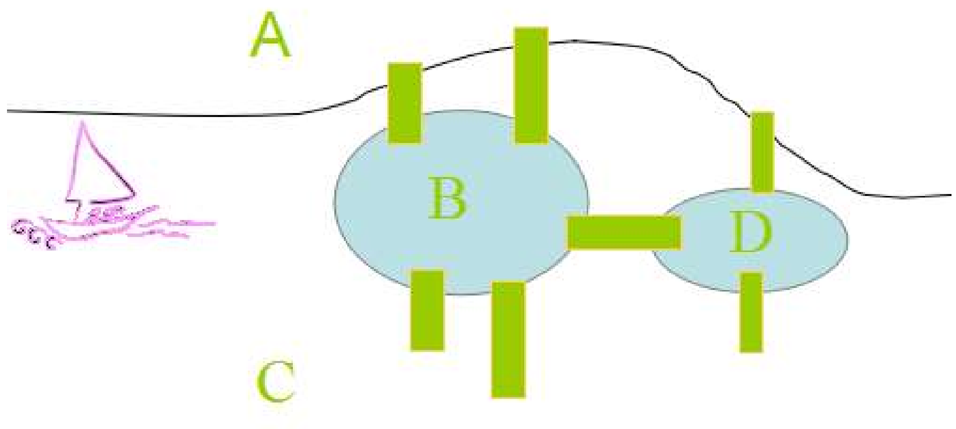
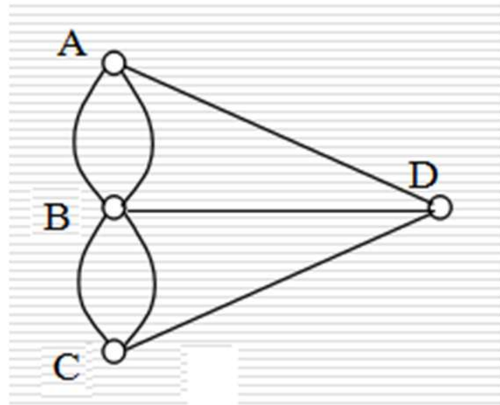
图

- 基本概念
- 图的连通性
- 树
- 图的矩阵表示
- 欧拉图与哈密顿图

哥尼斯堡七桥问题

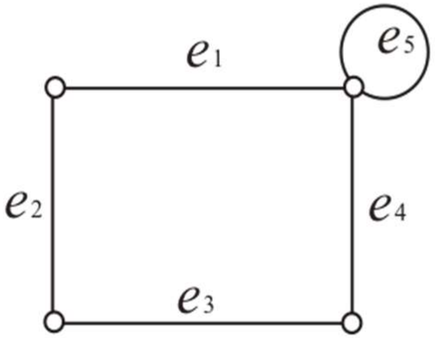
- 能否从某个地点出发经过每个桥一次且仅一次然后返回出发点？

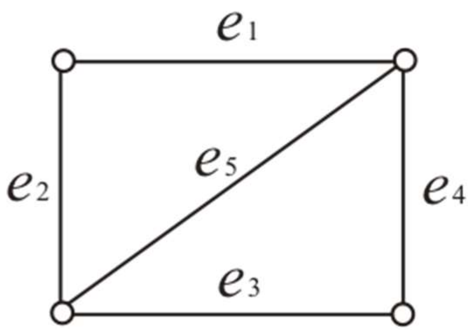


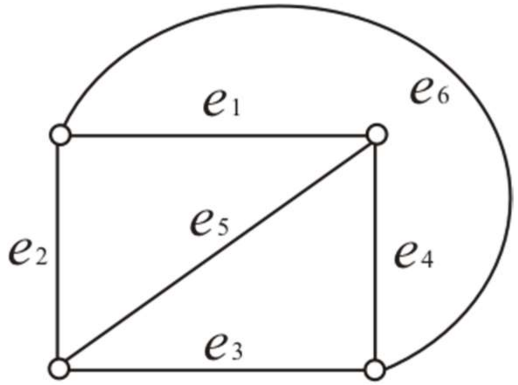


- 有没有解？若有解，给出解；若无解，说明原因。

一笔画问题





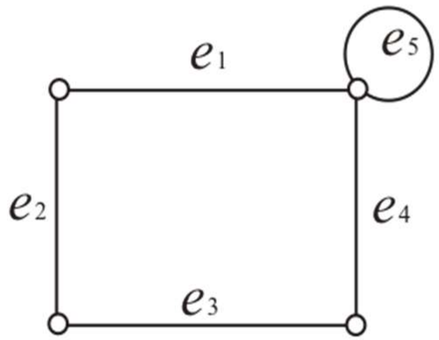


欧拉图

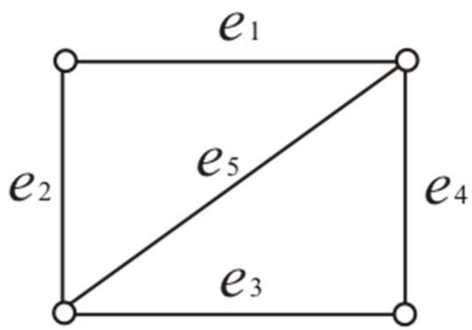
- 哥尼斯堡七桥问题：欧拉图
- 一笔画问题：欧拉图或半欧拉图
- 定义5.18：
  - 包含了图中所有边的简单通路称为欧拉通路
  - 包含了图中所有边的简单回路称为欧拉回路
  - 有欧拉回路的图称为欧拉图
  - 有欧拉通路但无欧拉回路的图称为半欧拉图

欧拉图

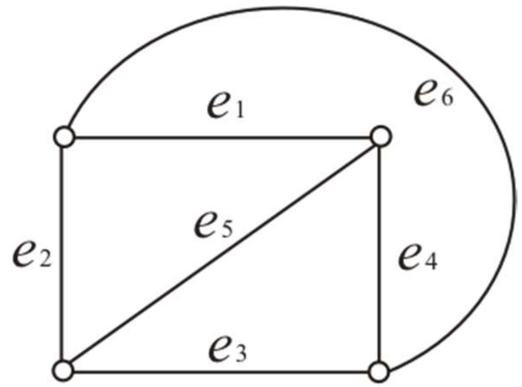
- 判断下图是不是欧拉图、半欧拉图。



欧拉图



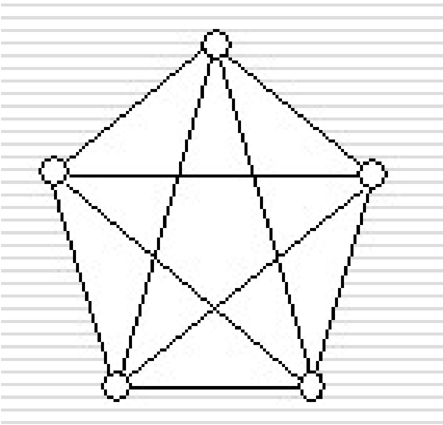
半欧拉图

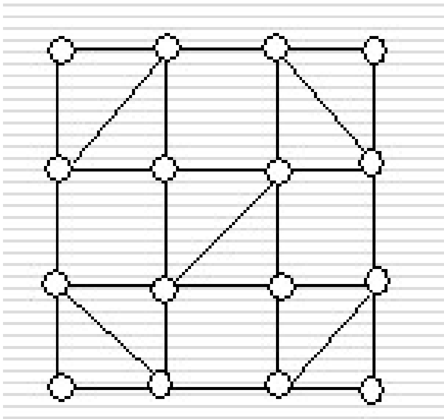


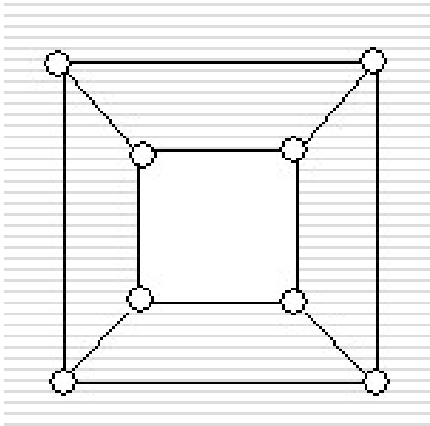
都不是

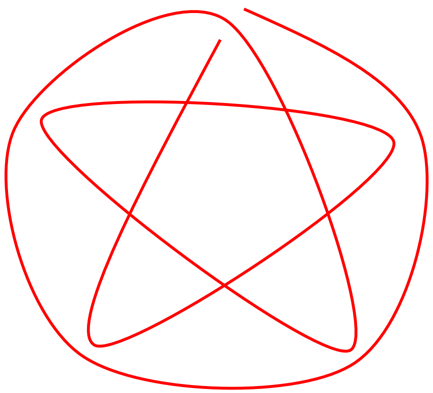
欧拉图

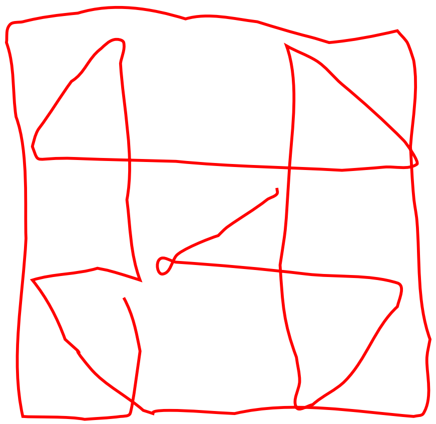
- 判断下图是否存在欧拉通路、欧拉回路。











?

欧拉图判别

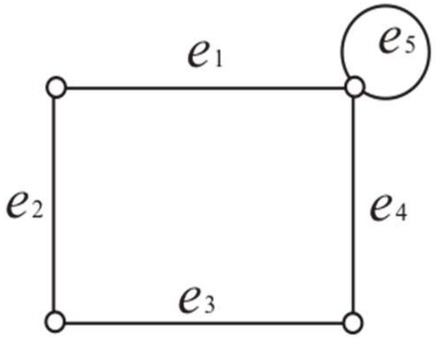
- **定理5.15** 若G是非平凡的连通图，则：
  - **G是欧拉图 <=> G中无奇点**

- **定理5.16** 若G是非平凡的连通图，则：
  - **G是半欧拉图 <=> G中恰有两个奇点，而且这两个奇点即是欧拉通路的起点与终点**

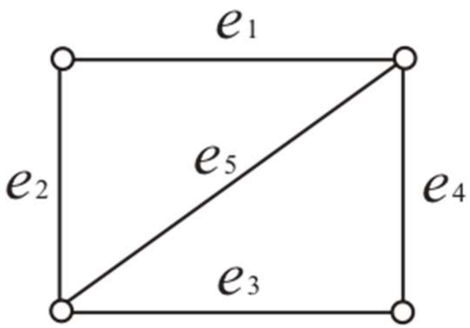
- 规定：平凡图是欧拉图

欧拉图

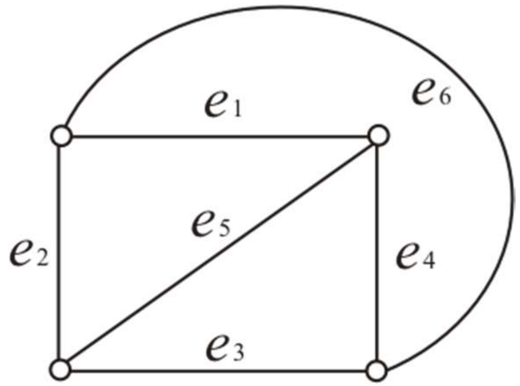
- 判断下图是不是欧拉图、半欧拉图。



欧拉图



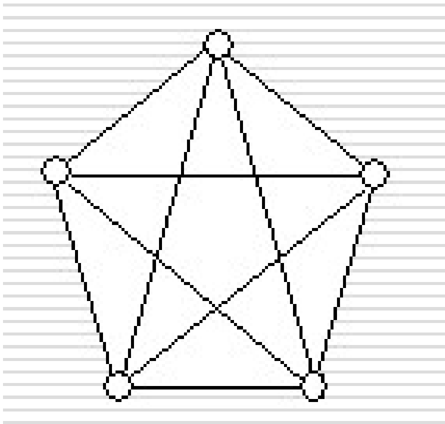
半欧拉图



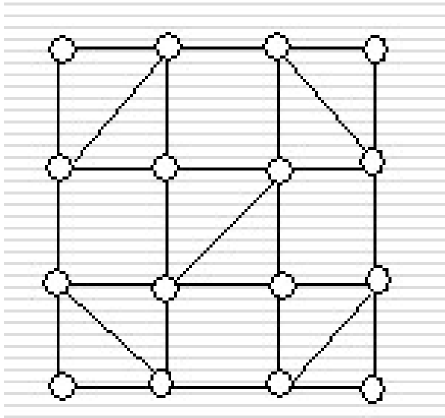
都不是

欧拉图

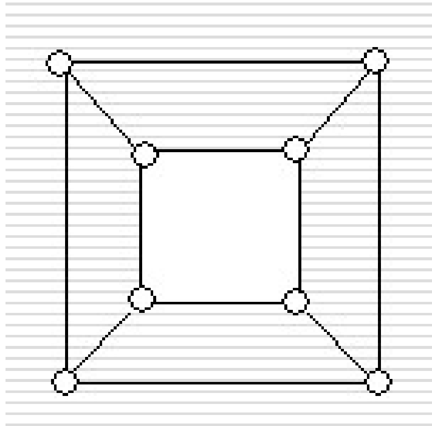
- 判断下图是否存在欧拉通路、欧拉回路。



有欧拉回路



有欧拉通路



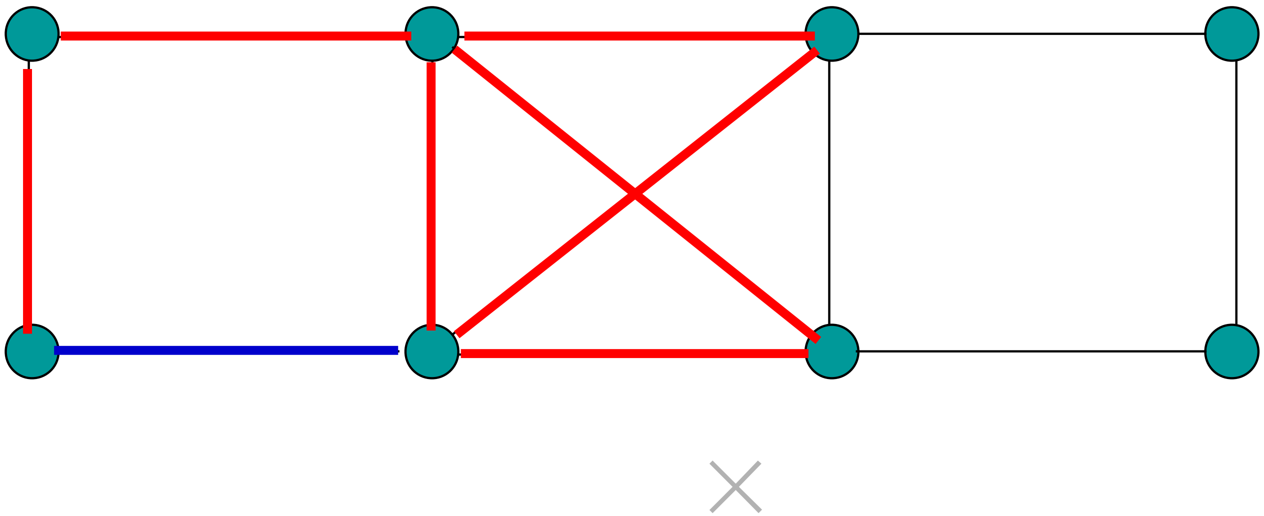
都没有

求欧拉通路/回路：Fleury弗罗莱算法

- 步骤1：取奇点v_0(若为欧拉图，则v_0任取)，令$L_0 = (v_0)$
- 步骤2：设$L_i = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_i, v_i)$，即$L_i$是起点为$v_0$，终点为$v_i$的已经选定的通路
  - 从剩下的边集合中选取与v_i相关联的边e_{i+1}，使得除非无别的边可选，否则e_{i+1}不应为图$G-\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$的桥
  - 将e_{i+1}及其关联的另一个顶点v_{i+1}加入到L_i中，得到L_{i+1}
- 重复步骤2，直到找不出边为止
- 所得简单通路（回路）即是一条欧拉通路(回路)。

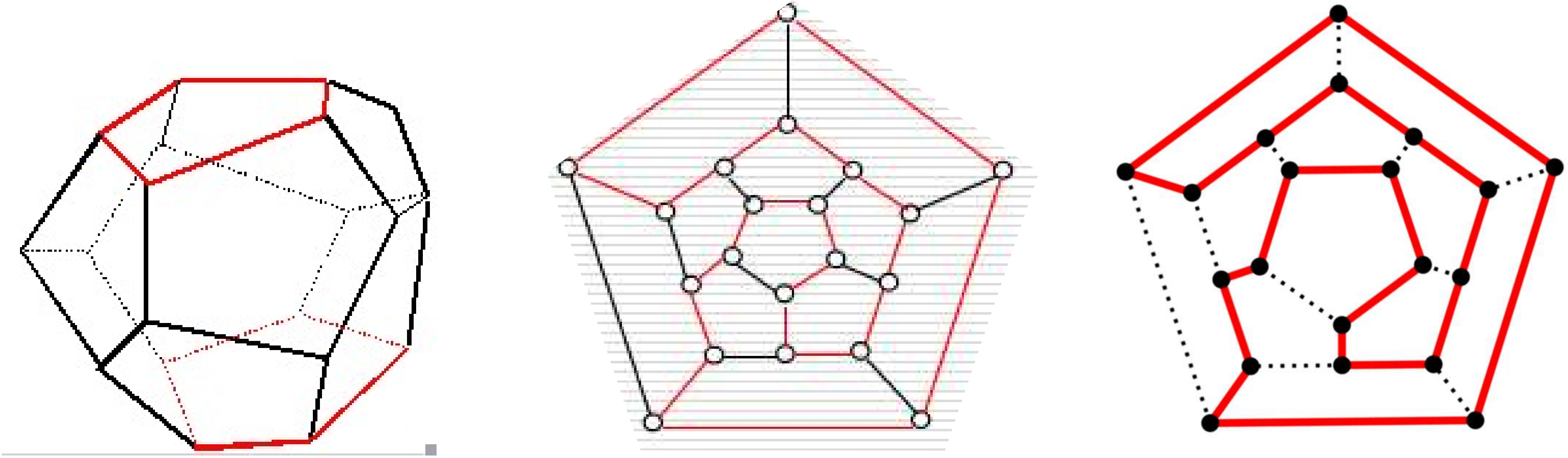
求欧拉通路/回路：Fleury弗罗莱算法

- 原则1：已经走过的边不能再选；
- 原则2：在任何时刻，将已经走过的边删除，必须保证剩下的边仍然连通（除非别无选择，否则不走桥）



周游世界的游戏

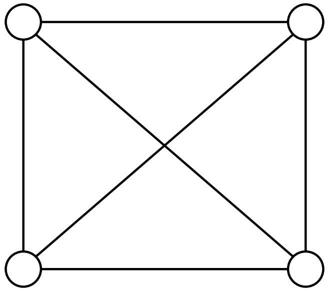
- 1859年，爱尔兰数学家哈密顿发明了“周游世界”游戏：正12面体上的20个城市，从某地出发，每个城市恰游一次，最后回到出发地。



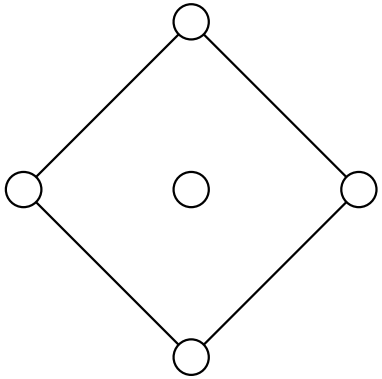
哈密顿图

- 定义5.19：
  - 哈密顿通路：经过图中所有顶点的基本通路
  - 哈密顿回路：经过图中所有顶点的基本回路
  - 哈密顿图：具有哈密顿回路的图
  - 半哈密顿图：有哈密顿通路，但没有哈密顿回路
- 规定平凡图是哈密顿图

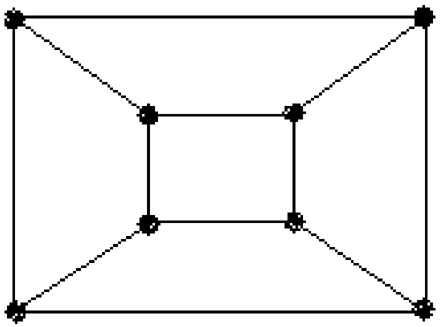
哈密顿图



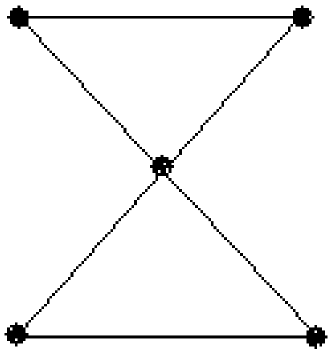
哈密顿图



不是哈密顿图
也不是半哈密顿图

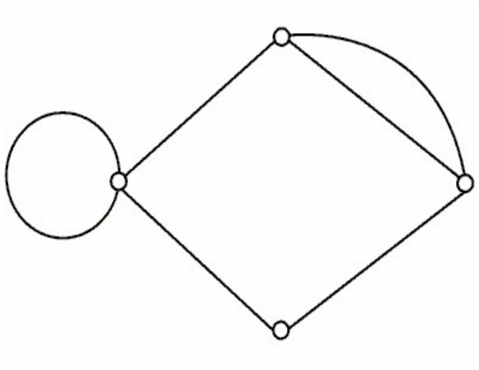


哈密顿图



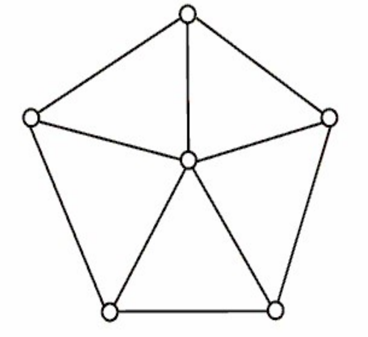
半哈密顿图

哈密顿图



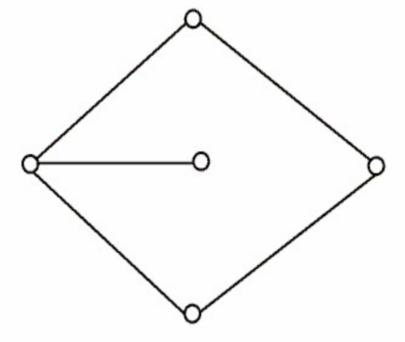
(1)

哈密顿图



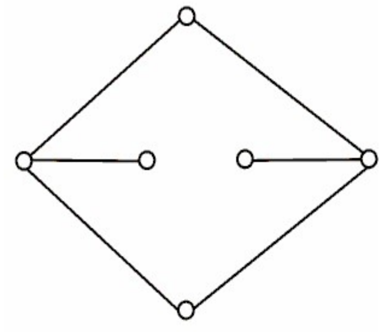
(2)

哈密顿图



(3)

半哈密顿图



(4)

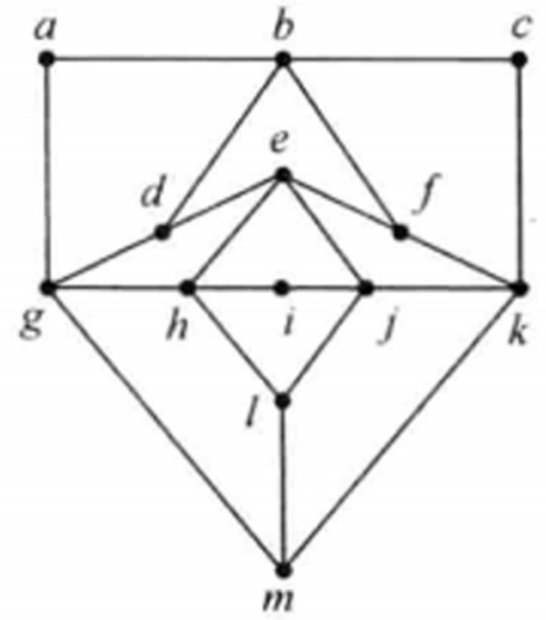
都不是

判断哈密顿图

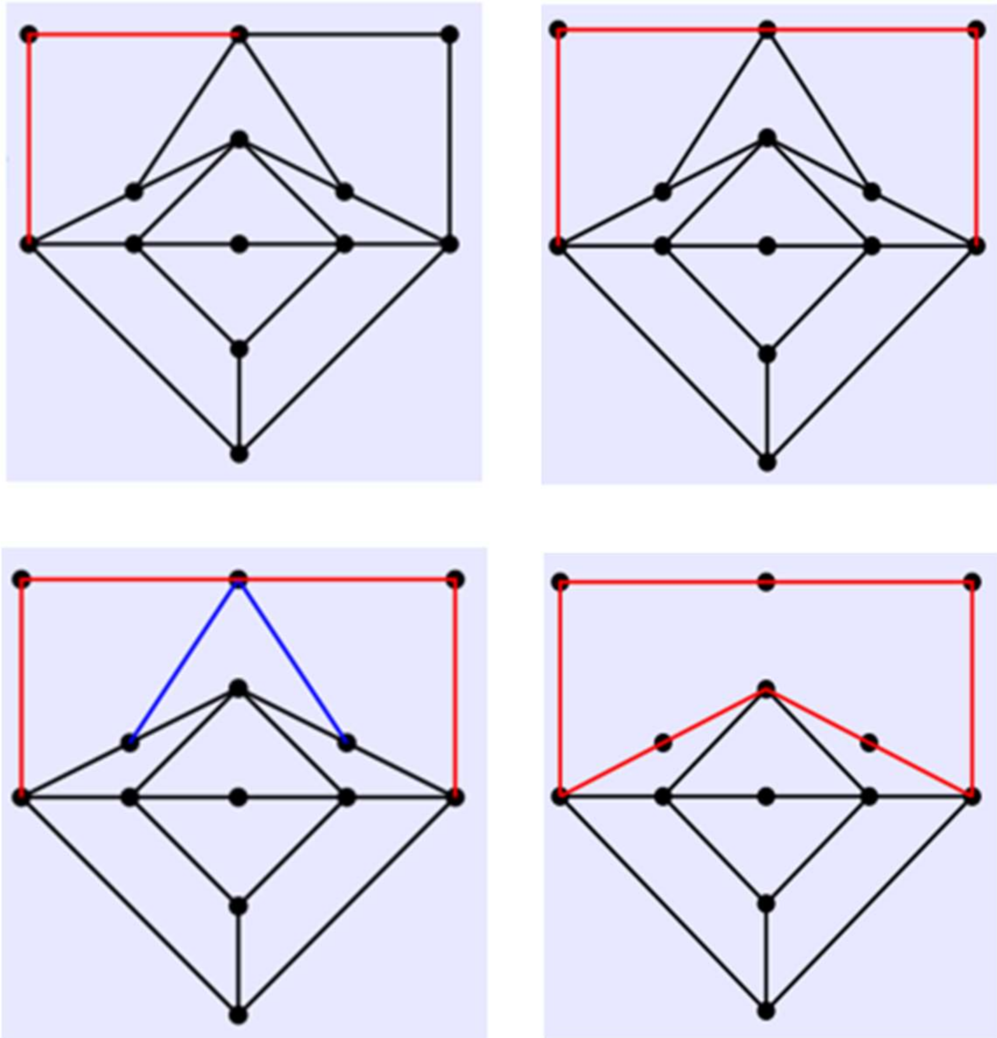
- 任何一个哈密顿图都可以看成是一个基本回路，再加上其他若干条边。
- 哈密顿图的充分条件和必要条件都有，但尚未找到充要条件。

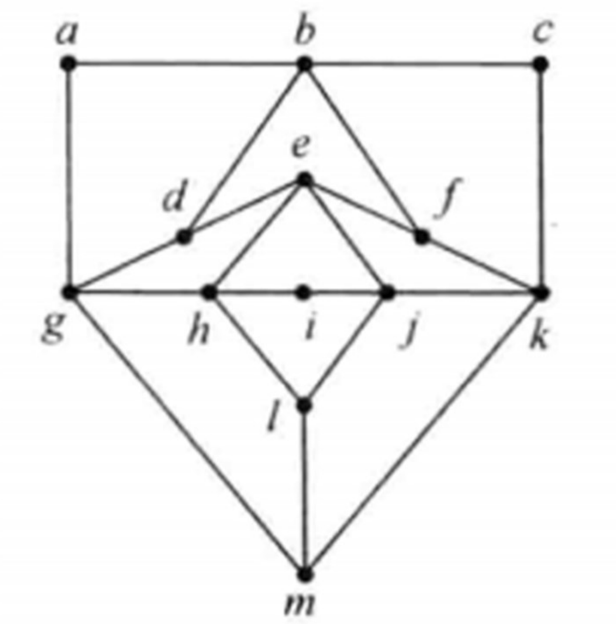
判断哈密顿图

- 哈密顿图的必要条件(性质):
  - 哈密顿图都连通，且每个顶点的度≥2（平凡图除外）
  - 哈密顿图中，任何顶点所关联的边一定恰有两条在哈密顿回路上
  - 哈密顿图中，哈密顿回路上的部分边不可能组成一个未经过所有顶点的基本回路



判断哈密顿图





所以不是哈密顿图

判断哈密顿图

- **G是非平凡的连通图，若G有桥，必然不是哈密顿图。**
- 证明：若G的顶点数p=2，且有桥，则显然G不是哈密顿图。
- 当p≥3：首先证明有割点的图不是哈密顿图。如果图G是哈密顿图，则必存在哈密顿回路，即所有顶点均在一个回路中，此时删除任意一个顶点后图G仍连通，于是它的任意顶点均不是割点。因此，有割点的图不是哈密顿图。
- 其次证明当p≥3时，若G有桥，则G有割点。设G的桥是(u, v)，则桥的两个端点u和v至少有一个不是悬挂点，否则，G不是连通图。设u不是悬挂点，则u是割点，所以G不是哈密顿图。

判断哈密顿图

作业：习题5.5
第1、5题

- 哈密顿图的充分条件：

➢ **定理5.17**：p阶简单图G，$p\geq 2$，若G中任意两点度数之和 $\geq p-1$，则G是半哈密顿图

➢ **定理5.18**：p阶简单图G，$p\geq 3$，若G中任意两点度数之和 $\geq p$，则G是哈密顿图

- 例**5.27** 证明$K_p(p\geq 3)$是哈密顿图。

➢ 证明：$K_p(p\geq 3)$的每个顶点度数为$d=p-1$，显然满足任意两点度数之和$\geq p$，所以$K_p(p\geq 3)$是哈密顿图。