2024 겨울학기 | 동국대학교 SW 역량강화 캠프

11일차. 이분탐색

시작하기에 앞서

- 1부터 100까지 중에 생각한 수를 맞추기 위해서는?

- 이 탐색 횟수를 줄이기 위해서 줄 수 있는 힌트가 있다면?

- 이 수가 맞는가에 대한 질문의 대답으로 YES/NO 뿐만이 아니라, Up/Down으로 힌트를 준다면

- 어느 수를 질문하는 것이 최선일까?

● 이분탐색(이진탐색)

▶ 탐색 범위를 절반씩 줄여나가며 진행하는 탐색

▶ 답이 “무조건” 존재하는 범위 l ~r을 구간의 길이가 1이 될 때까지 줄인다.

▶ 탐색의 시간복잡도 O(lgN)

● lower bound (2907)

문제

n개로 이루어진 정수 집합에서 k이상인 수가 처음으로 등장하는 위치를 찾으세요.

단, 입력되는 정수 집합은 오름차순으로 정렬되어 있습니다.

입력

첫째 줄에 정수 집합의 크기 n이 주어진다. 단, n은 1,000,000이하의 양의 정수이다.
두번째 줄에는 정수 집합에 속한 int범위 이내의 양의 정수가 n개 주어진다.
셋째 줄에는 찾고자 하는 값 k가 주어진다.

출력

찾고자 하는 원소의 위치를 출력한다.
만약 집합 내 모든 원소가 k보다 작다면 n+1을 출력한다.

기본 코드

```java
public class main{
    public static void main(String[] args) throws IOException{
        BufferedReader br = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
        StringTokenizer st;

        int N = Integer.parseInt(br.readLine());

        int[] arr = new int[N];
        st = new StringTokenizer(br.readLine());
        for(int i=0; i<N; i++) arr[i] = Integer.parseInt(st.nextToken());

        int K = Integer.parseInt(br.readLine());

        System.out.print(lower_bound(N, arr, K));
    }

    static int lower_bound(int N, int[] arr, int K){
        int answer=0;

        return answer;
    }
}
```

```python
def lower_bound(N, arr, K):
    answer = 0

    return answer

N = int(input())
arr = list(map(int, input().split()))
K = int(input())

print(lower_bound(N, arr, K))
```

문제 해설

▶ 이분탐색을 통한 자료구조 탐색

▶ lower_bound(k) : k 이상의 수가 처음 등장하는 위치
▶ upper_bound(k) : k 초과의 수가 처음 등장하는 위치

▶ C++과 python에는 두 기능이 구현되어 있지만, java에는..

```
cout << lower_bound(arr, arr+n, k) - arr + 1;
```

```
print(bisect.bisect_left(arr, K) + 1)
```

문제 해설

- 답이 존재하는 구간 [L, R]에서 K 이상의 수가 처음 등장하는 위치를 이분탐색 해보자.
- mid = (L+R)/2
- arr[mid] <K 라면? [L,R] → [mid+1, R]
- arr[mid] >K 라면? [L,R] → [L, mid−1]
- arr[mid] == K 라면? [L,R] → [L, mid−1]

K=8

L				mid				R

핵심 코드

```java
static int lower_bound(int N, int[] arr, int K){
    int answer=N, l=0, m, r=N-1;

    while(l <= r){
        m = (l+r)/2;

        if(arr[m] < K) l = m+1;
        else{
            answer = m;
            r = m-1;
        }
    }

    return answer+1;
}
```

```python
def lower_bound(N, arr, K):
    answer = N
    l = 0
    r = N-1

    while l <= r:
        m = (l+r)//2
        if arr[m] < K:
            l = m+1
        else:
            answer = m
            r = m-1

    return answer+1
```

● Counting Haybales(1239)

문제

농부 존은 N(1 ≤ N ≤ 100,000)개의 건초더미를 일직선 상의 여러 지점에 놓았습니다. 모든 건초더미가 적절하게 놓였는지를 확인하기 위해서 그를 도와 Q (1 ≤ Q ≤ 100,000)개의 질문을 처리해주세요. 각 질문은 일직선 상의 특정 구간에 건초더미가 몇개가 있는지 물어보는 질문입니다.

입력

첫째 줄에 N과 Q가 주어진다.
다음 줄에는 건초더미의 위치를 뜻하는 N개의 서로 다른 정수가 주어진다. 각각의 정수는 0…1,000,000,000사이 범위이다.
그 다음 Q개의 줄에는 각각 두개의 정수 A, B가 주어진다(0 ≤ A ≤ B ≤ 1,000,000,000). 이는 A에서 B구간 사이에 있는 건초더미를 묻는 질문이다.

출력

Q개의 줄에 각각의 질문에 대하여 해당 구간에 건초더미가 몇개 있는지를 출력한다.

문제 해설

- 이분탐색을 이용한 풀이
- 건초더미의 위치를 정렬해놓자.
- upper_bound(k) – lower_bound(k) 를 하면 k의 개수를 알 수 있다.
- upper_bound(b) – lower_bound(a) 를 하면 a부터 b까지의 개수를 알 수 있다.

핵심 코드

```java
for(int i=0; i<Q; i++){
    st = new StringTokenizer(br.readLine());
    int A = Integer.parseInt(st.nextToken());
    int B = Integer.parseInt(st.nextToken());

    System.out.println(upper_bound(N, arr, B) - lower_bound(N, arr, A));
}
```

```python
for i in range(Q):
    A, B = map(int, input().split())
    print(bisect.bisect_right(arr, B) - bisect.bisect_left(arr, A))
```

Parametric Search

- 최적화 문제를 결정문제로 바꾸어 푸는 방법
- 최적화 문제: ~~를 만족하는 최적의 답을 구하시오(최소, 최대)
- 결정 문제: OX 문제, ~~가 조건을 만족하는가?

● 이분탐색 parametric search를 할 때 고려해야 하는 요소

- ▶ 이분탐색이 가능한 문제인가? (특정 값을 기준으로 YES/NO가 나뉘는가?)
- ▶ 답이 범위 내에 "무조건" 존재하는 초기 범위 L~R을 잡았는가?
- ▶ 구간의 중간점인 mid가 답에 포함되는가?
- ▶ 구간의 길이가 언제나 1로 줄어드는가?

● 나무 자르기(11)

문제

상근이는 나무 M미터가 필요하다. 근처에 나무를 구입할 곳이 모두 망해버렸기 때문에, 정부에 벌목 허가를 요청했다. 정부는 상근이네 집 근처의 나무 한 줄에 대한 벌목 허가를 내주었고, 상근이는 새로 구입한 목재절단기을 이용해서 나무를 구할것이다.

목재절단기는 다음과 같이 동작한다. 먼저, 상근이는 절단기에 높이 H를 지정해야 한다. 높이를 지정하면 톱날이 땅으로부터 H미터 위로 올라간다. 그 다음, 한 줄에 연속해있는 나무를 모두 절단해버린다. 따라서, 높이가 H보다 큰 나무는 H 위의 부분이 잘릴 것이고, 낮은 나무는 잘리지 않을 것이다. 예를 들어, 한 줄에 연속해있는 나무의 높이가 20, 15, 10, 17이라고 하자. 상근이가 높이를 15로 지정했다면, 나무를 자른 뒤의 높이는 15, 15, 10, 15가 될 것이고, 상근이는 길이가 5인 나무와 2인 나무를 들고 집에 갈 것이다. (총 7미터를 집에 들고 간다)

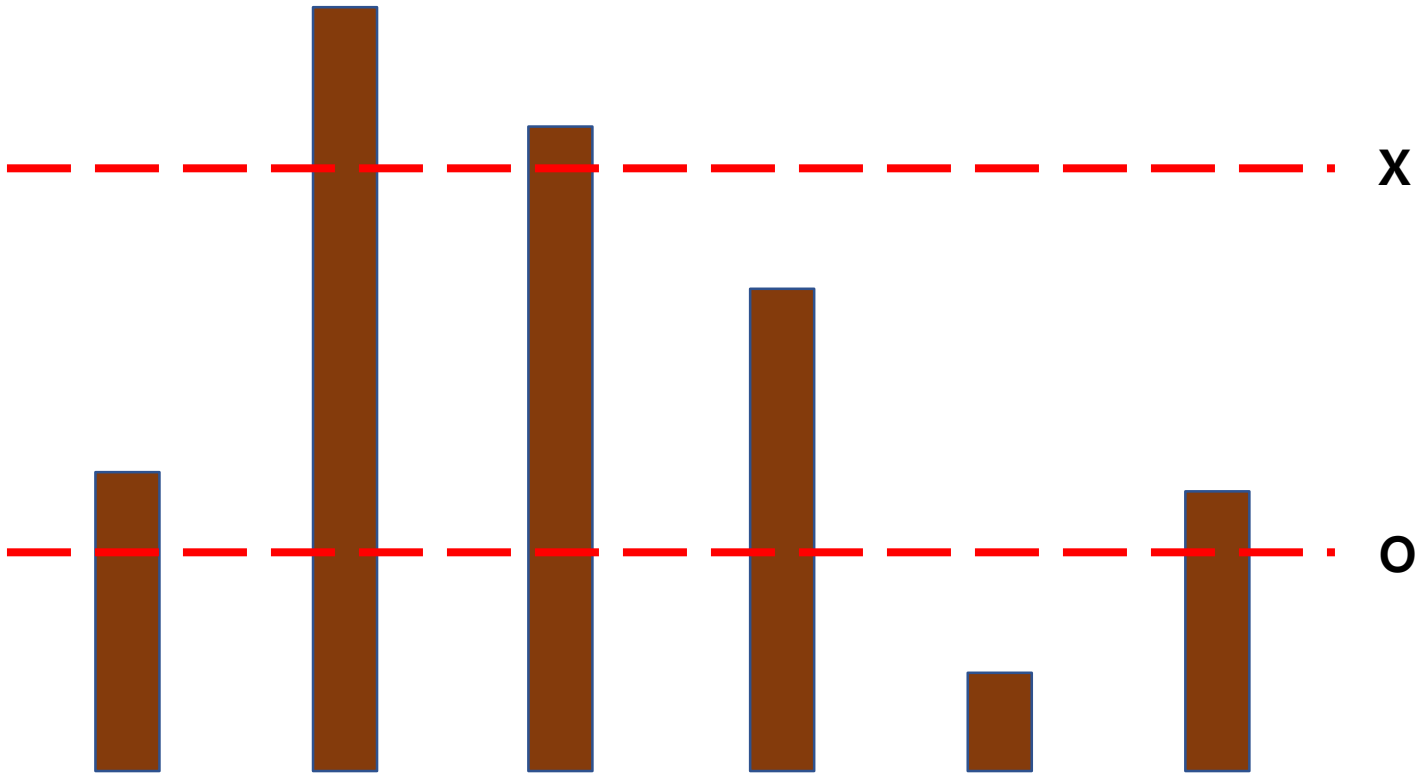
상근이는 환경에 매우 관심이 많기 때문에, 나무를 필요한 만큼만 집으로 가져가려고 한다. 이때, 적어도 M미터의 나무를 집에 가져가기 위해서 절단기에 설정할 수 있는 높이의 최댓값을 구하는 프로그램을 작성하시오.

입력

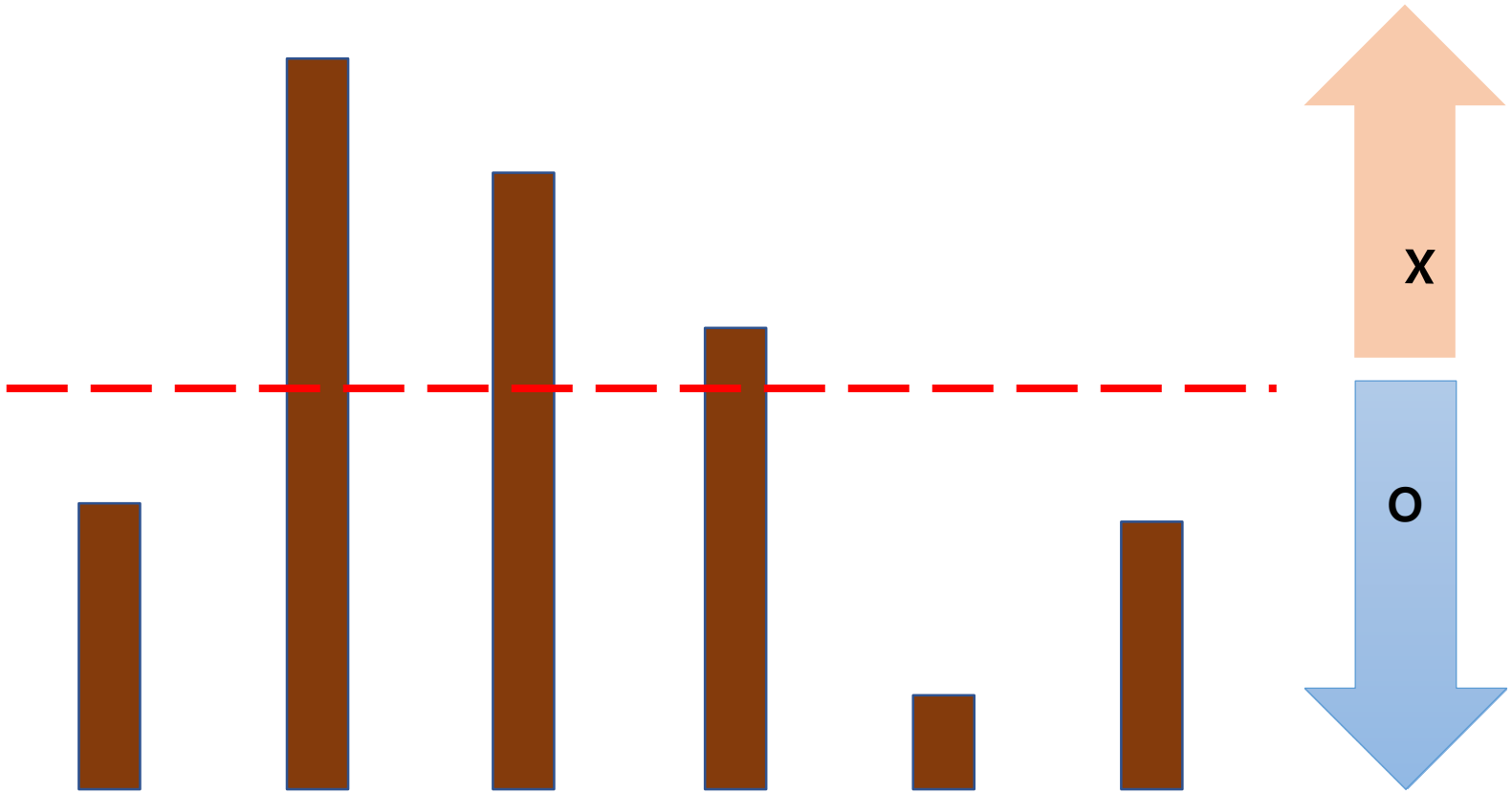
첫째 줄에 나무의 수 N과 상근이가 집으로 가져가려고 하는 나무의 길이 M이 주어진다. ($1 \le N \le 1,000,000$, $1 \le M \le 2,000,000,000$)

둘째 줄에는 나무의 높이가 주어진다. 나무의 높이의 합은 항상 M을 넘기 때문에, 상근이는 집에 필요한 나무를 항상 가져갈 수 있다. 높이는 1,000,000,000보다 작거나 같은 양의 정수 또는 0이다.

● 나무 자르기(11)



● 나무 자르기(11)



문제 해설

- Parametric Search를 이용한 풀이

- 높이의 최댓값을 찾는 최적화 문제
- “높이 x에서 자르면 나무의 양이 충분한가?” 의 결정 문제로 바꾸자

- 답은 무조건 [0, 10억] 범위 내에 존재한다.

- 답이 [l,r] 범위에 존재할 때, 높이 (l+r)/2에서 자르면 충분한지 검사하여 구간을 절반으로 줄일 수 있다

핵심 코드

```java
int l=0, r=1000000000;
while(l < r){
    int m = (l+r+1) / 2;

    long sum=0;
    for(int i=0; i<N; i++) sum += h[i] > m ? h[i] - m : 0;

    if(sum >= M) l = m;
    else r = m-1;
}

System.out.print(l);
```

```python
N, M = map(int, input().split())
arr = list(map(int, input().split()))

l = 0
r = 1000000000
while l < r:
    m = (l+r+1)//2

    sum = 0
    for h in arr:
        if h > m: sum += h-m

    if sum >= M: l = m
    else: r = m-1

print(l)
```

● 공유기 설치 (4342)

문제

집 N개가 수직선 위에 있다. 각각의 집의 좌표는 $x_1, \cdots, x_N$이고, 집의 좌표는 모두 다르다.

윌리는 집에 공유기 C개를 설치하려고 한다. 최대한 많은 곳에서 와이파이를 사용하려고 하기 때문에, 한 집에는 공유기를 하나만 설치할 수 있고, 가장 인접한 두 공유기 사이의 거리를 가능한 크게 하여 설치하려고 한다.

C개의 공유기를 N개의 집에 설치할 때, 가장 인접한 두 공유기 사이의 거리의 최댓값을 구해보자.

입력

첫째 줄에 집의 개수 $N(2 \le N \le 200,000)$과 공유기의 개수 $C(2 \le C \le N)$이 하나 이상의 빈 칸을 사이에 두고 주어진다.
둘째 줄에 N개의 집의 좌표를 나타내는 $x_i(0 \le x_i \le 1,000,000,000)$가 주어진다.

문제 해설

▶ Parametric Search

▶ 공유기 C개를 설치할 때, 가장 인접한 두 공유기 사이의 거리의 최댓값

▶ 최소 거리 x로 공유기들을 설치할 때 공유기 C개를 모두 설치할 수 있는가?

→ 최소 거리를 x로 유지한 채 공유기 설치 시, 공유기 개수가 C개 이상이면 가능

▶ 이분탐색 가능

문제 해설

- 최소 거리 x로 공유기들을 설치할 때 공유기 C개를 모두 설치할 수 있는가?
- 작은 좌표에서부터 보면서 이전 공유기로부터 x이상 떨어졌으면 설치한다.

핵심 코드

```java
int l=1, m, r=1000000000;
while(l < r){
    m = (l+r+1) / 2;

    int cnt=1, j=0;
    for(int i=0; i<N; i++){
        if(x.get(i) - x.get(j) >= m){
            cnt++;
            j = i;
        }
    }

    if(cnt < C) r = m-1;
    else l = m;
}
```

```python
l = 0
r = 1000000000
while l < r:
    m = (l+r+1) // 2

    cnt=1
    prev_x = x[0]
    for curr_x in x:
        if curr_x - prev_x >= m:
            prev_x = curr_x
            cnt += 1

    if cnt >= C: l = m
    else: r = m-1

print(l)
```

● 동전 금고(4703)

문제

윌리는 용돈이 부족해져서 삼촌을 찾아갔다. 윌리의 삼촌은 동전의 산으로 가득 찬 큰 금고를 가지고 있는데, 그 중 몇몇 동전은 매우 특별한 가치가 있는 동전이다.

하지만 최근 삼촌은 금고에 있던 코인을 옮기는 중, 우연히 아끼던 특별한 동전이 금고로 옮겨져 극도의 스트레스를 받고 있다. 다행히 그 코인을 찾았지만, 아쉽게도 금고 입구와 완전히 반대이고 금고 안에 동전이 산더미처럼 쌓여 있기 때문에 실제로 동전에 닿는 것은 쉬운 일이 아니다.

삼촌은 윌리가 동전의 산에서 특별한 동전을 회수해 을 수 있다면, 용돈을 줄 생각이 있다. 윌리는 동전을 회수하기 위한 장비로 사다리를 가져오기로 결정했지만 사다리의 길이를 얼마짜리로 준비해야 할 지 정하지 못했다. 더 긴 사다리는 더 높은 동전 절벽을 오를 수 있다는 것을 의미하지만 더 많은 비용이 든다. 따라서 윌리는 특별한 동전에 도달할 수 있는 가장 짧은 사다리를 사고 싶어한다.

금고는 왼쪽 위 모서리에 입구가 있고 특별한 동전은 오른쪽 아래 모서리에 있는 다양한 높이의 동전 더미의 직사각형 그리드로 표시될 수 있다. 윌리는 현재 서 있는 동전 더미에서 상하좌우로 인접한 동전 더미로 이동할 수 있다. 윌리는 점프하거나 날 수 없기 때문에 성공적으로 높이 x가 높은 동전더미로 이동하려면 길이 x의 사다리가 필요하다. 하지만 내려가는 것은 높이 제한 없이 중력에 모든 것을 맡길 수 있다.

윌리가 사야 할 사다리의 최단 길이를 출력해보자.

문제 해설

- Parametric Search

- 사야 할 사다리의 최단 길이

- 사다리 길이 x로 (1,1)에서 (M,N)까지 이동 가능한가?

- 이분탐색 가능

문제 해설

- BFS
- 사다리 길이 x로 (1,1)에서 (M,N)을 방문할 수 있는지는 BFS로 탐색 가능

핵심 코드

```
int l=0, m, r=1000000000;
while(l < r){
    m = (l+r)/2;

    bfs(m);
    if(chk[M-1][N-1]) r = m;
    else l = m+1;
}

System.out.print(l);
```

```
while(!que.isEmpty()){
    int x = que.remove();
    int y = que.remove();

    for(int i=0; i<4; i++){
        int x_ = x+dx[i];
        int y_ = y+dy[i];

        if(x_ < 0 || x_ >= M || y_ < 0 || y_ >= N) continue;
        if(arr[x_][y_] - arr[x][y] > d) continue;
        if(chk[x_][y_]) continue;

        chk[x_][y_] = true;
        que.add(x_);
        que.add(y_);
    }
}
```