应用离散数学

杭州电子科技大学

集合与关系

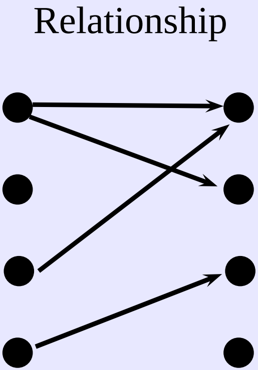
定义22（函数）

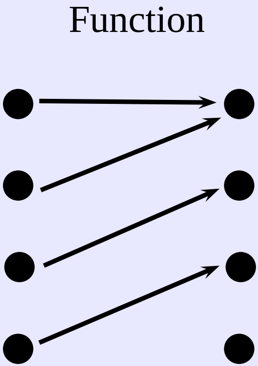
设f是X到Y的二元关系，若f满足

1. f的定义域$\mathrm{dom}(f) = X$
2. f的值域$\mathrm{rang}(f) \subseteq Y$
3. $\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f \Rightarrow y = z$

则称f是X到Y的一个函数，记为$f : X \to Y$。

- 若$\langle x, y\rangle \in f$，则也记为$y = f(x)$
- f是X到Y的函数：$\forall x \in X$,$\exists! y \in Y$，使得$f(x) = y$.
- X到Y的所有函数构成的集合记为$Y^X = \{f | f : X \to Y\}$.


Relationship


Function

注2 (函数的特殊性)

设X, Y是两个有限集合，则

- X到Y的关系有$2^{|X||Y|}$个
  X到Y的函数有$|Y|^{|X|}$个
- X到Y的每个关系中有$0 \sim |X| \times |Y|$个序偶
  X到Y的每个函数有$|X|$个序偶。
- 在每个函数中，序偶的第一个元素必定互不相同。

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_2(\{1,2\})=\{a,b\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像

例22 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$

$f_1^{-1}(\{a\})=\{1,2\}$

定义23 (像、原像)

设$A\subseteq X, B\subseteq Y$，则

- 称$f(A)=\{f(x)|x\in A\}$为A在f下的像
- 称$f^{-1}(B)=\{x|x\in X\wedge f(x)\in B\}$为$B$在$f$下的原像

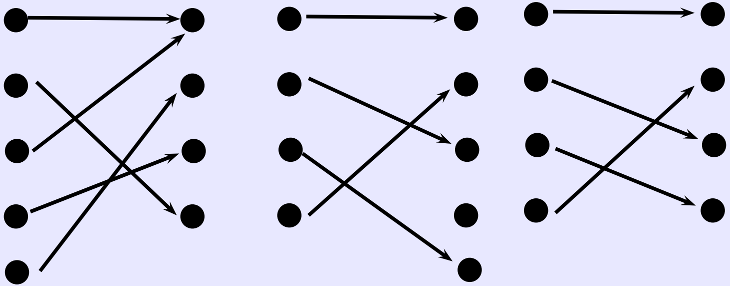
练习 习题3.6 第 1 题

定义24（单射、满射、双射）

设f是X到Y的函数，若

- $\mathrm{rang}(f) = Y$，则称f是**满射**
  f是满射：$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$，使得$y = f(x)$
- $\forall y \in \mathrm{rang}(f)$,存在唯一的$x \in X$，使得$f(x) = y$，则称$f$是**单射**
  即若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
- 若f既是满射也是单射，则称f是**双射**或**一一映射**

函数的基本概念



例23 (设$X=\{1,2\}, Y=\{a,b\}$，求X到Y所有的函数)

$f_1=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$ $f_2=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$单、满、双

$f_3=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$ $f_4=\{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$单、满、双

练习8 (判断以下函数是否为单射、满射、一一映射)

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+2x-1$
- $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$

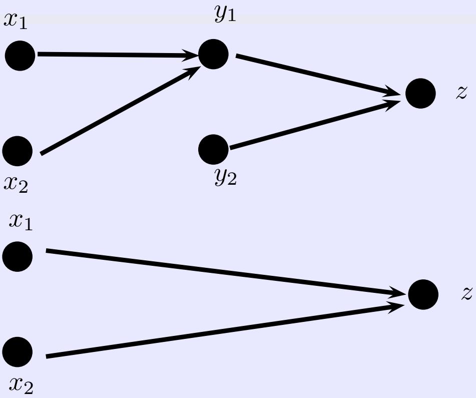
定义25（复合函数）

设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则复合关系$f \circ g$是从X到Z的函数，且$f \circ g(x) = g(f(x)), \forall x \in X$。

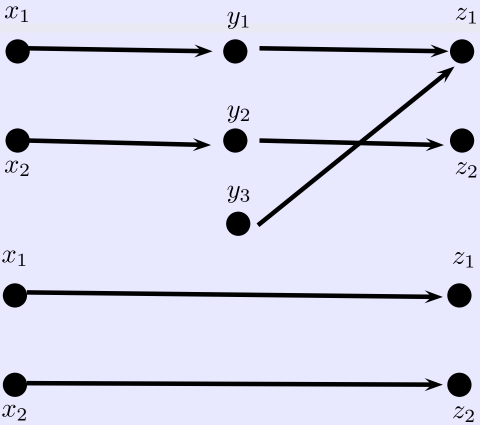
设$f: X \to Y, g: Y \to Z$，则

- 若f, g是满射，则$f \circ g$也是满射；
  若$f \circ g$是满射，则g是满射
- 若f, g是单射，则$f \circ g$也是单射；
  若$f \circ g$是单射，则f是单射
- 若f, g是双射，则$f \circ g$也是双射；
  若$f \circ g$是双射，则f是单射而g是满射

例24 (若 $f \circ g$ 是满射，f 是满射吗？)



例25（若$f \circ g$是单射，g是单射吗？）



定理13 (逆函数)

若函数$f: X \to Y$是双射，则f的逆关系f^{-1}是Y到X的函数，且也是双射。称f^{-1}是f的**逆函数**。

定理14

设$f: X \to Y$是双射函数，g是Y到X的函数，则$f^{-1} = g$的充要条件是$f \circ g = I_X, g \circ f = I_Y$。

定义26 (等势)

设A, B是两个集合，如果存在A到B的双射函数，则称A与B**等势**，记为$A \sim B$.

注3

1. $A \sim A$
2. 若$A \sim B$，则$B \sim A$
3. 若$A \sim B, B \sim C$，则$A \sim C$

- 若A, B都是有限集合，则$A \sim B$的充要条件是A, B元素个数相等

作业 习题3.6 第 4奇、5、6 题