应用离散数学

杭州电子科技大学

定义1.11 (初等和与初等积)

- 初等和：由有限个命题变元或其否定组成的析取式；
- 初等积：由有限个命题变元或其否定组成的合取式；
- 0, 1既是初等和也还是初等积；单个变元或其否定既是初等和也是初等积

例

- $\neg p \wedge q, p \wedge \neg q \wedge \neg r, 0, 1, p, \neg q$　初等积
- $\neg p \vee q, p \vee \neg q \vee \neg r, 0, 1, p, \neg q$　初等和

定义1.12 (析取范式与合取范式)

- 析取范式: $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$, 其中$A_i$是初等积;

  如$(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r), (\neg p \wedge q) \vee \neg r$
- 合取范式: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$, 其中$A_i$是初等和;

  如$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r), (\neg p \vee r) \wedge \neg q$

$p \vee \neg q, \neg p \wedge q, 0, 1$ 析取范式、合取范式

练习: P23-1

定理1.5 任意命题公式都存在与其等价的析取范式与合取范式。)

证明.

1. 消去连接词→, ↔

$$A \to B = \neg A \vee B、A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$$

2. 将¬移至命题变元前面

$$\neg\neg A = A,\ \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

□

3 采用适当的分配律

- 要求析取范式，则采用$\wedge$对$\vee$的分配律

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

- 要求合取范式，则采用$\vee$对$\wedge$的分配律

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

例1.12

求$(p \to q) \leftrightarrow r$的析取范式与合取范式。

练习 (求$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$的析取范式和合取范式。)

解:

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p) \\
=& \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \\
=& (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p \\
=& \neg q \vee p \\
=& p \vee \neg q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p) \\
=& \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee p) \\
=& (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee p) \\
=& (\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q \vee p) \\
=& \neg q \vee p \\
=& p \vee \neg q
\end{aligned}
$$

定义1.14 (最小项)

如果在命题变元$p_1, \cdots, p_n$组成的初等积中，

- 每个变元或其否定出现且仅出现一个;
- 各个变元按照其字母或下标次序排列;

则称该初等积为$p_1, \cdots, p_n$的**最小项**。

例 (设A是包含变元p, q的命题公式，判断其是否是最小项?)

- $A = p \vee \neg q, A = \neg p \wedge p \wedge q, A = \neg q \wedge p$ 不是
- $A = p \wedge q, A = \neg p \wedge \neg q$ 是

  n个命题变元可以构成2^n个最小项。

例 (列出命题变元p, q形成的所有最小项)

p	q	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

定理1.8（最小项的性质）

1. 每个最小项只有一个成真赋值
2. 最小项的编码：唯一的成真赋值作为该最小项的编码
   $\neg p \wedge \neg q$：m_{00}；$\neg p \wedge q$：m_{01}；
   $p \wedge \neg q$：m_{10}；$p \wedge q$：m_{11}；
   变元：1；　变元的否定：0
3. $m_i \wedge m_j = 0$ 不同最小项的合取永假；
4. $m_{00} \vee m_{01} \vee m_{10} \vee m_{11} = 1$ 所有最小项的析取永真；

定义1.15 (标准析取范式)

在析取范式中，如果

- 每个初等积都是最小项；
- 最小项按下标递增排列

则称该析取范式为标准析取范式。

标准析取范式的求法：

1. 将命题公式化为析取范式；
   1. 去除$\leftrightarrow, \rightarrow$；
   2. 把$\neg$移至变元前；
   3. 利用$\wedge$对$\vee$的分配率；
2. 消去重复出现的命题变元、最小项以及永假式；
3. 用单位律和否定律补足未出现的命题变元：

$$p = p \wedge 1 = p \wedge (q \vee \neg q) = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

例1.14 (求$(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$的标准析取范式)

练习 (求$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$的标准析取范式:)

$$
\begin{aligned}
&(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p) \\
=&p \vee \neg q \\
=&(p \wedge 1) \vee (\neg q \wedge 1) \\
=&[p \wedge (q \vee \neg q)] \vee [\neg q \wedge (p \vee \neg p)] \\
=&(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
=&m_{00} \vee m_{10} \vee m_{11}
\end{aligned}
$$

例（求以下命题公式的标准析取范式：）

- $(p \to q) \to r$

  $= m_{001} \vee m_{011} \vee m_{100} \vee$

  $m_{101} \vee m_{111}$

- $p \wedge (q \to r)$

  $= m_{100} \vee m_{101} \vee m_{111}$

- $(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

  $= m_{000} \vee m_{001} \vee m_{010}$

  $\vee m_{011} \vee m_{100} \vee m_{101}$

  $\vee m_{110} \vee m_{111}$

$(p \vee (q \wedge r)) \to (p \vee q \vee r)$

$=[\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)]$

$\vee p \vee q \vee r$

$=(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

$\vee p \vee q \vee r$

$=\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

$\vee (p \vee q) \vee r$

定理1.12 (命题公式A中出现的所有最小项的编码实际上 就是A所有的成真赋值。)

- 永真式的标准析取范式包含所有的最小项;
- 永假式的标准析取范式不包含任何最小项，即其标准析取范式为0;
- 可满足式的标准析取范式至少包含一个最小项;

作业: 习题1.4 第3, 4, 5题