$$\mathbf{W}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) $a^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$a^1 = h(W^1 \cdot x^0 + b^1)$

$$S^1 = W^1 \cdot a^0 + b^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$a^1 = \mathrm{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{a}^1 = \frac{d\,\mathrm{ReLU}(s)}{ds} = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \qquad \dot{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S^2 = W^2 \cdot a^1 + b^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$a^2 = \mathrm{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\dot{a}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$s^3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 42 \\ -31 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$a^3 = \text{softmax}\left(\begin{bmatrix} 42 \\ -31 \\ 25 \end{bmatrix}\right) = \left(e^{42} + e^{-31} + e^{25}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{42} \\ e^{-31} \\ e^{25} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $C = -\sum_{i=1}^{3} y_i \log(a^3_i)$

$$\frac{\partial C}{\partial s} = a^3 - y$$

$$\delta^3 = \frac{\partial C}{\partial s^3} = a^3 - y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^2 = \dot{a}^2 \odot \left[W^{3T} \delta^3\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^1 = \dot{a}^1 \odot \left[W^{2T} \delta^2\right] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W^3 = W^3 - 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 0 & 0 \\ -6 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5.5 \\ 3 & -3 \\ 5 & 8.5 \end{bmatrix}$$

$$b^3 = b^3 - 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -4 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b^2 = b^2 - 0.5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$W^1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 0.5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$