Matematica Discreta (Compitino Prima Parte)
26 Gennaio 2011

Cognome e Nome:
Numero di Matricola:
Si prega di giustificare in maniera dettagliata ogni risposta.

1. Dimostrare per induzione che, per ogni numero naturale $n \geq 2$,
$$n^2 > 2n - 4.$$
Soluzione Base $n = 2$: $4 > 0$.

   Supponiamo che la disequazione sia vera per $n \geq 2$. La proviamo per $n + 1$:
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 >_{\text{ip.ind.}} 2n - 4 + 2n + 1 = (2n-2) + (2n-1) =$$
$$= (2n + 2 - 4) + (2n - 1) = 2(n+1) - 4 + (2n-1) > 2(n+1) - 4$$
   perche' da $n \geq 2$ segue che $2n - 1$ e' maggiore di 0.

2. Sia N_0 l'insieme dei numeri naturale e sia $A = \{a, b, c\}$ un insieme con il seguente ordine totale: $a \leq b \leq c$. Si consideri sull'insieme $N_0 \times A$ la seguente relazione R:
$$(x, y)\ R\ (z, w) \Leftrightarrow x = z \text{ e } y \leq w.$$
   (i) Determinare se R e' una relazione di equivalenza oppure un ordinamento parziale.

   (ii) Determinare quante sono le coppie $(x, y) \in N_0 \times A$ per cui
$$\neg\exists z \exists w[z \in N_0 \wedge w \in A \wedge (x, y) \neq (z, w) \wedge (x, y)\ R\ (z, w)].$$
Soluzione (i) Proprieta' riflessiva: $(x, y)\ R\ (x, y)$ perche' $y \leq y$ vale in ogni ordinamento.

   Proprieta' simmetrica: $(x, b)\ R\ (x, c)$ perche' $b \leq c$, ma $(x, c)\ R\ (x, b)$ non vale perche' $c \leq b$ non vale.

   Proprieta' transitiva: Se $(x, y)\ R\ (z, w)\ R\ (t, u)$ allora $x = z = t$ e $y \leq w \leq u$. Ne segue che $x = t$ e $y \leq u$ (dalla proprieta' transitiva di $\leq$). Quindi $(x, y)\ R\ (t, u)$.

   Proprieta' antisimmetrica: Se $(x, y)\ R\ (z, w)$ e $(z, w)\ R\ (x, y)$ allora $x = z$, $y \leq w \leq y$. Dalla proprieta' antisimmetrica di $\leq$ segue che $y = w$. Quindi $(x, y) = (z, w)$.

   In conclusione R e' una relazione di ordinamento parziale su $N_0 \times A$.

   (ii) Esistono infinite coppie. Sono tutte quelle del tipo (x, c) con x numero naturale.

3. Dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ per $0 \leq k \leq n$.

4. Si dimostri che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ per tutti gli insiemi A, B e C.

   Soluzione Sia $x \in A \cup (B \cap C)$. Allora si hanno due casi.

   (i) $x \in A$: Allora x appartiene ad ogni sovrainsieme di A, in particolare, $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Cosi' $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   (ii) $x \in B \cap C$: Allora $x \in B$ e $x \in C$. Da $x \in B$ segue che x appartiene ad ogni sovrainsieme di B, in paricolare $A \cup B$. Da $x \in C$ segue che x appartiene ad ogni sovrainsieme di C, in paricolare $A \cup C$. In conclusione $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Proviamo ora il viceversa. Sia $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Allora $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Abbiamo due casi.

   (i) $x \in A$. In questo caso x appartiene ad ogni sovrainsieme di A, in particolare $x \in A \cup (B \cap C)$.

   (ii) $x \notin A$. Allora da $x \in A \cup B$ segue che $x \in B$ e da $x \in A \cup C$ segue che $x \in C$. Quindi $x \in B \cap C$. Cosi' x appartiene ad ogni sovrainsieme di $B \cap C$, in particolare, $x \in A \cup (B \cap C)$.

5. Determinare la cardinalita' delle funzioni da un n-insieme in un k-insieme.

   Soluzione Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Una funzione f da A in B e' univocamente determinata dalla sequenza (di lunghezza n) dei valori $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ con $f(a_i) \in B$. Quanti possibili valori possiamo mettere nella posizione i della sequenza? k possibili valori quanti sono gli elementi di B! Quindi in totale abbiamo $k \times k \times \cdots \times k = k^n$ possibilita'.