应用离散数学

杭州电子科技大学

集合与关系

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

定义18 (等价关系)

设R是A上的关系，若R满足自反性、对称性、传递性，则称R是A上的等价关系。

例18 (判断以下关系是否是等价关系)

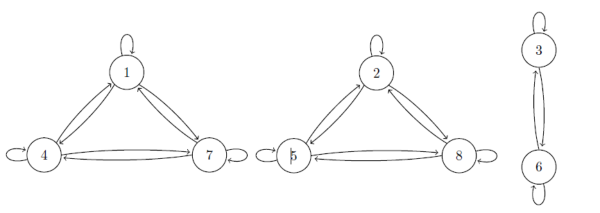
- 直线间的平行关系；三角形间的相似关系；
- 设$A = \{1, 2, \cdots, 8\}$，A上的关系

$$R = \{\langle a, b\rangle | a, b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\}$$

练习 习题3.4 第 1 题

$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R =& \{\langle a,b\rangle | a,b \in A \wedge a \equiv b \pmod 3\} \\
=& \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \\
& \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle, \\
& \langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}
\end{aligned}
$$



定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b\rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b\rangle \in R\}$$

为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\}$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\}$$

$$[3]_R = \{3, 6\}$$

定义19 (等价类)

设R是非空集合A上的等价关系，$\forall a \in A$，称

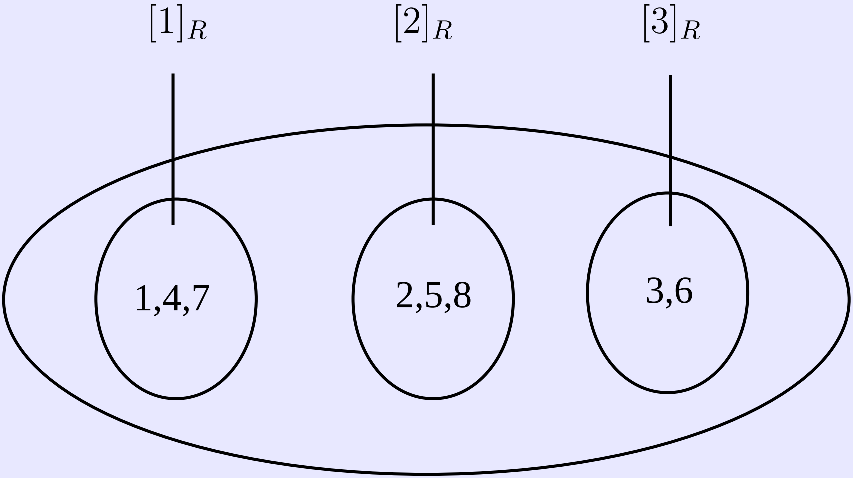
$$[a]_R = \{b | b \in A \wedge \langle a, b\rangle \in R\}$$

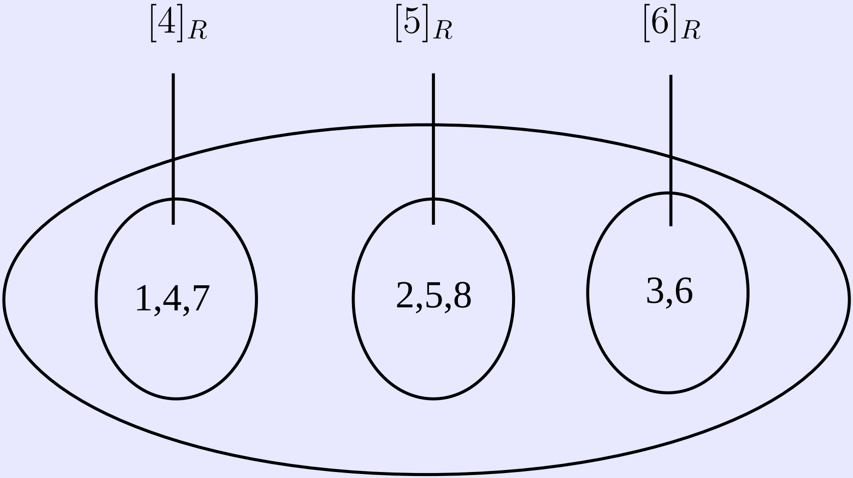
为a关于等价关系R的等价类。

$$[1]_R = \{1, 4, 7\} = [4]_R = [7]_R$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8\} = [5]_R = [8]_R$$

$$[3]_R = \{3, 6\} = [6]_R$$


$[1]_R$
$[2]_R$
$[3]_R$
1,4,7
2,5,8
3,6


$[4]_R$
$[5]_R$
$[6]_R$
1,4,7
2,5,8
3,6

定义20（商集）

称$\{[a]_R | a \in A\}$为A关于等价关系R的商集，记为A/R。

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$

定义20（商集）

称$\{[a]_R | a \in A\}$为A关于等价关系R的**商集**，记为A/R。

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$$

例19

设m是一个正整数，列出$\mathbb{Z}$在模m同余关系下所有的等价类，并指出对应的商集。

练习 习题3.4 第 3 题

定理11 (等价关系的性质)

设R是非空集合A上的等价关系，则

- $\forall a \in A, \emptyset \neq [a]_R \subseteq A$
- 若aRb，则$[a]_R = [b]_R$
- 若$a\not{R}b$，则$[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$
- $\bigcup\limits_{a \in A} [a]_R = A$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, b, c\}, \{d\}\}$$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

$$\pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

$$\pi = \{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分：

$$\pi = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$$

定义21（划分）

设A是一个非空集合，$A_1, \cdots, A_m$是A的非空子集。若其满足

1. 当$i \neq j$时，$A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

则称$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$是$A$的一个划分。

例20

设$A = \{a, b, c, d\}$，判断以下是否是A的划分:

$$\pi = \{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$$

定理12

对于集合A的任意划分$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$，如下定义$A$上的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$$

则R是A上的等价关系，且该等价关系对应的商集为$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$。

定理12

对于集合A的任意划分$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$，如下定义$A$上的关系

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots \cup (A_m \times A_m)$$

则R是A上的等价关系，且该等价关系对应的商集为$\pi = \{A_1, \cdots, A_m\}$。

例21（求出$A = \{a, b, c\}$上所有的等价关系。）

作业 习题3.4 第 2、4 题