离散数学

杭州电子科技大学

第6章 有向图

- 有向图的基本概念
- 有向图的连通性
- 有向图的矩阵表示
- 根树
- 最优二叉树

6.1有向图的基本概念

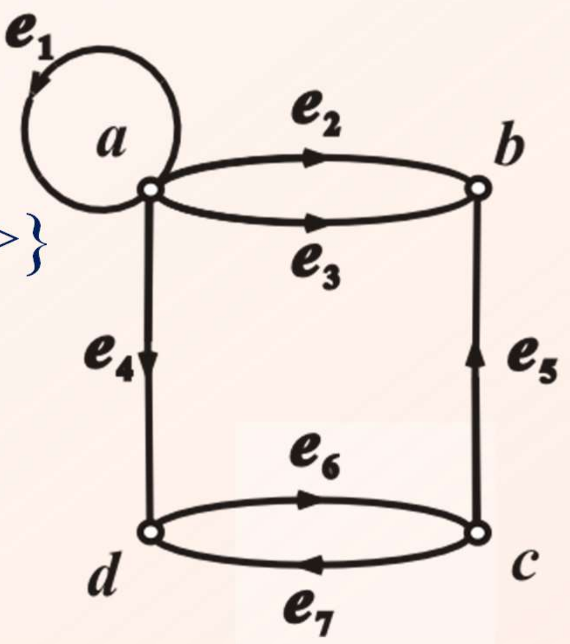
定义 有向图 $D=<V,E>$, 其中

(1)顶点集V是非空集合, 其元素称为顶点

(2) 边集E为$V\times V$的多重子集，其元素称为有向边，简称边.

如$D=<V,E>$, 其中 $V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{<a,a>,<a,b>,<a,b>,<a,d>,<c,b>,<d,c>,<c,d>\}$



通常用G表示无向图, D表示有向图

D的基图（底图）： 把方向都去掉

6.1有向图的基本概念

顶点的度数

设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

v的出度$d^+(v)$: 以 v 为起始点的边的条数

v的入度$d^-(v)$: 以 v 为终止点的边的条数

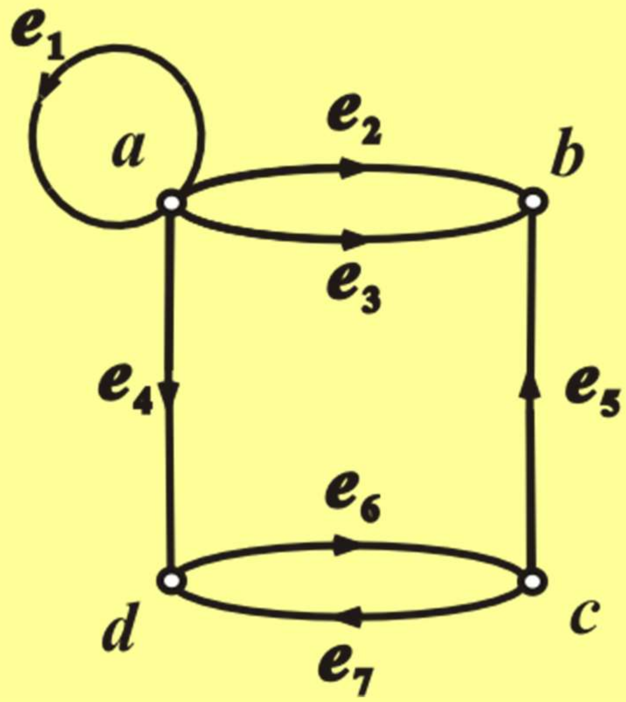
v的度 $d(v)$: 出度入度之和， $d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$

6.1有向图的基本概念

例：如右图所示。

$d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$

$d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$



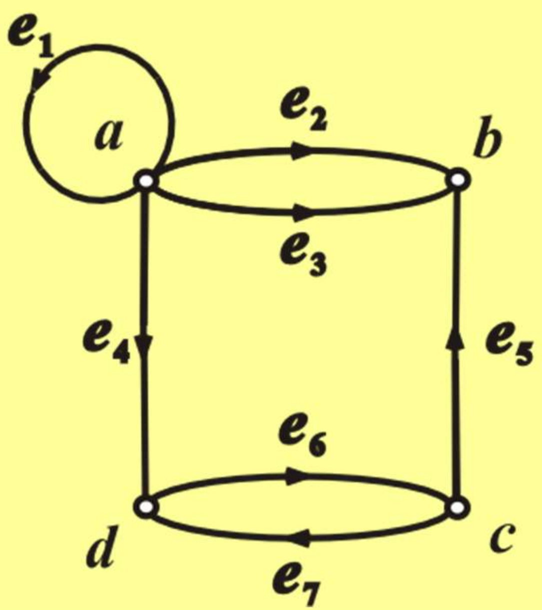
6.1有向图的基本概念

设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度数列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度数列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$



右图中度数列: 5,3,3,3

出度数列: 4,0,2,1

入度数列: 1,3,1,2

6.1有向图的基本概念

顶点的度数

D的最大度$\Delta(D)=\max\{d(v)|v\in V\}$

最小度$\delta(D)=\min\{d(v)|v\in V\}$

最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)|v\in V\}$

最小出度$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)|v\in V\}$

最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)|v\in V\}$

最小入度$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)|v\in V\}$

6.1有向图的基本概念

例：如右图所示。

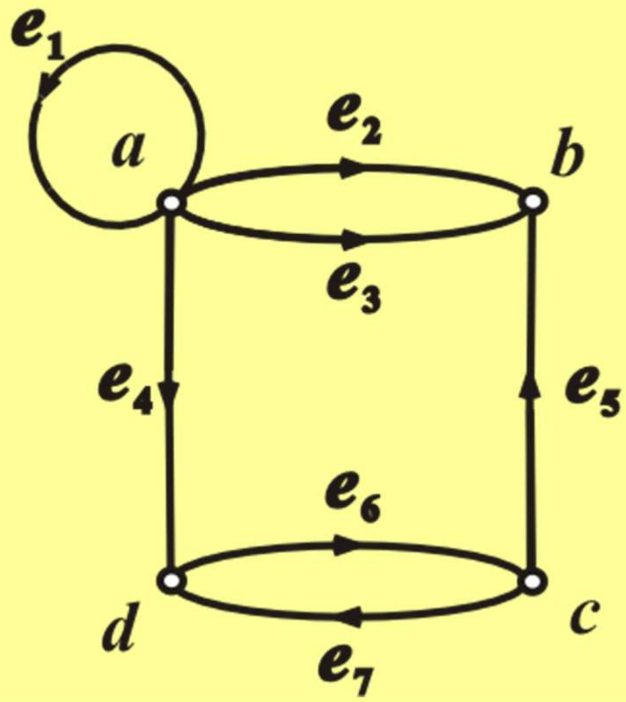
$d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$

$d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$

$\Delta(D)=5, \delta(D)=3,$

$\Delta^+(D)=4, \delta^+(D)=0,$

$\Delta^-(D)=3, \delta^-(D)=1.$



6.1有向图的基本概念

- 有向图的握手定理

图的所有顶点度数之和等于边数的2倍：

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q$$

有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数：

$$\sum_{i=1}^{p} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{p} d^{-}(v_i) = q$$

推论 任意无向图和有向图的奇点个数必为偶数.

6.1有向图的基本概念

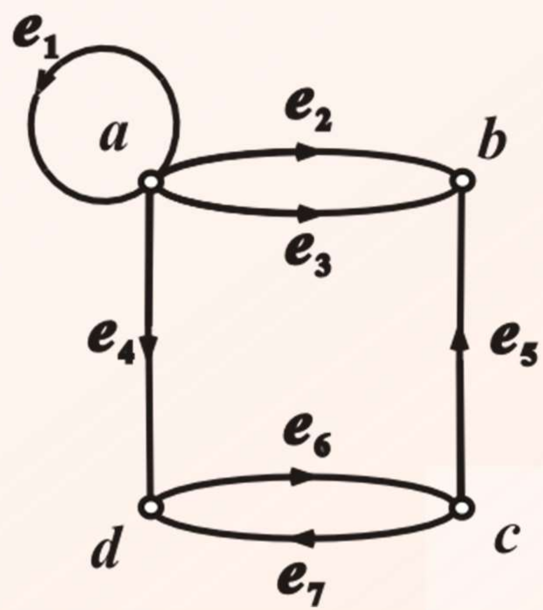
在有向图中，具有相同起点和终点的边称为有向平行边，简称平行边，平行边的条数称为重数.

例：

e_2和e_3 是平行边，重数为2

e_6和e_7 不是平行边

右图不是简单图



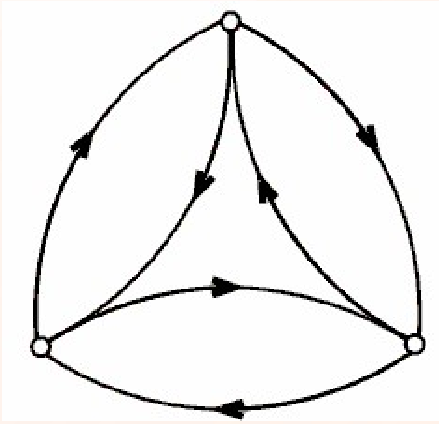
6.1有向图的基本概念

*n*阶有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的*n*阶有向简单图.

性质: 边数 $m = n(n-1)$,

$$\Delta = \delta = 2(n-1),$$

$$\Delta^+ = \delta^+ = \Delta^- = \delta^- = n-1$$



3阶有向完全图

6.2有向图的连通性

设有向图$D=<V, E>$

u可达v（$u \to v$）：u 到 v 存在通路（有向）.

u、v 相互可达（$u \leftrightarrow v$）：即$u \to v$且 $v \to u$

规定 u 到自身总是可达的，即$u \leftrightarrow u$

$\to$：自反、传递

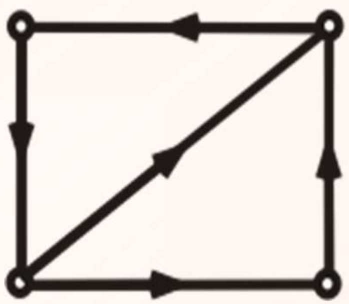
$\leftrightarrow$：自反、对称、传递

6.2有向图的连通性

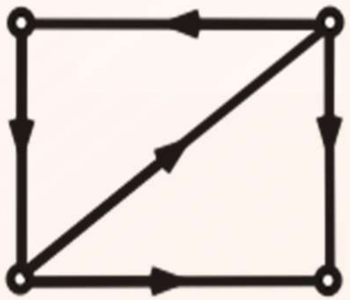
*D*弱连通: 底图为无向连通图

*D*单向连通: $\forall u, v \in V$, $u \to v$ 或 $v \to u$

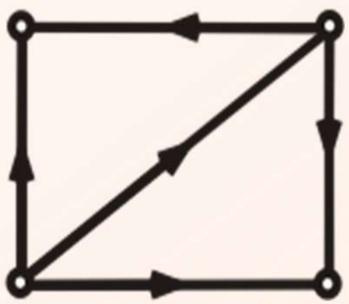
*D*强连通: $\forall u, v \in V$, $u \leftrightarrow v$



强连通



单向连通



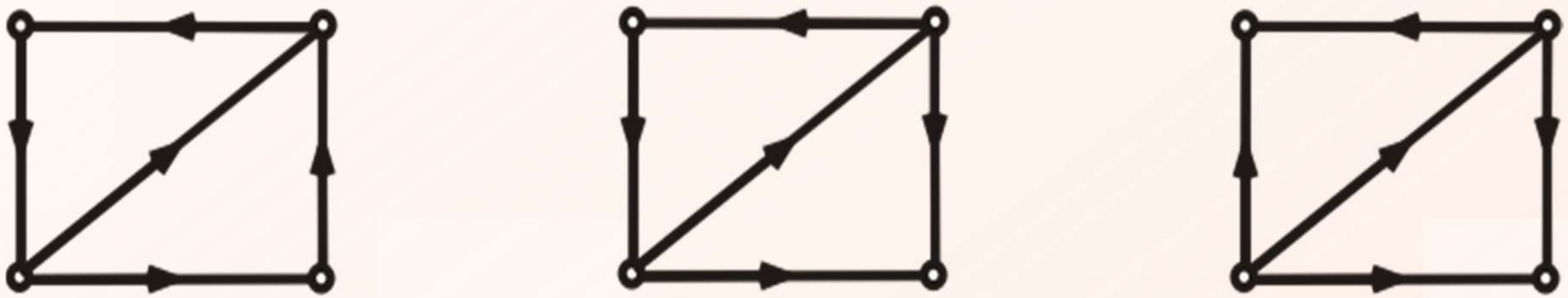
弱连通

强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

6.2有向图的连通性

强连通判别定理：有向图D强连通，当且仅当D中存在一条经过所有顶点的有向回路。

单向连通判别定理：有向图D单向连通，当且仅当D中存在一条经过所有顶点的有向通路。



强连通　　　　单向连通　　　　弱连通

6.3有向图的矩阵表示

- 邻接矩阵A：表示两点是否邻接
- 可达矩阵C（P）：表示两点间是否可达
- 关联矩阵M：表示点与边是否关联

6.3有向图的矩阵表示

有向图的邻接矩阵

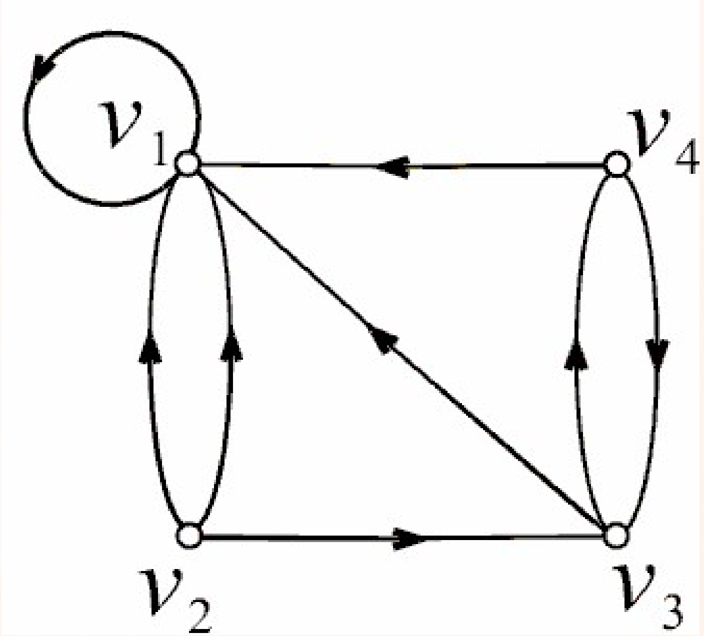
定义 设有向图$D=\langle V, E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 a_{ij} 为从顶点v_i到v_j的有向边的条数，称 n 阶方阵 $(a_{ij})_{n\times n}$为D的邻接矩阵, 记作A_D。

6.3有向图的矩阵表示

有向图的邻接矩阵

例：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$



- 性质：(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i=1,2,\dots,n$

  (2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j=1,2,\dots,n$

  (3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---- D中长度为1的通路数

  (4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---- D中长度为1的回路数

6.3有向图的矩阵表示

有向图的通路及回路数

定理 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l\,(l \geq 1)$ 中元素

$\boldsymbol{a}_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数,

$\boldsymbol{a}_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数,

$\sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数。

6.3有向图的矩阵表示

有向图的通路及回路数

推论 设$B_l = A + A^2 + \ldots + A^l \ (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$$ 为 D 中长度$\leq l$的通路总数,

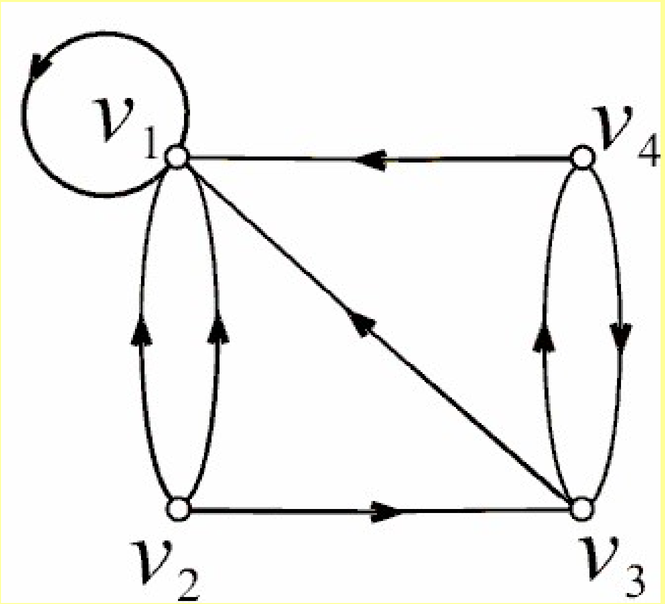
$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$$ 为 D 中长度$\leq l$ 的回路总数。

6.3有向图的矩阵表示

例：在有向图 D 中

(1) 长度为 1, 2, 3, 4 的通路和回路各有多少条?

(2) 长度 ≤ 4 的通路和回路各有多少条?



6.3有向图的矩阵表示

解：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
≤ 4	50	8

6.3有向图的矩阵表示

定义 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

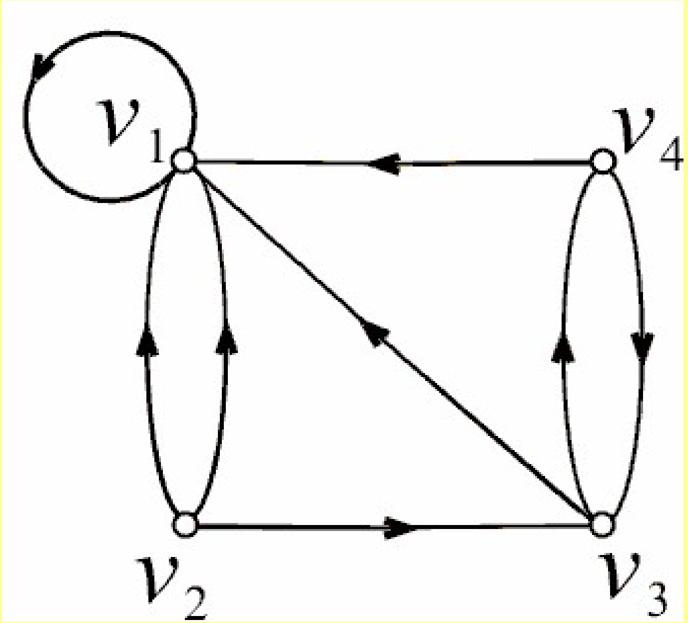
$$c_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1}, & v_i\text{可达}v_j \\ \mathbf{0}, & \text{否则} \end{cases}$$

称$(c_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作C_D或P_D。

6.3有向图的矩阵表示

例：可达矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$$



特点:

P_D主对角线上的元素全为1。

D强连通当且仅当P_D元素全为1。

6.3有向图的矩阵表示

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

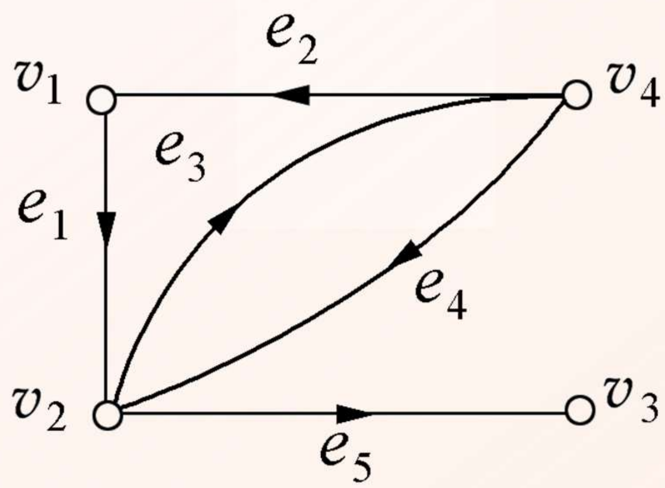
则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为M_D。

6.3有向图的矩阵表示

有向图的关联矩阵

例

$$M_D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



特点:

(1) 每一列恰好有一个 1 和一个 -1

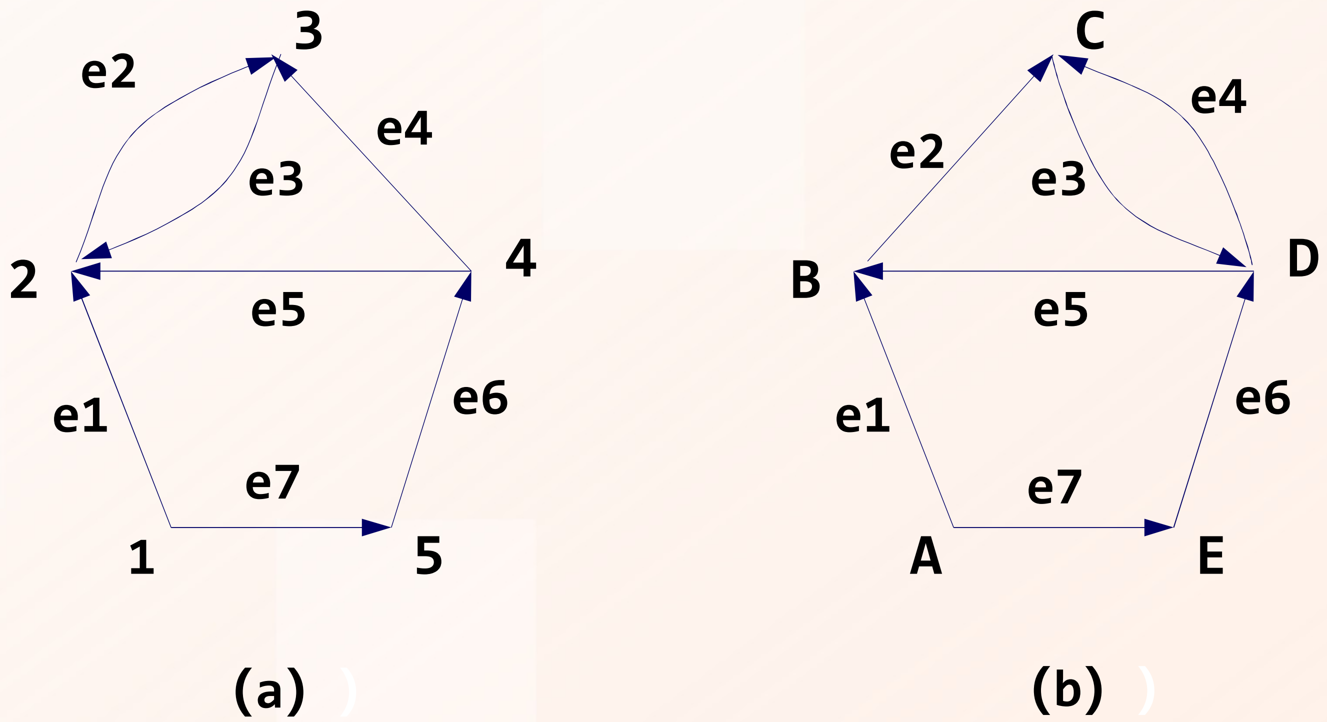
(2) 第 i 行 1 的个数等于$d^+(v_i)$, -1 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1 的总数等于-1 的总数, 且都等于边数 m

(4) 平行边对应的列相同

作业

- 习题6.1 第1、5、6题，其中第6题只做图a



第5题图