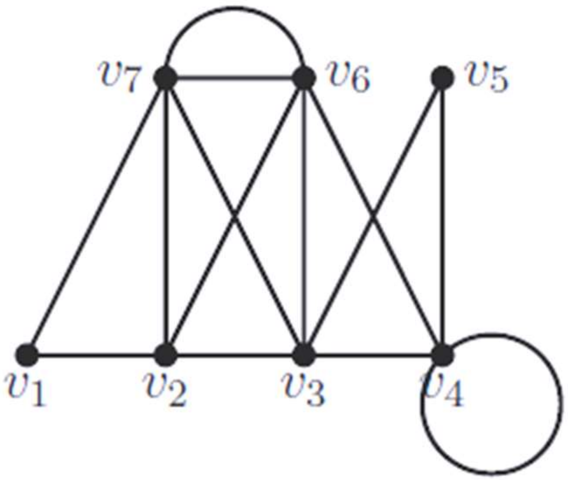
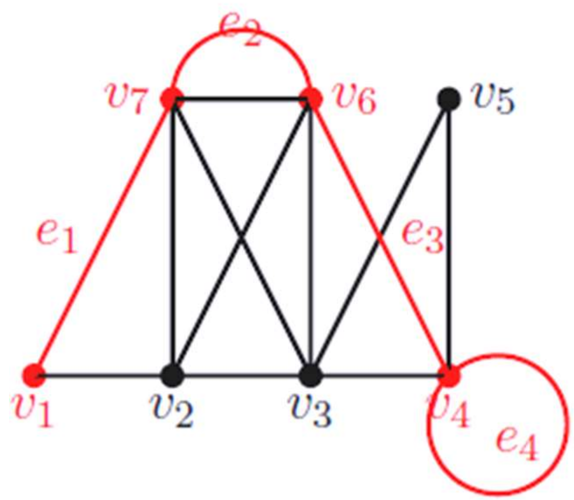
图

- 基本概念
- 图的连通性
- 树
- 图的矩阵表示
- 欧拉图与哈密顿图

图的连通性

- **定义5.4** $G = \langle V, E\rangle$是一个图，G的一个点边交替序列$(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n\text{-}1}, e_n, v_n)$称为G的通路，其中$e_i = (v_{i\text{-}1}, v_i)$。
- 通路中边的条数称为通路的长度。
- 特别地，若$v_0 = v_n$，则该通路称为回路。

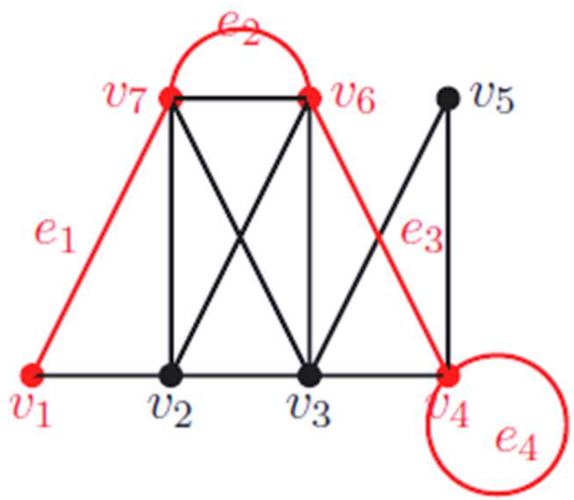


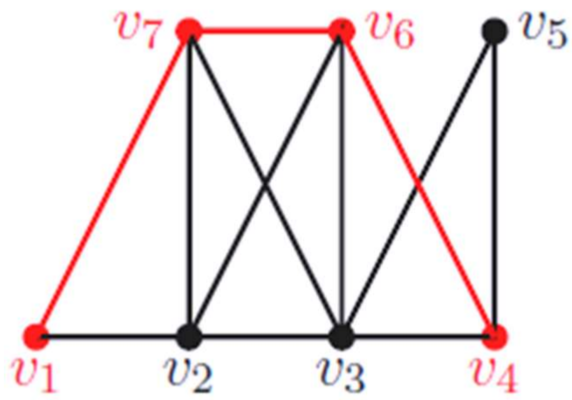


$(v_1, e_1, v_7, e_2, v_6, e_3, v_4, e_4, v_4)$

图的连通性

- 可用点边交替序列或边序列表示通路
- 在简单图中，也可用顶点序列表示通路。





$(v_1, e_1, v_7, e_2, v_6, e_3, v_4, e_4, v_4)$

(e_1, e_2, e_3, e_4)

(v_1, v_7, v_6, v_4)

图的连通性

- 简单通路(回路)：通路(回路)上的边各不相同
- 基本通路：通路上顶点各不相同
- 基本回路：回路$(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$上顶点$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$各不相同，也称为圈

- 基本通路一定是简单通路，反之不一定。

图的连通性

- **定理5.2** 如果非零图G中无奇点，则G中必有基本回路。

- **定理5.3** 在p阶图G中，
  - 若两个不同顶点v和w间有通路相连，则v和w之间存在长度小于或等于$p-1$的基本通路。
  - 若存在通过顶点v的简单回路，则一定存在通过v的长度小于或等于p的基本回路。

最短通路与距离

- 设图G=(V, E)，$u, v \in V$，两个顶点u, v间的通路长度最短的一条称为最短通路，其长度称为u, v间的距离，记为$d(u,v)$ 。如果u, v间无通路相连，则$d(u,v)=\infty$。

- 距离需满足3条性质：

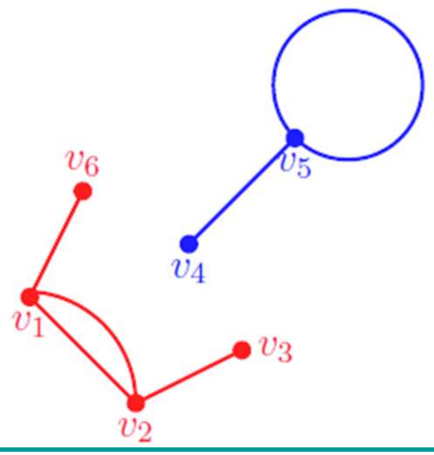
➢ 非负性：$d(u,v) \geq 0$ 当且仅当$u = v$时等号成立

➢ 对称性：$d(u, v) = d(v, u)$

➢ 三角不等式：$d(u,v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

连通图

- 定义 5.7 G = <V, E>是一个图，若$u, v \in V$，u和 v之间存在通路，则称u, v连通，记作$u \sim v$。
- 规定u总是与自己连通，即$u \sim u$。
- 连通图：图中任意两个顶点u, v之间都连通
- 连通分图：非连通图G中的极大连通子图称为G的连通分图。



连通图

- 对于一般的图，去掉其平行边和环不影响图的连通性，所以本小节的定理都针对简单图。

- 点u和v连通的充要条件是：u和v在同一个连通分图中。

- 例：若一个图中恰有两个奇点，则这两个奇点之间连通

连通图

- **定理5.4** 在p阶简单图中，若对G的每对顶点u和v，都有$d(u)+d(v) \geq p-1$，则G是连通图。

- **推论** 在p阶简单图中，若$\delta(G) \geq (p-1)/2$，则G是连通图。

图中去掉点与边

- 定义**5.8** 设图$G=<V,E>$，顶点子集$V_1\subseteq V$，边子集$E_1\subseteq E$
  - $G-V_1$：从G中去掉V_1中所有顶点及与之相关联的所有边所得的图，当$V_1=\{v\}$时，直接记做$G-v$。（导出子图）
  - $G-E_1$：从G中去掉E_1中所有边，其他不变所得到的图。当$E_1=\{e\}$时，直接记作$G-e$。（生成子图）

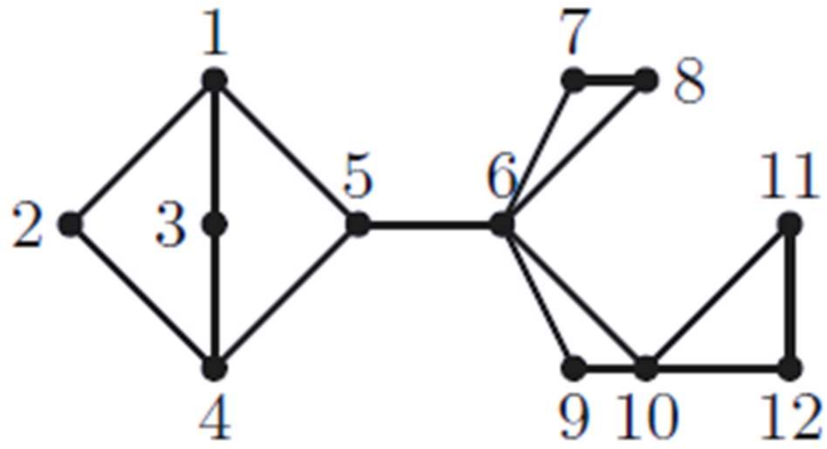
点割集与割点

- 点割集：设图$G = <V, E>$，$V_1 \subseteq V$。若$G-V_1$的连通分图数大于G的连通分图数，且对于V_1的任意真子集V_2，$G-V_2$的连通分图数不大于G的连通分图数，称V_1是G的点割集。（去掉点割集“正好”使图的连通性发生变化）

- 割点：当$V_1 = \{v\}$时，称v是G的割点

点割集与割点

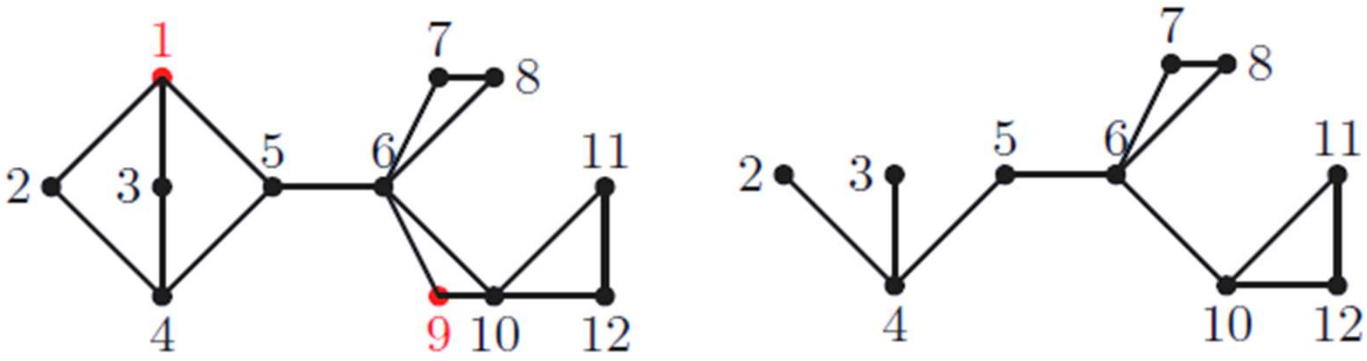
- 在下面的图中，分别考虑下列点集是否为点割集。
  - $V_1=\{1, 9\}$
  - $V_2=\{4, 5\}$
  - $V_3=\{1, 3, 4\}$
  - $V_4=\{1, 4\}$
  - $V_5=\{5\}$



点割集与割点

- 在下面的图中，分别考虑点集是否为点割集。
  - $V_1=\{1, 9\}$

不是

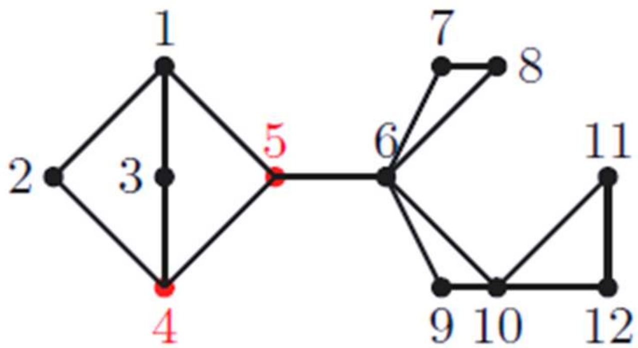


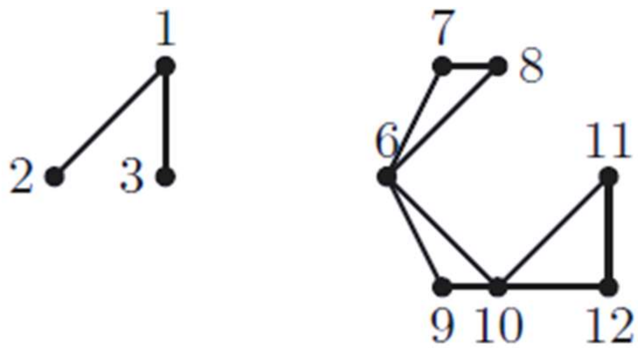
点割集与割点

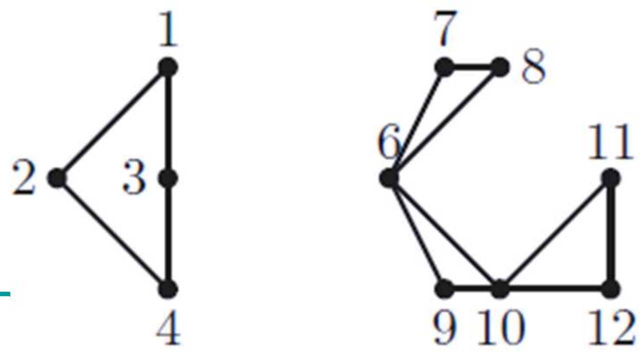
- 在下面的图中，分别考虑点集是否为点割集。

➢ $V_2=\{4, 5\}$

不是



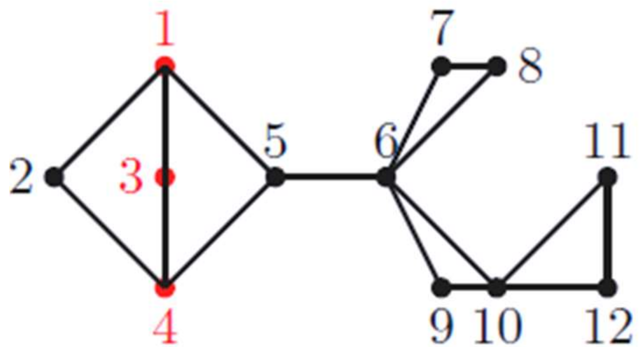


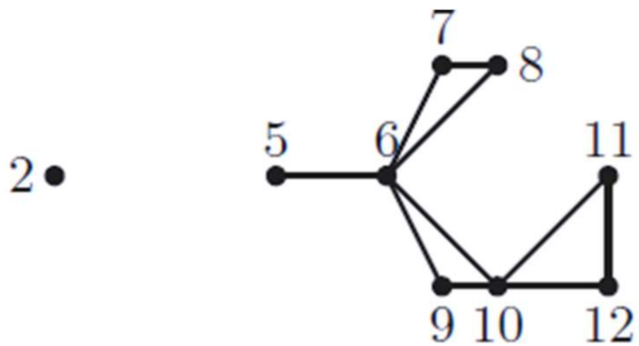


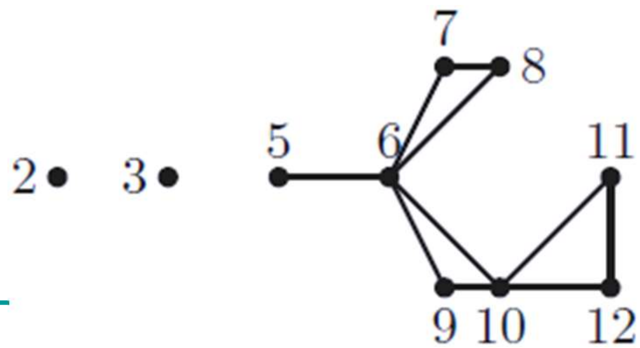
点割集与割点

- 在下面的图中，分别考虑点集是否为点割集。
- $V_3=\{1, 3, 4\}$

  不是



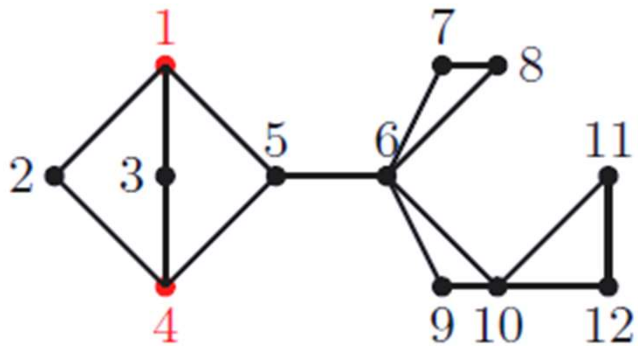


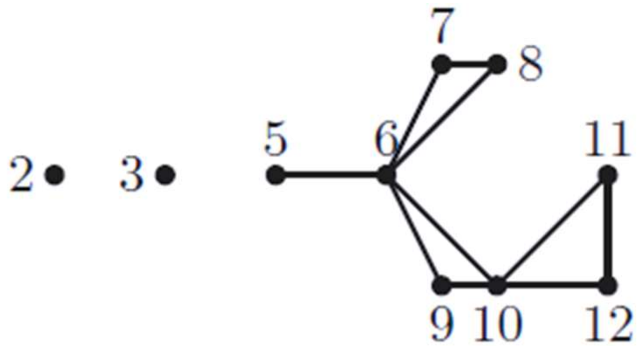


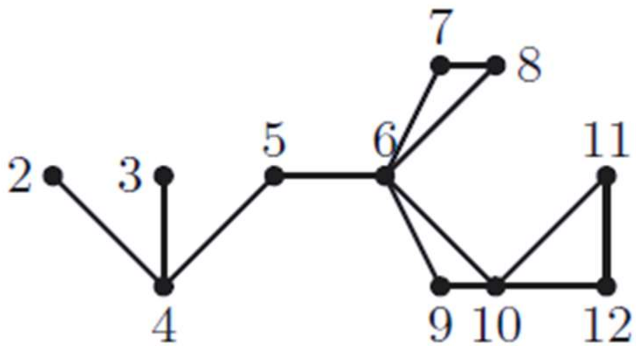
点割集与割点

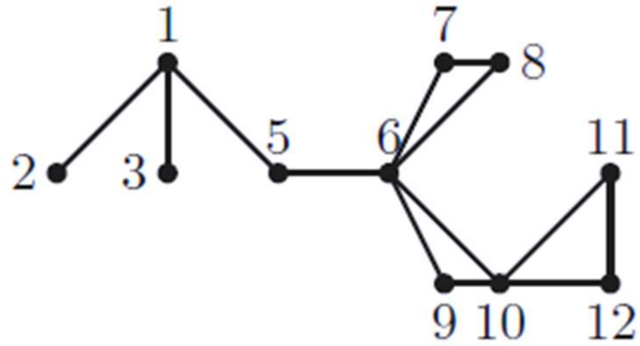
- 在下面的图中，分别考虑点集是否为点割集。
  - $V_4=\{1, 4\}$

  是





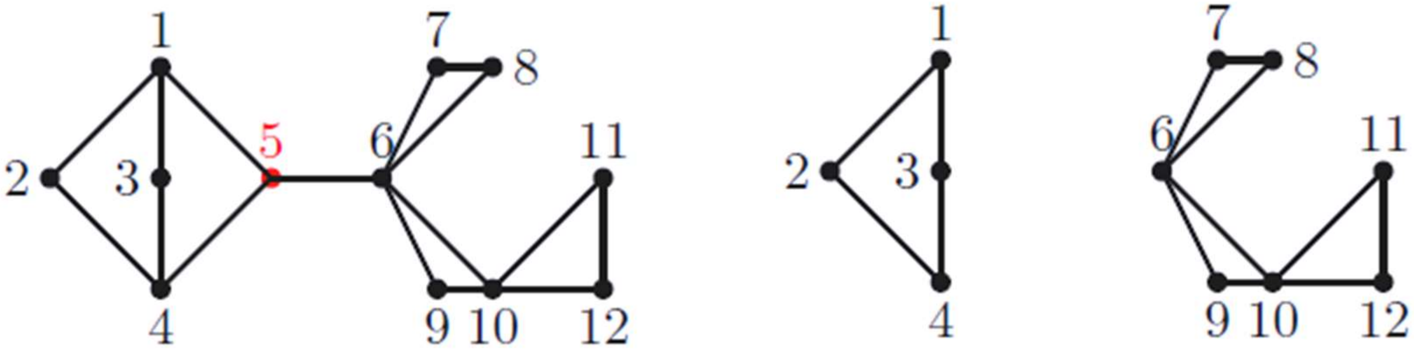




点割集与割点

- 在下面的图中，分别考虑点集是否为点割集。
  - $V_5=\{5\}$

  是



边割集与割边

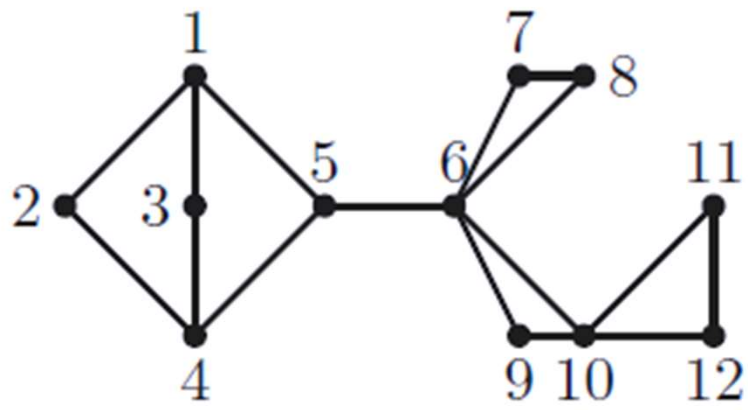
- 边割集：设图$G=\langle V, E\rangle$，$E_1 \subseteq E$，若$G-E_1$的连通分图数大于G的连通分图数，且对于任意E_1的真子集E_2，$G-E_2$的连通分图数不大于G的连通分图数，称E_1是G的边割集（去掉边割集“正好”使图的连通性发生变化）
  - 割边：当$E_1=\{e\}$时，称e是G的割边

- 边割集简称割集
- 割边也称桥

边割集与割边

- 在下面的图中，分别考虑下列边集是否为边割集。

- $E_1=\{(1, 2), (2, 4)\}$
- $E_2=\{(3, 4), (4, 5)\}$
- $E_3=\{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}$
- $E_4=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}$

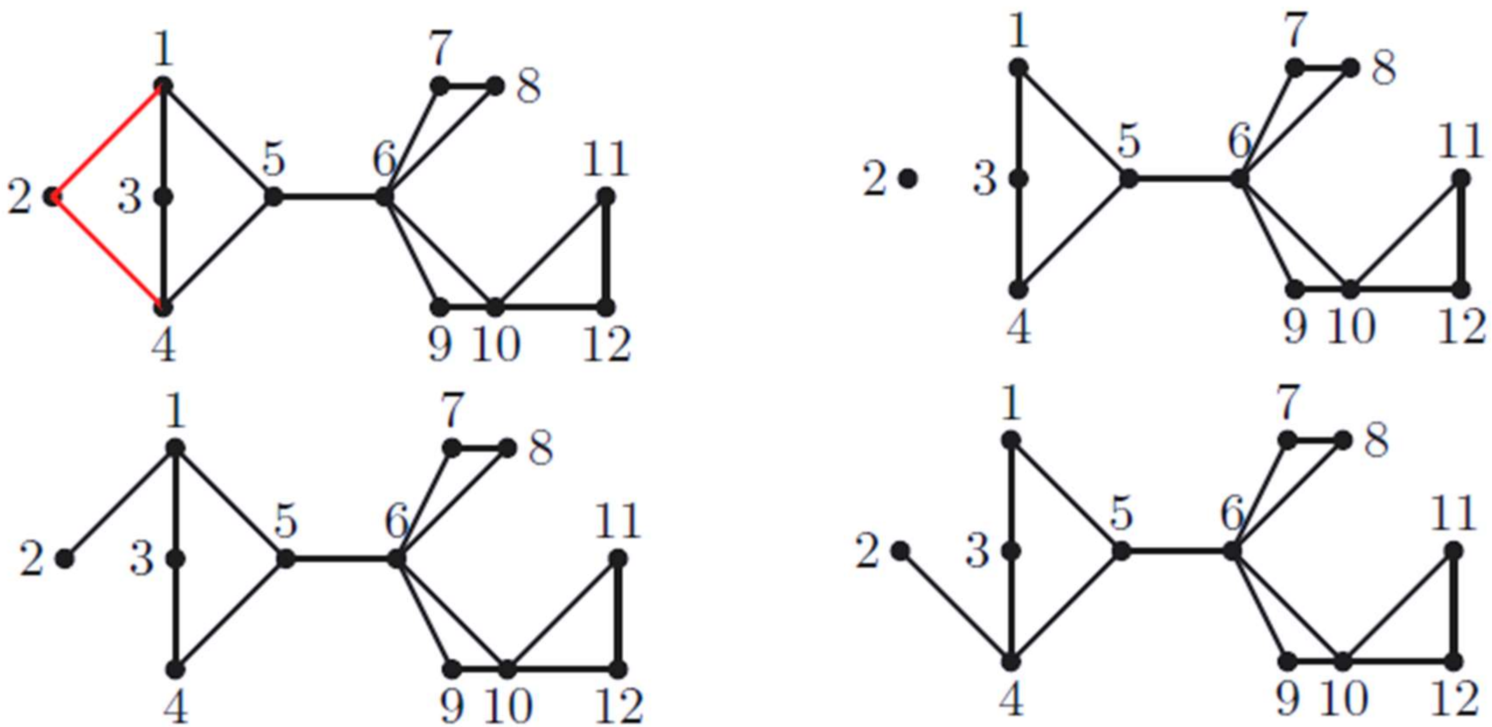


边割集与割边

- 在下面的图中，分别考虑下列边集是否为边割集。

➢ $E_1=\{(1, 2), (2, 4)\}$

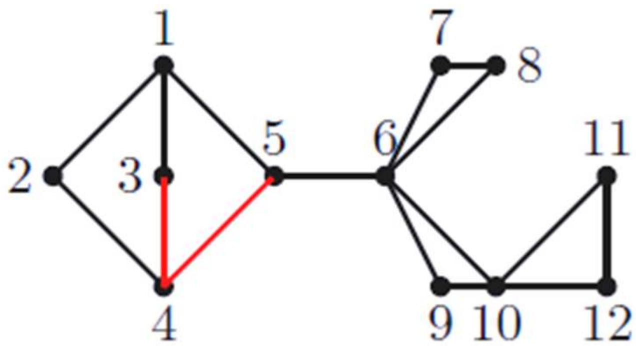
是

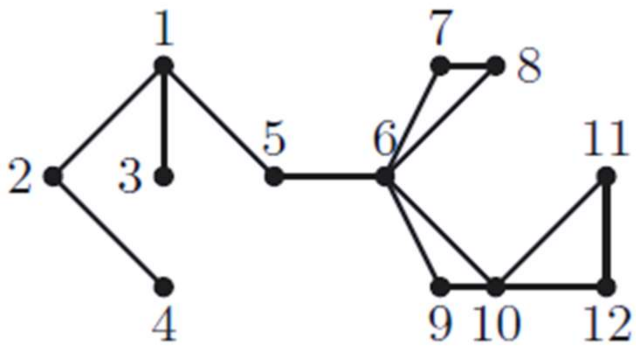


边割集与割边

- 在下面的图中，分别考虑下列边集是否为边割集。
- E_2={(3, 4), (4, 5)}

不是

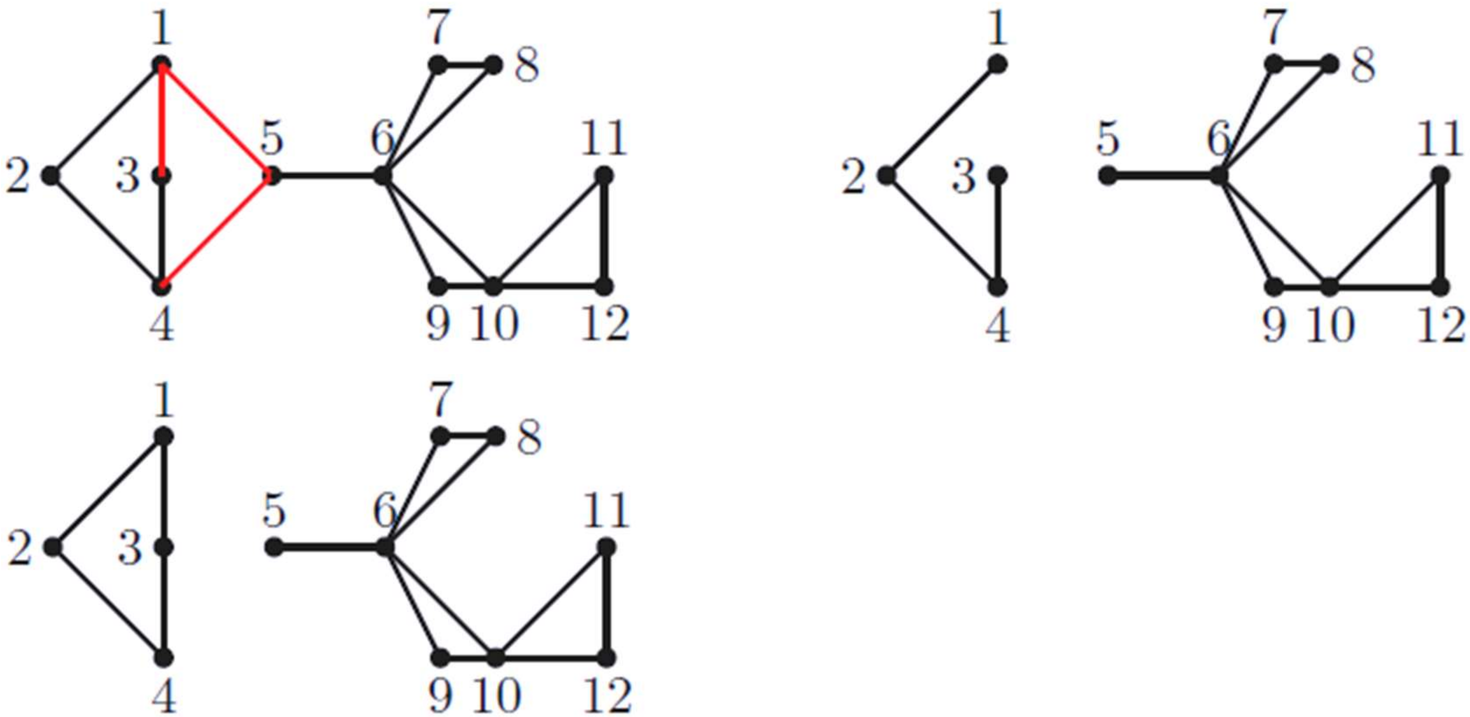




边割集与割边

- 在下面的图中，分别考虑下列边集是否为边割集。
  - $E_3=\{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}$

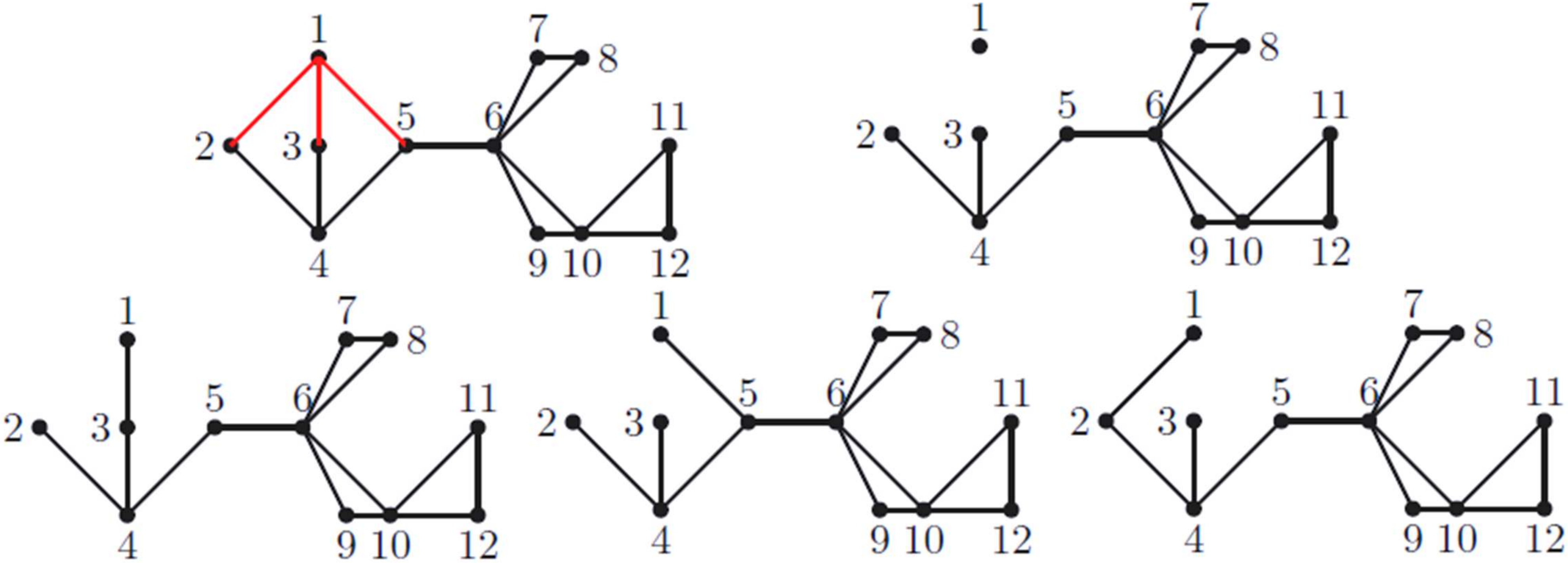
不是



边割集与割边

- 在下面的图中，分别考虑下列边集是否为边割集。
  - $E_4=\{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}$

是



割点的性质

- **定理5.5**：设v是连通图$G = <V, E>$的一个顶点，则以下命题等价：

1、v是G的割点

2、存在集合$V-\{v\}$的一个划分$\{U, W\}$，使得对任意$u \in U$, $w \in W$，v在u到w的每一条基本通路上

3、G中存在与v不同的两点u, w，使得v在从u到w的每一条基本通路上

割边的性质

- **定理5.6：** 设e是连通图G = <V, E>的一条边，则以下命题等价：

1、e是G的割边/桥

2、存在集合V的一个划分{U, W}，使得对任意$u \in U$, $w \in W$，e在u到w的每一条基本通路上

3、G中存在不同的两点u, w，使得e在从u到w的每一条基本通路上

4、e不在G的任意一条基本回路上

连通度

- 点连通度：由G产生一个不连通图或平凡图，而需要从G中去掉的最少顶点数，即：

$$\kappa(G) = \min\{ |V_1| \mid V_1\text{是}G\text{的点割集}\}$$

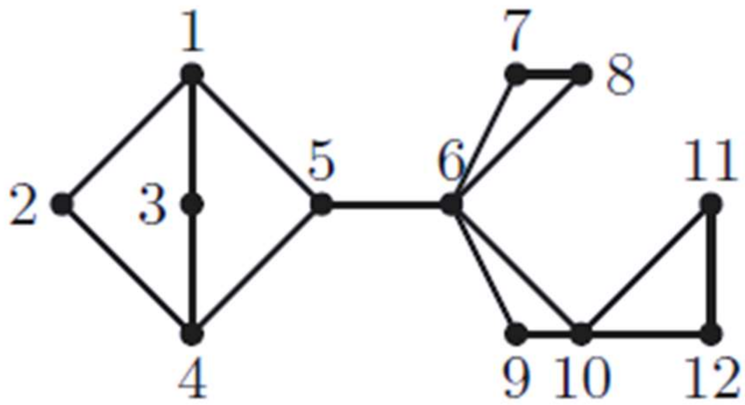
- 边连通度：由G产生一个不连通图或平凡图，而需要从G中去掉的最少边数，即：

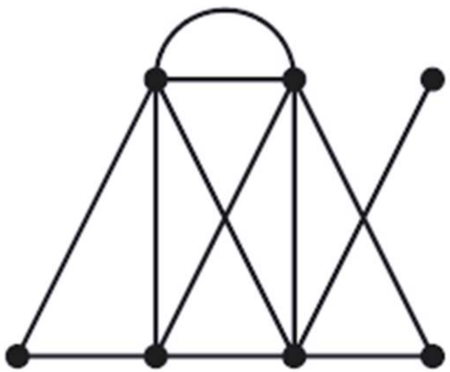
$$\lambda(G) = \min\{ |E_1| \mid E_1\text{是}G\text{的边割集}\}$$

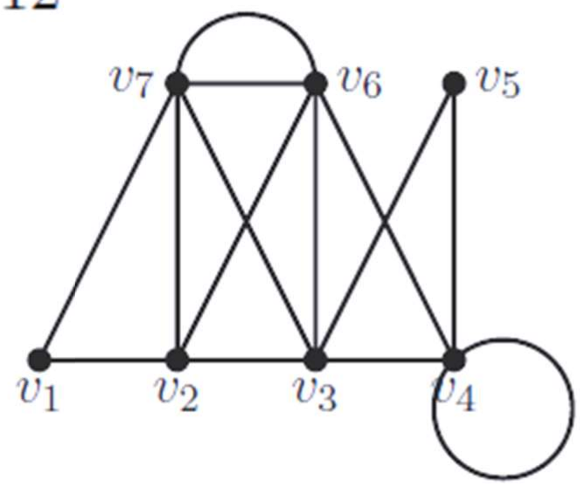
- 关系：$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

连通度

- 求下图的边连通度和点连通度

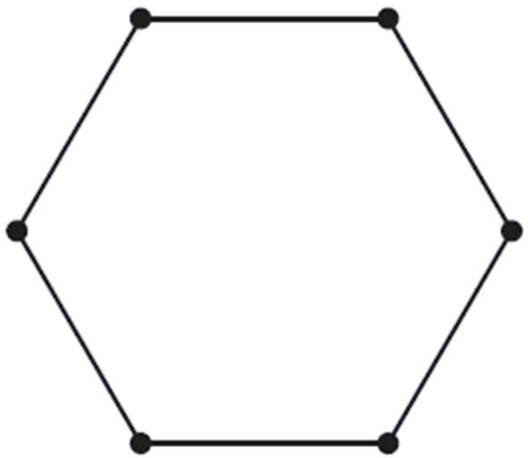




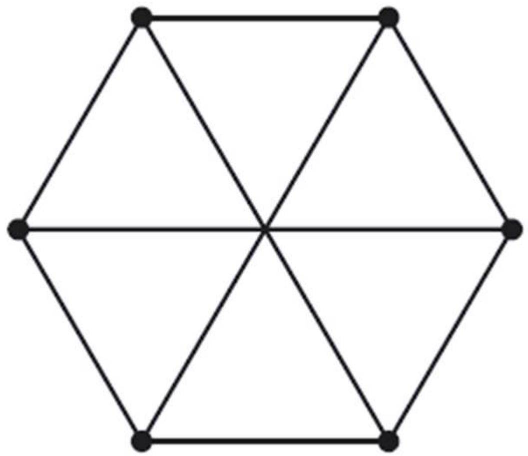


连通度

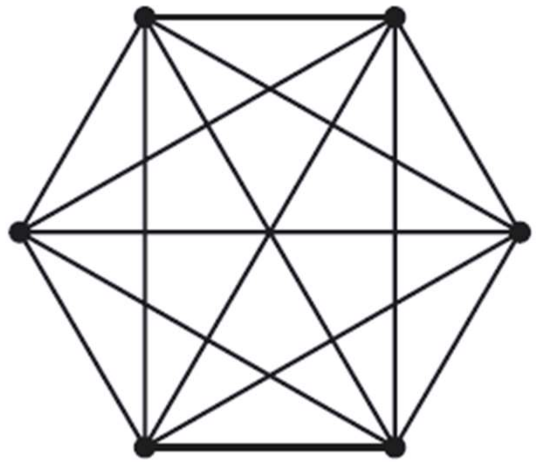
- 求下图的边连通度和点连通度



2度正则图



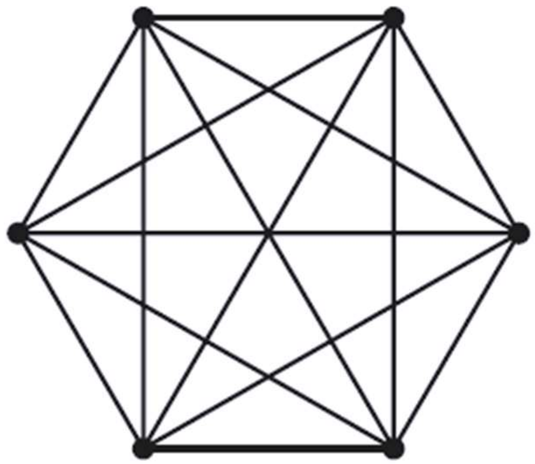
3度正则图



K_6

连通度

- 例**5.11** 求完全图K_p（$p\geq 2$）的边连通度和点连通度



K_6

- 作业 习题5.2 第6，7题（第7题改为求各图的割点、割边、点连通度、边连通度）