Thermodynamik und Statistische Physik

Übungen - Serie 12

Ausgabe: 19. Januar 2016, Abgabe: 26. Januar 2016 in der Vorlesung

1. Quantenmechanisches System harmonischer Oszillatoren — 6 Punkte

Betrachten Sie ein quantenmechanisches System von N *ortsfesten* (d.h. *unterscheidbaren*) unabhängigen eindimensionalen harmonischen Oszillatoren der Frequenz ω.
Bestimmen Sie für dieses System gemäß der Vorlesung die kanonische Zustandssumme $Z^{(N)}$ und das Potential $F^{(N)}$. Bestimmen Sie daraus die thermische und kalorische Zustandsgleichung sowie die Wärmekapazität C_V.
Betrachten Sie die Grenzfälle hoher und niedriger Temperaturen.

2. Kanonik des quantenmechanisches Gittergas — 5 Punkte

Eine Anzahl N von unabhängigen Protonen (Fermionen) sei auf M Potentialmulden verteilt ($M \geq N$). Wir nehmen an, dass jede Mulde das feste Volumen V_{Mulde} einnimmt, womit das Gesamtvolumen des Systems mit $V = M \cdot V_{\text{Mulde}}$ gegeben ist. In jeder Mulde befinde sich höchstens ein Proton. Dort werde das quantenmechanische Potential durch einen dreidimensionalen linearen harmonischen Oszillator mit der isotropen Frequenz ω beschrieben.

(a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

(b) Ermitteln Sie daraus das Potential der Dichte der freien Energie.

(c) Leiten Sie die thermische und kalorische Zustandsgleichungen ab.

Hinweise:

(a) Die Basiszustände können durch $\vec{a} \in \sigma^{(N)}$ mit:

$$\sigma^{(N)} = \left\{ \begin{pmatrix} m_1, \ldots, m_M \\ n_1, \ldots, n_{3N} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} m_\nu \in \{0; 1\}, \sum\limits_{\nu=1}^{M} m_\nu = N, \\ n_k \in \mathbb{N}_0 \end{pmatrix} \right\}$$

erfasst werden. Hierbei beschreibt m_ν die Protonen-Anzahl in der ν-ten Potentialmulde (0 oder 1). Die Zahlen n_k sind mit den Eigenwerten des Operators $\hat{H}_k$ verknüpft,

$$\hat{H}_k = \frac{\hat{p}_k^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^k)^2, \quad \hat{H}_k|\phi_{n_k}^{\hat{H}_k}\rangle = \hbar\omega\left(n_k + \frac{1}{2}\right)|\phi_{n_k}^{\hat{H}_k}\rangle\,,$$

wobei die Koordinaten gemäß $x^{j+3(l-1)} \equiv x_l^j$ ($j = 1, .., 3$: kartesische Komponenten; $l = 1, \ldots, N$: Protonennummer) durchnummeriert seien.

(b) Die Funktion $\varepsilon^{(N)}(\vec{a})$, die gemäß

$$\sigma(\hat{H}^{(N)}) = \{\varepsilon^{(N)}(\vec{a}) \in \mathbb{R} \mid \vec{a} \in \sigma^{(N)}\}$$

das Spektrum des Hamiltonoperators $\hat{H}^{(N)}$ des Gesamtsystems beschreibt, lautet:

$$\varepsilon^{(N)}(\vec{a}) = \hbar\omega \sum_{k=1}^{3N} n_k + \frac{3}{2} N\hbar\omega$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von m_ν. Beachten Sie aber bei der Bildung von $Z^{(N)}$ einen Faktor $\binom{M}{N}$ für die Anzahl der Möglichkeiten N Fermionen auf M Mulden zu verteilen.

3. Gibbssches Paradoxon **4 Punkte**

Betrachten Sie für ein ideales einatomiges Gas im Volumen V bei vorgebener Temperatur T die freie Energie $F(T, V, N)$.
Durch (reversibles) seitliches Einschieben einer Zwischenwand wird das Ausgangssystem in zwei Teilsysteme mit den Volumina V_1 und V_2 mit $V_1 = V_2 = V/2$ geteilt.
Zeigen Sie, daß die kanonische Zustandssumme

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda^{3N}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

(Vergleiche Vorlesung) nur mit dem Gibbs-Faktor $1/N!$ zu $F = F_1 + F_2$ (d.h. $\Delta F = 0$) führt. Anderenfalls würde für diesen Vorgang im Widerspruch zur Thermodynamik $\Delta F \neq 0$ folgen!