

Thermodynamik - Übung 08

Aufgabe 1

Es gilt nach Voraussetzungen für die innere Energie E und den Druck p eines Photonengases:

$$E : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad E(T, V) := \sigma VT^4 \quad (1)$$

$$p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad p(T, V) := \frac{1}{3} \frac{E(T, V)}{V} = \frac{1}{3} \sigma T^4 \quad (2)$$

Weiterhin gelten die bereits bewiesenen Folgerungen aus der Gibbsschen Fundamentalgleichung für die Entropie $S : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ für alle $T, V \in \mathbb{R}^+$:

$$(\partial_T E)_V(T, V) = T (\partial_T S)_V(T, V) \quad (3)$$

$$(\partial_V E)_T(T, V) = T (\partial_V S)_T(T, V) - p(T, V) \quad (4)$$

Aufgrund von Gleichung (3) lässt sich nun Folgendes sagen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow T (\partial_T S)_V(T, V) &\stackrel{(1)}{=} 4\sigma VT^3 \\ \Rightarrow (\partial_T S)_V(T, V) &= 4\sigma VT^2 \\ \Rightarrow S(T, V) &= \frac{4}{3} \sigma VT^3 + C(V) \end{aligned}$$

Dabei ist $C(V)$ die entstehende Integrationskonstante, welche je nach V unterschiedlich sein kann. Zur Bestimmung der Funktion C wird nun Gleichung (4) verwendet:

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\partial_V S)_T(T, V) &= \frac{1}{T} [(\partial_V E)_T(T, V) + p(T, V)] \\ ((1), (2)) &= \frac{1}{T} \left[\sigma T^4 + \frac{1}{3} \sigma T^4 \right] \\ &= \frac{4}{3} \sigma T^3 \\ (siehe\ oben) &\stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \sigma T^3 + C'(V) \\ \Rightarrow C'(V) &= 0 \\ \Rightarrow C(V) &= S_0 \end{aligned}$$

Für die Entropie folgt damit:

$$S(T, V) = \frac{4}{3} \sigma VT^3 + S_0 \quad (5)$$

Im Allgemeinen befindet sich das betrachtete thermodynamische System im Gleichgewicht. Damit ist es ohne Einschränkungen erlaubt, $S_0 = 0$ zu setzen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(S, V) &= \left(\frac{3S}{4\sigma V} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \Rightarrow E(S, V) &= E(T(S, V), V) = \sigma V \left(\frac{3S}{4\sigma V} \right)^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (6)$$

Es wurden hier keine weiteren Abbildungen für E und T eingeführt, um die neuen Abhängigkeiten zu definieren. Das totale Differential für die freie Energie $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ lautet:

$$dF(T, V) = -S(T, V) dT - p(T, V) dV \quad (7)$$

Für die partielle Ableitung nach T muss also folgen:

$$\begin{aligned} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} (\partial_T F)_V(T, V) &= -S(T, V) \stackrel{(5)}{=} -\frac{4}{3}\sigma VT^3 \\ \Rightarrow F(T, V) &= -\frac{1}{3}\sigma VT^4 + K(V) \end{aligned} \quad (8)$$

Analog dazu lässt sich die Ableitung nach V betrachten:

$$\begin{aligned} \stackrel{(7)}{\Rightarrow} (\partial_V F)_T(T, V) &= -p(T, V) \stackrel{(2)}{=} -\frac{1}{3}\sigma T^4 \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{3}\sigma T^4 + K'(V) \\ \Rightarrow K'(V) &= 0 \\ \Rightarrow K(V) &= F_0 \stackrel{o.E.}{=} 0 \\ \Rightarrow F(T, V) &= -\frac{1}{3}\sigma VT^4 \end{aligned} \quad (9)$$

Nun soll das totale Differential der Enthalpie $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ betrachtet werden.

$$dH(S, p) = T(S, p) dS + V(S, p) dp \quad (10)$$

Nach Definition (2) kann direkt gezeigt werden:

$$\begin{aligned} T(S, p) &= \tilde{T}(p) = \left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \\ \stackrel{(5)}{\Rightarrow} V(S, p) &= \frac{3S}{4\sigma(T(S, p))^3} = \frac{3S}{4\sigma\left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}} \\ \stackrel{(10)}{\Rightarrow} (\partial_S H)_p(S, p) &= T(S, p) \\ \Rightarrow H(S, p) &= \left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} S + C(p) \\ \stackrel{(10)}{\Rightarrow} (\partial_p H)_S(S, p) &= \frac{3S}{4\sigma\left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{3S}{4\sigma\left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{3}{4}}} + C'(p) \\ \Rightarrow C'(p) &= 0 \\ \Rightarrow C(p) &= H_0 \stackrel{o.E.}{=} 0 \\ \Rightarrow H(S, p) &= \left(\frac{3p}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} S \end{aligned} \quad (11)$$

Für die freie Enthalpie gilt nun:

$$\begin{aligned} dG(p, T) &= -S(p, T) dT + V(p, T) dp \\ &\stackrel{(2),(5)}{=} -\frac{4pV(p, T)}{T} dT + V(p, T) \left[\frac{4p}{T} dT \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Rightarrow G(p, T) = G_0 \stackrel{o.E.}{=} 0 \tag{13}$$

Damit folgt für das chemische Potential wegen $\mu = (\partial_n G)_{p, T}$ direkt:

$$\mu = 0 \tag{14}$$

Aufgabe 2

Die Zustandsgleichung eines idealen Gases in einem Raumbereich $G \subset \mathbb{R}^3$ lässt sich wie folgt durch Funktionen-Arithmetik ausdrücken:

$$p = \frac{R}{M} \varrho T \quad (15)$$

Dabei beschreibt p den Druck und ϱ die Dichte in einem Punkt $\vec{r} \in G$. R und M bezeichnen die Gaskonstante und die molare Masse. Für dieses thermodynamische System lässt sich nun die Eulergleichung in der eulerschen Beschreibungsweise formulieren, wenn \vec{v} die Geschwindigkeit und \vec{f} die Kraftdichte in einem Punkt $\vec{r} \in G$ bezeichnet:

$$\varrho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = -\nabla p + \vec{f} \quad (16)$$

Die Kraftdichte beschreibt hier gerade das von außen angelegte Gravitationsfeld. Es muss hier gelten, wobei g die Schwerebeschleunigung darstellt:

$$\vec{f} = -g\varrho\vec{e}_z \quad (17)$$

Befindet sich das betrachtete System nun in einem thermischen Gleichgewicht, so gilt aufgrund der Definition dessen $T = \text{const}$ im Raumbereich G . Weiterhin dürfen sich während eines Gleichgewichtszustandes die Zustandsgrößen nicht in Abhängigkeit der Zeit ändern. Dies bedeutet aber auch, dass $\vec{v} = 0$ gelten muss, da sonst ϱ variieren würde. Es folgt daher folgende Differentialgleichung:

$$\nabla p + g\varrho\vec{e}_z = 0 \quad (18)$$

Durch Nutzen von Gleichung (15) erhält man nun die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\partial_x p = 0 \quad (19)$$

$$\partial_y p = 0 \quad (20)$$

$$\partial_z p + \frac{Mg}{RT} p = 0 \quad (21)$$

p hängt also weder von x noch von y ab. Die Lösung der letzten Gleichung ist bekannt (durch Trennung der Variablen):

$$p(x, y, z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT} z\right) \quad (22)$$

Dabei ist $p_0 \in \mathbb{R}^+$ die entstehende Integrationskonstante.

Aufgabe 3