应用离散数学

杭州电子科技大学

定义1.17

设$p_1, \cdots, p_n, q$都是命题公式，如果对于任何赋值，当$p_1, \cdots, p_n$取值都为1时，q取值也必定为1，则称q是前提$p_1, \cdots, p_n$的**逻辑结论**，记为

$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$，或 $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$。

注意：

- 要证明$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$，只需说明当$p_1, \cdots, p_n$都为真时，$q$也必定为真；
- 当$p_1, \cdots, p_n$不全为真时，q可以真也可以假。

例23 (用真值表证明$p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r$)

证明:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

所以$(p \to q), (q \to r) \Rightarrow p \to r$。

例 (判断下列推论是否正确)

- $\neg p, p \vee q \Rightarrow p \wedge q$
- $\neg q \wedge r, r \wedge p, q \Rightarrow p \vee \neg q$
- $\neg(p \wedge \neg q), \neg q \vee r, \neg q \Rightarrow \neg p$
- $\neg p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow p \Rightarrow p \vee q \vee r$
- $p \rightarrow q, r \wedge s, \neg q \Rightarrow p \wedge s$

定理1.15

$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$的充要条件是$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$永真

例1.19 (证明下列推理)

- $p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

定理1.15

$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$的充要条件是$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$永真

例（证明下列推理）

- $\neg p \Rightarrow p \to q$

$$\neg p \to (p \to q)$$
$$= p \vee (\neg p \vee q)$$
$$= 1$$

定理1.15

$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$的充要条件是$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow q$永真

例（证明下列推理）

- $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p$

$$\begin{aligned}
&\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p \\
=&(p \rightarrow q) \vee p \\
=&\neg p \vee q \vee p \\
=&1
\end{aligned}$$

例1.20 (证明$(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow A \vee C \to B \vee D$)

$$
\begin{aligned}
& [(A \to B) \wedge (C \to D)] \to [(A \vee C) \to (B \vee D)] \\
= & \neg[(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee D)] \vee [\neg(A \vee C) \vee (B \vee D)] \\
= & (A \wedge \neg B) \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \vee D) \\
= & [(A \wedge \neg B) \vee B] \vee [(C \wedge \neg D) \vee D] \vee (\neg A \wedge \neg C) \\
= & (A \vee B) \vee (C \vee D) \vee (\neg A \wedge \neg C) \\
= & (A \vee B \vee C \vee D \vee \neg A) \wedge (A \vee B \vee C \vee D \vee \neg C) \\
= & 1
\end{aligned}
$$

定理1.17 (基本推理公式)

- (1) $A \Rightarrow A \vee B$
- (2) $A \wedge B \Rightarrow A$
- (3) $A, B \rightarrow A \wedge B$
- (4) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$
- (5) $B \Rightarrow A \rightarrow B$
- (6) $\neg A \Rightarrow A \rightarrow B$

定理1.17 (基本推理公式)

- (7) $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$
- (8) $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- (9) $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$
- (10) $(A \leftrightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
- (11) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$

定义 (演绎推理)

设S是命题公式集合，B是命题公式，如果存在有限个命题公式序列$B_i, 1 \leq i \leq n$，使得

- 序列中的每个B_i要么属于S，要么是有限公式序列中前面一些公式的逻辑结论；
- 序列中的最后一个公式$B_n = B$

则显然B是前提S的有效结论，称由S**演绎推理**出B。

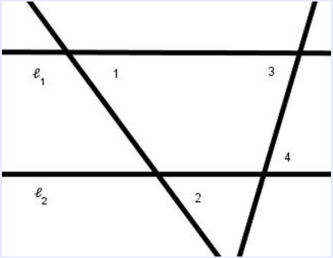
定理(基本推理规则)

P规则(前提引入规则) 在任何步骤中都可以引入前提作为公式序列中的公式;

E规则(置换规则) 在任何步骤中都可以用与公式序列中的命题公式等价的命题公式作为序列中的新公式;

T规则(结论引入规则) 在任何步骤中都可以将已有公式的逻辑结论作为序列中的新公式。

已知$\angle 1 = \angle 2$，求证$\angle 3 = \angle 4$。



证明.

- $\because\ \angle 1 = \angle 2$(P规则)
- $\therefore\ \ell_1 \parallel \ell_2$(T规则)
- $\therefore\ \angle 3 = \angle 4$(T规则)

$\square$

例1.21 (用演绎法证明推理公式)

$\neg p \vee q, r \vee \neg q, r \rightarrow s \Rightarrow p \rightarrow s$

解:

$1.\neg p \vee q$	P
$2.p \rightarrow q$	$E(1)$
$3.r \vee \neg q$	P
$4.q \rightarrow r$	$E(3)$
$5.p \rightarrow r$	$T(2)(4)$
$6.r \rightarrow s$	P
$7.p \rightarrow s$	$T(5)(6)$

所以$\neg p \vee q, r \vee \neg q, r \rightarrow s \Rightarrow p \rightarrow s$。

例1.22 (用演绎法证明推理公式)

$$p \to (q \vee r), \neg s \to \neg q, p \wedge \neg s \Rightarrow r$$

解:

$1. p \wedge \neg s$	P
$2. p$	$T_{(1)}$
$3. \neg s$	$T_{(1)}$
$4. p \to (q \vee r)$	P
$5. q \vee r$	$T_{(2),(4)}$
$6. \neg s \to \neg q$	P
$7. \neg q$	$T_{(3),(6)}$
$8. r$	$T_{(5),(7)}$

所以推理成立。

练习 (用演绎法证明推理公式)

- $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \Rightarrow r \vee s$

解:

$1. p$	P
$2. p \rightarrow (q \rightarrow r)$	P
$3. q \rightarrow r$	$T_{(1),(2)}$
$4. q$	P
$5. r$	$T_{(3),(4)}$
$6. r \vee s$	$T_{(5)}$

所以推理成立。

- $p \rightarrow q, \neg(q \wedge r), r \Rightarrow \neg p$

解:

$1. \neg(q \wedge r)$	P
$2. \neg q \vee \neg r$	$E_{(1)}$
$3. r$	P
$4. \neg q$	$T_{(2),(3)}$
$5. p \rightarrow q$	P
$6. \neg p$	$T_{(4),(5)}$

所以推理成立。

例1.23

用演绎推理法证明以下推理:

- 如果马会飞或羊吃草，则母鸡是飞鸟。如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子还会跑。烤熟的鸭子不会跑。
- 所以羊不吃草。

定理1.16

设$p_1, \cdots, p_n, q$是命题公式，则$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q$的充要条件是$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n \wedge \neg q$是永假式。

例1.24 (用演绎法证明推理公式)——附加前提（反证法）

- $\neg(r \vee s) \to \neg(p \vee q), p, (s \to r) \vee \neg p \Rightarrow r$

定理1.18

设$p_1, \cdots, p_n, q, r$都是命题公式，则$p_1, \cdots, p_n \Rightarrow q \to r$的充要条件是$p_1, \cdots, p_n, q \Rightarrow r$。

例1.25 (用演绎法证明推理公式)——附加前提（CP规则）

- $p, p \to (q \to (r \wedge s)) \Rightarrow q \to s$
- $\neg p \vee q, \neg q \vee r, r \to s \Rightarrow p \to s$

练习（用演绎法证明推理公式）

- $p \to q \Rightarrow p \to (p \land q)$
- $p \to \neg q, \neg r \lor q, r \land \neg s \Rightarrow \neg p$
- $p \to (q \to r), q \to (r \to s) \Rightarrow p \to (q \to s)$

作业：习题1.5：1、4、5偶数小题，9，第4题用等价演算法