Markus Pawellek
144645

Thermodynamik - Übung 10

Aufgabe 1

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ die betrachtete Dimension des Raumes. Sei dann die allgemeine Koordinatentransformation von Kugelkoordinaten auf kartesische Koordinaten definiert durch [1]

$$\Phi^n : [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]^{n-2} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x_i := \Phi^n_i(r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) := r\sin\alpha_{i-1}\prod_{k=i}^{n-1}\cos\alpha_k \quad \textit{für alle } k \in \{2,\dots,n\}$$
$$x_1 := \Phi^n_1(r,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) := r\cos\alpha_1 \prod_{k=2}^{n-1}\cos\alpha_k$$

Die Koordinatentransformation führt den Winkel ϑ der dreidimensionalen Kugelkoordinaten anders ein, als bekannt. Er wird hier um $\pi/2$ verschoben, um so einen einfacheren induktiven Vorgang zu ermöglichen. Die angegebenen Funktionen lassen sich außer auf einer Lebesgue-Nullmenge umkehren. Dabei entstehen durch Umformung die Gleichungen

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{i+1} x_k^2}}\right) \quad \textit{für alle } k \in \{2,\dots,n\}$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) & : x_1 > 0 \\ \arccos\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) + \frac{\pi}{2} & : x_1 < 0,\ x_2 > 0 \\ \arccos\left(\frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) - \frac{\pi}{2} & : x_1 < 0,\ x_2 < 0 \end{cases}$$

Dies lässt sich durch vollständige Induktion nachweisen. Um nun die Integration über diese Koordinaten zu ermöglichen, muss die Determinante der Jacobi-Matrix von Φ^n berechnet werden. Dazu muss als erstes die Jacobi-Matrix dargestellt werden. Verwendet man ein ähnliches induktives Vorgehen, kommt man für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ zu

$$\mathrm{D}\Phi^{n+1}(\dots) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -r\sin\alpha_n \cdot \mathrm{D}\Phi^n_{11}(\dots) \\ & \cos\alpha_n \cdot \mathrm{D}\Phi^n(\dots) & & \vdots \\ & & & -r\sin\alpha_n \cdot \mathrm{D}\Phi^n_{n1}(\dots) \\ \hline \sin\alpha_n & 0 \ \cdots & 0 & r\cos\alpha_n \end{array}\right)$$

[1] Die Idee hierfür kommt durch eine induktive Verallgemeinerung von zwei- und dreidimensionalen Kugelkoordinaten, die hier nicht erklärt werden soll. (Sie steht in etwas längerer Form an meinem Whiteboard.)

Entwickelt man nun die Determinante nach der letzten Zeile (dies ist naheliegend, da hier nur zwei Terme vorkommen, welche ungleich sind) folgt

$$\begin{aligned}\det \mathrm{D}\Phi^{n+1}(\ldots) =&(-1)^n\, r \cos\alpha_n \cdot \cos^n \alpha_n \, \det \mathrm{D}\Phi^n(\ldots) \\ &+ \sin\alpha_n \cdot (-1)^{n-1}\,(-r)\,\sin\alpha_n\,\cos^{n-1}\alpha_n\,\det \mathrm{D}\Phi^n(\ldots)\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden wurde die rechte Spalte der Untermatrix zirkulär nach links vertauscht. So entsteht ein $(-1)^{n-1}$. Sowohl für die eine als auch die andere Untermatrix wurde der Satz zur Berechnung einer Determinanten, deren Spalten mit verschiedenen Skalaren multipliziert wurden, verwendet. So entstehen die Vorfaktoren $\cos^n \alpha_n$ und $(-r)\sin\alpha_n \cos^{n-1}\alpha_n$. Weiteres Umformen ergibt dann die Rekursionsformel der Determinanten und ein Rekursionsbeginn für $n = 2$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\det \mathrm{D}\Phi^{n+1}(\ldots) &= (-1)^n\; r\;\cos^{n-1}\alpha_n\;\det \mathrm{D}\Phi^n(\ldots) \\ \det \mathrm{D}\Phi^2(\ldots) &= r\end{aligned}$$

Die Lösung der Rekursionsformel erfolgt durch Entwickeln und vollständige Induktion (dies wird hier nicht ausgeführt). Es folgt dann direkt

$$|\det \mathrm{D}\Phi^n(\ldots)| = r^{n-1}\;\prod_{i=1}^{n-2}\cos^i \alpha_{i+1}$$

Seien nun $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ für ein $R \in [0,\infty)$, λ das Lebesgue-Maß und σ das Oberflächenmaß. Dann gilt nach dem Satz über Koordinatentransformationen und dem Satz von Fubini/Tonelli

$$\begin{aligned}V := \lambda(B_R) = \int_{B_R}\,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\det \mathrm{D}\Phi^n(\ldots)|\;\mathrm{d}\alpha_{n-1}\cdots\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{n}R^n\prod_{j=1}^{n-2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^j\alpha\;\mathrm{d}\alpha \\ A := \sigma(B_R) = \int_{B_R}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cdots\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\det \mathrm{D}\Phi^n(R,\ldots)|\;\mathrm{d}\alpha_{n-1}\cdots\mathrm{d}\alpha_1 \\ &= 2\pi R^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^j\alpha\;\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

Weiterhin gilt im Allgemeinen folgende Rekursionsformel für alle $n \in \mathbb{N}, n > 2$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\alpha\;\mathrm{d}\alpha = \frac{n-1}{n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n-2}\alpha\;\mathrm{d}\alpha$$

Es folgt dann für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k}\alpha \,\mathrm{d}\alpha &= \frac{\pi}{2}\prod_{m=1}^{k-1}\frac{2m+1}{2(m+1)} \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k-1}\alpha \,\mathrm{d}\alpha &= 2\prod_{m=1}^{k-1}\frac{2m}{2m+1} \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha &= 2 \\
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2}\alpha \,\mathrm{d}\alpha &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Fall $n = 2k-1$ für ein $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n-2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{j}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2k-3}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\left[\prod_{m=1}^{k-2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2m-1}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2m}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\right] \\
&= 2\left[\prod_{m=1}^{k-2}\frac{2m}{2m+1}\right]\left[\prod_{m=1}^{k-2}\pi\prod_{j=1}^{m-1}\frac{2j}{2j+1}\frac{2j+1}{2(j+1)}\right] \\
&= 2^{k-1}\pi^{k-2}\left[\prod_{m=1}^{k-2}\frac{m}{2m+1}\right]\cdot\frac{1}{(k-2)!} \\
&= 2^{k-1}\pi^{k-2}\prod_{m=1}^{k-2}\frac{1}{2m+1}
\end{aligned}$$

Fall $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n-2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{j}\alpha\,\mathrm{d}\alpha &= \prod_{m=1}^{k-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2m-1}\alpha\,\mathrm{d}\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2m}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Damit wurden nun die unbekannten Faktoren in den gesuchten Gleichungen bestimmt. Das allgemeine Volumen und der allgemeine Oberflächeninhalt folgt nun durch Einsetzen.

$$V = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!}R^n & : n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 2^k\pi^{k-1}R^n\prod_{m=1}^{k-1}\frac{1}{2m+1} & : n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}R^{n-1} & : n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ 2^k\pi^{k-1}R^{n-1}\prod_{m=1}^{k-2}\frac{1}{2m+1} & : n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sei nun $R > \varepsilon > 0$. Dann besitzt die äußere Kugelschale mit der Schichtdicke ε das Volumen ΔV, wenn ξ die Funktion der Vorfaktoren des Volumens darstellt.

$$\begin{aligned} \Delta V &= \xi(n) \left[R^n - (R-\varepsilon)^n \right] \\ \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} &= 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^n}_{\longrightarrow 0,\, n \longrightarrow \infty} \longrightarrow 1,\ n \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit befindet sich für große Dimensionen n und für alle $\varepsilon > 0$ fast das gesamte Volumen in der äußeren Schale.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$. Sei weiterhin $Z = (1, 2, \ldots, n)$ eine Zerlegung von $[1, n]$. Die Funktion $\ln n!$ ist monoton steigend und positiv für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Es gilt nach Gesetzen des Logarithmus

$$\ln n! = \sum_{i=1}^{n} \ln i$$

Daraus folgt dann durch Betrachtung der Ober- und Untersummen

$$\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \ln i \;\leq\; \int_1^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x$$

Rückumformung und Anwendung des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung resultiert dann in

$$\begin{aligned}
n \ln n - n + 1 \;&\leq\; \ln n! \;\leq\; (n+1)\ln(n+1) - n \\
\Rightarrow\; \ln n - \frac{n-1}{n} \;&\leq\; \frac{\ln n!}{n} \;\leq\; \frac{n+1}{n}\ln(n+1) - 1 \\
\Rightarrow\; \underbrace{-\frac{n-1}{n}}_{\longrightarrow -1,\; n \longrightarrow \infty} \;&\leq\; \frac{\ln n!}{n} - \ln n \;\leq\; \underbrace{\frac{n+1}{n}\ln(n+1) - \ln n - 1}_{= \ln \frac{n+1}{n} + \frac{\ln(n+1)}{n} - 1 \longrightarrow -1,\; n \longrightarrow \infty}
\end{aligned}$$

Nach dem Sandwich-Theorem für Folgen folgt also

$$\frac{\ln n!}{n} - \ln n \longrightarrow -1, \; n \longrightarrow \infty$$

q.e.d.

Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Tage, an denen Personen Geburtstag haben können, und $k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$ die Anzahl der betrachteten Personen. Nimmt man die Gleichverteilung für Geburtstage an, so folgt für das Wahrscheinlichkeitsmaß [2]

$$P : \mathcal{P}\left(\{1,\dots,n\}^k\right) \longrightarrow [0,1], \qquad P((n_1,\dots,n_k)) = \frac{1}{n^k}$$

Das komplementäre Ereignis von

Mindestens zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag.

ist

Alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag.

Dieses komplementäre Ereignis kann gerade durch folgende Menge beschrieben werden.

$$A := \left\{ (n_1,\dots,n_k) \in \{1,\dots,n\}^k \;\middle|\; n_i \neq n_j \textit{ für alle } i,j \in \{1,\dots,k\}, i \neq j \right\}$$

Um nun die Anzahl der Elemente von A zu bestimmen, bestimmt man induktiv die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen n_i. Beginnt man der Benennung entsprechend mit n_1, so können dessen Werte beliebig gewählt werden, da die anderen Werte noch nicht festgelegt wurden. Damit gibt es für n_1 also n Möglichkeiten. Folglich kann aber n_2 nicht mehr beliebig gewählt werden, weil bereits n_1 einen der beliebigen n Werte angenommen hat. Für n_2 gibt es also genau eine Lösung weniger und damit genau $n-1$ Möglichkeiten. Wählt man nun ein ganzzahliges $i < k$, sodass die Anzahl der Möglichkeiten für n_i bekannt ist und mit N_i bezeichnet wird, dann müssen sich die Möglichkeiten für n_{i+1} durch $N_i - 1$ ergeben, da durch n_i einer der noch möglichen N_i Werte besetzt wird. Die Anzahl der Gesamtmöglichkeiten ergibt sich dann durch Multiplikation der induktiv bestimmten Werte.

$$\#A = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Es folgt dann

$$P(A) = \frac{\#A}{n^k} = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$$

Nach Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich dann die Wahrscheinlichkeit des eigentlichen Ereignisses durch

$$\boxed{P(A^c) = 1 - \frac{n!}{n^k (n-k)!}}$$

$n = 365, k = 20$**:**

$$P(A^c) \approx 0.411$$

$n = 365, k = 60$**:**

$$P(A^c) \approx 0.994$$

[2] Der Wahrscheinlichkeitsraum soll hier nicht genauer angegeben werden.