Calcolabilità

16 Settembre 2014

Esercizio 1

Si scriva una MdT che termina la computazione su un input $\alpha \in \{0,1\}^*$ se e solo se α, considerato come numero binario e' maggiore o uguale a 4_{10}.

Soluzione

Il numero 4_{10} in binario si scrive come 100. Indichiamo con b il carattere blank; con q_0 lo stato iniziale della MdT e con q_F lo stato finale.
$q_0 b b q_{ciclo} D$ (stiamo leggendo la stringa vuota)
$q_0 0 0 q_{ciclo} D$ (stiamo leggendo il numero 0 oppure una stringa che non rappresenta un numero perché comincia con 0)
$q_0 1 1 q_1 D$ (stiamo leggendo un numero)
$q_1 b b q_{ciclo} D$ (Abbiamo letto il numero 1)
$q_1 0 0 q_2 D$ (Le prime due cifre da sinistra del numero sono 10)
$q_1 1 1 q_2 D$ (Le prime due cifre da sinistra del numero sono 11)
$q_2 b b q_{ciclo} D$ (Abbiamo letto il numero 10 oppure 11)
$q_2 0 0 q_F D$ (Le prime tre cifre da sinistra del numero sono 110 oppure 100)
$q_2 1 1 q_F D$ (Le prime tre cifre da sinistra del numero sono 111 oppure 101)
$q_{ciclo} c c q_{ciclo} D$ (c un qualsiasi carattere dell'alfabeto).

Esercizio 2

Quali teoremi di Rice si possono applicare ad $I = \{x : \forall y[\phi_x(y) = \uparrow \Rightarrow (0 \leq y \leq 5)]\}$.

Soluzione

Bisogna capire cosa significa la condizione $\phi_x(y) = \uparrow \Rightarrow (0 \leq y \leq 5)$. Ricordiamo che un'implicazione e' vera quando la premessa e' falsa. Quindi, nel caso in cui $\phi_x(y)$ e' definito, l'implicazione non fornisce alcuna informazione su y. Se invece $\phi_x(y) = \uparrow$, allora $0 \leq y \leq 5$. In conclusione, $N \setminus \{y : 0 \leq y \leq 5\} \subseteq dom(\phi_x)$. Allora

$$I = \{x : \{y : y \geq 6\} \subseteq dom(\phi_x)\}.$$

I rispetta le funzioni: $\phi_x = \phi_z$ implica $dom(\phi_x) = dom(\phi_z)$, da cui $\{y : y \geq 6\} \subseteq dom(\phi_x)$ sse $\{y : y \geq 6\} \subseteq dom(\phi_z)$.
$I \neq \emptyset$: i programmi della funzione identica stanno in I.
$\bar{I} \neq \emptyset$: i programmi della funzione vuota stanno in $\bar{I}$.
Quindi per Rice1 I non e' decidibile con $\bar{I}$ non semidecidibile.
Per Rice3 anche I non e' semidecidibile: i programmi che calcolano tutte le approssimazioni finite della funzione identica stanno in $\bar{I}$.