Capitolo 6.

1) DARE UNA DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE, SPECIFICANDO: DOMINIO, CODOMINIO, MODALITÀ DI SCRITTURA.

2) PER QUALE INTERVALLO HA SENSO VALUTARE IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE?

3) DEFINIRE FORMALMENTE IL LIMITE DI SUCCESSIONE, CON FORMULA E METODI DI CALCOLO, DANDO ANCHE UNA INTERPRETAZIONE DELLA FORMULA

4) ESPRIMERE IL TEOREMA dell'UNICITÀ DEL LIMITE E DARNE LA DIMOSTRAZIONE.

5) DEFINIRE IL LIMITE DIVERGENTE DI SUCCESSIONE, DANDO LA FORMULA E UN' INTERPRETAZIONE DELLA DEFINIZIONE

6) DARE LA DEFINIZIONE DI "SUCCESSIONE LIMITATA" E SPIEGARE IL RAPPORTO TRA SUCCESSIONE CONVERGENTE E LIMITATA (E VICEVERSA), CON UN ESEMPIO.

7) QUALI SONO I TEOREMI CHE REGOLANO LE OPERAZIONI SU SUCCESSIONI CONVERGENTI?

8) SPIEGARE COS'È UNA FORMA INDETERMINATA E FARNE ALCUNI ESEMPI

9) DEFINIRE COS'È UNA SUCCESSIONE MONOTONA & STRETTAMENTE MONOTONA.

10) RIPORTARE IL RAPPORTO TRA SUCCESSIONE LIMITATA, MONOTONA E CONVERGENTE. E NEL CASO NON SIA LIMITATA? FAI I 2 CASI.

11) DIRE E DIMOSTRARE IL TEOREMA DEL CONFRONTO (3 CASI, DIMOSTRAZIONE di 1 SOLO).

12) SPIEGARE QUALI SONO I LIMITI ELEMENTARI, SPECIFICANDO:

   1) RAPPORTO ESPONENZIALE / POTENZA / LOGARITMO

   2) DUE LIMITI PARTICOLARI

Capitolo 7.

1) DARE LA DEFINIZIONE DI:

   1) FUNZIONE LIMITATA, IN UN INTERVALLO.

   2) ESTREMO SUPERIORE & INFERIORE IN UN INTERVALLO

   3) MASSIMO & MINIMO ASSOLUTO.

   4) MASSIMO & MINIMO RELATIVO IN UN PUNTO.

   5) FUNZIONE INVERTIBILE IN UN INTERVALLO

   6) FUNZIONE MONOTONA & STRETTAMENTE MONOTONA.

   7) FUNZIONE PARI & DISPARI, CON ESEMPIO.

2) DARE LE VARIE DEFINIZIONI DI LIMITI DI FUNZIONE, CON LA LORO INTERPRETAZIONE.

3) COSA SONO LIMITE DESTRO & SINISTRO, E CHE RELAZIONE HANNO CON IL LIMITE.

4) TEOREMA DEL CONFRONTO: DEFINIZIONE E DIMOSTRAZIONE.

5) CHE COS'È, GRAFICAMENTE, UNA FUNZIONE CONTINUA?

6) DARE LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA IN UN PUNTO, IN UN INTERVALLO, A DESTRA O A SINISTRA.

7) QUALI OPERAZIONI TRA FUNZIONI NON MODIFICANO LA LORO CONTINUITÀ?

8) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO: DEFINIZIONE.

9) TEOREMA DEGLI ZERI DI UNA FUNZIONE CONTINUA: DEFINIZIONE.

10) TEOREMA DEI VALORI DI UNA FUNZIONE CONTINUA E LIMITATA: DEFINIZIONE.

11) TEOREMA DI WEIERSTRASS: DEFINIZIONE

12) TEOREMI SULLE FUNZIONI INVERTIBILI (2):

13) DESCRIVERE I 2 TIPI DI DISCONTINUITÀ.

1. UNA SUCCESSIONE, INDICATA CON $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ È UNA FUNZIONE AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME $\mathbb{N}$ DEI NUMERI NATURALI E PER CODOMINIO UN QUALSIASI SOTTO INSIEME di $\mathbb{R}$ IN CUI SIA DEFINITA LA DISTANZA $d(x,y)$ TRA OGNI COPPIA DI SUOI ELEMENTI. HA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DISCRETA

2. DATO CHE $\mathbb{N}$ È LIMITATO INFERIORMENTE, SI VALUTA IL LIMITE PER $n \to +\infty$.

3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ a > 0 \mid \underbrace{|f(x) - L|}_{\text{sarebbe } a_n} < \varepsilon \ \forall x > a \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = L$

CIÒ SIGNIFICA CHE SCELTO UN ε POSITIVO TENDENTE A 0, LA DISTANZA TRA LA SUCCESSIONE e L È COMUNQUE INFERIORE ad ε AL CRESCERE DI n.

4. TEOREMA DELL' UNICITÀ: DATA LA SUCCESSIONE a_n, SE PER $n \to +\infty$ TALE SUCCESSIONE CONVERGE AD UN VALORE E AD UN ALTRO, SIGNIFICA CHE TALI VALORI COINCIDONO.

$$\text{Se: } \lim_{n \to +\infty} a_n = L_1 \quad \& \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = L_2 \quad \text{Allora: } L_1 = L_2$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $L_1 \neq L_2$. Perciò, $d(L_1, L_2) > 0$.
Dalla definizione di limite convergente discende:

$$|a_n - L_1| < \varepsilon \qquad \& \qquad |a_n - L_2| < \varepsilon$$

cioè: $d(a_n, L_1) < \varepsilon \quad \& \quad d(a_n, L_2) < \varepsilon$

con ε un valore compreso tra 0 e $\frac{d(L_1, L_2)}{2}$

quindi:

$$d(L_1, L_2) \leq d(a_n, L_1) + d(a_n, L_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$d(L_1, L_2) < 2\varepsilon \quad \to \quad d(L_1, L_2) < \cancel{2} \frac{d(L_1, L_2)}{\cancel{2}}$$

che è una contraddizione, quindi $L_1 = L_2$.

5. $\forall M > 0 \ \exists \ a > 0 \mid a_n > M \ \forall n > a \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ 1

$\forall M > 0 \ \exists \ a > 0 \mid a_n < -M \ \forall n > a \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$ 2

1. SIGNIFICA CHE PRESO UN M TENDENTE A $+\infty$, a_n al TENDERE di $n \to +\infty$ CRESCE PIÙ VELOCEMENTE di M VERSO L'INFINITO POSITIVO.
2. SIGNIFICA CHE PRESO UN M TENDENTE A $+\infty$, a_n al TENDERE di $n \to +\infty$ DECRESCE PIÙ VELOCEMENTE DI $-M$ VERSO L'INFINITO NEGATIVO.

6. UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE È SEMPRE LIMITATA MA NON SEMPRE UNA SUCCESSIONE LIMITATA È CONVERGENTE — COME PER $\{-1^n\}_{n=0}^{n \to +\infty}$, CHE OSCILLA TRA -1 e 1 SENZA MAI CONVERGERE.

deve essere LIMITATA E MONOTONA

7. SONO I TEOREMI di SOMMA (LIMITE della somma = somma dei limiti), DELLA DIFFERENZA (limite della differenza = differenza dei limiti), PRODOTTO, QUOZIENTE, LOGARITMO (limite del logaritmo = logaritmo del limite), ESPONENZIALE

8. UNA FORMA INDETERMINATA È IL RISULTATO DELLA VALUTAZIONE DI UN LIMITE. NEL CASO: $0^{+\infty}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 ... NON SI PUÒ DIRE NULLA DEL LIMITE CONSIDERATO.

10. UNA FUNZIONE LIMITATA E MONOTONA È CONVERGENTE (MA SE È SOLO LIMITATA NON È DETTO CHE SIA ANCHE CONVERGENTE). SE INVECE UNA FUNZIONE È MONOTONA MA ILLIMITATA SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE), DIVERGE POSITIVAMENTE (NEGATIVAMENTE), È DIVERGENTE A $+/- \infty$.

11. TEOREMA DEL CONFRONTO: siano DATE TRE SUCCESSIONI $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ e $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$, allora:

1. SE $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = L$ allora $\lim_{n \to \infty} b_n = L$
2. Se $a_n \to +\infty$, allora $b_n \to +\infty$
3. Se $c_n \to -\infty$, allora $b_n \to -\infty$.

DIMOSTRAZIONE di 1): se $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ & $\lim_{n \to \infty} c_n = L$ allora dalla definizione di limite ottengo:

$$L - \varepsilon < a_n \quad \cup \quad c_n < L + \varepsilon$$

ma:

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

quindi:

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon \quad \rightarrow \quad L \text{ è limite di } b_n$$

12. IL RAPPORTO È: <u>LOGARITMO < POTENZA < ESPONENZIALE.</u>

i DUE LIMITI PARTICOLARI SONO:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \& \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 1$$

13. DEFINIZIONE di SUCCESSIONE MONOTONA e STRETTAMENTE MONOTONA: data la successione a_n

- Se $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ NON DECRESCENTE
- Se $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ CRESCENTE (STRETTAMENTE)
- Se $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ NON CRESCENTE
- Se $a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow$ DECRESCENTE

COMPITINO di CALCOLO, MATERIALI UTILI.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE, RAZIONALI, CON RADICI, etc.

UNA DISEQUAZIONE È UNA [illegible]. RISOLVERE UNA DISEQUAZIONE SIGNIFICA TROVARNE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI.

ABBIAMO [illegible]:

1) POSSO TRASPORTARE DALL'ALTRA PARTE UN TERMINE CAMBIANDONE IL SEGNO:

$$x+5>2 \rightarrow x>2-5 \rightarrow x>-3$$

2) POSSO CAMBIARE SEGNO A TUTTI I TERMINI DI UNA DISEQUAZIONE CAMBIANDONE IL VERSO:

$$4-3x>2 \rightarrow -4+3x<-2 \rightarrow 3x<-2+4$$

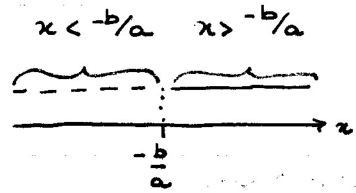
$$3x<2 \rightarrow x<2/3$$

NOTA: $\frac{1}{x}>5 \rightarrow x<\frac{1}{5}$

1° GRADO

HANNO FORMA: $ax+b>0$ oppure $ax+b<0$

HANNO SOLUZIONE: $x>-\frac{b}{a}$ oppure $x<-\frac{b}{a}$



2° GRADO

HANNO FORMA: $ax^2+bx+c>0$ oppure $ax^2+bx+c<0$

HANNO SOLUZIONE: $\Delta=b^2-4ac$

[illegible] se b è pari

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$$

$$x_{12}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\Delta/4}}{a}$$

$\Delta>0$:

$$x<\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cup x>\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oppure} \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}<x<\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta=0$

$$\forall x-\{-b/2a\} \quad \text{oppure} \quad \emptyset$$

$\Delta<0$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad \emptyset$$

$$\Delta<0\begin{cases} a>0 & \forall x\in\mathbb{R} \\ a<0 & \emptyset \end{cases}$$

$$\Delta=0\begin{cases} a>0 & \forall x\in\mathbb{R}-\{-b/2a\} \\ a<0 & \emptyset \end{cases}$$

GRADO > 2°

HANNO PIÙ FORME: SI RICONOSCONO PERCHÈ DI GRADO 3°, 4°, 5°...

ESEMPI:

NON È IL DOPPIO PRODOTTO & È POSITIVO!!

$$(x^3-b^3)=(x-b)(x^2+bx+b^2)$$

- $x>b$
- $\Delta=b^2-4\cdot1\cdot b^2=-3b^2<0 \rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$

$\Big\}\ x>b.$

$$(x^4-b^4)\geq0 \quad x^2=t \rightarrow (t^2-b^4)>0 \rightarrow (t-b^2)(t+b^2)>0$$

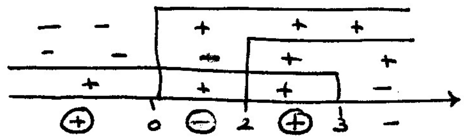
$(x^4+5x^2+4)\leq3 \quad x^2=t \rightarrow t^2+5t+4\leq3$ e risolvo come disequazione di 2° grado.

Ruffini: $x^4+x^3+2x^2+4x-8<0$ trovo che $x=1$ annulla il polinomio:

	1	1	2	4	−8
1		1	2	4	8
	1	2	4	8	0

$\rightarrow (x-1)(x^3+2x^2+4x+8)<0$ ...

IN TUTTI QUESTI CASI, TROVANDO PIÙ VALORI PER CUI $x > 0$, SI FA UN'ANALISI DEL PRODOTTO DEI SEGNI:



$\rightarrow$ $x < 0 \cup 2 < x < 3$

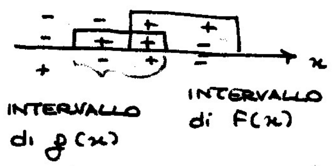
Razionali

HANNO FORMA $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ oppure $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$

ANALIZZO SEPARATAMENTE $f(x)$ e $g(x)$:

$f(x) > 0$

$g(x) > 0$ $\rightarrow$



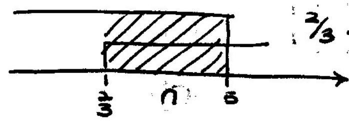
- CON $>$ TROVO GLI INTERVALLI POSITIVI
- CON $<$ TROVO GLI INTERVALLI NEGATIVI

Sistemi di Disequazioni

SI TRATTA di COMPIERE L'INTERSEZIONE DEI DIVERSI INSIEMI DELLE SOLUZIONI

$$\cap \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Esempio: $\begin{cases} 3x > 2 \\ x < +5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2/3 \\ x < 5 \end{cases}$



$2/3 < x < 5$

Disequazioni irrazionali ⤳ "con radice"

1) Equazioni: $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$

- n PARI: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x)^n \end{cases}$ [illegible]

- n dispari: $f(x) = g(x)^n$ cioè elevo semplicemente i termini

NB: SE HO PIÙ di UN RADICALE, DEVO TROVARE L'INTERVALLO IN CUI TUTTI I RADICALI SONO POSITIVI: ("INTERSEZIONE").

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x+7} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 2 \\ x \geq -7/3 \end{cases} \rightarrow \quad x \geq 2$$

E DA LÌ POSSO RISOLVERE:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ (\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4})^2 = (\sqrt{3x+7})^2 \end{cases} \quad x = \dots$$

[illegible]

2) Disequazioni: $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$

- n DISPARI: $f(x) \geq g(x)^3$ CIOÈ BASTA ELEVARE ENTRAMBI I MEMBRI.

- n PARI: Se $>$: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^n \end{cases}$

Se $<$: $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{[illegible]} \\ g(x) > 0 & \text{[illegible]} \\ f(x) < g(x)^n \end{cases}$

E SE HO PIÙ RADICI?

→ TROVO IL VALORE IN CUI SONO POSITIVE ENTRAMBE

VALORE ASSOLUTO: DATO UN NUMERO REALE a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

CIOÈ $|a|$ È SEMPRE POSITIVO.

Proprietà:

Se $|a| = 0$ allora $a = 0$. *

$|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ POSSO SPEZZARE IL PRODOTTO

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ POSSO SPEZZARE IL QUOZIENTE.

$|a| \geq b \rightarrow a \leq -b$ O $a \geq b$

$|a| \leq b \rightarrow -b \leq a \leq b$

$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$|a| \leq |b| \rightarrow a^2 \leq b^2$

Equazioni:

$$|x| = a \begin{cases} a \geq 0 & x = \pm a \\ a < 0 & x \text{ NON HA SOLUZIONI} \end{cases}$$

in generale: $|f(x)| = 0 \rightarrow f(x) = 0$ *

Disequazioni:

$|f(x)| > a \rightarrow \boxed{\cup} \begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}$ UNIONE $>$

$|f(x)| < a \rightarrow \boxed{\cap} \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$ INTERSEZIONE $<$

anche con equazione

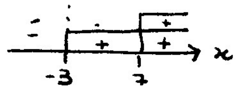
CON EQUAZIONE E VALORE

NOTA: EQUAZIONI CON PIÙ DI UN MODULO.

$\underbrace{|x+3|}_{1} = \underbrace{|x-7|}_{2}$

$x > -3$

$x > 7$



① ② ③ intervalli da considerare

VARIE ECCEZIONI

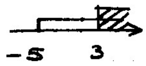
1) PIÙ RADICI → SI TROVA L' INTERVALLO IN CUI TUTTE SONO POSITIVE O NULLE

ES: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} > 5+x$

IN QUESTO INTERVALLO SONO ENTRAMBE NON NEGATIVE

$x+5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -5$

$x-3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 3$

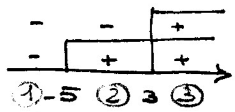


2) PIÙ MODULI → TANTI CASI QUANTI SONO GLI INTERVALLI

ES $|x+5| + |x-3| > 5+x$

$x \geq -5$

$x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$



1 $\begin{cases} x < -5 \\ -x-5+3-x > 5+x \end{cases}$

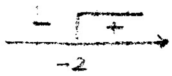
2 $\begin{cases} -5 < x < 3 \\ x+5+(-x+3) > 5+x \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \geq 3 \\ x+5+x-3 > 5+x \end{cases}$

3) MODULO IN RADICE:

$\sqrt{|x+2|} > 5$

$|x+2| \geq 0$



1 $\begin{cases} x < -2 \\ -x-2 > 25 \end{cases}$

$-x > 23$

$x < -23$

2 $\begin{cases} x > -2 \\ x+2 > 25 \end{cases}$

$x > 23$

ESPONENZIALE E LOGARITMO. CENNI alla POTENZA.

1) POTENZA: $f(x) = x^n$

REGOLE:

$x^a \pm x^b$ NON C'È UNA REGOLA! DA NON CONFONDERSI:

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

$\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$

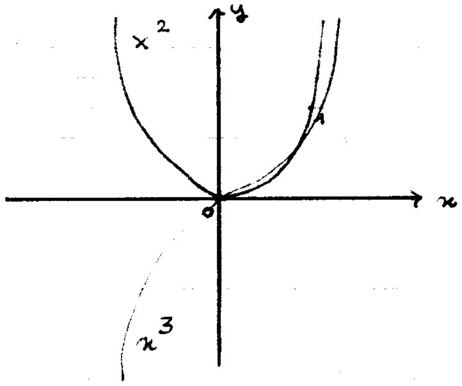
$\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$

GRAFICO:

x^2

x^3



NOTA: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$, se ESPONENTE È NEGATIVO → radice + al DENOMINATORE

$a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{a}}$ se ESPONENTE È FRAZIONE → solo radice.

2) ESPONENZIALE: l'incognita è all'esponente: a^x

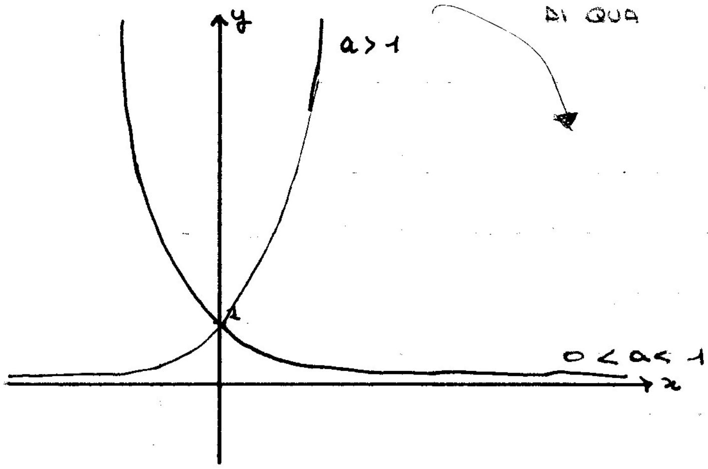
2 casi:

$0 < a < 1$ → GRAFICO DECRESCENTE

$a > 1$ → GRAFICO CRESCENTE

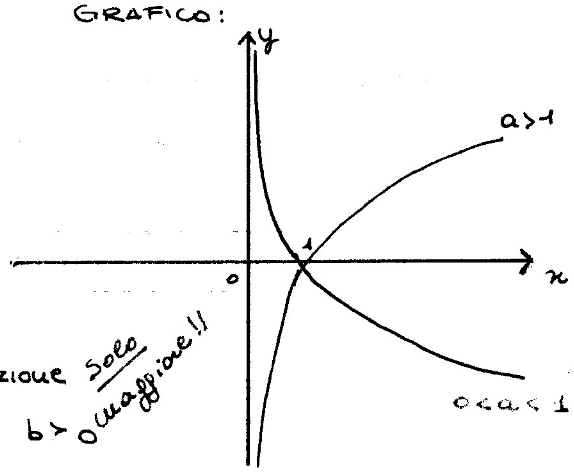
PER IL LOGARITMO RUOTA DI QUA

NB: La curva è MOLTO RIPIDA.



3) LOGARITMO: È L'ESPONENTE DA DARE ALLA BASE a PER OTTENERE b

$a^x = b \rightarrow x = \log_a b$ GRAFICO:



PROPRIETÀ, analoghe a quelle precedenti

$\log_a (x * y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a b^k = k \log_a b$

$\log_a a = 1 \wedge \log_a 1 = 0$

$\log_a a^5 = 5$

$\boxed{NB}$ Condizione d'esistenza $b > 0$ solo maggiore!!

Equazioni & Disequazioni Esponenziali

a) Equazioni.

- $2^{x-1} = \frac{1}{4} \rightarrow 2^{x-1} = 2^{-2}$ STESSA BASE, QUINDI $x-1=-2 \rightarrow \boxed{x=-1}$
- $3^{x^2-x} = 9^{x+2} \rightarrow 3^{x^2-x} = 3^{2x+4} \rightarrow x^2-x = 2x+4 \rightarrow$

  $\rightarrow x^2-3x-4=0 \rightarrow x_1=-1 \wedge x_2=4$
- $3^{x-1} = 9 \cdot 4^{x-3} \rightarrow \frac{3^{x-1}}{9} = 4^{x-3} \rightarrow \frac{3^{x-1}}{3^2} = 4^{x-3} \rightarrow$

  $\rightarrow 3^{x-1} \cdot 3^{-2} = 4^{x-3} \rightarrow 3^{x-3} = 4^{x-3} \cdot \frac{1}{} \rightarrow 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-3}$

  $1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3$

b) Disequazioni. forma: $a^x \gtrless b$

1) $b \leq 0$: $\underbrace{a^x}_{\text{POSITIVO}} > \underbrace{b}_{\text{POSITIVO}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a^x < b \quad S \equiv \emptyset. \rightarrow$ UN POSITIVO MINORE DI UN NEGATIVO.

2) $b > 0$. DUE CASI

1) $0<a<1$: data $a^x \geq b$, con $b = a^{\log_a b} \rightarrow x \leq \log_a b$

data $a^x < b$, con $b = a^{\log_a b} \rightarrow x > \log_a b$

2) $a > 1$ data $a^x > b \rightarrow x > \log_a b$

data $a^x < b \rightarrow x < \log_a b$

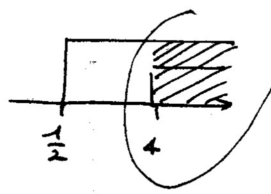
Equazioni & Disequazioni Logaritmiche

a) Equazioni:

$\log_a x = b \rightarrow a^b = x$

- $\log_3(x-4) = 2 \quad 3^2 = x-4 \rightarrow 9 = x-4 \rightarrow x = 13$ con $x > 4$
- $\log_3(x-4) - \log_3(2x-1) = -1$

  $x > 4 \wedge x > \frac{1}{2} \longrightarrow$



Si trova l'intervallo in cui sono entrambe positive

$x > 4$

$\log_3\left(\frac{x-4}{2x-1}\right) = -1 \quad \dots$

b) Disequazioni. $\log_a x = b$

$0 < a < 1$: $\log_a x > b \rightarrow \log_a x > \log_a a^b \rightarrow \boxed{x < a^b \wedge x > 0}$ CE

$\log_a x < b \rightarrow \log_a x < \log_a a^b \rightarrow \boxed{x > a^b} \wedge x > 0$

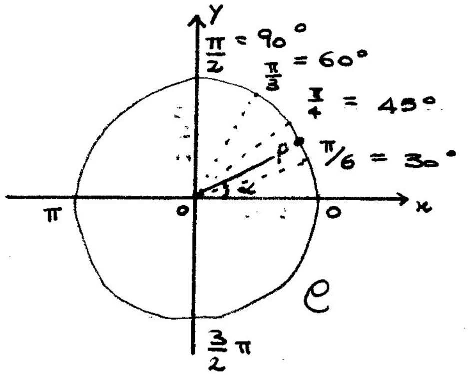
$a > 1$: $\log_a x > b \rightarrow \log_a x > \log_a a^b \rightarrow x > a^b$

$\log_a x < b \rightarrow \log_a x < \log_a a^b \rightarrow x < a^b$

Segni: Regolare

DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

NOTE SU: TRIGONOMETRIA.



$\mathcal{C}$ è CIRCONFERENZA GONIOMETRICA,
CENTRO = ORIGINE
$r = 1$

• P è l'arco da 0 a P sottende l'angolo α.
P ha coordinate $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$

Rel. FOND: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

VALORI FONDAMENTALI

$\frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

0 : $\cos 0 = 1$ $\operatorname{sen} 0 = 0$

π : $\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen}\pi = 0$

$\frac{3}{2}\pi$: $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ $\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi = -1$

$\frac{\pi}{4}$: $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

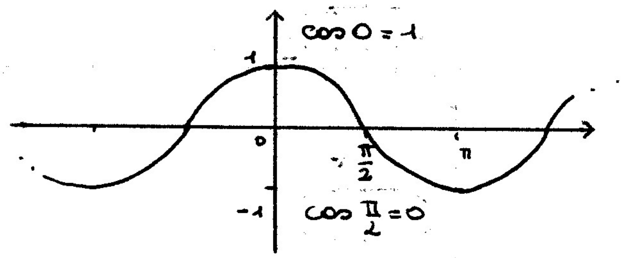
$\frac{\pi}{3}$: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6}$: $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

SENO E COSENO HANNO [illegible]

seno DISPARI
coseno PARI

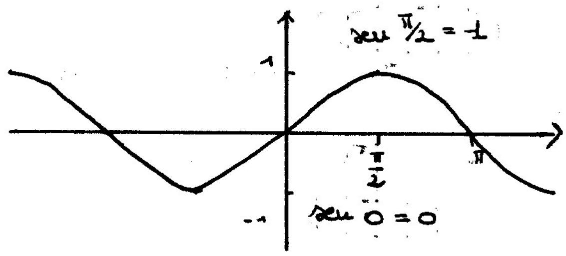
$\cos\alpha$:



SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE Y: PARI

$\cos(-x) = \cos x$.

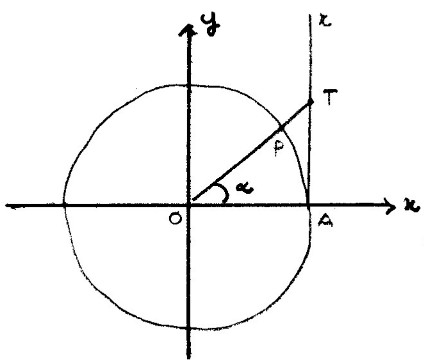
$\operatorname{sen}\alpha$:



SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE: DISPARI

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

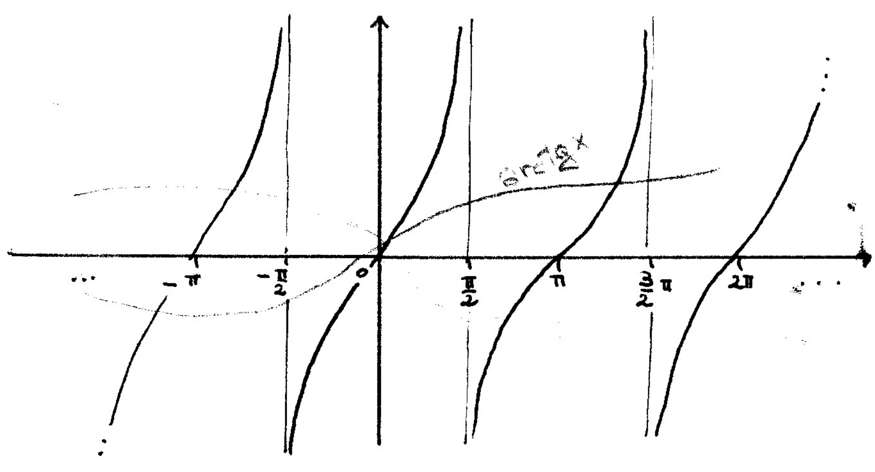
FUNZIONE TANGENTE: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



$\overline{AT} = \operatorname{tg}\alpha$. HA [illegible]

NON ESSENDO DEFINITA IN $\frac{\pi}{2} + k\pi$, ne calcoliamo il limite:

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x) = +\infty$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x) = -\infty$



$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \nexists$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg} 0 = 0$

L' INVERSA : VEDI POI

ALTRE FUNZIONI UTILI: COTANGENTE.

$$\text{cTg}\, x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{Tg} x} \qquad \operatorname{sen} x \neq 0 \rightarrow x \neq k\pi$$

i VALORI di $\text{cTg}\, x$ SONO "OPPOSTI" A QUELLI DELLA TANGENTE:

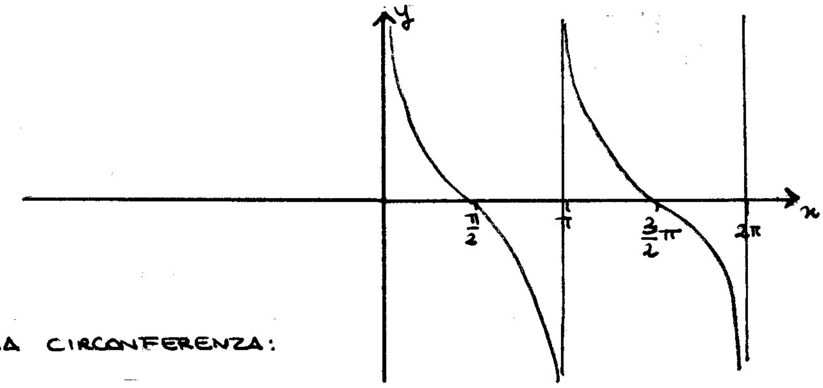
$\text{cTg}\ 0 : \nexists$

$\text{ctg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

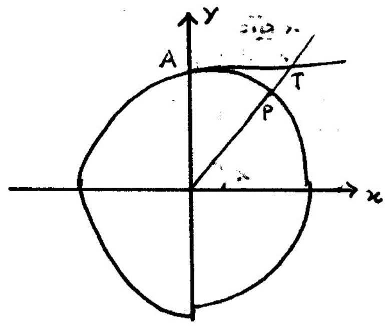
$\text{cTg}\ \frac{\pi}{2} = 0$

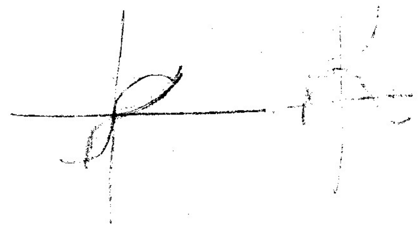
$\text{cTg}\ \frac{\pi}{4} = 1$

$\text{ctg}\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

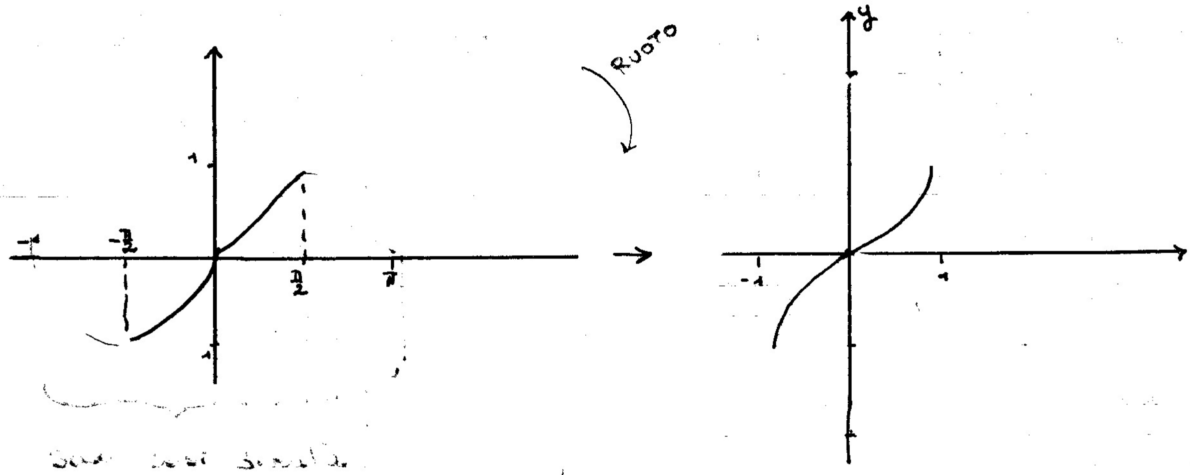


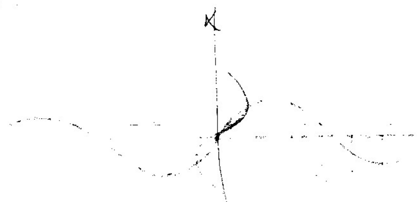
IL SUO SIGNIFICATO SULLA CIRCONFERENZA:





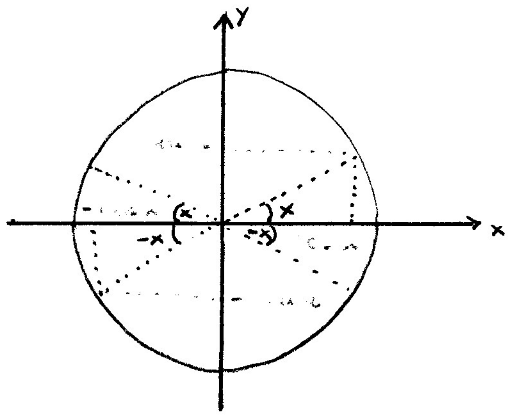
ARCOSENO → è inversa del , con una restrizione sul dominio del seno.





Curve Goniometriche

POSSIAMO OTTENERE ALCUNE UGUAGLIANZE CON SENO E COSENO:



$$\left.\begin{aligned} \cos(x+\pi) &= -\cos(-x) \\ \operatorname{sen}(x+\pi) &= -\operatorname{sen}(x) \\ \cos(-x+\pi) &= -\cos x \\ \operatorname{sen}(-x+\pi) &= \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\}$$

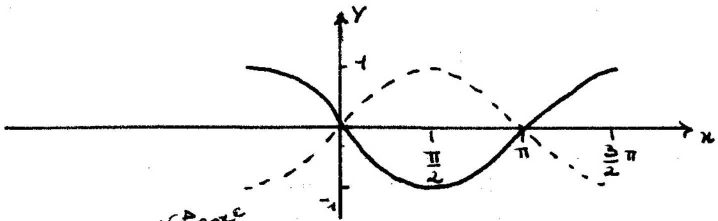
$\cos(-x) = \cos x$ PARI

$\operatorname{sen}(-x) - \operatorname{sen}(x)$ DISPARI

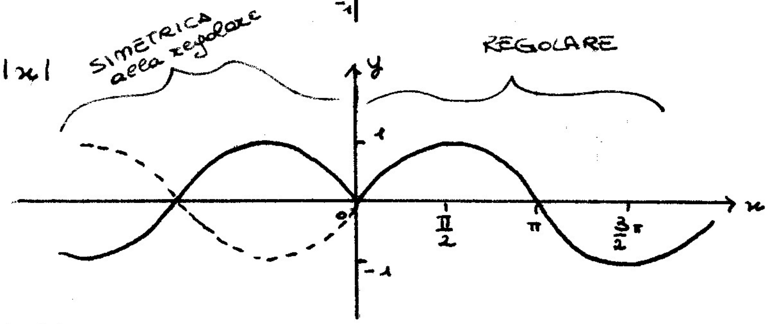
Grafici deducibili

$\cos(-x) = \cos x$ (PARI), QUINDI IL GRAFICO NON CAMBIA;

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (DISPARI) : FLIP RISPETTO ALL'ASSE X; IN TUTTI E 2 I CASI



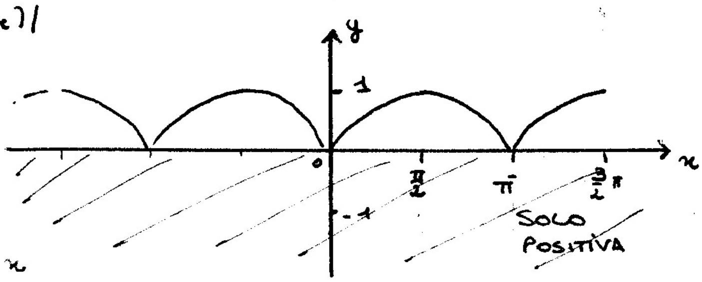
$y = \operatorname{sen}|x|$



se $x > 0$: REGOLARE

se $x < 0$: FLIP RISPETTO AD ASSE X

$y = |\operatorname{sen}(x)|$



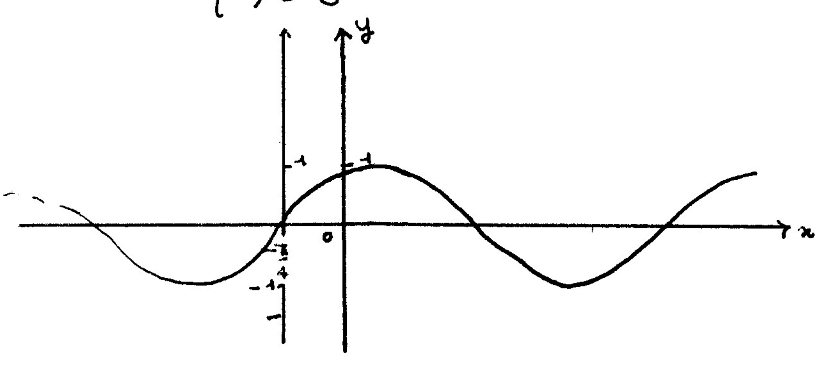
se $|\operatorname{sen} x| > 0$.

- $\operatorname{sen} x$ con $\operatorname{sen} x \geq 0$
- $-\operatorname{sen} x$ con $\operatorname{sen} x < 0$

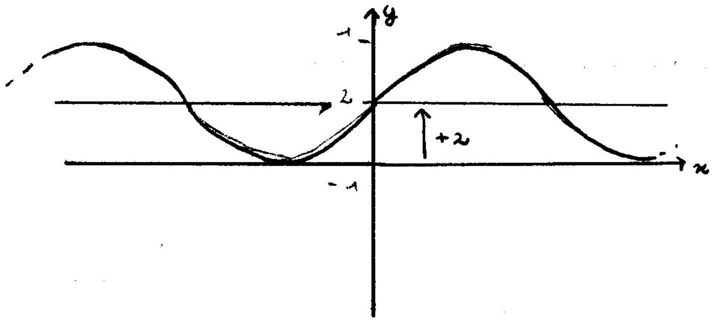
- $\underset{\sim}{\overset{x}{}}\operatorname{sen} x + B$ → TRASLAZIONE SU ASSE x di B
- $\operatorname{sen}\underbrace{(x-\alpha)}_{y}$ → TRASLAZIONE SU ASSE y di α.

Esempi:

$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \begin{cases} X = x + \pi/4 \\ Y = 0 \end{cases}$ → NUOVA ORIGINE: $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$



$y = 2 + \operatorname{sen} x$ → NUOVA ORIGINE È $O(0, 2)$



$y = \underline{\alpha} \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} \alpha x$:

SI ALLARGA IL CODOMINIO:

$\alpha * [-1, 1]$

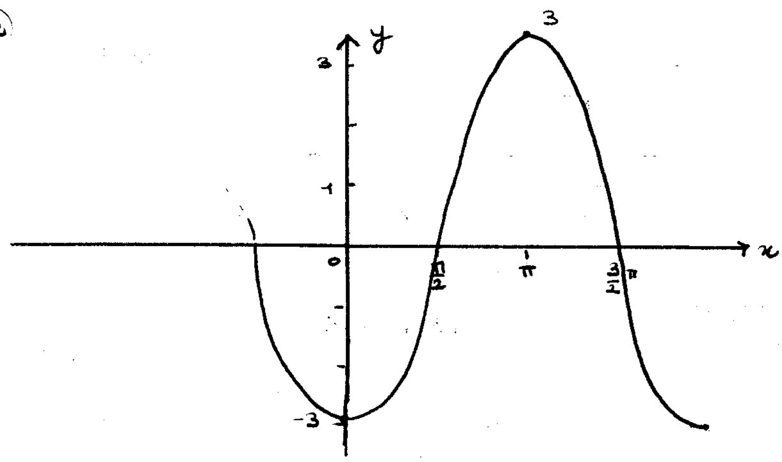
SI RESTRINGE IL PERIODO:

$T = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$

Esempi:

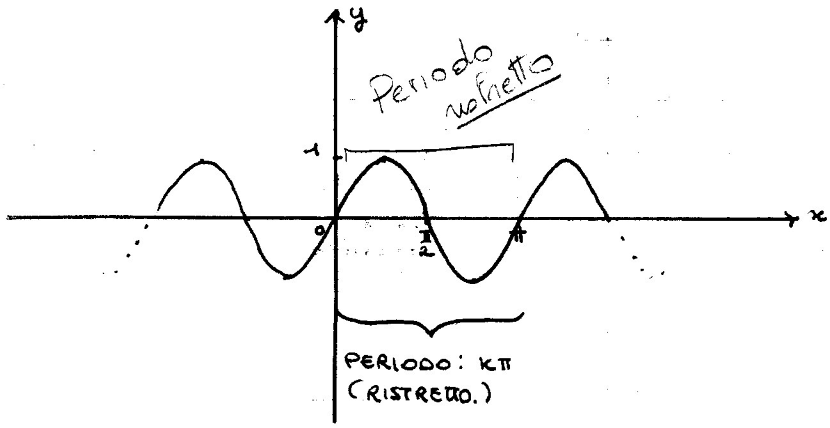
$y = -3 \cos x$

simmetrico rispetto a x



$y = \operatorname{sen} 2x$

Periodo $= \dfrac{2\pi k}{2} = k\pi$;



FORMULE GONIOMETRICHE:

IDENTITÀ: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

SOMMA / DIFFERENZA:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

CAMBIO [illegible]

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

[illegible]

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

divido per $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\cancel{\sin\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}$$

DUPLICAZIONE:

$$\cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

BISEZIONE:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$ se $\frac{\alpha}{2}$ POSITIVO, SE NO COL − DAVANTI

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$ se $\frac{\alpha}{2}$ " " " "

Equazioni goniometriche

- EQUAZIONE $\sin x = m$ oppure $\cos x = m$

  SE $m \in [-1, 1]$ ALLORA HA SOLUZIONE.

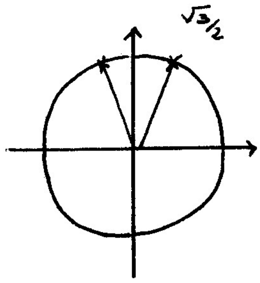
  La soluzione ha periodicità, salvo esercizi particolari, $2k\pi$

  Esempio:

  $y = \sin x$

  $\sin x = 3.$ $\quad S = \{\emptyset\}$ $\quad 3 \notin [-1, 1]$

  $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



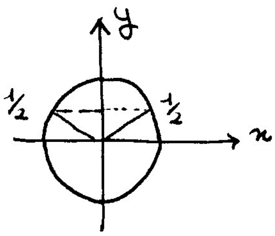
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \wedge \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

NOTA: se ho $y = \sin 3x \rightarrow \sin 3x = \dfrac{1}{2}$ CONSIDERO $3x = t$,

RISOLVO NORMALMENTE TROVANDO t e POI DIVIDO: $x = \dfrac{t}{3}$ (ANCHE IL PERIODO). COME X I GRAFICI

Esempio:

$\sin 3x = \dfrac{1}{2}$



$3x = t$

$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \wedge \quad t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ divido risultato x periodo.

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \quad \wedge \quad x = \frac{5}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

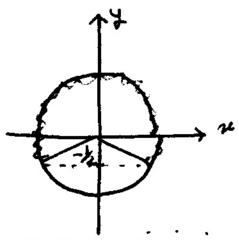
- EQUAZIONE $\tan x = m$. HA SOLUZIONE CON PERIODO $k\pi$

Disequazioni Goniometriche

↳ SIGNIFICA TROVARE SULLA CIRCONFERENZA L'ANGOLO OLTRE IL QUALE LA DISEQUAZIONE È SODDISFATTA.

Esempio:

$\sin x > -\dfrac{1}{2}$



$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

SPESSO LE DISEQUAZIONI SONO RICONDUCIBILI A DISEQUAZIONI ELEMENTARI.

Esempio:

$4\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x - \sqrt{3} \geq 0 \qquad \cos x = t$

$4t^2 + (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3} \geq 0$

DISEQUAZIONI OMOGENEE; di grado n.

n dispari

1° grado: $\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x > 0$

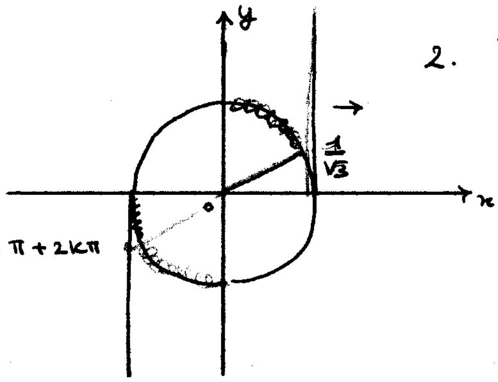
divido per $\cos x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

1) $\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - 1 > 0$
se $\cos x > 0$

2) $\sqrt{3}\,\text{tg}\,x - 1 < 0$
se $\cos x < 0$

RISOLVO i 2 SISTEMI

1) $\begin{cases} \text{tg}\,x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x < 0 \end{cases}$ 1 2 $\begin{cases} \text{tg}\,x > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x > 0 \end{cases}$



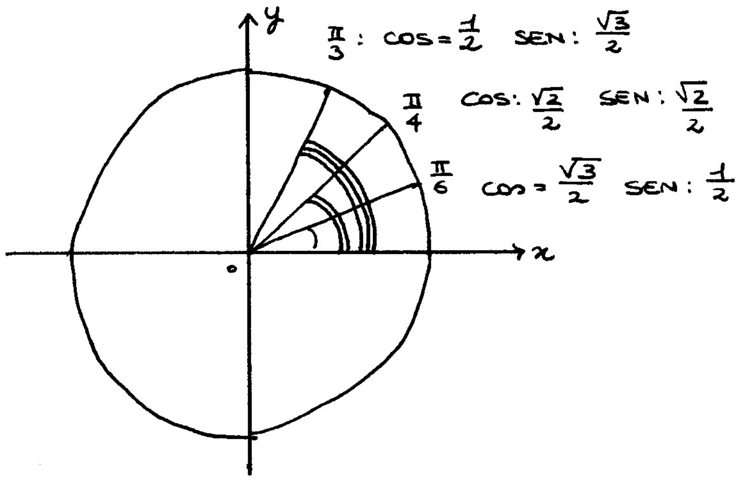
2. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

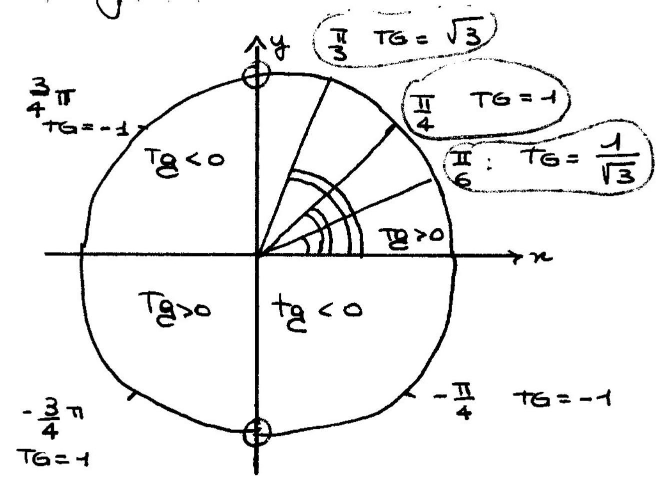
1. $\frac{7\pi}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

UNISCO i 2 VALORI:

Seno & Coseno



Tangente



Punto 3: Successioni e limiti di successioni.

Def. UNA SUCCESSIONE È UNA FUNZIONE AVENTE PER DOMINIO L'INSIEME DEI NATURALI E PER CODOMINIO UN QUALUNQUE INSIEME A IN CUI È DEFINITA LA DISTANZA $d(x,y)$ TRA OGNI COPPIA DI SUOI ELEMENTI.

$$n \mapsto a_n \in A \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Notazione: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ cioè: n va da 1 a $+\infty$.

Grafico: È UN GRAFICO FORMATO DA PUNTI ISOLATI, $x(n, a_n)$, OSSIA È UN GRAFICO DI PUNTI DISCRETI

Limite di Successione: $\mathbb{N}$ È INSIEME ILLIMITATO SUPERIORMENTE, QUINDI SI STUDIA IL LIMITE PER n CHE TENDE A $+\infty$.

- limite CONVERGENTE AD UN VALORE FINITO, ℓ.

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$ Tale che $\forall n > N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

  ... ossia, al crescere di n, preso un ε comunque piccolo, la distanza tra a_n e ℓ sarà comunque minore di ε.

  $\rightarrow$ Per trovare un opportuno valore di N, basta APPLICARE LA DEFINIZIONE.

  Es: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1 \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N$

  $$\left| \frac{n^2-1}{n^2} - 1 \right| < \varepsilon \rightarrow \left| \cancel{1} - \frac{1}{n^2} - \cancel{1} \right| < \varepsilon \rightarrow \left| -\frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon \rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

  $\rightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ dato che $n > N \vee n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ allora un buon valore per N è un valore maggiore di $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

TEOREMA DELL' UNICITÀ del LIMITE. Sia $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ UNA SUCCESSIONE. SE ESISTONO DUE ELEMENTI $a, b \in$ CODOMINIO A DELLA SUCCESSIONE TALI CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \ \& \ \lim_{n \to +\infty} a_n = b$$

ALLORA $a = b$, CIOÈ I DUE LIMITI COINCIDONO.

Dim. SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $a \neq b$. LA DISTANZA $d(a,b)$ DIVENTA POSITIVA: $d(a,b) > 0$.

SCEGLIAMO UN VALORE di ε PARI A $\dfrac{d(a,b)}{2}$. PER LA DEFINIZIONE DI LIMITE CONVERGENTE, OTTENIAMO CHE:

$$\left.\begin{array}{ll} d(a_n, a) < \varepsilon & \forall n > N_1 \\ d(a_n, b) < \varepsilon & \forall n > N_2 \end{array}\right\} d(a,b) \leq d(a_n, a) + d(a_n, b) < \varepsilon + \varepsilon$$

$$\rightarrow d(a,b) < 2\varepsilon \rightarrow d(a,b) < \cancel{2} \cdot \frac{d(a,b)}{\cancel{2}} \quad \text{CONTRADDIZIONE.}$$

#

- <u>limite DIVERGENTE A $+\infty$.</u>

  $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M \quad \forall n > N$

  cioè, al crescere di n, la successione a_n è comunque grande

- <u>limite divergente a $-\infty$.</u>

  $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < -M \quad \forall n > N$

  cioè, al crescere di n, la successione a_n è comunque piccola.

<u>TEOREMA DELLA CONVERGENZA DI FUNZIONI LIMITATE.</u> UNA SUCCESSIONE È LIMITATA SE ESISTE UN VALORE M TALE CHE $|a_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. UNA SUCCESSIONE CHE CONVERGE AD UN VALORE FINITO ℓ, QUINDI, È ANCHE LIMITATA. UNA SUCCESSIONE LIMITATA, PERÒ, PUÒ NON ESSERE CONVERGENTE: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$ È LIMITATA MA OSCILLA TRA -1 E 1 SENZA MAI CONVERGERE.

<u>TEOREMI PER IL CALCOLO DEL LIMITE.</u> DATE DUE SUCCESSIONI $\{a_n\}_1^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ DI LIMITE a, b RISPETTIVAMENTE:

1) SOMMA: $a_n + b_n \to a + b$
2) PRODOTTO: $a_n b_n \to ab$
3) QUOZIENTE: $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ con $b \neq 0$
4) POTENZA: $(a_n)^{b_n} \to a^b$
5) LOGARITMO: $\log_{a_n}(b_n) \to \log_a b$
6) TECNICA UTILE: dividere numeratore e denominatore PER LA MAGGIORE POTENZA di n. IN QUESTO MODO SI EVITANO LE FORME INDETERMINATE:

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad +\infty - \infty, \quad 0^0, \quad (+\infty)^0$$

<u>SUCCESSIONI MONOTONE.</u> SE UNA SUCCESSIONE È MONOTONA (= NON DECRESCENTE O NON CRESCENTE) E LIMITATA IN $\mathbb{R}$, ALLORA È CONVERGENTE.

Nb: NON DECRESCENTE: $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \to >$ SE CRESCENTE

NON CRESCENTE: $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \to <$ SE DECRESCENTE

<u>TEOREMA DEL CONFRONTO:</u> SIANO $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ e $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$, TALI CHE $a_n \leq b_n \leq c_n$. ALLORA, SE a_n HA LIMITE L UGUALE AL LIMITE di c_n, ALLORA ANCHE b_n HA LIMITE L.

<u>ALCUNI LIMITI ELEMENTARI:</u> L'ESPONENZIALE CRESCE PIÙ VELOCEMENTE DELLA POTENZA E LA POTENZA CRESCE PIÙ VELOCEMENTE DEL LOGARITMO.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{1} \quad \sim \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

$\boxed{\text{LOGARITMO} < \text{POTENZA} < \text{ESPONENZIALE}}$ ⚠

Esercizi : LIMITI

1. $\lim_{x\to 2^+} \frac{7-x}{x-2} \to \lim_{x\to 2^+} \frac{5^-}{0^+} = +\infty$

2. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+5}{3-3x} = \lim \frac{1^+ + 5}{0^-} = -\infty$

3. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1-2x}{9-x^2} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1-6^-}{9-9^-} = \lim_{x\to 3^-} \frac{1-6^-}{0^+} = -\infty$

4. $\lim_{x\to -2^-} \frac{x-x^2}{3x+6} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2^- - 4^-}{-6^- + 6} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-6^-}{0^-} = +\infty$

5. $\lim_{x\to -5^-} \frac{7-3x}{25-x^2} = \lim_{x\to -5^-} \frac{7+15^-}{25-25^-} = \frac{22^-}{0^+} = -\infty$

6. $\lim_{x\to 2^+} \frac{5-3x}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{5-6^+}{4^+-12^++8} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-1}{0^-} = +\infty$

7. $\lim_{x\to -3^+} \frac{8x^2-x-5}{(x+3)^6} = \lim_{x\to -3^+} \frac{8\cdot(-3^+)^2+3^+-5}{(-3^++3)^6} = \frac{8\cdot(9^-)+3^+-5}{(0^-)^6} =$

$= \frac{72^- + 3^+ - 5}{0^+} = +\infty$

8. $\lim_{x\to -5^+} \frac{x+2}{(2x+10)^9} = \lim_{x\to -5^+} \frac{-5^++2}{(-10^++10)^9} = \lim \frac{-3^+}{(0^+)^9} = -\infty$

9. $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x-4} = \frac{-1}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ CON DE L'HOPITAL.

altrimenti : $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{(x-3)\cancel{(x-1)}} = \frac{-1}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

FATTORIZZANDO
IL DENOMINATORE

10. $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} =$ CON de l'Hopital : $\lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{2x+4} = \frac{2\cdot -2^+}{2\cdot -2^+ + 4} =$

$= \frac{-4^+}{-4^++4} = \frac{-4^+}{0^+} = -\infty$ con fattorializzazione: $\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{-2^+-2}{-2^++2} = \frac{-4^+}{0^+} = -\infty$

11. $\lim_{x\to 5} \frac{10x-x^2-25}{x^2-7x+10} = \frac{x^2\left(\frac{10}{x}-1-\frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(1-7/x+10/x^2\right)} = \frac{\frac{10}{5}-1-\frac{25}{25}}{1-7/5+10/25} = \frac{2-1-1}{1-7/5+2/5} = \frac{0}{0}$

forma indeterminata. fattorizzo: $\lim_{x\to 5} \frac{-(x^2-10x+25)}{(x-5)(x-2)} = \frac{-(x-5)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-5)}(x-2)} =$

$= \frac{-x+5}{x-2} \to \lim_{x\to 5} \frac{-x+5}{x-2} = \frac{0}{3} = 0.$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{4x} = \frac{0}{0}$ forma indeterminata. Moltiplico per $\sqrt{x+9}+3$:

$= \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{4x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{x+\cancel{9}-\cancel{9}}{4x(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{\cancel{x}}{4\cancel{x}(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{1}{4(\sqrt{9}+3)} = \frac{1}{24}$

13.

$$\lim_{x\to 2} \frac{5-\sqrt{9+8x}}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0}$$ forma indeterminata. moltiplico per $5+\sqrt{9+8x}$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{25-9+8x}{(x^2-3x+2)(5+\sqrt{9+8x})} = \frac{8(2+x)}{(x-2)(x-1)(5+\sqrt{9+8x})} = \frac{-8\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-1)(5+\sqrt{9+8x}}$$

$$= \frac{-8}{1\cdot(5+\sqrt{25})} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

14.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x+4}} = \frac{0}{0}$$ forma indeterminata. Moltiplico per $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1}$

$$= \frac{2x+1-3x-1}{(\sqrt{x^2+16}-2\sqrt{x+4})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1})} = \frac{-x}{\dots}$$ moltiplico per

$(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4})$: $$\frac{-x(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4})}{(x^2+\cancel{16}-4(x+\cancel{4}))(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1})} =$$

$$= \frac{-(\sqrt{x^2+16}+2\sqrt{x+4})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+1})} = \frac{-4-4}{(-4)(1+1)} = 1.$$

15.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x}-1} = \frac{0^+}{0^+}$$ forma indeterminata. moltiplico per $\sqrt{x}+1$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{(x+1)(x-1)})}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1})(\cancel{\sqrt{x-1}})}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-1}} = \frac{2\cdot 2}{0^+} = +\infty.$$

16.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+5x^3-3x^2+x-6}{2x^3-x+5} = \frac{\cancel{x^4}\left(1+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{2}{x}-\frac{\cancel{x}}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)} =$$

$$= +\infty.$$

17.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{8x^{14}-3x^5+x^3-x^2+2}}{5x^4-x^2+x-5} = \frac{\sqrt{x^{14}\left(8-\frac{3}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}-\frac{1}{x^{12}}+\frac{2}{x^{14}}\right)}}{x^4(5-1/x^2+1/x^3-5/x^4)}$$

$$= \frac{|x|^7\sqrt{8\dots}}{x^4(5-\dots)} =$$ dato che $x\to-\infty$, $|x|^7 = -(x^7) \to$

$$\to -x^3\cdot\frac{\sqrt{8}}{5} = +\infty.$$

18.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-4x-2\sqrt{x}+3}{2x^2-x+\sqrt{x}} = \frac{x^2\left(5-\frac{4}{x}-2\sqrt{\frac{1}{x^3}}+3/x^2\right)}{x^2\left(2-\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}\right)} = \frac{5}{2}.$$

19.

$\lim x\to+\infty$

$\sqrt{x^2+2x-3}-x$ = moltiplico e divido per $\sqrt{x^2+2x-3}+x$:

$$\frac{\cancel{x^2}+2x-3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \frac{x(2-3/x)}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}+x} = \frac{x(2-3/x)}{\underbrace{|x|}_{x\to+\infty}\sqrt{(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x})}+x}$$

$x \to +\infty$. È QUESTO CHE DISCRIMINA!!

$$= \frac{\cancel{x}(2-3/x)}{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x}}+1)} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

20.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5x^2+4x-7}-3x$$ moltiplico e divido per $\sqrt{5x^2+4x-7}+3x$

$$= \frac{5x^2+4x-7-9x^2}{\sqrt{5x^2+4x-7}+3x} = \frac{-4x^2+4x-7}{\sqrt{5x^2+4x-7}+3x} = \frac{x^2(-4+4/x-7/x^2)}{\sqrt{x^2(5+4/x-7/x^2)}+3x}$$

$$= \frac{x^2(-4+4/x-7/x^2)}{\underbrace{|x|}_{x\to+\infty}\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}+3x} = \frac{x^2(-4+\frac{4}{x}-7/x^2)}{x(\sqrt{5+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}+3)} = +\infty \cdot \frac{-4}{3+\sqrt{5}} = -\infty.$$

21.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4x-7}-3x = \frac{x^2+4x-7-9x^2}{\sqrt{x^2+4x-7}+3x} = \frac{-8x^2+4x-7}{\sqrt{x^2(1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2})}+3x}$$

$$= \frac{x^2(-4+4/x-7/x^2)}{-x(\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}})+3x} = \frac{\cancel{x^2}(-4+4/x-7/x^2)}{\cancel{x}(-\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x}}+3)} = \frac{x(-4)}{-1+3} = \frac{x(-4)}{2} -$$

$$x \cdot -2 = +\infty$$

22

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$$ moltiplico per $x-(\sqrt{x^2+2})$: $\frac{x-\sqrt{x^2+2}}{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-2} = \frac{x-\sqrt{x^2+2}}{-2}$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2(1+2/x^2)}}{-2} = \frac{x-(-x)\sqrt{1}}{-2} = \frac{x(1+1)}{-2} = +\infty.$$

TECNICHE UTILI:

1) RACCOGLIERE x^n MAGGIORE SU NUMERATORE E DENOMINATORE
2) DE L'HOPITAL (per ora, da evitare)
3) FATTORIALIZZARE NUMERATORE e/o DENOMINATORE
4) CON RADICI: $\sqrt{x+2} \pm 3$ $\to$ MOLTIPLICO PER $(\sqrt{x+2} \mp 3)$

   E OTTENGO. $x+2 \pm 9$ $\sim\!\triangleright$ $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$

<u>NB</u> : $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}$

QUANDO PORTO FUORI RADICE, <u>PORTO IN MODULO SE</u> ESPONENTE È PARI, DA LÌ VALUTO IL SEGNO IN BASE A COSA TENDE X:

$$\sqrt{x^2(1+2/x)} = |x|\sqrt{1+2/x} = \begin{cases} x\to+\infty: & x\sqrt{1+2/x} \\ x\to-\infty & \underbrace{-x}_{\text{QUANTITÀ POSITIVA.}}\sqrt{1+2/x} \end{cases}$$

Definizioni di Limite

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, I(x_0) \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, I(x_0) \mid f(x) > M \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, I(x_0) \mid f(x) < -M \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a > 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x > a$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a > 0 \mid f(x) > M \quad \forall x > a$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a > 0 \mid f(x) < -M \quad \forall x > a$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a < 0 \mid f(x) > M \quad \forall x < a$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a < 0 \mid f(x) < -M \quad \forall x < a$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a < 0 \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x < a$

Limite di Successioni:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a > 0 \mid |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > a$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a > 0 \mid a_n > M \quad \forall n > a$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \qquad \forall M > 0 \ \exists\, a > 0 \mid a_n < -M \quad \forall n > a$

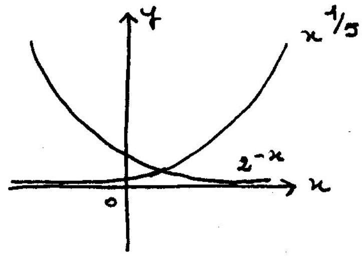
Schema:

- Se $x \to x_0 \ \rightarrow \ \exists\, I(x_0) \ \ldots \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$
- Se $x \to +\infty \ \rightarrow \ \exists\, a > 0 \ \ldots \ \forall x > a$
- Se $x \to -\infty \ \rightarrow \ \exists\, a < 0 \ \ldots \ \forall x < a$

- Se $L \ \rightarrow \ \varepsilon$
- Se $\pm\infty \ \rightarrow \ M$

LIMITI, PUNTO 2:

2f. $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[5]{x} + 2^{-x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \right) =$



$\to \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{5} = +\infty + 0 = +\infty$ - CORRETTO.

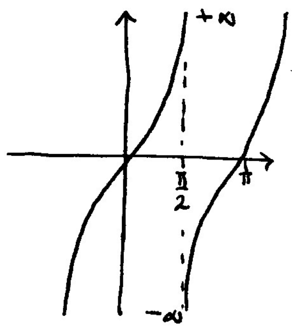
2e.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x} = \frac{x^{\cancel{3}}\left(-2 + 1/x^2 + 1/x^3\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + 3/x\right)} = +\infty \cdot (-2) = -\infty$ CORRETTO

2e.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{1}{\cos x}$ moltiplico per $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$ e ottengo: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^\pm} \left(\operatorname{tg} x \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}_{1} \right) =$

$= \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty.$



$+\infty$ per $\frac{\pi}{2}^-$, $-\infty$ per $\frac{\pi}{2}^+$. CORRETTO

2d. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+x^2}$ CORRETTO

2c. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1.$ CORRETTO

2b.

$\lim_{x \to +\infty} x\, 2^{x} = \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to \infty} 2^{x} = +\infty + \infty = +\infty$ CORRETTA

2a $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x) \simeq \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty.$

Punto 2: Corretto.

PUNTO 3

3a. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2 + 1 + x)} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$

3b. $\lim_{x \to 2^\pm} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2^\pm} \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{2}}} =$

a) $x \to 2^+$ $\lim_{x \to 2^+} \frac{2^+ - 3}{0^+} = -\infty$

b) $x \to 2^-$ $\lim_{x \to 2^-} \frac{2^- - 3}{0^-} = +\infty$

3c.

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{3x^2 - x}{x^5 + 2x^2} = \text{con de l'Hopital: } \lim_{x\to 0^\pm} \frac{6x-1}{5x^4+4x} = \frac{-1}{0^\pm} = \mp\infty \quad \text{CORRETTO}$$

con metodo alternativo:

$$\frac{\cancel{x}(3x-1)}{x^{\cancel{2}}(x^3+2)} = \lim_{x\to 0^\pm}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0^\pm} \frac{3x-1}{x^3+2}$$

$$= \pm\infty \cdot \frac{-1}{2} = \mp\infty \quad \text{- CORRETTO.}$$

3d.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{5/2} - 2x\sqrt{x} + 1}{2x^{5/2} - 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^{5/2}}\left(1 - \frac{2x\sqrt{x}}{x^{5/2}} + 1/x^{5/2}\right)}{\cancel{x^{5/2}}(2 - 1/x^{5/2})} = \frac{1}{2}$$

3e.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3 + x + 1}{x^2 + 3x} = \frac{x^{\cancel{3}}(-2 + 1/x^2 + 1/x^3)}{\cancel{x^2}(1 + 3/x)} = x \cdot (-2) = -\infty . \infty$$

3f.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^4 + 9x - 1}{-x^4 + 6x^3 + 1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^4}(3 + \underbrace{9/x^3}_{\to 0^-} - \underbrace{1/x^4}_{\to 0^+})}{\cancel{x^4}(-1 + 6/x - 1/x^4)} = -3.$$

PUNTO 4.

4a.

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad \text{moltiplico per } \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \text{ (e divido) e ottengo}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \quad \text{CORRETTA}$$

4b.

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \quad \text{ricordo che } (x^3 - y^3) = (x-y)(x^2+y^2+xy), \text{ quindi:}$$

moltiplico per $((\sqrt[3]{x+1})^2 + (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x})$ e ottengo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\cancel{x}+1-\cancel{x})}{\underbrace{\sqrt[3]{(x+1)^2}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt[3]{x^2+x}}_{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0. \quad \text{CORRETTA}$$

4c.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad \text{moltiplico \& divido per } \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} :$$

ottengo:

$$\frac{\cancel{1}+x - \cancel{1}+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\underbrace{\sqrt{1+x}}_{1} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{1})} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{CORRETTA.}$$

4d.

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{4+x^2} + x) = \lim \frac{4 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}}{\underbrace{\sqrt{4+x^2}}_{+\infty} - \underbrace{x}_{+\infty}} = \frac{4}{+\infty} = 0.$$

ALTRO METODO : Teorema del CAMBIAMENTO di Variabile

ESEMPIO:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} \right)$$ considero: $e^x = t$.

e^x con $x \to +\infty \to t \to +\infty$

$$\to \lim_{x \to +\infty} \frac{t^3+1}{t^2+2} \to \frac{t^{\cancel{3}}(1+1/t^3)}{\cancel{t^2}(1+2/t^2)} = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2}$$ $e^x = t$ $e^x \Rightarrow 0$ con $x \to -\infty \to t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{y^3+1}{y^2+2} = \frac{1}{2}.$$

IL MECCANISMO È:

1) SOSTITUISCO L'INCOGNITA CON UN'ALTRA PIÙ SEMPLICE

2) RICALCOLO A COSA TENDE QUELLA VARIABILE

dal PUNTO 5.

5b. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4+x^2}}$$ $y = -x \to$ y tende a $-\infty$

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{-3y}{\sqrt{4+y^2}} = -\lim_{y \to -\infty} \sqrt{\frac{9\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}(\frac{4}{y^2}+1)}} = -3$$

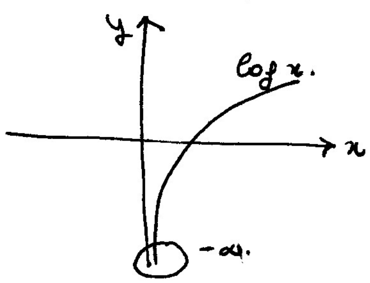
altro metodo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2(\frac{4}{x^2}+1)}} = \frac{3x}{|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = -3$$

anche raccogliendo x^2 e stando attenti a quando si porta fuori.

5c $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}}$$ $\log x = t$

con $x \to 0^+$, $\log x$ tende a $-\infty \to t \to -\infty$



$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\cancel{t}}{-\cancel{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ CORRETTA

Esercizi di Verifica dei Limiti. p. 107

(1) $\lim_{x\to 1} (2x+3) = 5$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0)$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|2x+3-5| < \varepsilon \ \to \ |2x-2| < \varepsilon \ \to \ 2-\varepsilon < 2x < \varepsilon + 2 \ \to$

$\to \ 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ per un ε sufficientemente vicino a 0, come ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{100}$, questo è un intorno di 1.

(2) $\lim_{x\to -2} (5x+7) = -3 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0)$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0)$

$|5x+7+3| < \varepsilon \ \to \ |5x+10| < \varepsilon \ \to \ -\varepsilon - 10 < 5x < \varepsilon - 10 \ \to$

$\to \ -\frac{\varepsilon}{5} - 2 < x < \frac{\varepsilon}{5} - 2$ che è intorno di -2.

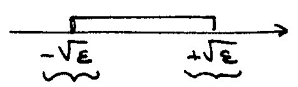
(3) $\lim_{x\to 3} (2x+1) = 7 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0)$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|2x+1-7| < \varepsilon \ \to \ |2x-6| < \varepsilon \ \to -\varepsilon + 6 < 2x < \varepsilon + 6 \ \to -\frac{\varepsilon}{2} + 3 < x < \frac{\varepsilon}{2} + 3$

che è un intorno di 3.

(4) $\lim_{x\to 0} (x^2+3) = 3 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0) \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|x^2+3-3| < \varepsilon \ \to \ |x^2| < \varepsilon \ \to \ \begin{cases} x^2 < \varepsilon \ \to \ -\sqrt{\varepsilon} < x < +\sqrt{\varepsilon} \\ x^2 > -\varepsilon \ \to \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

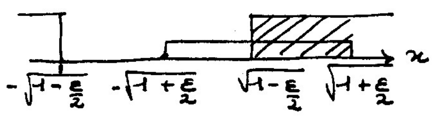
$\to$ 

$\to$ È un intorno di 0.

(5) $\lim_{x\to 1} (2x^2-1) = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0) \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|2x^2-1-1| < \varepsilon \ \to \ |2x^2-2| < \varepsilon \ \to \ -\varepsilon + 2 < 2x^2 < \varepsilon + 2$

$\to \ \frac{2-\varepsilon}{2} < x^2 < \frac{\varepsilon+2}{2} \ \to \ \begin{cases} x^2 < \frac{\varepsilon+2}{2} \ \to -\sqrt{1+\varepsilon/2} < x < \sqrt{1+\varepsilon/2} \\ x^2 > \frac{2-\varepsilon}{2} \ \to \ x < -\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \ \cup \ x > \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \end{cases}$

$\to$ 

$\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} < x < \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}$ È intorno di 1.

(6) $\lim_{x\to -1} (x^3-3) = -4 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(x_0) \mid |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|x^3-3+4| < \varepsilon \ \to \ |x^3+1| < \varepsilon \ \to \ -\varepsilon + 1 < x^3 < \varepsilon - 1 \ \to \ \sqrt[3]{-\varepsilon+1} < x < \sqrt[3]{\varepsilon-1}$

che è intorno di -1.

7. $\lim_{x\to 5} \frac{3x}{x-2} = \frac{15}{3} = 5 \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists I(x_0) \mid |f(x)-L|<\varepsilon \quad \forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

$$\left|\frac{3x}{x-2} - 5\right| < \varepsilon \to \left|\frac{3x-5(x-2)}{x-2}\right| < \varepsilon \to \left|\frac{3x-5x+10}{x-2}\right| < \varepsilon$$

$$\to \left|\frac{-2x+10}{x-2}\right| < \varepsilon \to \left|\frac{2(5-x)}{x-2}\right| < \varepsilon \to -\varepsilon < \frac{2(5-x)}{x-2} < \varepsilon$$

$$\begin{cases} ① \ \frac{2(5-x)}{x-2} < \varepsilon \\ ② \ \frac{2(5-x)}{x-2} > -\varepsilon \end{cases}$$

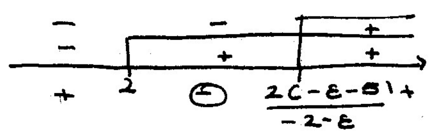
① $\frac{2(5-x)}{x-2} - \varepsilon < 0 \to \frac{2(5-x)-\varepsilon(x-2)}{x-2} < 0$

② $\frac{2(5-x)}{x-2} + \varepsilon > 0 \to \frac{2(5-x)+\varepsilon(x-2)}{x-2} > 0$

① $\frac{10-2x-\varepsilon x+2\varepsilon}{x-2} < 0 \to \frac{x(-2-\varepsilon)+2\varepsilon+10}{x-2} < 0$

1) NUM: $x(-2-\varepsilon)+2\varepsilon+10 > 0 \to x > \frac{-2\varepsilon-10}{-2-\varepsilon} \to x \frac{2(-\varepsilon-5)}{-2-\varepsilon}$

1) DEN $x-2>0 \to x>2$



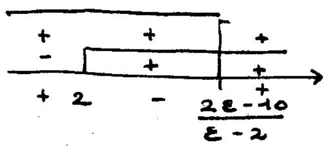
$\to 2 < x < \frac{2(-\varepsilon-5)}{-2-\varepsilon}$

②

NUM: $10-2x+x\varepsilon-2\varepsilon > 0 \qquad x\underbrace{(-2+\varepsilon)}_{\text{quantità negativa}} + 10 - 2\varepsilon > 0$

$\to x > \frac{2\varepsilon-10}{\varepsilon-2}$

DEN: $x > +2$



$\to 2 < x < \frac{2\varepsilon-10}{\varepsilon-2}$

$\to$  $\to$ intorno di 5.

8. $\lim_{x\to 2} \frac{3}{x+1} = 1 \qquad \forall \varepsilon>0 \ \exists I(x_0) \mid |f(x)-L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0)\setminus\{x_0\}$

$$\to \left|\frac{3}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \to \left|\frac{3-x-1}{x+1}\right| < \varepsilon \to \left|\frac{-x+2}{x+1}\right| < \varepsilon$$

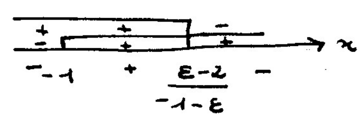
$$\to -\varepsilon < \frac{2-x}{x+1} < \varepsilon$$

quindi:

$$\begin{cases} \frac{2-x}{x+1} < \varepsilon \\ \frac{2-x}{x+1} > -\varepsilon \end{cases} \to \begin{matrix} \frac{2-x-\varepsilon(x+1)}{x+1} < 0 \to ① \ \frac{2-x-x\varepsilon-\varepsilon}{x+1} < 0 \\ \frac{2-x+\varepsilon(x+1)}{x+1} > 0 \to \frac{2-x+\varepsilon x+\varepsilon}{x+1} > 0 \end{matrix}$$

① $x(-1-\varepsilon) > \varepsilon - 2 \to x < \frac{\varepsilon-2}{-1-\varepsilon}$

$x > -1$



(12)

$$\lim_{x \to 2} \log_2(3-x) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) \mid |f(x) - L| < \varepsilon \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|\log_2(3-x) - 0| < \varepsilon \quad \to \quad -\varepsilon < \log_2(3-x) < \varepsilon$

$\to \log_2 2^{-\varepsilon} < \log_2(3-x) < \log_2 2^{\varepsilon} \quad \to \quad 2^{-\varepsilon} < 3-x < 2^{\varepsilon}$

$\to 2^{-\varepsilon} - 3 < x < 2^{\varepsilon} - 3$ che diventa $3 - 2^{-\varepsilon} > x > 3 - 2^{\varepsilon}$

dato che 2^{ε} e $2^{-\varepsilon}$ per $\varepsilon > 0$ diventano $\sim 2^0 = 1$, è un intorno di 2.

(13)

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists I(x_0)$ Tale che $f(x) > M \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{1}{(x+2)^2} > M \quad \to \quad (x+2)^2 < \frac{1}{M} \quad \to \quad \begin{cases} x+2 < \frac{1}{\sqrt{M}} & \to x < \frac{1}{\sqrt{M}} - 2 \\ x+2 > -\frac{1}{\sqrt{M}} & \to x > -\frac{1}{\sqrt{M}} - 2 \end{cases}$$

che è intorno di $x \to -2$

(14)

$$\lim_{x \to 1} \frac{5}{(x-1)^2} = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) > M \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{5}{(x-1)^2} > M \quad \to \quad \frac{(x-1)^2}{5} < \frac{1}{M} \quad \to \quad (x-1)^2 < \frac{5}{M} \quad \to$$

$\to -\sqrt{\frac{5}{M}} < x-1 < \sqrt{\frac{5}{M}} \quad \to \quad 1 - \sqrt{5/M} < x < 1 + \sqrt{5/M}$ che è un intorno di 1.

(15)

$$\lim_{x \to 0} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) > M \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\to 3 + \frac{1}{x^2} > M \quad \to \quad \frac{1}{x^2} > M - 3 \quad \to \quad x^2 < \frac{1}{M-3}$$

$\to -\underbrace{\sqrt{\frac{1}{M-3}}}_{0^-} < x < \underbrace{\sqrt{\frac{1}{M-3}}}_{0^+}$ è un intorno di 0.

(16)

$$\lim_{x \to 5} \frac{3-x}{(x-5)^2} = -\infty$$

$\forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) < -M \ \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{3-x}{(x-5)^2} < -M \quad \to \quad \frac{3-x+M(x-5)^2}{(x-5)^2} < 0 \quad \to \quad \frac{3-x+M(x^2+25-10x)}{(x-5)^2}$$

$$\frac{3-x+Mx^2+25M-10Mx}{(x-5)^2} < 0$$

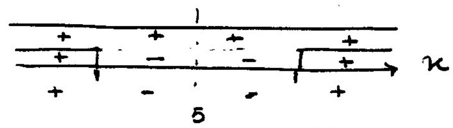
NUM: $Mx^2 + x(-1-10M) + 3 + 25 > 0$

$\Delta = (-1-10M)^2 - 4 \cdot M \cdot (3+25M) =$

$= 1 + \cancel{100M^2} + 20M - 12M \cancel{- 100M^2} = 1 + 8M$

$$\to x < \frac{1+10M-\sqrt{1+8M}}{2M} \ \cup \ x > \frac{1+10M+\sqrt{1+8M}}{2M}$$

DENOM: $(x-5)^2 > 0 \quad \to \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$



che è un intorno di 5 (con 5 escluso).

(17) $\lim_{x \to -3} \left[7 - \frac{1}{(x+3)^2} \right] = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) < -M \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$7 - \frac{1}{(x+3)^2} < -M \rightarrow -\frac{1}{(x+3)^2} < -M - 7 \rightarrow \frac{1}{(x+3)^2} > M + 7 \rightarrow$$

$$(x+3)^2 < \frac{1}{M+7} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{M+7}} < x+3 < \sqrt{\frac{1}{M+7}} \rightarrow -3-\sqrt{\frac{1}{M+7}} < x < -3+\sqrt{\frac{1}{M+7}}$$

che è intorno di -3.

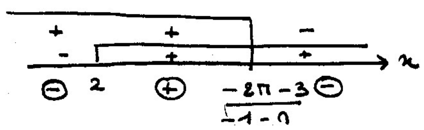
(18) $\lim_{x \to 2^+} \frac{3-x}{x-2} = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) > M \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{3-x}{x-2} > M \rightarrow \frac{3-x-M(x-2)}{x-2} > 0 \rightarrow \frac{3-x-Mx+2M}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x(-1-M)+2M+3}{x-2} > 0$$

NUM: $\underbrace{x(-1-M)}_{\text{quantità negativa}} + 2M+3 > 0 \rightarrow x < \frac{-2M-3}{-1-M}$

DEN: $x > 2$



$\rightarrow 2 < x < \frac{-2M-3}{-1-M}$

che è intorno destro di 2^+

(19.) $\lim_{x \to 1^-} \frac{4}{x-1} = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) < -M \quad \forall x \in (I(x_0)) \setminus \{x_0\}$

$$\frac{4}{x-1} < -M \qquad \frac{x-1}{4} > -\frac{1}{M} \rightarrow x-1 > -\frac{4}{M} \rightarrow x > 1 - \frac{4}{M}$$

che è intorno sinistro di 1

(20.) $\lim_{x \to 0^-} \log_3 (x^2 - 4x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \ \exists I(x_0) \mid f(x) < -M \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$

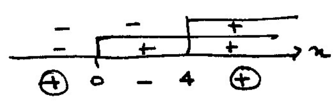
$$\log_3 (x^2-4x) < -M \rightarrow \log_3 (x^2-4x) < \log_3 3^{-M}$$

$$\rightarrow (x^2 - 4x) < 3^{-M}$$

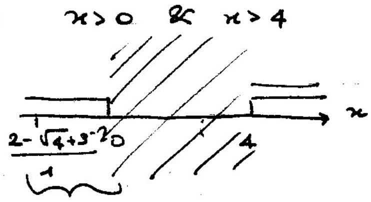
$$x^2 - 4x - 3^{-M} < 0 \rightarrow x^2 - 4x - 3^{-M} < 0 \qquad \frac{\Delta}{2} = (-2)^2 + 1 \cdot 3^{-M} = 4 + 3^{-M}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+3^{-M}}}{1} \rightarrow 2 - \sqrt{4+3^{-M}} < x < 2 + \sqrt{4+3^{-M}}$$

ma: $x^2 - 4x > 0 \rightarrow x(x-4) > 0 \rightarrow x > 0$ & $x > 4$



perciò:



intorno sx di 0