2022 여름학기 | 동국대학교 SW 역량강화 캠프

14일차. 그리디

● 예시

▶ 78000원을 오만원권, 만원권, 오천원권, 천원권으로 만들 때, 가장 적은 수의 지폐를 이용하여 만드는 방법은 무엇인가?

오만원권 1개, 만원권 2개, 오천원권 1개, 천원권 3개

▶ 큰 액수의 지폐를 최대한 많이 사용한다.

지폐의 액수가 오만원권, 삼만원권. 오천원권, 천원권으로 만들 때에도 같은 전략이 통할까?

● 그리디 알고리즘

- ▶ 탐욕 알고리즘 / 욕심쟁이 알고리즘
- ▶ 현재 단계에서 가장 최선의 선택을 하는 알고리즘
- ▶ 모든 경우에서 통하지는 않으며, 사용할 때 증명이 필요
- ▶ 주로 예시를 통한 관찰과 규칙 찾기로 문제 해결
- ▶ 가장 큰 ~~, 가장 빠른 ~~, 가장 긴 ~~ 부터 ~~ 한다.

● 배치하기 (2709)

문제

N개의 정수로 이루어진 배열 A와 B가 주어질 때, X는 아래와 같이 정의된다.
X = A[0]*B[0] + ... + A[N-1]*B[N-1]

배열 A를 적당히 재배열해서 X의 값을 최소값으로 만들려고 한다.
X의 가능한 최소값을 출력해보자.

입력

첫째 줄에는 50 이하의 양의 정수 N이 주어진다.

두번째 줄에는 배열 A가, 세 번째 줄에는 배열 B가 N개의 자연수로 주어진다.

출력

첫째 줄에 X의 최솟값을 출력한다.

문제 해설

▶ 예시 2~3개를 통해 관찰해봅시다.

3	1	2
1	2	3

3	2	1
1	2	3

3	1	2	4
1	2	3	4

4	3	2	1
1	2	3	4

1	5	7	3
2	6	4	8

7	3	5	1
2	6	4	8

문제 해설

▶ B 배열 역시 재배열 되어도 답에 영향을 주지 않는다.

1	5	7	3
2	6	4	8

7	5	3	1
2	4	6	8

3	1	2
1	2	3

3	2	1
1	2	3

3	1	2	4
1	2	3	4

4	3	2	1
1	2	3	4

▶ 예측 : A 배열을 오름차순, B 배열을 내림차순으로 정렬했을 때, 최소값이 나온다

증명: 귀류법을 이용합니다.

A 배열을 오름차순 정렬했을 때, 답을 최소로 하는 B 배열에 내림차순이 아닌 부분이 존재한다고 해봅시다.

최선의 답에서 A[i] < A[i+1] 이면서 B[i] < B[i+1]

A[1]	A[2]	...	A[i]	A[i+1]	...	A[N]
B[1]	B[2]	...	B[i]	B[i+1]	...	B[N]

문제 해설

현재의 답 = … + A[i]*B[i] + A[i+1]*B[i+1] + …

A[1]	A[2]	…	A[i]	A[i+1]	…	A[N]
B[1]	B[2]	…	B[i]	B[i+1]	…	B[N]

개선된 답 = … + A[i]*B[i+1] + A[i+1]*B[i] + …

A[1]	A[2]	…	A[i]	A[i+1]	…	A[N]
B[1]	B[2]	…	B[i+1] ⟺	B[i]	…	B[N]

현재의 답 – 개선된 답 = A[i]*B[i] + A[i+1]*B[i+1] – A[i]*B[i+1] – A[i+1]*B[i]

= (A[i] – A[i+1]) * (B[i] – B[i+1]) >0

개선된 답 < 현재의 답 이므로 현재의 답이 최선이 아님. 따라서 모순!

문제 해설

▶ 사실 이렇게까지 명확한 증명은 Too Much..

▶ 예시를 통해 얻은 직감이나, 특정 선택이 언제나 다른 선택들보다 더 나은 선택이라는 느낌만으로도 충분합니다.

▶ Proof by AC

핵심 코드

```
int N = Integer.parseInt(br.readLine());

ArrayList<Integer> A = new ArrayList<>();
ArrayList<Integer> B = new ArrayList<>();

st = new StringTokenizer(br.readLine());
for(int i=0; i<N; i++) A.add(Integer.parseInt(st.nextToken()));

st = new StringTokenizer(br.readLine());
for(int i=0; i<N; i++) B.add(-Integer.parseInt(st.nextToken()));

Collections.sort(A);
Collections.sort(B);

long X=0;
for(int i=0; i<N; i++) X -= A.get(i) * (long)B.get(i);

System.out.print(X);
```

● 체육대회 (337)

문제

도원이가 다니는 백금고등학교의 1학년은 A반과 B반 2개의 반으로 이루어져 있다.
이번에 백금고등학교에서는 체육대회를 개최하는데, 많은 참여를 위해 1학년은 A반과 B반의 1대1 줄다리기를 진행하기로 하였다.
A반과 B반은 둘 다 n명의 학생들로 이루어져 있는데, 각 반은 이 n명의 학생을 1번부터 n번까지 번호를 붙혀, 같은 번호의 학생끼리 1대1 줄다리기를 진행하게 된다.

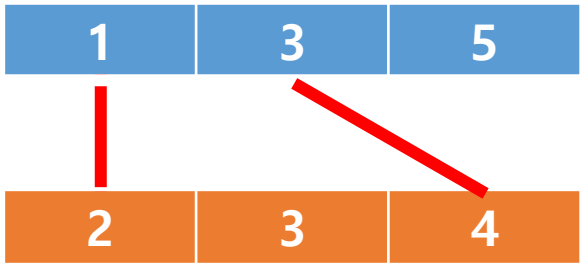
A반에 다니고 있는 도원이는 인맥을 활용하여 B반의 1번 학생부터 n번 학생까지 줄을 당기는 힘이 얼마인지 알아내었다..!
도원이는 A반 학생들의 줄을 당기는 힘이 얼마인지도 전부 알고 있기 때문에, 번호를 붙힐 때 B반의 학생들을 최대한 많이 이길 수 있도록 하려고 한다.
이 때 도원이가 B반 학생을 최대 몇 명 이기도록 A반 학생을 배치할 수 있을 지 출력해보자. (모든 학생의 당기는 힘은 전부 다르다!)

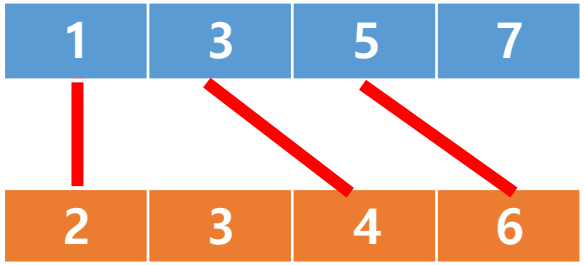
입력

첫째 줄에 A반과 B반의 학생의 수 n이 주어진다 ($1 \leq n \leq 100,000$)
둘째 줄에 B반의 1번 학생부터 n번 학생까지의 당기는 힘이 주어진다.
셋째 줄에 A반의 학생 n명의 당기는 힘이 주어진다. (당기는 힘은 100만 이하의 자연수로 주어진다)

문제 해설

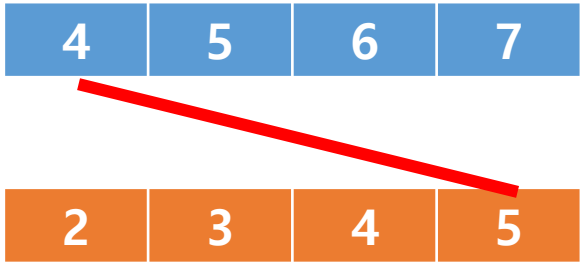
▶ 예시 3~4 개를 통해 관찰

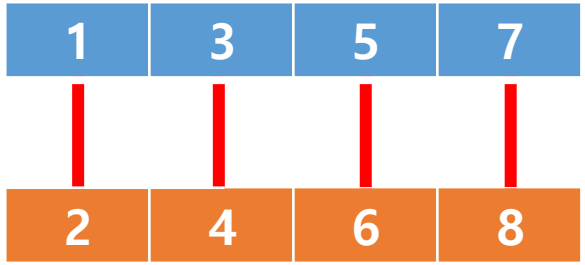




▶ 나타나는 공통점

B반 학생들 중 K명을 이긴다면, 그 K명은 B반 학생들 중 가장 약한 K명이다. (B반 학생들을 약한 순서대로 이기는 것이 최선이다.)

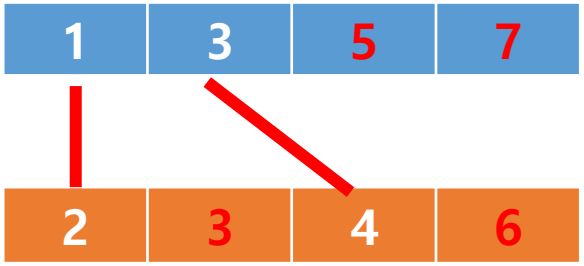


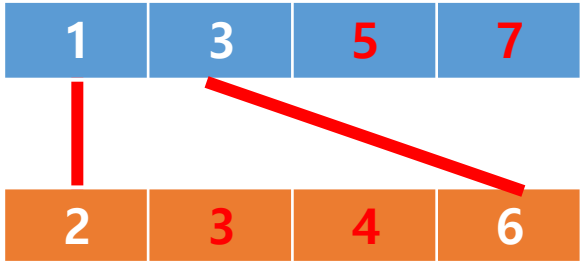


B반 학생을 이길 때, 이길 수 있는 가장 약한 힘으로 이기는 것이 최선이다.

▶ 예측 : B반 학생들을 힘이 약한 순서대로 이기는데, 이길 때 최소한의 힘으로 이기는 것이 최선이다.

이길 때 최소한의 힘으로 이기는 것이 최적인 것은 상태의 비교 우위로 증명할 수 있습니다.





이길 때 최소한의 힘으로 이기는 것은 왼쪽에서부터 탐색하여 처음으로 이길 수 있는 사람을 탐색

단, 아래 배열에서도 선택을 오름차순으로 한다는 사실을 이용하면 빠르게 해결 가능

핵심 코드

```
st = new StringTokenizer(br.readLine());
for(int i=0; i<N; i++) B.add(Integer.parseInt(st.nextToken()));

st = new StringTokenizer(br.readLine());
for(int i=0; i<N; i++) A.add(Integer.parseInt(st.nextToken()));

Collections.sort(A);
Collections.sort(B);

int j=0, cnt=0;
for(int i=0; i<N; i++){
    while(j<N && A.get(j) <= B.get(i)) j++;
    if(j == N) break;
    cnt++;
    j++;
}

System.out.print(cnt);
```

● 밧줄 (7)

문제

N(1≤N≤100,000)개의 로프가 있다. 이 로프를 이용하여 이런 저런 물체를 들어올릴 수 있다. 각각의 로프는 그 굵기나 길이가 다르기 때문에 들 수 있는 물체의 중량이 서로 다를 수도 있다.

하지만 여러 개의 로프를 병렬로 연결하면 각각의 로프에 걸리는 중량을 나눌 수 있다. k개의 로프를 사용하여 중량이 w인 물체를 들어올릴 때, 각각의 로프에는 모두 고르게 w/k 만큼의 중량이 걸리게 된다.

각 로프들에 대한 정보가 주어졌을 때, 이 로프들을 이용하여 들어올릴 수 있는 물체의 최대 중량을 구해내는 프로그램을 작성하시오. 모든 로프를 사용해야 할 필요는 없으며, 임의로 몇 개의 로프를 골라서 사용해도 된다. 단, 각각의 로프는 한 개씩만 존재한다.

입력

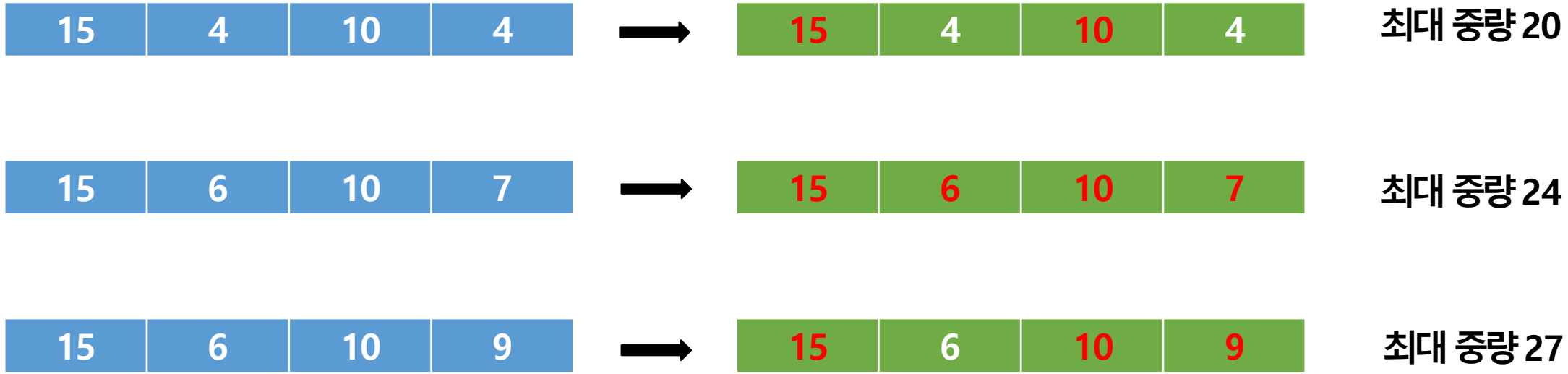
첫째 줄에 정수 N이 주어진다. 다음 N개의 줄에는 각 로프가 버틸 수 있는 최대 중량이 주어진다. 이 값은 10,000을 넘지 않는다.

출력

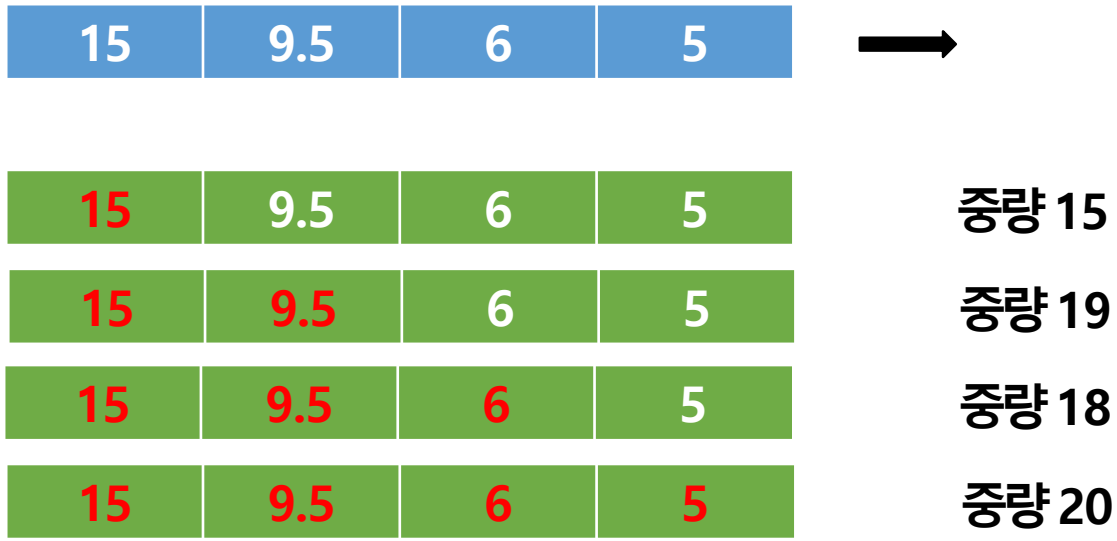
첫째 줄에 답을 출력한다.

문제 해설

▶ 예시 2~3개를 통해 관찰



K개의 밧줄을 고른다면, 가장 최대 중량이 큰 K개의 밧줄을 고른다.
그 때의 전체 최대 중량은 K * (가장 최대 중량이 큰 K개의 밧줄의 최대 중량의 최소값)


15 9.5 6 5
15 9.5 6 5
중량 15
15 9.5 6 5
중량 19
15 9.5 6 5
중량 18
15 9.5 6 5
중량 20

핵심 코드

```
int N = Integer.parseInt(br.readLine());

ArrayList<Integer> w = new ArrayList<>();
for(int i=0; i<N; i++) w.add(-Integer.parseInt(br.readLine()));

Collections.sort(w);

int ans=0;
for(int i=0; i<N; i++) ans = Math.max(ans, -(i+1)*w.get(i));

System.out.print(ans);
```

● 대표 자연수 (658)

문제

정보초등학교의 연아는 여러 개의 자연수가 주어졌을 때, 이를 대표할 수 있는 대표 자연수에 대하여 연구하였다. 그 결과 어떤 자연수가 다음과 같은 성질을 가지면 대표 자연수로 적당할 것이라고 판단하였다.

"대표 자연수는 주어진 모든 자연수들에 대하여 그 차이를 계산하여 그 차이들 전체의 합을 최소로 하는 자연수이다."

예를 들어 주어진 자연수들이 [4, 3, 2, 2, 9, 10]이라 하자. 이때 대표 자연수는 3 혹은 4가 된다. 왜냐하면 (4와 3의 차이) + (3과 3의 차이) + (2와 3의 차이) + (2와 3의 차이) + (9와 3의 차이) + (10과 3의 차이) = 1+0+1+1+6+7 = 16이고, (4와 4의 차이) + (3과 4의 차이) + (2와 4의 차이) + (2와 4의 차이) + (9와 4의 차이) + (10과 4의 차이) = 0+1+2+2+5+6 = 16으로 같으며, 이 두 경우가 차이들의 합을 최소로 하기 때문이다. 비교를 위하여 평균값인 5의 경우를 생각하여 보면, (4와 5의 차이) + (3과 5의 차이) + (2와 5의 차이) + (2와 5의 차이) + (9와 5의 차이) + (10과 5의 차이) = 1+2+3+3+4+5 = 18로 위의 두 경우보다 차이들의 합이 더 커짐을 볼 수 있다.

연아를 도와서 위의 성질을 만족하는 대표 자연수를 구하는 프로그램을 작성하시오.

▶ 예시 2~3개를 통해 관찰

2	5	3	4	6

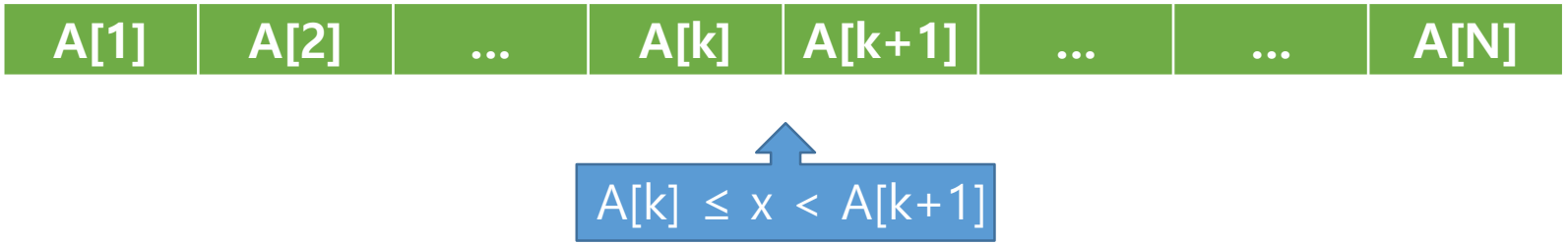
2	3	4	5	6
10	7	6	7	10

1	5	3	6	100

1	3	5	6	100
110	104	102	103	385

문제 해설

▶ 입력된 순서는 상관없다. → 정렬해서 보자



$|A[1] - x| + \cdots + |A[k] - x| + |A[k+1] - x| + \cdots + |A[N] - x|$ 의 최소를 구한다.

만약 x가 1 증가하면 $+(k) - (N-k) = 2*k - N$ 만큼 변한다.

즉 $2*k - N < 0$ 이라면 x를 증가시키는 것이 값을 감소시킨다.

$k < (N/2)$ 까지 x를 증가, $x = A[(N+1)/2]$

$A[(N-1)/2] \le x < A[(N-1)/2 + 1]$ $x == A[(N-1)/2 + 1]$

핵심 코드

```
BufferedReader br = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
StringTokenizer st;

int N = Integer.parseInt(br.readLine());

ArrayList<Integer> arr = new ArrayList<>();
st = new StringTokenizer(br.readLine());
for(int i=0; i<N; i++) arr.add(Integer.parseInt(st.nextToken()));

Collections.sort(arr);

System.out.print(arr.get((N-1)/2));
```

● 파일 합치기 (4152)

문제

윌리의 직박구리 폴더에는 N개의 파일이 있다. 윌리는 이 파일들을 전부 합쳐 하나의 파일로 만드려고 한다. 파일을 합칠 때에는 두 파일을 하나로 합치는 것을 반복해야 한다. 합칠 때에는 두 파일의 크기를 더한 것만큼의 시간이 걸린다.

놀랍게도, 파일을 고르는 순서에 따라서 비교 횟수가 달라진다. 예를 들어 크기가 10, 20, 40인 파일이 있다면 10과 20을 합친 뒤, 합친 30과 40을 합친다면 (10 + 20) + (30 + 40) = 100의 시간이 필요하다. 그러나 10과 40을 합친 뒤, 합친 50과 20을 합친다면 (10 + 40) + (50 + 20) = 120의 시간이 필요하므로 덜 효율적인 방법이다.

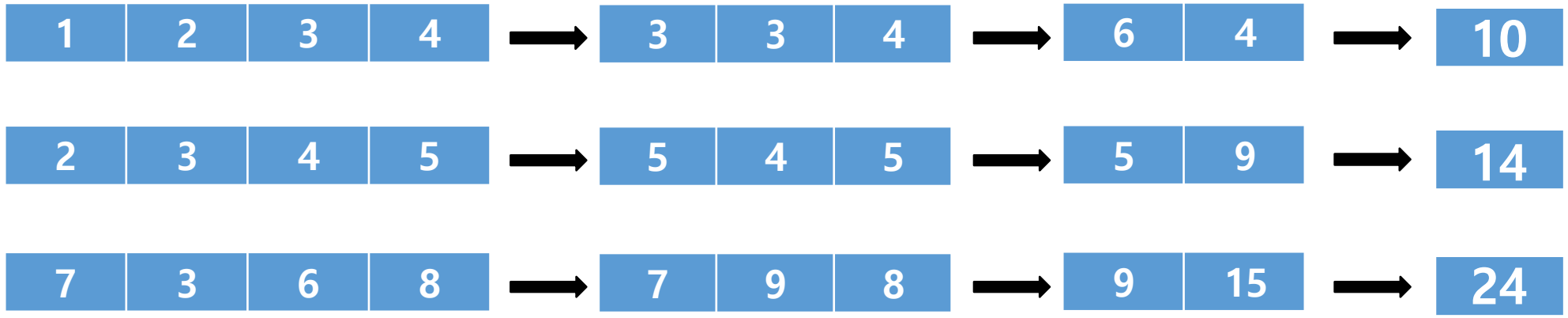
N개의 파일 크기가 주어질 때, 필요한 시간의 최솟값을 구해보자.

파일 합치기 많이 틀리는 예제

4개의 파일 크기가 50,30,40,60일 경우 <- 360

4개의 파일 크기가 30 60 70 80인 경우 <- 480

▶ 예시 2~3개를 통해 관찰



가장 작은 2개의 병합을 반복한다?

문제 해설

- 가장 작은 2개의 병합을 반복한다.
- 엄밀한 증명은 Skip! Proof by AC
- 가장 작은 2개를 합친다 → 우선순위 큐를 이용 (TreeSet도 가능합니다)

핵심 코드

```
int N = Integer.parseInt(br.readLine());

PriorityQueue<Integer> pq = new PriorityQueue<>();
for(int i=0; i<N; i++) pq.add(Integer.parseInt(br.readLine()));

int sum=0;
for(int i=1; i<N; i++){
    int x = pq.poll() + pq.poll();
    pq.add(x);

    sum += x;
}

System.out.print(sum);
```

● 회의실 배정(2709)

문제

컴돌이는 한 개의 회의실을 관리하게되었다. 이 회의실에는 N개의 회의들이 예약되어 있는데, 컴돌이가 자세히 살펴본 결과 이 중 서로 시간이 겹쳐있는 것들이 있었다.

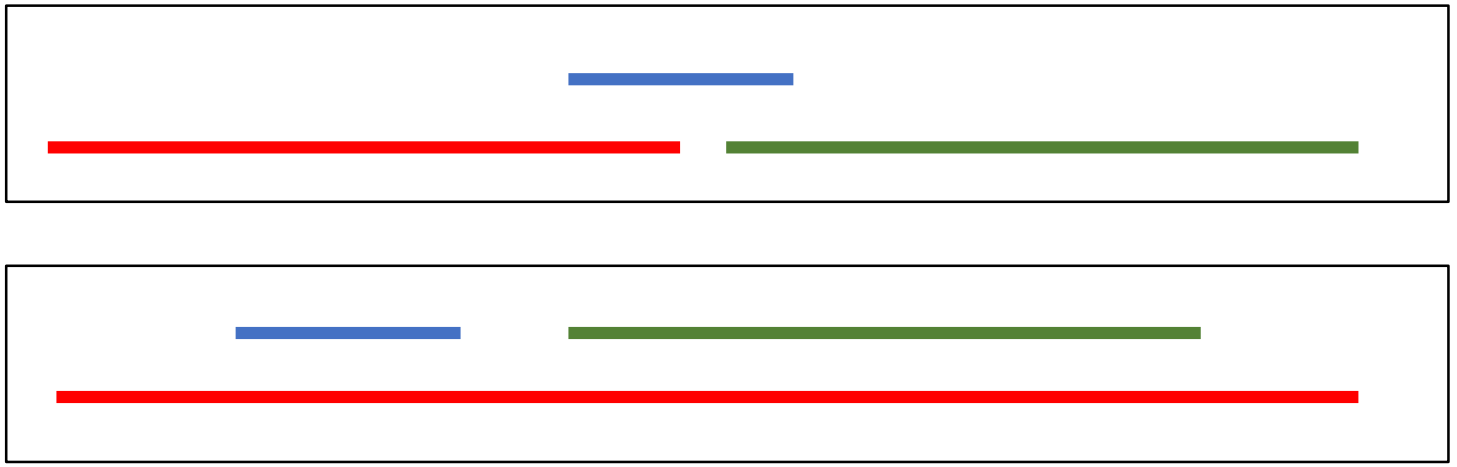
한 회의실에서 두 개 이상의 회의가 열릴 수 없기 때문에 컴돌이는 예약되어있는 몇 개의 회의를 취소하고 회의실 시간표를 짜려고 한다.

회의를 하나 취소할 때마다 입는 타격이 크기 때문에 회의는 최소한으로 취소하려고 할 때, 컴돌이가 열 수 있는 회의의 최대 개수를 구하는 프로그램을 작성하여라.

단, 회의는 한번 시작하면 중간에 중단될 수 없으며 한 회의가 끝나는 것과 동시에 다음 회의가 시작될 수 있다. 회의의 시작시간과 끝나는 시간이 같을 수도 있다. 이 경우에는 시작하자마자 끝나는 것으로 생각하면 된다.

문제 해설

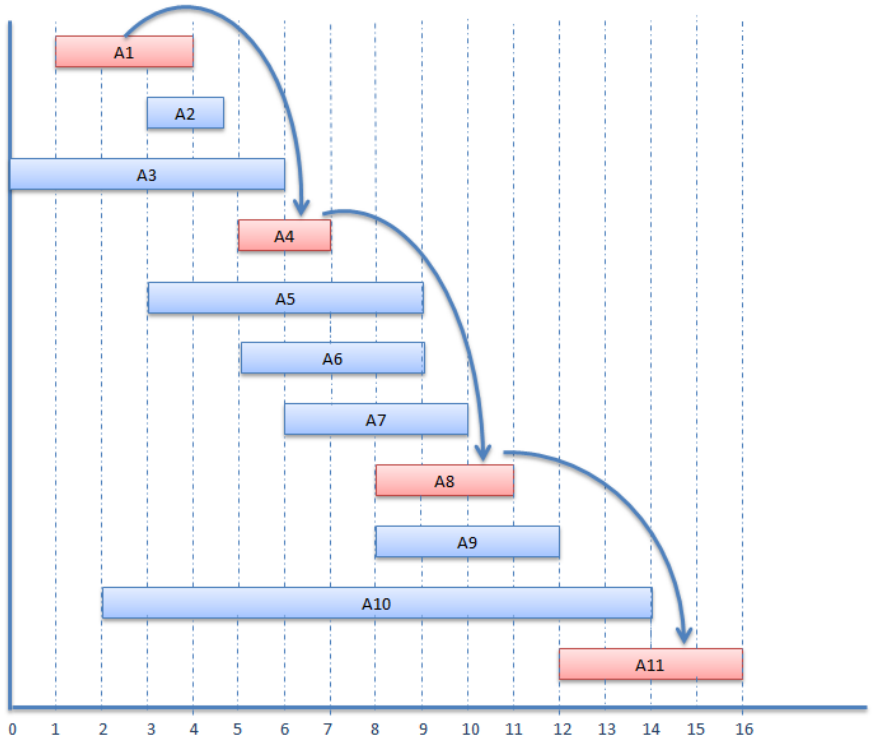
- 최선의 선택은?
- 가장 회의시간이 짧은 회의부터 선택
- 가장 빨리 시작하는 회의부터 선택
- 가장 빨리 끝나는 회의부터 선택



▶ 가장 빨리 끝나는 회의부터 선택

다음으로 진행되는 회의는 이 회의가 종료된 이후부터 진행 가능

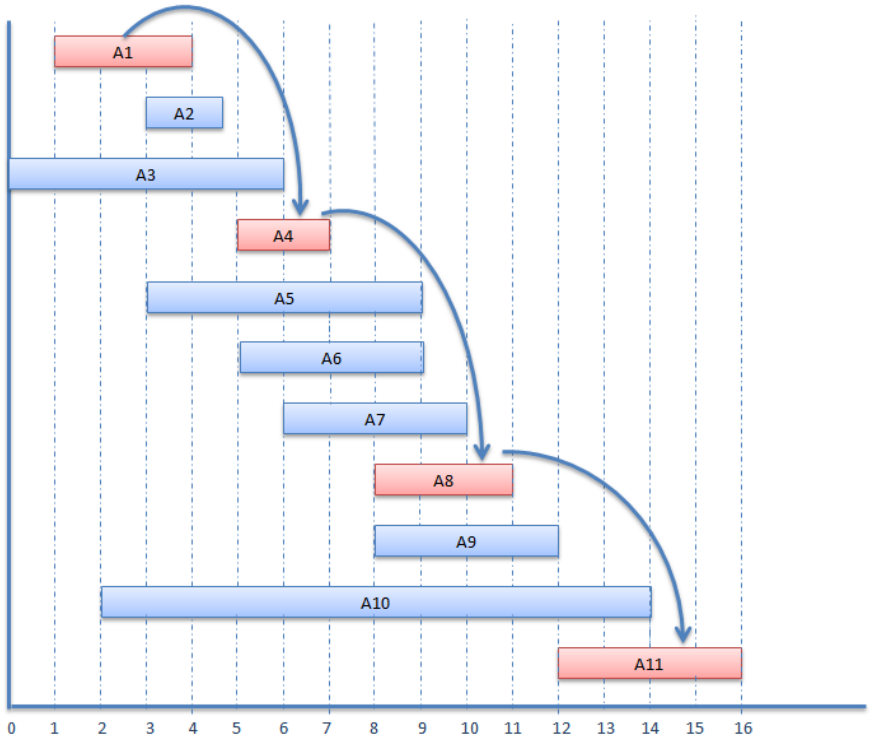
따라서, 가장 먼저 종료되는 회의를 선택하는 것이 이후 선택에 있어 비교우위를 가질 수 있다.



▶ 회의들을 종료시각 순으로 정렬

진행할 수 있는 회의들 중 가장 종료시각이 빠른 회의를 선택

→ 앞에서부터 보면서 가장 먼저 나오는 진행가능한 회의 선택



핵심 코드

```
ArrayList<Meeting> meetings = new ArrayList<>();
for(int i=0; i<N; i++){
    st = new StringTokenizer(br.readLine());
    int start = Integer.parseInt(st.nextToken());
    int end = Integer.parseInt(st.nextToken());

    meetings.add(new Meeting(start, end));
}

Collections.sort(meetings);

int end=0, cnt=0;
for(int i=0; i<N; i++){
    if(meetings.get(i).getStart() >= end){
        cnt++;
        end = meetings.get(i).getEnd();
    }
}
```

```
class Meeting implements Comparable<Meeting>{
    private int start, end;

    public Meeting(int start, int end){
        this.start = start;
        this.end = end;
    }

    public int getStart(){ return this.start; }
    public int getEnd(){ return this.end; }

    @Override
    public int compareTo(Meeting x){
        return getEnd() - x.getEnd();
    }
}
```