Thermodynamik – Übung 04

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mo 10-12

Aufgabe 1

es gilt: $dE = \partial_V E \, dV + \partial_T E \, dT$

weiterhin: $dE \overset{(I)}{=} \delta Q + \delta W = 0$ (weder Arbeit noch Wärme)

und nach Ergebnis des Versuches $dT = 0$

$\Longrightarrow \quad dE = 0 = \partial_V E \, dV$

$\overset{(dV \neq 0)}{\Longrightarrow} \quad \partial_V E = 0 \implies$ damit gibt es eine Funktion $\tilde{E} : (0,\infty) \to (0,\infty)$

mit $\tilde{E}(T) = E(T,V)$ für alle T
(E ist also unabhängig von V)

Aufgabe 2

a) adiabatische Zustandsänderung: $\delta Q \overset{!}{=} 0 \implies dE = \delta W = -p\,dV$

es gilt: $dE = C_V \, dT$ und: $pV = nRT$

$$\Longrightarrow \quad C_V dT = -p\,dV \implies \frac{C_V}{nR} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} = \frac{C_V}{C_p - C_V} \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{dT}{T} \quad \text{mit } \varkappa := \frac{C_p}{C_V}$$

$$\overset{\text{(Integration)}}{\Longrightarrow} \quad \ln \frac{T_1}{T_0} = (1-\varkappa) \ln \frac{V_1}{V_0} \implies \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{1-\varkappa}$$

$\Longrightarrow \quad T_1 V_1^{\varkappa - 1} = T_0 V_0^{\varkappa - 1}$ (für alle T_0, T_1 mit zugehörigen V_0, V_1)

$$\Longrightarrow \quad T V^{\varkappa - 1} = \text{const}$$

weiterhin: $T = \frac{pV}{nR} \implies \text{const.} = T V^{\varkappa-1} = \frac{pV}{nR} V^{\varkappa - 1}$

$$\overset{(nR = \text{const})}{\Longrightarrow} \quad p V^{\varkappa} = \text{const}$$

und: $V = nR \frac{T}{p} \implies \text{const} = T V^{\varkappa - 1} = T \left(nR \frac{T}{p} \right)^{\varkappa - 1}$

$$= (nR)^{\varkappa - 1} \frac{T^{\varkappa}}{p^{\varkappa - 1}} = (nR)^{\varkappa - 1} T^{\varkappa} p^{1-\varkappa}$$

$$\Longrightarrow \quad T^{\varkappa} p^{1-\varkappa} = \text{const} \implies T p^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = \text{const}$$

b) $W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \overset{(\text{isotherm})}{=} nRT_{12} \int_{V_1}^{V_2} V^{-1}\, dV = nRT_{12} \ln \frac{V_2}{V_1}$

$\Rightarrow W_{34} = nRT_{34} \ln \frac{V_4}{V_3}$

$W_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p(V)\, dV \overset{(\text{adiabatisch})}{=} p_2 V_2^{\varkappa} \int_{V_2}^{V_3} V^{-\varkappa}\, dV = \frac{p_2 V_2^{\varkappa}}{1-\varkappa} \left(\frac{1}{V_3^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_2^{\varkappa-1}} \right)$

$\Rightarrow W_{41} = \frac{p_4 V_4^{\varkappa}}{1-\varkappa} \left(\frac{1}{V_1^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_4^{\varkappa-1}} \right)$

es gilt: $V_1^{\varkappa-1} = V_0^{\varkappa-1}$, $V_4^{\varkappa-1} = \frac{T_{12}}{T_{34}} V_0^{\varkappa-1}$, $V_3^{\varkappa-1} = \frac{T_{12}}{T_{34}} V_2^{\varkappa-1}$

$\Rightarrow W_{41} = \frac{p_4 V_4}{1-\varkappa} \frac{T_{12}}{T_{34}} V_0^{\varkappa-1} \left(\frac{1}{V_0^{\varkappa-1}} - \frac{T_{34}}{T_{12}} \frac{1}{V_0^{\varkappa-1}} \right)$

$= \frac{nR(T_{12} - T_{34})}{1-\varkappa}$

$\Rightarrow W_{23} = \frac{p_2 V_2}{1-\varkappa} V_2^{\varkappa-1} \left(\frac{T_{34}}{T_{12}} \frac{1}{V_2^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_2^{\varkappa-1}} \right) = \frac{nR(T_{34} - T_{12})}{1-\varkappa}$

$\Rightarrow W_{23} + W_{41} = 0$ (damit auch $W_{23}' + W_{41}' = 0$)

$\Rightarrow W = W_{12} + W_{34} = nR\left[T_{12} \ln \frac{V_2}{V_1} + T_{34} \ln \frac{V_4}{V_3} \right]$

$= nR\left[T_{12} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + T_{34} \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \right] = nR(T_{12} - T_{34}) \ln \frac{V_2}{V_1}$

$\Rightarrow W = nR(T_{12} - T_{34}) \ln\left[\left(\frac{T_{34}}{T_{12}}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \frac{V_3}{V_1} \right] \overset{(\text{einsetz.})}{=} 3nRT_0 \ln\left(4^{\frac{2\varkappa-1}{\varkappa-1}} \right)$

$= 3nRT_0 \frac{2\varkappa-1}{\varkappa-1} \ln 4 = 3 \ln 4\, nRT_0 \frac{2C_p - C_V}{C_p - C_V} = 3 \ln 4\, T_0 (C_p + nR)$

$\Rightarrow \frac{W}{W'} = \frac{C_p + nR}{C_p' + nR} \overset{(n=1)}{=} \frac{\frac{3}{2}R + 2R}{\frac{5}{2}R + 2R} = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}$

<u>Aufgabe 3</u>

b) $p_1 V_a = nRT_a \overset{(V_a < V_b)}{<} p_1 V_b = nRT_b \Rightarrow T_a < T_b$

(analog: $T_d < T_c$)

$T_a\, p_1^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} = T_d\, p_2^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}} \Rightarrow T_a = T_d \underbrace{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}}_{>1} \Rightarrow T_a > T_d$

(analog $T_b > T_c$) $\Rightarrow$ T_b höchste, T_d kleinste

Aufgabe 4

allgemein: $p_1 V_1 = N_1 k T_1$, $p_2 V_2 = N_2 k T_2$, $V := V_1 + V_2$

a) es muss gelten: $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2 =: \tilde{T}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{p}_1 V_1 = N_1 k \tilde{T} , \quad \tilde{p}_2 V_2 = N_2 k \tilde{T}$$

$$\Rightarrow dE_1 = \delta Q_1 = c_V (T_1 - \tilde{T}) = -dE_2 = c_V (\tilde{T} - T_2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{T} = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{p}_1 = k \frac{N_1}{V_1} \tilde{T} , \quad \tilde{p}_2 = k \frac{N_2}{V_2} \tilde{T}$$

b) ·) Druckausgleich und Temperaturausgleich, aber Volumenänderung

·) Mischtemperatur nach Aufgabe 1 unabhängig von Temperaturausgleich (bzw. weil $E := E_1 + E_2 = \tilde{E}_1 + \tilde{E}_2$)

Dann gilt: $\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 = V$

$$\tilde{p} \tilde{V}_1 = N_1 k \tilde{T} , \quad \tilde{p} \tilde{V}_2 = N_2 k \tilde{T}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} V , \quad \tilde{V}_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} V$$

$$\tilde{T} = \frac{N_1 T_1 + N_2 T_2}{N_1 + N_2}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{k}{V} (N_1 T_1 + N_2 T_2)$$

c) Nein, da System vollständig durch p, V, T beschrieben

durch Öffnen kann nur noch N_1, N_2 verändert werden ohne Änderung der anderen Größen

aber nur eine Lösung möglich $\Rightarrow$ System verändert sich nicht