

应用离散数学

杭州电子科技大学

谓词逻辑

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

定义11 (等价)

设 A, B 是两个谓词公式, 如果在任何解释下, A, B 具有相同的真值, 则称 A, B **等价**, 记为 $A = B$ 。

定理4

设 A, B 是两个谓词公式, 则 $A = B$ 的充要条件是 $A \leftrightarrow B$ 永真。

定理5 (量词否定律)

$$(1) \neg \forall x A(x) = \exists x \neg A(x), \quad (2) \neg \exists x A(x) = \forall x \neg A(x)$$

定理6 (量词辖域的收缩与扩展)

设 A, B 是谓词公式, B 不包含个体变元 x , 则

$$1 \quad \forall x(A(x) \wedge B) = \forall xA(x) \wedge B$$

$$2 \quad \forall x(A(x) \vee B) = \forall xA(x) \vee B$$

$$3 \quad \exists x(A(x) \wedge B) = \exists xA(x) \wedge B$$

$$4 \quad \exists x(A(x) \vee B) = \exists xA(x) \vee B$$

定理7 (量词分配律)

$$1 \quad \forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$$

$$2 \quad \exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$$

问题2

$$\blacksquare \quad \forall x(A(x) \vee B(x)) \neq \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$\blacksquare \quad \exists x(A(x) \wedge B(x)) \neq \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$$

定理8 (量词交换律)

$$\blacksquare \forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y), \exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y)$$

例13 (证明下列等价关系)

设 $A(x), B(x)$ 是谓词公式, C 是不含个体变元 x 的谓词公式, 证明

$$1 \quad \forall x(A(x) \rightarrow C) = \exists x A(x) \rightarrow C$$

$$2 \quad \exists x(A(x) \rightarrow C) = \forall x A(x) \rightarrow C$$

$$3 \quad \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) = \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

作业: 习题2.3: 3