Thermodynamik und Statistische Physik

Übungen - Serie 2

Ausgabe: 27. Oktober 2015, Abgabe: 3. November 2015 in der Vorlesung

1. Stetigkeit für mehrdimensionale Funktionen **2 Punkte**

Gegeben sei die in ganz $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß $f(x,y)$ zwar **partiell** stetig in $(0,0)$ ist aber in diesem Punkt **nicht stetig** ist.

2. Zweite partielle Ableitungen **4 Punkte**

Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$ und $f_{yx}(0,0)$ der Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Was kann man aus dem Vergleich von $f_{xy}(0,0)$ und von $f_{yx}(0,0)$ aus dem Satz von Schwarz folgern?

bitte wenden!

3. Symmetrie des Spannungstensors **6 Punkte**

In der Kontinuumsmechanik läßt sich die Drehimpulsbilanz formulieren als

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{G(t)} \vec{x}\times(\varrho\vec{v})\,\mathrm{d}^3x &= \int\limits_{G(t)} \vec{x}\times\vec{f}\,\mathrm{d}^3x \\ &\quad + \int\limits_{\partial G(t)} \vec{x}\times\left(\overset{\leftrightarrow}{\sigma}\cdot\mathrm{d}\vec{A}\right) \qquad (1)\end{aligned}$$

Das erste Integral stellt dabei den Drehimpuls des Gebietes $G\,(t)$ dar. Das zweite und dritte Integral beschreiben die von den Volumenkräften und den von außen angreifenden Oberflächenkräften erzeugten Drehmomente. Die Gleichung besagt, dass es keine Beiträge der *inneren* Oberflächenkräfte zum Drehmoment gibt.

(a) Schreiben Sie (1) in differentieller Form auf. Benutzen Sie hierzu den Gaußschen Satz. Beachten Sie, dass (1) eine vektorielle Gleichung darstellt.

(b) Leiten sie eine analoge Gleichung aus der Impulsbilanzgleichung (2. Newtonsches Axiom in der Kontinuumsmechanik) her.

(c) Zeigen Sie durch Vergleich beider Gleichungen, dass der Spannungstensor $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ symmetrisch ist, d.h. $\sigma^{jk} = \sigma^{kj}$ für $j, k = 1, 2, 3$.