Algorytmy macierzowe - faktoryzacja Cholesky'ego

November 11, 2021

Wykonanie: Adrianna Łysik, Maksymilian Wojnar

1 Problem nr 6

Proszę napisać procedurę `[S]=Schur_Complement(A,n,m)` gdzie A to macierz wejściowa, n to rozmiar tej macierzy, m to rozmiar podmacierzy (tzw. dopełnienia Schura), wykorzystując faktoryzację Cholesky'ego LDL^T

Treść zadania:

1. Dla macierzy IGA `riga=0, pxx=2, rxx=0`, proszę narysować następujący wykres:
   - oś pozioma: rozmiar macierzy n dla liczby przedziałów `nxx=2,3,4,...,`
   - oś pionowa: czas [s],
   - proszę narysować:
   - wykres czasu obliczeń dopełnień Schura o rozmiarze `n/2`,
   - wykres czasu obliczeń dopełnień Schura o rozmiarze `n/4`,
   - ... takie podziały, jakie mają sens do rozmiaru `1`.
2. Dla macierzy FEM `riga=1, pxx=2, rxx=0`, proszę narysować następujący wykres:
   - oś pozioma: rozmiar macierzy n dla liczby przedziałów `nxx=2,3,4,...,`
   - oś pionowa: czas [s],
   - proszę narysować:
   - wykres czasu obliczeń dopełnień Schura o rozmiarze `n/2`,
   - wykres czasu obliczeń dopełnień Schura o rozmiarze `n/4`,
   - ... takie rozmiary, jakie mają sens do rozmiaru `1`.
3. Jaki jest koszt obliczeniowy i pamięciowy (flopsy i memopsy) zaimplementowanego algorytmu?

Importy, ustawienia wyświetlania oraz wczytanie macierzy:

[4]:
```
from time import perf_counter
from glob import glob
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd

plt.rcParams['figure.dpi'] = 200
plt.rcParams['figure.figsize'] = (15, 10)
```

Implementacja dopełnienia Schura wykorzystująca faktoryzację Cholesky'ego LDL^T:

[5]:
```
def Schur_complement(A, n, m):
    for k in range(n - m):
        if np.abs(A[k, k]) < 1e-10:
            raise ValueError('Diagonal value too small')

        vk = A[k + 1:, k].copy()
        A[k + 1:, k] /= A[k, k]

        for j in range(k + 1, n):
            A[j:, j] -= A[j:, k] * vk[j - (k + 1)]

    return A
```

Biorąc pod uwagę własności numpy, w powyższej implementacji można było pominąc operację transpozycji.

Funkcja do testowania czasu działania faktoryzacji Cholesky'ego:

[6]:
```
def time_test(matrices, fractions):
    results = {f: np.zeros(len(matrices)) for f in fractions}
    matrices_sizes = np.zeros(len(matrices))

    for i, matrix in enumerate(matrices):
        n = len(matrix)
        matrices_sizes[i] = n

        for complement_fraction in fractions:
            matrix_copy = matrix.copy()
            m = n // complement_fraction

            start = perf_counter()
            Schur_complement(matrix_copy, n, m)
            end = perf_counter()

            results[complement_fraction][i] = end - start

    return results, matrices_sizes
```

2 Ad 1 - IGA

Wczytywanie macierzy

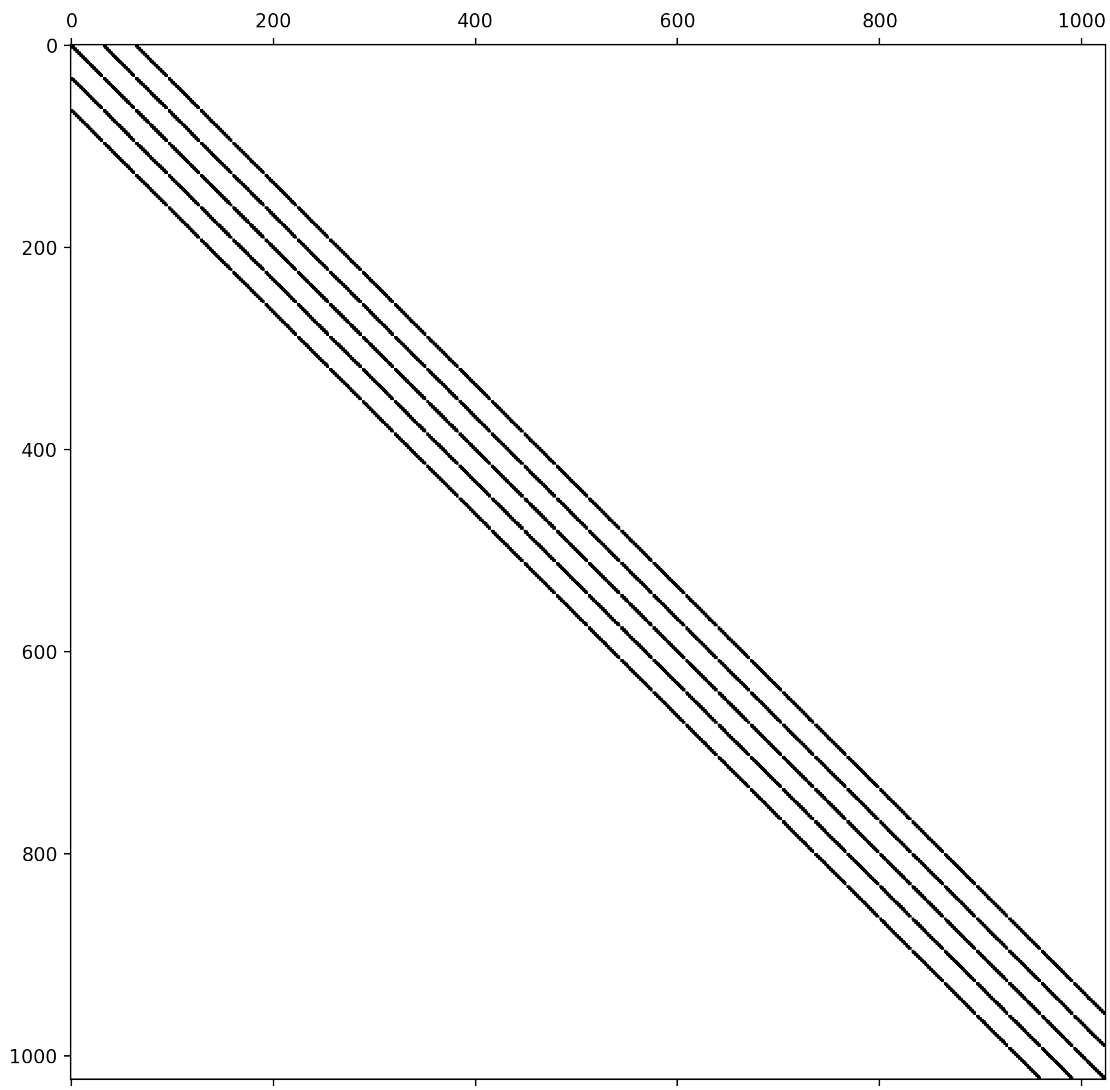
[7]:
```
iga_matrices = []

for filename in glob('.\IGA\matrix_*.csv'):
    iga_matrices.append(pd.read_csv(filename, header=None, index_col=None).
 ↪to_numpy())

iga_matrices.sort(key=lambda x: len(x))
```

Największa macierz IGA (n = 1024):

[8]:
```
plt.spy(iga_matrices[-1])
plt.show()
```



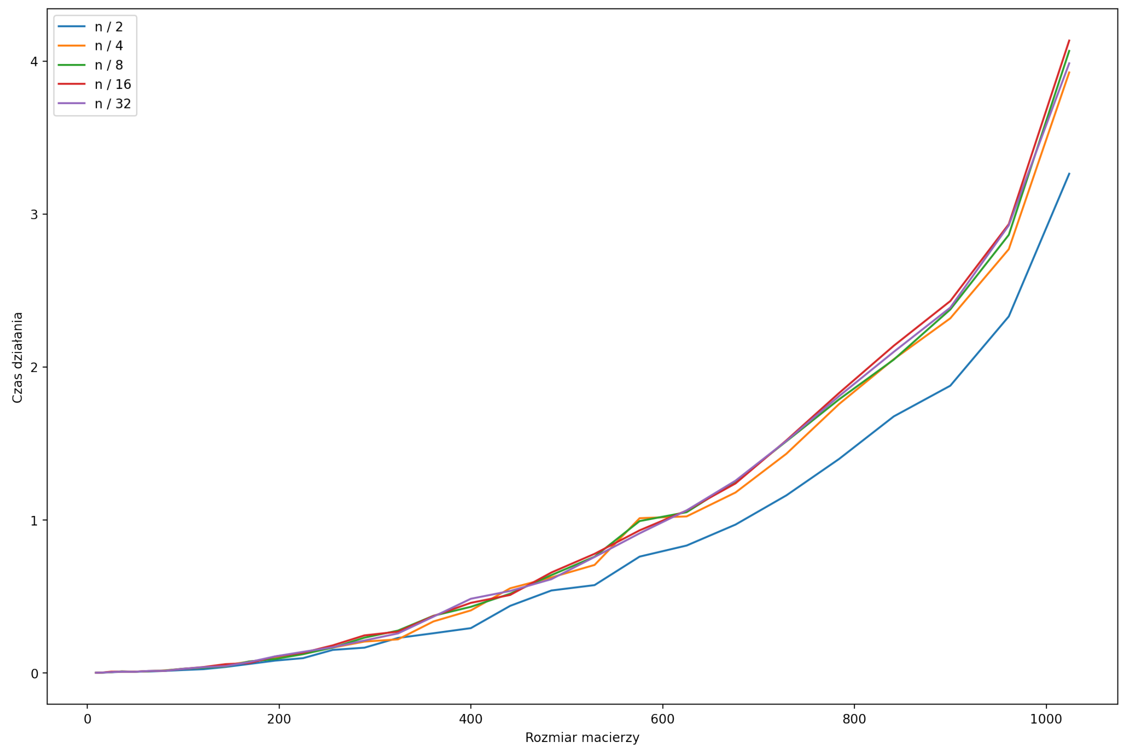
Wykres zależności czasu działania funkcji od rozmiaru macierzy i dopełnienia Schura:

Funkcję `Schur_complement` badamy dla parametru $m = n / 2, n / 4, n / 8, n / 16, n / 32 $

[24]:
```
fractions = [2, 4, 8, 16, 32]
results, matrices_sizes = time_test(iga_matrices, fractions)
```

[25]:
```
for complement_fraction, times in results.items():
    plt.plot(matrices_sizes, times, label=f'n / {complement_fraction}')

plt.legend()
plt.ylabel('Czas działania')
plt.xlabel('Rozmiar macierzy')
plt.show()
```



Czas dla największej macierzy (n = 1024):

[26]:
```
df = pd.DataFrame([[f'n / {c_f}', times[-1]] for c_f, times in results.items()])
df.columns = 'Rozmiar dopełnienia Schura', 'Czas działania [s]'
df
```

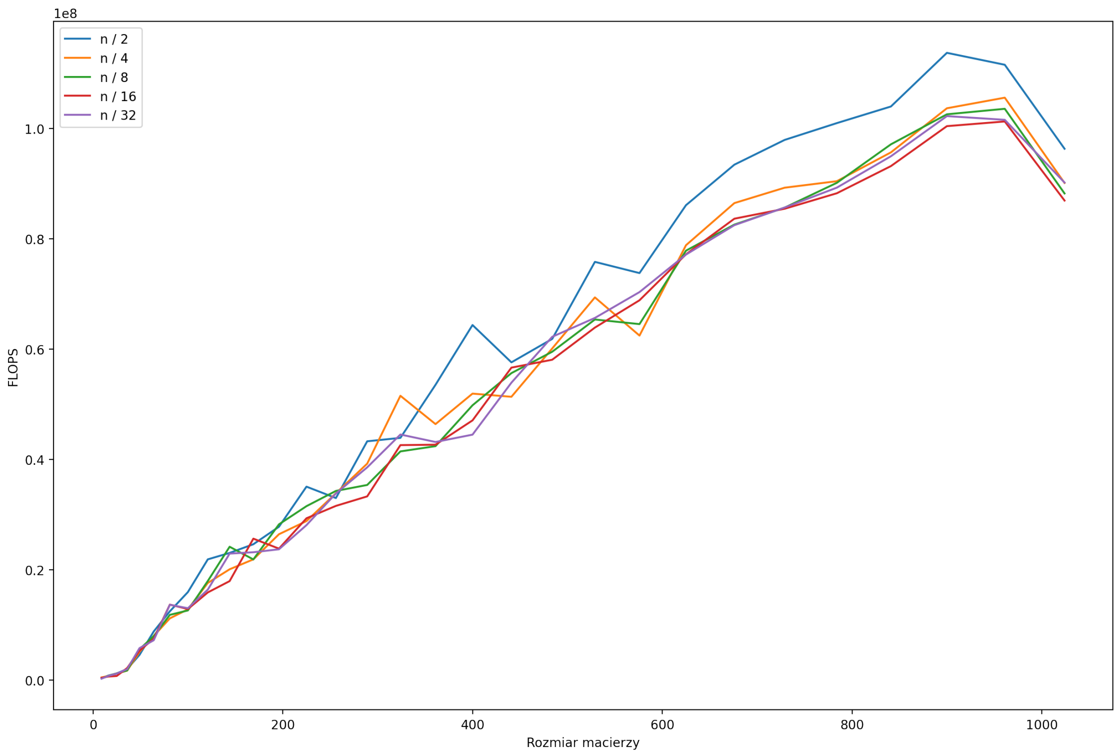
[26]:   Rozmiar dopełnienia Schura Czas działania [s]

	Rozmiar dopełnienia Schura	Czas działania [s]
0	n / 2	3.263438
1	n / 4	3.925734
2	n / 8	4.066653
3	n / 16	4.134096
4	n / 32	3.985552

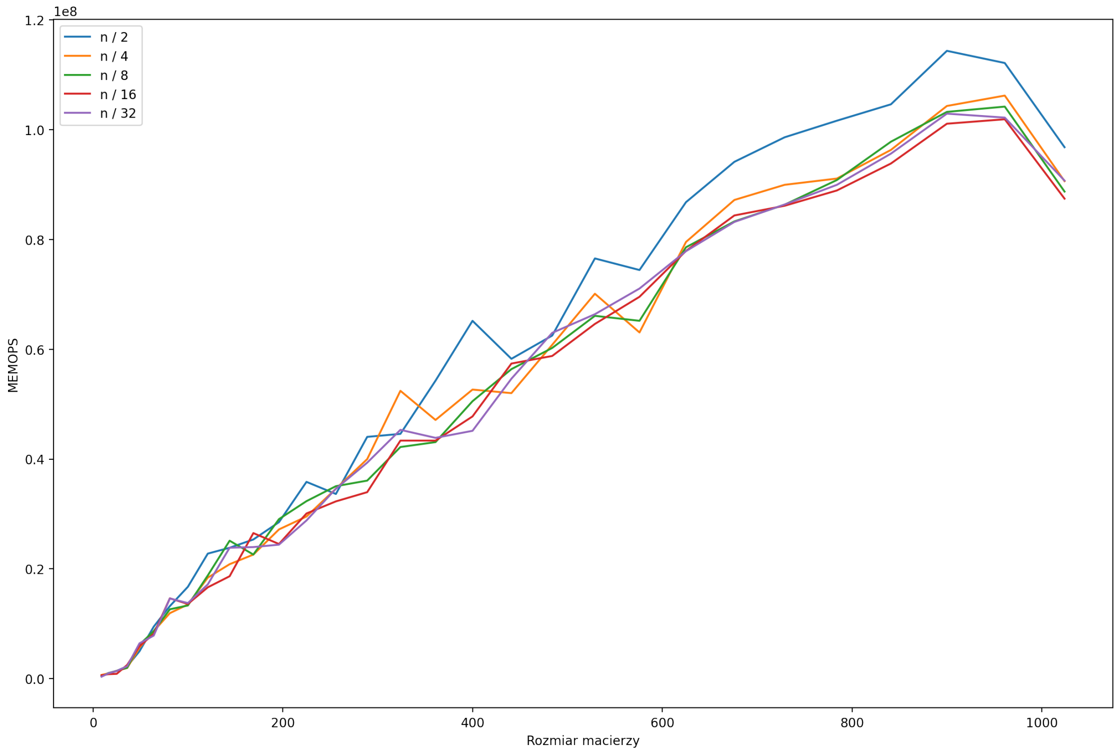
[27]:
```
def draw_ops(label, results, matrices_sizes, ops_func):
    for complement_fraction, times in results.items():
        float_ops = ops_func(matrices_sizes, matrices_sizes //
 ↪complement_fraction)
        plt.plot(matrices_sizes, float_ops / times, label=f'n /
 ↪{complement_fraction}')

    plt.legend()
    plt.ylabel(label)
    plt.xlabel('Rozmiar macierzy')
    plt.show()
```

[28]:
```
draw_ops('FLOPS', results, matrices_sizes,
        lambda n, m: 1 / 3 * (n ** 3 - m ** 3) + 3 / 2 * (n ** 2 - m ** 2) - 5 /
 ↪6 * (n - m))
```



[29]:
```
draw_ops('MEMOPS', results, matrices_sizes,
        lambda n, m: 1 / 3 * (n ** 3 - m ** 3) + 7 / 2 * (n ** 2 - m ** 2) + 7 /
 ↪6 * (n - m))
```



3 Ad 2 - FEM

Wczytywanie macierzy

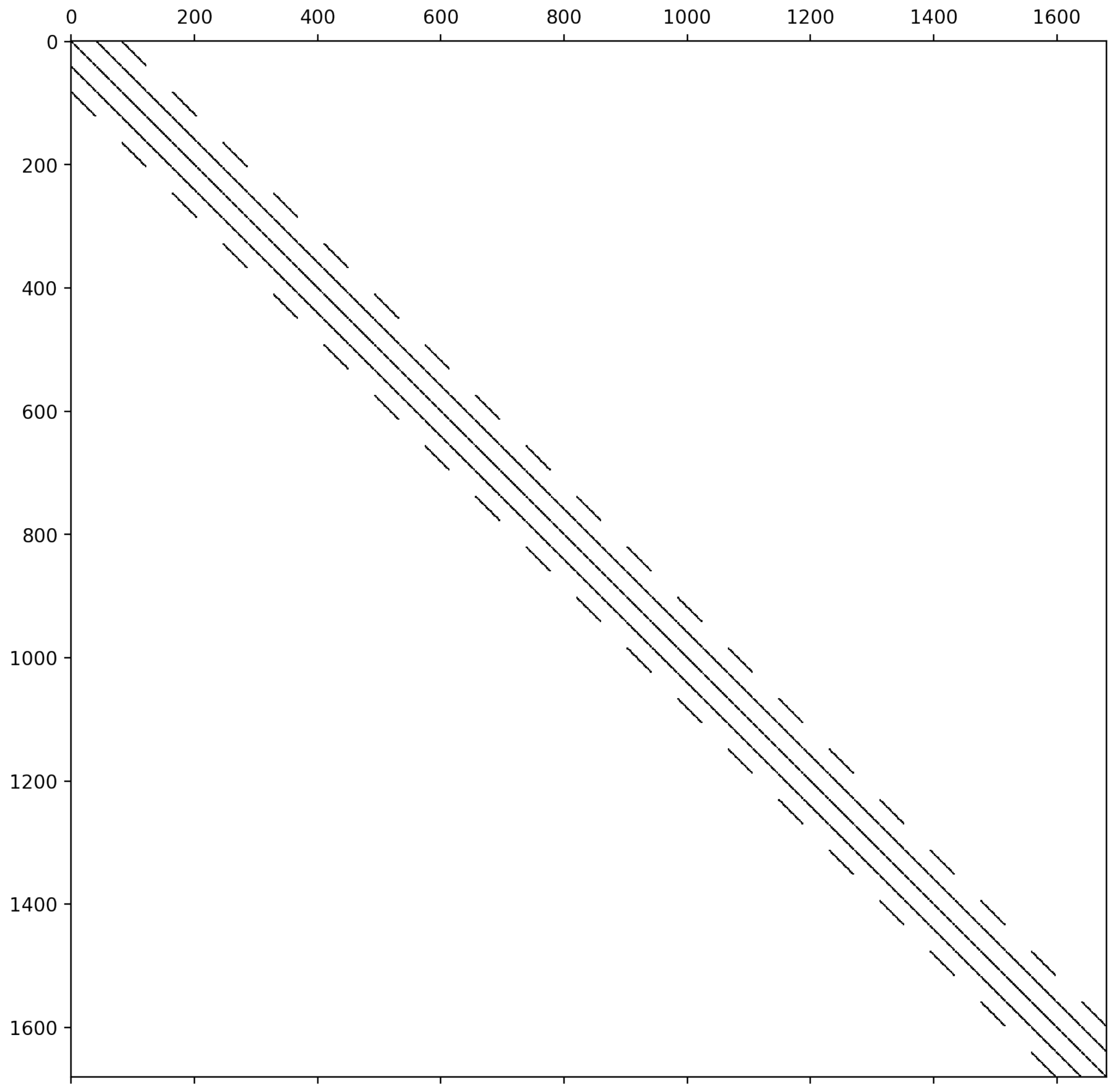
[17]:
```
fem_matrices = []

for filename in glob('.\FEM\matrix_*.csv'):
    fem_matrices.append(pd.read_csv(filename, header=None, index_col=None).
 ↪to_numpy())

fem_matrices.sort(key=lambda x: len(x))
```

Największa macierz FEM (n = 1681):

[18]:
```
plt.spy(fem_matrices[-1])
plt.show()
```



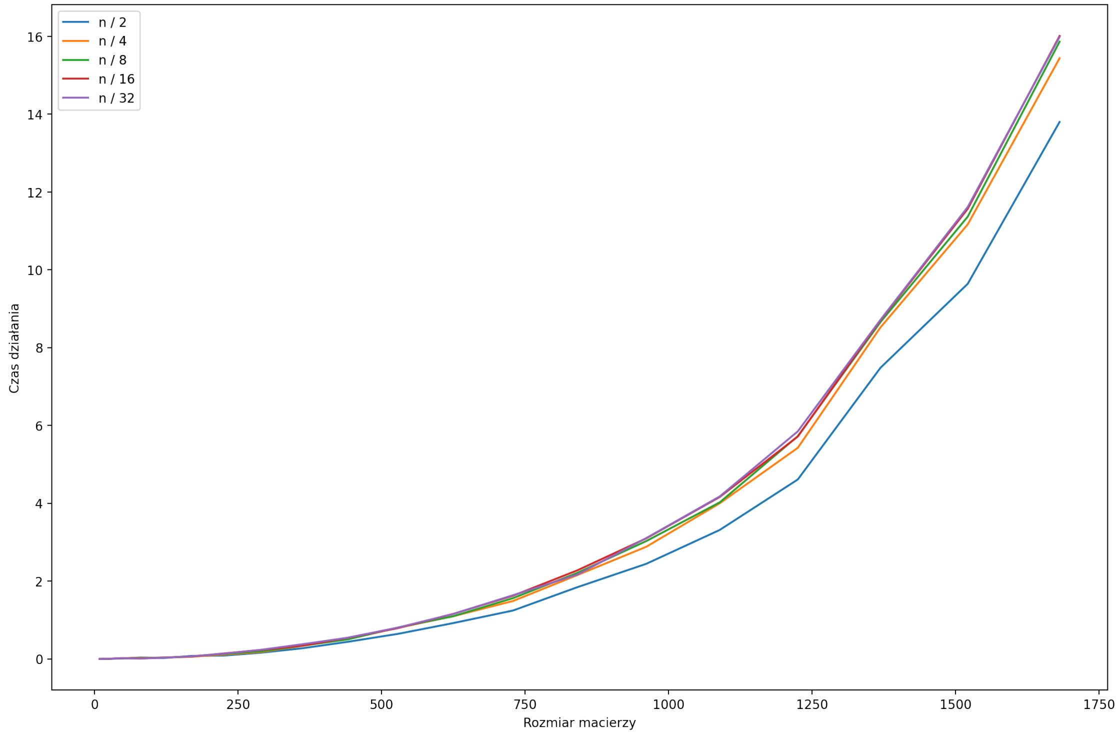
Wykres zależności czasu działania funkcji od rozmiaru macierzy i dopełnienia Schura:

Funkcję `Schur_complement` badamy dla parametru $m = n / 2, n / 4, n / 8, n / 16, n / 32 $

[30]:
```
results, matrices_sizes = time_test(fem_matrices, fractions)
```

[31]:
```
for complement_fraction, times in results.items():
    plt.plot(matrices_sizes, times, label=f'n / {complement_fraction}')

plt.legend()
plt.ylabel('Czas działania')
plt.xlabel('Rozmiar macierzy')
plt.show()
```



Czas dla macierzy (n = 1089):

[38]:
```
df = pd.DataFrame([[f'n / {c_f}', times[-5]] for c_f, times in results.items()])␣
↪#Wynik czasu dla maciezry wielkosci IGA
df.columns = 'Rozmiar dopełnienia Schura', 'Czas działania [s]'
df
```

[38]:

	Rozmiar dopełnienia Schura	Czas działania [s]
0	n / 2	3.316330
1	n / 4	4.001526
2	n / 8	4.025014
3	n / 16	4.163792
4	n / 32	4.177045

Czas dla największej macierzy (n = 1681):

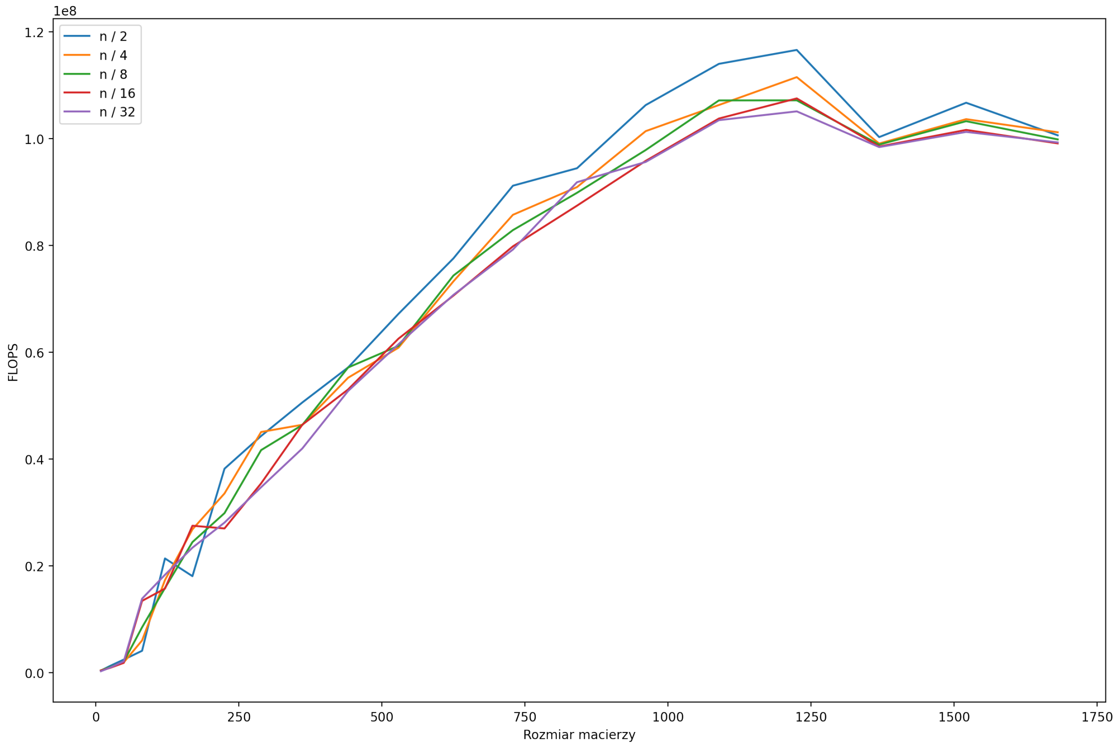
[40]:
```
df = pd.DataFrame([[f'n / {c_f}', times[-1]] for c_f, times in results.items()])␣
↪#Wynik czasu dla maciezry wielkosci IGA
df.columns = 'Rozmiar dopełnienia Schura', 'Czas działania [s]'
df
```

[40]:

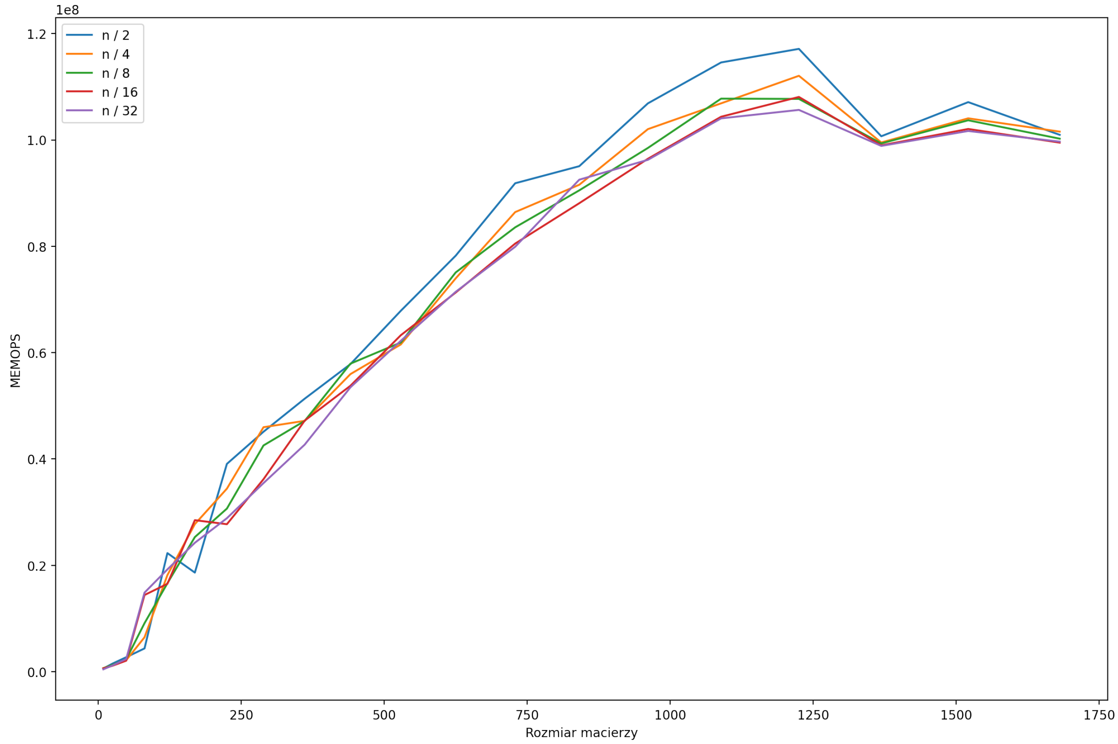
	Rozmiar dopełnienia Schura	Czas działania [s]
0	n / 2	13.800729
1	n / 4	15.438848

2	n / 8	15.863773
3	n / 16	16.010661
4	n / 32	15.984704

[34]:
```
draw_ops('FLOPS', results, matrices_sizes,
        lambda n, m: 1 / 3 * (n ** 3 - m ** 3) + 3 / 2 * (n ** 2 - m ** 2) - 5 /
 ↪6 * (n - m))
```



[35]:
```
draw_ops('MEMOPS', results, matrices_sizes,
        lambda n, m: 1 / 3 * (n ** 3 - m ** 3) + 7 / 2 * (n ** 2 - m ** 2) + 7 /
 ↪6 * (n - m))
```



4 Ad 3

Koszt obliczeniowy:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-m-1}\left[(n-k)+\sum_{j=k+1}^{n-1}2\cdot(n-j+1)\right]=\\&=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{3}{2}n^2-\tfrac{5}{6}n-\tfrac{1}{3}m^3-\tfrac{3}{2}m^2+\tfrac{5}{6}m=\\&=\tfrac{1}{3}(n^3-m^3)+\tfrac{3}{2}(n^2-m^2)-\tfrac{5}{6}\end{aligned}$$

$\sum_{k=0}^{n-m-1}$ odpowiada pętli z zakresu $(0, n-m)$ w której dzielimy wektor długości $n-k$ przez stałą, co powoduje koszt $(n-k)$ oraz wykonujemy pętle z zakresu $(k+1, n)$ co odpowiada $\sum_{j=k+1}^{n-1}$. W pętli wykonujemy operację dzielenia wektora przez stałą oraz operację odejmowania wektorów. Operacja dzielenia i odemowania dają koszty $(n-j+1)$, co sumuje się do $2*(n-j+1)$

Koszt pamięciowy:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-m-1}\left[4\cdot(n-k)+1+\sum_{j=k+1}^{n-1}2\cdot(n-j+1)+1\right]=\\&=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{7}{2}n^2+\tfrac{7}{6}n-\tfrac{1}{3}m^3-\tfrac{7}{2}m^2-\tfrac{7}{6}m=\\&=\tfrac{1}{3}(n^3-m^3)+\tfrac{7}{2}(n^2-m^2)+\tfrac{7}{6}(n-m)\end{aligned}$$

Koszt pamięciowy został policzony w sposób analogiczny do kosztu obliczeniowego, biorąc pod uwagę odczyty i zapisy.

5 Wnioski i spostrzeżenia

- Procedura `Schur_complement` wykonywała się w czasie krótszym niż 5 sekund dla obu macierzy niezależnie od rozmiaru dopełnienia , dla maksymalnego rozmiaru macierzy IGA: 1024×1024 oraz macierzy FEM: 1089×1089.
- Dla macierzy FEM 1681×1681 najlepszy czas wynosi niecałe 14 sekund.
- Najlepszy czas wykonania wynosi około 3.5 sekundy dla każdej macierzy.
- Czas wykonywania procedury rósł sześciennie względem wielkości macierzy.
- Rodzaj macierzy nie miał znacznego wpływu na szybkość działania procedury. `Schur_complement` na macierzy IGA wykonywał się wolniej, jednak tak mała różnica, może być zależna od innych czynników.
- Dla obu przypadków macierzy najkrótszy czas wykonania `Schur_complement` jest dla $m = \frac{n}{2}$.
- Maksymalna wartość FLOPS i MEMOPS dla obu macierzy jest taka sama. Dla macierzy IGA jest osiągana dla rozmiaru około 900×900, a dla macierzy FEM dla rozmiaru 1230×1230, po czym zaczyna spadać.
- Dla $m = \frac{n}{2}$ osiągane są najwyższe wartości FLOPS oraz MEMOPS.