Thermodynamik und Statistische Physik

Übungen - Serie 3

Ausgabe: 3. November 2015, Abgabe: 10. November 2015 in der Vorlesung

1. Stoffmenge **3 Punkte**

Die thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases ist gegeben durch $p(T,V) = nRT/V$. Dabei ist $R = 8,314\ J/(mol\ K)$ die universelle Gaskonstante.
a) Bestimmen Sie die Masse und die Stoffmenge der Luft von 20°C und 1 bar, die sich in einem Behälter von 70 m^3 Inhalt befindet. Die Luft kann im betrachteten Zustandsbereich als ein ideales Gas behandelt werden.
Hinweis: Die molare Masse für trockene Luft beträgt 0.0289644 kg/mol.
b) Welche Menge und Masse müssen zugeführt werden, damit der Druck bei gleicher Temperatur auf 8 bar steigt?
c) Man gewinne eine Abschätzung für die molare Masse von Luft: $\approx$ 29 g/mol.

2. Volumenausdehnung und Kompressibilität **2 Punkte**

Es sei die thermische Zustandsgleichung $p = p(V,T)$ vorgegeben. Die isobare, thermische Volumenausdehnung β und die isotherme Kompressibilität κ_T sind definiert als

$$\beta := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p , \qquad \kappa_T := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T .$$

Drücken Sie β und κ_T als partielle Ableitungen von p nach V und T aus.

3. Zustandsgleichung gesucht! **3 Punkte**

Für eine vorgegebene Substanz mit der Molzahl n wurden folgende Relationen für die thermische Volumenausdehnung β und die isotherme Kompressibilität κ_T gefunden

$$\beta = \frac{nR}{pV} , \qquad \kappa_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{V} , \qquad (\,R:\text{allgemeine Gaskonstante}\,,\ a:\text{Konstante}\,) .$$

Ermitteln Sie die Zustandsgeichung $f(T,p,V) = 0$.

bitte wenden!

4. Wärmeleitungsgleichung **6 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung $T_t = \sigma T_{xx}$ ($\sigma > 0$, konstant) die für $x \in [0, \pi]$ der Anfangsbedingung

$$T(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in [0, \pi/2] \\ (\pi - x) & \text{für} \quad x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

und für alle $t > 0$ den Randbedingungen $T(0,t) = 0$, $T(\pi, t) = 0$ genügt.

Hinweis: Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
1) Gehen Sie mit einem Separationsansatz der Form $T(x,t) = A(x)B(t)$ in die Wärmeleitungsgleichung ein.
2) Zeigen Sie, daß man nur für ein bestimmtes Vorzeichen der Separationskonstante eine nichttriviale Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhält. Bestimmen Sie diejenigen möglichen Lösungen, die die Randbedingungen erfüllen.
3) Bestimmen Sie die gesuchte Lösung $T(x,t)$ durch eine geeignete Superposition der unter 2) gefundenen Lösungen die es gestattet, die Anfangsbedingung zu erfüllen (Fourierentwicklung der Anfangsbedingung).
4) Zusatz (z.B. mit Mathematica):
- Stellen Sie die Lösung grafisch dar (3D).
- Überzeugen Sie sich grafisch, wie die abgebrochene Fourierentwicklung der Anfangsbedingung für größer werdenden Abbruchindex die exakte Anfangsbedingung immer besser approximiert.