应用离散数学

杭州电子科技大学

集合与关系

定义6 (序偶)

由2个元素a, b按顺序排列成的二元组被称为一个序偶。

序偶的性质

1. 当$a \neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$；
2. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$的充要条件是$a = c$且$b = d$。

定义7 (笛卡尔积)

设A, B是两个集合，称下面的集合为A, B构成的笛卡尔积

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

例6

设$A=\{a,b,c\},B=\{x,y\},C=\emptyset$，求

- $A\times B=\{\langle a,x\rangle,\langle a,y\rangle,\langle b,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,x\rangle,\langle c,y\rangle\}$
- $B\times A=\{\langle x,a\rangle,\langle x,b\rangle,\langle x,c\rangle,\langle y,a\rangle,\langle y,b\rangle,\langle y,c\rangle\}$
- $B^2=B\times B=\{\langle x,x\rangle,\langle x,y\rangle,\langle y,x\rangle,\langle y,y\rangle\}$
- $A\times C=\emptyset$

注1

- 一般情况下$A\times B\neq B\times A$
- 当A,B都是有限集合时，$|A\times B|=|B\times A|=|A|\cdot|B|$

定理3

1. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C),(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
2. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
3. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C),$
   $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

练习 习题3.2 第 1、2 题

定义8 (关系)

设A, B是两个集合，$A \times B$的任一子集被称为A到B的一个(二元)关系。

设$A = B = \{a, b\}$，则$A \times B = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

空关系$R_1 = \emptyset$　　恒等关系$I_A = \{\langle a, a\rangle | a \in A\}$

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$　　全域关系$R_4 = A \times A$

集合A到B上的关系有$|\rho(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|}$个

定义9 (相关定义)

设R是A到B上的一个关系，$a \in A, b \in B$,

- 若$\langle a, b\rangle \in R$，则称$a, b$满足关系$R$，记为$aRb$;
- 若$\langle a, b\rangle \notin R$，则称$a, b$不满足关系$R$，记为$a\not{R}b$;
- R中序偶的第一个元素构成的集合被称为R的**定义域**;
- R中序偶的第二个元素构成的集合被称为R的**值域**;

练习 习题3.2 第 3、4 题

定义10 (关系矩阵)

设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$到$B=\{b_1,\cdots,b_n\}$上的关系，称矩阵$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$为R的**关系矩阵**，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & a_iRb_j\\ 0 & a_i\not R b_j\end{cases}$$

例7

设$A=B=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求关系矩阵$M_R$。

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义11（关系图）

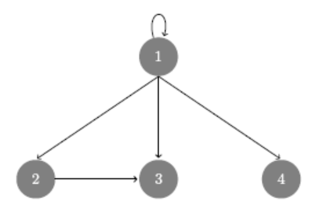
设R是$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$上的关系，称有向图$G=(V,E)$为R的关系图，其中

1. 顶点集合$V=A$;
2. 边集合E按如下规定

$$\text{有向边}(a_i,a_j)\in E$$
$$\Leftrightarrow\langle a_i,a_j\rangle\in R$$

例8

设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，求$R$的关系图。



练习 习题3.2 第 5 题

例9 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cup S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cup S}=(r_{ij}\vee s_{ij})$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cup S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

例10 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$R\cap S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$M_{R\cap S}=(r_{ij}\wedge s_{ij})$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R\cap S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例11 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$\begin{aligned} R^c =& \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in A\times A \\ & \wedge \langle a,b\rangle \notin R\} \\ =& \{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle\} \\ M_{R^c} =& (\neg r_{ij}) \end{aligned}$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^c}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例12 (设$A=\{1,2,3\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$\begin{aligned} R-S &= \{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\} \\ M_{R-S} &= M_{R\cap S^c} \\ &= (r_{ij}\wedge \neg s_{ij}) \end{aligned}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

例12 (设$A=\{1,2,3\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$$\begin{aligned} R-S &= \{\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\} \\ M_{R-S} &= M_{R\cap S^c} \\ &= (r_{ij}\wedge\neg s_{ij}) \end{aligned}$$

$$M_R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_S=(s_{ij})=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_{R-S}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$R\oplus S=?,\ M_{R\oplus S}=?$$

定义12 (复合关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，S是集合B到集合C的一个关系，则称从A到C的关系

$$R \circ S = \{\langle a, c\rangle | \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}$$

为R到S的复合关系。

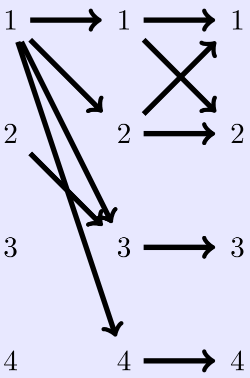
例13 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

$R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\ \langle 2,3\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\ ,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

复合运算不满足交换律。

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle\},$$
$$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$$



复合关系矩阵的计算

设R,S都是集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$上的关系，记

$$M_R=(r_{ij})_{n\times n}, M_S=(s_{ij})_{n\times n}, M_{R\circ S}=(t_{ij})_{n\times n}$$

分别表示$R,S,R\circ S$的关系矩阵。记$B=\{1,2,\cdots,n\}$，则

$$\begin{aligned}
&t_{ij}=1\\
\Leftrightarrow&\langle a_i,a_j\rangle\in R\circ S\\
\Leftrightarrow&\exists a_k\in A(\langle a_i,a_k\rangle\in R\wedge\langle a_k,a_j\rangle\in S)\\
\Leftrightarrow&\exists k\in B(r_{ik}=1\wedge s_{kj}=1)\\
\Leftrightarrow&(r_{i1}=1\wedge s_{1j}=1)\vee(r_{i2}=1\wedge s_{2j}=1)\vee\cdots\vee(r_{in}=1\wedge s_{nj}=1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& t_{ij} = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a_i, a_j \rangle \in R \circ S \\
\Leftrightarrow & (r_{i1} = 1 \wedge s_{1j} = 1) \vee (r_{i2} = 1 \wedge s_{2j} = 1) \vee \cdots \vee (r_{in} = 1 \wedge s_{nj} = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} & \cdots & r_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
{\color{red} r_{i1}} & {\color{purple} r_{i2}} & \cdots & {\color{green} r_{ik}} & \cdots & {\color{blue} r_{in}} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nk} & \cdots & r_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & \cdots & j & \cdots & n \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
s_{11} & \cdots & {\color{red} s_{1j}} & \cdots & s_{1n} \\
s_{21} & \cdots & {\color{purple} s_{2j}} & \cdots & s_{2n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{k1} & \cdots & {\color{green} s_{kj}} & \cdots & s_{kn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
s_{n1} & \cdots & {\color{blue} s_{nj}} & \cdots & s_{nn}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

例14 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R\circ S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$
2. $S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$
4. $R\circ (S\circ R)=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

定理4 (复合关系的结合律)

设A, B, C, D是四个集合，R, S, T分别是A到B、B到C，C到D的关系，则

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

记$R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n}$，特别地，$R^0 = I_A$。

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}, \qquad (R^m)^n = R^{mn}$$

定理5（复合关系的性质）

设A, B, C, D都是集合，R, T分别是A到B、C到D的关系，而S_1, S_2都是B到C的关系，则

1. $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
2. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
3. $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$
4. $(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T)$

定理6

设R是有限集合A上的关系，则存在自然数$s, t, s < t$，使得$R^s = R^t$。

定义13 (逆关系)

设R是集合A到集合B的一个关系，则称B到A的关系

$$R^{-1} = \{\langle b, a\rangle | \langle a, b\rangle \in R\}$$

为R的逆关系。

显然

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. 设$M_R, M_{R^{-1}}$分别表示R, R^{-1}的关系矩阵，则

$$M_{R^{-1}} = M_R^T.$$

例15 (设$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$, $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$是$A$上的二元关系，求)

1. $R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
2. $S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$
3. $(R\circ S)^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$
4. $R^{-1}\circ S^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

回忆$S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$

定理7 (设R是集合A到B上的关系，S是集合B到C上的关系，则$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.)

证明.

$$
\begin{aligned}
& \langle x,z\rangle \in (R\circ S)^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \langle z,x\rangle \in R\circ S \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle z,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in S) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists y(\langle x,y\rangle \in S^{-1} \wedge \langle y,z\rangle \in R^{-1}) \\
\Longleftrightarrow\ & \langle x,z\rangle \in S^{-1}\circ R^{-1}
\end{aligned}
$$

作业 习题3.2 第 6、8 题