Thermodynamik und Statistische Physik

Übungen - Serie 13

Ausgabe: 26. Januar 2016, Abgabe: 2. Februar 2016 in der Vorlesung

1. Großkanonik des quantenmechanischen Gittergases **4 Punkte**

Betrachten Sie erneut das quantenmechanische Gittergas aus Aufgabe 2 der Übungsserie 12 .

(a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme gemäß

$$Y^{(V)} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\vec{a} \in \sigma^{(N)}} \mathrm{e}^{-\beta[\varepsilon^{(N)}(\vec{a}) - \bar{\mu} N]}$$

(b) Ermitteln Sie daraus das Potential der Volumendichte des großkanonischen Potentials.

(c) Leiten Sie thermische und kalorische Zustandsgleichungen ab und vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen aus Aufgabe 2 der Übungsserie 12 .

2. Quantenstatistische Herleitung der großkanonischen Wahrscheinlichkeit **4 Punkte**

Betrachten Sie ein offenes makroskopisches System Σ angekoppelt an ein (viel größeres) Wärme- und Teilchenbad B. Nehmen Sie an, daß B durch eine mikrokanonische Verteilung

$$\Omega(E_B, \Delta E_B, V_B, N_B)$$

beschrieben wird. Setzen Sie nun an, daß die Wahrscheinlichkeit, für das System Σ die Teilchenzahl $N(\{n_i\})$ und die Energie $\varepsilon(\{n_i\})$ zu messen [1], derjenigen entspricht, für das Bad B die Teilchenzahl $N_B = N_G - N(\{n_i\})$ sowie die Energie $E_B = E_G - \varepsilon(\{n_i\})$ zu erhalten. Dabei seien N_G bzw. E_G feste Gesamtteilchenzahl bzw. feste Gesamtenergie des Gesamtsystems bestehend aus B und Σ. Ermitteln Sie nun aus diesen Annahmen die großkanonische Wahrscheinlichkeit $w(\{n_i\})$.

bitte wenden

[1] Die Notation $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ bedeutet eine Bose- bzw. Fermi-Folge, $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \in \sigma_{\pm}$, für die Wahrscheinlichkeiten $w(\{n_i\})$ definiert sind, mit deren Hilfe Teilchenzahl-, Energie- sowie Entropiemittelwerte bestimmt werden, siehe Vorlesungsskript S. 112 ff.

3. Polylogarithmus[2] **4 Punkte**

Zeigen Sie, daß in einer Umgebung von $x = 0$ die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^\nu} = \frac{x}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{z^{\nu-1}}{e^z - x} \, \mathrm{d}z$$

gilt. Nehmen Sie dabei an, daß die durch die rechte Seite definierte *polylogarithmische* Funktion $\mathrm{Li}_\nu = \mathrm{Li}_\nu(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ analytisch ist.

Hinweis: Die Γ-Funktion ist definiert gemäß

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty z^{\nu-1} \mathrm{e}^{-z} \, \mathrm{d}z.$$

[2]Der Polylogarithmus tritt bei der Behandlung idealer Quanten-Gase mittels der großkanonischen Verteilung auf, siehe Skript.