应用离散数学

杭州电子科技大学

谓词逻辑

定义5 (项)

设$D_i, 1 \leq i \leq n$是个体变元x_i的个体域，则D_i的项 是指按下列规则定义的符号串：

1. D_i中的个体常元和个体变元是相应于D_i的项；
2. 若f是从$D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$到$D_i$的$n$元函数，$t_i, 1 \leq i \leq n$ 是相应于D_i的项，则$f(t_1, \cdots, t_n)$也是相应于D_i的项；
3. 所有相应于D_i的项都是有限次使用(1)、(2)所得的符号串。

定义6 (原子公式)

设$P(x_1, \cdots, x_n)$是n元谓词，$t_i, 1 \leq i \leq n$是相应于个体域D_i的项，则称$P(t_1, \cdots, t_n)$是原子公式。

定义7 (谓词公式)

谓词公式是按下列规则定义的符号串:

1. *0,1*是谓词公式;
2. 原子公式是谓词公式;
3. 若A, B是谓词公式，则$\neg A, \neg B, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$是谓词公式;
4. 若x是个体变元，A是谓词公式，则$\forall x A, \exists x A$是谓词公式;
5. 所有谓词公式都是有限次使用*(1)*、*(2)*、*(3)*、*(4)*得到的符号串。

定义8 (指导变元、约束变元、自由变元、辖域)

- 在谓词公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x是指导变元，A是相应量词的辖域。
- 辖域中与指导变元相同的个体变元为约束变元。
- 不是约束变元的个体变元称为自由变元。

例2.7 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall xP(x,y) \rightarrow Q(x)$
2. $\forall x(Q(x) \rightarrow \exists yP(x,y))$
3. $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \exists xP(x,y)$

定理1（换名规则）

在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未出现的个体变元符号，而公式的其余部分不变，则谓词公式的等价性不变。

定理2（代替规则）

在谓词公式中，将A中某个自由变元的所有出现用A中未出现的某个个体变元符号代替，公式的等价性不变。

练习1 (指出下列谓词公式中的约束/指导/自由变元)

1. $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

   $\forall x(P(x) \to Q(x,y))$

2. $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,y) \to \exists y Q(x,y)$

   $\forall x P(x,s) \to \exists y Q(t,y)$

3. $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists x R(x,y,z)$

   $\forall x \exists y(P(x,y) \wedge Q(y,z)) \vee \exists s R(s,t,z)$

定义9 (解释)

谓词公式的**解释**I有下面四个部分组成:

1. 非空个体域D;
2. 对A中的每个个体常元符号，指定D中的一个固定元素;
3. 对A中每个函数符号，指定一个具体的函数;
4. 对A中每个谓词符号，指定一个具体的谓词。

例2.9 (对下列谓词公式，分别给出一个成真解释与成假 解释)

1. $\forall x(P(x) \to S(x))$
2. $\forall x P(x) \to \exists x \forall y Q(x,y)$
3. $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge Q(x,y) \to R(f(x,y), g(x,y)))$

定义10 (代换实例)

设$p_1, \cdots, p_n$是命题公式中出现的n个命题变元，$A_1, \cdots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i, 1 \leq i \leq n$处处代换A中的p_i所得的谓词公式称为A的**代换实例**。

$P(x) \to Q(x)$、$\forall x P(x) \to \exists y Q(y)$是$p \to q$ 的代换实例。
$\forall x(P(x) \to Q(x))$不是$p \to q$的代换实例。

定理3 (谓词公式判定方法1)

永真式的代换实例仍然是永真式；永假式的代换实例仍然是永假式。

例2.12 (判断下列谓词公式)

1. $(\neg\forall xP(x) \to \exists xQ(x)) \to (\neg\exists xQ(x) \to \forall xP(x))$
2. $\forall xP(x) \to (\exists x\exists yQ(x,y) \to \forall xP(x))$
3. $\neg(\forall xP(x) \to \exists x\forall yQ(x,y)) \wedge \exists x\forall yQ(x,y)$

可满足式的代换实例可能永真、可能永假、可能可满足。

谓词公式判定方法2-非形式化方法（解释法）

例2.11 (判断下列谓词公式)

1. $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)$
2. $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$
3. $\forall x (P(y) \to Q(x)) \to (P(y) \to \forall x Q(x))$

练习2 (判断下列谓词公式)

1. $\neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)) \wedge \exists y Q(y)$
2. $\neg(P(x) \rightarrow (\forall y Q(x, y) \rightarrow P(x)))$
3. $P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \rightarrow P(x, y))$
4. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y))$
5. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall y Q(y))$

练习3

判断下列谓词公式哪些是永真式、哪些是永假式、哪些是可满足式，并说明理由。

- $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists y Q(y))$
- $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists y Q(y))$

作业：习题2.2：4，5奇数小题