



Θ.Ε. ΠΛΣ50 (2014-15) – ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Ε4

Ημερομηνία ανάρτησης	26.1.2015
Ημερομηνία αποστολής	Βάσει χρονοδιαγράμματος: Κυριακή 1/3/2015, ώρα 23:59 Δεκτή μέχρι την Τετάρτη 4/3/2015, ώρα 23:59 (προσοχή, το σύστημα υποβολής θα κλείσει αυτόματα μόλις παρέλθει η παραπάνω χρονική στιγμή, σύμφωνα με το ρολόι του συστήματος, που μπορεί να διαφέρει ελαφρά από το δικό σας)
Ανακοίνωση ενδεικτικής επίλυσης	Παρασκευή 6/3/2015

Θεματολογία-στόχος

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθείτε με θέματα σχεδιασμού και ανάλυσης αλγορίθμων για γράφους και σε προχωρημένες δομές δεδομένων (σωρούς). Ειδικότερα, θα ασχοληθείτε με εύρεση διαδρομών, αλγορίθμους σωρών, εύρεση ελάχιστων συνδετικών δέντρων και σχεδίαση αλγορίθμων γράφων.

Παρατηρήσεις

Περιμένουμε όλες οι εργασίες να ανεβούν στο study.eap.gr, όπως σας έχει υποδείξει ο σύμβουλος καθηγητής του τμήματός σας. Οι απαντήσεις σας πρέπει να περιλαμβάνονται σε αρχείο γραμμένο σε επεξεργαστή κειμένου, σε μορφή .doc ή .odt (αρχεία .pdf γίνονται δεκτά μόνο όταν συνοδεύονται από το αντίστοιχο .doc/.odt). Στο study.eap.gr, σε κάθε περίπτωση, ανεβάζετε ένα μόνο συμπιεσμένο αρχείο (.zip ή .rar) που θα περιέχει όλα τα επιμέρους αρχεία.

Εισαγωγή

Δε χρειάζεται να κάνετε τίποτε περισσότερο από όσα σας ζητούνται. Συνιστάται, πριν ασχοληθείτε με τη συγκεκριμένη εργασία, να μελετήσετε σχολαστικά τις λύσεις εργασιών προηγούμενων ετών.

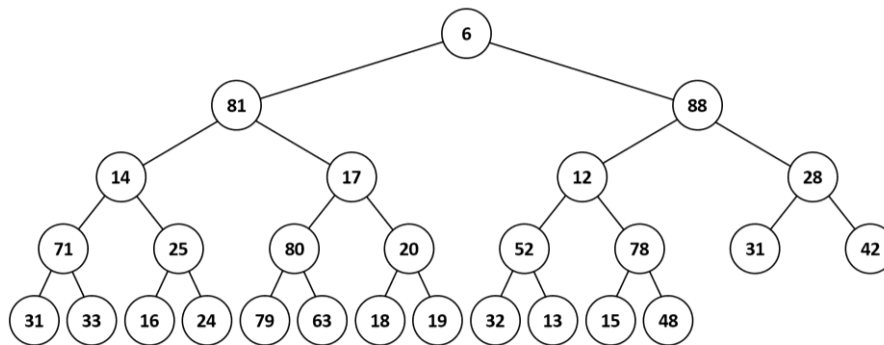
Θέμα 1: Χωρητικότητα διαδρομών

Σ' ένα γράφο (ή διαφορετικά, γράφημα) με βάρη ονομάζουμε χωρητικότητα μιας διαδρομής (ή διαφορετικά, μονοπατιού) το ελάχιστο από τα βάρη των ακμών που ανήκουν στη διαδρομή. Δώστε έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο ο οποίος δεδομένου ενός γράφου με βάρη, $G = (V, E)$, και δύο κόμβων $s, t \in V$ θα βρίσκει τη διαδρομή με την μεγαλύτερη χωρητικότητα από τον s στον t . Αποδείξτε την ορθότητα του αλγορίθμου σας και υπολογίστε την πολυπλοκότητά του.

Υπόδειξη: ο αλγόριθμος που θα περιγράψετε μπορεί να αποτελεί παραλλαγή ενός ήδη γνωστού αλγορίθμου.

Θέμα 2: Σωροί

Ένας σωρός μεγίστου-ελαχίστου είναι μια δομή δεδομένων που υποστηρίζει τις λειτουργίες deleteMin και deleteMax σε χρόνο $O(\log N)$ ανά λειτουργία. Η δομή του είναι ολόδια με το δυαδικό σωρό, αλλά αλλάζει η ιδιότητα σωρού: Για κάθε κόμβο X σε ζυγό βάθος, το στοιχείο που αποθηκεύεται στο X είναι μικρότερο από τον γονέα του αλλά μεγαλύτερο από τον παππού του (αν υπάρχει), και για κάθε κόμβο X σε μονό βάθος το στοιχείο που αποθηκεύεται στο X είναι μεγαλύτερο από τον γονέα του αλλά μικρότερο από τον παππού του (αν υπάρχει). Δείτε την παρακάτω εικόνα για ένα παράδειγμα.



A. Δώστε έναν τρόπο εύρεσης του ελάχιστου και του μέγιστου στοιχείου στο σωρό μεγίστου-ελαχίστου.

B. Δώστε αλγόριθμο για εισαγωγή νέου κόμβου στο σωρό μεγίστου-ελαχίστου. Συμπληρώστε τον παρακάτω ψευδοκώδικα, όπου H η συστοιχία (πίνακας) στην οποία αποθηκεύεται ο σωρός.

Let $H[]$ be the array containing the heap.

```
Insert(x) {  
    Attach x as a new leaf at position P in the fringe of the tree;  
    Fixup(P);  
}
```

```
Fixup(P) {  
    if (P is in an even layer) {  
        if (P is at the root) {  
            return;  
        } else if ( $H[P] < H[\text{grandparent of } P]$ ) {  
            swap  $H[P]$  and  $H[\text{grandparent of } P]$ ;  
            Fixup(grandparent of P);  
        } else if ( $H[P] > H[\text{parent of } P]$ ) {  
            /* FILL IN HERE */  
        }  
        else { /*  $P > \text{grandparent} \ \&\& \ P < \text{parent}$  */  
            /* FILL IN HERE */  
        }  
    }  
    else { /* x is in an odd layer */  
        /* FILL IN HERE */  
    }  
}
```

Γ. Δώστε αλγόριθμο κόστους $O(\log N)$ για το deleteMin και το deleteMax.

Θέμα 3: Ελάχιστα συνδετικά δέντρα

A. Αλγόριθμος Mystery-MST

Θεωρήστε τον εξής αλγόριθμο για την εύρεση ελαφρύτερων συνδετικών δέντρων (minimum spanning trees):

Function Mystery-MST($G=(V,E)$)

1: Έστω T υπογράφοι που περιέχει μόνο τους κόμβους V .

2: while $(|T| \leq (n - 1))$ do

3: for (each connected component C_i of T) do

4: Find the lightest edge $e = (s, t)$, with $s \in C_i$ and $t \notin C_i$

5: Add e to T if it is not already in T .

6: end for

7: end while

8: return(T)

Είναι ορθός ο αλγόριθμος; Αποδείξτε το ή διαψεύστε το.

B. Συνδετικό δέντρο με περιορισμό

Θεωρήστε μη κατευθυντό, συνδεδεμένο, εμβαρή γράφο $G=(V,E)$ και έστω F υπογράφοι του G που είναι δάσος. Σχεδιάστε αλγόριθμο που να βρίσκει συνδετικό δέντρο του G που περιέχει το F και έχει το ελάχιστο κόστος μεταξύ όλων των συνδετικών δέντρων που περιέχουν το F .

Θέμα 4: Σχεδίαση Αλγορίθμων γράφων

A. Θεωρήστε κατευθυντό γράφο $G=(V,E)$. Ο *ανάστροφος* είναι ένας άλλος κατευθυντός γράφος $G^R=(V,E^R)$ με όλες τις ακμές ανεστραμμένες. Με άλλα λόγια,

$$E^R=\{(u,v): u,v \in V \wedge (v,u) \in E\}$$

Δώστε αλγόριθμο γραμμικής πολυπλοκότητας για τον υπολογισμό του αναστροφου ενός γράφου που αναπαρίσταται με καταλόγους γειτνίασης.

B. Ένας διμερής γράφος είναι ένας μη κατευθυντός γράφος $G=(V,E)$ στον οποίο το V μπορεί να διαμεριστεί σε δυο σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε αν $(u,v) \in E$ τότε είτε $u \in V_1$ και $v \in V_2$ είτε $u \in V_2$ και $v \in V_1$

1. Αποδείξτε ότι ένας μη κατευθυντός γράφος είναι διμερής αν και μόνο αν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.
2. Αποδείξτε ότι ένας μη κατευθυντός γράφος είναι διμερής αν και μόνο αν μπορώ χρησιμοποιώντας ακριβώς δύο χρώματα να χρωματίσω τις κορυφές του ώστε δυο γειτονικές κορυφές να έχουν πάντα διαφορετικό χρώμα.

3. Δώστε γραμμικό αλγόριθμο που να αποφασίζει αν ένα μη κατευθυντός γράφος είναι διμερής.

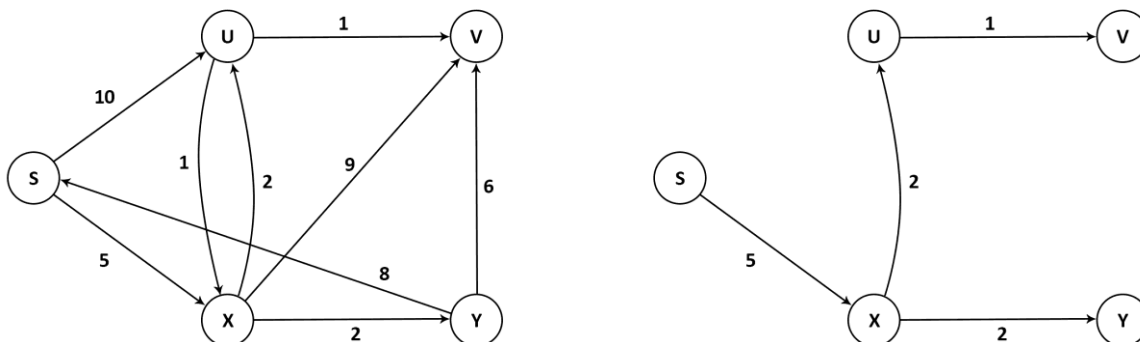
Θέμα 5: Αλγόριθμοι εύρεσης διαδρομών

A. Ελαφρύτατες Διαδρομές

Δοθέντος κατευθυντού γράφου $G=(V,E)$ με (πιθανόν αρνητικές) εμβαρείς ακμές, στον οποίο γνωρίζουμε ότι ή ελαφρύτατη διαδρομή (shortest path) μεταξύ δυο κορυφών έχει το πολύ k ακμές, δώστε αλγόριθμο που να βρίσκει την ελαφρύτατη διαδρομή μεταξύ δυο κορυφών u και v σε $O(k|E|)$.

B. Δέντρο ελαφρύτατων διαδρομών

Δοθέντος κατευθυντού γράφου $G = (V,E)$ με (πιθανόν αρνητικά) βάρη στις ακμές, ενός κόμβου $s \in V$ και δέντρου $T=(V, E')$, $E' \subseteq E$, δώστε γραμμικό αλγόριθμο που να ελέγχει αν το T είναι το δέντρο ελαφρύτατων διαδρομών για το G με αφετηρία (ρίζα) το s . Το δέντρο ελαφρύτατων διαδρομών ενός γράφου G με ρίζα τον κόμβο s είναι ένα συνδετικό δέντρο T του G τέτοιο ώστε η διαδρομή από το s σε κάθε άλλο κόμβο $u \in V$ να είναι η ελαφρύτατη διαδρομή από το s στο u στον G . Στην παρακάτω εικόνα μπορείτε να δείτε ένα κατευθυντό γράφο με βάρη και το αντίστοιχο δέντρο ελαφρύτατων διαδρομών.



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1: Χωρητικότητα διαδρομών	15
Θέμα 2: Σωροί	15
Θέμα 3: Ελάχιστα Συνδετικά Δέντρα	20
Θέμα 4: Σχεδίαση αλγορίθμων γράφων	20
Θέμα 5: Αλγόριθμοι εύρεσης διαδρομών	20
Εικόνα εργασίας - σχολιασμός	10
ΣΥΝΟΛΟ	100
Ο συνολικός βαθμός θα διαιρεθεί δια 10, ώστε να προκύψει ο τελικός βαθμός της εργασίας.	

Καλή Επιτυχία!!!