Algorytmy macierzowe - mnożenie macierzy gęstych

November 2, 2021

Wykonanie: Adrianna Łysik, Maksymilian Wojnar

1 Problem nr 3

Proszę napisać mnożenie macierzy rIGA i rIGA używając algorytmu mnożenia blokowego, i dobrać optymalną kolejność pętli oraz rozmiar bloków.

Treść zadania:

1. Proszę wybrać dwie możliwe duże macierze A i B złożone z $q \times q$ bloków ze swoich dwóch rodzin macierzy, takie żeby zgadzały się ich rozmiary, oraz przemnożyć je $A \times B$ swoim optymalnym algorytmem.

2. Proszę narysować schemat niezerowych wartości swoich dwóch macierzy (używając komendy `spy(A)`, `spy(B)` MATLABa) oraz macierzy wynikowej $A \times B$.

3. Proszę zmierzyć czas mnożenia tych wybranych dwóch dużych macierzy blokowych dla różnej kolejności pętli w algorytmie mnożenia macierzy. Proszę narysować tabelkę: kolejność pętli (6 możliwości) versus czasy mnożenia.

4. Proszę wybrać jedną kolejność pętli i następnie dla swoich dwóch macierzy A i B zmierzyć czasy mnożenia w algorytmie mnożenia blokowego. Proszę narysować wykres: oś x rozmiar bloków, oś y czas mnożenia.

5. Proszę obliczyć liczbę operacji zmienno-przecinkowych koniecznych do przemnożenia swoich dwóch macierzy.

Importy, ustawienia wyświetlania oraz wczytanie macierzy:

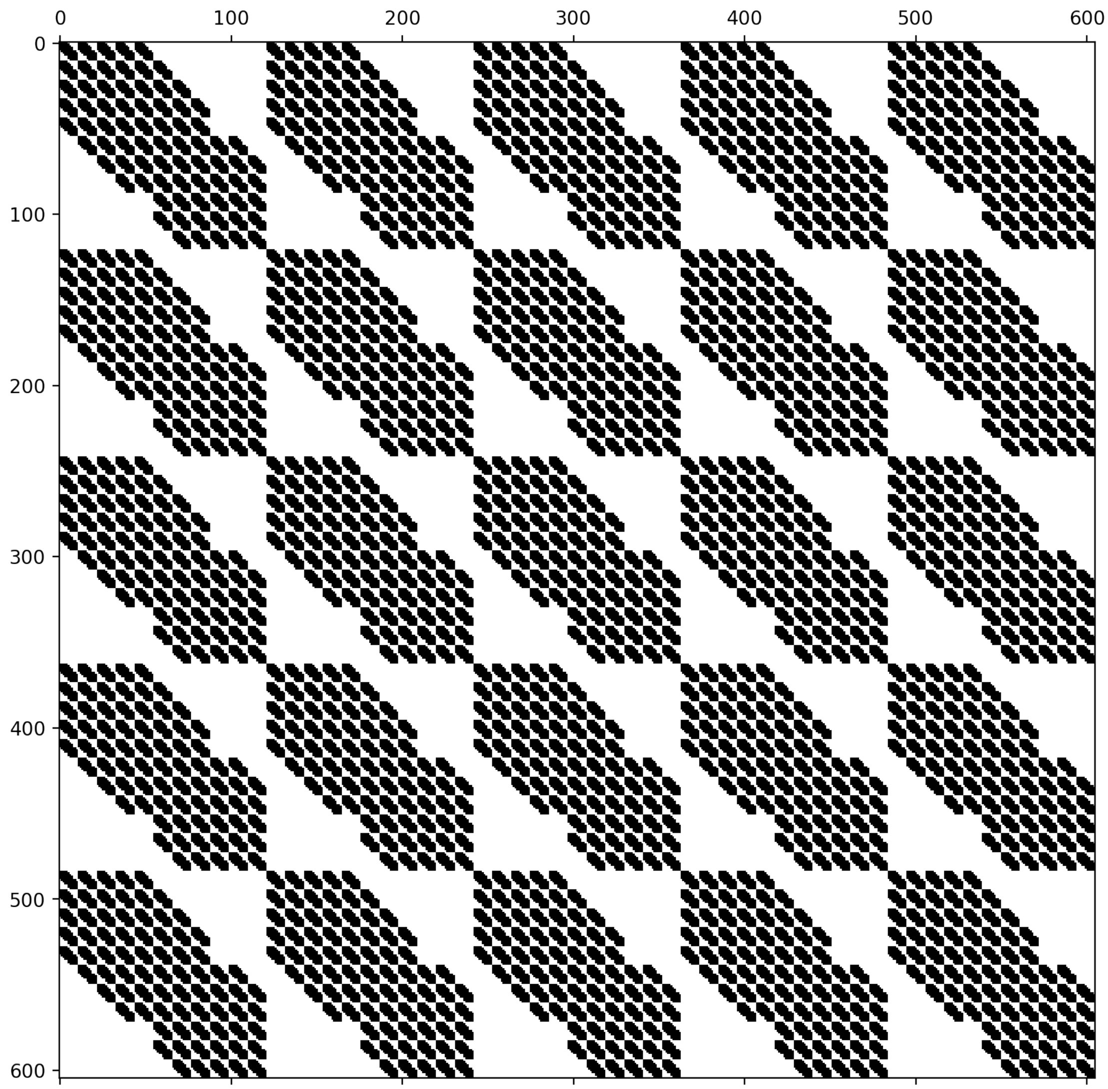
[1]:
```
from time import perf_counter
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd

plt.rcParams['figure.dpi'] = 200
plt.rcParams['figure.figsize'] = (15, 10)
```

2 Ad 1, 2

[2]:
```
matrix_A = pd.read_csv('matrix_A.csv', header=None, index_col=None).to_numpy()
matrix_B = pd.read_csv('matrix_B.csv', header=None, index_col=None).to_numpy()
max_size = min(len(matrix_A), len(matrix_B))
```

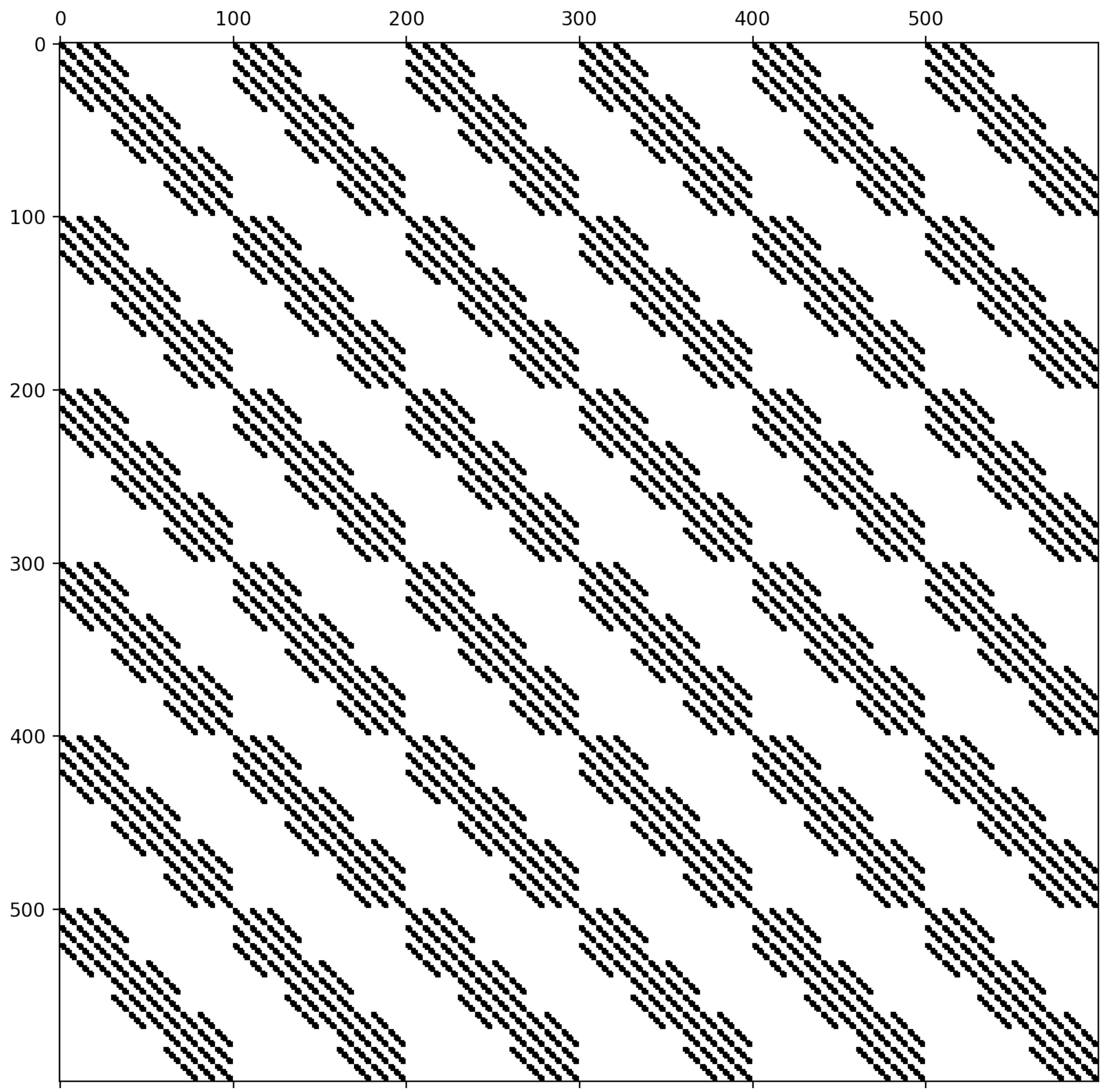
Macierz A jest fragmentem macierzy wygenerowanym metodą `massmatrix(2, 6, 4, 4)` powielonym $(5, 5)$ krotnie.

[3]:
```
plt.spy(matrix_A)
plt.show()
```



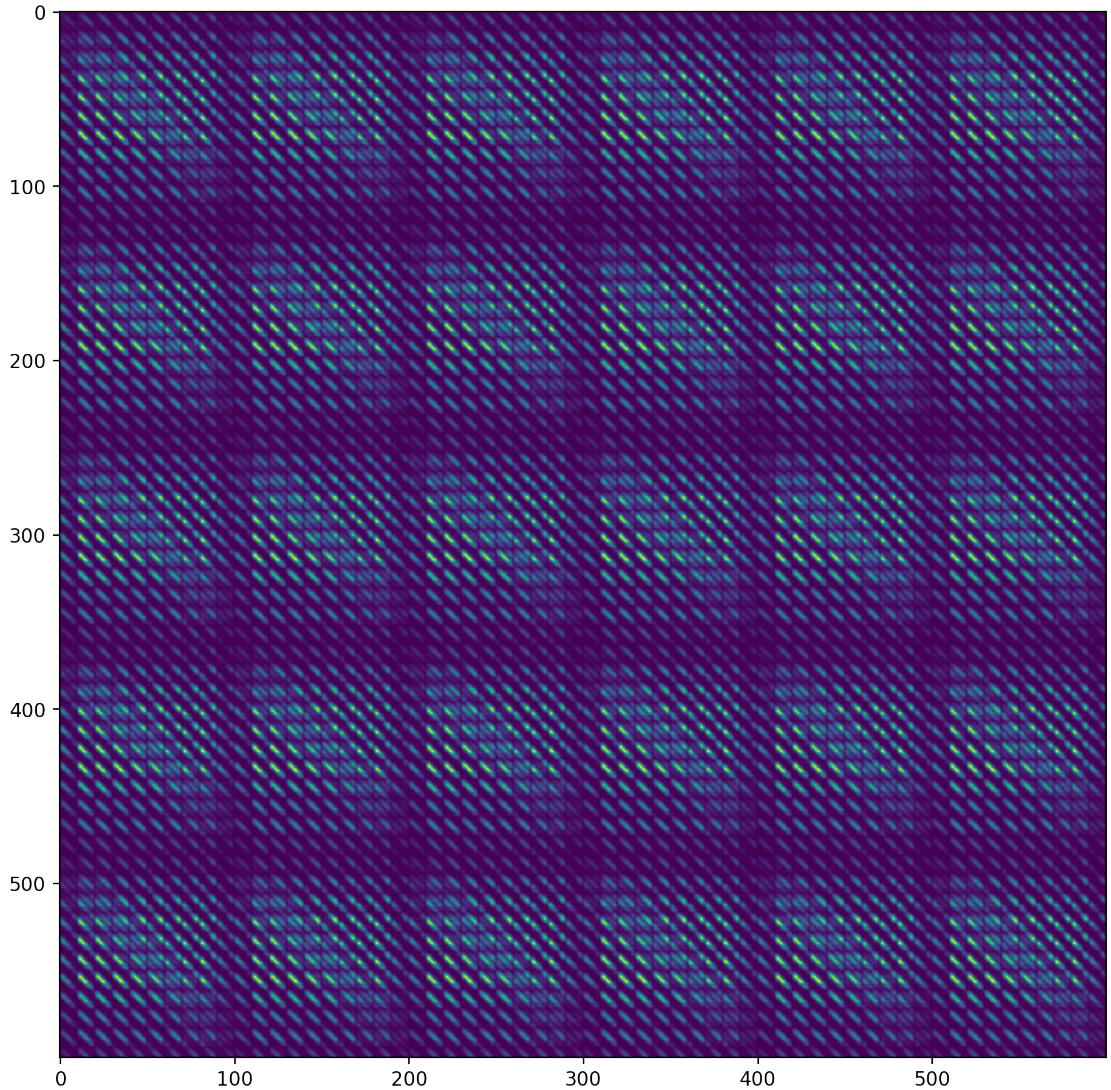
Macierz B jest fragmentem macierzy wygenerowanym metodą `massmatrix(2, 6, 2, 2)` powielonym $(6, 6)$ krotnie.

[4]:
```
plt.spy(matrix_B)
plt.show()
```



Macierz $C = A \times B$ jest macierzą gęstą o wszystkich wartościach niezerowych.

[5]:
```
plt.imshow(matrix_A[:max_size, :max_size] @ matrix_B[:max_size, :max_size])
plt.show()
```



3 Ad 3

Pomiary czasów mnożenia macierzy różnych rozmiarów w zależności od podanej permutacji indeksów i, j, k:

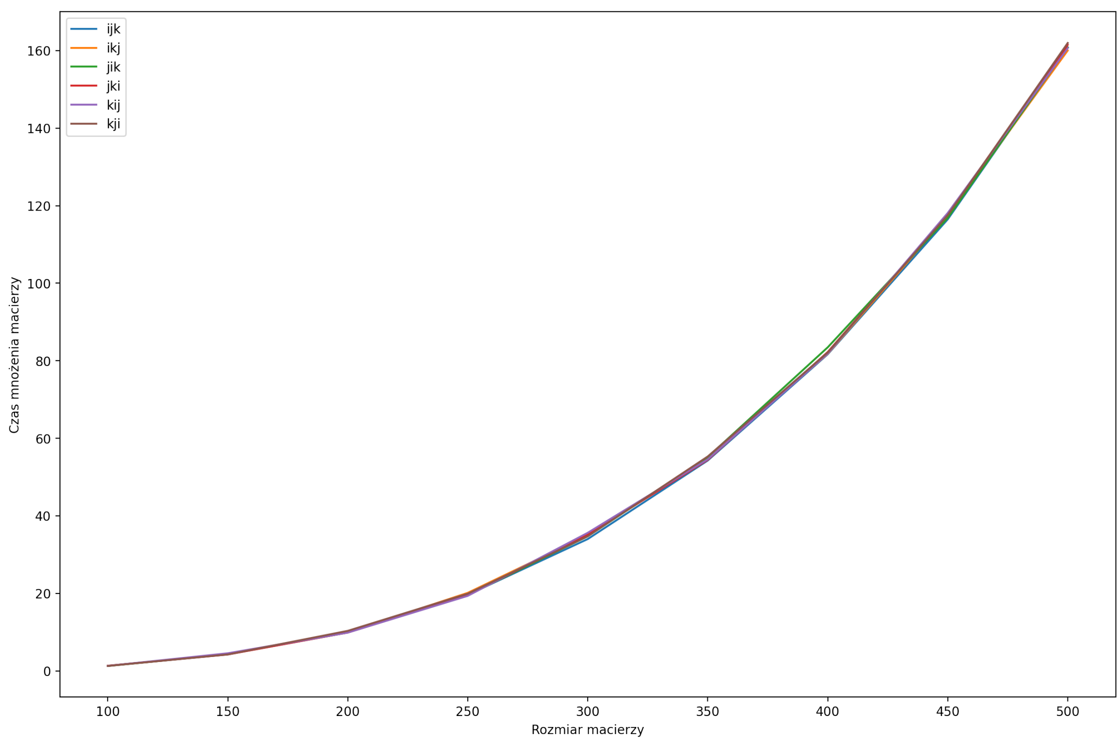
[6]:
```
matrix_sizes = np.arange(100, min(500, max_size) + 1, 50)
permutations = ['ijk', 'ikj', 'jik', 'jki', 'kij', 'kji']
results = {perm: np.zeros(len(matrix_sizes)) for perm in permutations}

for idx, size in enumerate(matrix_sizes):
    A = matrix_A[:size, :size]
    B = matrix_B[:size, :size]
    times = {}
```

```python
C = np.zeros((size, size))
start = perf_counter()

for i in range(size):
    for j in range(size):
        for k in range(size):
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

results['ijk'][idx] = perf_counter() - start
C = np.zeros((size, size))
start = perf_counter()

for i in range(size):
    for k in range(size):
        for j in range(size):
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

results['ikj'][idx] = perf_counter() - start
C = np.zeros((size, size))
start = perf_counter()

for j in range(size):
    for i in range(size):
        for k in range(size):
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

results['jik'][idx] = perf_counter() - start
C = np.zeros((size, size))
start = perf_counter()

for j in range(size):
    for k in range(size):
        for i in range(size):
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

results['jki'][idx] = perf_counter() - start
C = np.zeros((size, size))
start = perf_counter()

for k in range(size):
    for i in range(size):
        for j in range(size):
            C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

results['kij'][idx] = perf_counter() - start
C = np.zeros((size, size))
```

```
    start = perf_counter()

    for k in range(size):
        for j in range(size):
            for i in range(size):
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

    results['kji'][idx] = perf_counter() - start
```

Wykres zależności czasu mnożenia od kolejności indeksów w pętli:

[7]:
```
for perm, times in results.items():
    plt.plot(matrix_sizes, times, label=perm)

plt.legend()
plt.ylabel('Czas mnożenia macierzy')
plt.xlabel('Rozmiar macierzy')
plt.show()
```



Czas mnożenia:

[8]:
```
df = pd.DataFrame([[perm, times[-1]] for perm, times in results.items()])
df.columns = 'Kolejność pętli', 'Czas mnożenia [s]'
df
```

[8]:

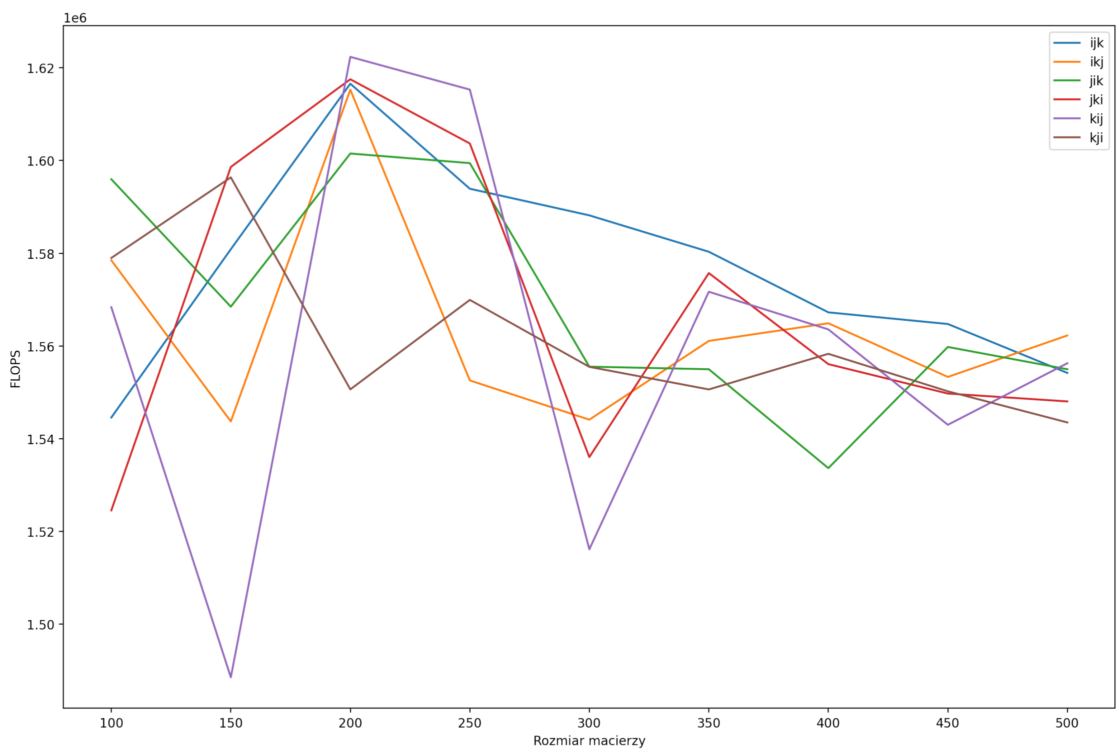
	Kolejność pętli	Czas mnożenia [s]
0	ijk	160.854943
1	ikj	160.023244
2	jik	160.773257
3	jki	161.493827
4	kij	160.639028
5	kji	161.968151

Wyniki pomiarów pokazują, że kolejność wystepowania i , j , k w pętli nie wpłynął znacząco na czas operacji mnożenia macierzy. Spodziewaliśmy się najwyższej wydajnośći dla permutacji indeksów: ijk. Nasze oczekiwania wynikają z hierarchiczności pamięci komputera (RAM, cache L3, L2, L1) oraz wierszowego zapisu macierzy w pamięci - indeksy k i j są najczęściej "zmieniane", zatem odpowiadające im wiersze macierzy A i B mogą zostać załadowane do szybkiej pamięci podręcznej procesora i wykorzystywane podczas algorytmu mnożenia. Otrzymane rezultaty mogą wynikać z wysokopoziomowości języka Python, w którym zostało zaimplementowane mnożenie.

Liczba operacji zmiennoprzecinkowych na sekundę prezentuje się następująco:

[9]:

```
operations = 2 * matrix_sizes ** 3

for perm, times in results.items():
    plt.plot(matrix_sizes, operations / times, label=perm)

plt.legend()
plt.ylabel('FLOPS')
plt.xlabel('Rozmiar macierzy')
plt.show()
```



4 Ad 4

Do mnożenia blokowego macierzy przyjęliśmy, że podziały bloków są zawsze takie same, ponieważ bierzemy pod uwagę tylko macierze kwadratowe.

[10]:
```
def mul_ijk(A, B, C, size):
    for i in range(size):
        for j in range(size):
            for k in range(size):
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
```

[11]:
```
def block_mul(A, B, block_lengths, size):
    A = matrix_A[:size, :size]
    B = matrix_B[:size, :size]
    times = []

    for block in block_lengths:
        C = np.zeros((size, size))
        start = perf_counter()

        for i in range(0, size, block):
            for j in range(0, size, block):
                for k in range(0, size, block):
                    A_slice = A[i:i+block, k:k+block]
                    B_slice = B[k:k+block, j:j+block]
                    C_slice = C[i:i+block, j:j+block]
                    mul_ijk(A_slice, B_slice, C_slice, block)

        time = perf_counter() - start
        times.append(time)

    return times
```

[12]:
```
def show_table(block_lengths, times):
    df = pd.DataFrame([[length, time] for length, time in zip(block_lengths,␣
 ↪times)])
    df.columns = 'Rozmiar bloku', 'Czas mnożenia [s]'
    return df
```

4.1 Czas mnożenia dla macierzy kwadratowej 400x400:

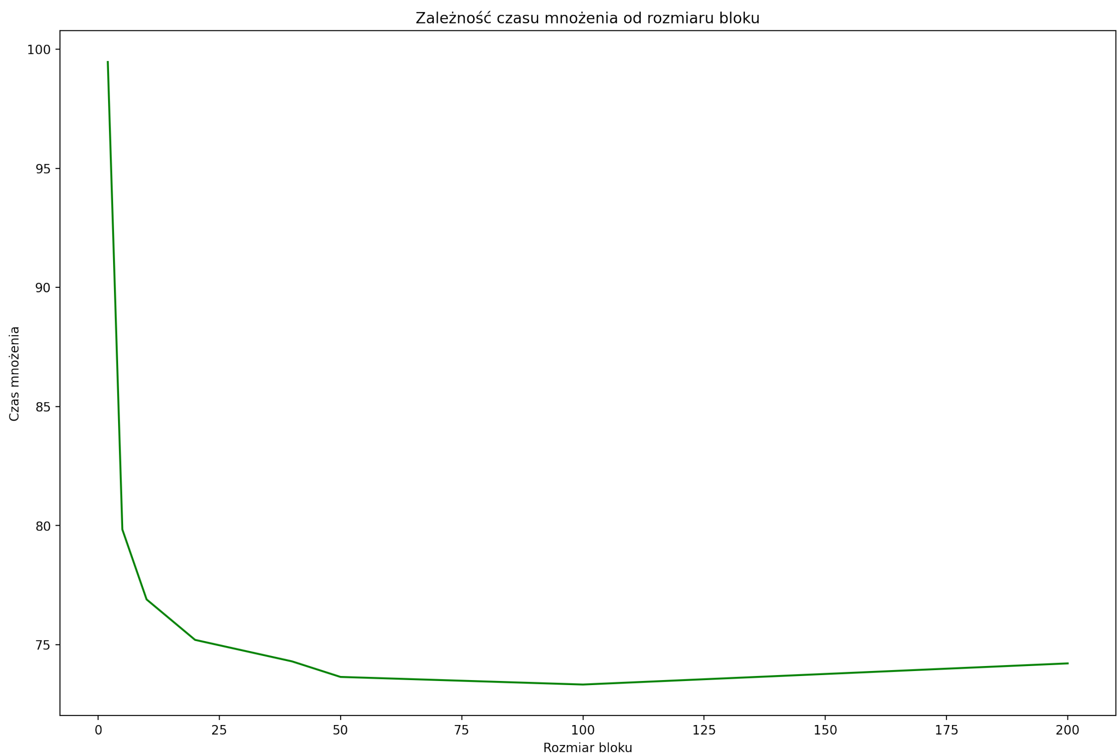
[13]:
```
block_lengths = [2, 5, 10, 20, 40, 50, 100, 200]
time = block_mul(matrix_A, matrix_B, block_lengths, 400)
```

[14]:
```
show_table(block_lengths, time)
```

[14]:

	Rozmiar bloku	Czas mnożenia [s]
0	2	99.467951
1	5	79.837049
2	10	76.900393
3	20	75.201613
4	40	74.298870
5	50	73.645748
6	100	73.326341
7	200	74.214230

[15]:
```
plt.plot(block_lengths, time, color = 'green')
plt.xlabel("Rozmiar bloku")
plt.ylabel("Czas mnożenia")
plt.title("Zależność czasu mnożenia od rozmiaru bloku")
plt.show()
```



4.2 Czas mnożenia dla macierzy kwadratowej 500x500

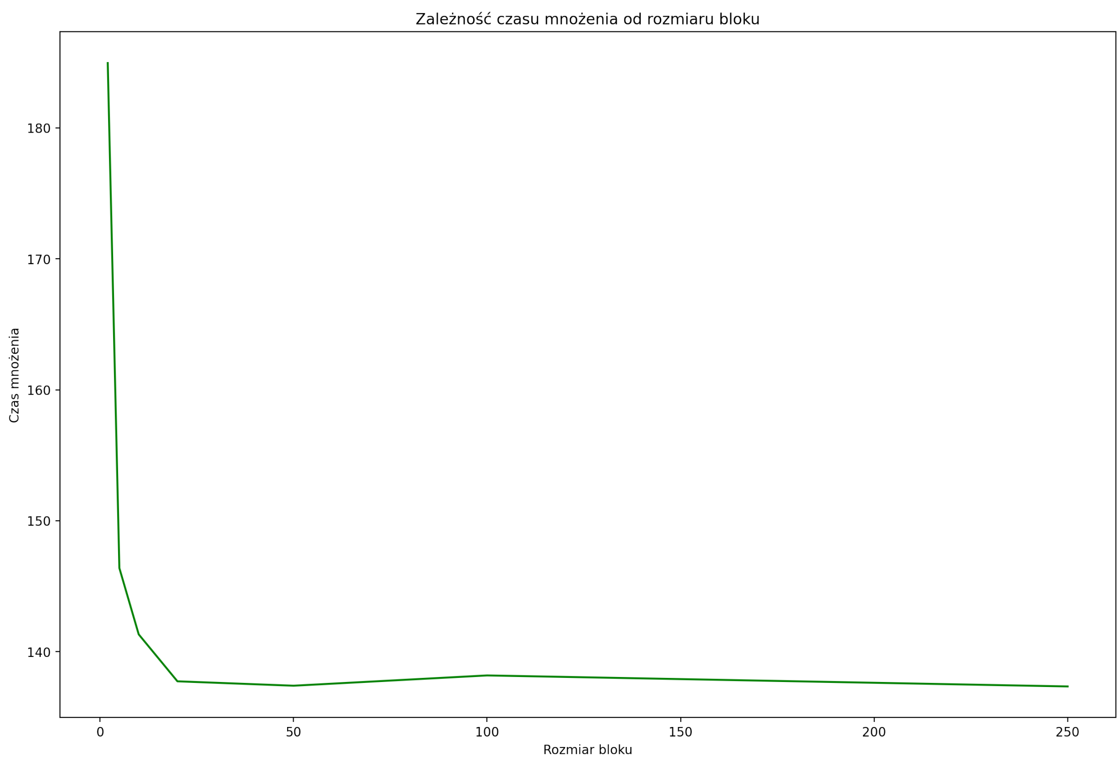
[16]:
```
block_lengths2 = [2, 5, 10, 20, 50, 100, 250]
time2 = block_mul(matrix_A, matrix_B, block_lengths2, 500)
```

[17]:
```
show_table(block_lengths2, time2)
```

[17]:

	Rozmiar bloku	Czas mnożenia [s]
0	2	184.954766
1	5	146.390551
2	10	141.326789
3	20	137.742368
4	50	137.406338
5	100	138.190835
6	250	137.350386

[18]:
```
plt.plot(block_lengths2, time2, color = 'green')
plt.xlabel("Rozmiar bloku")
plt.ylabel("Czas mnożenia")
plt.title("Zależność czasu mnożenia od rozmiaru bloku")
plt.show()
```



Dla małych rozmiarów bloków czas wykonania jest znacznie dłuższy niż dla większych rozmiarów, ponieważ obliczenia związane z częstym podziałem macierzy wydłużyły czas działania algorytmu.

Optymalna wielkość bloku dla ręcznie napisanego mnożenia `mul_ijk` i wybranych macierzy wynosi około 50.

Stosowanie mnożenia blokowego wpłynęło nieznacznie na czas mnożenia macierzy, chociaż spodziewaliśmy się znaczącej poprawy. Może to wynikać z wysokopoziomowości języka Python.

5 Ad 5

Liczba operacji zmiennoprzecinkowych w klasycznym algorytmie mnożenia macierzy gęstych wynosi $2 \cdot m \cdot n \cdot l$, gdzie m , n , l to rozmiary mnożonych macierzy. Dla macierzy kwadratowych liczba operacji zmiennoprzecinkowych wynosi $2n^3$. W przypadku naszych macierzy 500×500, liczba operacji wynosi $2 \cdot 500 \cdot 500 \cdot 500 = 250000000$.

6 Dodatkowe sprawdzenie - mnożenie wbudowane

Mnożenie blokowe z użyciem wbudowanego mnożenia.

Do testów z użyciem wbudowanego mnożenia wykorzystaliśmy znacznie większe macierze uzyskane przez zwielokrotnienie wcześniej wczytanych macierzy.

[19]:
```
def block_mul_np(A, B, block_lengths, size):
    times = []

    for block in block_lengths:
        C = np.zeros((size, size))
        start = perf_counter()

        for i in range(0, size, block):
            for j in range(0, size, block):
                for k in range(0, size, block):
                    A_slice = A[i:i+block, k:k+block]
                    B_slice = B[k:k+block, j:j+block]
                    C[i:i+block, j:j+block] += A_slice @ B_slice

        time = perf_counter() - start
        times.append(time)

    return times
```

[20]:
```
big_size = 10000
big_A = np.tile(matrix_A, (20, 20))[:big_size, :big_size]
big_B = np.tile(matrix_B, (20, 20))[:big_size, :big_size]
```

[21]:
```
block_lengths3 = [100, 500, 1000, 2000, 5000, 10000]
time3 = block_mul_np(big_A, big_B, block_lengths3, big_size)
```

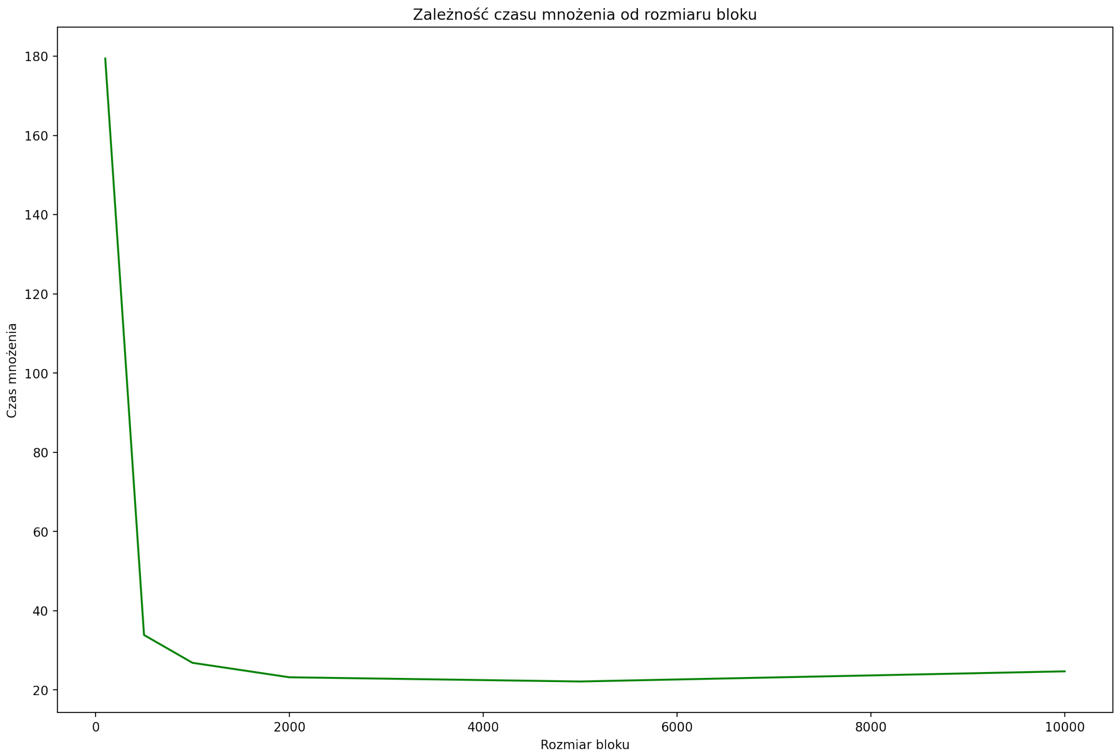
[22]:
```
show_table(block_lengths3, time3)
```

[22]:

	Rozmiar bloku	Czas mnożenia [s]
0	100	179.443008
1	500	33.872339
2	1000	26.847637
3	2000	23.196569
4	5000	22.132321
5	10000	24.694226

[23]:

```
plt.plot(block_lengths3, time3, color = 'green')
plt.xlabel("Rozmiar bloku")
plt.ylabel("Czas mnożenia")
plt.title("Zależność czasu mnożenia od rozmiaru bloku")
plt.show()
```



Dla algorytmu blokowego z użyciem wbudowanego mnożenia, najbardziej optymalna wielkość bloku to 5000.