# Thermodynamik – Übung 02

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mo 10–12

## Aufgabe 1

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \begin{cases} 0 & : (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & : \text{sonst} \end{cases}$. Dann gilt:

$f$ ist stetig in allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen (welche dann auch überall definiert sind).

$\Rightarrow$ insbesondere ist $f$ also partiell stetig in allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f$ ist partiell stetig in $(0,0)$:

·) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x,0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \to 0} 0 = 0 = f(0,0)$

·) $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} f(0,y) = \lim_{y \to 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = \lim_{y \to 0} 0 = 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow$ $f$ ist partiell stetig in $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f$ ist partiell stetig

$f$ ist nicht stetig in $(0,0)$:

z: es gibt Folge $((x_n,y_n)_n)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit $(x_n,y_n) \to (0,0)$, sodass $\lim_{(x_n,y_n) \to (0,0)} f(x_n,y_n) \neq f(0,0)$

Sei $(x_n,y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $(x_n,y_n) \to (0,0)$, $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $f(x_n,y_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n^{-1} n^{-1}}{n^{-2} + n^{-2}} = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $f(x_n,y_n) \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $\lim_{(x_n,y_n) \to (0,0)} f(x_n,y_n) \neq f(0,0)$

$\Rightarrow$ $f$ kann in $(0,0)$ nicht stetig sein $\square$

Aufgabe 2 Markus Pawellek - 144645 Übung: Mo 10-12

Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}(x+y)\sin(x-y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$. Dann gilt:

$f$ ist diffbar in allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition diffbarer Funktionen

$$\Rightarrow \partial_x f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\left[\sin(x-y) + (x+y)\cos(x-y)\right] + \frac{(x+y)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2}(y^3 - x^2 y)$$

und $$\partial_y f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\left[\sin(x-y) - (x+y)\cos(x-y)\right] + \frac{(x+y)\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2}(x^3 - xy^2)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Weiterhin gilt:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(h,0) - f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} 0 = 0$$

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(0,h) - f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h} 0 = 0$$

(damit ist $f$ mindestens diffbar) es konnten partielle Ableitungen ermittelt werden

$$\partial_x\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\partial_x f(h,0) - \partial_x f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}0 = \underline{\underline{0}}$$

$\partial_y\partial_y f(0,0) = \underline{\underline{0}}$ (analog zu $\partial_x^2 f(0,0)$)

$$\partial_y\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\partial_x f(0,h) - \partial_x f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h\sin(-h)}{h^4}\cdot h^3\right) = \lim_{h\to 0} -\frac{\sin h}{h}$$

$= \underline{\underline{-1}}$ (nach Satz von L'Hospital)

$$\partial_x\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\partial_y f(h,0) - \partial_y f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h\sin(h)}{h^4}h^3\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$= \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow \partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y\partial_x f(0,0) \overset{\text{(Umkehrung}}{\underset{\text{Schwarz)}}{\Longrightarrow}}$ $f$ ist nicht zweimal stetig diffbar

Aufgabe 3 Markus Pawellek - 144645 Übung: Mo 10-12

a) es gilt:

$$\int_{\partial G(t)} \vec{x} \times (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot d\vec{A}) = \int_{\partial G(t)} \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, (\overleftrightarrow{\sigma}\, d\vec{A})_k$$

$$= \int_{\partial G(t)} \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, x_j \sum_{l=1}^{3} \sigma_{kl}\, dA_l$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \vec{e_i} \int_{\partial G(t)} \left( \sum_{l=1}^{3} \vec{e_l} \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl} \right) d\vec{A}$$

$$\overset{(\text{Gauß})}{=} \sum_{i=1}^{3} \vec{e_i} \int_{G(t)} \sum_{l=1}^{3} \partial_l \left( \Sigma_{j,k=1}^{3}\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{kl} \right) d^3\vec{x} \qquad \text{(Bildung der Divergenz)}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \vec{e_i} \int_{G(t)} \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_l (x_j \sigma_{kl})\, d^3\vec{x} \qquad \Big|\ \partial_l (x_j \sigma_{kl}) = \delta_{jl}\, \sigma_{kl} + x_j\, \partial_l \sigma_{kl}$$

$$= \int_{G(t)} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, \delta_{jl}\, \sigma_{kl}\, d^3\vec{x} + \int_{G(t)} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \partial_l \sigma_{kl}\, d^3\vec{x}$$

$$= \int_{G(t)} \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{kj}}_{= -\begin{pmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{pmatrix} =: \vec{\sigma}^*} d^3\vec{x} + \int_{G(t)} \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e_i}\, \varepsilon_{ijk}\, x_j \underbrace{\left( \Sigma_{l=1}^{3}\, \partial_l \sigma_{kl} \right)}_{= \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_k \ \text{(Zeilenvektor)}}}_{= \vec{x} \times \begin{pmatrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_1 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_2 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}_3 \end{pmatrix} =: \vec{x} \times \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}} d^3\vec{x}$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{G(t)} \vec{x} \times (\rho \vec{v})\, d^3\vec{x} = \int_{G(t)} \partial_t (\vec{x} \times \rho \vec{v} \cdot J)\, J^{-1}\, d^3\vec{x}$$

$$= \int_{G(t)} \underbrace{\partial_t (\vec{x} \times \rho \vec{v})}_{\substack{= (\partial_t \vec{x} \times \rho \vec{v}) + (\vec{x} \times \partial_t (\rho \vec{v})) \\ = \rho (\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{x} \times (\partial_t \rho\, \vec{v} + \rho\, \partial_t \vec{v}) \\ = \vec{x} \times (\partial_t \rho\, \vec{v}) + \vec{x} \times (\rho\, \partial_t \vec{v})}} d^3\vec{x} + \int_{G(t)} (\vec{x} \times \rho \vec{v}) \underbrace{(J^{-1} \partial_t J)}_{= \vec{\nabla} \cdot \vec{v}} d^3\vec{x}$$

$$= \int_{G(t)} \underbrace{(\vec{x} \times \vec{v}) \underbrace{(\partial_t \rho + \rho \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v})}_{(\text{Kontin.-gl.}) = -\vec{\nabla} \rho\, \vec{v}}}_{= 0} + \vec{x} \times \rho\, \partial_t \vec{v}\, d^3\vec{x} = \int_{G(t)} \vec{x} \times \rho\, \partial_t \vec{v}\, d^3\vec{x}$$

$\overset{(\text{Einsetzen})}{\Longrightarrow} \quad \int_{G(t)} \vec{x} \times \rho\, \partial_t \vec{v} \; d^3\vec{x} = \int_{G(t)} \vec{x} \times \vec{f} + \vec{\sigma}^* + \vec{x} \times \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \; d^3\vec{x}$

$\overset{(G(t) \text{ beliebig})}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\vec{x} \times \rho\, \partial_t \vec{v} = \vec{x} \times \vec{f} + \vec{\sigma}^* + \vec{x} \times \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}}$

b) Impulsbilanzgleichung: $\rho\, \partial_t \vec{v} = \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma}$ (siehe Skript)

$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{x} \times \rho\, \partial_t \vec{v} = \vec{x} \times \vec{f} + \vec{x} \times \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\sigma} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^3}$

c) (Subtraktion der Gleichungen) $\Longrightarrow \quad \vec{\sigma}^* = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{für alle } i,j \in \{1,2,3\}$$

$\Longrightarrow$ $\overleftrightarrow{\sigma}$ ist damit symmetrisch $\square$