Calcolabilità e Linguaggi Formali
Recupero compitino 1

21 gennaio 2014

Esercizio 1

Sia $A = \{a, b\}$ un alfabeto finito. Determinare una MdT che riconosce tutte le stringhe $\alpha \in A^*$ in cui il numero di occorrenze del carattere a è uguale al numero di occorrenze del carattere b.

Soluzione

Lo stato iniziale è q_0, mentre il simbolo $\Box$ rappresenta il carattere vuoto ed il simbolo & un carattere speciale diverso da $a, b, \Box$. Ecco le istruzioni:
q_0 $\Box$ $\Box$ q_{fin} D (la stringa è riconosciuta)
q_0 a & q_a D (sostituisco il primo carattere da sinistra, che e' una a, con il carattere speciale e parto a caccia di una b con lo stato q_a)
q_0 b & q_b D (sostituisco il primo carattere da sinistra, che e' una b, con il carattere speciale e parto a caccia di una a con lo stato q_b)
q_a a a q_a D (q_a salta le a e cerca la prima b da sinistra)
q_a b & q_i S (q_a ha trovato la prima b da sinistra. La sostituisce con il carattere speciale e torna indietro per posizionarsi all'inizio della stringa rimasta. Ricordiamo che abbiamo cancellato con il carattere & una a ed una b)
q_a $\Box$ $\Box$ q_{ciclo} D (Non ho trovato la b. Quindi il numero di a non puo' essere uguale al numero delle b. Vado in ciclo)
q_b b b q_b D (q_b salta le b e cerca la prima a da sinistra)
q_b a & q_i S (q_b ha trovato la prima a da sinistra. La sostituisce con il carattere speciale e torna indietro per posizionarsi all'inizio della stringa rimasta. Ricordiamo che abbiamo cancellato con il carattere & una a ed una b)
q_b $\Box$ $\Box$ q_{ciclo} D (Non ho trovato la a. Quindi il numero di b non puo' essere uguale al numero delle a. Vado in ciclo)
q_i c c q_i S dove $c \in \{a, b, *\}$ (Salto tutti i caratteri $c \in \{a, b, *\}$ e cerco il primo $\Box$ a sinistra)
q_i $\Box$ $\Box$ q_0 D
q_0 & & q_0 D
q_a & & q_a D
q_b & & q_b D
q_{ciclo} c c q_{ciclo} D, per ogni carattere c.

Esercizio 2

Dimostrare che un insieme infinito è decidibile sse può essere enumerato in ordine strettamente crescente.

Soluzione

Se $X \subseteq N$ è non vuoto, indichiamo con $min(X)$ l'elemento minimo di X.
Sia I infinito e decidibile. Allora possiamo calcolare $min(I)$ come segue:
$x := 0;$
while $x \notin I$ do $x := x + 1;$
$min(I) := x.$
La funzione calcolabile totale $f(0) = min(I)$; $f(x) = min(I \setminus \{f(0), \ldots, f(x-1)\}$ enumera I in ordine strettamente crescente.
Viceversa, sia f una funzione calcolabile totale che enumera I in ordine strettamente crescente. Allora I e' decidibile per il seguente algoritmo:
$input(x); i := 0;$
while $f(i) < x$ do $i := i + 1;$
If $f(i) = x$ then $x \in I$ else $x \notin I$.

Esercizio 3

Determinare se esiste un insieme semidecidibile I che rispetta le funzioni e che contiene i programmi che calcolano la funzione vuota.

Soluzione

Per il primo teorema di Rice l'unico insieme è $I = N$.

Esercizio 4

Sia $J = \{x : dom(\phi_x) \text{ è infinito}\}$. Applicare il primo teorema di Rice all'insieme J ed al suo complementare.

Soluzione

J rispetta le funzioni: se $x \in J$ e $\phi_x = \phi_y$ allora $dom(\phi_y) = dom(\phi_x)$ è infinito.
$J \neq \emptyset$: i programmi che calcolano la funzione identica appartengono ad I perché $dom(Id) = N$ è infinito.
$J \neq N$: i programmi che calcolano la funzione vuota appartengono al complementare di J perché $dom(f_\emptyset) = \emptyset$ non e' infinito.
Per Rice1 J non e' decidibile e $\bar{J}$ non e' semidecidibile.