

定义1.15-2 (最大项)

如果在命题变元 p_1, \dots, p_n 组成的初等和中,

- 每个变元或其否定出现且仅出现一个;
- 各个变元按照其字母或下标次序排列;

则称该初等和为 p_1, \dots, p_n 的**最大项**。

例 (设 A 是包含变元 p, q 的命题公式, 判断其是否是最大项?)

- $A = p \wedge \neg q, A = \neg p \vee p \wedge q, A = \neg q \vee p$ 不是
 - $A = p \vee q, A = \neg p \vee \neg q$ 是
- n 个命题变元可以构成 2^n 个最大项。

例 (列出命题变元 p, q 形成的所有最大项)

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee q$	$p \vee \neg q$	$p \vee q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1

定理1.9 (最大项的性质)

- 1 每个最大项只有一个成真赋值
- 2 最大项的编码: 唯一的成真赋值作为编码
 $\neg p \vee \neg q: M_{11}; \neg p \vee q: M_{10};$
 $p \vee \neg q: M_{01}; p \vee q: M_{00};$ 变元: 0; 变元的否定: 1
- 3 $\forall i \neq j, M_i \vee M_j = 1$ 不同最大项的析取永真;
- 4 $M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{10} \wedge M_{11} = 0$ 所有最大项的合取永假;
- 5 $\neg m_{00} = \neg(\neg p \wedge \neg q) = p \vee q = M_{00}$
 $\neg m_{10} = \neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q = M_{10}$
 $M_i = \neg m_i$

定义1.16 (标准合取范式)

在合取范式中, 如果

- 每个初等和都是最大项;
- 最大项按下标递增排列

则称该合取范式为**标准合取范式**。

标准合取范式的求法:

- 1 将命题公式化为合取范式;
- 2 消去重复出现的命题变元、最大项以及永真式;
- 3 用单位律和否定律补足未出现的命题变元:

$$p = p \vee 0 = p \vee (q \wedge \neg q) = (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

- 4、最大项按下标递增排列

例 (求下列命题公式的标准合取范式:)

$$\begin{aligned} & \text{1 } (p \rightarrow q) \rightarrow r \quad (\text{例1.14}) \\ & = M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{2 } p \wedge (q \rightarrow r) \\ & = M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{010} \wedge \\ & \quad M_{011} \wedge M_{110} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p \wedge (q \rightarrow r) = p \wedge (\neg q \vee r) \\ & = [p \vee (q \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg r)] \\ & \quad \wedge [(\neg q \vee r) \vee (p \wedge \neg p)] \\ & = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \\ & \quad \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \\ & \quad \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \end{aligned}$$

定理1.13 (命题公式 A 中出现的所有最大项的编码实际上就是 A 所有的成假赋值。)

- 永假式的标准合取范式包含所有的最大项；
- 永真式的标准合取范式不包含任何最大项，即其标准合取范式为1
- 可满足式的标准合取范式不包含所有的最大项；

标准析取范式与标准合取范式的关系

注意到:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \rightarrow r &= m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111} \\ &= M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110}\end{aligned}$$

由标准析取(合取)范式求标准合取(析取)范式的方法:

- 1 求出标准析取(合取)范式中没有包含的最小项(最大项);
- 2 求出与(1)中的最小项(最大项)下标相同的最大项(最小项);
- 3 将(2)中所得的最大项(最小项)按顺序构成合取式(析取式)就是标准合取范式(标准析取范式)。

用真值表求 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 的标准析取(合取)范式

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

其标准析取范式为 $m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111}$

其标准合取范式为 $M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110}$

练习

分别用等价演算法和真值表法求 $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$ 的标准析取范式和标准合取范式。

作业：习题1.4 第6, 7, 10, 11题