应用离散数学

杭州电子科技大学

命题逻辑

定义1（命题）

- 能区分真假的陈述句被称为命题.
- 如果一个命题所表述的内容与客观实际相符，则称该命题为真命题；否则称其为假命题。
- 命题的真假属性被称为是命题的真值，分别用 $T/F(1/0)$表示。

- 中华人民共和国国庆节是十月一日。
- 该命题为真命题。
- 该命题的真值为“T”/“1”。

例1 (判断下面的语句是否是命题)

1.	6是质数	是
2.	2020年国庆节是晴天	是
3.	现在白天	是
4.	地球外存在智慧生物	是
5.	$12 > 8$	是
6.	$x > y$	不是
7.	请不要吸烟!	不是
8.	我正在说假话	不是

定义2 (简单命题与复合命题)

1. 不能再分解为更简单陈述句的命题被称为**简单命题**
2. 由简单命题和自然语言中连接词构成的命题被称为是**复合命题**

1.	6是偶数	简单命题
2.	6是偶数且是3的倍数	复合命题

定义3（非）

- 设p是一个命题，用$\neg p$表示复合命题：当p是真时它为假，当p是假时它为真。称$\neg$为**否定词**，或**逻辑非**。

p	$\neg p$
0	1
1	0

表: $\neg p$的真值

定义4（合取）

- 设p, q是命题，用$p \wedge q$表示复合命题：当p, q均为真时它为真，否则它是假。称$\wedge$为合取，或逻辑乘。

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表: $p \wedge q$的真值

1. $p \wedge q$对应于自然语言中的"p与q"、"不但p，而且q"、"既p且q"等；
2. 只要p, q中有一个为假，则$p \wedge q$必为假；
3. 当且仅当p, q都为真时，$p \wedge q$才为真；

定义5 (析取)

- 设p, q是命题，用$p \vee q$表示复合命题：当p和q都是假时它为假，否则为真。称$\vee$为析取，或逻辑加。

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表: $p \vee q$的真值

1. $p \vee q$对应与自然语言中的“或”；
2. 只要p, q中有一个为真，则$p \vee q$必定为真；
3. 当且仅当p, q都为假，$p \vee q$才为假

注1 (同或与异或)

将下列语言符号化:

1. 小王本学期要学语文或数学; 同或

   p: 小王本学期学语文;

   q: 小王本学期学数学;

   则$p \vee q$。

2. 小王本学期二年级或者是三年级; 异或

   p: 小王本学期二年级;

   q: 小王本学期三年级;

   则 $p \wedge \neg q$或者$\neg p \wedge q$, 即$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。

例2

已知$i=1, j=0, k=0$，判定经过以下操作后k的值:

1. $if\ i\&\&j\ \ then\ k++;$
2. $if\ j\&\&i\ \ then\ k++;$
3. $if\ i||j\ \ then\ k++;$
4. $if\ j||i\ \ then\ k++;$

定义6 (蕴涵)

- 设p, q是命题，用$p \to q$表示复合命题：当p是真而q是假时它为假，否则它为真，即

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表: $p \to q$的真值

1. $p \to q$对应于自然语言中的“如果p，则q”、“因为p，所以q”等。
2. p被称为前件，q是后件，$\to$是蕴涵词。
3. 只要p为假，则无论q是真或假，蕴涵式$p \to q$必定为真。
4. 蕴涵式的前、后件并不一定在语意上有必然联系。

名人轶事：罗素与教皇

罗素告诉一位哲学家假命题蕴涵任何命题。那位哲学家颇为震惊，他说："尊意莫非由2加2等于5能推出您是教皇？"罗素答曰："正是"。哲学家问："您能证明这一点么？"罗索答："当然能。"他立即发明了下面这个证明：

1. $2+2=5$
2. $1=2$
3. 教皇和罗素是两个人，所以罗素就是教皇。

例3 (判断下面各蕴涵式是真是假)

1.	若$1+1=2$，则$2+2=4$。	T
2.	若$1+1=2$，则$2+2=5$。	F
3.	若$1+1=3$，则$2+2=4$。	T
4.	若$1+1=3$，则$2+2=5$。	T
5.	若猪会飞，则$2+2=4$。	T
6.	若$1+1=3$，则猪会飞。	T
7.	若$1+1=2$，则猪会飞。	F

例4 (将以下复合命题符号化)

p:离散数学及格; q:你能够毕业

1. 只有你离散数学及格，你才能毕业。
   如果你能够毕业，你的离散数学必定是及格了. $q \to p$
   如果你离散数学不及格，那你就不能毕业。$\neg p \to \neg q$
2. 只要你能够毕业，那么你的离散数学必定就及格了。$q \to p$.
3. 除非你离散数学及格，否则你不能毕业。$q \to p$

$$\left.\begin{array}{r}\text{只要}q\text{, 就}p \\ \text{只有}p\text{, 才}q \\ \text{除非}p\text{, 否则}q\text{不成立}\end{array}\right\} q \to p$$

定义7（等值）

- 设p, q是命题，用$p \leftrightarrow q$表示复合命题：当p, q同时为真或同时为假时它为真，否则为假。

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表: $p \leftrightarrow q$的真值

1. $\leftrightarrow$是等值词。
2. $p \leftrightarrow q$的逻辑关系是p, q互为充分必要条件。
3. 以上5个逻辑连接词的运算先后次序为

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

例5（将下面复合命题符号化）

1. 除非你已满16周岁，否则只要你身高不足4英尺就不能乘坐公园滑行铁道。

   解：p:你已满16周岁；q:身高不足4英尺；r；你能够乘滑行铁道

   - 如果你不满16周岁且身高不足4英尺，你就不能乘滑行铁道。

   $$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$$

   - 如果你能够乘滑行铁道，那么你已满16周岁或者身高达到4英尺。

   $$r \rightarrow (p \vee \neg q)$$

2 只有你主修计算机或者不是新生，你才能从校园网访问因特网。

解：p：你主修计算机；q你是新生；r：你可以从校园网访问因特网。

- 如果你能够从校园网访问因特网，那么就主修计算机或不是新生。

$$r \to (p \vee \neg q)$$

- 如果你不主修计算机又是新生，那么就不能从校园网访问因特网。

$$(\neg p \wedge q) \to \neg r$$

3 不管你或他努力与否，比赛定会获胜。

解：p：你努力；q：他努力；r：比赛获胜。

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow r$

4 学过“离散数学”或“数据结构”，但不是两者都学过的同学，必须再学习“计算机算法”。

解：p：学过离散数学；q：学过数据结构；r：学习计算机算法。

$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \rightarrow r$

作业：习题1.1 第1, 2, 3, 4题