

应用离散数学

杭州电子科技大学

谓词逻辑

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

分别记以上三句话为 p, q, r ,

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

问题1 (苏格拉底三段论)

- 所有的^人都是要死的;
- ^{苏格拉底}是^人;
- ^{苏格拉底}是要死的。

分别记以上三句话为 p, q, r ,

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

应该为永真式?

定义1 (个体词)

- 在简单命题中, 描述对象的词称为 **个体词**;
- 特定的个体词称为 **个体常元**, 用小写字母 $a, b, \dots, a_1, a_2, \dots$ 表示;
- 不确定的个体词称为 **个体变元**, 用小写字母 $x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$ 表示;

例1 (分析下列语句中的个体词)

- 1 苏格拉底是人; “苏格拉底”是个体词; a : 苏格拉底
- 2 3是奇数; “3”是个体词; $b:3$

定义2 (谓词)

- 在简单命题中, 表示对象所具有的性质或多个对象之间关系的词称为**谓词**。通常用大写字母 P, Q, \dots 表示。
- 谓词实际上是 $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow \{0, 1\}$ 上的函数;
- 个体变元遍历的非空集合 D_i 被称为**个体域**;
- 全体事物构成的集合被称为**全总个体域**;

例2 (分析下列语句中的个体词与谓词)

- 1 苏格拉底是人; 谓词 $P(x)$: x 是人; $P(a)$
- 2 3是奇数; 谓词 $Q(x)$: x 是奇数; $Q(b)$

注1 (谓词与命题)

- $n, n > 0$ 元谓词不是命题;
- 只有当 n 元谓词中所有个体变元在个体域中取定个体常元后才是命题;
- 0 元谓词就是命题;

例2.2 (用0元谓词符号化下列命题)

- 1 只有2是质数, 4才是质数;
- 2 如果地球重于月亮, 则太阳重于地球;
- 3 小王热爱自己的母亲;

定义3 (全称量词)

设 D 是个体域,“对于 D 中的任意个体 x ”称为 D 上的**全称量词**,记为 $\forall x$;

注2 (全称量词的真值)

设 $P(x)$ 是以 D 为个体域的一元谓词,

$\forall x P(x) : = 1$: 对任意的 $x \in D$, $P(x)$ 取值1

$\forall x P(x) : = 0$: 存在 $x \in D$, $P(x)$ 取值0

注3 (有限个体域中全称量词的真值)

设 $D = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是有限个体域, 则

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

例4 (求下式的真值)

$\forall x(P(x) \vee Q(x))$, 其中 $D = \{1, 2\}$, 谓词 $P(x) : x = 1$,
 $Q(x) : x = 2$;

定义4 (存在量词)

设 D 是个体域,“在 D 中存在个体 x ”称为 D 上的**存在量词**,记为 $\exists x$;

注4 (存在量词的真值)

设 $P(x)$ 是以 D 为个体域的一元谓词,

$\exists x P(x) : = 1$: 存在 $x \in D$, $P(x)$ 取值1

$\exists x P(x) : = 0$: 对任意的 $x \in D$, $P(x)$ 取值0

注5 (有限个体域中存在量词的真值)

设 $D = \{a_1, \dots, a_n\}$ 是有限个体域, 则

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

例5 (求下式的真值)

- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1$, 其中 $D = \{0, 3\}$, 谓词 $P(x) : x > 2$, $Q(x) : x = 0$;
- $\exists x \forall y P(x, y)$, 其中 $D = \{1, 2, 3\}$, 谓词 $P(x, y) : x = y$;

例2.3 (设个体域 D_1 : 全体人类, D_2 : 全总个体域, 分别在 D_1, D_2 下将下列命题符号化。)

1. 凡人都呼吸;
2. 有的人用左手写字;

例2.4 (将下列命题符号化)

- 1 所有的人都长黑头发;
- 2 有的人登上过月球;
- 3 没有人登上过火星;
- 4 在美国留学的学生未必都是华人;

例2.5 (将下列命题符号化)

- 1 兔子比乌龟跑得快;
- 2 有的兔子比所有乌龟跑得快;
- 3 并不是所有兔子都比乌龟跑得快;
- 4 不存在跑得同样快的两只兔子;

作业：习题2.1：1、2、4，注意第4题有两问