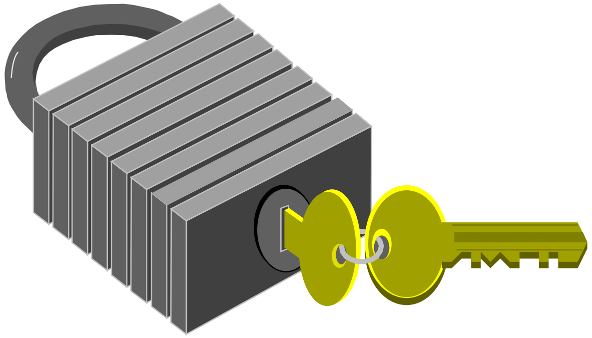


第5章 图

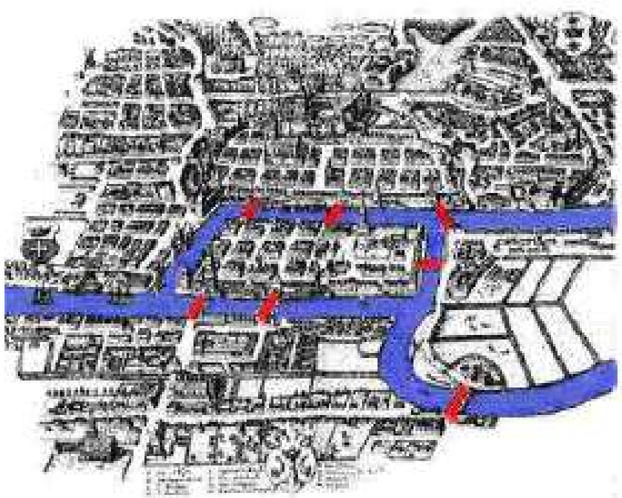
杭州电子科技大学

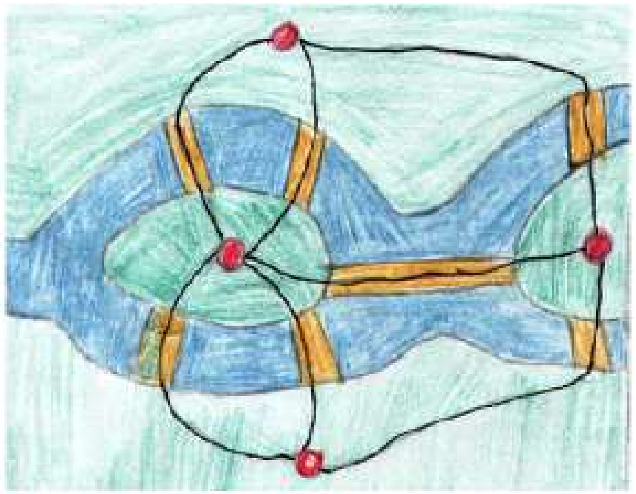
图

- 基本概念
- 图的连通性
- 树
- 图的矩阵表示
- 欧拉图与哈密顿图

图论起源

- 图论的起源—Konigsberg七桥问题：从河岸或岛的某处出发，经过每座桥恰好一次又回到出发点





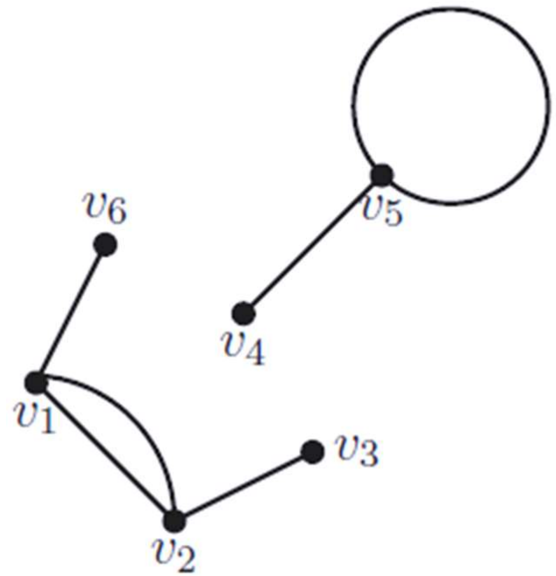
- Konigsberg七桥问题最终由欧拉解决(1736年)

图的基本概念

- 定义**5.1** 一个图G是一个序偶<V, E>，其中，V是一个非空集合，E是V×V的某个多重子集。分别称V和E是图G的顶点集和边集，V中的元素是图G的顶点，E中的元素是图G的边。

- 右图G=<V,E>中：

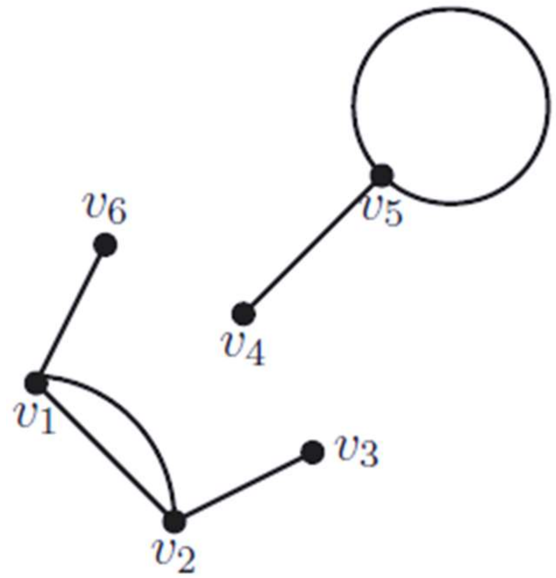
  - $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
  - $E=\{(v_1, v_2), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_5), (v_1, v_6)\}$



图的基本概念

- 对于图G = <V, E>

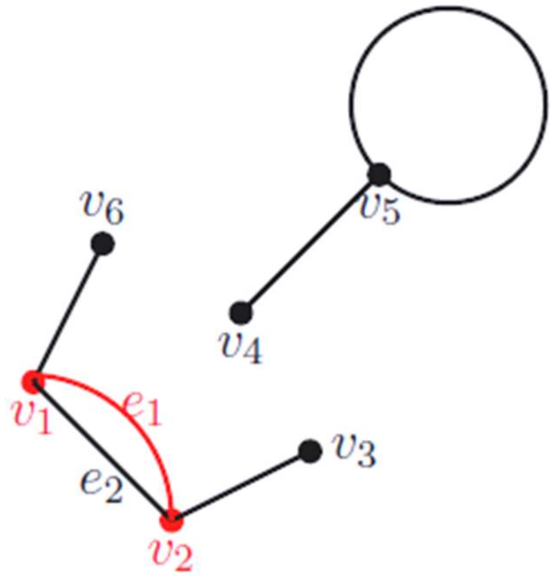
- 若$|V|=p$, $|E|=q$，称G为(p, q)图，p称为图G的阶。
- 若E=∅，则称G为零图
- (1,0)图称为平凡图
- 若V和E都是有限集，则称G是有限图，否则称G是无限图



图的基本概念

- 对于图G = <V, E>

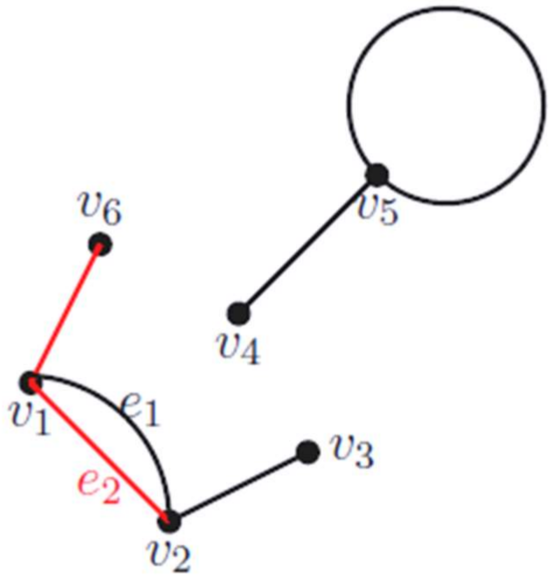
➢ 若边e=(u,v)，则称顶点u与顶点v相邻接；并说顶点u与边e相关联，顶点v与边e相关联；



图的基本概念

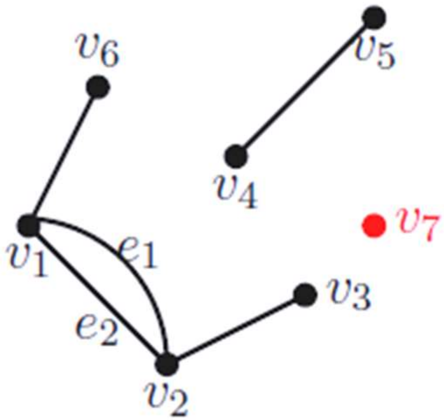
- 对于图G = <V, E>

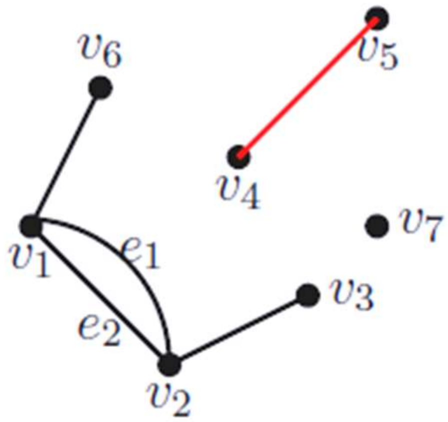
➢ 若边e和边f有一个共同的端点，则称边e和边f相邻接；



图的基本概念

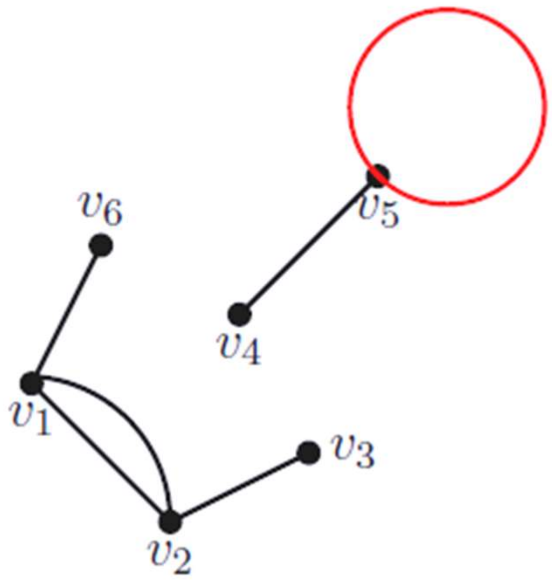
- 对于图G = <V, E>
  - 没有边关联于它的顶点称为孤立点
  - 不与其他任何边相邻接的边称为孤立边。





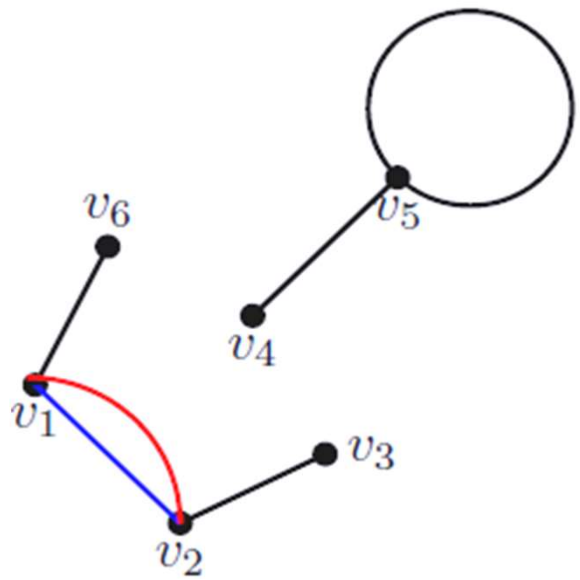
图的基本概念

- 在图中，两端点相同的边称为环；



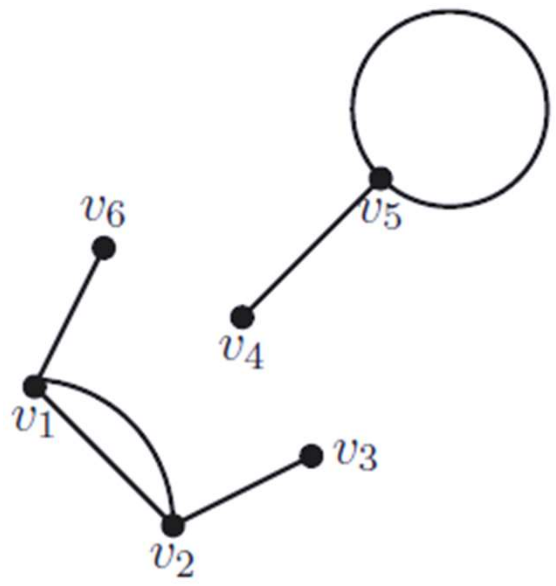
图的基本概念

- 在图中，两端点相同的边称为环；
- 两端点间的若干条边称为平行边；



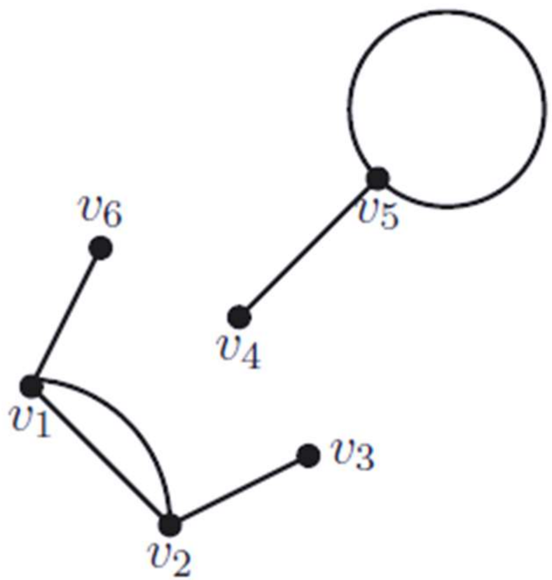
图的基本概念

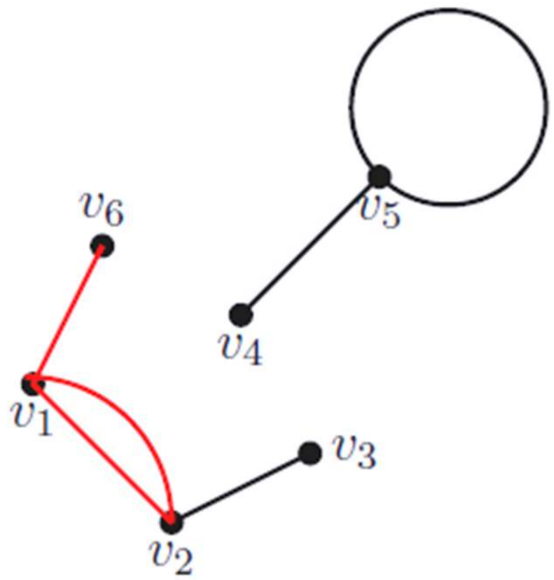
- 在图中，两端点相同的边称为环；
- 两端点间的若干条边称为平行边；
- 有环的图称为带环图；没有环的图称为无环图；有平行边的图称为多重图；既没有环也没有平行边的图，称为简单图。



图的基本概念

- 设G = <V, E>，$v \in V$，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。

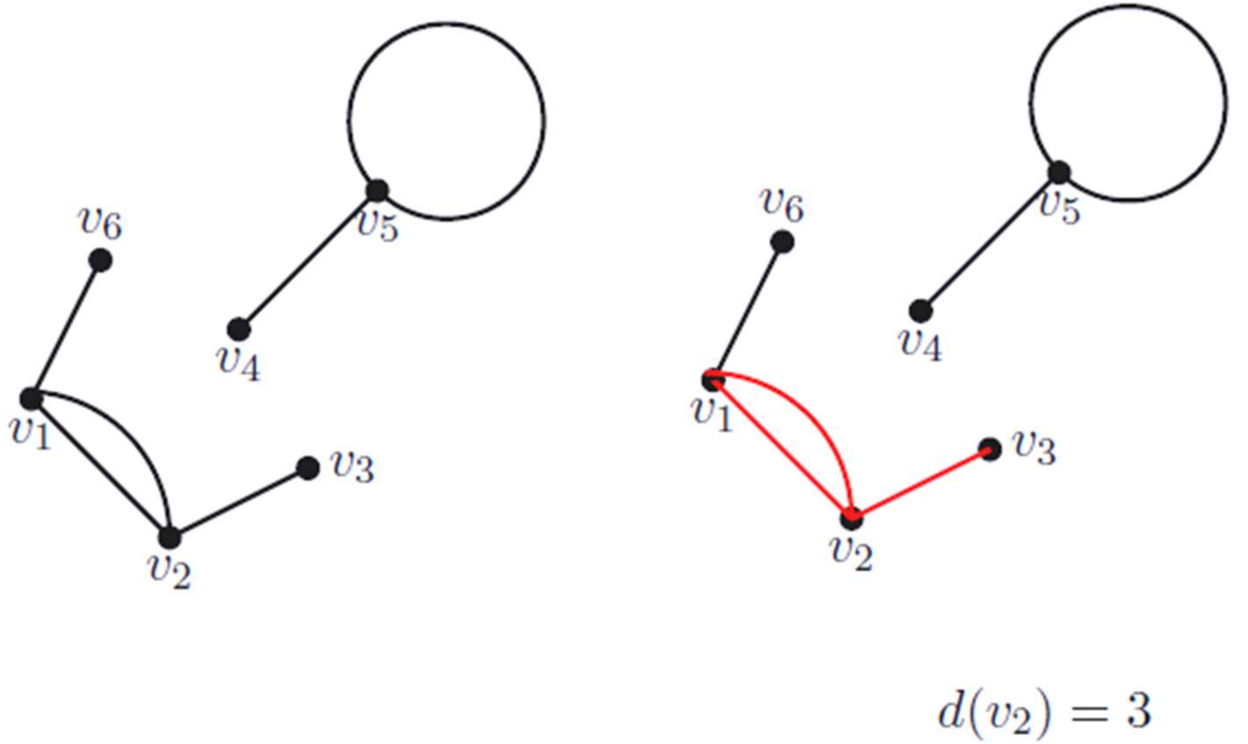




$d(v_1) = 3$

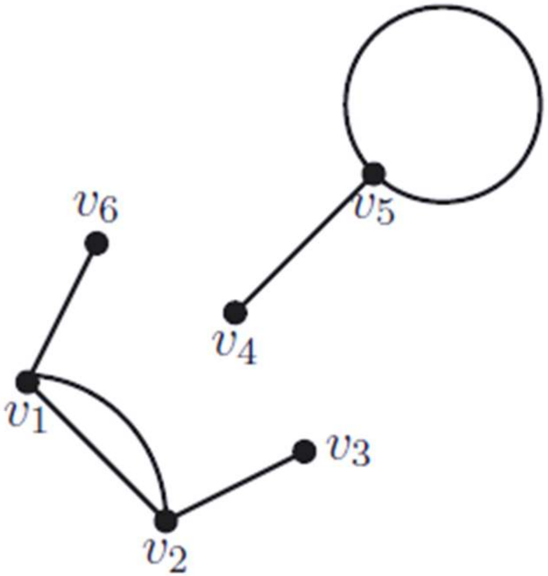
图的基本概念

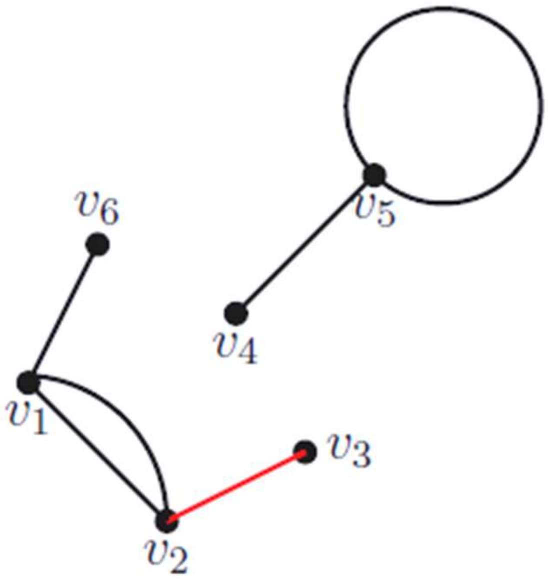
- 设G = <V, E>，$v \in V$，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。



图的基本概念

- 设$G=\langle V, E\rangle$，$v\in V$，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。

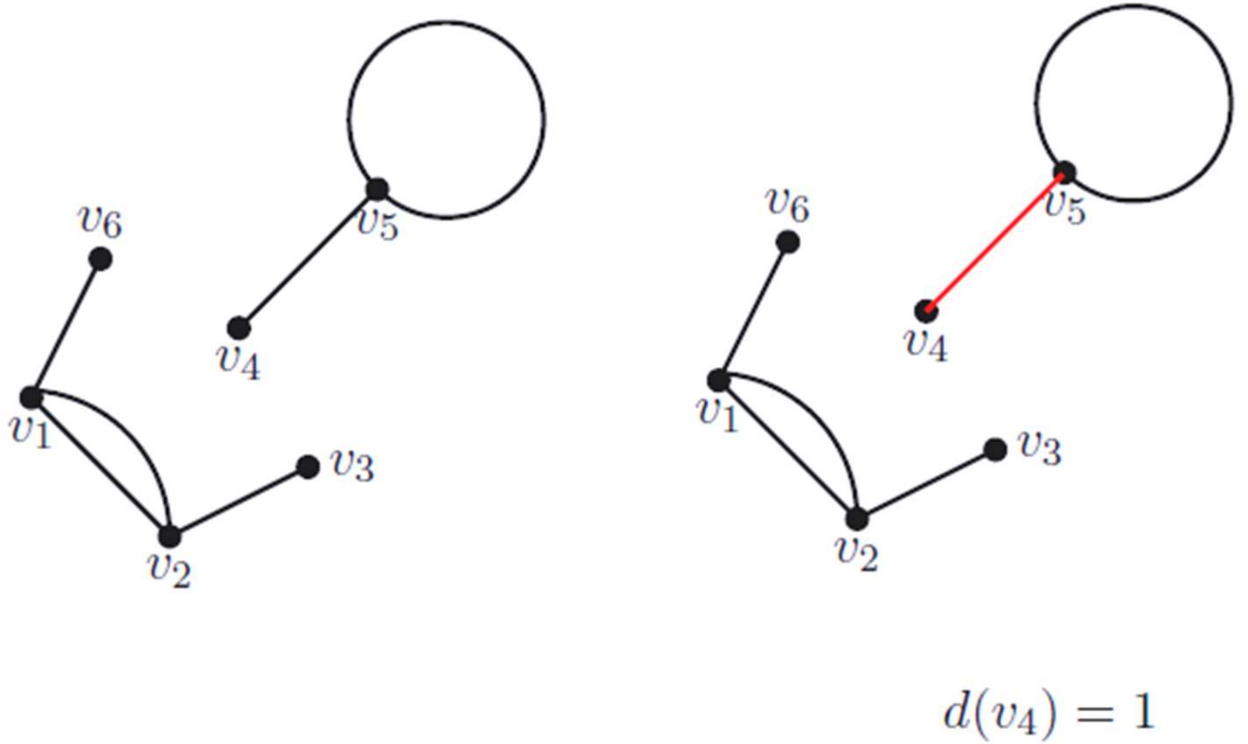




$d(v_3)=1$

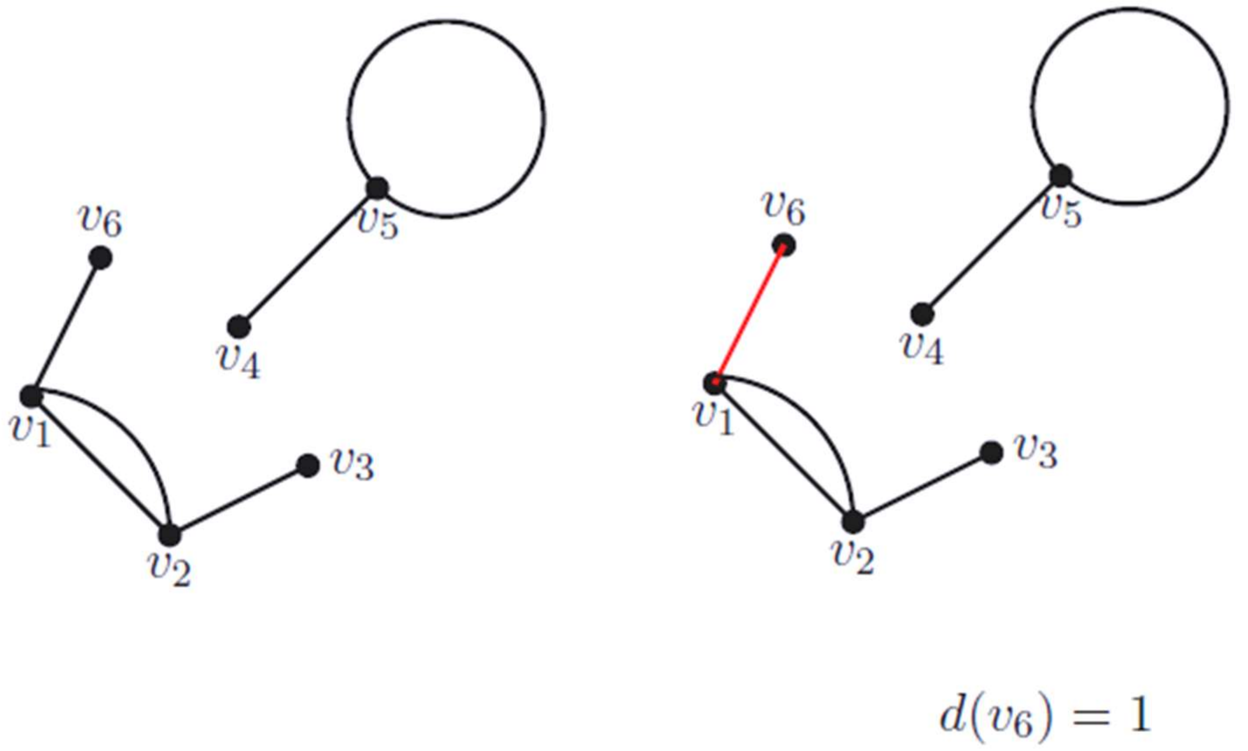
图的基本概念

- 设G = <V, E>，v∈V，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。



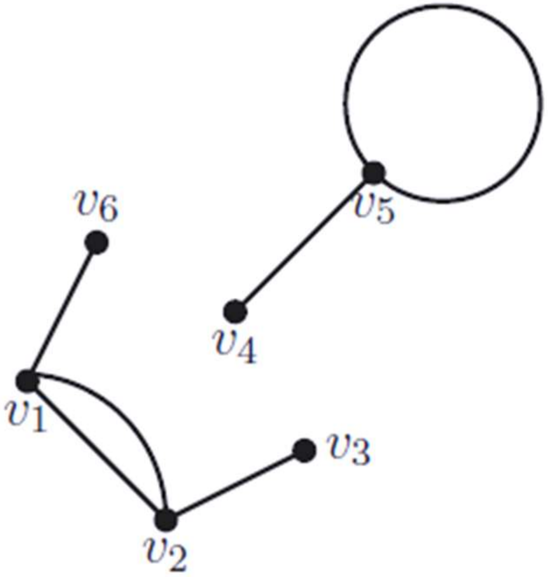
图的基本概念

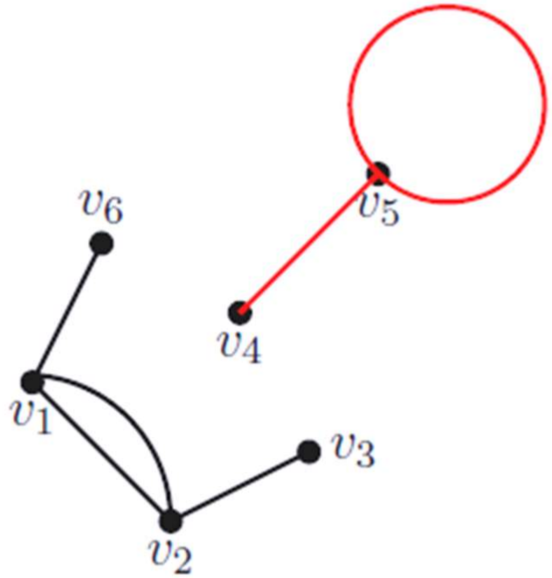
- 设G = <V, E>，v∈V，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。



图的基本概念

- 设G = <V, E>，$v \in$V，E中与点v关联的边的条数称为v的**度**，记作$d(v)$。若顶点v处有环，则默认每个环与该点的关联边数为2。

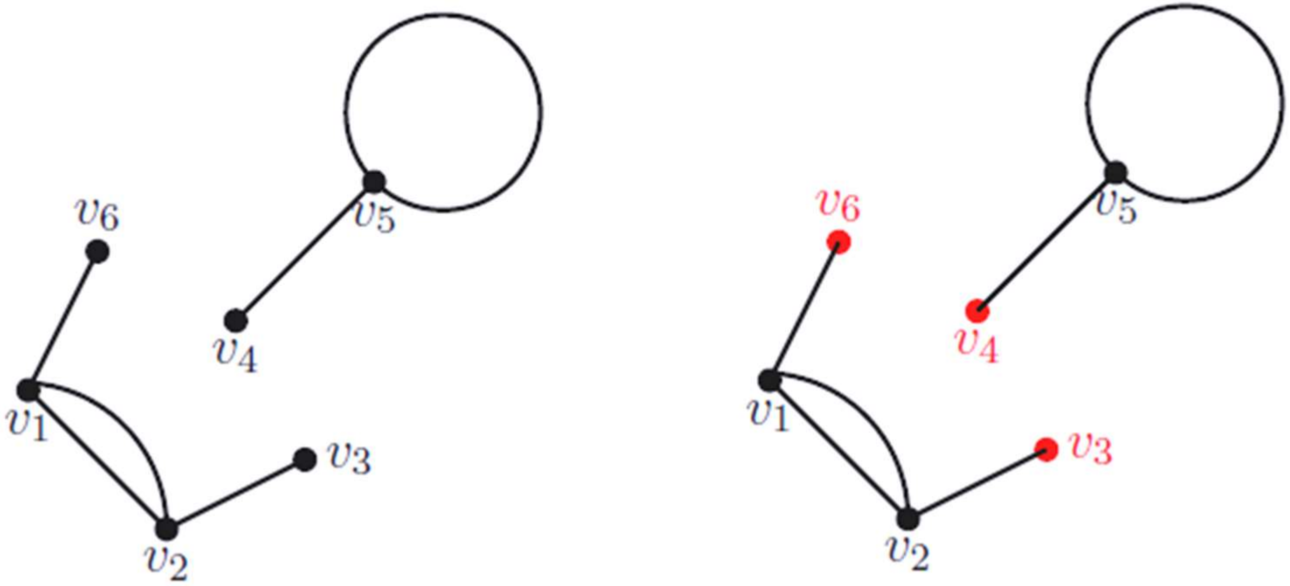




$d(v_5) = 3$

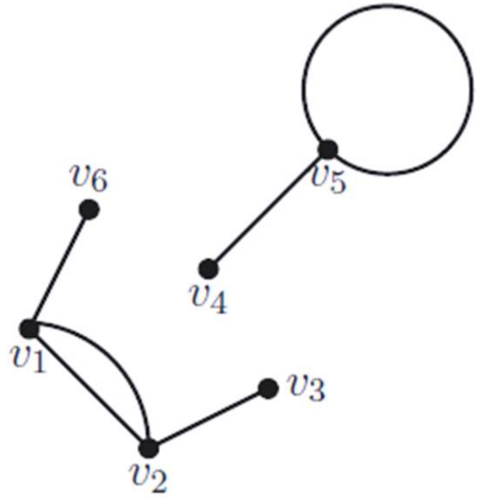
图的基本概念

- 若$d(v)$是奇数，称v为奇点；若$d(v)$是偶数，称v为偶点。
- 度数为1的点称为悬挂点，与悬挂点关联的边称为悬挂边



图的基本概念

- 设G = <V, E>是(p, q)图，V=$(v_1,\ldots,v_p)$，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_p)$为G的度数列（或度序列）。
- 在图G中，
  - 最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|v\in V\}$
  - 最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|v\in V\}$
  - 对于p阶简单图，$\Delta(G)\le p-1$



$d(v_1)=3,\quad d(v_2)=3$

$d(v_3)=1,\quad d(v_4)=1$

$d(v_5)=3,\quad d(v_6)=1$

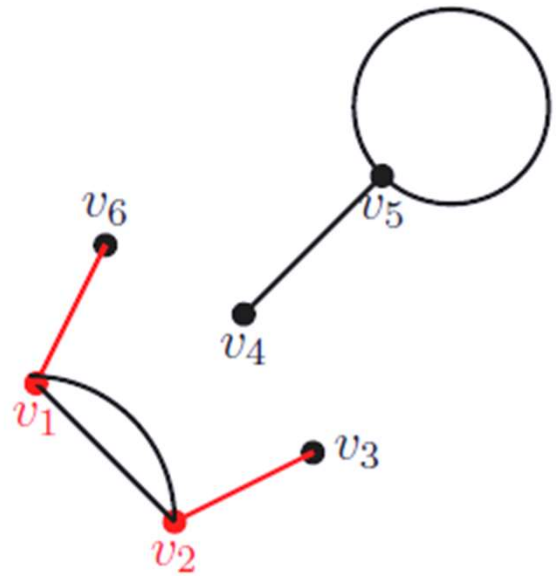
$\delta(G)=1$

$\triangle(G)=3$

度序列$\{3,3,1,1,3,1\}$

图的基本概念

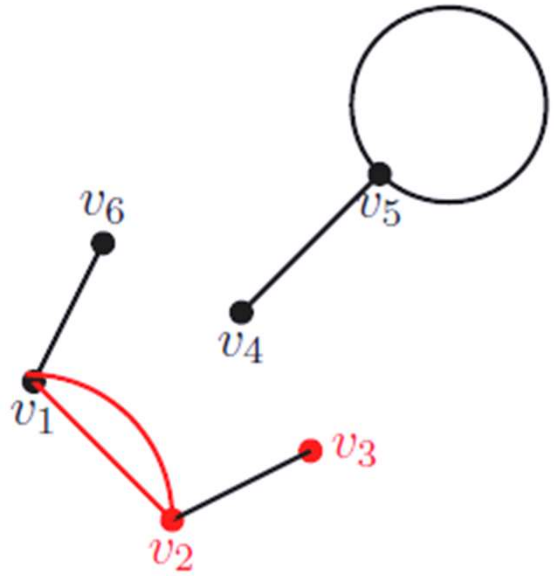
- 设V_1是点集V的子集，定义
  $R(V_1)=\{(u,v)\in E|u\in V_1\wedge v\notin V_1\}$
- 称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为点子集V_1的度，记作$d(V_1)$，表示图G中连接点集V_1外部点与内部点的所有边的条数



$V_1=\{v_1,v_2\}\quad |R(V_1)|=2$

图的基本概念

- 设V_1是点集V的子集，定义
  $R(V_1)=\{(u,v)\in E | u\in V_1 \wedge v\notin V_1\}$
- 称集合$R(V_1)$的基数$|R(V_1)|$为**点子集V_1的度，记作$d(V_1)$，**表示图G中连接点集V_1外部点与内部点的所有边的条数



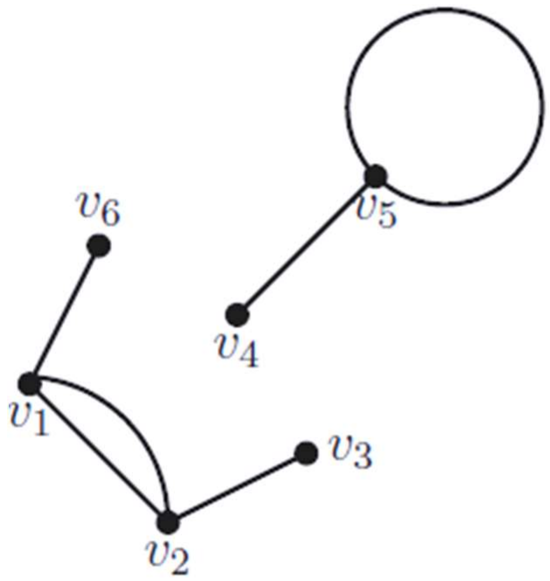
$V_1=\{v_2,v_3\}$ $|R(V_1)|=2$

握手定理

- **定理** 设$G = <V, E>$是(p, q)图，

  $V=(v_1,\ldots,v_p)$，则

  $$\sum_{i=1}^{p} d(v_i) = 2q$$



- 即图中各顶点度数之和是边数的两倍

$$d(v_1) = 3, \qquad d(v_2) = 3$$
$$d(v_3) = 1, \qquad d(v_4) = 1$$
$$d(v_5) = 3, \qquad d(v_6) = 1$$

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 12 = 2q$$

- **推论** 在一个图中，奇点只能是偶数个

练习

- 设G是(p,q)图，证明$\delta(G) <= 2q/p <= \Delta(G)$

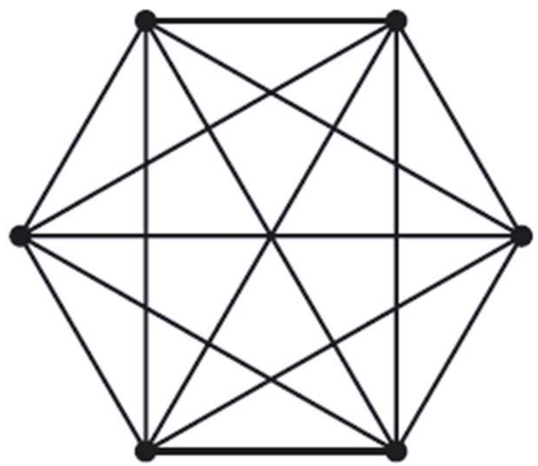
- 设图G有6条边，3度和5度点各一个，其余都是2度点，问图G有多少个顶点？

- 设9阶图G中，每个顶点的度数不是5就是6，证明G中至少有5个6度点或至少6个5度点。

图的基本概念

- 完全图：任意两个不同的顶点间都有边相连的简单图

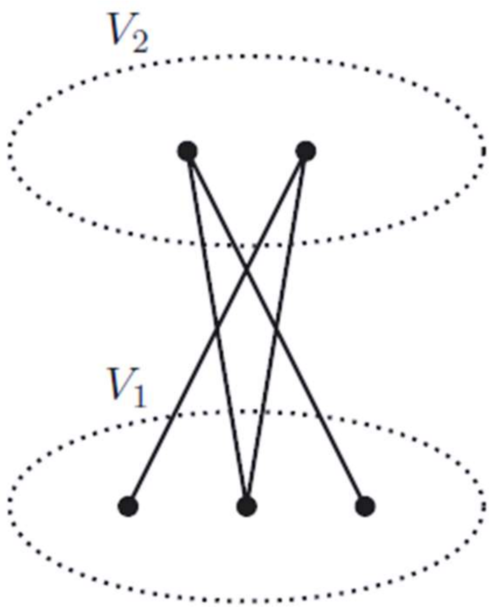
✓ 具有p个顶点的完全图记作K_p，共有$p(p-1)/2$条边。



K_6

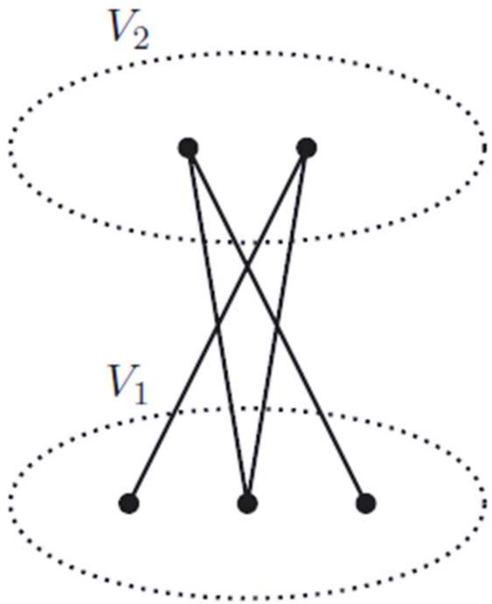
图的基本概念

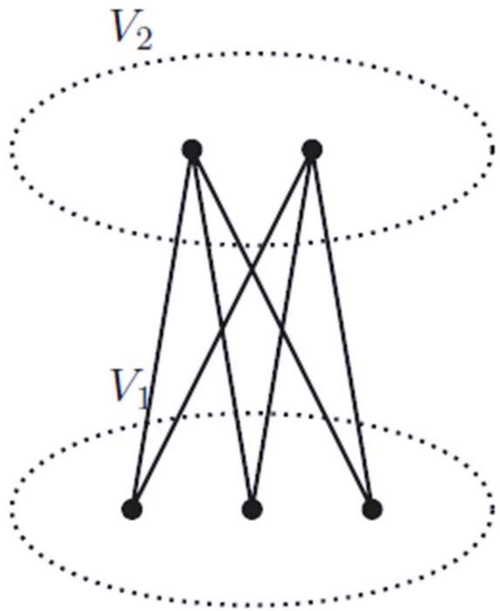
- 二部图：在简单图G = <V, E> 中，若$V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$，并且对于$\forall(u,v)\in E$，均有$u\in V_1$且$v\in V_2$，或$u\in V_2$且$v\in V_1$



图的基本概念

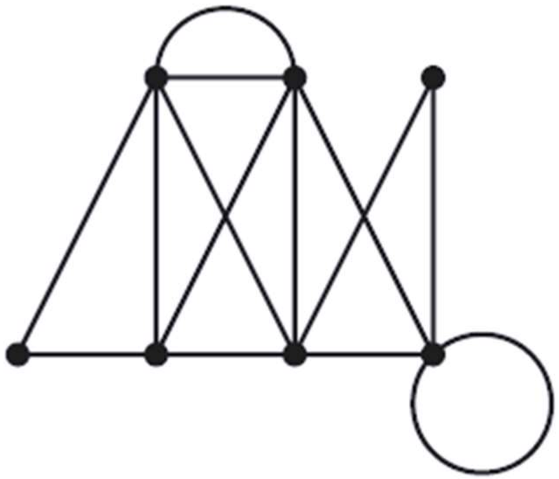
- 完全二部图：二部图 + V_1中的所有顶点与V_2中的所有顶点都相连
  - ✓ 若$|V_1|=m$，$|V_2|=n$，则完全二部图G记作$K_{m,n}$。这时，G的总边数为mn





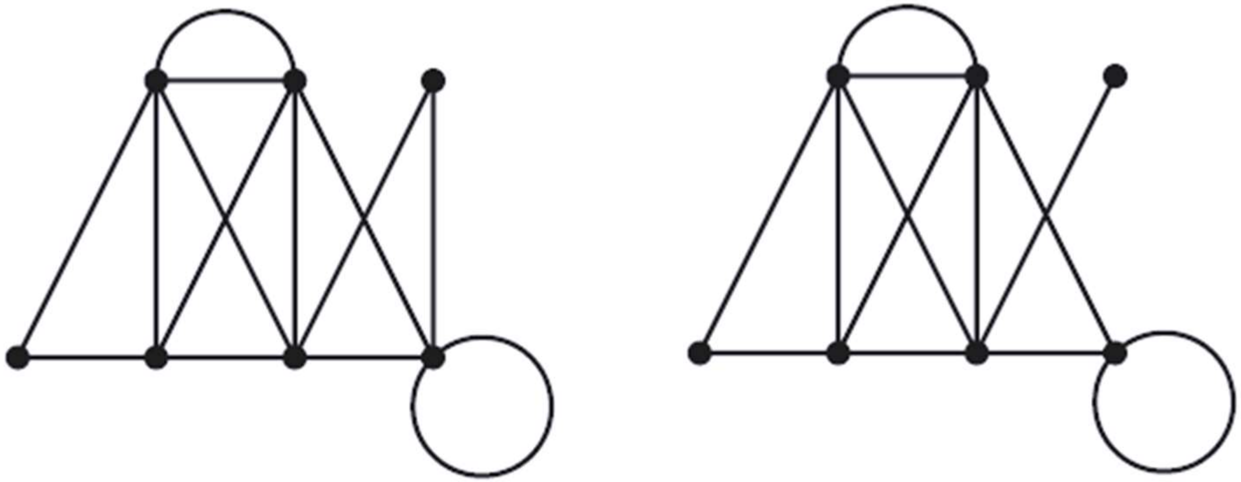
图的基本概念

- 若$G=<V, E>$和$G_1=<V_1, E_1>$是两个图，且$V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。



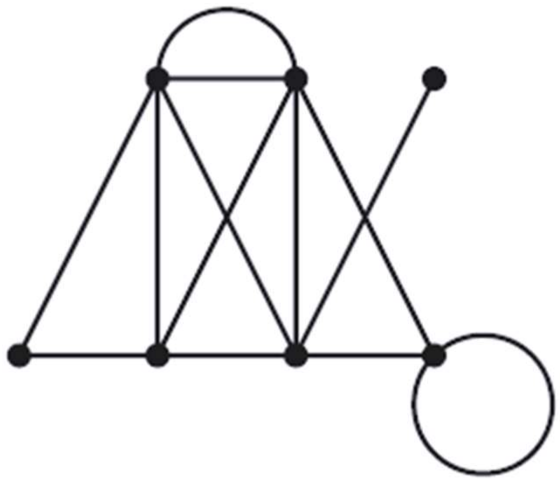
图的基本概念

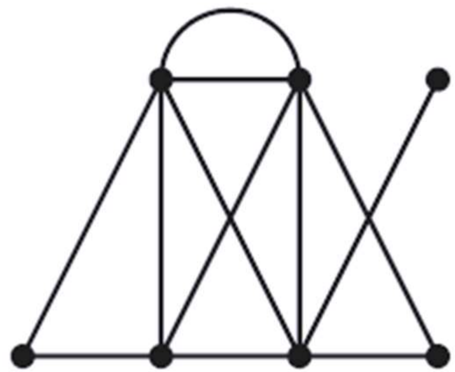
- 若$G=<V, E>$和$G_1=<V_1, E_1>$是两个图，且$V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。



图的基本概念

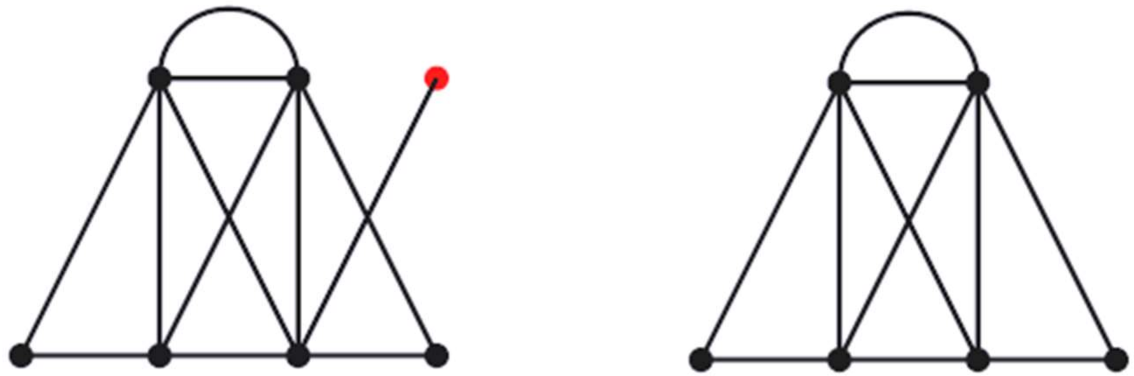
- 若$G = <V, E>$和$G_1 = <V_1, E_1>$是两个图，且$V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。





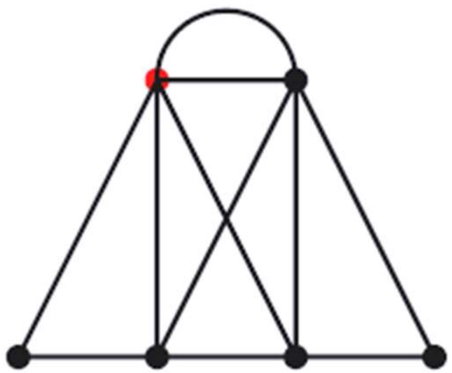
图的基本概念

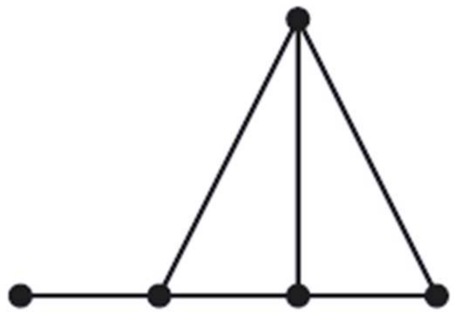
- 若$G = <V, E>$和$G_1 = <V_1, E_1>$是两个图，且$V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$，则称$G_1$是$G$的子图，记为$G_1 \subseteq G$。



图的基本概念

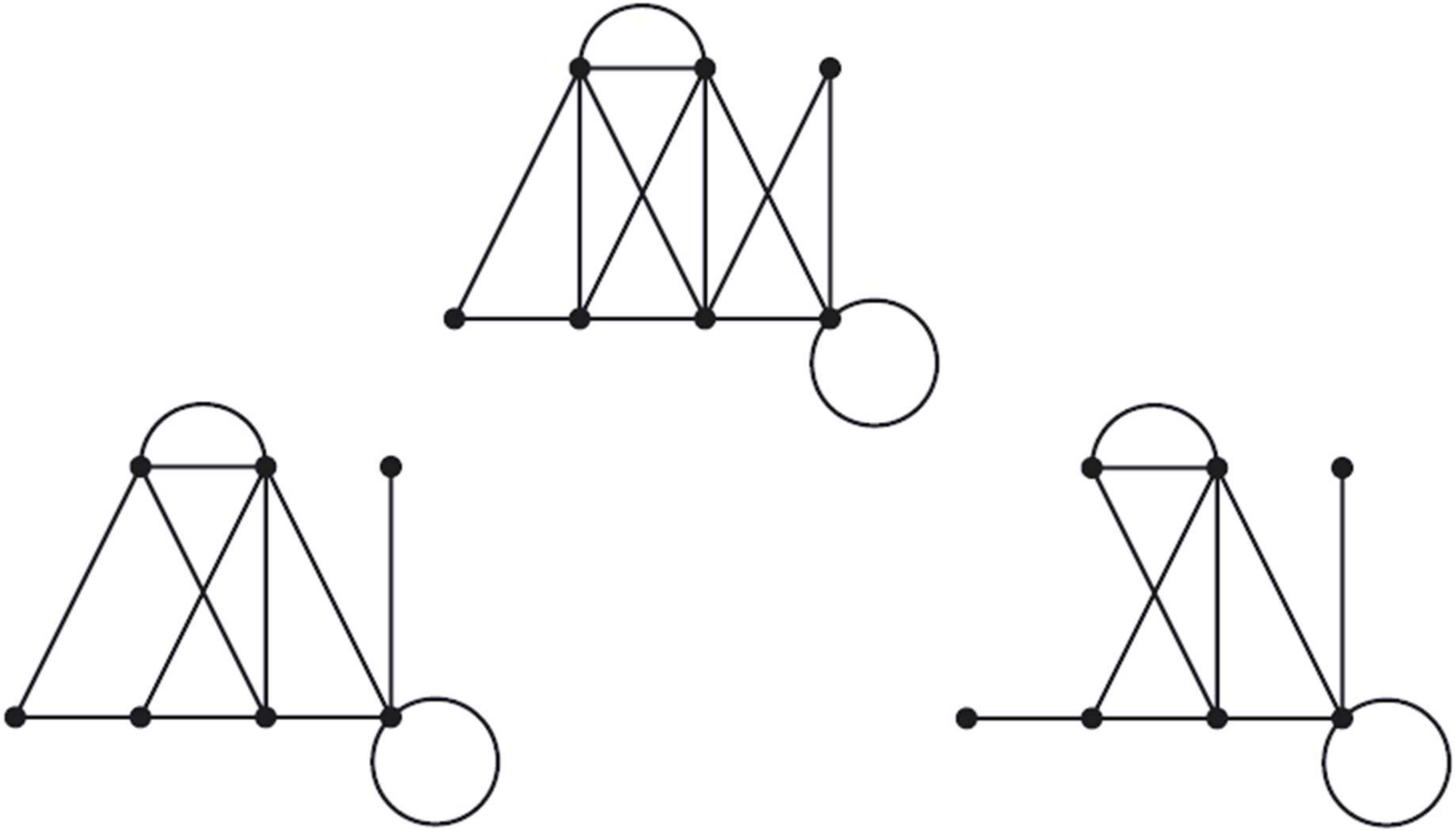
- 若$G = <V, E>$和$G_1 = <V_1, E_1>$是两个图，且$V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$，则称G_1是G的子图，记为$G_1 \subseteq G$。





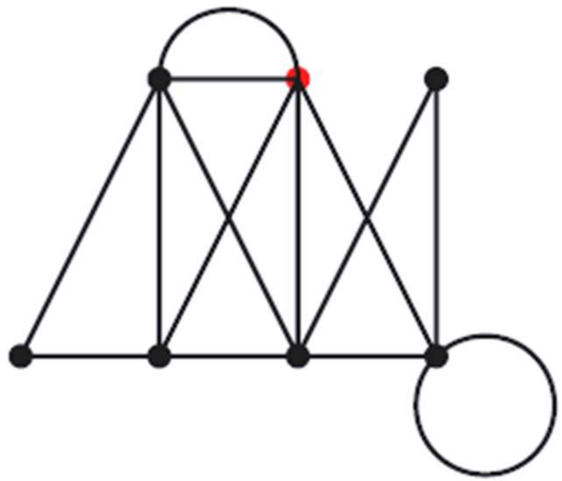
图的基本概念

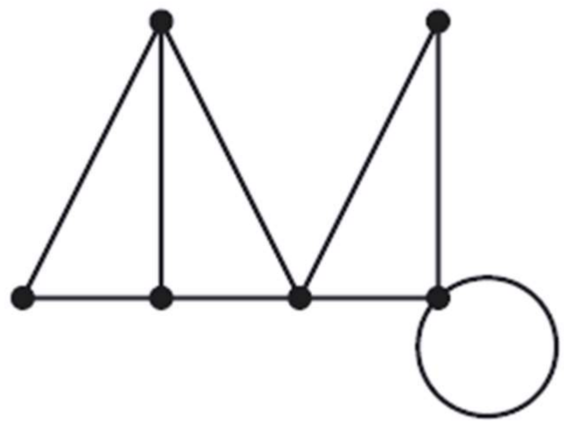
- **生成子图**：若$G_1 \subseteq G$且$V_1=V$，则称G_1是G的生成子图



图的基本概念

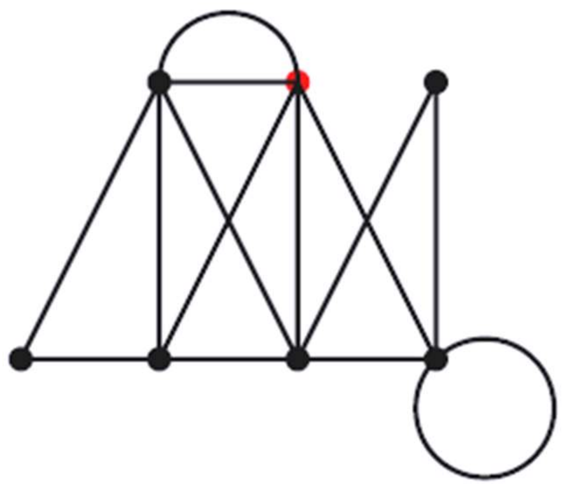
- **生成子图**：若$G_1 \subseteq G$且$V_1=V$，则称G_1是G的生成子图
- **导出子图**

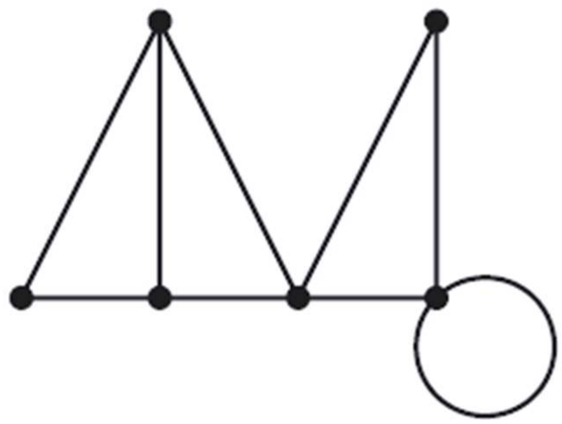




图的基本概念

- **生成子图**：若$G_1 \subseteq G$且$V_1=V$，则称G_1是G的生成子图
- **导出子图**：若$G_1 \subseteq G$，且$E_1 = \{ (u, v) \mid u, v \in V_1\} \cap E$，则称$G_1$是G的顶点子集$V_1$确定的导出子图





应用举例

- 任何两个或以上的人组成的小组里，必有两个人组内朋友数是一样的。
  - 抽象成图论问题：在简单图中，若顶点数p>1，则图中存在度数相同的两个顶点。

- 证明在任意具有p个点的简单二部图中，边数不超过$p^2/4$

- **作业：习题5.1 第3、4题**