# Thermodynamik und Statistische Physik

## Übungen - Serie 1

Ausgabe: 20. Oktober 2015, Abgabe: 27. Oktober 2015 in der Vorlesung

**1. Funktionaldeterminanten** **2 Punkte**

Beweisen Sie, daß mit der Variablentransformation $x_i = x_i(u_1, u_2)\,;\; i = 1, 2$ folgendes gilt

a)

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \frac{\partial(x_2, x_1)}{\partial(u_2, u_1)} = -\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_2, u_1)}\,.$$

b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial(x_1, u_2)}{\partial(u_1, u_2)}\,.$$

**2. Relationen zwischen partiellen Ableitungen** **2 Punkte**

Es gelte folgende Relation $g(x, y, z) = 0$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehungen

a)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z}\,,$$

b)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1\,.$$

**3. Ableitung der Determinante** **4 Punkte**

Beweisen Sie folgende Relation für die Matrix $A\,(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det A\,(t) = \mathrm{Sp}\,\left(A^{-1}\,(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A\,(t)\right) \cdot \det A\,(t) \tag{1}$$

**bitte wenden!**

**4. Eulersche Entwicklungsformel** **3 Punkte**

Beweisen Sie mit Hilfe von (1) die so genannte *Eulersche Entwicklungsformel*:

$$J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial t}\right)_{\vec{u}} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^i}\right)_{x^{m\neq i},t} = \operatorname{div}\vec{v} \tag{2}$$

Hierbei ist $J = J(\vec{u}, t)$ die in *Lagrangescher Beschreibungsweise* auftretende Jacobi-Determinante

$$J = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}}\right)_t$$

und

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\vec{u}}\Big(\vec{u}(\vec{x}, t), t\Big) \tag{3}$$

das Geschwindigkeitsfeld in *Eulerscher Beschreibungsweise*.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Kettenregel.