应用离散数学

杭州电子科技大学

定义1 (n元运算)

设X是非空集合，从X^n到X上的函数f被称为集合X上的n元运算。

当$n=1$时，f被称为X上的一元运算

当$n=2$时，f被称为X上的二元运算

对于二元运算，

- X上任意两个元素都可以进行运算，且运算结果唯一；
- 封闭性：X上任意两个元素的运算结果仍然属于X。

$(\mathbb{N},+)$	$\checkmark$	$(\mathbb{N},\text{相反数})$	$\times$
$(\mathbb{N},-)$	$\times$	$(\mathbb{R},\text{求倒数})$	$\times$
$(\mathbb{R},\times)$	$\checkmark$	$(\mathbb{R},\div)$	$\times$
$(\rho(A),\cup)$	$\checkmark$	$(\mathbb{Z}_m,+_m)$	$\checkmark$
$(\mathbb{Z}_m,\times_m)$	$\checkmark$	$(M_n(R),+)$	$\checkmark$
$(\hat{M}_n(R),+)$	$\times$	$(\hat{M}_n(R),\times)$	$\checkmark$

定义2 (交换律、结合律)

设$*$是非空集合X上的二元运算，

- 若$\forall x, y \in X$，有$x * y = y * x$，则称$*$满足交换律
- 若$\forall x, y, z \in X$，$(x * y) * z = x * (y * z)$，则称$*$满足结合律

	$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{N},\times)$	$(\mathbb{R},-)$	$(\mathbb{R}^*,\div)$	$(\mathbb{Z}_m,+_m)$
交换律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
结合律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$

	$(\mathbb{Z}_m,\times_m)$	$(M_n(R),+)$	$(\hat{M}_n(R),\times)$	$(\rho(X),\cup)$	$(\rho(X),\cap)$
交换律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
结合律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

定义3 (分配律)

设$*$, $\circ$是非空集合X上的二元运算，

- 若$\forall x, y, z \in X$，有

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z), (y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$$

  则称$\circ$对$*$满足分配律。
- 若仅有第一式子成立，则称$\circ$对$*$满足左分配律
  若仅有第二式子成立，则称$\circ$对$*$满足右分配律

	$(\mathbb{N},+,\times)$	$(\mathbb{Z}_m,+_m,\times_m)$	$(M_n(R),+,\times)$	$(\rho(X),\cap,\cup)$
分配律	$\times$对$+$	$\times_m$对$+_m$	$\times$对$+$	都有

定义4 (零元)

设$*$是非空集合X上的二元运算，如果存在$\theta_l \in X$(或$\theta_r \in X$)，使得$\forall x \in X$有

$$\theta_l * x = \theta_l, (\text{或} x * \theta_r = \theta_r)$$

则称θ_l(或θ_r)为$*$的左零元(或右零元)

如果θ既是左零元又是右零元，则称θ是$*$的零元

	$(\mathbb{N},+)$	$(\mathbb{N},\times)$	$(\mathbb{R},-)$	$(\mathbb{R}^*,\div)$	$(\mathbb{Z}_m,+_m)$
零元	无	0	无	无	无
	$(\mathbb{Z}_m,\times_m)$	$(M_n(R),+)$	$(\hat{M}_n(R),\times)$	$(\rho(X),\cup)$	$(\rho(X),\cap)$
零元	0	无	无	X	$\emptyset$

定义5 (单位元)

设$*$是非空集合X上的二元运算，如果存在$e_l \in X$(或$e_r \in X$)，使得$\forall x \in X$有

$$e_l * x = x \quad (\text{或} x * e_r = x)$$

则称e_l(或e_r)是$*$运算的左单位元(或右单位元)

如果e既是左单位元，又是右单位元，则称其是单位元(幺元)

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{N}, \times)$	$(\mathbb{R}, -)$	$(\mathbb{R}^*, \div)$	$(\mathbb{Z}_m, +_m)$
单位元	0	1	$e_r = 0$	$e_r = 1$	0
	$(\mathbb{Z}_m, \times_m)$	$(M_n(R), +)$	$(\hat{M}_n(R), \times)$	$(\rho(X), \cup)$	$(\rho(X), \cap)$
单位元	1	0_n	I_n	$\emptyset$	X

定义6（逆元）

设$*$是非空集合X上的二元运算，e是其单位元。对于$x \in X$，如果存在$y_l \in X$（或$y_r \in X$），使得

$$y_l * x = e, \quad (\text{或} x * y_r = e)$$

则称y_l（或y_r）是x关于$*$的左逆元（或右逆元）

如果y既是x的左逆元，又是x的右逆元，则称其是x的逆元，记为x^{-1}

	$(\mathbb{N}, +)$	$(\mathbb{N}, \times)$	$(\mathbb{Z}_m, +_m)$	$(\mathbb{Z}_m, \times_m)$
逆元	$0^{-1} = 0$	$1^{-1} = 1$	$x^{-1} = m -_m x$	$1^{-1} = 1$
	$(M_n(R), +)$	$(\hat{M}_n(R), \times)$	$(\rho(X), \cup)$	$(\rho(X), \cap)$
逆元	$A^{-1} = -A$	A^{-1}是其逆矩阵	$\emptyset^{-1} = \emptyset$	$X^{-1} = X$

定理1

设$*$是非空集合X上的二元运算，则

1. 如果X中有关于$*$的左单位元e_l和右单位元e_r，则$e_l = e_r$，即其就是单位元，且单位元如存在必定唯一。
2. 如果X中有关于$*$的左零元θ_l和右零元θ_r，则$\theta_l = \theta_r$，即其就是零元，且零元如存在必定唯一。
3. 设X对运算$*$满足结合律，且$*$有单位元e。如果对于$x \in X$存在左逆元y_l和右逆元y_r，则$y_l = y_r$，即其就是x的逆元，且逆元如果存在必定唯一。

定义7 (消去律)

设$*$是非空集合X上的二元运算，如果$\forall x,y,z\in X$，$x\neq\theta$有

$$x*y=x*z\Rightarrow y=z, y*x=z*x\Rightarrow y=z$$

则称$*$满足消去律

如果只有第一式成立，则称其满足左消去律

如果只有第二式成立，则称其满足右消去律

例1

设$S=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$,$*$是$S$上的二元运算：$\forall\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\in S$

$$\langle u,v\rangle*\langle x,y\rangle=\langle u\cdot x,u\cdot y+v\rangle$$

1 $*$是否满足交换律、结合律

2 $*$是否有单位元、零元？如果有，请指出，并求S中所有可逆元素的逆元

作业 习题4.1 第 4 题（列个表）