Thermodynamik und Statistische Physik

Übungen - Serie 11

Ausgabe: 12. Januar 2016, Abgabe: 19. Januar 2016 in der Vorlesung

1. Kombinatorik und Gibbs-Faktor **8 Punkte**

Betrachten Sie ein System mit g möglichen 1-Teilchenzuständen. Im folgenden sollen n Teilchen $(n < g)$ verschiedenen Typs auf die g möglichen Zustände verteilt werden. Bosonen und Fermionen sind jeweils **un***unterscheidbar*. Während ein Zustand immer nur von höchstens einem Fermion besetzt werden kann (*Pauli-Prinzip*), können beliebig viele Bosonen einen Zustand bevölkern.

(a) Begründen Sie, daß für die Anzahl $\Omega(g, n)$ der Möglichkeiten, n *unterscheidbare Teilchen* auf die g Zustände zu verteilen die Formel $\Omega(g, n) = g^n$ gilt.

(b) Begründen Sie, daß für die Anzahl $\Omega_{\mathrm{B}osonen}(g, n)$ der Möglichkeiten, n *Bosonen* auf die g Zustände zu verteilen die Formel

$$\Omega_{\mathrm{B}osonen}(g, n) = \frac{(g + n - 1)!}{n!\,(g - 1)!} \quad \text{gilt.}$$

(c) Begründen Sie, daß für die Anzahl $\Omega_{\mathrm{F}ermionen}(g, n)$ der Möglichkeiten, n *Fermionen* auf die g Zustände zu verteilen die Formel

$$\Omega_{\mathrm{F}ermionen}(g, n) = \frac{g!}{n!\,(g - n)!} \quad \text{gilt.}$$

(d) Geben Sie für $g = 3, n = 2$ die in (a), (b) und (c) möglichen Konfigurationen explizit an und verifizieren Sie für dieses Beispiel die entsprechenden Formeln.

(e) Betrachten Sie jetzt die mit dem sogenannten Gibbs-Faktor $1/n!$ modifizierte Formel aus (a)

$$\Omega_{\mathrm{B}oltzmann}(g, n) = \frac{g^n}{n!}$$

welche näherungsweise eine Ununterscheidbarkeit von Teilchen berücksichtigt. Machen Sie sich klar, daß

$$\Omega_{\mathrm{F}ermionen}(g, n) < \Omega_{\mathrm{B}oltzmann}(g, n) < \Omega_{\mathrm{B}osonen}(g, n) \qquad \text{gilt.}$$

(f) Zeigen Sie, daß in einem geeigneten Grenzprozeß diese Anzahlen sich angleichen. Betrachten Sie dazu folgende Relationen

$$1 << n << g \quad \text{und} \quad n = \varepsilon\sqrt{g} \quad (\varepsilon << 1)$$

und zeigen Sie unter Verwendung der Stirlingschen Formel

$$\lim_{g\to\infty} \ln\left(\frac{\Omega_{\mathrm{B}oltzmann}(g, n)}{\Omega_{\mathrm{B}osonen}(g, n)}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2}, \qquad \lim_{g\to\infty} \ln\left(\frac{\Omega_{\mathrm{B}oltzmann}(g, n)}{\Omega_{\mathrm{F}ermionen}(g, n)}\right) = +\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

2. Maxwell-Boltzmann-Statistik **5 Punkte**

Betrachten Sie N unabhängige quantenmechanische Teilchen im dreidimensionalen quaderförmigen Potentialtopf unendlicher Tiefe. Das Potential ist mit positiven Kantenlängen b_1, b_2, b_3 gegeben durch:

$$U(\vec{x}) = V\left(\frac{x}{b_1}\right) + V\left(\frac{y}{b_2}\right) + V\left(\frac{z}{b_3}\right), \quad \text{wobei:} \quad V(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < 1 \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Leiten Sie die *Maxwell-Boltzmann-Statistik* des klassischen idealen Gases ab, indem Sie für das quaderförmige Potentialtopf-Modell die zugehörige mikrokanonische Zustandssumme bestimmen und anschließend den thermodynamischen Limes bilden.

Anmerkungen:

(a) Die Maxwell-Boltzmann-Statistik ergibt sich für

$$1 \ll \gamma := \hat{e}^{\frac{1}{2}}\, \hat{v}^{\frac{1}{3}}\, N_{\mathrm{A}}^{-\frac{5}{6}} \sqrt{\frac{m}{3\pi\hbar^2}}.$$

(b) Betrachten Sie im thermodynamischen Limes feste Verhältnisse der Kantenlängen:

$$\frac{b_1}{b} \overset{!}{=} \text{fest}, \quad \frac{b_2}{b} \overset{!}{=} \text{fest}, \quad \frac{b_3}{b} \overset{!}{=} \text{fest}, \quad \text{mit} \quad b = \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$$

(c) Das Volumen eines ν-dimensionalen Ellipsoids mit Halbachsen $a_1, \ldots, a_\nu$ lautet:

$$V_\nu(a_1, \ldots, a_\nu) = \frac{\pi^{\nu/2}}{\left(\frac{\nu}{2}\right)!} \cdot a_1 \cdots a_\nu$$

(d) Berücksichtigen Sie *Ununterscheidbarkeit* der Teilchen durch Einbau des Gibbs-Faktors.