3. Für diese gelten dann die kanonischen Gleichungen in den neuen Variablen:

$$\dot{Q}_A = \frac{\partial H'}{\partial P_A}, \quad \dot{P}_A = -\frac{\partial H'}{\partial Q_A},$$

wenn sie bezüglich der alten erfüllt sind,

$$\dot{q}_A = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -\frac{\partial H}{\partial q_A}$$

Kurz gesagt:

Kanonische Transformationen lassen die kanonischen Gleichungen invariant.

7.5.2 Konstruktion

Konstruktion kanonischer Transformationen führt über sogenannte „erzeugende Funktionen“ R_1, R_2, R_3, R_4 :

- Sei $R_1 = R_1(q_A, Q_A, t)$ eine vorgegebene Funktion, die von den alten und neuen kanonischen Koordinaten q_A und Q_A sowie der Zeit abhängt. Dann ist durch

$$p_A = \frac{\partial R_1}{\partial q_A}, \quad P_A = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_A}, \quad H' = H + \frac{\partial R_1}{\partial t}$$

eine kanonische Transformation gegeben:

1. Zunächst stelle man $p_A = \frac{\partial R_1}{\partial q_A}$ nach Q_A um und erhalte so $Q_A = Q_A(q_A, p_A, t)$.
2. Man setze $Q_A(q_A, p_A, t)$ nun auf der rechten Seite von $P_A = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_A}$ ein und erhalte so $P_A = P_A(q_A, p_A, t)$.
3. Man bilde nun die Umkehrabbildungen

$$q_B = q_B(Q_A, P_A, t), \quad p_B = p_B(Q_A, P_A, t)$$

und schreibe:

$$\begin{aligned} H'(Q_A, P_A, t) &= H\left(q_B(Q_A, P_A, t), p_B(Q_A, P_A, t), t\right) \\ &\quad + \frac{\partial R_1}{\partial t}\left(q_B(Q_A, P_A, t), Q_A, t\right) \end{aligned}$$

Beweis:

Alle Größen werden letztlich als Funktionen der neuen kanonischen Variablen Q_A, P_A (und der Zeit t) angesehen.

1.

$$\begin{aligned} p_A &= \frac{\partial R_1}{\partial q_A} \left(q_B(Q_C, P_C, t), Q_B, t \right), \\ \dot{p}_A &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial q_A} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_B \partial q_A} \dot{Q}_B \right] + \frac{\partial^2 R_1}{\partial t \partial q_A} \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial p_A}{\partial Q_C} = \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial q_A} \frac{\partial q_B}{\partial Q_C} \right] + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial q_A} \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial p_A}{\partial P_C} = \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial q_A} \frac{\partial q_B}{\partial P_C} \right] \quad (7.9)$$

2.

$$\begin{aligned} P_A &= -\frac{\partial R_1}{\partial Q_A} \left(q_B(Q_C, P_C, t), Q_B, t \right), \\ \dot{P}_A &= -\sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial Q_A} \dot{q}_B + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_B \partial Q_A} \dot{Q}_B \right] - \frac{\partial^2 R_1}{\partial t \partial Q_A} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$0 = \frac{\partial P_A}{\partial Q_C} = -\sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial Q_A} \frac{\partial q_B}{\partial Q_C} \right] - \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial Q_A} \quad (7.11)$$

$$\delta_{AC} = \frac{\partial P_A}{\partial P_C} = -\sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial Q_A} \frac{\partial q_B}{\partial P_C} \right] \quad (7.12)$$

3.

$$\begin{aligned} H'(Q_A, P_A, t) &= H \left(q_B(Q_A, P_A, t), p_B(Q_A, P_A, t), t \right) \\ &\quad + \frac{\partial R_1}{\partial t} \left(q_B(Q_A, P_A, t), Q_A, t \right) \\ \frac{\partial H'}{\partial Q_A} &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial H}{\partial q_B} \frac{\partial q_B}{\partial Q_A} + \frac{\partial H}{\partial p_B} \frac{\partial p_B}{\partial Q_A} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \frac{\partial q_B}{\partial Q_A} \right] + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_A \partial t} \end{aligned}$$

Wir verwenden nun die kanonischen Gleichungen

$$\dot{q}_A = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -\frac{\partial H}{\partial q_A};$$

$$\frac{\partial H'}{\partial Q_A} = \sum_{B=1}^{N_F} \left[-\dot{p}_B \frac{\partial q_B}{\partial Q_A} + \dot{q}_B \frac{\partial p_B}{\partial Q_A} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \frac{\partial q_B}{\partial Q_A} \right] + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_A \partial t}$$

und finden mit (7.10) sowie (7.7, 7.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial Q_A} + \dot{P}_A &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial q_B}{\partial Q_A} \left(-\dot{p}_B + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \right) + \dot{q}_B \left(\frac{\partial p_B}{\partial Q_A} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial Q_A} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_A \partial Q_B} \dot{Q}_B \right] \\ &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial q_B}{\partial Q_A} \left(- \sum_{C=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_C \partial q_B} \dot{q}_C + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial q_B} \dot{Q}_C \right] - \frac{\partial^2 R_1}{\partial t \partial q_B} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dot{q}_B \left(\sum_{C=1}^{N_F} \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_C \partial q_B} \frac{\partial q_C}{\partial Q_A} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_A \partial q_B} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial Q_A} \right) - \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_B \partial Q_A} \dot{Q}_B \right] \\ &= \sum_{C=1}^{N_F} \dot{Q}_C \left[- \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial q_B} \frac{\partial q_B}{\partial Q_A} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial Q_A} \right] \end{aligned}$$

Die eckige Klammer verschwindet wegen (7.11), und es folgt:

$$\dot{P}_A = -\frac{\partial H'}{\partial Q_A}$$

4. Analog (verwende nun auch (7.9) und (7.12)):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H'}{\partial P_A} &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial H}{\partial q_B} \frac{\partial q_B}{\partial P_A} + \frac{\partial H}{\partial p_B} \frac{\partial p_B}{\partial P_A} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \frac{\partial q_B}{\partial P_A} \right] \\
 &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\left(-\dot{p}_B + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \right) \frac{\partial q_B}{\partial P_A} + \dot{q}_B \frac{\partial p_B}{\partial P_A} \right] \\
 &= \sum_{B=1}^{N_F} \left[\frac{\partial q_B}{\partial P_A} \left(- \sum_{C=1}^{N_F} \left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial q_C \partial q_B} \dot{q}_C + \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial q_B} \dot{Q}_C \right] - \frac{\partial^2 R_1}{\partial t \partial q_B} + \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_B \partial t} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \dot{q}_B \sum_{C=1}^{N_F} \frac{\partial^2 R_1}{\partial q_C \partial q_B} \frac{\partial q_C}{\partial P_A} \right] \\
 &= - \sum_{C=1}^{N_F} \dot{Q}_C \sum_{B=1}^{N_F} \frac{\partial^2 R_1}{\partial Q_C \partial q_B} \frac{\partial q_B}{\partial P_A} = - \sum_{C=1}^{N_F} \dot{Q}_C \delta_{CA} = -\dot{Q}_A
 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die kanonischen Gleichungen bezüglich Q_A, P_A, H' aus denjenigen für q_A, p_A, H , und damit ist durch die Erzeugende $R_1 = R_1(q_A, Q_A, t)$ eine kanonische Transformation gegeben.

- Analog lassen sich erzeugende Funktionen R_2, R_3, R_4 bilden, die von anderen Paaren konjugierter Variablen abhängen und kanonische kanonische Transformationen bewirken:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_1(q_A, Q_A, t), \quad p_A = \frac{\partial R_1}{\partial q_A}, \quad P_A = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_A}, \quad H' = H + \frac{\partial R_1}{\partial t} \\
 R_2 &= R_2(q_A, P_A, t), \quad p_A = \frac{\partial R_2}{\partial q_A}, \quad Q_A = \frac{\partial R_2}{\partial P_A}, \quad H' = H + \frac{\partial R_2}{\partial t} \\
 R_3 &= R_3(p_A, Q_A, t), \quad q_A = -\frac{\partial R_3}{\partial p_A}, \quad P_A = -\frac{\partial R_3}{\partial Q_A}, \quad H' = H + \frac{\partial R_3}{\partial t} \\
 R_4 &= R_4(p_A, P_A, t), \quad q_A = -\frac{\partial R_4}{\partial p_A}, \quad Q_A = \frac{\partial R_4}{\partial P_A}, \quad H' = H + \frac{\partial R_4}{\partial t}
 \end{aligned}$$

- Man kann die zu einer Erzeugenden R_1 gehörenden Funktionen R_2, R_3, R_4 , d.h., die dieselben kanonische Transformation wie R_1 bewirken, durch

sogenannte „Legendre-Transformationen“ ermitteln:

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + \sum_{A=1}^{N_F} P_A Q_A \\ R_3 &= R_1 - \sum_{A=1}^{N_F} p_A q_A \\ R_4 &= R_1 - \sum_{A=1}^{N_F} p_A q_A + \sum_{A=1}^{N_F} P_A Q_A \end{aligned}$$

- Beispiele:

$$1. \quad R_1 = \sum_{A=1}^{N_F} q_A Q_A. \quad \text{Es folgt:}$$

$$Q_A = p_A, \quad P_A = -q_A, \quad H'(Q_A, P_A, t) = H(q_A, p_A, t) = H(-P_A, Q_A, t)$$

Harmonischer Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad H' = \frac{Q^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}P^2$$

Transformation vertauscht (bis auf Vorzeichen) generalisierte Impulse und Koordinaten.

$$2. \quad R_2 = \sum_{A=1}^{N_F} q_A P_A$$

$$Q_A = q_A, \quad P_A = p_A, \quad H'(Q_A, P_A, t) = H(q_A, p_A, t)$$

Identische Transformation

$$3. \quad R_2 = \sum_{A=1}^{N_F} f_A(q_B, t) P_A, \quad \text{beschreibt wegen}$$

$$Q_A = f_A(q_B, t)$$

eine räumliche Koordinatentransformation im Konfigurationsraum der q_A .

- *Bemerkungen:*

- Kanonische Transformationen kann man zur Vereinfachung der Hamilton-Funktion bzw. der kanonischen Gleichungen verwenden.
- Poisson-Klammern sind gegenüber kanonischen Transformationen invariant, d.h.

$$\{F, G\} = \sum_{A=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial q_A} \frac{\partial G}{\partial p_A} - \frac{\partial F}{\partial p_A} \frac{\partial G}{\partial q_A} \right) = \sum_{A=1}^{N_F} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_A} \frac{\partial G}{\partial P_A} - \frac{\partial F}{\partial P_A} \frac{\partial G}{\partial Q_A} \right)$$

7.6 Hamilton-Jacobi-Theorie

- *Idee:* Suche eine geeignete Erzeugende $R_2 = R_2(q_A, P_A, t)$, so dass die resultierende Hamilton-Funktion $H' = H + \frac{\partial R_2}{\partial t}$ identisch verschwindet:

$$H' = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_A = \text{const.}, \quad P_A = \text{const.} \quad (7.13)$$

- Mit

$$p_A = \frac{\partial R_2}{\partial q_A}$$

lautet die Bedingung $H' = 0$:

$$H \left(q_A, \frac{\partial R_2}{\partial q_A}, t \right) + \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \quad (7.14)$$

- Die *Hamilton-Jacobi-Gleichung* (7.14) ist eine *partielle* Differentialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung der erzeugenden Funktion $R_2 = R_2(q_A, P_A, t)$, durch die die kanonischen Gleichungen auf die triviale Form (7.13) umgeformt werden.
- Die Erzeugende R_2 wird als Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung die *Hamiltonsche Prinzipalfunktion* genannt.
- Es zeigt sich, dass die Prinzipalfunktion R_2 längs der Bahnkurve mit

der Wirkung übereinstimmt:

$$\begin{aligned}\frac{dR_2}{dt} &= \sum_{A=1}^{N_F} \left[\frac{\partial R_2}{\partial q_A} \dot{q}_A + \frac{\partial R_2}{\partial P_A} \dot{P}_A \right] + \frac{\partial R_2}{\partial t} \\ &= \sum_{A=1}^{N_F} p_A \dot{q}_A - H = L,\end{aligned}$$

wobei wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung $H + \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0$ sowie $\dot{P}_A = 0$ und $p_A = \frac{\partial R_2}{\partial q_A}$ berücksichtigt haben. Damit folgt:

$$R_2 = \int L dt.$$

- Falls die Prinzipalfunktion $R_2 = R_2(q_A, P_A, t)$ bekannt ist, erhält man die Bahnkurven $q_A(t)$ folgendermaßen:
 1. Wir nehmen an, dass R_2 als Lösung von (7.14) von N_F Konstanten P_A abhängt. Dann nennen wir R_2 ein *vollständiges Integral*.
 2. Wir bilden $\frac{\partial R_2}{\partial P_A}$ und setzen diese Ausdrücke gleich N_F neuen Konstanten Q_A :
$$\frac{\partial R_2}{\partial P_A} = Q_A. \quad (7.15)$$
 3. Nun lösen wir diese Gleichungen nach den q_A auf, und erhalten die q_A als Funktionen der Zeit und parametrisch in Abhängigkeit der $2N_F$ Integrationskonstanten Q_A, P_A .
 4. Als letztes bestimmen wir diese Konstanten mittels gegebener Anfangslagen und -geschwindigkeiten.
- Separationsansatz zur Lösung von (7.14) am Beispiel der kräftefreien Bewegung eines Massenpunktes:
 1. Hamilton-Funktion in den alten Koordinaten:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

2. Einsetzen in Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial R_2}{\partial t} = 0 \quad (7.16)$$

3. Additiver Separationsansatz:

$$R_2(x, y, z, t; P_x, P_y, P_z) = T(t) + S(x, y, z) = T(t) + S_1(x) + S_2(y) + S_3(z)$$

führt auf:

$$\frac{1}{2m} ([S'_1(x)]^2 + [S'_2(y)]^2 + [S'_3(z)]^2) = -T'(t) \quad (7.17)$$

Beide Seiten hängen nun von verschiedenen Variablen ab und müssen daher konstant sein, $T'(t) = \text{const.}$

4. Wegen $E = H = H' - \frac{\partial R_2}{\partial t} = -T'(t)$ folgt:

$$R_2 = -Et + S(x, y, z)$$

5. Damit wird (7.17) zu:

$$[S'_1(x)]^2 = 2mE - ([S'_2(y)]^2 + [S'_3(z)]^2)$$

Wieder hängen beide Seiten von verschiedenen Variablen ab und müssen daher konstant sein, $S_1(x) = P_x x$.

6. Einsetzen und Fortführen dieser Schlussweise führt schließlich auf:

$$R_2(x, y, z, t; P_x, P_y, P_z) = -Et + P_x x + P_y y + P_z z$$

7. Einsetzen in (7.16) liefert uns eine Bedingung an die aufgetretenen Konstanten:

$$E = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2),$$

und schließlich folgt:

$$R_2(x, y, z, t; P_x, P_y, P_z) = -\frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) t + P_x x + P_y y + P_z z$$

8. Bilden von (7.15) liefert:

$$\frac{\partial R_2}{\partial P_x} = -\frac{P_x}{m} t + x = Q_x \Rightarrow x = Q_x + \frac{P_x}{m} t$$

(analog für (y, z)).

9. Die Q_A sind die Anfangslagen und die P_A die Anfangsimpulse (zum Zeitpunkt $t = 0$).