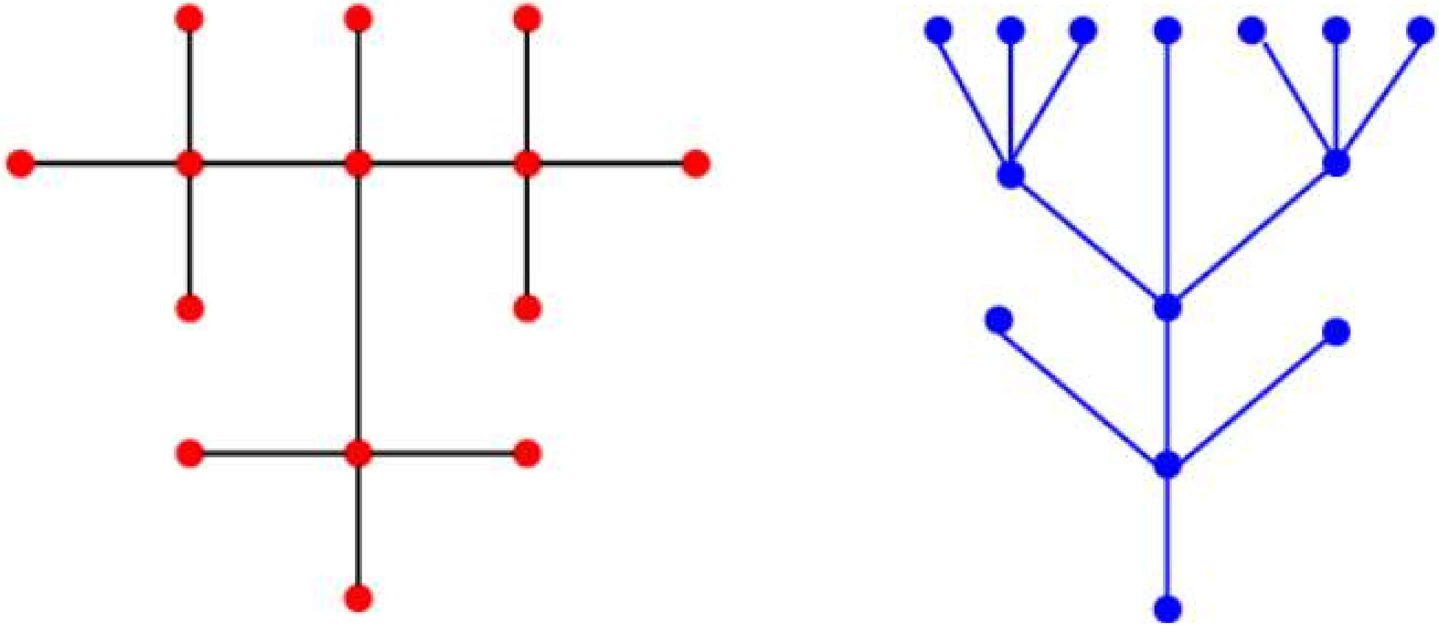
图

- 基本概念
- 图的连通性
- 树
- 图的矩阵表示
- 欧拉图与哈密顿图

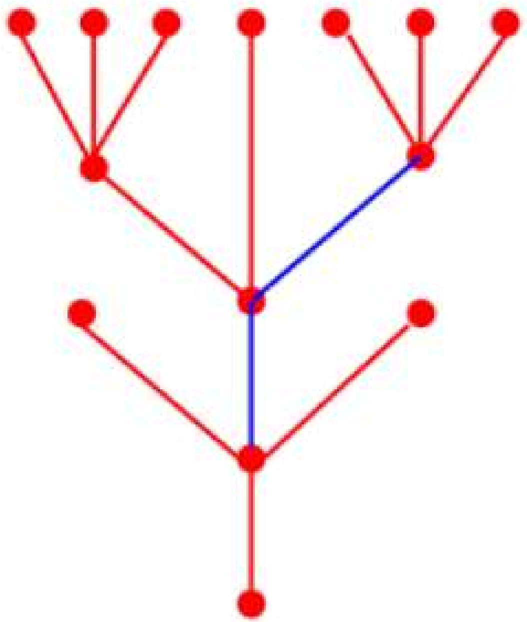
基本概念

- 在连通图中，去掉回路上的任何一条边都不影响整个图的连通性
- 定义5.12 不含回路的连通图称为树。每个连通分图都是树的非连通图称为林。

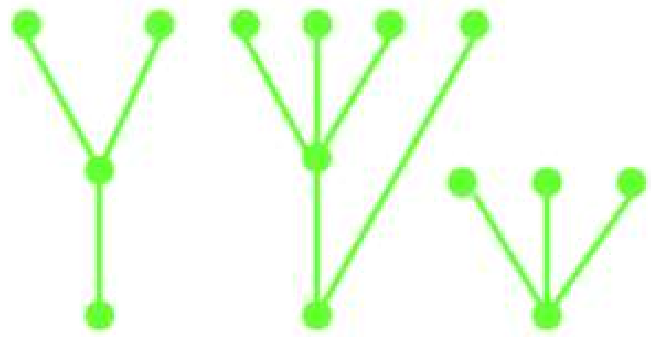
基本概念



基本概念



树



林

树（性质、判定）

- 设G是(p,q)图，则下述命题等价：

(1) G是树

(2) G中任意两点之间有唯一一条基本通路

(3) G连通，且任何边都是桥

(4) G连通，且$q = p$-1

(5) G中无回路，且$q = p$-1

(6) G中无回路，且在任意两个不同的顶点之间加一条边

，则恰有一条基本回路

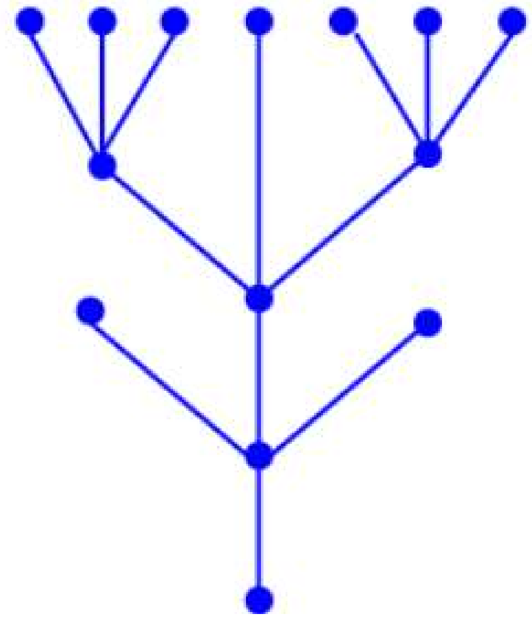
树

(1) G是树

(2) G中任意两点之间有唯一一条基本通路

- 证明：(1)⇒(2)

➢ 用反证法：假设存在两点u, v，且u, v之间存在不止一条基本通路。这样就可以取两条从u到v的不相同的基本通路，它们至少有一条边不相同，这样从两条基本通路中去掉所有相同的边，在剩下顶点之间必然至少有一条基本回路。这与G是树矛盾。



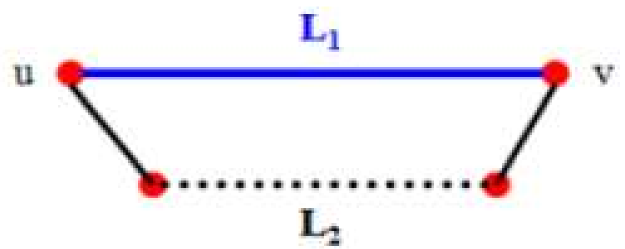
树

(2) G中任意两点之间有唯一一条基本通路

(3) G连通，且任何边都是桥

- 证明：(2)$\Rightarrow$(3)

> 由于G中任何两点之间都有基本通路，所以G中任何两点都是连通的，从而G连通。再用反证法：假设某条边(u, v)不是桥，则必然在$G-(u, v)$中存在一条从u到v的基本通路。这样，该基本通路与边(u, v)就是连接u和v的两条不同的基本通路，从而与题设条件任何两点存在唯一一条基本通路矛盾，所以(u, v)是桥。

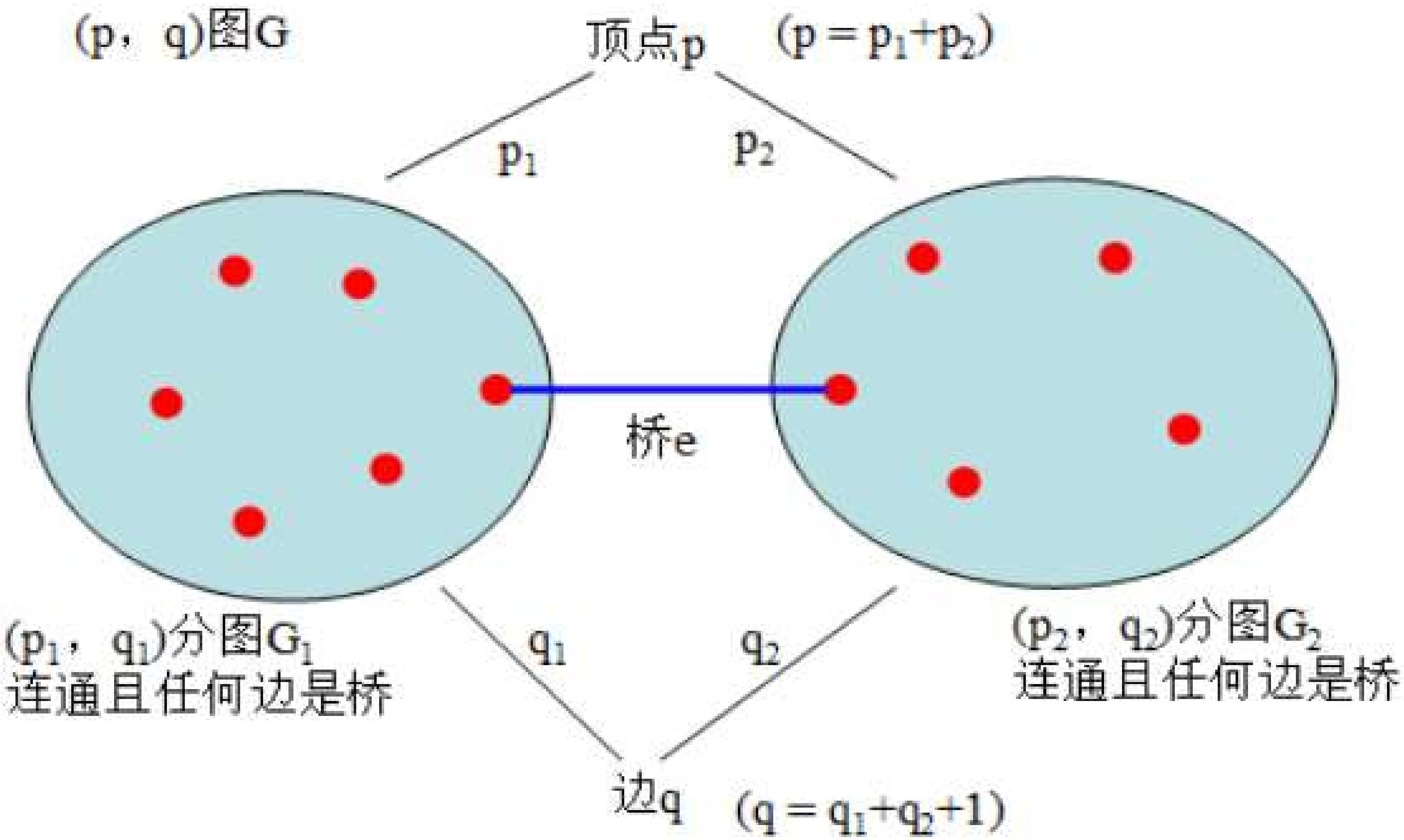


树

(3) G连通，且任何边都是桥

(4) G连通，且$q = p$-1

- 证明：(3)⇒(4)



树

(3) G连通，且任何边都是桥

(4) G连通，且$q = p$-1

- 证明：(3)⇒(4)

- 只需证明$q = p-1$，用数学归纳法：对顶点数进行归纳。
- 当p=1时，因G的任何边都是桥，所以G不可能含有环，即q=0，满足$q = p-1$。
- 假设当$p \le n$时，$q = p-1$成立。当$p=n+1$时，由于任何边e都是桥，所以G−e恰好是两个连通分图不相交的并。分别设这个连通分图为G_1和G_2，并进一步假设G_1为(p_1, q_1)图，G_2为(p_2, q_2)图，则有$p=p_1+p_2$，$q=q_1+q_2+1$。

树

(3) G连通，且任何边都是桥

(4) G连通，且$q = p\text{-}1$

- 证明：(3)⇒(4)

- 这样就有$p_1 \le n$，$p_2 \le n$，G_1和G_2连通且任何边都是桥(若G_1或G_2的某条边e'不是桥，则e'也不是G的桥，从而与题设条件G中任何边都是桥相矛盾)，所以根据归纳假设有$q_1=p_1-1$，$q_2=p_2-1$。故$q=q_1+q_2+1=p_1-1+p_2-1+1=p-1$，即当$p=n+1$时，$q = p-1$成立。

树

(4) G连通，且$q=p$-1

(5) G中无回路，且$q=p$-1

- 证明：(4)⇒(5)

➢ 只需证明G中无回路，用反证法。

➢ 假设G中有回路，则去掉该回路中的任何一条边后所得的图仍然是连通图。若剩下的图G'仍然有回路，则可以继续去掉回路上的边，并保持连通性不变。最终将得到一个无回路的连通图G^*，比G至少少一条边。这时G^*是树，满足命题(1)，而(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)，所以G^*中边的条数为p−1。与G有p−1条边矛盾，所以G中无回路。

树

(5) G中无回路，且$q=p$-1

(6) G中无回路，且在任意两个不同的顶点之间加一条边，则恰有一条基本回路

- 证明：(5)⇒(6)

- 先证G连通，用反证法。假设G不连通，则G可以看成是两个或两个以上连通分图不相交的并，设这些连通分图为$G_1, G_2, \ldots\ldots, G_k$ ($k\geq2$)，并且分别是(p_1, q_1)图, (p_2, q_2)图, …, (p_k, q_k)图。由于G中无回路，所以每一个连通分图也无回路，即每个连通分图都是树。前面已经证明了(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)。因此有$q_i=p_i-1$, $i=1, 2, \ldots, k$。于是$q=q_1+\ldots+q_k=p_1+\ldots+p_k-k=p-k$，由于$k\geq2$，所以与题设条件$q=p-1$矛盾。因此G连通。

树

(5) G中无回路，且$q = p$-1

(6) G中无回路，且在任意两个不同的顶点之间加一条边，则恰有一条基本回路

- 证明：(5)⇒(6)
  - 再证恰有一条基本回路：由于G连通，所以G上的任意两个不同的顶点之间必然存在基本通路(定理5.3)，若在两个不同的顶点之间再加一条边，则两点之间的这条基本通路与新加的边就构成了基本回路。若加入边后，形成了两条基本回路，则说明在加入边之前，原图有基本回路，与题设条件矛盾，所以加入边后，有基本回路且仅有一条。

树

(6) G中无回路，且在任意两个不同的顶点之间加一条边，则恰有一条基本回路

(1) G是树

- 证明：(6)⇒(1)

> 只需证明G连通，用反证法。假设G不连通，则G至少有两个连通分图，分别在这两个连通分图取一个顶点，显然，这两个顶点不连通。现在这两个顶点之间加入一条边，由题设条件可知恰有一条基本回路，这说明在加入这条边之前这两点间有通路相连， 这与该两点不连通相矛盾。由此可知G连通，这样，根据题设条件和树的定义可知，G是树。

树

- 设G是(p,q)图，则下述命题等价：

(1) G是树

(2) G中任意两点之间有唯一一条基本通路

(3) G连通，且任何边都是桥

(4) G连通，且$q = p\text{-}1$

(5) G中无回路，且$q = p\text{-}1$

(6) G中无回路，且在任意两个不同的顶点之间加一条边

，则恰有一条基本回路

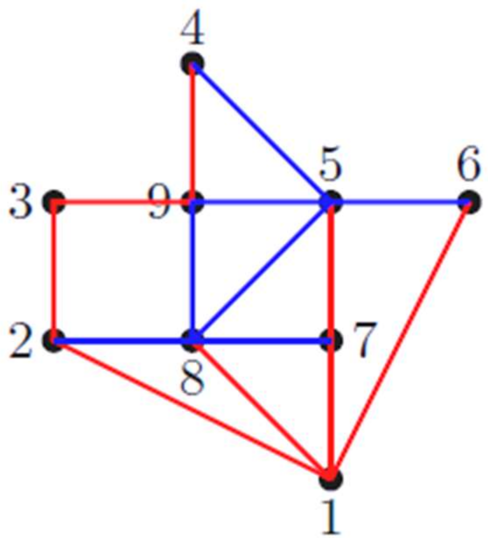
树

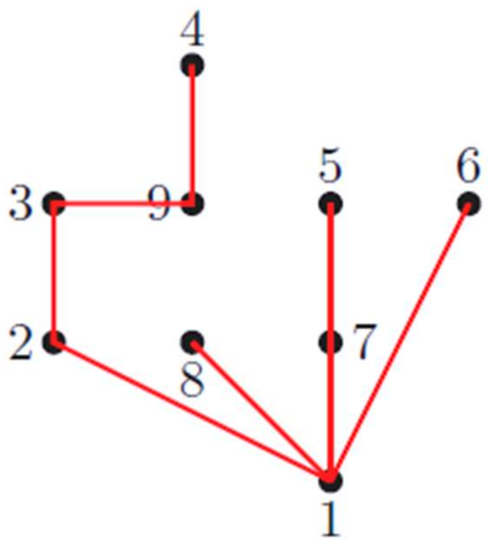
- **例1** 已知树T有5个1度顶点，3个2度顶点，其余都是3度顶点，问T一共有几个顶点？

- **例2** 证明：顶点数大于或等于2的树至少有两个悬挂点；顶点数大于或等于3的树至少有一个点不是悬挂点。

生成树

- 定义5.13 若T是图G的生成子图，且是树，则称T是G的生成树。
- $\forall e \in E(G)$，若e在生成树T上，则称e为T的枝，否则称e为T的弦





生成树

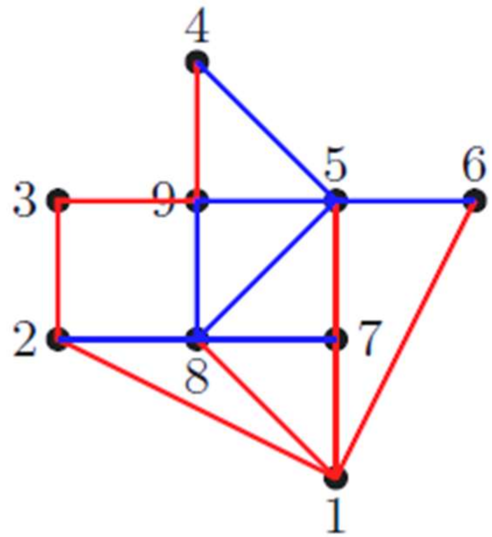
- 定理5.10 图G有生成树，当且仅当G是连通图。
- 证明：必要性显然，只须证明充分性。

若G中无回路，则G本身是G的一个生成树。若G中有回路，则任取一回路，随意地删除回路上的一条边，若还有回路再删除回路上的一条边，直到最后无回路为止，易知，所得图无回路，连通且为G的生成子图，所以为G的生成树。

- 推论1 若一个(p, q)图是连通图，则$q \geq p-1$。
- 推论2 若T是(p, q)图G的生成树，则T有$p-1$条枝，$q-p+1$条弦。

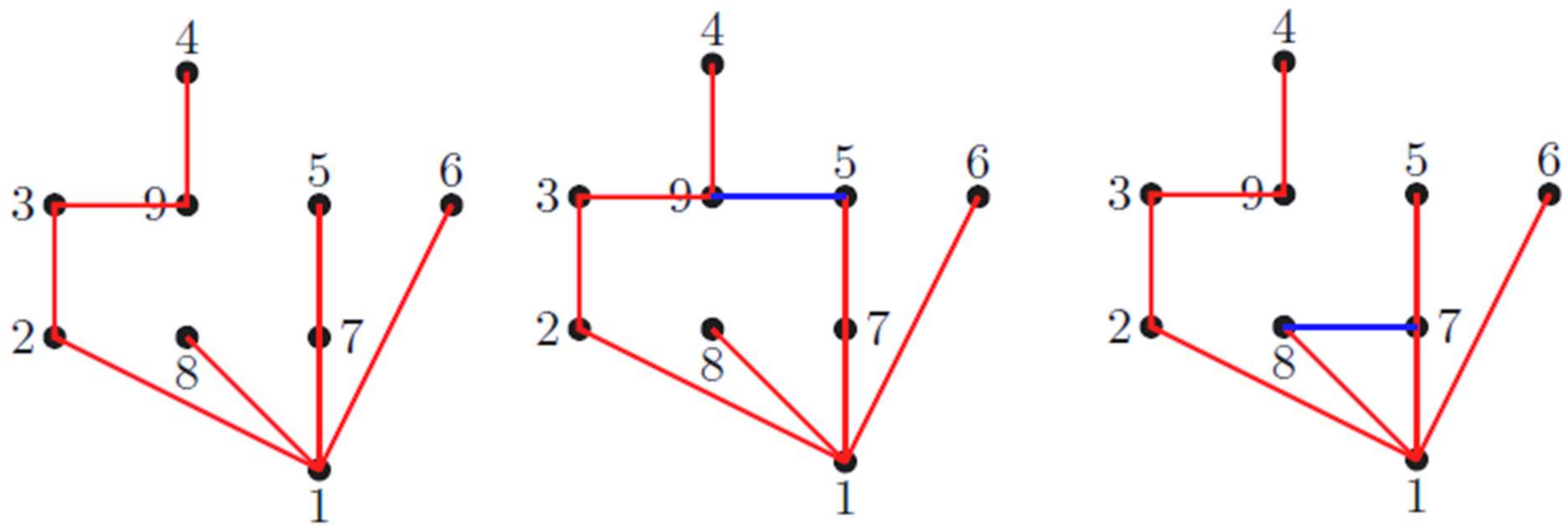
生成树

- **定理5.11** 设T是图G的生成树, 则
  - G的任何回路都至少包含T的一条弦
  - e为T的弦, 则G中存在且只存在一条只含弦e，其余都是枝的基本回路，称为G的对应T的弦e的基本回路
- 分别求弦(5, 9)、(7, 8)对应的基本回路



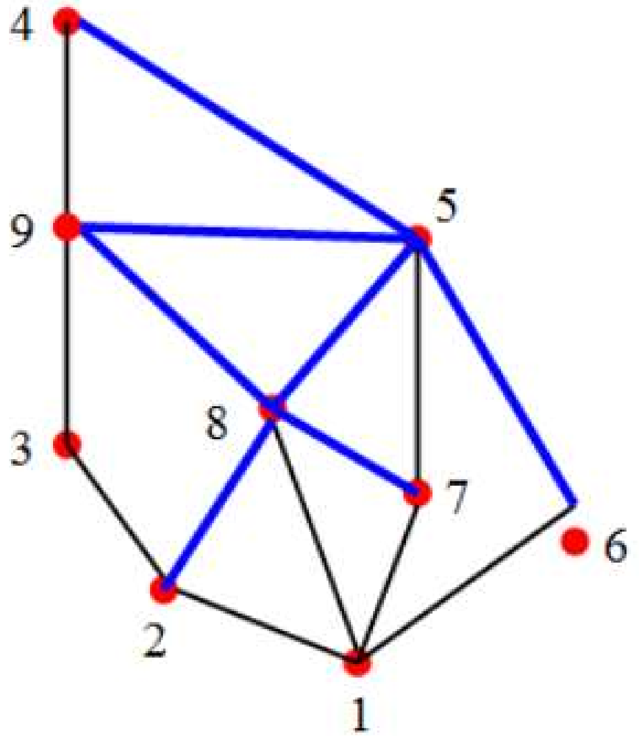
生成树

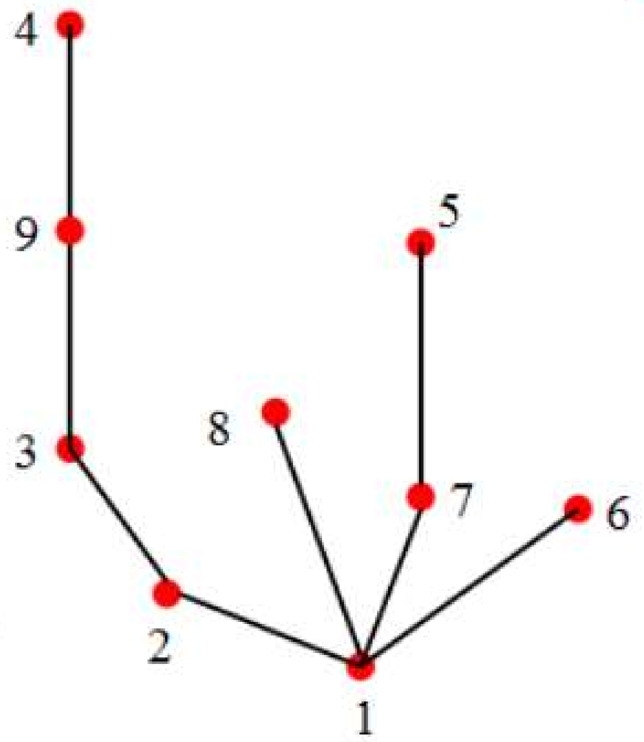
- 弦(5, 9)、(7, 8)对应的基本回路



生成树

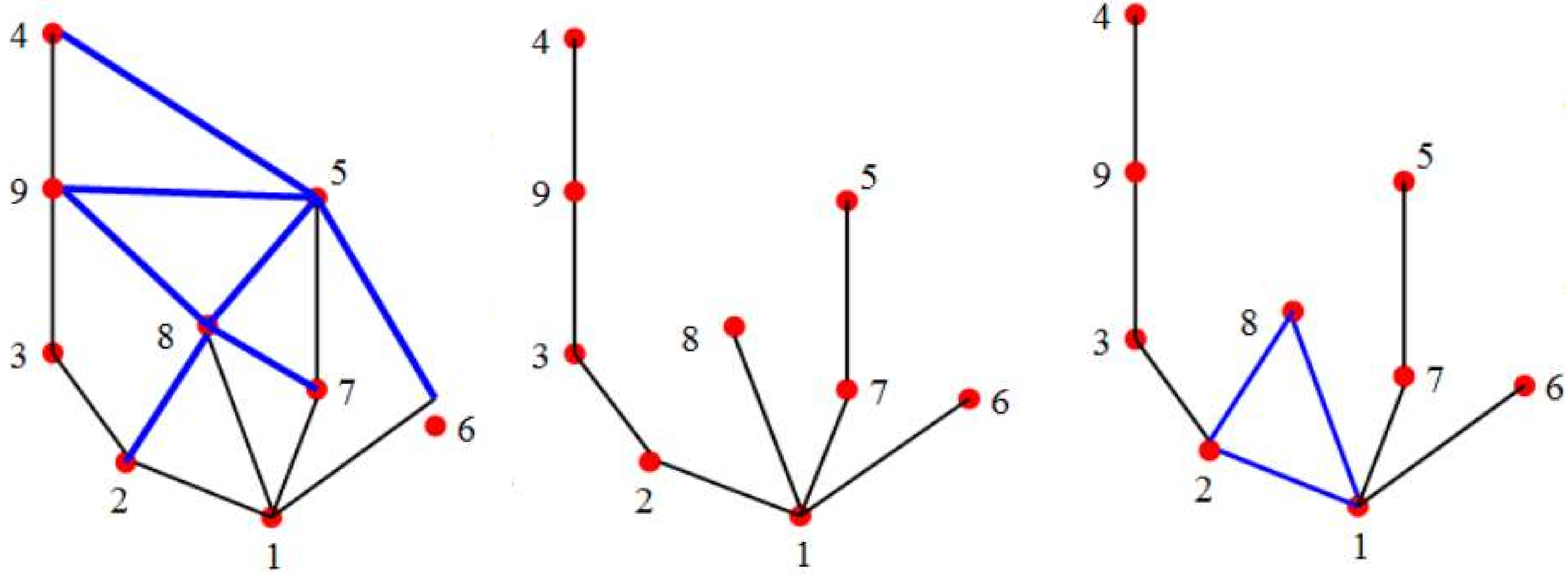
- 给定图G及其一个生成树，分别求弦(2, 8)、(8, 9)对应的基本回路





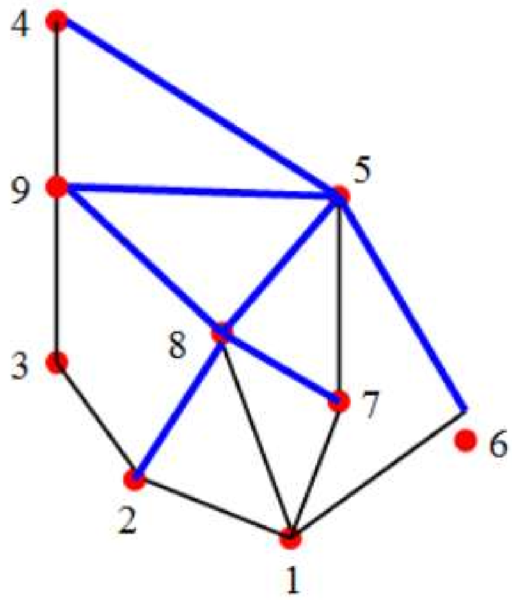
生成树

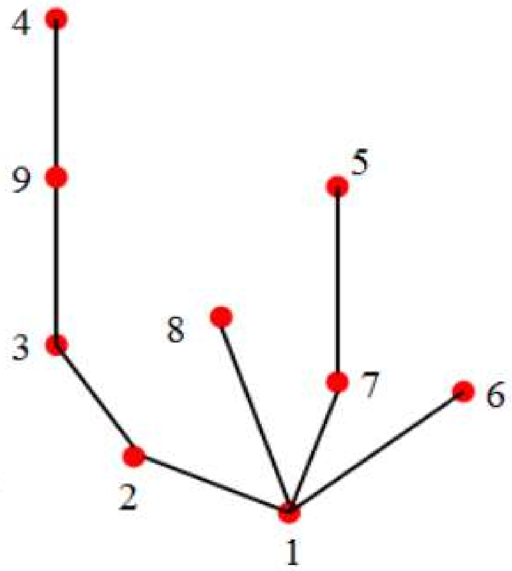
- 弦(2, 8)对应的基本回路

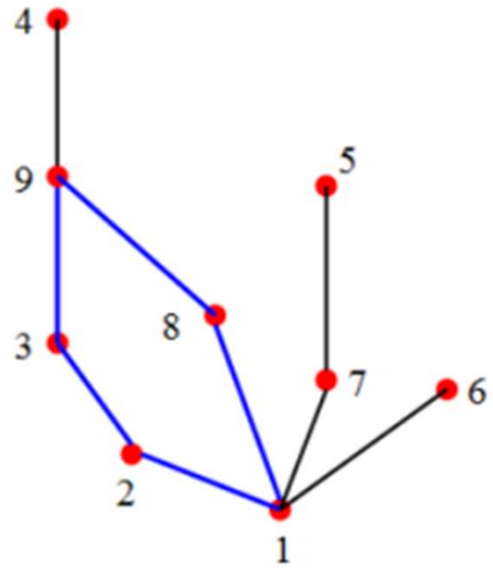


生成树

- 弦(8, 9)对应的基本回路

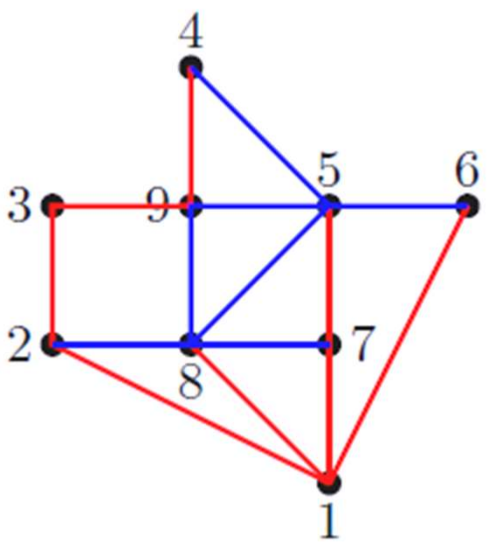






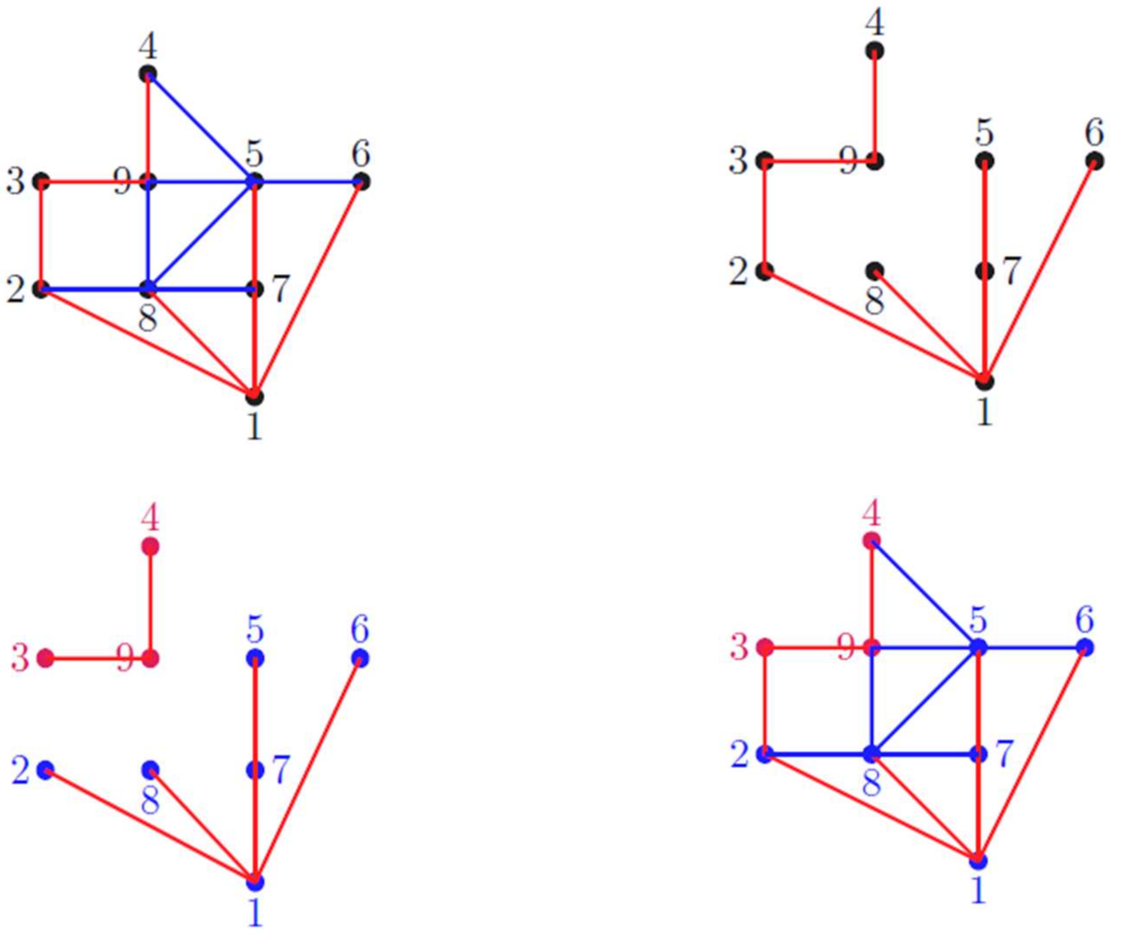
生成树

- **定理5.12** 设T是图G的生成树，则
  - G的任一割集都至少包含T的一条枝
  - e为T的枝，则G中恰好只存在一条只含枝e，其余都是弦的割集，称为G的对应T的枝e的基本割集
- 分别求枝(2, 3)、(1, 2)对应的基本割集



生成树

- 枝(2, 3)对应的基本割集

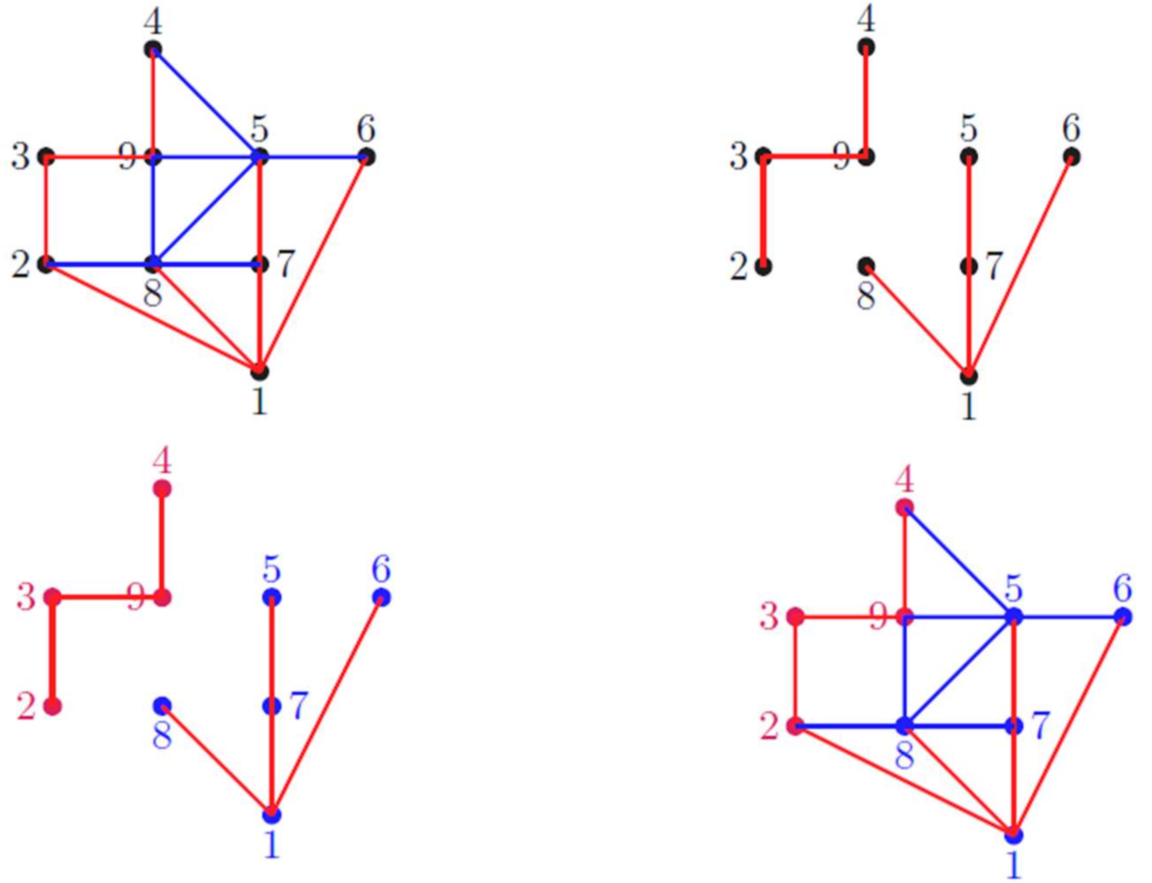


- {(2,3), (8,9), (5,9), (4,5)}

生成树

● 作业：习题5.3 第2、5题

- 枝(1, 2)对应的基本割集



- {(1,2), (2,8), (8,9), (5,9), (4,5)}