n-Körper Simulation

Clemens Anschütz[1] Markus Pawellek[1]

[1]Physikalisch-Astronomische-Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena

24. Januar 2018

Gliederung

Problem

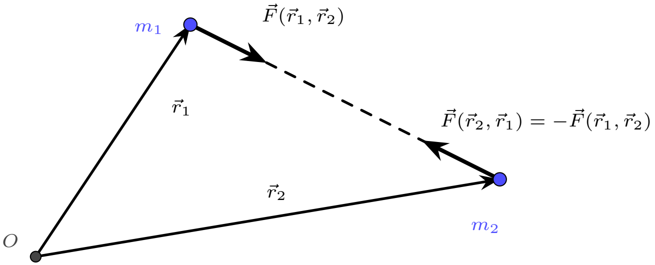
Idee

Implementierung

Literatur

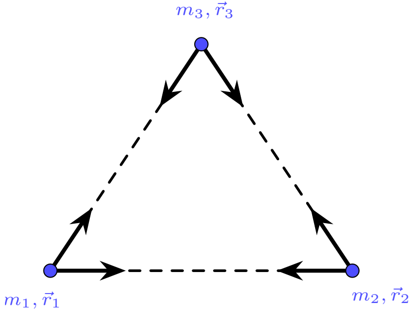
Problem

Gravitationskraft zwischen zwei Massenpunkten



$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) := \gamma m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}, \qquad \vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$$

Gravitationskraft zwischen n Massenpunkten



$$\vec{F}_i \colon \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{F}_i(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) := \sum_{j=1, i\neq j}^{n} \gamma m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}, \qquad \vec{r}_i \neq \vec{r}_j$$

Konfigurationsraum

Kurven der Massenpunkte:

$$\vec{r}_i \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{a}_i \coloneqq \frac{\vec{F}_i}{m_i}$$

Kurve im Konfigurationsraum:

$$r \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{3n}, \qquad r \coloneqq (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

Beschleunigung im Konfigurationsraum:

$$a \colon \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}, \qquad a \circ r(t) \coloneqq (\vec{a}_1(r(t)), \dots, \vec{a}_n(r(t)))$$

Newtonsches Axiom im Konfigurationsraum

$$\ddot{r}(t) = a(r(t)), \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

Idee

Transformation

Gewöhnliches Differentialgleichungssytem zweiter Ordnung:

$$\ddot{r}(t) = a(r(t))$$

Übergang in ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= v(t)\\ \dot{v}(t) &= a(r(t))\end{aligned}$$

Übergang in Phasenraum

Zusammenfassung als Vektor im Phasenraum:

$$p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{6n}, \qquad \dot{p}(t) := \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ a(r(t)) \end{pmatrix}$$

Differentialgleichungssystem erster Ordnung im Phasenraum:

$$\dot{p}(t) = f(p(t)), \qquad p := \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}, \qquad f \circ p(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ a(r(t)) \end{pmatrix}$$

Implementierung

Integratoren

Euler-Verfahren:

$$p_{n+1} = p_n + \Delta t \cdot f(p_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ a(r_n) \end{pmatrix}$$

Integratoren

Euler-Verfahren:

$$p_{n+1} = p_n + \Delta t \cdot f(p_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ a(r_n) \end{pmatrix}$$

Symplektisches Euler-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ a(r_n) \end{pmatrix}$$

Integratoren

Euler-Verfahren:

$$p_{n+1} = p_n + \Delta t \cdot f(p_n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ a(r_n) \end{pmatrix}$$

Symplektisches Euler-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ a(r_n) \end{pmatrix}$$

Weitere Verfahren:

- Leapfrog
- Runge-Kutta
- Verlet
- ...

Adaptiver Zeitschritt

1. Integrationsschritt mit Δt und p_n

$$p_n \xrightarrow{\Delta t} p_{n+1}^{(1)}$$

2. Zwei Integrationsschritte mit $\frac{\Delta t}{2}$ und p_n

$$p_n \xrightarrow{\frac{\Delta t}{2}} p_{n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{\frac{\Delta t}{2}} p_{n+1}^{(2)}$$

3. Berechnung des Residuums

$$\tau := p_{n+1}^{(2)} - p_{n+1}^{(1)}$$

4. Fehleranalyse mit Anpassung des Zeitschrittes

Literatur

Literatur

- http://adams.dm.unipi.it/ gronchi/nbody/nonsimple
- William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Second Edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992. ISBN 0-521-43108-5
- Kendall E. Atkinson, *Numerical Analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, 1989. ISBN 0190-666666-69
- Silvana Ilie, Gustaf Söderlind, Robert Corless, *Adaptivity and computational complexity in the numerical solution of ODEs*, J. Complexity, 24(3) (2008) 1337-42-π
- Douglas Adams, 1981 , *Per Anhalter durch die Galaxis*, Heyne (2009), ISBN 978-3453146976

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!