Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2015.

Tema A

Risoluzione.

CORREZIONE

La correzione è minimale. Lo studente deve giustificare esaurientemente i passaggi, quindi deve sviluppare adeguatamente le tracce proposte.

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐

Codice insegnamento: ☐☐☐☐☐☐ Crediti ☐☐

Intende sostenere: Calcolo 1 ☐ Calcolo 2 ☐

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Calcolo 1	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Calcolo 2	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Test OFA	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	superato non sup.

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test $1 = 8$, Test $2 = 4$, Test $3 = 5$, Test $4 = 8$, Test $5 = 5$.

Inizio Calcolo 1 e nove crediti

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \frac{4x}{1 + x^4} + x. \tag{1}$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$ (laddove il dominio è illimitato).*

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

Domanda numero 4: *Qual è il polinomio $p(x)$ di MacLaurin di grado minore o uguale a 2 per $f(x)$?*

Domanda numero 5: *Calcolare*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad a = 0, b = 1.$$

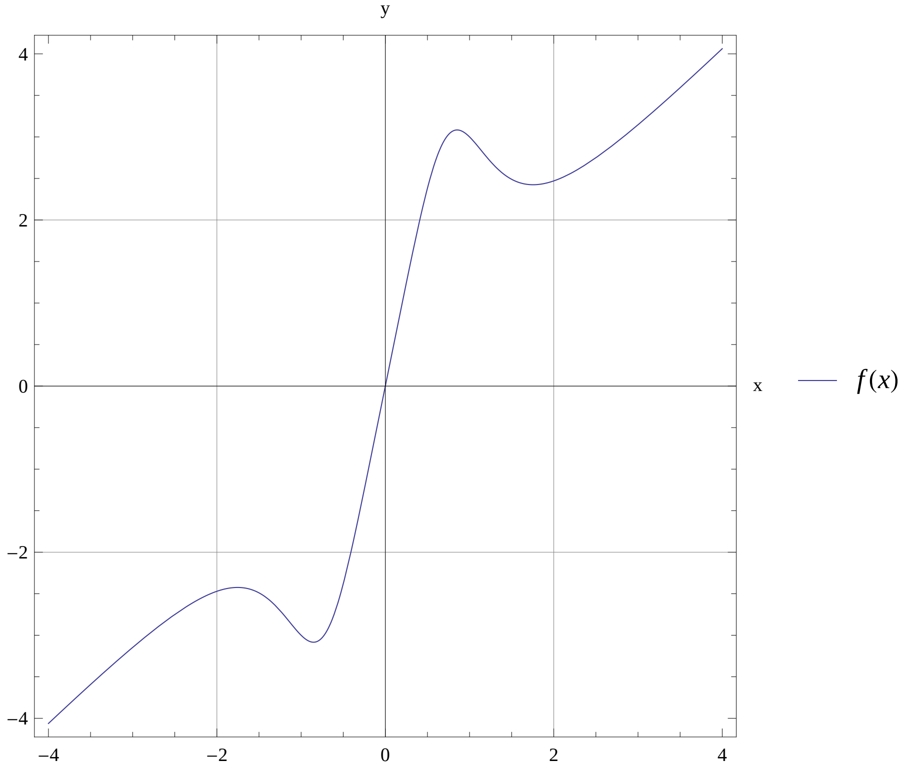
Suggerimento:

$$(1 + x^4) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- La funzione è dispari, quindi la studiamo per $x \geq 0$.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Non vi sono punti di discontinuità.
- Non vi sono asintoti orizzontali.
Non vi sono asintoti verticali.
Asintoti obliqui:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0.$$
L' unico asintoto obliquo è:
$$y = x.$$
- Derivata
$$f'(x) = -\frac{16x^4}{(x^4+1)^2} + \frac{4}{x^4+1} + 1 = \frac{x^8 - 10x^4 + 5}{(x^4+1)^2}.$$
Vi sono 2 punti di stazionarietà(quando $x > 0$), $x_1 = \sqrt[4]{5 - 2\sqrt{5}}$, $x_2 = \sqrt[4]{5 + 2\sqrt{5}}$.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \frac{16x^3 (3x^4 - 5)}{(x^4+1)^3}.$$
Abbiamo $f''(x_1) < 0$, quindi x_1 è un punto di massimo, $f''(x_2) > 0$, quindi x_2 è un punto di minimo.
- Estremo superiore $= +\infty$. Estremo inferiore $= -\infty$. Massimo assoluto $=$ non esiste. Minimo assoluto $=$ non esiste.

- Grafico della funzione.



- Il polinomio di MacLaurin di grado minore o uguale a 2 per f è:

$$p(x) = 5\,x.$$

  Notare che $f(x) = 5x + O(x^3)$.

- Abbiamo:

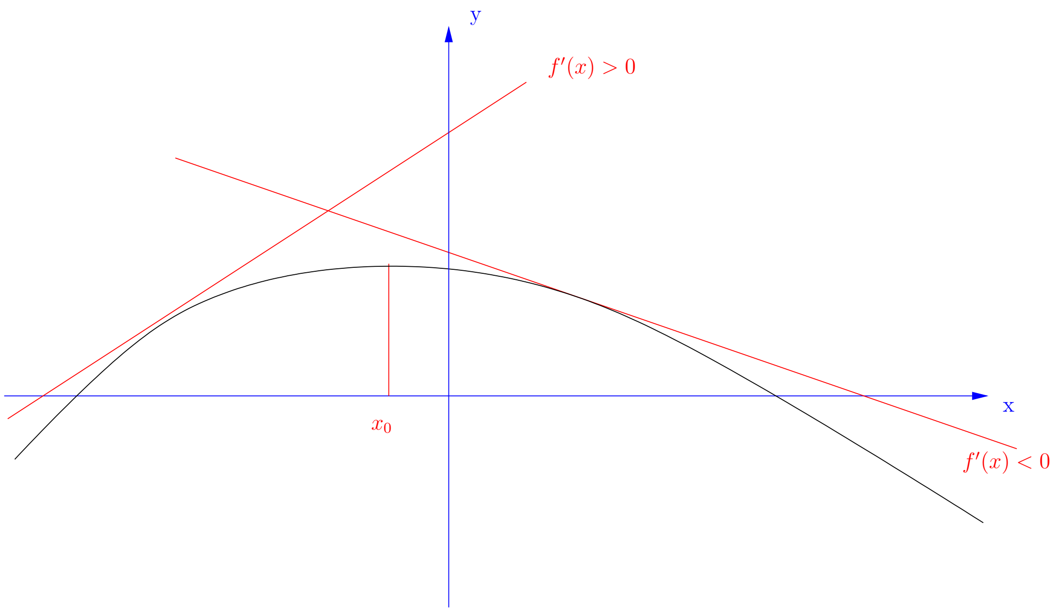
$$I = \left[\frac{x^2}{2} + 2\tan^{-1}\left(x^2\right)\right]_a^b = (1+\pi)/2.$$

Test 2 Domanda numero 6: *Sia $I = I(x_0, \delta)$ un intorno sferico di x_0, di raggio $\delta > 0$. Sia $f \in C^1(I)$. Provare che se per ogni $x \in I$ risulta $f'(x) > 0$ quando $x < x_0$, $f'(x) < 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di massimo di $f(x)$.*
Suggerimento: usare il Teorema di Lagrange o del valor medio: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell' intervallo chiuso $[a, b]$ e tale che

- *f è continua in $[a, b]$;*
- *f è derivabile in (a, b);*

allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

Risoluzione.
La situazione è schizzata nella figura seguente.



Supponiamo di prendere un punto $x \in I = I(x_0, \delta)$.
Per il teorema del valor medio esiste un punto $c > x_0$, $c \in I$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) < 0.$$

Per ipotesi, qualunque sia $x > x_0$, abbiamo $f'(x) < 0$, quindi

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0,$$

ossia
$$f(x) < f(x_0).$$
Analogamente, qualunque sia $x < x_0$, abbiamo $f'(x) > 0$. Per il teorema del valor medio esiste un punto $d > x_0$, $d \in I$ tale che
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(d) > 0.$$
Quindi
$$f(x) - f(x_0) = f'(d)(x - x_0) < 0,$$
ossia
$$f(x) < f(x_0).$$
Quindi x_0 è un punto di massimo (locale) per $f(x)$.
QED

Fine Calcolo 1, inizio Calcolo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$(y''(x) + y'(x) + 3y(x))/12 = \frac{1}{4}(\cos(3x) - 2\sin(3x)). \tag{2}$$

Domanda numero 7: *Determinane le soluzioni.*

Domanda numero 8: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(\pi/6) = 1$, $y'(\pi/6) = 0$, *e schizzarne un grafico.*

Domanda numero 9: *Determinarne il dominio massimale di esistenza.*

Risoluzione.
L' equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (-1 \pm \iota\sqrt{11})/2$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(-x/2)(c_1 \cos(\sqrt{11}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{11}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\sin(3x) + B\cos(3x)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{-1 + A - 2B = 0, 2 - 2A - B = 0\},$$

ossia $A = 1$, $B = 0$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = \sin(3x).$$

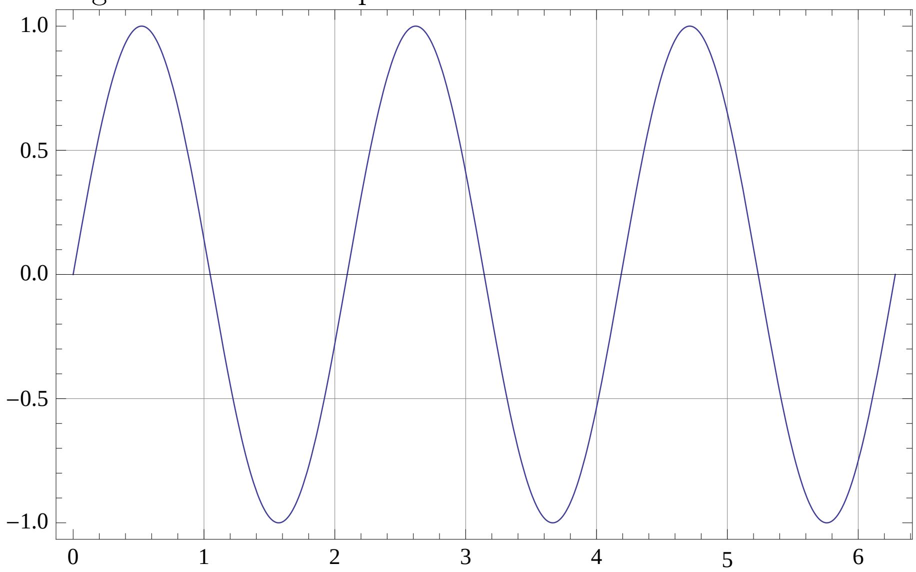
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(-x/2)(c_1 \cos(\sqrt{11}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{11}x/2)) + \sin(3x). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \sin(3x).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.



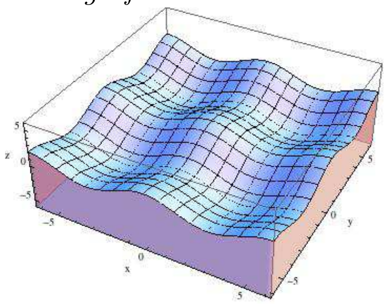
Il dominio massimale di soluzione è $\mathbb{R}$.

Fine parte per nove crediti, continua Calcolo 2

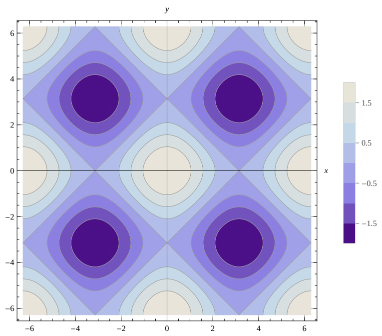
Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$g(x,y) = \cos x + \cos y.$$

Per aiutarvi, ecco uno schizzo del suo grafico



e di alcune linee di livello:



Domanda numero 10: *Determinarne il dominio.*

Nei punti seguenti, studiare la funzione $f = g|_Q$*, che è la restrizione di* g *al dominio* $Q = [0, 2\pi]^2$.

Domanda numero 11: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, x+\pi)$.

Domanda numero 12: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, x)$.

Domanda numero 13: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(x, y) = -1, 0, 1$.

Domanda numero 14: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

Domanda numero 15: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

Risoluzione.

- Il dominio è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

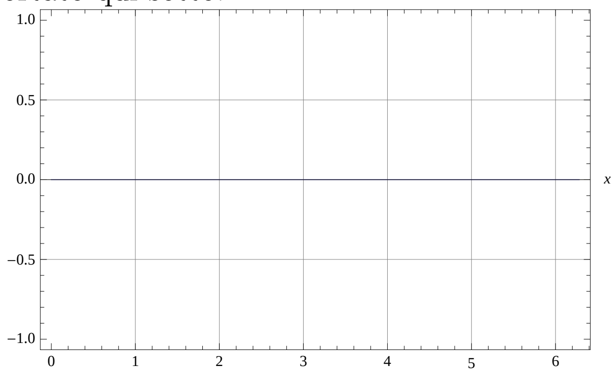
  La funzione è infinitamente differenziabile in D.

- La funzione lungo la retta $y = x + \pi$ è

$$z = 0.$$

(Allo studente viene richiesto di inserire qui un breve studio della funzione)

Il suo grafico è riportato qui sotto.

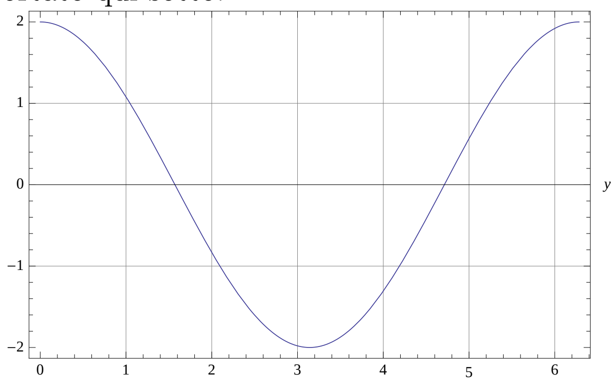


- La funzione ristretta alla retta $y = x$ è

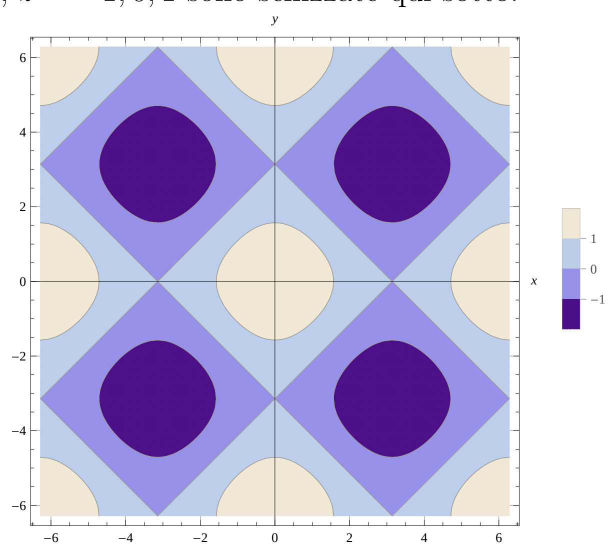
$$z = f(x, x) = 2\cos x.$$

(Allo studente viene richiesto di inserire qui un breve studio della funzione)

Il suo grafico è riportato qui sotto.



- Le curve di livello, $z = -1, 0, 1$ sono schizzate qui sotto.



- Gradiente:

$$\nabla f = (-\sin(x), -\sin(y).) \, .$$

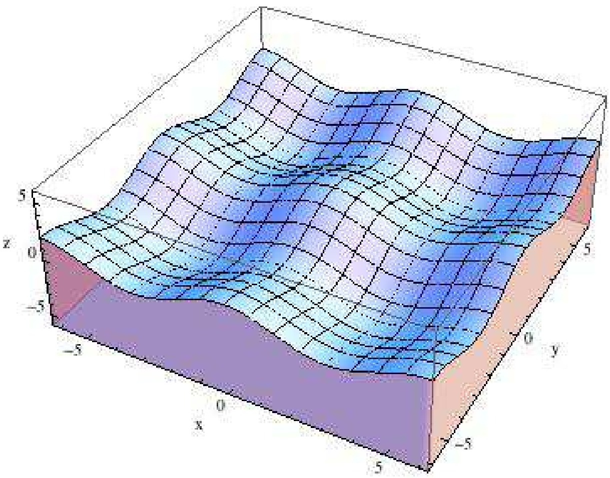
- Matrice Hessiana:

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{pmatrix}$$

- I punti di stazionarietà interni a Q sono $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (0,2\pi)$, $x_3 = (2\pi,0)$, $x_4 = (2\pi,2\pi)$ sono punti di massimo, dove $z = 2$; $x_5 = (\pi,\pi)$, punto di minimo, in cui $z = -2$.

  Il massimo assoluto in Q è 2, il minimo assoluto è -2. L' estremo superiore e l' estremo inferiore coincidono rispettivamenteè con il massimo e il minimo.

- Schizzo della superficie (non richiesto)



Test 5 *Sia*

$$I = \int\int_R x\,dx\,dy, \quad R = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x < 0, y < 0\} \tag{5}$$

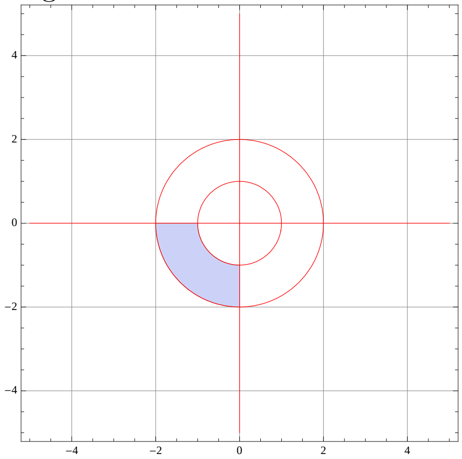
Domanda numero 16: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 17*: Schizzare un grafico del dominio in coordinate polari.*

Domanda numero 18*: Calcolare il valore dell' integrale, usando coordinate polari.*

Risoluzione.

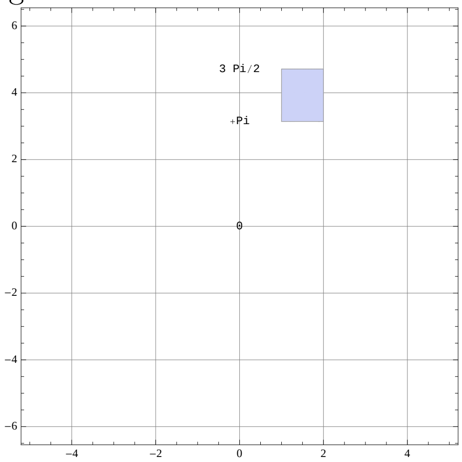
- Grafico del dominio di integrazione.



Effettuando il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, il dominio di integrazione diventa

$$R' = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 4, \pi \leq \theta \leq 3\pi/2\}$$

La cui rappresentazione grafica è:



- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int\int_R x\, dydx = \int_1^2 \int_\pi^{3\pi/2} (r\cos(\theta)) d\theta r dr =$$

$$\int_1^2 r^2 [\sin(\theta)]_{\theta=\pi}^{\theta=3\pi/2} dr = -7/3.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Calcolo 2, *** fine testo ***

Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2015.

Tema B

Risoluzione.

CORREZIONE

La correzione è minimale. Lo studente deve giustificare esaurientemente i passaggi, quindi deve sviluppare adeguatamente le tracce proposte.

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐

Codice insegnamento: ☐☐☐☐☐☐ Crediti ☐☐

Intende sostenere: Calcolo 1 ☐ Calcolo 2 ☐

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Calcolo 1	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Calcolo 2	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Test OFA	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	superato non sup.

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Calcolo 1 e nove crediti

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \frac{4x}{1 + x^4} - x. \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$ (laddove il dominio è illimitato).*

Domanda numero 2: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3: *Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

Domanda numero 4: *Qual è il polinomio $p(x)$ di MacLaurin di grado minore o uguale a 2 per $f(x)$?*

Domanda numero 5: *Calcolare*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad a = 0, b = 1.$$

Suggerimento:

$$(1 + x^4) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

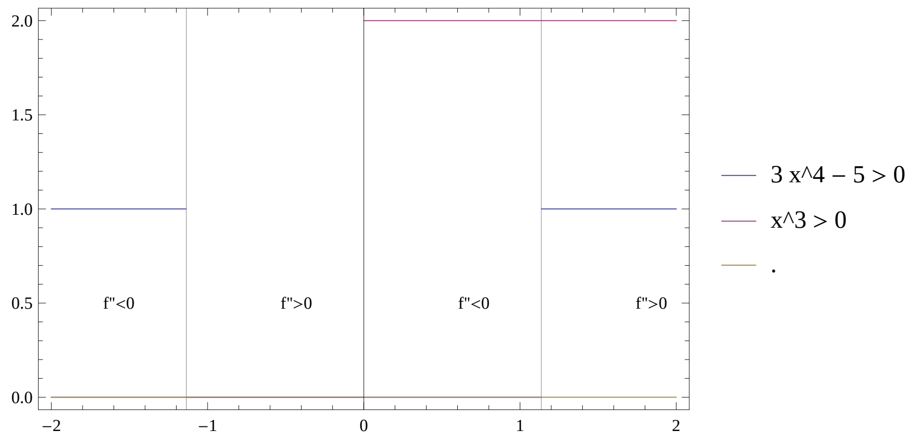
Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- La funzione è dispari, quindi la studiamo per $x \geq 0$.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Non vi sono punti di discontinuità.
- Non vi sono asintoti orizzontali.

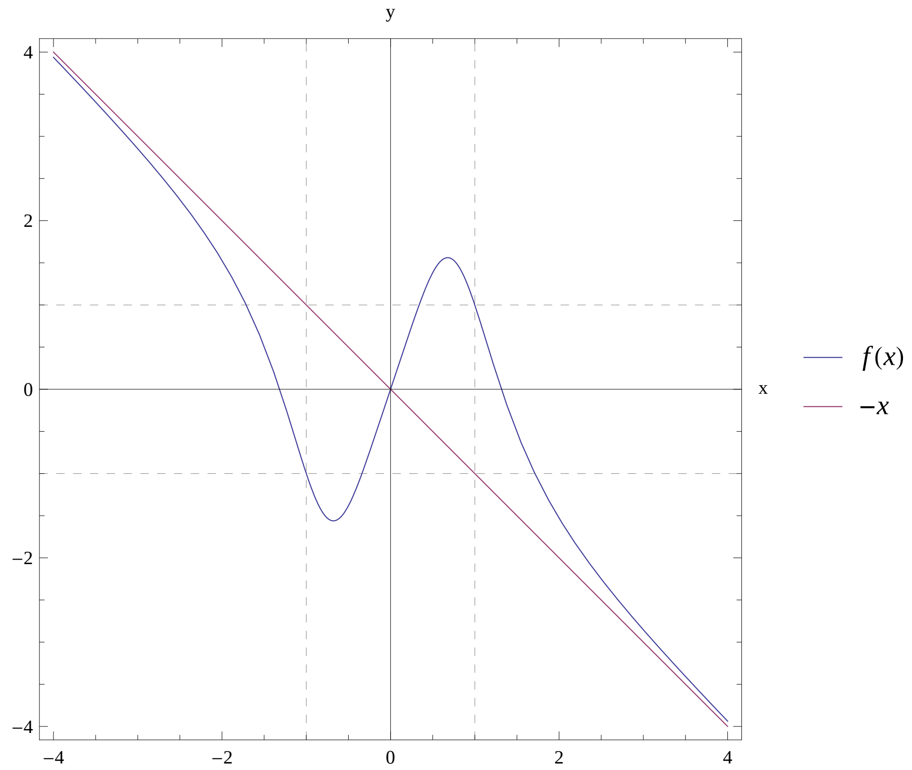
  Non vi sono asintoti verticali.

  Asintoti obliqui:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = 0.$$
L' unico asintoto obliquo è:
$$y = -x.$$
- Derivata
$$f'(x) = -\frac{16x^4}{(x^4+1)^2} + \frac{4}{x^4+1} - 1 = \frac{-x^8 - 14x^4 + 3}{(x^4+1)^2}.$$
Vi è un punto di stazionarietà(quando $x > 0$), $x_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{13} - 7} \simeq 0.677834$.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \frac{16x^3\,(3x^4 - 5)}{(x^4+1)^3} = \frac{x^8 - 10x^4 + 5}{(x^4+1)^2}.$$
Abbiamo $f''(x_1) < 0$, quindi x_1 è un punto di massimo.

  Segno della derivata seconda:



- Estremo superiore $= +\infty$. Estremo inferiore $= -\infty$. Massimo assoluto = non esiste. Minimo assoluto = non esiste.
- Grafico della funzione.



- Il polinomio di MacLaurin di grado minore o uguale a 2 per f è:

$$p(x) = 3\,x.$$

Notare che $f(x) = 3x + O(x^3)$.

- Abbiamo:

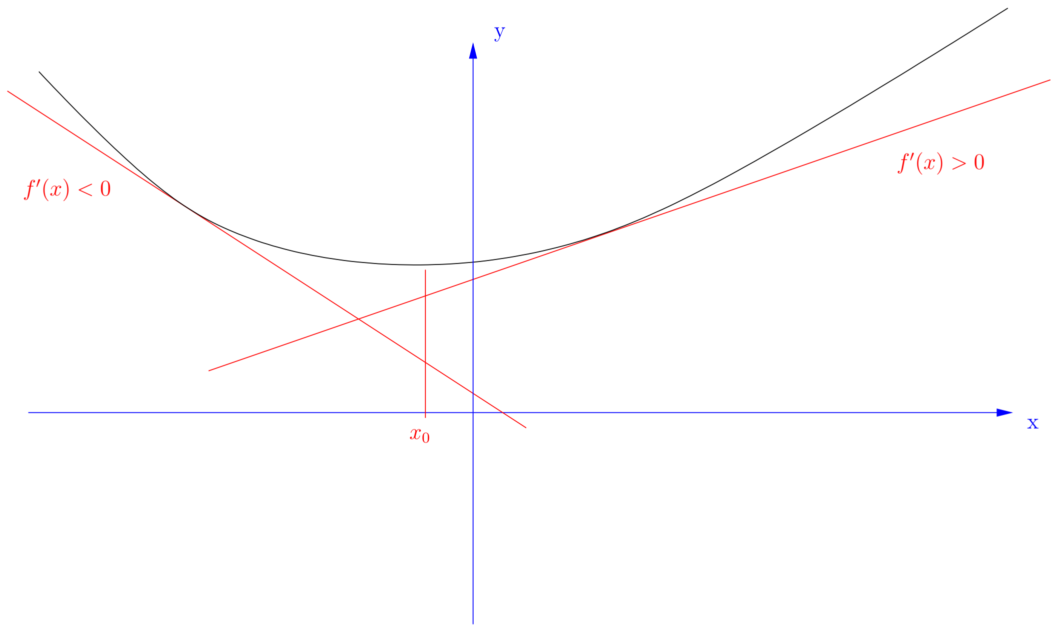
$$I = \left[2\tan^{-1}\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}(\pi - 1).$$

Test 2 Domanda numero 6: *Sia $I = I(x_0, \delta)$ un intorno sferico di x_0, di raggio $\delta > 0$. Sia $f \in C^1(I)$. Provare che se per ogni $x \in I$ risulta $f'(x) < 0$ quando $x < x_0$, $f'(x) > 0$ quando $x > x_0$, allora x_0 è un punto di minimo di $f(x)$.*
Suggerimento: usare il Teorema di Lagrange o del valor medio: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita nell' intervallo chiuso $[a, b]$ e tale che

- *f è continua in $[a, b]$;*
- *f è derivabile in (a, b);*

allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

Risoluzione.
La situazione è schizzata nella figura seguente.



Supponiamo di prendere un punto $x \in I = I(x_0, \delta)$.
Per il teorema del valor medio esiste un punto $c > x_0$, $c \in I$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) > 0.$$

Per ipotesi, qualunque sia $x > x_0$, abbiamo $f'(x) < 0$, quindi

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) > 0,$$

ossia

$$f(x) < f(x_0).$$

Analogamente, qualunque sia $x < x_0$, abbiamo $f'(x) < 0$. Per il teorema del valor medio esiste un punto $d > x_0$, $d \in I$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(d) < 0.$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) = f'(d)(x - x_0) > 0,$$

ossia

$$f(x) > f(x_0).$$

Quindi x_0 è un punto di massimo (locale) per $f(x)$.
QED

Fine Calcolo 1, inizio Calcolo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$(y''(x) + y'(x) + 3y(x))/12 = \frac{1}{12}(-2\sin(2x) - \cos(2x)). \tag{2}$$

Domanda numero 7: *Determinane le soluzioni.*

Domanda numero 8: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(\pi/6) = 1/2$, $y'(\pi/6) = -\sqrt{3}$, *e schizzarne un grafico.*

Domanda numero 9: *Determinarne il dominio massimale di esistenza.*

Risoluzione.
L' equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (-1 \pm \iota\sqrt{11})/2$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(-x/2)(c_1 \cos(\sqrt{11}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{11}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{1 + 2A - B = 0, 2 - A - 2B = 0\},$$

ossia $A = 0$, $B = 1$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = \cos(2x).$$

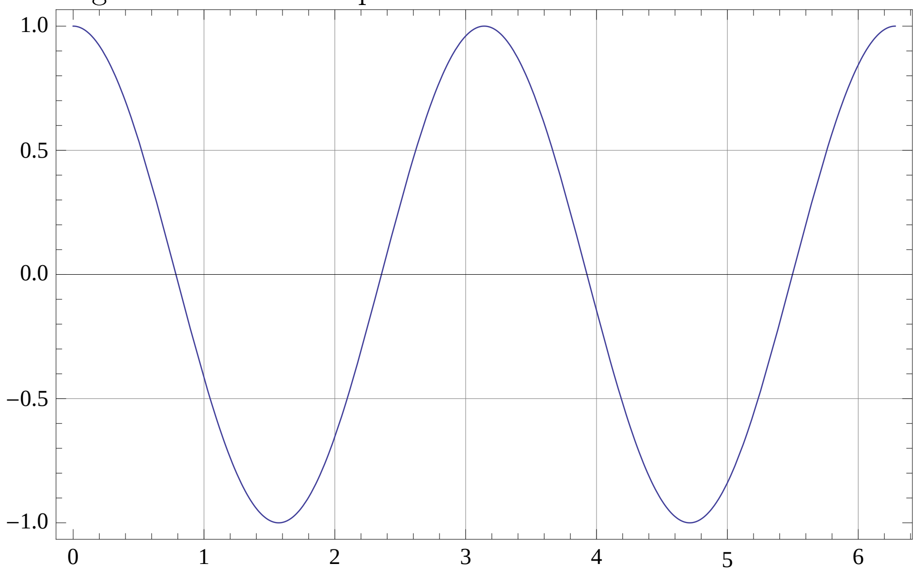
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(-x/2)(c_1 \cos(\sqrt{11}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{11}x/2)) + \cos(2x). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \cos(2x).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.



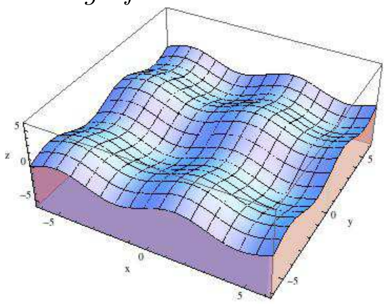
Il dominio massimale di soluzione è $\mathbb{R}$.

Fine parte per nove crediti, continua Calcolo 2

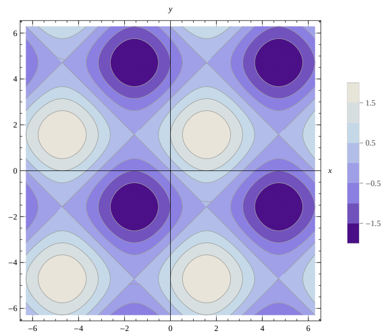
Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$g(x, y) = \sin x + \sin y.$$

Per aiutarvi, ecco uno schizzo del suo grafico



e di alcune linee di livello:



Domanda numero 10: *Determinarne il dominio.*

Nei punti seguenti, studiare la funzione $f = g|_Q$, che è la restrizione di g al dominio $Q = [0, 2\pi]^2$.

Domanda numero 11: *Studiare e schizzare il grafico di $z = f(x, x + \pi)$.*

Domanda numero 12: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, x)$.

Domanda numero 13: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(x, y) = -1, 0, 1$.

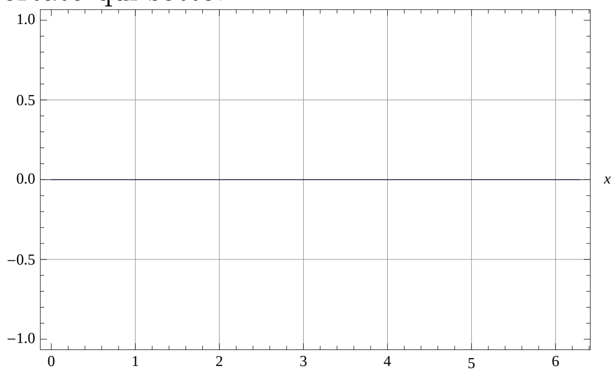
Domanda numero 14: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

Domanda numero 15: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

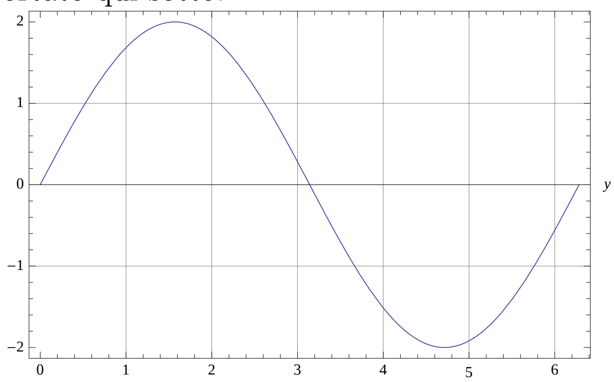
Risoluzione.

- Il dominio è:
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$
La funzione è infinitamente differenziabile in D.

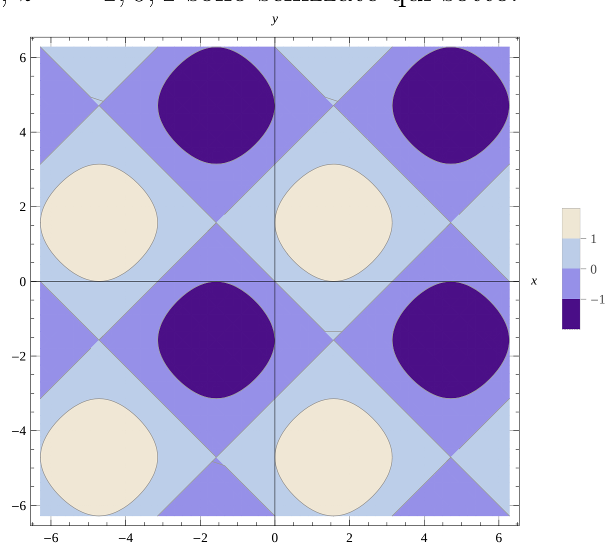
- La funzione lungo la retta $y = x + \pi$ è
$$z = 0.$$
(Allo studente viene richiesto di inserire qui un breve studio della funzione)
Il suo grafico è riportato qui sotto.



- La funzione ristretta alla retta $y = x$ è
$$z = f(x, x) = 2\sin x.$$
(Allo studente viene richiesto di inserire qui un breve studio della funzione)
Il suo grafico è riportato qui sotto.

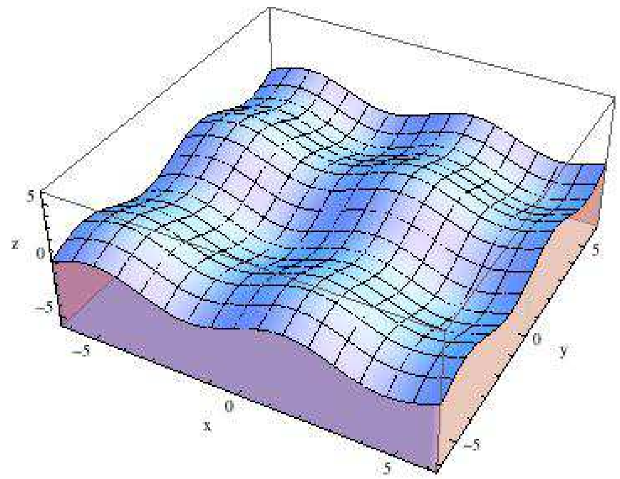


- Le curve di livello, $z = -1, 0, 1$ sono schizzate qui sotto.



- Gradiente:
$$\nabla f = (\cos(x), \cos(y))\,.$$
- Matrice Hessiana:
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\sin(y) \end{pmatrix}$$
- I punti di stazionarietà interni a Q sono $x_1 = (\pi, \pi)$, punto di massimo, dove $z = 2$; $x_5 = (3\pi/2, 3\pi/2)$, punto di minimo, in cui $z = -2$.

  Il massimo assoluto in Q è 2, il minimo assoluto è -2. L' estremo superiore e l' estremo inferiore coincidono rispettivamenteè con il massimo e il minimo.
- Schizzo della superficie (non richiesto)



Test 5 *Sia*

$$I = \int\int_R |y|\, dx\, dy, \quad R = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, x > 0\} \tag{5}$$

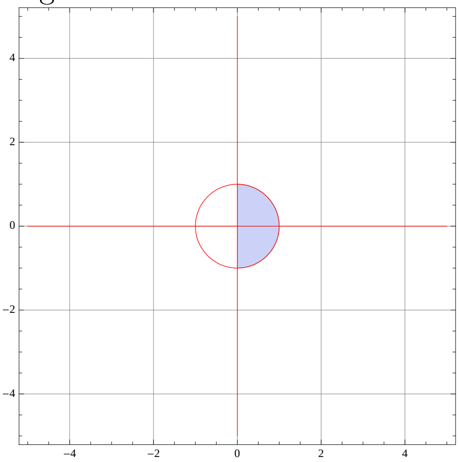
Domanda numero 16: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 17: *Schizzare un grafico del dominio in coordinate polari.*

Domanda numero 18: *Calcolare il valore dell' integrale, usando coordinate polari.*

Risoluzione.

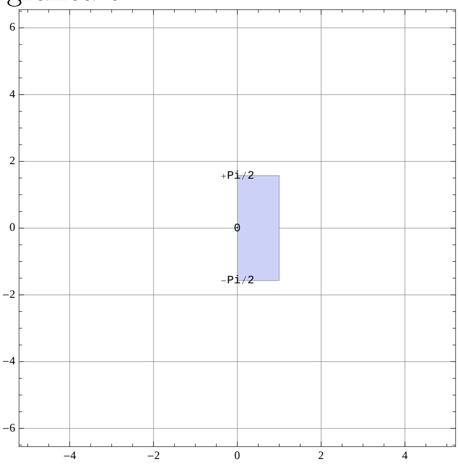
- Grafico del dominio di integrazione.



  Effettuando il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, il dominio di integrazione diventa

$$R' = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}$$

  La cui rappresentazione grafica è:



- Per calcolare il valore dell' integrale, conviene notare che

$$\int\int_R |y|\, dx\, dy = 2\int\int_S y\, dx\, dy, \quad S = R \cap \{y > 0\}.$$

  Il valore dell' integrale è:

$$I = 2\int\int_S y\, dydx = 2\int_0^1\int_0^{\pi/2}(r\sin(\theta))d\theta r dr =$$
$$2\int_0^1 r^2[\cos(\theta)]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr = 2/3.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Calcolo 2, *** fine testo ***