

应用离散数学

杭州电子科技大学

集合与关系

- 1 集合及其运算
- 2 二元关系及其运算
- 3 二元关系的性质与闭包
- 4 等价关系与划分
- 5 函数

定义14 (自反性、反自反性)

设 R 是集合 A 上的关系,

- 若对于任意的 $a \in A$, 都有 $\langle a, a \rangle \in R$, 则称 R 是**自反的**
- 若对于任意的 $a \in A$, 都有 $\langle a, a \rangle \notin R$, 则称 R 是**反自反的**

记 L 表示直线集合,

	(\mathbb{R}, \leq)	(集族, \subseteq)	$(\mathbb{Z}^+,)$	(L, \perp)	(L, \parallel)
自反	✓	✓	✓	×	×
反自反	×	×	×	✓	✓

定义15 (对称性、反对称性)

设 R 是集合 A 上的关系,

- 若 $\langle a, b \rangle \in R$, 必有 $\langle b, a \rangle \in R$, 则称 R 是**对称的**
- 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R$, 必有 $a = b$, 则称 R 是**反对称的**

记 L 表示直线集合,

	(\mathbb{R}, \leq)	(集族, \subseteq)	$(\mathbb{Z}^+,)$	(L, \perp)	(L, \parallel)
对称	×	×	×	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	×	×

定义15 (对称性、反对称性)

设 R 是集合 A 上的关系,

- 若 $\langle a, b \rangle \in R$, 必有 $\langle b, a \rangle \in R$, 则称 R 是**对称的**
- 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, a \rangle \in R$, 必有 $a = b$, 则称 R 是**反对称的**

记 L 表示直线集合,

	(\mathbb{R}, \leq)	(集族, \subseteq)	$(\mathbb{Z}^+,)$	(L, \perp)	(L, \parallel)	$(\mathbb{Z},)$
对称	×	×	×	✓	✓	×
反对称	✓	✓	✓	×	×	×

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ↺ 🔍 ↻

	集合表示	关系矩阵
自反	$I_A \subseteq R$	$\forall i, r_{ii} = 1$
反自反	$R \cap I_A = \emptyset$	$\forall i, r_{ii} = 0$
对称	$R = R^{-1}$	对称矩阵
反对称	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	对于 $i \neq j$, 若 $r_{ij} = 1$, 则 $r_{ji} = 0$
传递	$R \circ R \subseteq R$	对于 M_R^2 中 1 的位置, M_R 中相应位置也是 1

练习 习题3.3 第 3 题

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$R \cup S$	✓	✓	✓	×	×
$R \cap S$	✓	✓	✓	✓	✓
R^c	×	×	✓	×	×
$R - S$	×	✓	✓	✓	×
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R \circ S$	✓	×	×	×	×

定义17 (闭包)

设 R 是集合 A 上的关系, 若 A 上的关系 R' 满足

- 1 $R \subseteq R'$

- 2 R' 自反

- 3 对于 A 上任何包含 R 的自反关系 R'' , 都有 $R' \subseteq R''$

则称 R' 是 R 的 **自反闭包**

定义17 (闭包)

设 R 是集合 A 上的关系, 若 A 上的关系 R' 满足

1 $R \subseteq R'$

2 R' 对称

3 对于 A 上任何包含 R 的对称关系 R'' , 都有 $R' \subseteq R''$

则称 R' 是 R 的**对称闭包**

定义17 (闭包)

设 R 是集合 A 上的关系, 若 A 上的关系 R' 满足

1 $R \subseteq R'$

2 R' 传递

3 对于 A 上任何包含 R 的传递关系 R'' , 都有 $R' \subseteq R''$

则称 R' 是 R 的**传递闭包** 分别将 R 的自反、对称、传递闭包记为 $r(R), s(R), t(R)$

定理8

设 R 是 A 上的关系, 则

- R 自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$
- R 对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$
- R 传递 $t(R) = R$

定理9 (闭包的计算)

设 R 是 A 上的关系, 则

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

定理10 (若 $|A| = n$, 则 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$)

例17 (设 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$, 求 R 的闭包)

练习 习题3.3 第 5 题

作业 习题3.3 第 1, 6, 7 题