应用离散数学

杭州电子科技大学

集合与关系

定义1（子集）

设A, B是两个集合，

- 若B中每个元素都是A中的元素，则称B是A的子集，或A包含B，记为$B \subseteq A$。

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- 若$A \subseteq B, B \subseteq A$，则称$A$与$B$相等。

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

定理1（空集是一切集合的子集，并且是唯一的）

证明.

- 对于任意集合A

$$\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Rightarrow \emptyset \subseteq A$$

- 假设存在空集$\emptyset_1, \emptyset_2$，

$$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2, \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1 \Rightarrow \emptyset_1 = \emptyset_2$$

定义2 (真子集)

1. 若$B \subseteq A$且$A \neq B$，则称B是A的**真子集**，记为$B \subset A$。

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge A \neq B$$

2. A的所有子集构成的集合被成为A的**幂集**，记为$\rho(A)$或2^A。

$$\rho(A) = \{S : S \subseteq A\}$$

例1 (求$A=\{a,b,c\}$的幂集)

解:

$$\rho(A)=\{\underbrace{\emptyset}_{0\text{元}},\underbrace{\{a\},\{b\},\{c\}}_{1\text{元}},$$

$$\underbrace{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}}_{2\text{元}},\underbrace{\{a,b,c\}}_{3\text{元}}\}$$

定义3（基数）

集合A中元素的“个数”被称为A的**基数**，记为$Card(A)$或$|A|$

例2（设$|A|=n$，求$|\rho(A)|$）

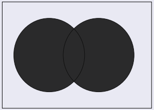
$$|\rho(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

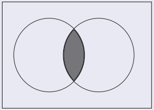
练习：习题3.1 第1题

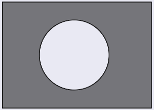
定义4 (并、交、补)

设A, B是两个集合，E是全集，则

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x : x \in E \wedge x \notin A\}$







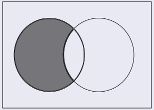
定义5（差、对称差）

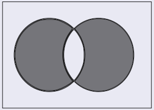
设A, B是两个集合，则

- 差 $A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- 对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$$= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$





例3 (设$A=\{a,b,c\}, B=\{a,x,y\}$，全集$E=\{a,b,c,,x,y,z\}$，求)

$$
\begin{aligned}
A\cup B &= \{a,b,c,x,y\}\\
A\cap B &= \{a\}\\
A^c &= \{x,y,z\}\\
A-B &= \{b,c\}\\
B-A &= \{x,y\}\\
A\oplus B &= (A-B)\cup(B-A)\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= \{b,c,x,y\}
\end{aligned}
$$

定理2（集合运算的性质）

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律: $A \cup A = A, A \cap A = A$
- 单位律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$

- 零律：$A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$
- 互补律：$A \cup A^c = E, A \cap A^c = \emptyset$
- 双补律：$(A^c)^c = A$
- 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

例4 (证明$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$)

$$
\begin{aligned}
& x \in A-(B\cup C) \\
\Leftrightarrow & (x\in A)\wedge(x\notin B\cup C) \\
\Leftrightarrow & (x\in A)\wedge\neg[(x\in B)\vee(x\in C)] \\
\Leftrightarrow & (x\in A)\wedge\neg(x\in B)\wedge\neg(x\in C)) \\
\Leftrightarrow & (x\in A)\wedge(x\notin B)\wedge(x\notin C) \\
\Leftrightarrow & [(x\in A)\wedge(x\notin B)]\wedge[(x\in A)\wedge(x\notin C)] \\
\Leftrightarrow & (x\in A-B)\wedge(x\in A-C) \\
\Leftrightarrow & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}
$$

所以$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

例5 (证明$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$)

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\\
&= [(A\cap B^c)\cup B]\cap[(A\cap B^c)\cup A^c]\\
&= (A\cup B)\cap(B^c\cup B)\cap(A\cup A^c)\cap(B^c\cup A^c)\\
&= (A\cup B)\cap E\cap E\cap(A^c\cup B^c)\\
&= (A\cup B)\cap(A\cap B)^c\\
&= (A\cup B)-(A\cap B)
\end{aligned}
$$

练习2 (证明

$$A-(B\cup C)=(A-B)-C=(A-C)-(B-C))$$

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= (A-B)\cap C^c\\ &= (A\cap B^c)\cap C^c\\ &= A\cap(B^c\cap C^c)\\ &= A\cap(B\cup C)^c\\ &= A-(B\cup C)\end{aligned}$$

证明$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$.

$$
\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &= (A\cap C^c)\cap(B\cap C^c)^c \\
&= (A\cap C^c)\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup(A\cap C^c\cap C) \\
&= (A\cap C^c\cap B^c)\cup\emptyset \\
&= A\cap C^c\cap B^c \\
&= (A-B)-C
\end{aligned}
$$

作业：习题3.1 第2、5题