

应用离散数学

杭州电子科技大学

谓词逻辑

- 1 个体词、谓词与量词
- 2 谓词公式及其解释
- 3 谓词公式的等价演算
- 4 谓词公式的推理演算

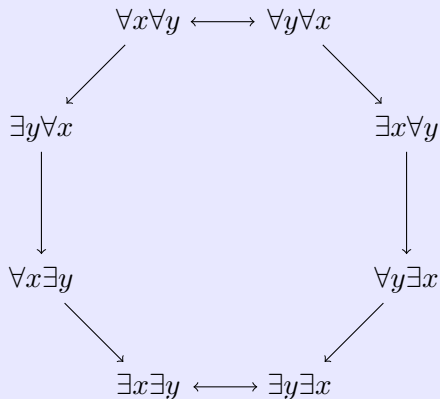
定义12 (推理演算)

设 A_1, \dots, A_n, B 是谓词公式, 如果对于 A_1, \dots, A_n 都取值1的任何解释, B 必定也取值1, 则称 B 是前提 A_1, \dots, A_n 的**逻辑结论**, 记为 $A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$, 或 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$

- $A = B$ 的充要条件是 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$;
- $A \Rightarrow B$ 的充要条件是 $A \rightarrow B$ 是永真式。

例14 (证明以下推理)

- 1 $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x);$
- 2 $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \vee \forall x B(x)$
- 3 $\exists x A(x) \wedge \forall x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
- 4 $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$



定理9 (推理规则)

1 **US规则** (全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a), \quad \forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求: y 不在 $A(x)$ 中以约束变元形式出现。

例15 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, $P(x, y) : x + 1 = y$

$$1. \forall x \exists y P(x, y) \quad P$$

$$2. \exists y P(y, y) \quad US_{(1)}$$

2 ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$$

要求:

- 1 a 是使 $A(x)$ 为真的特定个体常元;
- 2 a 不在 $A(x)$ 和已导出的公式中出现;
- 3 除 x 外, $A(x)$ 无其他自由变元;

例16 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, $P(x):x$ 是正数, $Q(x):x$ 是负数,

$$1. \exists x P(x) \quad P$$

$$2. P(a) \quad ES_{(1)}$$

$$3. \exists x Q(x) \quad P$$

$$4. Q(a) \quad ES_{(3)}$$

$$5. P(a) \wedge Q(a) \quad T_{(2),(4)}$$

例17 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, $P(x, y) : x > y$

$$1. \forall x \exists y P(x, y) \quad P$$

$$2. \exists y P(z, y) \quad US_{(1)}$$

$$3. P(z, a) \quad ES_{(2)}$$

3 UG规则(全称量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求: x 不在 $A(y)$ 中以约束变元形式出现;

例18 (分析下面推导过程中的问题)

设个体域是实数集, $P(x, y) : x > y$

$$1. \exists x P(x, y) \quad P$$

$$2. \forall x \exists x P(x, x) \quad UG_{(1)}$$

4 EG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x), \quad A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求: x 不在 $A(y)/A(a)$ 中以约束变元形式出现。

| 规则 | 表示 | 注意事项 |
|------|--|---|
| US | $\forall x A(x) \Rightarrow A(a)$ $\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$ | y 在 $A(x)$ 中不约束 |
| ES | $\exists x A(x) \Rightarrow A(a)$ | 1. a 满足 $A(x) = 1$ 2. a 不在 $A(x)$ 和已有公式中出现 3.除 x 外, $A(x)$ 中无其他自由变元 |
| UG | $A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$ | x 在 $A(y)$ 中不约束 |
| EG | $A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$ $A(a) \Rightarrow \exists x A(x)$ | 1. x 在 $A(y)$ 中不约束 2. x 在 $A(a)$ 中不约束 |

口头练习：习题2.4：2、3、4

例19 (证明苏格拉底三段论)

- 所有的人都是要死的;
- 苏格拉底是人;
- 苏格拉底是要死的。

例20 (证明下列论断的正确性)

- 1 所有的哺乳动物都是脊椎动物;
- 2 并非所有的哺乳动物都是胎生动物;
- 3 所以有些脊椎动物不是胎生的。

解: 设个体域是全总个体域, $P(x): x$ 是哺乳动物, $Q(x): x$ 是脊椎动物, $R(x): x$ 是胎生动物.

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

- | | | | | | |
|----|---|------------|-----|------------------------------------|-------------|
| 1. | $\neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$ | P | 7. | $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ | P |
| 2. | $\exists x \neg(\neg P(x) \vee R(x))$ | $E_{(1)}$ | 8. | $P(a) \rightarrow Q(a)$ | $US_{(7)}$ |
| 3. | $\neg(\neg P(a) \vee R(a))$ | $ES_{(2)}$ | 9. | $Q(a)$ | $T_{(5,8)}$ |
| 4. | $P(a) \wedge \neg R(a)$ | $E_{(3)}$ | 10. | $Q(a) \wedge \neg R(a)$ | $T_{(6,9)}$ |
| 5. | $P(a)$ | $T_{(4)}$ | 11. | $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$ | $EG_{(10)}$ |
| 6. | $\neg R(a)$ | $T_{(4)}$ | | 所以推断成立 | |

例22 (证明下列推理)

$$\begin{aligned} \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \end{aligned}$$

- | | | | |
|-----|---|------------|--|
| 1. | $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ | 附加前提 | |
| 2. | $\exists x \neg (\neg A(x) \vee B(x))$ | E_1 | |
| 3. | $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | E_2 | |
| 4. | $A(a) \wedge \neg B(a)$ | ES_3 | |
| 5. | $\neg B(a)$ | T_4 | |
| 6. | $A(a)$ | T_4 | |
| 7. | $\exists x A(x)$ | EG_6 | |
| 8. | $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ | P | |
| 9. | $\forall x B(x)$ | $T_{7,8}$ | |
| 10. | $B(a)$ | US_9 | |
| 11. | $B(a) \wedge \neg B(a)$ | $T_{5,10}$ | |
| 12. | 0 | E_{11} | |

例22 (证明下列推理)

$$\begin{aligned}\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))\end{aligned}$$

1. $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ P
2. $A(a) \rightarrow B(a)$ US_1
3. $\forall x A(x)$ 附加前提
4. $A(a)$ US_3
5. $B(a)$ $T_{2,4}$
6. $\forall x B(x)$ UG_5

例22 (证明下列推理)

$$\begin{aligned}\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))\end{aligned}$$

1. $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ P
2. $A(y) \rightarrow B(y)$ US_1
3. $\forall x A(x)$ 附加前提
4. $A(y)$ US_3
5. $B(y)$ $T_{2,4}$
6. $\forall x B(x)$ UG_5

例22 (证明下列推理)

$$\begin{aligned} \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \\ &\Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \end{aligned}$$

- | | | | | |
|----|---|-----------|-----|-----------------------------------|
| 1. | $\neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$ | 附加前提 | | |
| 2. | $\forall x (A(x) \wedge \neg B(x))$ | E_1 | 8. | $\forall x \neg B(x)$ T_3 |
| 3. | $\forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$ | E_2 | 9. | $\neg B(y)$ US_8 |
| 4. | $\forall x A(x)$ | T_3 | 10. | $B(y) \wedge \neg B(y)$ $T_{7,9}$ |
| 5. | $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(X)$ | P | 11. | 0 E_{10} |
| 6. | $\forall x B(x)$ | $T_{4,5}$ | | |
| 7. | $B(y)$ | US_6 | | |

练习3

$$1. \forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \exists x P(x) \Rightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x))$$

$$1. \exists x P(x) \quad P$$

$$2. P(a) \quad ES_{(1)}$$

$$3. \forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))) \quad P$$

$$4. P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge R(a)) \quad US_{(3)}$$

$$5. Q(a) \wedge R(a) \quad T_{(2,4)}$$

$$6. R(a) \quad T_{(5)}$$

$$7. P(a) \wedge R(a) \quad T_{(2,6)}$$

$$8. \exists x(P(x) \wedge R(x)) \quad EG_{(8)}$$

练习4

$$1. \forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg \exists xQ(x) \Rightarrow \exists xP(x)$$

$$1. \neg \exists xQ(x) \quad P$$

$$2. \forall x \neg Q(x) \quad E_{(1)}$$

$$3. \neg Q(y) \quad US_{(2)}$$

$$4. \forall x(P(x) \vee Q(x)) \quad P$$

$$5. P(y) \vee Q(y) \quad US_{(5)}$$

$$6. P(y) \quad T_{(3,5)}$$

$$7. \exists xP(x) \quad EG_{(6)}$$

所以推理成立。

练习5

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \Rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B(x))$$

1. $\exists x A(x)$

2. $A(a)$

3. $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$

4. $A(a) \rightarrow B(a)$

5. $B(a)$

6. $\exists x B(x)$

附加前提

$ES_{(1)}$

P

$US_{(3)}$

$T_{(2,4)}$

$EG_{(6)}$

$$\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \Rightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$1. \neg \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$$

附加前提

$$2. \forall x A(x) \wedge \forall x \neg B(x)$$

 $E_{(1)}$

$$3. \forall x A(x)$$

 $T_{(2)}$

$$4. \forall x \neg B(x)$$

 $T_{(2)}$

$$5. \exists x A(x)$$

 $T_{(3)}$

$$6. \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

 P

$$7. \exists x B(x)$$

 $T_{(6,7)}$

$$8. \neg \exists x B(x)$$

 $E_{(4)}$

$$9. 0$$

 $T_{(7,8)}$

作业：习题2.4：1(1)(3)(5), 5(3)(4), 6(1)(4), 7(1)(3), 8