Thermodynamik – Übung 01

Markus Pawellek – 144645 Übung: Mo 10 – 12

Aufgabe 1

a)
$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_1,u_2)} = \begin{vmatrix} \partial_{u_1}x_1 & \partial_{u_2}x_1 \\ \partial_{u_1}x_2 & \partial_{u_2}x_2 \end{vmatrix} = \partial_{u_1}x_1\,\partial_{u_2}x_2 - \partial_{u_2}x_1\,\partial_{u_1}x_2$$

$$= \partial_{u_2}x_2\,\partial_{u_1}x_1 - \partial_{u_1}x_2\,\partial_{u_2}x_1 = \begin{vmatrix} \partial_{u_2}x_2 & \partial_{u_1}x_2 \\ \partial_{u_2}x_1 & \partial_{u_1}x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(x_2,x_1)}{\partial(u_2,u_1)}$$

$$= -\left(\partial_{u_1}x_2\,\partial_{u_2}x_1 - \partial_{u_2}x_2\,\partial_{u_1}x_1\right) = -\begin{vmatrix} \partial_{u_2}x_1 & \partial_{u_1}x_1 \\ \partial_{u_2}x_2 & \partial_{u_1}x_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(u_2,u_1)} \qquad \square$$

b)
$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \partial_{x_1}x_1 & \partial_{x_1}x_2 \\ \partial_{x_1}x_2 & \partial_{x_2}x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\frac{\partial(x_1,u_2)}{\partial(u_1,u_2)} = \begin{vmatrix} \partial_{u_1}x_1 & \partial_{u_2}x_1 \\ \partial_{u_1}u_2 & \partial_{u_2}u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_{u_1}x_1 & \partial_{u_2}x_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \qquad \square$$

Aufgabe 2

Sei $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ mit $g(x,y,z)=0$ die implizit gegebene Funktion (mit „schönen" Eigenschaften). Seien nun $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{R}$.
Dann lässt sich x als Funktion $x(y,z)$ interpretieren (an x_0,y_0,z_0), sodass $g(x(y,z),y,z)=0$ gilt. (analoges gilt für y)

$$x_{z_0} := x(\cdot,z_0)\,, \quad y_{z_0} := y(\cdot,z_0)$$

$$\Rightarrow \quad y_{z_0}(x) = x_{z_0}^{-1}(x) =$$

es gilt: $\quad x_{z_0}^{-1}(x_{z_0}(y)) = y \quad \Rightarrow \quad (x_{z_0}^{-1})'(x_{z_0}(y))\cdot x_{z_0}'(y) = 1$

$$\Rightarrow \quad x_{z_0}'(y) = \left((x_{z_0}^{-1})'(x_{z_0}(y))\right)^{-1} = \left(y_{z_0}'(x)\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad (\partial_y x)_z(y) = \left[(\partial_x y)_z(x)\right]^{-1} \qquad \square$$

b) Sei $\tilde{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(\tilde{x}(y,z),y,z) = 0$ für alle $y,z \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$0 = \partial_y \left[g(\tilde{x}(\cdot,\cdot),\cdot,\cdot) \right] = \partial_x g \cdot \partial_y \tilde{x} + \partial_y g$$

$$\Rightarrow \partial_y \tilde{x} = - \frac{\partial_y g}{\partial_x g} \Rightarrow \text{(analoges gilt für } \tilde{y}, \tilde{z}\text{)} \quad \partial_z y = - \frac{\partial_z g}{\partial_y g}, \quad \partial_x z = - \frac{\partial_x g}{\partial_z g}$$

$$\Rightarrow \partial_y \tilde{x} \cdot \partial_z \tilde{y} \cdot \partial_x \tilde{z} = \left(- \frac{\partial_y g}{\partial_x g}\right)\left(- \frac{\partial_z g}{\partial_y g}\right)\left(- \frac{\partial_x g}{\partial_z g}\right) = -1$$

$\square$

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $A(t) = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Matrix ist. Weiterhin sei $\det A(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Spur}\left(A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right) \det A(t) = \mathrm{Spur}\left(\det A(t) \cdot A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right) = \mathrm{Spur}\left(\mathrm{adj}\, A(t) \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

$$= \mathrm{Spur}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A(t)_{ki}) \frac{d a_{kj}(t)}{dt} \right) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+m} \frac{d a_{km}(t)}{dt} \det(A(t)_{km})$$

$$= \sum_{m,k=1}^{n} (-1)^{k+m} \frac{d a_{km}(t)}{dt} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(k) = m}} (-1)^{m-k} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} a_{l\sigma(l)}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \frac{d a_{km}(t)}{dt} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} a_{l\sigma(l)}(t)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \sum_{k=1}^{n} \frac{d a_{km}(t)}{dt} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{j\sigma(j)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}(t) \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \det A(t)$$

$\square$

Aufgabe 4

nach 3) gilt: $J^{-1} (\partial_t J)_{\vec{u}} = \mathrm{Spur}\Big(\overbrace{(\partial_{x_j} u_i)}^{A^{-1}} \cdot \underbrace{\partial_t \overbrace{(\partial_{u_j} x_i)}^{A}} \Big)$

$\text{(schwarz)} = (\partial_{u_j} \partial_t x_i) = (\partial_{u_j} v_i)$

$$= \sum_{m=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} u_m \cdot \partial_{u_m} v_k \overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \sum_{k=1}^{3} \partial_{x_k} v_k = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v}$$

$\square$