SOLUZIONE COMPITO DI CALCOLABILITÀ
25 GENNAIO 2011

Si prega di giustificare accuratamente tutte le risposte.

1. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x,y) = 2^{x+y}$. Si trovino poi le funzioni g ed h tali che $f = recprim(g,h)$.

   Soluzione:

   $$f(x,0) = 2^x; \qquad f(x,y+1) = 2^{x+y+1} = 2 \times 2^{x+y} = 2 \times f(x,y)$$

   Quindi, $g(x) = 2^x$ e $h(x,y,z) = 2 \times z$.

2. Sia $I = \{x : \phi_x(3) = 5\}$. Quali teoremi di Rice si possono applicare ad I ed al complementare di I?

   Soluzione:

   - I rispetta le funzioni: Se $x \in I$ e $\phi_x = \phi_y$ allora $\phi_y(3) = \phi_x(3) = 5$. Quest'ultima uguaglianza vale perché $x \in I$.
   - $I \neq \emptyset$: gli indici dei programmi che calcolano la funzione f, definita $f(x) = 5$ per ogni naturale x, appartengono ad I.
   - $I \neq N$: gli indici dei programmi che calcolano la funzione f, definita da $f(x) = 0$ per ogni naturale x, appartengono al complementare di I.
   - Primo teorema di Rice: Dal fatto che I rispetta le funzioni e $I \neq \emptyset, N$ segue che I ed il suo complementare non sono decidibili. il complementare di I non è semidecidibile perché gli indici dei programmi che calcolano la funzione vuota $f_\emptyset$ stanno nel complementare di I.
   - Secondo teorema di Rice per I: Non si puo' applicare perché I è un insieme semidecidibile.
   - Secondo teorema di Rice per $\overline{I}$: si puo' applicare perché $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq \overline{I}$, $f_\emptyset < g$, dove $g(x) = 5$ per ogni x, e $\{x : \phi_x = g\} \subseteq I$.
   - Terzo teorema di Rice per I: non si puo' applicare perché I è semidecidibile.
   - Terzo teorema di Rice per $\overline{I}$: non si puo' applicare perché gli indici dei programmi che calcolano la funzione vuota $f_\emptyset$ stanno in $\overline{I}$. Se $\{x : \phi_x = g\} \subseteq \overline{I}$ con g calcolabile di dominio infinito, non tutte le approssimazioni finite di g hanno indici in I. Considera per esempio la funzione vuota.

3. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f(x+1)+1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f(x-1)+1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari}. \end{cases}$$

Si determini il minimo punto fisso della precedente definizione ricorsiva verificando che il funzionale associato è ricorsivo.

Soluzione: Si definisca la seguente funzione h:

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \phi_y(x+1)+1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ \phi_y(x-1)+1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari}. \end{cases}$$

h è calcolabile (lo si provi come esercizio), quindi possiamo applicare il teorema del parametro. Esiste $s : N \to N$ calcolabile totale tale che

$$\phi_{s(y)}(x) = h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \phi_y(x+1)+1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ \phi_y(x-1)+1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari}. \end{cases}$$

La funzione s è estensionale per cui il funzionale τ, definito da

$$\tau(\phi_y) = \phi_{s(y)},$$

verifica le ipotesi del primo teorema di ricorsione.

La procedura per il calcolo del minimo punto fisso del funzionale:

$f_0 = f_\emptyset$

$f_1 = \tau(f_0)$ è definita come segue:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f_0(x+1)+1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f_0(x-1)+1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari}. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \uparrow, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

perché le espressioni $f_0(x+1)+1$ e $f_0(x-1)+1$ sono sempre indefinite. $f_2 = \tau(f_1)$ è definita come segue:

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f_1(x+1)+1, & \text{se } x \text{ è dispari}; \\ f_1(x-1)+1, & \text{se } x \neq 0 \text{ è pari}. \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ \uparrow, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

perché l'espressione $f_1(x+1)+1$ è definita soltanto nel caso in cui $x+1 = 0$. Questo è impossibile per x dispari. Inoltre, l'espressione $f_1(x-1)+1$ è definita soltanto nel caso in cui $x-1 = 0$. Questo è impossibile per x pari diverso da 0.

Il minimo punto fisso coincide con f_1 perché $f_2 = f_1$.