图

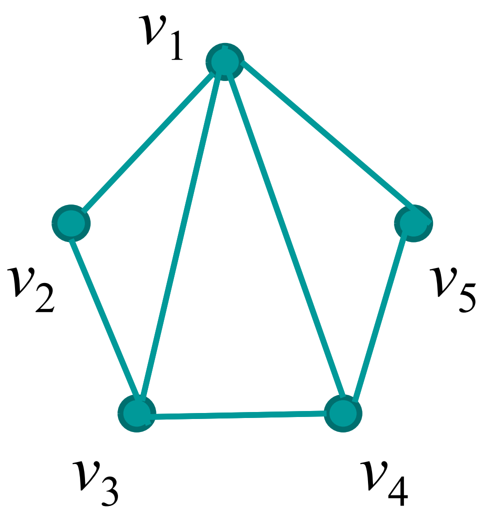
- 基本概念
- 图的连通性
- 树
- 图的矩阵表示
- 欧拉图与哈密顿图

图的矩阵表示

- 邻接矩阵A_G：表示两点是否邻接
- 连通矩阵C_G：表示两点是否连通
- 关联矩阵M_G：表示点与边是否关联

邻接矩阵

- **定义5.14** 设G=<V, E>是p阶图, 则p阶方阵$A_G = (a_{ij})$称为G的邻接矩阵，其中元素a_{ij}为起点v_i到终点v_j的边数。
- 求下图的邻接矩阵，并观察矩阵特点。



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

➢对称非负整数矩阵

➢顶点次序相关性

➢对于无环图：每行之和 = 对应顶点度数，所有元素之和 = $2q$。

邻接矩阵

- 一些特殊图的邻接矩阵：

（1）无环图

- 主对角线上全0

（2）简单图

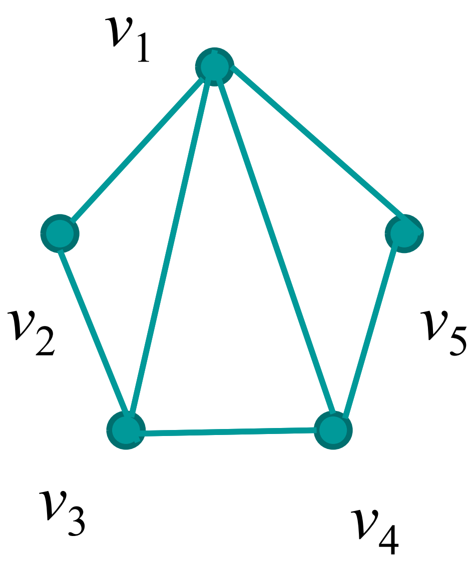
- 主对角线上全0，且是(0,1)矩阵【没有>1的值】

（3）完全图

- 主对角线上全0，其余位置全1

邻接矩阵

- 求下图的邻接矩阵A_G以及A_G^2



$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_G^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

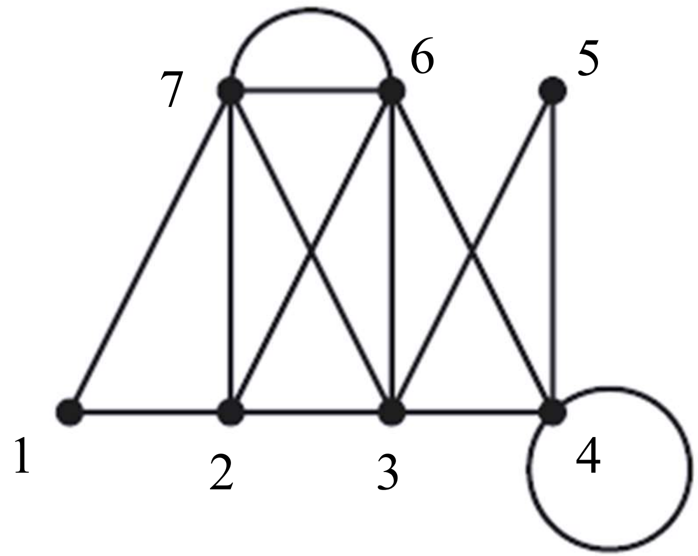
A_G的二次方
有什么含义？

邻接矩阵的幂

- **定理5.13** 设矩阵A是p阶图G=<V, E>的邻接矩阵，其中，V={$v_1, v_2, \ldots, v_p$}，则A的n次幂A^n中的元素$a_{ij}^{(n)}$等于从v_i到v_j的长度为n的通路的总数。【教材P159勘误】
- $a_{ii}^{(n)}$等于通过v_i的长度为n的回路的总数。
- **推论1** v_i到v_j之间的距离是使A^n中元素$a_{ij}^{(n)}$不为0的最小正整数n
- **推论2** $b_{ij}^{(k)} = a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \ldots + a_{ij}^{(k)}$是$v_i$到$v_j$的长度$\leq k$的通路的总数。

邻接矩阵的幂

- 例5.16：先求出下图的邻接矩阵，再求：
  （1）点4到点7之间长度为3的通路条数
  （2）点4到点7之间长度≤3的通路条数
  （3）点4到点7之间的距离
  （4）经过点3的长度为3的回路条数

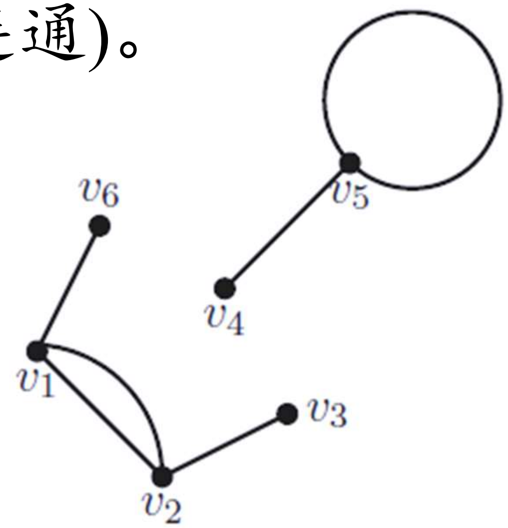


- 解：邻接矩阵A_G（见教材）
  （1）A_G^3中元素$a_{47}^{(3)}$的值
  （2）$a_{47}+a_{47}^{(2)}+a_{47}^{(3)}$
  （3）A_G，A_G^2，A_G^3……中寻找使$a_{47}^{(n)}$不为0的最小n
  （4）A_G^3中元素$a_{33}^{(3)}$的值

连通矩阵

- **定义5.15** 设G=<V, E>是p阶图，其中，V=$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$，则$p$阶方阵$C_G=(c_{ij})_{p\times p}$称为G的连通矩阵，其中元素$c_{ij}=1$ (若v_i与v_j连通)，$c_{ij}=0$ (若v_i与v_j不连通)。

- $C_G=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0&1\\1&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$



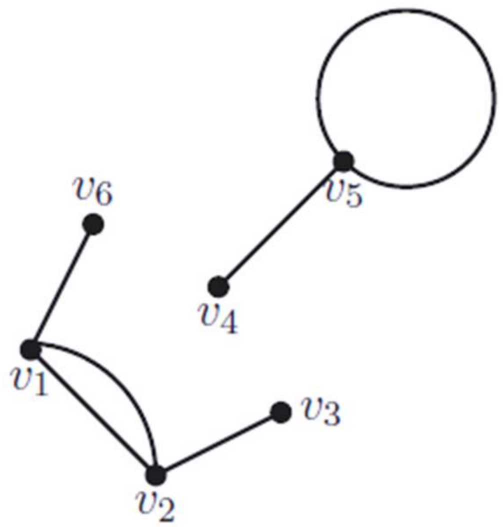
- 连通图的连通矩阵有什么特点？
- 若图G有n个连通分图，其连通矩阵有何特点？

邻接矩阵→连通矩阵

- 设G = <V, E> 是p阶图，其邻接矩阵是A，则令

$$C_A = A^0 + A + A^2 + \ldots + A^{p-1}$$

再将C_A中非零元改为1，零元不变，即得到连通矩阵C_G

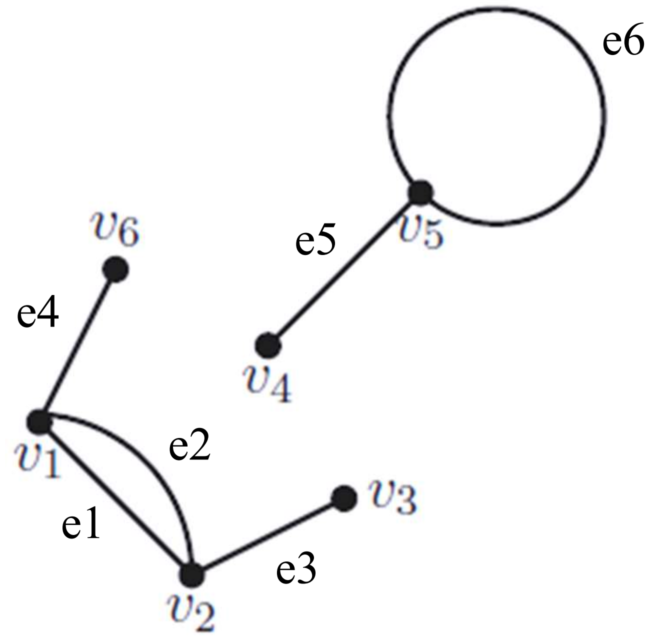


$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_G = I_6 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关联矩阵

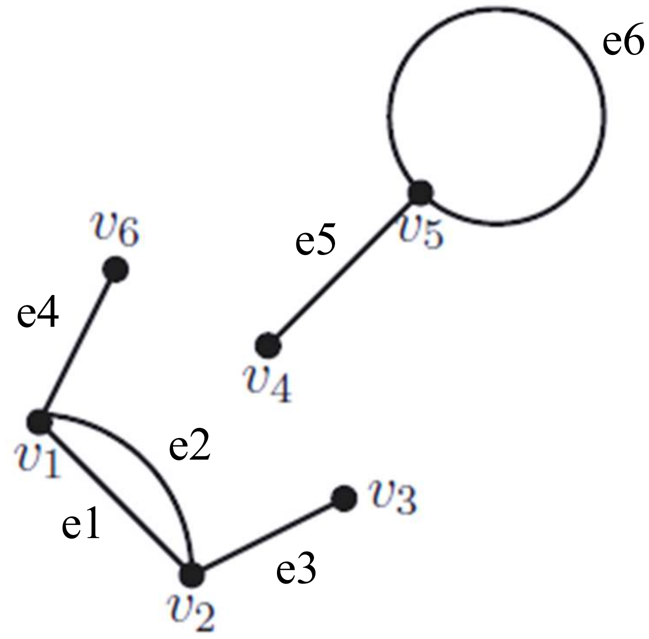
- **定义5.16** 设G = <V, E>是(p, q)图，则$p\times q$阶矩阵$M_G = (m_{ij})_{p\times q}$称为G的关联矩阵，
  - $m_{ij} = 2$ (e_j关联v_i且是环)，
  - $m_{ij} = 1$ (e_j关联v_i且不是环)
  - $m_{ij} = 0$ (e_j不关联v_i)



$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

关联矩阵的性质

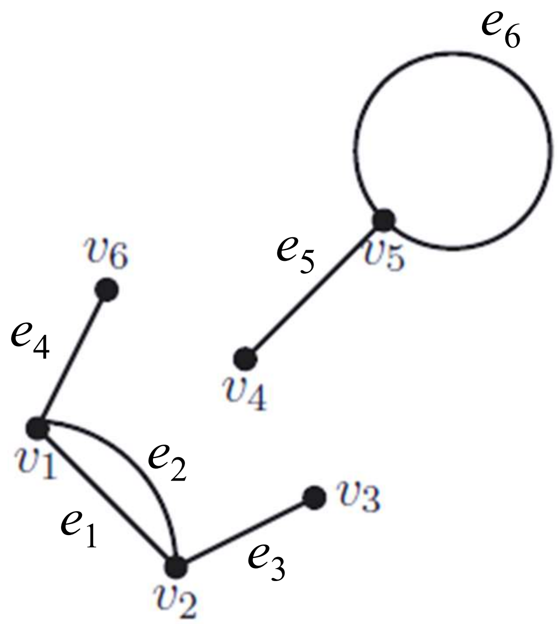
- 行数等于p，列数等于q
- 每列元素之和为2
- 每行元素之和等于该顶点的度数
- 所有元素之和为$2q$
- 平行边对应列相同
- 若某行全0，则该顶点为孤立点
- 若某行有2，则该顶点有环
- 若某行只有1个1，其余全0，则该顶点为悬挂点



$$M_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

图的矩阵表示

- 邻接矩阵A_G： 表示两点是否邻接
- 连通矩阵C_G： 表示两点是否连通
- 关联矩阵M_G： 表示点与边是否关联



- 作业： 习题5.4 第1, 2题

（其中图5.2的边顺序如右图）