应用离散数学

杭州电子科技大学

定义1.10 (等价命题)

设A, B是两个命题公式，如果在任何赋值下，A, B都有相同的真值，则称A, B等价，记为$A=B$。

例1.9 ($\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

所以$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$。

注2

- $A = B$：当所有赋值均以相同次序排列时，真值表中A，B所在列完全相同；
- $A = B$的充要条件是$A \leftrightarrow B$是永真式。

例 $(\neg p \vee q = p \to q)$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

练习（证明$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$）

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

定理1.3 (基本等价式)

设A, B, C是命题公式，则

1. 双重否定律 $\neg\neg A = A$
2. 等幂律 $A \vee A = A, A \wedge A = A$
3. 交换律 $A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A$
4. 结合律 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
   $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
5. 分配律 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6.	德摩根律	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
		$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
7.	吸收律	$A \vee (A \wedge B) = A, A \wedge (A \vee B) = A$
8.	零律	$A \vee 1 = 1, A \wedge 0 = 0$
9.	单位律	$A \vee 0 = A, A \wedge 1 = A$
10.	否定律	$A \vee \neg A = 1, A \wedge \neg A = 0$
11.	蕴涵律	$A \rightarrow B = \neg A \vee B$
12.	等值律	$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

例1.10 (证明下面命题公式等价)

1. $A \to (B \to A) = \neg A \to (A \to \neg B)$
2. $\neg(A \leftrightarrow B) = (A \vee B) \wedge \neg(A \leftrightarrow B)$
3. $((A \wedge B) \to C) \wedge (B \to (D \vee C))$
   $= (B \wedge (D \to A)) \to C$

练习 (证明以下等价式)

$1.((p \to q) \wedge (p \to r))$

$= p \to (q \wedge r)$

$$\text{左式} = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$$
$$= \neg p \vee (q \wedge r)$$
$$= p \to (q \wedge r)$$

所以等式成立。

$2.p \to (q \to r)$

$= (p \wedge q) \to r$

$$\text{左式} = \neg p \vee (\neg q \vee r)$$
$$= \neg p \vee \neg q \vee r$$
$$= (\neg p \vee \neg q) \vee r$$
$$= \neg (p \wedge q) \vee r$$
$$= (p \wedge q) \to r$$

所以等式成立。

例1.11 (将下面的程序简化)

If $A \wedge B$ then
If $B \vee C$then
X
Else
Y
End
Else
If $A \wedge C$ then
Y
Else
X
End
End

作业： 习题1.3 第1(1)(3)(5), 3(1)(3)(5)(7)题