Analisi Matematica IB

A.A. 2011/12

Paolo Guiotto

Indice

Parte I

Teoria

Capitolo 1

Continuità e limiti in $\mathbb{R}$

1.1 La nozione di limite in $\mathbb{R}$

Ricordiamo anzitutto la

Definizione 1.1.1. *Sia $D \subset \mathbb{R}$ un insieme. Un punto $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si dice* **punto di accumulazione per** *D se*

$$\exists (x_n) \subset D \backslash \{x_0\}, \ : \ x_n \longrightarrow x_0.$$

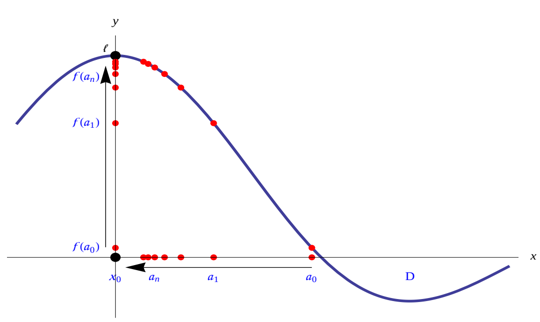
La nozione di punto di accumulazione è fondamentale per poter introdurre la

Definizione 1.1.2. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{Acc}(D)$. Diciamo che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

se

$$\forall (x_n) \subset D \backslash \{x_0\} \ : \ x_n \longrightarrow x_0, \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(x_0). \tag{1.1.1}$$



Osservazione 1.1.3 (importante!)**.** *Nella definizione di limite è importante considerare successioni $(x_n) \subset D \backslash \{x_0\}$. Questo per due ragioni: da un lato la funzione potrebbe non essere definita nel punto x_0, come nel caso del*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Dall'altro potrebbe anche essere definita nel punto x_0 ma il limite, ammesso esista, non avere alcuna relazione col valore della funzione nel punto x_0. Per esempio consideriamo la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Secondo la definizione precedente risulta che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, com'è naturale che sia. Infatti: qui $x_0 = 0$, $D = \mathbb{R}$ (quindi evidentemente $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$). Ora,

$$\forall (x_n) \subset D\backslash\{x_0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \implies f(x_n) = 0 \longrightarrow 0 =: \ell.$$

Questo, peraltro, mostra perché sia importante specificare, nella definizione di limite, che $x_n \neq x_0$. Infatti, se avessimo fornito la definizione nella forma

$$\forall (x_n) \subset D\backslash\ :\ x_n \longrightarrow x_0, \implies f(x_n) \longrightarrow \ell.$$

la funzione dell'esempio non avrebbe avuto limite (il che sembra abbastanza innaturale). Infatti: se $(x_n) \subset D$ e $x_n \longrightarrow x_0$, si può avere $x_n \equiv x_0$. Nel qual caso, nell'esempio, $x_n \equiv 0$ produrrebbe $f(x_n) \equiv 1 \longrightarrow 1$. Dunque il limite non potrebbe esistere. ■

La peculiarità di $\mathbb{R}$ permette tutta una serie di particolarizzazioni del concetto di limite. Per esempio, in $\mathbb{R}$ ci sono sostanzialmente solo due "modi" di avvicinare un punto x_0: da destra e da sinistra. Questo produce immediatamente la

Definizione 1.1.4. *Sia $D \subset \mathbb{R}$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è* **punto di accumulazione da destra** *per D se $x_0 \in \mathrm{Acc}(D\cap]x_0, +\infty[)$. In particolare:*

$$\exists (x_n) \subset D\backslash\{x_0\},\ x_n > x_0,\ \forall n,\ x_n \longrightarrow x_0.$$

Similmente si definisce un punto di accumulazione da sinistra.

Corrispondentemente abbiamo la

Definizione 1.1.5. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D\cap]x_0, +\infty[)$. Diciamo allora che*

$$\exists \lim_{x\to x_0+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

se

$$\forall (x_n) \subset D\cap]x_0, +\infty[,\ x_n \longrightarrow x_0, \implies f(x_n) \longrightarrow \ell. \tag{1.1.2}$$

Notazione: $f(x_0+) := \lim_{x\to x_0+} f(x)$. *In modo analogo si intende definito* $\lim_{x\to x_0-} f(x) =: f(x_0-)$.

La connessione con il $\lim_{x\to x_0} f(x)$ è del tutto ovvia e naturale

Proposizione 1.1.6. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D), \mathrm{Acc}(D_+), \mathrm{Acc}(D_-)$. Allora*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell, \iff \exists f(x_0-) = f(x_0+) = \ell.$$

Dim. — Esercizio. ■

Corrispondentemente parliamo di continuità da destra e da sinistra:

Definizione 1.1.7. *Sia* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x_0 \in D \cap \mathrm{Acc}(D \cap]x_0 + \infty[)$*. Diciamo che* f *è* **continua da destra in** x_0 *se* $f(x_0+) = f(x_0)$*. Analogamente di definisce la continuità da sinistra.*

Allora

Corollario 1.1.8. *Una funzione* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua in* x_0 *sse è ivi continua da destra e da sinistra.*

1.2 Proprietà dei limiti in $\mathbb{R}$

Le proprietà dei limiti ricalcano le proprietà dei limiti di successioni. Di fatto, la *definizione successionale* (cioè tramite le successioni) agevola direttamente le dimostrazioni delle proprietà dei limiti di funzioni, riconducendole a quelle dei limiti di successioni. Distingueremo, grossomodo, le proprietà in *proprietà qualitative* e *proprietà quantitative.* Cominciamo con le prime.

1.2.1 Proprietà qualitative

Unicità

Come già per le successioni abbiamo il

Teorema 1.2.1. *Sia* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$*. Il limite* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *se esiste è unico.*

Dim. — Supponiamo che la proprietà (1.1.1) sia soddisfatta da ℓ_1, ℓ_2. Se $(x_n) \subset D \backslash \{x_0\}$ è tale che $x_n \longrightarrow x_0$ allora

$$f(x_n) \longrightarrow \ell_1, \quad \text{e} \quad f(x_n) \longrightarrow \ell_2.$$

Ma per le successioni si ha l'unicità del limite: in particolare la successione $(f(x_n))$ può convergere ad un solo limite, dunque $\ell_1 = \ell_2$. ■

Quindi, d'ora in poi parleremo senza ambiguità **del** limite.

Criterio di non esistenza

Immediatamente dalla definizione si ha la

Proposizione 1.2.2. *Sia* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$*. Se*

$$\exists (x_n), (y_n) \subset D \backslash \{x_0\}, \; : \; x_n \longrightarrow x_0, \; y_n \longrightarrow x_0, \; e \; f(x_n) \longrightarrow \ell_1, \; f(y_n) \longrightarrow \ell_2,$$

con $\ell_1 \neq \ell_2$*, allora non esiste* $\lim_{x \to x_0} f(x)$*.*

Dim. — Evidente. ■

Esempio 1.2.3. *Non esistono i limiti*

$$\lim_{x \to +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Sol. — Infatti: sia $f(x) := \sin x$ nel primo caso. Qui $x_0 = +\infty$ ovviamente in $\mathrm{Acc}(D(f)) = \mathrm{Acc}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Prendiamo $x_n = n\pi \longrightarrow +\infty$ se $n \longrightarrow +\infty$: allora

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0, \ n \longrightarrow +\infty.$$

Se invece $y_n := \frac{\pi}{2} + n2\pi \longrightarrow +\infty$ e $f(y_n) = 1 \longrightarrow 1$. Quindi per il criterio di non esistenza il limite non esiste.

Similmente si procede nel secondo caso: qui $x_0 = 0 \in \mathrm{Acc}(D(f)) = \mathrm{Acc}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}$ e $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Se si prende $x_n := \frac{1}{n\pi} \longrightarrow 0$ si ha $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0$, mentre per $y_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n2\pi} \longrightarrow 0$, $f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) = 1 \longrightarrow 1$, da cui la conclusione. ■

Permanenza del segno

Grossomodo la permanenza del segno afferma che una funzione ha il segno del proprio limite vicino al punto dove si calcola il limite. Precisamente:

Proposizione 1.2.4. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$ tale che esista $\lim_{x\to x_0} f(x) =: \ell$. Allora*

i) se $f \geqslant 0$ in qualche $(I_{x_0}\backslash\{x_0\}) \cap D$ allora $\ell \geqslant 0$.

ii) se $\ell > 0$ (eventualmente $\ell = +\infty$) si ha che $f > 0$ in qualche $(I_{x_0}\backslash\{x_0\}) \cap D$

Dim. — È un semplice esercizio di applicazione delle definizioni di limite. Ci limitiamo al caso $x_0 \in \mathbb{R}$.
i) Sia $(x_n) \subset D\backslash\{x_0\}$ tale che $x_n \longrightarrow x_0$ (tale successione esiste perché $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$). Allora $f(x_n) \longrightarrow \ell$. D'altra parte: siccome $x_n \longrightarrow x_0$, definitivamente dovrà aversi $x_n \in I_{x_0}$, e siccome $(x_n) \subset D\backslash\{x_0\}$, avremo che

$$(x_n) \subset (I_{x_0}\backslash\{x_0\}) \cap D, \text{ definitivamente.}$$

Ma allora $f(x_n) \geqslant 0$ definitivamente, ed essendo $f(x_n) \longrightarrow \ell$, in virtù della permanenza del segno per successioni abbiamo subito che $\ell \geqslant 0$.

ii) Supponiamo che l'intorno non esista. Allora

$$\forall I_{x_0}, \ \exists \widehat{x} \in (I_{x_0}\backslash\{x_0\}) \cap D, \ : \ f(\widehat{x}) \leqslant 0.$$

Per fissare le idee supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ (lasciamo per esercizio i casi $x_0 = \pm\infty$). Prendiamo $I^n_{x_0} := \left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$. Possiamo allora affermare che

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists x_n \in (I^n_{x_0}\backslash\{x_0\}) \cap D, \ : \ f(x_n) \leqslant 0.$$

Ma allora: $(x_n) \subset D\backslash\{x_0\}$ e essendo $|x_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ se ne deduce che $x_n \longrightarrow x_0$. Pertanto

$$f(x_n) \longrightarrow \ell.$$

Ma $f(x_n) \leqslant 0$ per ogni n per costruzione, e quindi per la permanenza del segno per successioni deve essere $\ell \leqslant 0$, contraddicendo così l'ipotesi. ■

Osservazione 1.2.5. *Ovviamente si può avere che $f > 0$ in $I_{x_0}\backslash\{x_0\}$ senza che il limite sia strettamente positivo.* Per esempio: $f(x) = x^2 > 0$ per ogni $x \in I_0\backslash\{0\}$ quale che sia I_0 ma $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. ■

Considerato che per le funzioni continue in un punto x_0 si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ abbiamo subito il

Corollario 1.2.6. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$. Allora*

i) se $f \geqslant 0$ in $(I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D$ allora $f(x_0) \geqslant 0$;

ii) se $f(x_0) > 0$ allora $f > 0$ in un intorno di x_0.

Dim. — Evidente. ■

Confronto

Supponiamo di voler calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sin x), \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}.$$

Nel primo caso è evidente che, sebbene $\sin x$ non abbia limite per $x \longrightarrow +\infty$, il termine dominante sia x. Possiamo per esempio affermare facilmente che

$$x + \sin x \geqslant x - 1 \longrightarrow +\infty, \quad x \longrightarrow +\infty.$$

Sembra naturale che questo debba comportare che $x + \sin x \longrightarrow +\infty$. Allo stesso mondo, anche nel secondo caso, sebbene $\sin \frac{1}{x}$ non abbia limite per $x \longrightarrow 0$, pare naturale scommettere sul fatto che il limite esista e valga 0: infatti, per quanto il comportamento di $\sin \frac{1}{x}$ sia sempre più oscillante man mano che ci si avvicina allo 0, possiamo allo stesso tempo dire che

$$-|x| \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant |x|, \ \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

e siccome $\pm|x| \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0$, è naturale pensare che $x \sin \frac{1}{x}$ resti intrappolata e debba avvicinarsi a 0. Possiamo pensare alle due funzioni $\pm|x|$ come a due carabinieri che si dirigono verso la gattabuia: chi ci sta in mezzo non può sfuggirne! Questa è l'origine del seguente

Teorema 1.2.7 (dei due carabinieri)**.** *Siano $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$ tali che*

i) esista un intorno I_{x_0} tale che $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\forall x \in (I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D$;

ii) esistano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Allora esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Dim. — Dobbiamo mostrare che vale la (1.1.1) per g, cioè che

$$\forall (x_n) \subset D \backslash \{x_0\}, \ : \ x_n \longrightarrow x_0, \ \Longrightarrow \ g(x_n) \longrightarrow \ell.$$

Siccome $x_n \longrightarrow x_0$ avremo che definitivamente $x_n \in I_{x_0}$. Essendo per ipotesi $(x_n) \subset D \backslash \{x_0\}$ ciò si traduce in:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \ : \ x_n \in (I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D, \ \forall n \geqslant N.$$

Ma allora, per i),

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n), \ \forall n \geqslant N.$$

Ora, per ii) si ha anche $f(x_n), h(x_n) \longrightarrow \ell$, per cui per il teorema dei due carabinieri per le successioni si deduce che esiste $\lim_{n \to +\infty} g(x_n) = \ell$. ■

Osservazione 1.2.8. *In particolare: se $\ell = +\infty$ basta solo il carabiniere da sotto, mentre se $\ell = -\infty$ quello da sopra.* ■

Come conseguenza ne ricaviamo un'importante regola di calcolo spesso utilizzata e che già di fatto abbiamo anticipato negli esempi di apertura: la regola limitata×infinitesima = infinitesima. A tal fine introduciamo le seguenti due definizioni:

Definizione 1.2.9 (funzione infinitesima)**.** *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$. Diciamo che f* **è infinitesima in** *x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.*

Definizione 1.2.10 (funzione limitata)**.** *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f* **è limitata su** *D se esiste $M \geqslant 0$ tale che $|f(x)| \leqslant M$ per ogni $x \in D$.*

Abbiamo allora la

Corollario 1.2.11 (infinitesima × limitata = infinitesima)**.** *Siano $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$ tali che*

- *f infinitesima in x_0;*
- *g limitata in $(I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D$.*

Allora $f \cdot g$ è infinitesima in x_0, cioé

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Dim. — Infatti,

$$\exists\ I_{x_0} \ :\ |g(x)| \leqslant M,\ \forall x \in (I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D,$$

per cui

$$|f(x)g(x)| \leqslant M|f(x)|,\ \forall x \in (I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D, \iff -M|f(x)| \leqslant f(x)g(x) \leqslant M|f(x)|,\ \forall x \in (I_{x_0} \backslash \{x_0\}) \cap D.$$

La conclusione ora segue dal teorema dei due carabinieri 1.2.7. ■

Esempio 1.2.12. *Calcolare*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}.$$

Sol. — Non possiamo immediatamente stabilire né il comportamento del numeratore che del denominatore perché sin e cos non ammettono limite all'infinito. Tuttavia:

$$x + \sin x = x \left(1 + \frac{1}{x} \sin x\right).$$

Essendo $\frac{1}{x}$ infinitesima per $x \longrightarrow +\infty$ e sin limitata, concludiamo che $\frac{1}{x} \sin x \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow +\infty$. Dunque chiaramente abbiamo $+\infty \cdot 1 = +\infty$ e similmente al denominatore. Ne deduciamo che il limite si presenta come una forma $\frac{\infty}{\infty}$. D'altro canto

$$\frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\sin x\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\cos x\right)} = \frac{1 + 0_x}{1 - 0_x} \longrightarrow 1,$$

dove abbiamo indicato con 0_x una quantità che tende a 0. ■

1.2.2 Proprietà quantitative

In questo paragrafo vediamo le prime regole di calcolo dei limiti. Siccome spesso i limiti coinvolgono funzioni che sono continue per le quali il calcolo del limite avviene elementarmente "per sostituzione" premetteremo alcune informazioni sulla continuità delle funzioni elementari. Queste proprietà verranno dimostrate nel prosieguo del capitolo senza che vi sia alcun corto circuito logico nell'anticiparle ora.

Funzioni continue

Come sappiamo,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \text{se } f \text{ è continua in } x_0.$$

In altre parole, se sappiamo che una funzione è continua in un punto x_0 allora il calcolo del limite è semplicemente dato dal valore $f(x_0)$. Per questo è importante conoscere classi di funzioni continue ed, in particolare, sapere se le funzioni elementari sono continue. Ora risulta che *le funzioni elementari sono continue ove definite*. Questo importante fatto è più precisamente enunciato nel seguente

Teorema 1.2.13. *Si ha che:*

- *se* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
$$\sharp^{m/n} \in \begin{cases} \mathscr{C}([0,+\infty[), & \text{se } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ pari}, \\ \mathscr{C}(]0,+\infty[), & \text{se } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ pari}, \\ \mathscr{C}(\mathbb{R}), & \text{se } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ dispari}, \\ \mathscr{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\}), & \text{se } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ dispari}; \end{cases}$$
- *se* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,
$$\sharp^{\alpha} \in \begin{cases} \mathscr{C}([0,+\infty[), & \text{se } \alpha > 0, \\ \mathscr{C}(]0,+\infty[), & \text{se } \alpha < 0; \end{cases}$$
- $\sin, \cos \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$*;*
- $\exp_a \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ *per ogni* $a > 0$*; in particolare* $\sinh, \cosh \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$*;*
- $\log_a \in \mathscr{C}(]0,+\infty[)$ *per ogni* $a > 0$, $a \neq 1$.

Regole di calcolo

Le regole di calcolo dei limiti di funzioni seguono strettamente le analoghe per i limiti di successioni. Ciò che conta è il valore del limite: cominciamo con la

Proposizione 1.2.14. *Siano* $f, g : D \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$. *Se esistono (eventualmente unilaterali)*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2,$$

allora

- $\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$*;*
- $\exists \lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$.
- *se* $\ell_2 \neq 0$, $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Dim. — Esercizio. ■

Questo risultato si rilegge immediatamente in termini di funzioni continue:

Corollario 1.2.15. *Siano* $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue in* $x_0 \in D \cap \mathrm{Acc}(D)$. *Allora*

- $f \pm g$ *è continua in* x_0*;*
- $f \cdot g$ *è continua in* x_0*;*
- *se* $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ *è continua in* x_0.

Dim. — Esercizio. ■

Queste semplici regole hanno quasi tutte immediate estensioni anche nel caso in cui uno o entrambi i limiti sia infinito. Occorre però prestare una certa attenzione poiché in alcuni casi questa estensione non è possibile e si parla di *forme indeterminate*. Cominciamo con la somma:

Proposizione 1.2.16. *Siano* $f, g : D \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$. *Supponiamo esistano (eventualmente unilaterali)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Allora

- *se* $\ell_1 \in \{\pm\infty\}$ *e* $\ell_2 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \pm\infty$ *con lo stesso segno di* ℓ_1*;*
- *se* $\ell_1, \ell_2 \in \{\pm\infty\}$ *con segno concorde allora* $\lim_{x \to x_0}(f(x) + g(x)) = \pm\infty$ *con lo stesso segno di* ℓ_1, ℓ_2.

Nel primo caso scriviamo brevemente $\pm\infty + \ell = \pm\infty$, *mentre nel secondo* $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ *oppure* $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Dim. — Esercizio. ■

Come già per le successioni, i casi

$$(+\infty) + (-\infty), \; (+\infty) - (+\infty), \; (-\infty) - (-\infty)$$

producono forme indeterminate che riassumiamo con la scrittura $\infty - \infty$. In maniera del tutto simile (tralasciamo gli enunciati) si hanno

- **Regole del prodotto**

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty, \quad (+\infty)\ell = \mathrm{sgn}(\ell)\infty, \; (\text{se } \ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$$

- **Regole del quoziente**

$$\frac{\ell}{\pm\infty} = 0, \; (\text{se } \ell \in \mathbb{R}), \quad \frac{\pm\infty}{\ell} = \pm\mathrm{sgn}(\ell)\infty, \; (\text{se } \ell \in \mathbb{R}\backslash\{0\}), \quad \frac{\pm\infty}{0+} = \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{0-} = \mp\infty.$$

A tal proposito è sottointeso che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0+(0-) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ e } f(x) > 0\ (<0) \text{ in un intorno di } x_0.$$

Tutto quanto non espresso sopra sono **forme indeterminate**, situazioni nelle quali, cioè, non esiste una regola a priori con la quale si possa determinare l'esito del calcolo. Sono pertanto forme indeterminate le seguenti:

$$\infty-\infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty\cdot 0, \quad \frac{0}{0}.$$

Esempio 1.2.17. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right).$$

Sol. — Si presenta come forma del tipo $\infty-\infty$. Svolgendo i calcoli si ha:

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}=\frac{x^2-1}{x^4}=(x^2-1)\frac{1}{x^4},$$

che non è più di indecisione visto che: $x^2-1\longrightarrow -1$, $\frac{1}{x^4}\longrightarrow +\infty$: la frazione tende pertanto a $-\infty$. ■

Esempio 1.2.18. *Calcolare*

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^5+3x^2-2x}{5x^2+1}.$$

Sol. — Chiaramente $5x^2+1\longrightarrow +\infty$ mentre il numeratore sarebbe una forma di indecisione $(-\infty)+(+\infty)-(-\infty)$. D'altra parte, come già per le successioni, il termine "dominante" è x^5, fatto evidenziato se lo raccogliamo: infatti

$$x^5-3x^2-2x=x^5\left(1-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)\longrightarrow -\infty,$$

visto che $1-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}\longrightarrow 1$ per le regole di calcolo dei limiti finiti. Dunque la frazione presenta una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Raccogliendo i termini dominanti sopra e sotto si ha

$$\frac{x^5-3x^2-2x}{5x^2+1}=\frac{x^5\left(1-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)}{5x^2\left(1+\frac{1}{5x^2}\right)}=\frac{x^3}{5}\frac{1-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{1}{5x^2}}\longrightarrow -\infty,$$

perché la frazione tende a 1 per le regole di calcolo dei limiti finiti ed $\frac{x^3}{5}\longrightarrow -\infty$. ■

Esempio 1.2.19. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2+x}.$$

Sol. — Numeratore e denominatore sono funzioni continue in $x=0$, quindi tendono rispettivamente a 0 e 0, per cui il limite si presenta come una forma $\frac{0}{0}$. Dobbiamo capire, in qualche modo, come "vanno" a zero numeratore e denominatore. Osserviamo che se scriviamo

$$\sqrt{1+x}-1=(\sqrt{1+x}-1)\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{x}{\sqrt{1+x}+1},$$

la frazione può essere riscritta come

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2+x} = \frac{x}{x^2+x}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

per le solite regole di calcolo. ∎

Esempio 1.2.20. *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^3-x+1}.$$

Sol. — Ci sono molte forme di indecisione. Anzitutto, per $x \longrightarrow -\infty$, x^2+2x+1 è una forma di indecisione del tipo $\infty-\infty$, che però si risolve presto se si osserva che

$$x^2+2x+1 = x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right),$$

da cui il primo fattore tende a $+\infty$ mentre il contenuto della parentesi tende a 1. Quindi, il tutto tende a $+\infty$. Il denominatore, invece, tende a $-\infty$, per cui ci si trova di fronte ad un'indecisione del tipo $\frac{+\infty}{-\infty}$ (che è forma indeterminata come vedremo in seguito). Tuttavia, raccogliendo i termini "più grossi", si arriva a:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^3-x+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \longrightarrow 0\cdot 1 = 0. \quad ∎$$

1.2.3 Asintoticità e o–piccolo

Abbiamo intuito che tanta importanza ha un opportuno concetto di *ordine di grandezza*. Al fine di individuare la definizione più corretta, consideriamo una situazione ricorrente, nella quale si abbia una quantità del tipo $f(x)-g(x)$, con $f(x), g(x) \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow x_0$. Se andiamo a riguardare gli esempi esposti sopra, ci accorgiamo che abbiamo sempre fatto la seguente operazione

$$f(x)-g(x) = f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right), \quad \text{con} \quad \frac{g(x)}{f(x)} \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow x_0.$$

In questo modo si è eliminata l'indecisione e si è potuto concludere che $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = +\infty$. Dunque riusciamo a stabilire che f è più *grande* di g non perché $f>g$ ma perché il rapporto $\frac{g}{f} \longrightarrow 0$. È bene sottolineare il perché "più" grande non significa "maggiore": infatti, ad esempio, prendendo le quantità x e $x+1$, si ha che $x+1>x$, ma $\frac{x+1}{x}$ tende ad 1.

Definizione 1.2.21 (o–piccolo)**.** *Siano $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$. Si dice che g* **è o–piccolo di** *f* **per** *$x \longrightarrow x_0$ se*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0. \tag{1.2.1}$$

Si scrive $g(x) = o(f(x))$, $x \longrightarrow x_0$.

Definizione 1.2.22. *Siano* $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$. *Si dice che* f **e** g **hanno lo stesso ordine di grandezza per** $x \longrightarrow x_0$ *se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Si scrive $f(x) \asymp_{x_0} g(x)$. *Se tale limite vale* 1, *in particolare, si dice che* f **e** g **sono asintotiche per** $x \longrightarrow x_0$ *e si scrive* $f(x) \sim_{x_0} f(x)$.

Esempio 1.2.23. *Tra le seguenti coppie di funzioni stabilire quale relazione sussiste a* $+\infty$:

$$i)\ x, x^2, \quad ii)\ x, x+1, \quad iii)\ x^2+1, 3x^2-2x-1.$$

Sol. — Abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \Longrightarrow \quad x = o(x^2),\ x \to +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1, \quad \Longrightarrow \quad x \sim_{+\infty} x+1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2-2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3},$$

quindi

$$x^2+1 \asymp_{+\infty} 3x^2-2x-1. \ \blacksquare$$

Si noti che se $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, ed $f(x), g(x) \longrightarrow \infty$, allora la procedura di raccogliere non funziona. In tal caso, infatti, si ha che

$$f(x) - g(x) = f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

che è una forma di indecisione $\infty \cdot 0$, perché nelle ipotesi si avrebbe che $1 - \frac{g(x)}{f(x)} \longrightarrow 0$. Il raccoglimento è pertanto inutile.

Esempio 1.2.24. *Calcolare*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right).$$

Siamo di fronte ad una forma $+\infty - (+\infty)$. È facile vedere che $\sqrt{x+1} \sim_{+\infty} \sqrt{x}$. Infatti

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 1, \quad x \longrightarrow +\infty,$$

per la continuità delle potenze e poiché $1 + \frac{1}{x} \longrightarrow 1$ per $x \longrightarrow +\infty$. Quindi non ha senso raccogliere alcuno dei due termini. Per capire l'ordine di grandezza della differenza $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ dobbiamo eliminare le radici: ciò è possibile razionalizzando,

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Si noti che è sparita l'indecisione perché adesso $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \longrightarrow +\infty$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \longrightarrow 0$, e quindi

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0. \ \blacksquare$$

Esempio 1.2.25. *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right).$$

Sol. — L'indecisione è del tipo $\infty-\infty$. Osserviamo che ambo i termini hanno lo stesso ordine di grandezza: infatti

$$\frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}{x}=\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{x}=\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow 1.$$

Quindi non c'è un ordine predominante. Razionalizziamo in modo da far sparire l'indecisione:

$$\begin{aligned}x-\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}&=\left(x-\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}=\frac{x^2-\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}\\&=-\frac{1}{x\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right)}\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio essendo giustificato dal fatto che $x\left(x+\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right)\longrightarrow+\infty$. ■

Esempio 1.2.26. *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+1}\right).$$

Sol. — Abbiamo nuovamente una forma del tipo $+\infty-(+\infty)$. Stavolta, però, i termini non hanno lo stesso ordine. Infatti

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{6}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}\longrightarrow+\infty,$$

perché forma del tipo $+\infty\times 1$ che non è indeterminata. ■

1.3 Continuità delle serie di potenze

Consideriamo una serie di potenze che senza perdere di generalità supporremo centrata in 0:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Sia $0<R\leqslant+\infty$ il suo raggio di convergenza che, per la formula di Hadamard, è

$$\frac{1}{R}=\limsup|a_n|^{1/n}.$$

Sappiamo che sicuramente la serie è *assolutamente convergente* per $|x|<R$ mentre non converge per $|x|>R$. È dunque definita una funzione

$$f:]-R,R[\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x):=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ x\in]-R,R[.$$

Questo tipo di funzioni merita un nome speciale, *funzioni analitiche*, e gode di proprietà molto forti. Cominceremo qui dal mostrare il seguente

Teorema 1.3.1. *Una funzione analitica è continua all'interno del suo insieme di convergenza.*

Dim. — Sia $x_0 \in]-R, R[$ fissato. Dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0).$$

Cominciamo con lo scrivere convenientemente $f(x_0+h)$ di modo da "estrarre" $f(x_0)$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) \quad &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x_0^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k = f(x_0) + h \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1}. \end{aligned}$$

Dunque, se mostriamo che

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right| \leqslant C, \ \forall h \ : \ |h| \leqslant \delta, \tag{1.3.1}$$

siamo a posto. A tal fine notiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} x_0^{(n-1)-k} h^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{n}{k+1} x_0^{(n-1)-k} h^k,$$

per cui

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| \left(|x_0| + |h|\right)^{n-1}.$$

Ora: fissiamo r tale che $|x_0| < r < R$ e imponiamo che $|x_0| + |h| \leqslant r$, cioè $|h| \leqslant r - |x_0|$. Allora

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} =: C.$$

Applicando il criterio della radice abbiamo infine

$$\limsup \left| (n-1)|a_n| r^{n-1} \right|^{1/n} = r \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{r}{R} < 1,$$

che significa che la serie che definisce C è convergente. Questo prova la (1.3.1). ■

Vedremo nel prossimo capito che in realtà le funzioni analitiche sono derivabili infinite volte, e dunque rappresentano una classe di funzioni molto "regolari".

Corollario 1.3.2. $\sin, \cos, \exp, \sinh, \cosh \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

1.4 Sviluppi asintotici e applicazioni al calcolo di limiti

Come applicazione della continuità delle funzioni analitiche abbiamo subito il seguente corollario importante in molte applicazioni che coinvolgono il comportamento asintotico delle funzioni.

Corollario 1.4.1. *Sia*

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \; x \in]-R, R[.$$

una funzione analitica. Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Dim. — Infatti:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k =: \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x).$$

Quindi si tratta di mostrare che il resto $r_n(x)$ è $o(x^n)$: a tal fine notiamo che

$$\frac{r_n(x)}{x^n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^{k-n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n+1} x^k =: g(x).$$

Ora è immediato verificare che il raggio di convergenza della serie che definisce g è ancora uguale ad R (fare questa verifica, è solo una formalità). Ma allora g è analitica, quindi in particolare è una funzione continua per il Teorema 1.3.1, per cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Da questo risultato otteniamo immediatamente gli sviluppi asintotici fondamentali per le funzioni elementari:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}),$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

1.4.1 Limiti notevoli

In particolare otteniamo la

Proposizione 1.4.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Dim. — Immediata. Per esempio

$$e^x=1+x+o(x),\quad \Longrightarrow\quad \frac{e^x-1}{x}=\frac{x+o(x)}{x}=1+\frac{o(x)}{x}\longrightarrow 1.\quad \blacksquare$$

Da questi possiamo facilmente dedurne altri fondamentali:

Proposizione 1.4.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\ \forall a>0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Dim. — È un semplice esercizio di calcolo di limiti. Per il primo basta osservare che se $a\neq 1$ (altrimenti è banale)

$$\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{(\log a)x}-1}{x}\overset{y=(\log a)x}{=}\log a\frac{e^y-1}{y}\longrightarrow(\log a)\cdot 1=\log a.$$

Per il secondo, posto $y=\log(1+x)$, $x=e^y-1$ si ha che $x\longrightarrow 0$ sse $y\longrightarrow 0$. Ma allora

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{y}{e^y-1}\longrightarrow 1.$$

Da questo poi segue che, per la continuità dell'esponenziale,

$$\log{(1+x)}^{1/x}\longrightarrow 1,\quad\Longrightarrow\quad(1+x)^{1/x}=e^{\log(1+x)^{1/x}}=e^{\frac{\log(1+x)}{x}}\longrightarrow e^1=e.$$

Immediatamente si hanno così anche gli ultimi due limiti (basta fare una sostituzione). Infine sia $\alpha\neq 0$ (altrimenti il calcolo è banale):

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{x}=\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}\frac{\alpha\log(1+x)}{x}.$$

Ora,

$$\frac{e^{\alpha\log(1+x)}-1}{\alpha\log(1+x)}\overset{y=\alpha\log(1+x),\ x\to 0,\ y\to 0}{=}\frac{e^y-1}{y}\longrightarrow 1,$$

da cui si conclude facilmente. $\blacksquare$

Con semplici manipolazioni algebriche possiamo cominciare a calcolare alcuni limiti.

Esempio 1.4.4. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(3x))^2}{x^2(1-\cos x)}.$$

Sol. — Il numeratore tende a 0, e così pure il denominatore, quindi è nuovamente una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$. Per $x \neq 0$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{(1-\cos(3x))^2}{x^2(1-\cos(x))} &= \left[(3x)^2 \frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right]^2 \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2 \frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \frac{(3x)^4}{x^4} \left[\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right]^2 \left[\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right]^{-1} \\ &= 3^4 \left[\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}\right]^2 \left[\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Ora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(3x))^2}{x^2(1-\cos(x))} = 3^4 \frac{1}{2} = \frac{81}{2}. \quad \blacksquare$$

Esempio 1.4.5. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Sol. — Osserviamo che

$$x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{\frac{\log x}{1-x}} \overset{1-x=y}{=} e^{\frac{\log(1-y)}{y}} = e^{-\frac{\log(1-y)}{-y}} \overset{z=-y}{=} e^{-\frac{\log(1+z)}{z}}.$$

Per $x \longrightarrow 1$, $y \longrightarrow 0$ e quindi $z \longrightarrow 0$, per cui

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{z\to 0} e^{-\frac{\log(1+z)}{z}} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \blacksquare$$

Esempio 1.4.6. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Sol. — Per $x \longrightarrow 0$, $\sin x \longrightarrow 0$. Possiamo scrivere l'argomento del limite nella forma

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\frac{\sin x}{x}} = \left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\frac{\sin x}{x}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}} \longrightarrow e. \quad \blacksquare$$

1.4.2 Calcolo di limiti mediante sviluppi asintotici

Gli esempi precedenti potrebbero aver indotto la credenza che tutto sommato sia sempre possibile, trasformandone astutamente l'espressione, calcolare il limite di qualsiasi cosa tramite i limiti notevoli. Non è tuttavia così e basta prendere un semplice esempio per accorgersene.

Esempio 1.4.7. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Dim. — Si tratta ovviamente di una forma $\frac{0}{0}$ ma i tentativi di ricondurla ai limiti notevoli sono vani. Tuttavia tramite gli sviluppi asintotici possiamo rapidamente eseguire il calcolo. Ricordiamo infatti che

$$\sin x = x + o(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = \dots.$$

Il primo sviluppo è inutile in questo caso poiché

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x}\frac{1}{x^2} = 0 \cdot (+\infty).$$

Tuttavia se utilizziamo il secondo sviluppo tutto si spiana:

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{6},$$

essendo $\frac{o(t)}{t} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$. Naturalmente potremmo utilizzare anche il terzo sviluppo (e molti altri), ma in questo caso è del tutto inutile: infatti otterremmo

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \frac{o(x^5)}{x^3} = -\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \frac{o(x^5)}{x^5}x^2 \longrightarrow -\frac{1}{6}. \quad \blacksquare$$

In questo esempio è contenuta l'idea alla base del *metodo degli sviluppi asintotici nel calcolo dei limiti*, che poi ha numerose altre applicazioni come ad esempio allo studio della convergenza delle serie numeriche o a quella degli integrali generalizzati. L'idea è di utilizzare appunto gli sviluppi asintotici delle funzioni elementari per "trasformarle" in polinomi (a meno di termini di resto trascurabili). Il vantaggio è che gli ordini di grandezza si leggono molto più rapidamente con le potenze visto che, ad esempio, se $x \longrightarrow 0$ allora x^n è tanto più piccolo quanto più n è grande. Nell'ambito della "trasformazione" a polinomio occorre tenere presente alcune semplici regole di funzionamento degli $o-$piccoli che somigliano molto alle proprietà delle potenze. Le elenchiamo per comodità ma è inutile impararle a memoria, normalmente un po' di pratica aiuta a risolvere da sé gran parte dei problemi!

Proposizione 1.4.8 (proprietà degli $o-$piccoli)**.** *Valgono le seguenti proprietà*

- $o(x) + o(x) = o(x)$*;*
- $co(x) = o(cx) = o(x)$ *se* $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*;*
- $x^n = o(x^m)$ *se* $n > m$ *(anche reali nel caso* $x > 0$*);*
- $o(x^n) = o(x^m)$ *se* $n \geqslant m$ *(anche reali, nel caso* $x > 0$*);*
- $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$*;*
- $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$*;*
- $(x+o(x))^n = x^n + o(x^n)$ *(anche se* n *reale, ma la dimostrazione verrà vista a margine della formula di Taylor);*

- $o(x + o(x)) = o(x)$.

Osservazione 1.4.9. *Tutte le proprietà precedenti sono nella forma $\diamondsuit = o(\heartsuit)$. Questo vuol dire che $\frac{\diamondsuit}{\heartsuit} \longrightarrow 0$ quando $\heartsuit \longrightarrow 0$. Pertanto non possono essere lette alla rovescia.* Per esempio: $o(x^2) = o(x)$ ma non è vero che $o(x) = o(x^2)$. ■

Dim. — Le prime due sono banali. Proviamo la terza: $x^n = o(x^m)$ se $n > m$, ovvero che $\frac{x^n}{x^m} \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0$. Ma

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \longrightarrow 0, \ (n > m).$$

La quarta, la quinta e la sesta sono analoghe. Per la settima, se $n \in \mathbb{N}$,

$$(x + o(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k o(x^{n-k}) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} o(x^n) = x^n + o(x^n),$$

in virtù delle proprietà precedenti.

L'ultima è leggermente più delicata. Dobbiamo mostrare che $\frac{o(x+o(x))}{x} \longrightarrow 0$. Sarebbe naturale scrivere

$$\frac{o(x + o(x))}{x} = \frac{o(x + o(x))}{x + o(x)} \frac{x + o(x)}{x} \longrightarrow 0$$

facilmente. L'unico intoppo è che dobbiamo essere sicuri che non dividiamo per 0. Ma

$$x + o(x) = x \left(1 + \frac{o(x)}{x}\right),$$

e siccome $\frac{o(x)}{x} \longrightarrow 0$ possiamo sempre supporre che $1 + \frac{o(x)}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ per $x \in I_0$. Ma allora $x + o(x)$ si annulla sse $x = 0$ quando $x \in I_0$. Questo assicura che possiamo moltiplicare e dividere per $x + o(x)$. Ora la conclusione è evidente. ■

Vediamo un esempio di applicazione di tutte queste tecniche.

Esempio 1.4.10. *Calcolare il*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{xe^{x^7} - \cos(x^4) + 1 - x}{\sinh x^4 - 2\sin(\cos x^2 - 1)}$$

Sol. — Anzitutto osserviamo che il limite proposto porta ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per discutere l'eventuale valore limite andiamo a scrivere gli sviluppi asintotici di numeratore $N(x) := xe^{x^7} - \cos(x^4) + 1 - x$ e denominatore $D(x) := \sinh x^4 - 2\sin(\cos x^2 - 1)$.

Ricordiamo che

$$e^{\xi} = 1 + \xi + o(\xi), \quad \cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2),$$

da cui

$$N(x) = x\left(1 + x^7 + o(x^7)\right) - \left(1 - \frac{x^8}{2} + o\left(x^8\right)\right) + 1 - x = \frac{3}{2}x^8 + o(x^8).$$

Per quando riguarda il denominatore, invece, abbiamo anzitutto

$$\cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2} + (\xi^2), \quad \Longrightarrow \quad \cos x^2 - 1 = \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

per cui, essendo $\sin\xi = \xi + o(\xi)$,

$$2\sin\big(\cos x^2 - 1\big) = 2\sin\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = 2\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4) + o\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\right) = x^4 + o(x^4).$$

D'altro canto $\sinh\xi = \xi + o(\xi)$ da cui

$$D(x) = \big(x^4 + o(x^4)\big) - \big(x^4 + o(x^4)\big) = o(x^4),$$

che è sufficiente per il confronto col numeratore. È chiaro che dobbiamo allungare gli sviluppi. Ovviamente per il seno iperbolico abbiamo $\sinh\xi = \xi + \frac{\xi^3}{6} + o(\xi^3)$, per cui

$$\sinh x^4 = x^4 + \frac{x^{12}}{6} + o(x^{12}).$$

Per la seconda parte del denominatore: allungare il solo sviluppo del seno è inutile poiché

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) &= \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \frac{\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^3}{6} + o\left(\left(\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)^3\right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \frac{x^{12}}{48} + o(x^{12}) + o(x^{12})\\ &= \frac{x^4}{2} + o(x^4),\end{aligned}$$

e di conseguenza avremmo

$$\sinh x^4 - 2\sin(\cos x^2 - 1) = x^4 + \frac{x^{12}}{6} + o(x^{12}) - x^4 + o(x^4) = o(x^4).$$

Allo stesso modo, allungare solo lo sviluppo del coseno senza quello del seno produce (ricordato che $\cos\xi = 1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{24} + o(\xi^4)$)

$$\begin{aligned}\sin\big(\cos x^2 - 1\big) &= \sin\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8) + o\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)\\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8) + o(x^4) = \frac{x^4}{2} + o(x^4),\end{aligned}$$

che porta inesorabilmente allo stesso risultato di prima. Occorre dunque allungare entrambi evitando possibilmente una marea di conti. Per questo ci sono le proprietà degli $o-$piccoli. Infatti

$$\begin{aligned}\sin\big(\cos x^2 - 1\big) &= \sin\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)\\ &= \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8) - \frac{\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)^3}{6} + o\left(\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right)^3\right).\end{aligned}$$

Il punto è: l'$o-$piccolo di grado più basso si "mangia" tutti gli altri. Guardando l'espressione precedente non è difficile rendersi conto che questi è $o(x^8)$. Dunque: tutti gli $o-$piccoli sono già inclusi in esso. Con questa considerazione abbiamo che

$$\sin\big(\cos x^2 - 1\big) = \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8).$$

Ma allora, finalmente

$$D(x) = \left(x^4 + \frac{x^{12}}{6} + o(x^{12})\right) - 2\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{24} + o(x^8)\right) = \frac{x^8}{12} + o(x^8).$$

Possiamo quindi concludere:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\frac{3}{2}x^8 + o(x^8)}{\frac{x^8}{12} + o(x^8)} \longrightarrow \frac{3/2}{1/12} = 18. \quad \blacksquare$$

1.4.3 Confronto esponenziali/potenze/logaritmi

Di grande importanza per i limiti all'infinito è il confronto tra esponenziali, potenze e logaritmi. Ricordiamo a tal proposito il seguente risultato visto nella prima parte del corso.

Teorema 1.4.11.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty, \ \forall \alpha > 0, \ a > 1. \tag{1.4.1}$$

Vogliamo ora estenderlo al caso della variabile continua $x \longrightarrow +\infty$. Abbiamo il

Teorema 1.4.12. *Valgono i seguenti limiti*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \ \forall \alpha > 0, \ a > 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = +\infty, \ \forall \alpha > 0.$$

Utilizzeremo la seguente notazione: $\log x \ll_{+\infty} x^\alpha \ll_{+\infty} a^x$ *per ogni* $\alpha > 0$*,* $a > 1$*.*

Dim. — Cominciamo col primo. L'idea è di riportarsi al caso "discreto" del limite (1.4.1). A tal fine osserviamo che

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \geq \frac{a^{[x]}}{x^\alpha} \geq \frac{a^{[x]}}{([x]+1)^\alpha} = \frac{a^{[x]+1}}{([x]+1)^\alpha}\frac{1}{a} \longrightarrow +\infty,$$

in virtù della (1.4.1). La conclusione segue allora dal teorema dei due carabinieri. Passando al secondo si procede per sostituzione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} \overset{y=\log x,\ x=e^y}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{\alpha y}}{y} \overset{z=\alpha y}{=} \lim_{z\to+\infty} \alpha\frac{e^z}{z} = +\infty, \quad \forall \alpha > 0. \ \blacksquare$$

Esempio 1.4.13. *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x}.$$

Sol. — Anzitutto abbiamo a che fare con una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Come al solito il problema è individuare il termine dominante. Scrivendo

$$x + e^x = e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right),$$

e ricordato che $\frac{x}{e^x} \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow +\infty$ (infatti $e^x \gg_{+\infty} x$), si deduce che l'ordine di grandezza del numeratore è esponenziale. Stesso discorso vale per il numeratore. Quindi abbiamo che:

$$\frac{x + e^x}{x^2 + e^x} = \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 + \frac{x^2}{e^x}} \longrightarrow 1, \quad x \longrightarrow +\infty. \ \blacksquare$$

Esempio 1.4.14. *Calcolare*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^x}{x^2-e^{-x}}.$$

Sol. — In questo caso, il numeratore tende a $+\infty$; per il denominatore, $e^{-x}\longrightarrow 0$ per $x\longrightarrow+\infty$, quindi la parte dominante è quella polinomiale, che tende a $+\infty$: in ogni caso si tratta di una forma $\frac{\infty}{\infty}$. Tuttavia gli ordini di grandezza sono diversi rispetto all'esempio precedente. Il numeratore è sempre di ordine esponenziale, mentre il denominatore è di ordine polinomiale. Quindi
$$\frac{x+e^x}{x^2-e^{-x}}=\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x^2\left(1+\frac{e^{-x}}{x^2}\right)}=\frac{e^x}{x^2}\frac{1+\frac{x}{e^x}}{1+\frac{e^{-x}}{x^2}}\longrightarrow+\infty,\quad x\longrightarrow+\infty.\ \blacksquare$$

Con semplici sostituzioni è possibile ricondurre alcuni limiti a limiti noti.

Esempio 1.4.15 (limite notevole)**.**
$$\lim_{x\to0+}x^\alpha\log x=0,\ \forall\alpha>0.$$

Sol. — Si tratta di una forma di indecisione del tipo $0\times\infty$, visto che $\log x\longrightarrow-\infty$ per $x\longrightarrow 0+$. Poniamo $y:=\log x$, cioè $x=e^y$. Abbiamo che se $x\longrightarrow0+$, $y\longrightarrow-\infty$ e
$$\lim_{x\to0+}x^\alpha\log x=\lim_{y\to-\infty}ye^{\alpha y}=\lim_{y\to-\infty}\frac{y}{e^{-\alpha y}}\overset{z:=-\alpha y\longrightarrow+\infty}{=}\lim_{z\to+\infty}-\frac{1}{\alpha}\frac{z}{e^z}=0,$$
essendo $e^z\gg_{+\infty}z$. $\blacksquare$

1.4.4 Forma di indecisione per le potenze

Capita spesso il problema di calcolare
$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}.$$
Osservato che $f(x)^{g(x)}=e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)}=e^{g(x)\log f(x)}$ per le proprietà dell'esponenziale sappiamo che
$$\text{se }\exists\lim_{x\to x_0}g(x)\log f(x)=\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},\quad\Longrightarrow\quad\exists\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^\ell,$$
convenendo che $e^{+\infty}=+\infty$ e $e^{-\infty}=0$ (esercizio!). È facile allora dedurre le forme di indecisione che possono nascere dalla forma f^g: il problema nel calcolo del limite $\lim_{x\to x_0}g(x)\log f(x)$ presenta un'eventuale forma del tipo $0\cdot\infty$ che si ha, come facilmente si vede, nei seguenti casi:
$$\begin{cases}f(x)\longrightarrow0+,\\(\Longrightarrow\ \log f(x)\longrightarrow-\infty),\\g(x)\longrightarrow0,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)\longrightarrow1,\\(\Longrightarrow\ \log f(x)\longrightarrow0),\\g(x)\longrightarrow\pm\infty,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)\longrightarrow+\infty,\\(\Longrightarrow\ \log f(x)\longrightarrow+\infty),\\g(x)\longrightarrow0.\end{cases}$$
In altre parole, sono forme di indecisione per le potenze le seguenti:
$$(0+)^0,\quad 1^{\pm\infty},\quad(+\infty)^0.$$

Bisogna prestare molta attenzione a queste situazioni, perché spesso si è tentati a scrivere $(0+)^0 = (+\infty)^0 = 1$ (perché "qualsiasi" numero elevato a 0 fa 1) e $1^{\pm\infty} = 1$ (perché 1 elevato a qualsiasi numero fa 1). In realtà, come sappiamo, nel limite non si considerano **mai** i valori limite al di fuori di quanto è permesso dalle eccezioni alle regole di calcolo.

Al tempo stesso non sono forme indeterminate le seguenti:

$$(0+)^\alpha = 0,\ (\alpha > 0),\quad (0+)^\alpha = +\infty,\ (\alpha < 0),\quad (+\infty)^\alpha = +\infty,\ (\alpha > 0),\quad (+\infty)^\alpha = 0,\ (\alpha < 0).$$

Esempio 1.4.16. *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\frac{\log x}{x}}.$$

Sol. — Poiché $x \gg_{+\infty} \log x$ abbiamo che $\frac{\log x}{x} \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$ mentre $\frac{1}{\log x} \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$. Dunque abbiamo la forma di indecisione $(0+)^0$. Utilizzando la trasposizione all'esponente abbiamo che

$$\left(\frac{1}{\log x}\right)^{\frac{\log x}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}\log\frac{1}{\log x}} = e^{-\frac{(\log x)\log\log x}{x}}.$$

Abbiamo che, per sostituzione,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)\log\log x}{x} \overset{y=\log x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{y\log y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y}\frac{\log y}{y} = 0,$$

perché $e^y \gg_{+\infty} y^2$ e $y \gg_{+\infty} \log y$. Dunque il limite iniziale esiste e vale 1. ∎

1.5 Funzioni monotone

Le funzioni monotone, come già le successioni monotone, presentano una particolare ricchezza rispetto alla nozione di limite. Il primo importante risultato è senza dubbio il

Teorema 1.5.1 (limite di una funzione monotona)**.** *Sia* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *monotona crescente,* $x_0 \in \mathrm{Acc}(D)$*. Allora (purché abbiano senso)*

$$f(x_0-) = \sup\{f(x)\ :\ x \in D,\ x < x_0\},\quad f(x_0+) = \inf\{f(x)\ :\ x \in D,\ x > x_0\}, \tag{1.5.1}$$

e

$$f(x_0-) \leqslant f(x_0+).$$

Se $f \searrow$ *l'enunciato resta valido ma, naturalmente,* $f(x_0-) \geqslant f(x_0+)$.

Dim. — Sia $\ell := \sup\{f(x)\ :\ x < x_0\} \leqslant +\infty$ e consideriamo il caso $\ell < +\infty$. Allora, per definizione di estremo superiore, fissato $\varepsilon > 0$

$$\exists x_\varepsilon < x_0\ :\ \ell - \varepsilon \leqslant f(x_\varepsilon) \leqslant \ell.$$

Ma $f \nearrow$, quindi

$$\ell - \varepsilon \leqslant f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant \ell,\ \forall x \in D,\ x_\varepsilon, \leqslant x < x_0.$$

Pertanto, se $(x_n) \subset D\cap]-\infty, x_0[$ è tale che $x_n \longrightarrow x_0$, definitivamente si avrà

$$x_n \geqslant x_\varepsilon,\ n \geqslant N(\varepsilon),\quad \Longrightarrow\quad \ell - \varepsilon \leqslant f(x_n) \leqslant \ell,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),$$

che è esattamente la (1.1.2).

Se invece $\ell = +\infty$ significa che
$$\forall K,\ \exists x_K < x_0,\ :\ f(x_K) \geqslant K.$$
Ma $f \nearrow$, quindi
$$f(x) \geqslant f(x_K) \geqslant K,\ \forall x \in D\ :\ x_K \leqslant x < x_0.$$
Nuovamente: se $(x_n) \subset D \cap]-\infty, x_0[$ è tale che $x_n \longrightarrow x_0$, definitivamente si avrà
$$x_n \geqslant x_\varepsilon,\ n \geqslant N(\varepsilon),\ \Longrightarrow\ f(x_n) \geqslant K,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),$$
cioè $f(x_n) \longrightarrow +\infty$.

Analogamente si procede col limite destro. Infine, dalla (1.5.1) segue subito che $f(x_0-) \leqslant f(x_0+)$. ■

Questo fatto, come vedremo ora, è di straordinaria importanza nell'ambito delle funzioni continue:

Teorema 1.5.2. *Ogni funzione monotona $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo la cui immagine $f(I) =: J$ sia ancora un intervallo è necessariamente continua.*

Dim. — Dimostriamo il teorema nel caso di $f \nearrow$. Supponiamo che in un certo $x_0 \in I$ la funzione **non** sia continua. Assumiamo qui che x_0 sia interno, se è uno degli estremi basta eliminare dalla dimostrazione la parte che non ha senso. Per il Teorema 1.5.1 si ha
$$f(x_0-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+).$$
Come abbiamo visto in precedenza, continua equivale a dire $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$. Supponiamo, per esempio, che $f(x_0-) < f(x_0)$. Ma allora, essendo per la (1.5.1)
$$f(x_0-) = \sup\{f(x)\ :\ x \in I,\ x < x_0\},\ \Longrightarrow\ f(x) \leqslant f(x_0-),\ \forall x \in I,\ x < x_0.$$
E inoltre, sempre per la (1.5.1)
$$f(x_0+) = \inf\{f(x)\ :\ x \in I,\ x > x_0\},\ \Longrightarrow\ f(x) \geqslant f(x_0+),\ \forall x \in I,\ x > x_0.$$
Ma allora
$$J = f(I) \subset]-\infty, f(x_0-)] \cup [f(x_0), +\infty[,$$
e siccome J ha punti in comune con entrambi gli intervalli significa che non è connesso, quindi non può essere un intervallo: assurdo! ■

Ricordate le proprietà di monotonia delle funzioni elementari si ha subito il

Corollario 1.5.3. *Si ha che:*

- *se* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
$$\sharp^{m/n} \in \begin{cases} \mathscr{C}([0,+\infty[), & se\ \frac{m}{n} > 0,\ n\ pari, \\ \mathscr{C}(]0,+\infty[), & se\ \frac{m}{n} < 0,\ n\ pari, \\ \mathscr{C}(\mathbb{R}), & se\ \frac{m}{n} > 0,\ n\ dispari, \\ \mathscr{C}(\mathbb{R}\backslash\{0\}), & se\ \frac{m}{n} < 0,\ n\ dispari; \end{cases}$$
- *se* $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,
$$\sharp^{\alpha} \in \begin{cases} \mathscr{C}([0,+\infty[), & se\ \alpha > 0, \\ \mathscr{C}(]0,+\infty[), & se\ \alpha < 0; \end{cases}$$

- $\exp_a \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ *per ogni* $a > 0$*;*
- $\log_a \in \mathscr{C}(]0, +\infty[)$ *per ogni* $a > 0$*,* $a \neq 1$*.*

Nel teorema 1.5.2 appare in tutta la sua importanza la miscela di proprietà contenute nella struttura dei reali legate al concetto di funzione continua. Se nelle ipotesi del suddetto teorema rinforziamo la monotonia a diventare monotonia stretta abbiamo che la f diventa iniettiva, e quindi invertibile. È allora immediato dedurre il

Corollario 1.5.4 (teorema dell'inversa continua)**.** *Sia* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, strettamente monotona e continua su* I *intervallo. Allora, posto* $J := f(I)$*,* J *è intervallo ed è ben definita e continua* $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$*. In particolare:* f *è una biiezione con inversa continua tra* I *e* $f(I)$*, ovvero un* **omeomorfismo***.*

Dim. — Che J sia intervallo segue dal teorema dei valori intermedi essendo f continua. La stretta monotonia implica, come noto, l'iniettività ed è dunque ben definita $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$. È facile verificare che anche f^{-1} è monotona (con la stessa monotonia di f) ed essendo $f^{-1}(f(I)) = I$ intervallo, per il teorema 1.5.2, ne segue che f^{-1} è continua. ■

Corollario 1.5.5. *Sia* $f : S \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $f \nearrow$*. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di* f *è finito o numerabile.*
Dim. — Sia D l'insieme dei punti di S nei quali f non è continua. Se $x_0 \in D$ allora, necessariamente, l'intervallo $I(x_0) :=]f(x_0-), f(x_0+)[$ è non vuoto (altrimenti vorrebbe dire che $f(x_0-) = f(x_0+)$). E chiaramente, se $x_0, x_1 \in D$, $x_0 < x_1$ ne segue che $I(x_0) \cap I(x_1) = \emptyset$, perché

$$f(x_0+) = \inf\{f(x) \ : \ x > x_0, \ x \in S\} \leq \sup\{f(x) \ : \ x < x_1, \ x \in S\} = f(x_0-).$$

In paricolare: l'applicazione $x \longmapsto I(x)$ da D in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ è iniettiva. Sia allora $r_x \in I(x) \cap \mathbb{Q}$. Poiché $I(x) \cap I(y) = \emptyset$ per $x \neq y$ sicuramente $r_x \neq r_y$ per $x \neq y$. Dunque l'applicazione $x \longmapsto r_x$ è iniettiva da D in $\mathbb{Q}$, da cui D è al più numerabile. ■

1.6 Teorema dei valori intermedi e teorema degli zeri

L'idea intuitiva di funzione continua su un intervallo porta naturalmente ad affermare che il suo grafico non ha "salti". Un modo efficace per tradurre precisamente questo concetto intuitivo è il

Teorema 1.6.1 (dei valori intermedi)**.** *Sia* $f \in \mathscr{C}(I)$*,* $I \subset \mathbb{R}$ *è un intervallo. Allora* $f(I)$ *è un intervallo.*

Dim. — Siano $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in f(I)$. Vogliamo dimostrare che $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, dopodiché sarà chiaro che $f(I)$ è intervallo. A tal fine sia $\widehat{y} \in]\alpha, \beta[$. Essendo $\alpha \in f(I)$, $\alpha = f(\xi)$ per qualche $\xi \in I$, così come $\beta = f(\eta)$ con $\eta \in I$. Ovviamente $\xi \neq \eta$ perché $\alpha \neq \beta$. Supponiamo, ad esempio, $\xi < \eta$ (ragionamento analogo nell'altro caso) e introduciamo

$$\widehat{x} := \sup\{x \in I \ : \ x < \eta, \ f(x) < \widehat{y}\},$$

cioè l'"ultimo" x prima di η dove $f < \widehat{y}$. Mostriamo che $f(\widehat{x}) = \widehat{y}$. A tal fine osserviamo che per la definizione di sup esiste una successione (x_n) tale che

$$x_n \longrightarrow \widehat{x}, \ x_n < \widehat{x}, \ f(x_n) < \widehat{y}.$$

Ma allora

$$f(\widehat{x}-) = \lim_{x \to \widehat{x}-} f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \overset{perm.\ sgn}{\leqslant} \widehat{y}.$$

D'altra parte, per $x > \widehat{x}$ abbiamo $f(x) \geqslant \widehat{y}$ e quindi

$$f(\widehat{x}+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) \overset{perm.\ sgn}{\geqslant} \widehat{y}.$$

Essendo f continua nel punto $\widehat{x}$ abbiamo

$$\widehat{y} \leqslant f(\widehat{x}+) = f(x) = f(\widehat{x}-) \leqslant \widehat{y}, \implies f(\widehat{x}) = \widehat{y}. \quad \blacksquare$$

Osservazione 1.6.2. *Dimostrazione alternativa che fa ricorso alle proprietà generali delle funzioni continue.* Si sa che una funzione continua manda insiemi **connessi** in insiemi **connessi**. Ora: se I è intervallo, quindi connesso in $\mathbb{R}$ ed f continua su I, allora $f(I)$ è connesso, quindi intervallo (visto che questi sono tutti e soli i connessi). $\blacksquare$

Come caso particolare del teorema dei valori intermedi abbiamo il

Corollario 1.6.3 (teorema degli zeri)**.** *Se $f \in \mathscr{C}(I)$ dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo ed esistono $x_0, x_1 \in I$ tali che $f(x_0)f(x_1) < 0$ [1] allora deve esistere $\xi \in]x_0, x_1[$ tale che $f(\xi) = 0$.*

Dim. — Evidente. $\blacksquare$

1.6.1 Algoritmo per la ricerca degli zeri di una funzione continua

Così come dimostrato (cioè come corollario del teorema dei valori intermedi), il teorema degli zeri è un puro risultato di esistenza e non fornisce indicazioni su come trovare gli zeri (almeno uno!). Vediamo ora un semplice algoritmo che richiede solo la continuità (algoritmi più raffinati, e meno generali, verranno presentati col calcolo differenziale).

L'idea di fondo è molto semplice. Supponiamo, per fissare le idee, che $f \in \mathscr{C}([a, b])$ e che $f(a) < 0 < f(b)$. Dividiamo $[a, b]$ in due parti uguali e chiamiamo x_1 il punto medio di $[a, b]$. Si presentano due possibilità: o $f(x_1) = 0$ o $f(x_1) \neq 0$. Nel primo caso abbiamo finito, nel secondo abbiamo le alternative

- $f(x_1) < 0$: restringiamo la ricerca all'intervallo $[x_1, b]$, ponendo $a_1 = x_1$ e $b_1 = b$;
- $f(x_1) > 0$: restringiamo la ricerca all'intervallo $[a, x_1]$, ponendo $a_1 = a$ e $b_1 = x_1$.

In ogni caso:

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b, \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad f(a_1) < 0 < f(b_1).$$

Adesso ripetiamo il ragionamento con l'intervallo $[a_1, b_1]$ in luogo di $[a, b]$. O si riesce a trovare lo zero, oppure troviamo a_2, b_2 tali che

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1 \leqslant b, \quad b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}, \quad f(a_2) < 0 < f(b_2).$$

Iterando il procedimento si ha che o termina ad un certo passo, oppure costruiamo due successioni $(a_n), (b_n)$ tali che

$$(a_n) \nearrow, \ (b_n) \searrow, \quad a_n \leqslant b_n, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

A questo punto siano $\alpha := \lim_n a_n$ e $\beta := \lim_n b_n$. Tali limiti esistono perché le successioni sono monotone. Inoltre, per la permanenza del segno, è $\alpha \leqslant \beta$. Ma anche

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}, \implies 0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 0, \implies \alpha = \beta.$$

Infine, per continuità, essendo $a \leqslant \alpha = \beta \leqslant b$, necessariamente $f(a_n) \longrightarrow f(\alpha)$ e $f(b_n) \longrightarrow f(\beta)$. Per la permanenza del segno, nuovamente, si avrà $f(\alpha) \leqslant 0 \leqslant f(\beta) = f(\alpha)$, da cui $f(\alpha) = 0$.

[1] Questo significa che $f(x_0), f(x_1) \neq 0$ ed hanno segni discordi.

Capitolo 2

Calcolo Differenziale

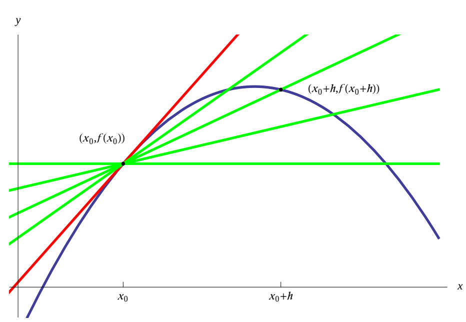
2.1 Cos'è il calcolo differenziale

Il *calcolo differenziale* può a giusto titolo ritenersi una delle maggiori invenzioni dell'ingegno umano. La sua sterminata quantità di applicazioni ne è anzitutto prova evidente dell'importanza: da quelle che vedremo in questo corso a quelle più avanzate che pervadono l'intera Analisi Matematica, la Fisica, nonché tutte le discipline applicate, dall'Ingegneria all'Economia. Non è obiettivo di questo corso introdurre a queste applicazioni, lo studente ne troverà continuamente nel corso dei propri studi. L'obiettivo è quello di introdurre i concetti principali ed imparare ad apprezzare il senso geometrico.

Il modo più classico per introdurre il concetto di derivata è il problema del calcolo della tangente ad una curva piana descritta come grafico di una certa funzione $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ passante per un certo punto $(x_0, f(x_0))$ del suo grafico. Uno dei modi convenienti per scrivere l'equazione di una retta (non verticale) passante per tale punto è il seguente:

$$y = m(x - x_0) + f(x_0),\ x \in \mathbb{R}.$$

Dunque il vero problema è: *come si determina il coefficiente angolare della retta in modo che questa sia "tangente" al grafico*? L'idea geometrica è semplicissima: posto che per individuare univocamente una retta occorrono due punti, consideriamo un secondo punto sul grafico di f, del tipo $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dove $h \neq 0$ (di modo che questo punto sia distinto dal precedente).



Naturalmente occorre qualche ipotesi di modo che ciò abbia senso (cioè che $x_0 + h \in D$). Ma per il momento non preoccupiamoci di ciò. Il coefficiente angolare di questa retta è dato, come sappiamo fin dalle scuole medie, da

$$m = \frac{\text{variazione ordinate}}{\text{variazione ascisse}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Evidentemente tale m dipende da h e in genere questa retta non sarà tangente ma taglierà il grafico come illustrato in figura. È tuttavia naturale pensare che quando si fa tendere h a zero la retta così costruita si sposti fino ad assumere una posizione limite che, appunto dovrebbe essere quella della retta tangente. In altre parole il coefficiente angolare m che cerchiamo dovrebbe essere assegnato dalla formula

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Questo limite, se esiste, prende il nome di *derivata di f nel punto x_0* e viene indicata con $f'(x_0)$. Si noti subito che la conoscenza di alcune informazioni sul segno di $f'(x_0)$ anticipi una serie di proprietà della funzione. Per esempio $f'(x_0) > 0$ dovrebbe naturalmente voler dire f crescente (almeno vicino a x_0), e similmente $f'(x_0) < 0$ dovrebbe voler dire f decrescente. Quindi il segno della derivata diventa uno strumento fondamentale per la monotonia. Ma non solo: dalla monotonia possiamo affrontare il problema di trovare massimi e minimi (nei quali si dovrebbe avere $f'(x_0) = 0$ almeno a spanne!). In realtà il calcolo che introdurremo presenta una quantità impressionante di proprietà molte delle quali diverranno naturali strada facendo. È per esempio tramite il calcolo differenziale che possiamo dedurre una formula generale per sviluppare asintoticamente una qualsiasi funzione (sotto certe ipotesi): si tratta della *formula di Taylor*. La quale, a sua volta, fornisce un metodo di calcolo approssimato che, in buona sostanza, è quello utilizzato dalle macchine calcolatrici per calcolare i valori delle funzioni elementari.

In questo Capitolo ci proponiamo di introdurre tutto ciò cercando continuamente di mantenere il filo "narrativo" della visione essenziale dei concetti che andremo a introdurre.

2.2 Definizione e prime proprietà

Cominciamo con la

Definizione 2.2.1 (derivata). *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$. Diciamo che f* **è derivabile in** *x_0 se*

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Il numero $f'(x_0)$ si dice **derivata di f nel punto** *x_0.*

Notiamo subito un fatto: se si prova a fare un disegno di una funzione che ammette una derivata (e quindi ci aspettiamo che in un senso opportuno sia definita una retta tangente) è impossibile fare un disegno in cui f non sia continua. In effetti si ha la

Proposizione 2.2.2. *Se f è derivabile in x_0 allora è anche continua in x_0.*

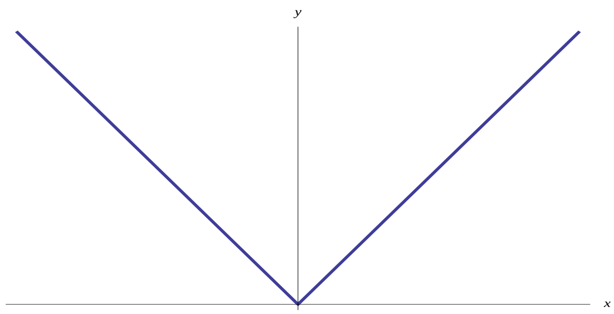
Dim. — Immediata:

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) \overset{h=x-x_0,\ x\to x_0,\ h\to 0}{=} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h \longrightarrow f'(x_0)\cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Allerta! 2.2.3. Nonostante tutti gli avvisi del caso, non c'è niente da fare: c'è sempre qualcuno che si ostina a credere che sia la continuità ad implicare la derivabilità e non il viceversa: non è inutile ripetere che non è così! *Il classico esempio è la funzione*

$$f(x) := |x|,\ x \in \mathbb{R}.$$

Si vede subito che $\nexists f'(0)$.



Infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h},$$

che non esiste essendo

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1. \quad \blacksquare$$

Vediamo allora in che senso si parla di *tangenza*. Consideriamo a tal fine una generica retta passante per $(x_0, f(x_0))$ non verticale

$$y = m(x - x_0) + f(x_0).$$

Il "gap" tra la funzione e la retta è quantificato dalla differenza

$$\varepsilon(x) := f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0)).$$

Se f è derivabile in x_0 allora è ivi continua dunque facilmente si vede che

$$\varepsilon(x) \longrightarrow 0,\ x \longrightarrow x_0,\ \forall m \in \mathbb{R}.$$

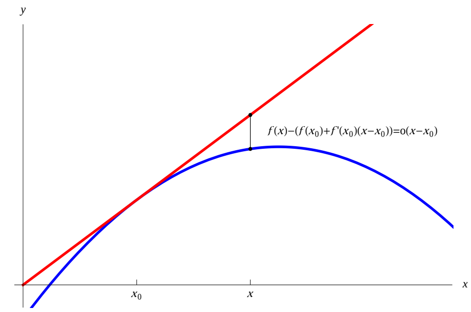
Ma

Teorema 2.2.4. *f è derivabile in x_0 (quindi $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ dove D è il dominio di f) se e solo se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che*

$$f(x) - (m(x - x_0) + f(x_0)) = o(x - x_0). \tag{2.2.1}$$

Si ha in tal caso $m = f'(x_0)$. In particolare, se f è derivabile in x_0 vale la **formula di Taylor al primo ordine**

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$



Dim. — $\Longrightarrow$ Supponiamo f derivabile. Allora, ponendo $m = f'(x_0)$ abbiamo

$$f(x) - \big(f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big) = o(x - x_0), \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \longrightarrow 0, \ x \longrightarrow x_0.$$

Ma

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \longrightarrow f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

$\Longleftarrow$ Supponiamo ora che valga la (2.2.1) e proviamo che f è derivabile. Dalla (2.2.1) abbiamo che

$$\frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \longrightarrow 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \longrightarrow 0.$$

Necessariamente dunque

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{h} = m. \quad \blacksquare$$

Osservazione 2.2.5. In altre parole: *una funzione f è derivabile in un punto $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ se e solo se esiste un numero m tale che*

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Tale numero altro non è che la derivata di f in x_0. Questa è a tutti gli effetti una definizione alternativa di derivata. In questo contesto non se ne apprezza moltissimo l'importanza al di là del senso geometrico. Si vedrà quando si studieranno le funzioni di più variabili (in un secondo corso di Analisi), che la formula di Taylor diventa di fatto la vera definizione di derivata. $\blacksquare$

Il caso della funzione modulo mostra che talvolta può aver senso parlare di *derivata unilaterale*.

Definizione 2.2.6. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D \cap [x_0, +\infty[)$. Diciamo che f è* **derivabile da destra in** x_0 *se*

$$\exists \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'_+(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Analogamente si definisce $f'_-(x_0)$.

Evidentemente, ricordando le proprietà dei limiti unilaterali si ha la

Proposizione 2.2.7. *Una funzione $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ se e solo se è derivabile da destra e da sinistra e le due derivate unilaterali coincidono.*

2.3 Derivate delle funzioni elementari

Sostanzialmente le funzioni elementari sono derivabili laddove definite. Diciamo che *una funzione* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *è derivabile su* D *se esiste* $f'(x)$ *per ogni* $x \in D$. In questo caso è definita una funzione

$$f' : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che prende appunto semplicemente il nome di *derivata* di f. Il calcolo della derivata delle funzioni elementari è conseguenza dei limiti notevoli presentati nel capitolo precedente:

Proposizione 2.3.1. *Si ha*

- *le funzioni costanti sono derivabili su tutto* $\mathbb{R}$ *con derivata nulla.*
- $\exp$ *è derivabile su tutto* $\mathbb{R}$ *e* $\exp' = \exp$.
- $\sin$ *e* $\cos$ *sono derivabili su tutto* $\mathbb{R}$ *e* $\sin' = \cos$ *mentre* $\cos' = \sin$.
- $\sinh$ *e* $\cosh$ *sono derivabili su tutto* $\mathbb{R}$ *e* $\sinh' = \cosh$ *mentre* $\cosh' = \sinh$.
- $\sharp^n$, $n \in \mathbb{N}$ *è derivabile su tutto* $\mathbb{R}$ *e* $(\sharp^n)' = n\sharp^{n-1}$.
- $\sharp^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ *è derivabile su* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e* $(\sharp^m)' = m\sharp^{m-1}$.
- $\sharp^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *è derivabile su* $]0, +\infty[$ *(ed anche in* 0 *da destra se* $\alpha \geqslant 1$*) e* $(\sharp^\alpha)' = \alpha\sharp^{\alpha-1}$.
- $|\sharp|$ *è derivabile su* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *e* $|\sharp|' = \operatorname{sgn}$.

Dim. — Sia $x \in \mathbb{R}$. Se f è costante uguale a C allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Passando all'esponenziale si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Similmente si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h^2} h + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \cos x.$$

Un calcolo simile mostra che $\cos' = -\sin$. Analoghe dimostrazioni per le derivate di sinh e cosh. Per la potenza abbiamo

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n \right) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}.$$

Per $k \geqslant 2$ si ha $h^{k-1} \longrightarrow 0$ per $h \longrightarrow 0$. Dunque

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Se $m \in \mathbb{Z}$, $m = -n$ con $n > 0$, allora, se $x \neq 0$,

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{h}\frac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n} = \frac{1}{(x+h)^n x^n}\frac{x^n - (x+h)^n}{h}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{x^{2n}}\left(-nx^{n-1}\right) = -nx^{-n-1} = mx^{m-1}.$$

Un po' più complicata l'ultima: se $x > 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} x^\alpha \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} \overset{t=\frac{h}{x},\ h=tx}{=} x^\alpha \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha - 1}{tx} = x^{\alpha-1}\alpha.$$

Se $x = 0$ ed $\alpha > 1$ allora il limite del rapporto incrementale diventa

$$\lim_{h\to 0+}\frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0+} h^{\alpha-1} = 0,$$

che conferma la formula $\alpha\sharp^{\alpha-1}$ per $x = 0$.

Infine il conto della derivata del modulo è lasciato a semplice verifica. ∎

Tra le funzioni elementari vanno incluse anche le inverse delle funzioni sopra esposte (in particolare log, arcsin, arccos, arctan) che verranno definite in seguito nel capitolo. Per altre funzioni, come ad esempio tan vedremo con le regole di calcolo il conto effettivo della derivata.

2.4 Derivabilità delle funzioni analitiche

Abbiamo visto nella sezione 1.3 che le funzioni analitiche, cioè le funzioni definite da somme di serie di potenze,

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sono continue all'interno dell'intervallo di convergenza $]-R, R[$, dove appunto $R > 0$ è il raggio di convergenza della serie che, per comodità, ricordiamo essere pari a (formula di Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Vediamo ora che sono di fatto anche funzioni derivabili.

Teorema 2.4.1. *Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in]-R, R[$ una funzione analitica, $R > 0$ raggio di convergenza. Allora f è derivabile su $]-R, R[$ e vale la formula*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\ x \in]-R, R[.$$

Dim. — La dimostrazione segue la stessa linea di quella del Teorema sulla continuità delle funzioni analitiche: pura *hard analysis* (poche idee ma molti conti!). Facciamo anzitutto un po' di lavoro preparatorio. Fissiamo

$x \in]-R,R[$ e prendiamo per il momento h (che andrà a 0) di modo che $x+h \in]-R,R[$. Allora

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x^n + nhx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \right) \\ &= f(x) + h \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \end{aligned}$$

È facile osservare che effettivamente la seconda serie (e di conseguenza anche la terza) è convergente poiché

$$\limsup \left| n a_n x^{n-1} \right|^{1/n} = \limsup n^{\frac{1}{n}} |a_n x^{n-1}|^{\frac{1}{n}} = |x| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = |x| \frac{1}{R} < 1,$$

per $|x| < R$. Quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + h \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}.$$

Dunque, se dimostriamo che

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right| \leqslant C, \ \forall |h| \leqslant \delta, \tag{2.4.1}$$

abbiamo la conclusione. Questa stima è del tutto analoga alla (1.3.1) e quindi non la ripetiamo. ■

Si intuisce che questa procedura di derivazione può essere applicata nuovamente ad f' e così via un numero arbitrario di volte, di modo che le funzioni analitiche rientrano nella classe delle *funzioni regolari*. Ritorneremo su questo concetto in seguito.

2.5 Regole di calcolo

Non possiamo naturalmente calcolare ogni volta la derivata di una funzione tramite la definizione. Fortunatamente esistono alcune regole di calcolo che permettono di determinare rapidamente le derivate di funzioni ottenute mediante operazioni algebriche o di composizione di funzioni elementari.

2.5.1 Regole algebriche

Dalle proprietà dei limiti segue subito la

Proposizione 2.5.1. *Siano f, g due funzioni derivabili in x_0 interno ai rispettivi domini. Allora*

i) $f \pm g$ è derivabile in x_0 e $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

ii) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

iii) se $g(x_0) \neq 0$ allora f/g è derivabile in x_0 e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

In particolare, ricordando che le costanti hanno derivata nulla, si hanno le formule:

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0),\quad (\textit{linearità della derivata}),\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},\ (\textit{se } g(x_0)\neq 0).$$

Dim. — La dimostrazione è davvero elementare. Per esempio la somma:

$$\begin{aligned}\frac{(f+g)(x_0+h)-(f+g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-(f(x_0)+g(x_0))}{h}\\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\ &\longrightarrow f'(x_0)+g'(x_0).\end{aligned}$$

Il prodotto invece richiede un minimo di maggiore attenzione:

$$\begin{aligned}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\end{aligned}$$

Ricordato ora che una funzione derivabile in un punto è anche ivi continua, per $h\longrightarrow 0$ si ha evidentemente che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}g(x_0+h)+f(x_0)\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\longrightarrow f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

L'ultima è simile. I casi particolari sono evidenti. ■

2.5.2 Regola della catena

Consideriamo ora una composizione tra due funzioni. Procedendo "alla buona" si ha

$$\frac{g\circ f(x_0+h)-g\circ f(x_0)}{h}=\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h}=\frac{g(f(x_0+h))+g(f(x_0))}{f(x_0+h)-f(x_0)}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

che, se assumiamo f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$ sembra porgere

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

La formula è giusta ma quella scritta sopra non ne è una dimostrazione. Infatti dovremmo richiedere, per giustificare i passaggi, che $f(x_0+h)\neq f(x_0)$ per $h\longrightarrow 0$ (di modo da evitare la divisione per 0). Poiché questa necessità non rientra nella formula finale sembra ragionevole bypassare questo ostacolo con una dimostrazione alternativa. Questa è basata sulla formula di Taylor:

Teorema 2.5.2 (regola della catena)**.** *Siano* $f:D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:\widetilde{D}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x_0\in\mathrm{Int}(D)$, $f(x_0)\in\mathrm{Int}(\widetilde{D})$ *tali che esistano* $f'(x_0)$ *e* $g'(f(x_0))$*. Allora*

$$\exists\ (g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{2.5.1}$$

Dim. — Essendo g derivabile in $f(x_0)$ possiamo scrivere, per la formula di Taylor,

$$g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + o(y - f(x_0)).$$

Prendendo $y = f(x)$ abbiamo allora

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + o(f(x) - f(x_0)).$$

Ma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

per cui

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\left(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right) + o\left(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + g'(f(x_0))o(x - x_0) + o\left(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right). \end{aligned}$$

Ricordate le proprietà degli $o-$piccoli abbiamo subito che

$$g'(f(x_0))o(x - x_0) = o(x - x_0), \quad \text{e} \quad o\left(f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right) = o(x - x_0),$$

e quindi, infine

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),$$

che è appunto equivalente a dire che $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la (2.5.1). ■

Osservazione 2.5.3 (Importante!)**.** *Occorre sempre osservare che le regole di calcolo sono* **condizioni sufficienti***. Per esempio: se si verificano le condizioni del teorema precedente allora la funzione composta è derivabile. Ma se non si verificano? Be' può esserlo lo stesso.* Ecco uno "stupido" esempio. Prendiamo la seguente composizione

$$x \longmapsto |x| \longmapsto |x|^2, \text{ cioè } f(x) = |x|, \; g(y) = y^2.$$

Allora $g \circ f(x) = |x|^2 = x^2$ che è chiaramente derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Tuttavia la regola della catena non può essere applicata nel punto $x_0 = 0$. Infatti f **non** è derivabile in questo punto, mentre g è derivabile in $f(x_0) = 0$. ■

Esempio 2.5.4. *Stabilire dov'è derivabile (e calcolarne la derivata) la funzione*

$$x \longmapsto \sqrt{1 + \sin x}.$$

Sol. — La funzione è definite per $1 + \sin x \geqslant 0$, e questo si verifica per ogni $x \in \mathbb{R}$. Possiamo vedere la funzione come composizione di due funzioni:

$$x \overset{f}{\longmapsto} 1 + \sin x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{1 + \sin x}, \quad f(x) = 1 + \sin x, \; g(y) = \sqrt{y}.$$

Sia $x \in \mathbb{R}$ (dominio della funzione composta). Allora se i) f è derivabile in x e ii) g è derivabile in $f(x)$, dalla regola della catena segue che $g \circ f$ è derivabile in x. Ora: i) f è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ (somma di funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$); ii) g è derivabile in $f(x)$ se e solo se $f(x) > 0$, cioè se e solo se $1 + \sin x > 0$, ovvero $\sin x > -1$. Ora $\sin \geqslant -1$ e $\sin x = -1$ se e solo se $x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ne segue che si può applicare la regola della catena in ogni punto $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{3}{2}\pi + k2\pi \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$. Inoltre, essendo

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

ne segue che

$$\exists\ (g\circ f)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}}\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\pi + k2\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Cosa possiamo dire dei punti $\frac{3}{2}\pi + k2\pi$? In effetti in questi punti saltano le ipotesi della regola della catena, quindi formalmente non possiamo concludere niente. In questo caso (al momento) l'unica strada è ricorrere alla definizione. Per periodicità basta considerare il caso $x_0 = \frac{3}{2}\pi$. Si tratta di calcolare

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{3}{2}\pi + h\right) - f\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin\left(\frac{3}{2}\pi + h\right)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}.$$

Ricordato che

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2),\ \Longrightarrow\ 1-\cos h = \frac{h^2}{2} + o(h^2),\ \Longrightarrow\ (1-\cos h)^{1/2} = \frac{|h|}{\sqrt{2}} + o(h),$$

per cui

$$\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h} = \frac{\frac{|h|}{\sqrt{2}} + o(h)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{sgn}(h) + \frac{o(h)}{h}$$

e come si vede il limite non esiste. Tuttavia esistono i limiti destro e sinistro e valgono rispettivamente $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Se ne deduce che $g\circ f$ è derivabile da destra e da sinistra anche nei punti del tipo $\frac{3}{2}\pi + k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ sebbene non sia derivabile in detti punti. ■

2.6 I teoremi fondamentali del Calcolo Differenziale

In questa sezione vediamo alcuni classici teoremi del Calcolo Differenziale: Fermat, Rolle, Lagrange e Cauchy. In realtà gli ultimi tre sono corollari del primo che si presenta come un apparentemente innocente teorema, ma le cui conseguenze sono davvero notevoli e, di fatto, si ritrovano in tutte le sezioni seguenti.

2.6.1 Teorema di Fermat

Il teorema di Fermat afferma che in un punto di massimo o minimo locale interno al dominio di una funzione, la derivata deve essere nulla. Questo è di fatto il primo risultato che vediamo come applicazione del Calcolo Differenziale ad uno dei problemi più importanti: la ricerca dei massimi e minimi delle funzioni. Cominciamo con l'introdurre alcune definizioni.

Definizione 2.6.1 (estremante globale)**.** *Sia $f : D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Un punto $x_{min}\in D$ si dice* **minimo globale** *per f su D se*

$$f(x_{min}) \leqslant f(x),\ \forall x\in D.$$

Analogamente si definisce un punto di **massimo globale***. I punti di minimo/massimo globale vengono detti* **estremanti globali***.*

Definizione 2.6.2 (estremante locale)**.** *Sia $f : D\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Un punto $x_{min}\in D$ si dice* **minimo locale** *per f su D se*

$$\exists\ U_{x_{min}}\ \textit{intorno di}\ x_{min}\ :\ f(x_{min})\leqslant f(x),\ \forall x\in D\cap U_{x_{min}}.$$

Analogamente si definisce un punto di **massimo locale***. I punti di minimo/massimo globale vengono detti* **estremanti locali***.*

Osservazione 2.6.3. *Va da sé che un estremante globale è anche locale ma non ovviamente il viceversa.*

Teorema 2.6.4 (Fermat)**.** *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ estremante locale. Allora, se f è derivabile in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$.*

Dim. — Molto semplice: consideriamo ad esempio il caso di un minimo locale. Siccome $x_{min} \in \mathrm{Int}(D)$ possiamo assumere (a meno di restringerlo) che l'intorno su cui vale

$$f(x_{min}) \leqslant f(x),\ \forall x \in D \cap U_{x_{min}}$$

sia contenuto in D. Dunque avremo

$$f(x_{min}) \leqslant f(x),\ \forall x \in]x_{min} - r, x_{min} + r[.$$

In particolare,

$$\text{se } |h| < r,\ f(x_{min} + h) \geqslant f(x_{min}), \iff f(x_{min} + h) - f(x_{min}) \geqslant 0.$$

Ma allora

$$f'(x_{min}) = f'_-(x_{min}) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_{min} + h) - f(x_{min})}{h} \geqslant 0,$$

$$f'(x_{min}) = f'_+(x_{min}) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_{min} + h) - f(x_{min})}{h} \leqslant 0,$$

da cui $f'(x_{min}) = 0$. ■

Osservazione 2.6.5. *Si noti che si è di fatto dimostrato che, come suggerisce l'intuizione, se x_{min} è un estremo, per esempio l'estremo sinistro e f è derivabile da destra allora $f'_+(x_{min}) \geqslant 0$, mentre se è l'estremo destro e f è derivabile da sinistra allora $f'_-(x_{min}) \leqslant 0$.* ■

Definizione 2.6.6. *Se f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = 0$ si dice che x_0 è un* **punto stazionario** *per f.*

Osservazione 2.6.7. *Così come un punto stazionario può essere un massimo o un minimo può altresì essere nessuno dei due!* per esempio se $f(x) = x^3$, allora $f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$, ma evidentemente $x = 0$ non è né min né max. ■

2.6.2 Teorema di Rolle

Il teorema di Rolle esprime un fatto intuitivamente evidente non appena si effettua un disegno: se una funzione f è derivabile su un intervallo ed agli estremi dello stesso assume lo stesso valore allora da qualche parte la retta tangente al grafico deve essere orizzontale.

Teorema 2.6.8. *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ [1]. Allora*

$$\textit{se}\ \ f(a) = f(b), \implies \exists \xi \in]a, b[\ :\ f'(\xi) = 0.$$

Dim. — Siccome f è continua su $[a, b]$ compatto, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. Chiamiamo x_{min} e x_{max} due punti, rispettivamente, di minimo e massimo assoluti. Se $f(x_{min}) = f(x_{max})$ allora f è costante, e quindi in ogni punto $\xi \in]a, b[$ si ha $f'(\xi) = 0$. Altrimenti, se $f(x_{min}) < f(x_{max})$ almeno uno dei due punti appartiene ad $]a, b[$ (visto che $f(a) = f(b)$). Ma allora, se per esempio è $x_{min} \in]a, b[$, per il teorema di Fermat si ha $f'(x_{min}) = 0$. ■

[1] N.B.: con questo si intende che non è richiesto che lo sia anche in a (da destra) e in b (da sinistra).

2.6.3 Teorema di Lagrange

Il teorema di Lagrange è di grandissima importanza nell'Analisi, specie nella sua riformulazione nota come *formula dell'incremento finito*. Esprime un fatto relativamente immediato. Prendiamo una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile (non è necessario che lo sia negli estremi). Congiungiamo con una retta i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si vede subito che esiste almeno una tangente al grafico che è parallela a questa retta.

Teorema 2.6.9 (Lagrange)**.** *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Allora*

$$\exists\ \xi \in]a, b[\ :\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \tag{2.6.1}$$

Nella forma

$$\exists\ \xi \in]a, b[\ :\ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{2.6.2}$$

si dice **formula dell'incremento finito***.*

Dim. — È un corollario del teorema di Rolle. Prendiamo

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ x \in [a, b].$$

Chiaramente h è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Inoltre

$$h(a) = f(a),\quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Dunque per il teorema di Rolle esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$. Ma

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

da cui la conclusione. ■

Ricordiamo la

Definizione 2.6.10. *Una funzione $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice* **lipschitziana** *su D se*

$$\exists\ L \geqslant 0,\ :\ |f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|,\ \forall x, y \in D.$$

Si scrive $f \in \mathrm{Lip}(D)$.

Il teorema di Lagrange ci fornisce immediatamente una caratterizzazione delle funzioni lipschitziane derivabili. Si ha la

Proposizione 2.6.11. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I. Allora*

$$f \in \mathrm{Lip}(I), \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ è limitata su } I.$$

Dim. — $\Longrightarrow$ Evidente: se f è lipschitziana allora

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leqslant L,\ \forall x, y \in I,\ x \neq y.$$

In altre parole i rapporti incrementali sono limitati. Ma allora

$$|f'(x)| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leqslant L,\ \forall x \in I.$$

$\Longleftarrow$ Supponiamo $|f'| \leqslant L$ su I. Presi $x, y \in I$ e applicato il teorema di Lagrange a f sull'intervallo $[x, y]$ si ottiene

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leqslant L|x-y|.$$

Siccome la costante L è indipendent da x, y abbiamo la conclusione. $\blacksquare$

2.6.4 Teorema di Cauchy

Il teorema di Cauchy è una generalizzazione del teorema di Lagrange e non ha un'interpretazione geometrica immediata. Verrà utilizzato in seguito per ricavare le cosiddette *regole di Hôpital* per il calcolo dei limiti.

Teorema 2.6.12 (Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$, con $g(a) \neq g(b)$ e $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Allora*

$$\exists\ \xi \in]a, b[\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{2.6.3}$$

Dim. — Prendiamo

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)),\ x \in [a, b].$$

Chiaramente h è ben definita, continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Inoltre $h(a) = f(a)$ e così pure $h(b) = f(a)$. Per il teorema di Rolle, quindi, esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = 0$. Ma

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

essendo $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$. $\blacksquare$

2.7 Segno della derivata e monotonia

Intuitivamente, quando la derivata $f'(x) > 0$ significa che la tangente al grafico è crescente mentre se $f'(x) < 0$ si ha il contrario. Siccome la retta tangente "assomiglia" al grafico di una funzione almeno vicino al punto in cui si calcola la derivata è naturale attendersi che tale proprietà sia ereditata dalla funzione stessa. Di fatto, con alcune precisazioni, è così e ciò è conseguenza della formula di Lagrange dell'incremento finito.

Teorema 2.7.1. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I (unilateralmente negli eventuali estremi). Allora*

$$f \text{ è crescente su } I \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \geqslant 0,\ \forall x \in I.$$

Analogamente

$$f \text{ è decrescente su } I \iff f'(x) \leqslant 0,\ \forall x \in I.$$

Se poi $f' > 0$ ($f' < 0$) su I allora f è strettamente crescente (decrescente) su I.

Dim. — $\Longrightarrow$ Supponiamo $f(x) \leqslant f(y)$ per ogni $x, y \in I$, $x \leqslant y$. Allora

$$f(x+h) \geqslant f(x),\ \forall h > 0, \implies f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0,$$

$$f(x+h) \leqslant f(x),\ \forall h < 0, \implies f'(x) = f'_-(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$$

in virtù della permanenza del segno nei limiti.

$\Longleftarrow$ Supponiamo ora $f' \geqslant 0$ su I e prendiamo $x, y \in I$, $x < y$. Allora l'intervallo $[x, y] \subset I$ (perché I è intervallo). Essendo f derivabile su I è ivi continua, quindi: f è sicuramente continua su $[x, y]$ e derivabile su $]x, y[$. Ma allora, per la formula di Lagrange dell'incremento finito (2.6.2) abbiamo che esiste un punto $\xi \in]x, y[$ tale che

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geqslant 0.$$

In altre parole: $f(x) \leqslant f(y)$ per ogni $x < y$. Se poi $f' > 0$ su I allora $f'(\xi) > 0$ dunque si ottiene $f(x) < f(y)$, cioè f è strettamente crescente. ■

Osservazione 2.7.2. *Si può avere che f è strettamente crescente su I senza che $f' > 0$.* L'esempio tradizionale è $f(x) = x^3$. Chiaramente è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$ ma $f'(0) = 0$. Ciò potrebbe far pensare che i punti dove $f' = 0$ devono essere comunque "isolati". Non è così: riflettiamo sulla seguente funzione

In particolare abbiamo il

Corollario 2.7.3. *Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, derivabile su I salvo (al più) che nel punto $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$ ma ivi continua (ovviamente se è derivabile anche in x_0 questa richiesta è superflua). Se*

$$f' \leqslant 0, \text{ per } x \in I \cap]-\infty, x_0[,\ f' \geqslant 0, \text{ per } x \in I \cap]x_0, +\infty[, \implies x_0 \text{ è punto di minimo per } f \text{ su } I.$$

Analogo enunciato per un punto di massimo.

Dim. — Se $f' \leqslant 0$ su $I \cap]-\infty, x_0[$ (che è ovviamente un intervallo) allora, in virtù del teorema precedente è ivi decrescente. Notiamo allora che se $x \in I$ e $x < x_0$ allora

$$f(x) \geqslant f(y),\ \forall\ x < y < x_0, \implies f(x) \geqslant \lim_{y \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Similmente $f(x) \geqslant f(x_0)$ per $x > x_0$. Se ne deduce

$$f(x) \geqslant f(x_0),\ \forall x \in I,$$

cioè x_0 è un minimo per f su I. ■

Osservazione 2.7.4. *È conveniente enunciare il corollario precedente in questa forma più debole piuttosto che richiedere la derivabilità su tutto I, questo perché spesso accade che gli estremanti sono punti di non derivabilità seppur di continuità. Si pensi alla funzione modulo.* ■

2.8 Derivata della funzione inversa

Talvolta l'intuizione fa cilecca: di primo acchito verrebbe da dire che se $f'(x_0) \neq 0$ allora la funzione f è monotona stretta almeno in un intorno di x_0 (e quindi almeno localmente sia invertibile). Non è così!

Esempio 2.8.1. *Sia*

$$f(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Si vede subito che $\exists f'(0) = 1$ *ma* f *non è monotona in nessun intorno di* 0. Infatti evidentemente f è

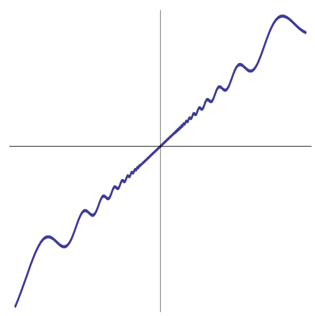


Figura 2.1: Grafico di f in I_0.

continua su tutto $\mathbb{R}$ e

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(1 + 2h \cos \frac{1}{h}\right) = 1.$$

D'altra parte, per $x \neq 0$,

$$f'(x) = 1 + 4x \cos \frac{1}{x} - 2 \sin \frac{1}{x},$$

e siccome per $x \longrightarrow 0$ si ha $4x \cos \frac{1}{x}$ mentre $2 \sin \frac{1}{x}$ oscilla tra -2 e 2 e dunque f' assumerà continuamente valori positivi e negativi man mano che ci si avvicina a $x = 0$. Per esempio:

$$f'\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right) = 1 - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1 + 2(-1)^k = \begin{cases} 3, & k \text{ pari}, \\ -1, & k \text{ dispari}. \end{cases}$$

Essendo f' continua su $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ ne deduciamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un intorno di $\frac{\pi}{2} + k\pi$ dove f è crescente (k pari) o decrescente (k) dispari. Dunque in nessun intorno di $x = 0$ si può affermare che f sia crescente o decrescente! ■

Osservazione 2.8.2. *Si noti peraltro che la funzione dell'esempio è derivabile in* $x = 0$ *ma la derivata non è continua, sebbene esista su tutto* $\mathbb{R}$. *Che una funzione sia continua tranne che in un punto è, evidentemente, un fatto del tutto normale. Più difficile è immaginare una funzione derivabile in ogni punto (cioè con retta tangente) la quale però sia discontinua. L'esempio precedente offre un caso di questo tipo.* ■

Tuttavia, se sappiamo che f' è anche continua allora tutto fila. Introduciamo a tal proposito la seguente

Definizione 2.8.3 (classe $\mathscr{C}^1$)**.** *Diciamo che $f \in \mathscr{C}^1(D)$ se f è derivabile su D con $f' \in \mathscr{C}(D)$.*

Teorema 2.8.4. *Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$, $f \in \mathscr{C}^1(D)$ tale che $f'(x_0) \neq 0$. Allora f è* **localmente invertibile** *con inversa continua e derivabile (e con derivata continua). Cioè: esistono un intorno I_{x_0} ed un intorno $J_{f(x_0)}$ tali che*

$$f : I_{x_0} \longrightarrow J_{f(x_0)},\ \text{è biiettiva},\ f^{-1} : J_{f(x_0)} \longrightarrow I_{x_0},\ \text{è } \mathscr{C}^1(J_{f(x_0)}),$$

e vale la formula

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},\ \forall y \in J_{f(x_0)}. \tag{2.8.1}$$

Se poi: D è un intervallo e $f' \neq 0$ su D allora f è globalmente invertibile su D con inversa $f^{-1} \in \mathscr{C}^1$ e vale, naturalmente, la (2.8.1).

Dim. — Supponiamo, ad esempio, $f'(x_0) > 0$. Per continuità avremo $f'(x) > 0$ per ogni x in un opportuno intorno I_{x_0} di x_0. Allora, in virtù del Teorema 2.7.1 abbiamo che $f \nearrow$ strettamente su I_{x_0}. Sia

$$J_{f(x_0)} := f(I_{x_0}).$$

Notiamo che: essendo f continua, J_{x_0} è un intervallo (teorema dei valori intermedi), contiene x_0 e sicuramente, essendo $f \nearrow$ stretta è un intorno di $f(x_0)$ (infatti: $f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$ e $x \in I_{x_0}$). Inoltre f è ovviamente invertibile (perché iniettiva per scelta di I_{x_0} e suriettiva per scelta di $J_{f(x_0)}$). Sia $f^{-1} : J_{f(x_0)} \longrightarrow I_{x_0}$ l'inversa. Per il teorema dell'inversa continua (Corollario 1.5.4) si ha che f^{-1} ànche continua. Calcoliamo la derivata in un punto $y \in J_{f(x_0)}$. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}.$$

Poniamo

$$x := f^{-1}(y),\ x + k := f^{-1}(y+h),\ \iff\ k = f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y).$$

Naturalmente $k > 0$ se $h > 0$ e essendo f^{-1} continua, per $h \longrightarrow 0$ si ha $k \longrightarrow 0$. Inoltre

$$h = y + h - y = f(x+k) - f(x) \neq 0,$$

per cui possiamo scrivere, per il cambiamento di variabili nei limiti,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{f(x+k) - f(x)} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{f(x+k)-f(x)}{k}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Da questa si deduce, in particolare, essendo $f^{-1} \in \mathscr{C}(J_{f(x_0)})$ e $f' \in \mathscr{C}(I_{x_0})$ che $(f^{-1})' \in \mathscr{C}(J_{f(x_0)})$, cioè $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J_{f(x_0)})$.

Infine: nel caso in cui D sia un intervallo e $f' \neq 0$ su D allora, essendo $f' \in \mathscr{C}(D)$ e D intervallo, necessariamente $f' > 0$ o $f' < 0$ su tutto D. Come sopra f è invertibile con inversa continua e la derivata di f^{-1} è data dalla (2.8.1). ■

2.8.1 Inverse delle funzioni elementari

Vediamo ora come si applica il Teorema 2.8.4 alla costruzione e proprietà delle inverse delle funzioni elementari.

Logaritmo

Sia $f = \exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$. Chiaramente $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ essendo $\exp' = \exp$. Inoltre $\exp' = \exp > 0$ su $\mathbb{R}$. Ne segue che exp è globalmente invertibile (lo si sa già con le proprietà degli esponenziali a dire il vero!) e, come noto, la funzione inversa si chiama *logaritmo* $\exp^{-1} =: \log :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Per il teorema 2.8.4 si ha che $\log \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[)$ e

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y},\ \forall y \in]0,+\infty[.$$

Arcoseno, Arcocoseno

Completiamo le proprietà fondamentali delle funzioni elementari.

Teorema 2.8.5. *Esiste*

$$\frac{\pi}{2} := \inf\{x > 0\ :\ \cos x = 0\}.$$

Inoltre sin $\nearrow$ *strettamente su* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cos $\searrow$ *strettamente su* $[0,\pi]$. *Risulta inoltre che* cos *e* sin *sono funzioni periodiche di periodo* 2π*.*

Dim. — Ricordiamo che

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots.$$

Evidentemente $\cos 0 = 1$. Notiamo poi che

$$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}.$$

Ora osserviamo che posto $a_n := \frac{2^{2n}}{(2n)!}$ risulta $a_{n+1} < a_n$. Infatti

$$a_{n+1} < a_n, \iff \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{2^{2n}}{(2n)!}, \iff \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} < 1,$$

vera per ogni $n \geqslant 3$ (visto che in tal caso $(2n+2)(2n+1) \geqslant 8 \cdot 7$). Se ne conclude che la somma è negativa e quindi $\cos 2 < -\frac{1}{3} < 0$. Essendo cos continua per il teorema degli zeri esiste almeno uno zero nell'intervallo $]0,2[$. Quindi il numero $\frac{\pi}{2}$ è ben definito e positivo: infatti per continuità, essendo $\cos 0 = 1$, $\cos x > 0$ per x in un intorno di 0. Evidentemente poi $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Ne segue che

$$\cos x > 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

e quindi, per parità di cos, su tutto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Essendo poi

$$\sin' = \cos, \implies \sin' > 0 \text{ su } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \implies \sin \nearrow \text{ strettamente su } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Per le formule di addizione abbiamo che

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}.$$

Ma $\cos\frac{\pi}{2} = 1$ e siccome $\cos^2 + \sin^2 = 1$ si deduce $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$, ma essendo $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ se ne ricava $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. In particolare:

$$\sin x > 0,\ \forall x \in]0,\pi[, \implies \cos' = -\sin < 0,\ \text{su }]0,\pi[, \implies \cos \searrow \text{ strettamente su } [0,\pi].$$

L'ultima affermazione segue nuovamente dalle formule di addizione. ■

Dunque: per il teorema dell'inversa continua (teorema 1.5.4) si ha che $f^{-1} =: \arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è ben definita e continua ed è anche $\mathscr{C}^1$ su $]-1,1[$ per il teorema 2.8.4. Per la (2.8.1) abbiamo

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Ora: per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si ha $\cos x > 0$, dunque

$$\cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}, \implies \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ \forall y \in]-1,1[.$$

Similmente si procede con l'arcocoseno. Come dimostrato, la funzione $\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ è strettamente monotona, dunque iniettiva ed anche suriettiva. È pertanto invertibile con inversa continua $\cos^{-1} =: \arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$. Su $]0,\pi[$ la funzione cos soddisfa anche le ipotesi del teorema di inversione 2.8.4: ne segue che $\arccos \in \mathscr{C}^1(]-1,1[)$ e

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = -\frac{1}{\sin(\arccos y)}.$$

Siccome $\sin x > 0$ per $x \in]0,\pi[$ possiamo scrivere

$$\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2}, \implies \arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos y))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ \forall y \in]-1,1[.$$

Arcotangente

Consideriamo la funzione $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$. Su tale intervallo $\tan \in \mathscr{C}$ e

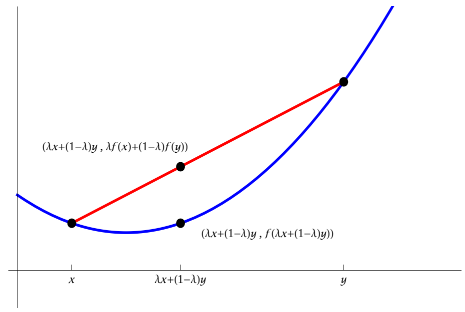
$$\tan'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} \equiv 1 + (\tan x)^2 > 0, \ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

dunque tan $\nearrow$ strettamente. Essendo anche $\tan \in \mathscr{C}^1\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ si ha che $\arctan := \tan^{-1} \in \mathscr{C}^1$, dove $\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Inoltre

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1+y^2}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

2.9 Convessità

Osservando il grafico di una funzione tracciata a mano e "senza spigoli" indubbiamente la prima cosa che si nota è l'andamento monotono a tratti. Abbiamo visto come la derivata sia un utile strumento per identificare questo comportamento attraverso lo studio del segno della stessa. Immediatamente dopo viene un'altra proprietà qualitativa che potremmo volgarmente chiamare "pancia" o, più matematicamente, curvatura del grafico. Si nota infatti che questo può essere curvato "verso l'alto" oppure "verso il basso". Vogliamo ora introdurre una definizione precisa di cosa intendiamo con ciò. L'idea è abbastanza semplice: fissiamo due punti x, y nel dominio della funzione. Diremo che f è *convessa* ("pancia in su") se la corda che congiunge i punti $(x, f(x))$ ed $(y, f(y))$ sta sopra al grafico di f tra x ed y.
Analiticamente possiamo descrivere questa situazione tramite la

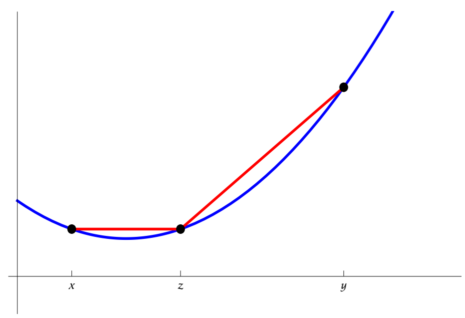


Definizione 2.9.1. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Diciamo che f è* **convessa** *su I se*

$$\forall x, y \in I, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \ \forall \lambda \in [0,1]. \tag{2.9.1}$$

Se invece vale il $\geqslant$ per ogni coppia $x, y \in I$ diciamo che f è **concava** *su I.*

La convessità è una proprietà ricca di senso geometrico. Per esempio si può notare che nel caso di una funzione convessa le corde hanno pendenza crescente spostando i punti x ed y verso destra. Ciò è suggerito per esempio dalla figura seguente.



Proposizione 2.9.2. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Allora f è convessa su I se e solo se*

$$\forall x, z, y \in I, \ x < z < y, \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \tag{2.9.2}$$

Dim. — $\Longrightarrow$ Supponiamo f convessa. Notiamo che la (2.9.2) può essere riscritta, equivalentemente, nella forma

$$f(z)\left(\frac{1}{z-x} + \frac{1}{y-z}\right) \leqslant \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(z), \quad \Longleftrightarrow \quad f(z)\frac{y-x}{(z-x)(y-z)} \leqslant \frac{1}{z-x} f(x) + \frac{1}{y-z} f(y),$$

cioè

$$f(z) \leqslant \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y). \tag{2.9.3}$$

Senza dubbio questa forma è criptica ma è di fatto la (2.9.1). Infatti. Sia $\lambda := \frac{y-z}{y-x}$. Essendo $x < z < y$ evidentemente $\lambda \in [0,1]$. Inoltre

$$1 - \lambda = 1 - \frac{y-z}{y-x} = \frac{y - x - (y-z)}{y-x} = \frac{z-x}{y-x}.$$

Pertanto la (2.9.3), che è quanto si deve mostrare, può essere riscritta nella forma

$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ora basta osservare che

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y = \frac{xy - xz + zy - xy}{y-x} = z,$$

per cui la conclusione segue dalla (2.9.1).

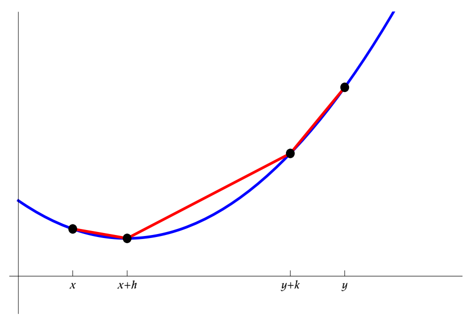
$\Longleftarrow$ Praticamente è già inclusa nel ragionamento precedente. Assumiamo valga la (2.9.3), che è equivalente alla (2.9.2). Se $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ con $x < z < y$ allora

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x}, \text{ e } 1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}.$$

Ma allora la (2.9.1) è esattamente la (2.9.3). ■

2.9.1 Legame tra Convessità e derivata prima

Ma cosa c'entra la derivata? Semplice: immaginiamo ora di muovere punti prendendo $x < x+h < y+k < y$ (h, k verranno fatti tendere a zero, $h \longrightarrow 0+$, $k \longrightarrow 0-$).



Allora, in virtù della proposizione precedente

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \frac{f(y+k)-f(x+h)}{(y+k)-(x+h)} \leqslant \frac{f(y+k)-f(y)}{k},$$

Dimenticando il termine di mezzo si ha subito la

Teorema 2.9.3. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f convessa su I. Allora*

$$\text{se } x < y, \text{ e } \exists\ f'_+(x),\ f'_-(y), \quad \Longrightarrow \quad f'_+(x) \leqslant f'_-(y).$$

In particolare:

se f è derivabile su I allora f è convessa se e solo se $f' \nearrow$ su I.

Dim. — Per la prima affermazione basta passare al limite nella relazione che precede la proposizione. Da questa si deduce subito che se f è derivabile e convessa allora $f' \nearrow$. Viceversa: supponiamo $f' \nearrow$ e proviamo che vale la

(2.9.2). Fissiamo $x < z < y$. Allora, per il teorema di Lagrange applicato sui due intervalli $[x, z]$ e $[z, y]$ abbiamo che

$$\exists\ \xi \in]x, z[\ :\ f(z) - f(x) = f'(\xi)(z - x),\quad \exists\ \eta \in]z, y[\ :\ f(y) - f(z) = f'(\eta)(y - z).$$

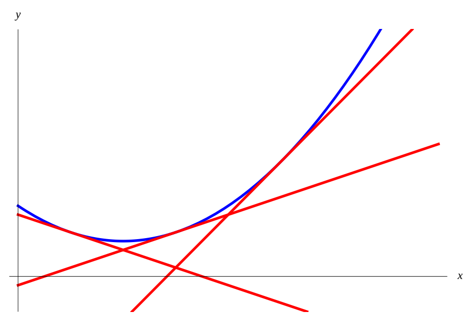
Ma allora

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi) \leqslant f'(\eta) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

da cui la (2.9.2). ■

Osservazione 2.9.4. *Ovviamente si ha un enunciato analogo per le funzioni concave: in questo caso, per esempio,* $f' \searrow$. ■

Nel caso in cui la funzione sia derivabile in un intervallo I, la convessità può essere caratterizzata anche in altro modo in connessione con le tangenti come, nuovamente, suggerisce l'intuizione: *il grafico della funzione giace "sopra" ogni tangente.*



Precisamente:

Proposizione 2.9.5. *Sia* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivabile su* I *intervallo. Allora* f *è convessa su* I *se e solo se*

$$f(y) \geqslant f(x) + f'(x)(y - x),\ \forall y \in I,\ \forall x \in I. \tag{2.9.4}$$

Dim. — $\Longrightarrow$ Prendiamo la (2.9.2) con i punti $x < x + h < y$. Abbiamo

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{x} \leqslant \frac{f(y) - f(x + h)}{y - x - h}.$$

Mandando $h \longrightarrow 0+$ e ricordato che se f ̀derivabile allora è anche continua, si ottiene subito

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0+} \frac{f(y) - f(x + h)}{y - x - h} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

che altro non è che la (2.9.4).
$\Longleftarrow$ Proviamo la (2.9.2). Siano $x < z < y$. Per ipotesi allora $(x - z < 0)$

$$\begin{matrix} f(x) \geqslant f(z) + f'(z)(x - z), \\[2ex] f(y) \geqslant f(z) + f'(z)(y - z), \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leqslant f'(z) \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z},$$

che è appunto la (2.9.2). ■

2.9.2 Legame tra Convessità e derivata seconda

Ma come verificare, praticamente, se una data funzione f è convessa o meno? Abbiamo visto che se f è derivabile su I intervallo allora

$$f \text{ convessa} \iff f' \nearrow \text{ su } I.$$

A questo punto, pensando f' come una nuova funzione potremmo applicare ad essa i metodi visti nelle sezioni precedenti relativi al legame tra monotonia e segno della derivata prima. Naturalmente dovremo studiare il segno della derivata di f', che viene detta *derivata seconda.*

Definizione 2.9.6 (derivata seconda). *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intorno I_{x_0} di $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$. È definita pertanto una funzione $f' : I_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è* **due volte derivabile in** *$x_0 \in D$ se*

$$\exists\ (f')'(x_0) =: f''(x_0).\ (\textit{derivata seconda nel punto } x_0).$$

Pertanto, il combinato disposto dei Teoremi 2.7.1 e 2.9.3 produce immediatamente il

Teorema 2.9.7. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo. Supponiamo f due volte derivabile su I. Allora*

$$f \text{ è convessa su } I \iff f'' \geqslant 0 \text{ su } I.$$

Dim. — Evidente. ■

Definizione 2.9.8 (punto di flesso). *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo con $x_0 \in \mathrm{Int}(I)$, derivabile in x_0. Se f èconvessa (concava) per $x < x_0$ e concava (convessa) per $x > x_0$ si dice che x_0 è un* **punto di flesso per** *f.*

Evidentemente, sulla base del teorema precedente,

Corollario 2.9.9. *Se f è due volte derivabile su I e cambia di segno nel punto x_0, allora il punto x_0 è un punto di flesso.*

2.9.3 Le funzioni convesse sono lipschitziane

Il fatto che i rapporti incrementali siano crescenti per una funzione convessa (o concava) sembra comportare naturalmente che essa sia lipschitziana. Occorre tuttavia essere cauti.

Esempio 2.9.10. *La funzione $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, è concava ma non lipschitziana su $[0, +\infty[$.*
Infatti. Possiamo facilmente vedere che

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall x > 0,$$

da cui facilmente si deduce che $f' \searrow$ su $]0, +\infty[$. Dunque f è concava su $]0, +\infty[$. Ora, per una funzione derivabile si è visto che (Proposizione 2.6.11) nel caso di f derivabile su I, allora $f \in \mathrm{Lip}(I)$ sse f' è limitata. Ma questo è evidentemente impossibile nel caso attuale. ■

Quello che accade nell'Esempio è che la limitazione superiore è $+\infty$ in $0+$. Tuttavia notiamo che non appena restringiamo la medesima funzione a $[a, +\infty[$ con $a > 0$ la conclusione è vera. Questo fatto vale in generale:

Teorema 2.9.11. *Sia $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f convessa (o concava) su I. Allora*

$$f \in \mathrm{Lip}([a,b]),\ \forall [a,b] \subset \mathrm{Int}(I).$$

Dim. — Siccome $[a,b] \subset \mathrm{Int}(I)$, in particolare esistono $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < a < b < \beta$. Fissiamo allora $x, y \in [a,b]$. Per la (2.9.2) abbiamo allora

$$m := \frac{f(a) - f(\alpha)}{a - \alpha} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(y)}{b - y} \leqslant \frac{f(\beta) - f(b)}{\beta - b} =: M,$$

cioè

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leqslant \max\{|m|, |M|\} =: L. \quad \blacksquare$$

2.10 Lo studio di funzione

Un classico problema di applicazione del calcolo differenziale è lo studio dell'andamento di una funzione, con l'obiettivo di tracciarne un grafico qualitativo. In genere si tratta di un problema composto da molti passi che devono produrre un risultato coerente. Normalmente si procede per gradi successivi che possiamo raggruppare in:

- *informazioni preliminari* — con ciò si intende: la determinazione del dominio della funzione, l'eventuale segno e zeri (non sempre è possibile risolvere la disequazione $f \geqslant 0$), il comportamento agli estremi del dominio di definizione (limiti e asintoti, di cui parleremo appena di seguito), continutià della funzione, eventuali punti dove la funzione è prolungabile con continuità;

- *studio della monotonia* — con ciò si intende: derivabilità della funzione, comportamento della derivata agli estremi del proprio dominio di definizione (che, bisogna ricordarlo, **è sempre un sottoinsieme del dominio della funzione**, sebbene magari l'espressione analitica della derivata sia definita anche altrove), lo studio del segno della derivata, la deduzione degli intervalli di monotonia e degli estremanti, ivi compresa la natura locale o globale degli stessi;

- *studio della convessità* — con ciò si intende: derivabilità di f', studio del segno della derivata seconda, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di flesso.

Una volta raccolte tutte queste informazioni in genere si può procedere a disegnare un grafico qualitativo dell'andamento della funzione.

È utile precisare la nozione di *asintoto*. Intuitivamente, un asintoto è una retta cui somiglia il grafico della funzione. Si possono avere due situazioni: asintoti al finito (ed in questo caso possono essere *asintoti verticali*) oppure asintoti all'infinito (e si parla di *asintoti orizzontali* o *asintoti obliqui*). Vediamo le definizioni:

Definizione 2.10.1. *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (anche unilateralmente) si dice allora che la retta $x = x_0$ è* **asintoto verticale** *per f.*

Definizione 2.10.2. *Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) =: \ell \in \mathbb{R}$ (o a $-\infty$) si dice che la retta $y = \ell$ è* **asintoto orizzontale** *per f.*

Definizione 2.10.3. *Se* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ *(o a $-\infty$) si dice che la retta* $y = mx + q$ *è* **asintoto obliquo** *per* f *se*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

In quest'ultimo caso è utile capire come trovare m e q naturalmente. Notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0.$$

Ma

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m, \quad \Longleftrightarrow \quad m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Notiamo che tale limite deve essere necessariamente diverso da zero, altrimenti $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + q)) = \pm\infty$. Una volta trovato (ammesso esista finito e diverso da zero il limite precedente) m, q può essere ricavato per differenza come

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx).$$

In conclusione: affinché $y = mx + q$ sia asintoto obliquo a $+\infty$ occorre che

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) =: q \in \mathbb{R}. \tag{2.10.1}$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 2.10.4. *Data la funzione*

$$f(x) = \arctan(e^x - 1) + \log |e^x - 4|$$

i) trovarne l'insieme di definizione;

ii) calcolare limiti ed eventuali asintoti;

iii) determinare crescenza e decrescenza;

iv) determinare eventuali punti di massimo e minimo, locali e globali;

v) abbozzarne il grafico.

Sol. — Chiaramente $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ e^x - 4 \neq 0\} = \{x \neq \log 4\} =]-\infty, \log 4[\cup] \log 4, +\infty[$.
ii) Abbiamo che

$$f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} (\arctan(e^x - 1) + \log |e^x - 4|) = \arctan(-1) + \log |-4| = -\frac{\pi}{4} + \log 4,$$

da cui la retta $y = -\frac{\pi}{4} + \log 4$ è asintoto orizzontale.

$$f(+\infty) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - 1)}{x} \overset{y=e^x-1}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{\log(y + 1)} = 1.$$

Ci può essere un asintoto obliquo. In tal caso $y = mx + q$ dove $m = 1$ e

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\arctan(e^x - 1) + \log |e^x - 4| - x) = \frac{\pi}{2} + \lim_{x\to+\infty} \log \frac{e^x - 4}{e^x} = \frac{\pi}{2},$$

(si è usato il fatto che $x = \log e^x$). Dunque la retta $y = x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Resta il comportamento in $x = \log 4$. Poiché $|e^x - 4| \longrightarrow 0+$ per $x \to \log 4$ abbiamo che

$$\lim_{x \to \log 4} f(x) = -\infty.$$

Dunque la retta $x = \log 4$ è asintoto verticale per f.
iii) f è continua e derivabile su tutto il proprio dominio come si vede facilmente. Si ha che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x}{1+(e^x-1)^2} + \frac{1}{|e^x-4|}\operatorname{sgn}(e^x-4)e^x = e^x\left(\frac{1}{1+(e^x-1)^2} + \frac{1}{e^x-4}\right) \\ &= e^x\frac{e^x-4+1+(e^x-1)^2}{(1+(e^x-1)^2)(e^x-4)} = e^x\frac{e^x-4+1+e^{2x}-2e^x+1}{(1+(e^x-1)^2)(e^x-4)} = e^x\frac{e^{2x}-e^x-2}{(1+(e^x-1)^2)(e^x-4)} \end{aligned}$$

Da ciò si evince che

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{2x}-e^x-2}{e^x-4} \geqslant 0.$$

Ora: se $y = e^x$, $y^2 - y - 2 \geqslant 0$, tenuto conto che $\Delta = (-1)^2 + 8 = 9 > 0$ se e solo se $y \leqslant \frac{1-3}{2} = -1$, ovvero $y \geqslant \frac{1+3}{2} = 2$, dunque se e solo se $e^x \leqslant -1$ (mai) o se $e^x \geqslant 2$, cioè $x \geqslant \log 2$. Mentre $e^x - 4 \geqslant 0$ se e solo se $x \geqslant \log 4$. Abbiamo pertanto la seguente tabella per i segni di f':

	$-\infty \quad \log 2$	$\log 2 \quad \log 4$	$\log 4 \quad +\infty$
$\operatorname{sgn}(e^{2x}-e^x-2)$	-	$+$	$+$
$\operatorname{sgn}(e^x-4)$	-	-	$+$
$\operatorname{sgn}(f')$	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Essendo f continua in $x = \log 2$ se ne deduce, dalla tabella precedente, che $x = \log 2$ è punto di massimo locale (relativo). Non ci sono estremanti assoluti perché f è illimitata sia superiormente che inferiormente.
v) Grafico:

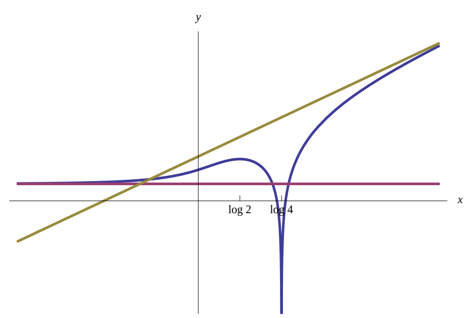


Figura 2.2: Il grafico di f.

Esempio 2.10.5. *Sia*

$$f(x) = \frac{x\log x}{(\log x - 1)^2}.$$

i) Determinare il dominio di f, il segno ed il comportamento agli estremi dello stesso (compresi eventuali asintoti).

ii) *Dire dove f è continua e dove è derivabile e calcolare f'. Esistono punti esterni al dominio di f nei quali f è prolungabile con continuità (anche unilaterale)? In detti eventuali punti, è vero che il prolungamento di f così ottenuto è anche derivabile?*

iii) *Determinare gli eventuali estremanti precisandone la natura (se assoluti o relativi).*

iv) *Con le informazioni a disposizione tracciare un grafico qualitativo di f.*

Sol. — **i)** Anzitutto, chiaramente $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ \log x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x \neq e\} =]0, e[\cup]e, +\infty[$. Il segno è immediato:

$$f \geqslant 0, \iff \log x \geqslant 0, \iff x \geqslant 1,$$

e $f = 0$ se e solo se $\log x = 0$, cioè $x = 1$. Dobbiamo ora studiare il comportamento di f in $0+$, $e\pm$, $+\infty$. È opportuno ricordare i seguenti limiti notevoli (confronto potenze esponenziali):

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0,\ (\forall \alpha > 0,\ \forall \beta),\quad \lim_{x\to +\infty} x^\alpha |\log x|^\beta = +\infty,\ (\forall \alpha > 0,\ \forall \beta).$$

Abbiamo che

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} \frac{x \log x}{(\log x - 1)^2} \stackrel{\frac{0-}{+\infty}}{=} 0-,$$

$$f(e\pm) = \lim_{x\to e\pm} \frac{x \log x}{(\log x - 1)^2} \stackrel{\frac{e}{0+}}{=} +\infty,$$

$$f(+\infty) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \log x}{(\log x - 1)^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\log x} \frac{1}{\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)^2}_{\longrightarrow 1}} = +\infty,$$

da cui concludiamo che: la retta $x = e$ è asintoto verticale per f e potrebbe inoltre esserci un asintoto obliquo $y = mx + q$ a $+\infty$ (con $m \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$). Essendo

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{(\log x - 1)^2} = 0,$$

ne segue che f non ha asintoto a $+\infty$.
ii) È immediato osservare che $f \in C(D(f))$ utilizzando il fatto che f è ottenuta componendo funzioni continue su $D(f)$. Inoltre, per le regole di calcolo, per $x \neq e$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{x \log x}{(\log x - 1)^2}\right)' &= \frac{\left(\log x + x\frac{1}{x}\right)(\log x - 1)^2 - x \log x \left(2(\log x - 1)\frac{1}{x}\right)}{(\log x - 1)^4} \\ &= \frac{(\log x + 1)(\log x - 1) - 2 \log x}{(\log x - 1)^3} \\ &= \frac{(\log x)^2 - 2 \log x - 1}{(\log x - 1)^3}. \end{aligned}$$

Osserviamo che f è prolungabile per continuità anche in 0, ponendo $f(0) = 0$ (il prolungamento risulta continuo da destra). Vediamo se tale prolungamento è anche derivabile. Osservato che

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{(\log x)^2 - 2 \log x - 1}{(\log x - 1)^3} \stackrel{\xi := \log x}{=} \lim_{\xi\to -\infty} \frac{\xi^2 - 2\xi - 1}{(\xi - 1)^3} = 0-,$$

come si vede subito, per un noto corollario della regola di Hôpital segue che il prolungamento è anche derivabile in $x = 0$ da destra con derivata nulla.
iii) Studiamo anzitutto il segno di f'. Poiché $f' = \frac{N}{D}$ andiamo a studiare il segno di N e D separatamente. $N(x) = (\log x)^2 - 2\log x - 1$, per cui posto $\xi = \log x$ abbiamo che $\xi^2 - 2\xi - 1 \geqslant 0$ se e solo se

$$\xi \leqslant \frac{2-\sqrt{4+4}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}, \quad \text{oppure} \quad \xi \geqslant 1+\sqrt{2},$$

ovvero, in termini di x, se e solo se $x \leqslant e^{1-\sqrt{2}}$ oppure $x \geqslant e^{1+\sqrt{2}}$. Per quanto riguarda $D(x) = (\log x - 1)^3$ abbiamo che $D(x) > 0$ se e solo se $\log x > 1$ cioè se e solo se $x > e$. Mettendo tutto in una tabella (ed osservato che $1-\sqrt{2} < 0 < 1 < 1+\sqrt{2}$)

	$0 \quad e^{1-\sqrt{2}}$	$e^{1-\sqrt{2}} \quad e$	$e \quad e^{1+\sqrt{2}}$	$e^{1+\sqrt{2}} \quad +\infty$
$\mathrm{sgn}(N)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}(D)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}(f')$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Ora: f è continua nel punto $x = e^{1-\sqrt{2}}$, decrescente a sinistra, crescente a destra (almeno su tutto $[e^{1-\sqrt{2}}, e[$): pertanto, per un noto teorema, $x = e^{1-\sqrt{2}}$ è punto di minimo locale. Similmente lo è anche $x = e^{1+\sqrt{2}}$. La funzione non può avere massimi assoluti (perché illimitata superiormente), mentre vediamo che $x = e^{1-\sqrt{2}}$ è minimo assoluto. È infatti, per il discorso fatto sopra, il minimo sull'intervallo $]0, e[$. Su $]e, +\infty[$ abbiamo ancora un minimo assoluto in $x = e^{1+\sqrt{2}}$ dove, per lo studio del segno, sappiamo che f è positiva mentre $f(e^{1-\sqrt{2}}) < 0$. È immediato ora concludere sulla natura di $x = e^{1-\sqrt{2}}$.
iv) Grafico:

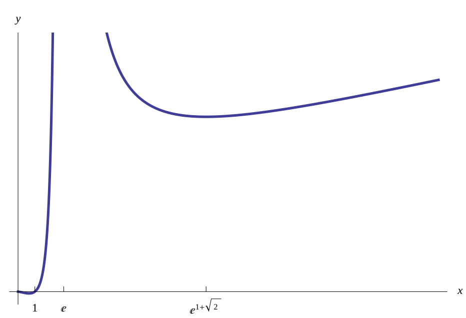


Figura 2.3: Il grafico di f.

Lo studio di funzione può essere utile nella risoluzioni di disequazioni non elementari.

Esempio 2.10.6. *Risolvere la disequazione*

$$2x\log x + 1 \geqslant x^2.$$

Sol. — Consideriamo la funzione $f(x) := 2x\log x + 1 - x^2$. Chiaramente $D(f) =]0, +\infty[$. Inoltre

$$f(0+) = \lim_{x\to 0+} \left(2x\log x + 1 - x^2\right) = 1,$$

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\log x + 1 - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} -x^2\left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\log x\right) = -\infty$$

essendo $\log x \ll_{+\infty} x$. Ora, f è continua e derivabile su $]0,+\infty[$ e

$$f'(x) = 2\log x + 2x\frac{1}{x} - 2x = 2\log x + 2 - 2x = 2\left(\log x + 1 - x\right).$$

Dunque

$$f' \geqslant 0, \iff g(x) := \log x - x + 1 \geqslant 0.$$

Studiamo il segno di g studiando g come funzione. Abbiamo $g(0+) = -\infty$ e $g(+\infty) - \infty$. Inoltre g è continua e derivabile su $]0,+\infty[$ e

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

Pertanto

$$g'(x) \geqslant 0, \iff \frac{1}{x} - 1 \geqslant 0, \iff \frac{1}{x} \geqslant 1, \overset{(x>0)}{\iff} x \leqslant 1.$$

Essendo g continua, $x = 1$ è punto di massimo globale per g. Essendo $g(1) = 0$ se ne deduce $g \leqslant 0$ per ogni $x \in]0,+\infty[$ (e $g(x) = 0$ sse $x = 1$). Di seguito il grafico sommario di g (non ci interessano ovviamente troppi dettagli visto che dobbiamo solo determinarne il segno). Dunque $f' \leqslant 0$ su $]0,+\infty[$ (e $f' = 0$ sse $g = 0$ sse $x = 1$).

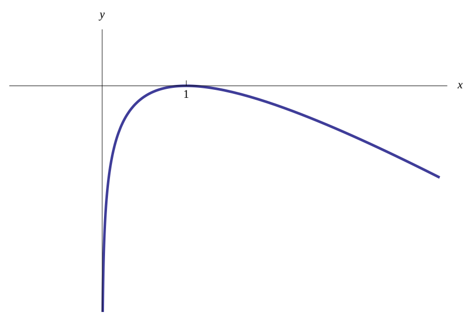


Figura 2.4: Il grafico di g.

Ne segue che $f \searrow$ stretta. Essendo $f(0+) = 1$, $f(+\infty) = -\infty$ ne segue che

$$\exists!\ \xi \in]0,+\infty[\ :\ f(\xi) = 0, \implies f(x) > 0 \text{ su }]0,\xi[,\ f(\xi) = 0,\ f(x) < 0 \text{ su }]\xi,+\infty[.$$

Essendo $f(1) = 0$ come si vede immediatamente, si conclude che $f(x) > 0$ sse $x \in]0,1[$. Segue il grafico sommario di f. ■

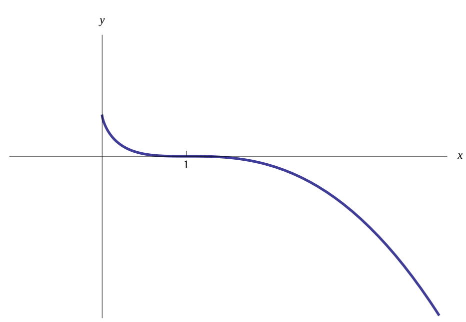


Figura 2.5: Il grafico di f.

2.11 Regole di Hôpital

Un tipico problema di calcolo di limiti è costituito da limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

ove $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (eventualmente, se $x_0 \in \mathbb{R}$, il limite può essere unilaterale) e si presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Le regole di Hôpital permettono di trasformare questo limite in un altro limite (sotto certe condizioni) che talvolta è più semplice da calcolare. Cominciamo dal caso

Teorema 2.11.1 (prima regola, $\frac{0}{0}$ al finito)**.** *Siano $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funzioni infinitesime per $x \longrightarrow x_0+$ (o x_0- o x_0), dove $x_0 \in \mathrm{Acc}(D \cap]x_0, +\infty[)$. Supponiamo inoltre che*

i) f, g siano derivabili in $]x_0, +\infty[\cap D$;

ii) $g(x),\ g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]x_0, x_0 + r[\cap D$ per qualche $r > 0$;

iii) esista il

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Dim. — Siccome f, g sono infinitesime per $x \longrightarrow x_0+$ possiamo definirle anche in x_0 assegnando ad entrambe il valore 0 di modo che siano ivi continue. Sia $[x_0, x_0 + r]$ tale che, dunque,

$$f, g \in \mathscr{C}([x_0, x_0 + r]),\ \ f, g \text{ derivabili su }]x_0, x_0 + r[,\ \ g' \neq 0 \text{ su }]x_0, x_0 + r[.$$

Sia $x \in]x_0, x_0 + r[$ e osserviamo che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \overset{\underset{\mathrm{Cauchy}}{} \ 2.6.12}{=} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)},$$

dove $\xi_x \in]x_0, x[$. Per $x \longrightarrow x_0+$ si ha che $\xi_x \longrightarrow x_0+$. Ma allora, in virtù della iii),

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \ell. \quad \blacksquare$$

Esempio 2.11.2. *Calcolare il*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin(x^3)}.$$

Sol. — Ovviamente potremmo utilizzare facilmente il metodo degli sviluppi asintotici. Applichiamo tuttavia la regola di Hôpital. Formalmente siano $f(x) := \sinh x - x$, $g(x) := \sin(x^3)$. Chiaramente f e g sono infinitesime per $x \longrightarrow 0$ e sono anche funzioni derivabili su tutto $\mathbb{R}$ (quindi in particolare in un intorno di 0). Inoltre

$$g'(x) = 3x^2 \cos(x^3),$$

da cui $g' = 0$ sse $x = 0$ oppure $x^3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare $g' \neq 0$ in un intorno di 0 eccetto $x = 0$, il che verifica l'ipotesi ii). A questo punto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{3x^2\cos(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos(x^3)} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ma allora, in virtù della prima regola, esiste anche il limite proposto e vale $\frac{1}{6}$. ■

Osservazione 2.11.3. Nella pratica, la regola di applica scrivendo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

indicando così che l'uguaglianza è valida se sono valide le ipotesi della regola. **Non va mai dimenticato che l'esistenza del limite del rapporto delle derivate implica l'esistenza del limite del rapporto, ma non vale il viceversa!** Anzi: il limite del rapporto delle derivate può non esistere ma il limite del rapporto iniziale esistere benissimo. Ecco un esempio semplice. Si consideri

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Immediatamente si riconosce che si tratta di una forma $\frac{0}{0}$ e che il limite è 0 poiché $\sin x = x + o(x)$ e quindi

$$\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x + o(x)} = \frac{x\sin\frac{1}{x}}{1 + \frac{o(x)}{x}} \longrightarrow 0,$$

per la regola limitata×infinitesima=infinitesima. Tuttavia se applichiamo la regola di Hôpital otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = -\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x},$$

che chiaramente non esiste. Non c'è tuttavia alcuna contraddizione: la regola afferma infatti che se il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste **allora** esiste (ed è uguale ad esso) anche il $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Nel caso in cui il primo non esista (finito o infinito) non si può dedurre niente circa il limite iniziale. ■

Osservazione 2.11.4. *La regola di Hôpital può essere anche applicata iterativamente.* Per esempio: calcoliamo il

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Nessuno dei due termini ammette limite singolarmente. Tuttavia chiaramente

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - 1 - \log x}{(x-1)\log x}$$

si presenta come una forma $\frac{0}{0}$. Ora, applicando la prima regola,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x}}{\log x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x\log x + x - 1} \overset{\frac{0}{0},\,H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log x + 1 + 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + \log x} = \frac{1}{2}.$$

L'esistenza dell'ultimo limite implica l'esistenza di quello precedente con egual valore, il quale a sua volta implica l'esistenza del primo con il medesimo valore. ■

Teorema 2.11.5 (prima regola, $\frac{\infty}{\infty}$ al finito)**.** *Siano $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funzioni infinite per $x \longrightarrow x_0+$ (o x_0- o x_0), dove $x_0 \in \mathrm{Acc}(D \cap]x_0, +\infty[)$. Supponiamo inoltre che*

i) *f, g siano derivabili in $]x_0, +\infty[\cap D$;*

ii) *$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]x_0, x_0 + r[\cap D$ per qualche $r > 0$;*

iii) *esista il*

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Dim. — La dimostrazione è un filo più delicata della precedente. Supponiamo ad esempio $\ell \in \mathbb{R}$. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$ troviamo $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| \leqslant \varepsilon, \ \forall x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon) =: x_\varepsilon \tag{2.11.1}$$

Allora

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} + \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} - \ell \right| \leqslant \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} - \ell \right|.$$

Notiamo che $g(x) \neq g(x_\varepsilon)$ (altrimenti, per il teorema di Rolle, si avrebbe $g'(\xi) = 0$ per qualche $\xi \in]x, x_\varepsilon[$ e possiamo supporre che $g' \neq 0$ in $]x_0, x_\varepsilon[$). Applicando il teorema di Cauchy al secondo termine

$$\left| \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi_\varepsilon)}{g'(\xi_\varepsilon)} - \ell \right| \leqslant \varepsilon$$

poiché $\xi_\varepsilon \in]x, x_\varepsilon[$ e vale la (2.11.1). Circa il primo termine, notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} &= \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} \left(\frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} - 1 \right) \\ &= \frac{f'(\xi_\varepsilon)}{g'(\xi_\varepsilon)} \left(\frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} - 1 \right), \end{aligned}$$

e quindi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} \right| = \left| \frac{f'(\xi_\varepsilon)}{g'(\xi_\varepsilon)} \right| \left| \frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant (|\ell| + \varepsilon) \left| \frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} - 1 \right|$$

e siccome, evidentemente

$$\frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} = \frac{1}{1 - \frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}} \left(1 - \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} \right) \longrightarrow 1, \ x \longrightarrow x_0+$$

avremo che

$$(|\ell| + \varepsilon) \left| \frac{f(x)}{f(x) - f(x_\varepsilon)} \frac{g(x) - g(x_\varepsilon)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon, \ \forall x_0 < x < x_0 + \widetilde{\delta}(\varepsilon).$$

Prendendo $\widehat{\delta}(\varepsilon) := \min\{\delta(\varepsilon), \widetilde{\delta}(\varepsilon)\}$ abbiamo infine che

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| \leqslant 2\varepsilon, \ \forall x_0 < x < x_0 + \widehat{\delta}(\varepsilon).$$

E questa è appunto la conclusione. ■

Esercizio 2.11.6. *Adattare la dimostrazione al caso $\ell = \pm\infty$.*

Osservazione 2.11.7. *Sebbene si possa applicare iterativamente, la regola di Hopital va applicata con cognizione di causa, altrimenti è una regola "stupida". Il rischio è di iterare senza fine l'applicazione della stessa.* Se per esempio scriviamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x} \overset{\frac{0}{0},\,H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \overset{\frac{0}{0},\,H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^4} = \ldots$$

si vede che questo procedimento iterativo comporta l'aumento della difficoltà e non ha termine. Notiamo che se invece scriviamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{\frac{\infty}{\infty},\,H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^{1/x}} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0. \quad ■$$

La terza e la quarta regola riguardano i casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ all'infinito.

Teorema 2.11.8. *Siano f, g definite e derivabili su $[a, +\infty[$, entrambe infinite o infinitesime per $x \longrightarrow +\infty$ e tali che $g'(x) \neq 0$ per $x \geqslant a$. Se allora*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Dim. — Trasformiamo il problema in un limite al finito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{y:=\frac{1}{x},\ x\to+\infty,\ y\to 0+}{=} \lim_{y\to 0+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Posto $F(y) := f\left(\frac{1}{y}\right)$ e similmente $G(y) := g\left(\frac{1}{y}\right)$ allora F e G sono entrambe infinitesime o infinite per $y \longrightarrow 0+$, derivabili su $]0, \frac{1}{a}[$ e

$$G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right) \neq 0, \ \forall y \in]0, 1/a[.$$

Inoltre

$$\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{-\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

per ipotesi. La conclusione segue ora dalle prime due regole di Hôpital. ■

2.11.1 Criterio di esistenza della derivata

Spesso capita di dover investigare la derivabilità di una funzione in un punto dove la definizione perde di senso. Si rende anzitutto necessario verificare se è possibile prolungare con continuità la definizione. Per verificare l'eventuale derivabilità si può poi procedere con la definizione. Oppure, sotto certe condizioni, si può calcolare la derivata fuori dal punto e poi farne il limite.

Proposizione 2.11.9. *Sia f una funzione derivabile su $]x_0, +\infty[\cap D$, continua da destra in x_0. Allora*

$$\text{se } \exists \lim_{x\to x_0+} f'(x) := \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{se } \ell\in\mathbb{R}\ \exists\ f'_+(x_0)=\ell, \\ \\ \text{se } \ell\in\{\pm\infty\}\ \ \nexists\ f'_+(x_0). \end{cases}$$

Analogo discorso per la derivata sinistra.

Dim. — Osserviamo che

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Siccome f è continua nel punto x_0 per ipotesi questa è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando la prima regola di Hôpital allora

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{f'(x_0+h)}{1} = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = \ell.$$

Da qui la conclusione è immediata. ■

Esempio 2.11.10. *Sia $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita come*

$$f(x) := \begin{cases} a\arctan\frac{1}{x} + (b+1)\log(1-x), & x<0, \\ \\ \sinh\frac{bx}{x^2+1} - a\cos\frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0. \end{cases}$$

i) Dire se esistono $a,b\in\mathbb{R}$ tali che f sia prolungabile con continuità in $x=0$.

ii) Per tali a,b dire se si ha che è anche derivabile in $x=0$.

Sol. — **i)** Ricordiamo che f è prolungabile con continuità in $x=0$ se e solo se $f(0-)=f(0+)$. In tal caso il valore comune definisce il prolungamento. Ora,

$$f(0-) = \lim_{x\to 0-}\left(a\arctan\frac{1}{x} + (b+1)\log(1-x)\right) = -a\frac{\pi}{2},$$

mentre, tenendo conto che $\lim_{x\to 0+}\sinh\frac{bx}{x^2+1}=0$, si ha che

$$\exists \lim_{x\to 0+}\left(\sinh\frac{bx}{x^2+1} - a\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \Longleftrightarrow \quad a=0,$$

visto che $\nexists \lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$. In tal caso $f(0+)=0$ ed $f(0-)=0$, dunque f è prolungabile per continuità, qualunque sia $b\in\mathbb{R}$.

ii) Dunque, dal punto precedente, $a=0$ e $b\in\mathbb{R}$. In tal caso

$$f(x)=\begin{cases} (b+1)\log(1-x), & x<0,\\ \\ 0, & x=0,\\ \\ \sinh\frac{bx}{x^2+1}, & x>0,\end{cases}$$

è il prolungamento. Tale prolungamento è derivabile per $x\neq 0$ e

$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{b+1}{1-x}, & x<0,\\ \\ \left(\cosh\frac{bx}{x^2+1}\right)\frac{b(x^2+1)-2bx^2}{(x^2+1)^2}, & x>0.\end{cases}$$

Da questo si vede subito che

$$f'(0-)=\lim_{x\to 0-}-\frac{b+1}{1-x}=-b-1,\quad f'(0+)=\lim_{x\to 0+}\left(\cosh\frac{bx}{x^2+1}\right)\frac{b(x^2+1)-2bx^2}{(x^2+1)^2}=b.$$

Per il criterio di esistenza della derivata ne segue che $\exists f'_-(0)=-b-1$ e $\exists f'_+(0)=b$. Ma allora $\exists f'(0)$ se e solo se $f'_-(0)=f_+(0)$, cioè se e solo se $-b-1=b$ da cui $b=-\frac{1}{2}$. ■

Allerta! 2.11.11. *Il tipico errore, come al solito legato ad una confusione logica tra condizione sufficiente e condizione necessaria, è quello di ritenere che* **se** *se il limite di f' non esiste* **allora** *non esiste nemmeno f'.* **Ciò è falso!** Se ci si pensa, di fatto la conclusione della proposizione è che la derivata è continua. Abbiamo visto, seppur non è immediatissimo, esempi di funzioni con derivata non continua. Per esempio sia

$$f(x):=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Facilmente (regola limitata×infinitesima=infinitesima) si ottiene che f è continua in $x=0$ ed inoltre

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0,$$

sempre in virtù della medesima regola. Eppure

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

che chiaramente non esiste! ■

2.12 Formula di Taylor

In questa sezione vediamo ora uno strumento fondamentale del calcolo differenziale: la *formula di Taylor*. Abbiamo già visto un primo caso di questa formula: *se f è derivabile in $x_0\in\mathrm{Int}(D)$ allora*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0).$$

Ci interessa ora osservare questa formula da un punto di vista più "quantitativo" che geometrico. Essa esprime il seguente fatto: *in prima approssimazione f coincide con un polinomio di primo grado a meno di un termine infinitesimo di ordine superiore all'incremento della variabile.* Vedremo ora che sotto certe ipotesi è possibile sostituire il polinomio con un polinomio di grado n ottenendo un grado di approssimazione via via crescente, cioè scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

La forma del polinomio è facilmente determinabile. Supponiamo che f sia proprio un polinomio, cioè

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k.$$

Allora $c_0 = f(x_0)$, e derivando si ottiene

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k c_k (x-x_0)^{k-1}, \implies f'(x_0) = c_1.$$

Poiché f' è ancora un polinomio possiamo ulteriormente derivare per ottenere

$$f''(x) = \sum_{k=2} k(k-1)c_k(x-x_0)^{k-2}, \implies f''(x_0) = 2\cdot 1\cdot c_2, \iff c_2 = \frac{f''(x_0)}{2\cdot 1} = \frac{f''(x_0)}{2!},$$

e derivando ulteriormente

$$f'''(x) = \sum_{k=3} k(k-1)(k-2)c_k(x-x_0)^{k-3}, \implies f''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3, \iff c_3 = \frac{f''(x_0)}{3!},$$

così allo stesso modo avremo $c_4 = \frac{f''''(x_0)}{4!}$ e così via. Come si vede siamo naturalmente portati ad introdurre la

Definizione 2.12.1. *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Supponiamo che*

$$f^{(1)} := f',\ f^{(2)} := (f')',\ f^{(3)} := ((f')')',\ \ldots,\ f^{(k-1)} := (\ldots(f')'\ldots)'$$

(dove l'ultima è la derivata di f ripetuta $k-1$ volte) esistano in un intorno I_{x_0} di x_0. Diciamo che esiste la derivata $k-$esima di f in x_0 se esiste

$$f^{(k)}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x_0+h) - f^{(k-1)}(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Per definizione si pone inoltre $f^{(0)} \equiv f$.

Con queste notazioni

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Siamo ora pronti per il

Teorema 2.12.2 (formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia f definita e derivabile $n-1$ volte in un intorno del punto x_0 ed esista $f^{(n)}(x_0)$. Allora*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n). \tag{2.12.1}$$

Il punto x_0 si dice **centro** *dello sviluppo. Se $x_0 = 0$ la formula prende il nome di formula di McLaurin.*

Dim. — Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Notiamo che il limite si presenta come una forma $\frac{0}{0}$. Applicando ripetutamente la prima regola di Hôpital

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)}{(x-x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} k\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1}\right)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\right)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}\right)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$\vdots$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left(\sum_{k=n-1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-(n-1))!}(x-x_0)^{k-(n-1)}\right)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left(f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)\right)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right)$$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Esempio 2.12.3. *Calcolare lo sviluppo di McLaurin arrestato al quarto ordine della funzione*

$$f(x) = \log(1+e^x)$$

Sol. — Calcoliamo le prime quattro derivate di f:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{e^x}{1+e^x}, \\
f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \\
f'''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = e^x\frac{1+e^x-2e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}, \\
f''''(x) &= \frac{(e^x - 2e^{2x})(1+e^x)^3 - (e^x - e^{2x})3(1+e^x)^2 e^x}{(1+e^x)^6} = e^x\frac{(1-2e^x)(1+e^x) - 3(1-e^x)}{(1+e^x)^4}
\end{aligned}$$

Ora:
$$f(0)=0,\quad f'(0)=\frac{1}{2},\quad f''(0)=\frac{1}{4},\quad f'''(0)=0,\quad f''''(0)=-\frac{1}{8}.$$
Pertanto, lo sviluppo cercato è
$$\log(1+e^x)=0+\frac{1}{2}x+\frac{1/4}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{-1/8}{4!}x^4+o(x^4)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{224}x^4+o(x^4).\ \blacksquare$$

2.12.1 Sviluppi di alcune funzioni elementari

Grazie alla formula di Taylor possiamo ampliare gli sviluppi notevoli già visti per le principali funzioni elementari.

Logaritmo

Con sviluppo del logaritmo si intende lo sviluppo di McLaurin della funzione $f(x) := \log(1+x)$. Abbiamo
$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \tfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\\
f^{(2)}(x) &= -(1+x)^{-2},\\
f^{(3)}(x) &= 2(1+x)^{-3},\\
f^{(4)}(x) &= -3\cdot 2(1+x)^{-4},\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}k!(1+x)^{-k}.
\end{aligned}$$
Dunque: $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}(k-1)!$. Ricordato che $f(0)=0$, ne segue che
$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}x^k+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}+o(x^n).$$

Potenza

Con sviluppo della potenza si intende lo sviluppo di McLaurin della funzione $f(x) := (1+x)^{\alpha}$, dove $\alpha\in\mathbb{R}$. Abbiamo
$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1},\\
f^{(2)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\\
f^{(3)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k},
\end{aligned}$$
da cui $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)$. Allora
$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n).$$

Quando occorre ci si può procurare lo sviluppo della funzione tramite la formula di Taylor naturalmente.

Esempio 2.12.4. *Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1-\sin\sqrt{x}} - e^x + \frac{\sqrt{x}}{3}}{\arctan\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}.$$

Sol. — Si vede subito che il limite si presenta come una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Adottiamo gli sviluppi asintotici:

$$\sin\xi = \xi + o(\xi) = \xi - \frac{\xi^3}{6} + o(\xi^3), \quad e^\xi = 1 + \xi + o(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2).$$

Allora, detto N il numeratore, si ha

$$N(x) = \left(1 - (x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}}))\right)^{\frac{1}{3}} - (1 + x + o(x)) + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}.$$

Ricordato lo sviluppo della radice

$$(1+\xi)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\xi + o(\xi) = 1 + \frac{1}{3}\xi + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\xi^2 + o(\xi^2) = 1 + \frac{\xi}{3} - \frac{\xi^2}{9} + o(\xi^2),$$

da cui

$$N(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(-x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}})\right) - 1 - x + o(x) + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} = -x + o(x) + o(x^{\frac{1}{2}}) = o(x^{\frac{1}{2}}),$$

che non è sufficiente per calcolare il limite. Giacché l'$o(x^{\frac{1}{2}})$ deriva dalla combinazione degli sviluppi di sin e $\sqrt[3]{}$ consideriamo gli sviluppi allungati di questi. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-\sin\sqrt{x}} &= \left(1 - x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + o(x^{\frac{3}{2}})\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= 1 + \frac{1}{3}\left(-x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + o(x^{\frac{3}{2}})\right) - \frac{1}{9}\left(-x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + o(x^{\frac{3}{2}})\right)^2 + o\left(\left(-x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + o(x^{\frac{3}{2}})\right)^2\right) \\
&= 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6} + o(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{1}{9}x + o(x) \\
&= 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{x}{9} + o(x).
\end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$N(x) = 1 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{x}{9} + o(x) - (1 + x + o(x)) + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} = -\frac{10}{9}x + o(x).$$

Quanto al denominatore procuriamoci anzitutto lo sviluppo di McLaurin dell'arcotangente, almeno per quanto riguarda i primi termini utili. Posto $f(x) = \arctan x$ si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \tfrac{1}{1+x^2}, & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\tfrac{2x}{(1+x^2)^2}, & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\tfrac{2(1+x^2)^2 - 2x2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}, & f'''(0) &= -2.
\end{aligned}$$

da cui

$$\arctan \xi = \xi - \frac{\xi^3}{3} + o(\xi^3).$$

Allora

$$D(x) = \arctan \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} - \frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3} + o((\sqrt[3]{x})^3) - \sqrt[3]{x} = -\frac{x}{3} + o(x).$$

Pertanto

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-\frac{10}{9}x + o(x)}{-\frac{x}{3} + o(x)} \longrightarrow \frac{10}{3}. \quad \blacksquare$$

Esempio 2.12.5. *Calcolare, al variare del parametro $\alpha > 0$, il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) - \sin(x^8)}{e^{x^{2\alpha}} - 1}$$

Sol. — Osserviamo anzitutto che, essendo $\alpha > 0$, $x^\alpha \to 0+$ per $x \to 0+$, per cui sia il numeratore che il denominatore tendono a 0, prefigurando una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Ricordati gli sviluppi asintotici fondamentali,

$$\left.\begin{aligned} \log(1+\xi) &= \xi - \frac{\xi^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\xi^n}{n} + o(\xi^n), \\ \sin \xi &= \xi - \frac{\xi^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(\xi^{2n+1}), \\ e^\xi &= \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{\xi^n}{n!} + o(\xi^n), \end{aligned}\right\} \text{ per } \xi \to 0.$$

andiamo a determinare gli sviluppi asintotici di numeratore e denominatore, cominciando a sostituire gli sviluppi più semplici. Cominciamo col numeratore:

$$N(x) = x^\alpha + o(x^\alpha) - (x^8 + o(x^8)) = x^\alpha - x^8 + o(x^\alpha) + o(x^8).$$

Abbiamo tre casi, pertanto: $\alpha < 8$, $\alpha = 8$ e $\alpha > 8$. Nel primo caso

$$x^8 + o(x^8) = o(x^\alpha), \quad \Longrightarrow \quad N(x) = x^\alpha + o(x^\alpha).$$

Se $\alpha = 8$ abbiamo che $N(x) = o(x^8)$ che può non essere sufficiente nel successivo calcolo del limite. Aumentiamo, pertanto, l'espansione di log e sin (basta solo del primo come si vedrà) di un termine:

$$N(x) = x^8 - \frac{(x^8)^2}{2} + o((x^8)^2) - \left(x^8 - \frac{(x^8)^3}{3!} + o((x^8)^3)\right) = -\frac{x^{16}}{2} + o(x^{16}).$$

Per $\alpha > 8$, invece, è $x^\alpha + o(x^\alpha) = 0(x^8)$, per cui

$$N(x) = x^8 + o(x^8).$$

Riassumendo:

$$N(x) = \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha), & \alpha < 8, \\ -\frac{1}{2}x^{16} + o(x^{16}), & \alpha = 8, \\ x^8 + o(x^8), & \alpha > 8. \end{cases}$$

Per il denominatore ci sono meno difficoltà bastando lo sviluppo breve dell'esponenziale,

$$D(x) = x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}).$$

Possiamo ora affrontare il calcolo del limite. Distinguiamo di nuovo i tre casi.
$\alpha < 8$. Abbiamo che
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})} = \frac{x^\alpha\left(1 + \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}\right)}{x^{2\alpha}\left(1 + \frac{o(x^{2\alpha})}{x^{2\alpha}}\right)} \sim x^{-\alpha} \to +\infty.$$
$\alpha = 8$. Abbiamo che
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^{16} + o(x^{16})}{x^{16} + o(x^{16})} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^{16})}{x^{16}}}{1 + \frac{o(x^{16})}{x^{16}}} \to -\frac{1}{2}.$$
$\alpha > 8$. Abbiamo che
$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^8 + o(x^8)}{x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})} = x^{8-2\alpha}\frac{1 + \frac{o(x^8)}{x^8}}{1 + \frac{o(x^{2\alpha})}{x^{2\alpha}}} \sim x^{8-2\alpha} \to +\infty,$$
essendo $8 - 2\alpha < 0$ per $\alpha > 8$. ■

2.12.2 Criterio di esistenza di estremanti locali

Grazie alla formula di Taylor possiamo mostrare un criterio per gli estremanti locali. Di fatto questo criterio è in genere poco utile nel caso delle funzioni reali di variabile reale poiché non è altrettanto efficace quanto lo studio del segno della derivata, nonché richiede ipotesi più forti (l'esistenza della derivata seconda) per fornire informazioni più deboli (la natura locale di un punto). D'altra parte si vedrà con le funzioni di più variabili reali che questo criterio diventa di fatto uno dei pochi strumenti a disposizione.

Teorema 2.12.6. *Sia f definita in un intorno di x_0 punto stazionario per f (cioè $f'(x_0) = 0$) ed ivi due volte derivabile (quindi: esista f' in I_{x_0} ed f'' in x_0). Allora*

- *se x_0 è punto di minimo locale allora $f''(x_0) \geqslant 0$;*
- *se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo locale.*

Osservazione 2.12.7. *Si noti che i due enunciati non sono esattamente l'uno l'inverso dell'altro.* Non può che essere così. Infatti $f''(x_0)$ può essere nulla in un punto di minimo (peraltro stretto) come nel caso $f(x) = x^4$. ■

Dim. — Scriviamo anzitutto la formula di Taylor al secondo ordine. Essendo x_0 stazionario, cioè $f'(x_0) = 0$, si può scrivere
$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$
Ora: **se** x_0 è minimo locale, allora $f(x) - f(x_0) \geqslant 0$ per ogni $x \in I_{x_0}$, cioè
$$\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} \geqslant 0,$$
e passando al limite per $x \longrightarrow x_0$ si ottiene
$$\frac{f''(x_0)}{2} \geqslant 0,$$
cioè $f''(x_0) \geqslant 0$.

Invece: **se** $f''(x_0) > 0$ allora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \left(1 + \frac{2}{f''(x_0)} \frac{o((x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}\right).$$

Siccome $\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow x_0$ si può dire che $\left|\frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ per $x \in I_{x_0}$ e quindi

$$f(x) - f(x_0) \geqslant \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{f''(x_0)}{4}(x - x_0)^2 \geqslant 0, \ \forall x \in I_{x_0}. \quad \blacksquare$$

2.12.3 Resto di Lagrange

La (2.12.1) è molto utile dal punto di vista qualitativo poiché, come abbiamo visto, fornisce la ricetta generale per sviluppare qualsiasi funzione regolare (cioè che ammetta derivate fino ad un certo ordine in un punto x_0). Dal punto di vista numerico, almeno qualitativamente, ha un risvolto notevole poiché permette, in principio, di sostituire una funzione non elementare con un polinomio. I polinomi sono il tipo di funzione più semplice computazionalmente parlando, poiché le uniche operazioni di calcolo sono somme e moltiplicazioni. In questo senso la formula di Taylor acquista una grande rilevanza numerica, poiché permette di fornire una formula di calcolo semplice ad una calcolatrice per esempio. Per essere veramente utile, tuttavia, è necessario che si sia in grado di "stimare" l'errore che si commette a sostituire la funzione vera con il suo polinomio di Taylor. In questo senso il termine $o((x - x_0)^n)$ è troppo generico poiché esprime solo il fatto che esso tende a 0 più rapidamente di $(x - x_0)^n$, quindi utile nei limiti ma poco utile quando si vuole capire quanto effettivamente piccolo è il resto vicino ad x_0. Per questo è utile conoscere altre forme di espressione del resto. Quella che ora presentiamo è detta *forma di Lagrange del resto di Taylor* (attenzione alle lievi ma significative differenze!):

Teorema 2.12.8 (formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia f definita e derivabile $n+1$ volte in un intorno del punto x_0. Allora*

$$\forall x \in I_{x_0} \ \exists \xi_x \in]x_0, x[\ (o \ ]x, x_0[) \ : \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \qquad (2.12.2)$$

Dim. — Chiamiamo $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ il polinomio di Taylor e sia

$$g(x) := f(x) - p_n(x).$$

Ovviamente g è $n+1$ volte derivabile in I_{x_0}. Notiamo inoltre che

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - f^{(k)}(x_0), \quad \Longrightarrow \quad g^{(k)}(x_0) = 0, \ k = 0, \ldots, n.$$

Se inoltre $h(x) := (x - x_0)^{n+1}$ allora anche $h^{(k)}(x_0) = 0$ per ogni $k = 0, \ldots, n$. Ma allora, applicando iterativamente la formula di Cauchy 2.6.3 abbiamo:

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1) - g'(x_0)}{h'(\xi_1) - h'(x_0)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} = \ldots = \frac{g^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{h^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

dove $x > \xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_{n+1} > x_0$ (se per esempio $x > x_0$). Chiamiamo $\xi_x := \xi_{n+1}$. Osservato che

$$g^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x), \quad h^{(n+1)}(\xi_x) = (n+1)!$$

si ottiene

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

che è appunto la tesi. ■

2.12.4 Serie di Taylor

Supponiamo ora che una funzione f ammetta derivate di tutti gli ordini in un intorno di x_0. Notiamo che necessariamente ogni derivata implica la continuità della derivata precedente (poiché se una funzione è derivabile come noto è necessariamente continua). Tale funzione è molto regolare:

Definizione 2.12.9 (classe $\mathscr{C}^\infty$)**.** *Si dice che una funzione $f \in \mathscr{C}^\infty(D)$ se $f^{(n)} \in \mathscr{C}(D)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Evidentemente per una tale funzione possiamo scrivere la formula di Taylor di ogni ordine. Viene allora naturale chiedersi: cosa succede se facciamo tendere l'ordine all'infinito? È vero che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ ?$$

La risposta, un po' sorprendente, è **no**! La serie precedente prende il nome di *serie di Taylor* di f centrata in x_0. Ecco il classico controesempio.

Esempio 2.12.10. *Sia*

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Allora $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma la serie di Taylor di f è identicamente nulla (e quindi non coincide con f).

Sol. — Immediata è la continuità. Notiamo poi che

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} \longrightarrow 0, \ x \longrightarrow 0,$$

e quindi per il criterio di derivabilità f è derivabile in $x = 0$ con derivata $f'(0) = 0$ ed è ivi continua, nonché ovviamente fuori da $x = 0$ con $f' \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Calcolando ad esempio la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{4}{x^6}e^{-1/x^2} - \frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} \longrightarrow 0, \ x \longrightarrow 0,$$

per cui similmente si deduce che $f'' \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ con $f''(0) = 0$. In generale si intuisce che

$$f^{(n)}(x) = \sum \frac{c}{x^k}e^{-1/x^2} \longrightarrow 0, \ x \longrightarrow 0,$$

quindi $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f^{(n)} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. In altre parole $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. La serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$, essendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni n è identicamente nulla e quindi non può coincidere con f se non nel punto $x_0 = 0$. ■

Naturalmente, affermare che una funzione coincida con la propria serie di Taylor almeno in un intorno del centro della stessa equivale a dire che la funzione sia analitica. Viceversa è interessante notare che

Proposizione 2.12.11. *Una funzione analitica coincide con la propria serie di Taylor.*

Dim. — Infatti, se

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \; x \in]-R, R[$$

evidentemente $f(0) = a_0$. Ricordando poi il Teorema 2.4.1, si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = a_1.$$

Applicando nuovamente ad f' (che è ancora analitica visto che la serie di f' ha lo stesso raggio di convergenza di quella di f), si ottiene

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 2! a_2.$$

In generale: $f^{(k)}(0) = k! a_k$, ovvero $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. ∎

In altre parole le funzioni analitiche sono tutte e sole quelle che coincidono con la propria serie di Taylor. Come mostra l'esempio precedente si tratta di una classe più ristretta delle sole funzioni $\mathscr{C}^\infty$. Quando si studierà, negli anni successivi, la *teoria delle funzioni olomorfe* (cioè la derivabilità per funzioni di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$) si scoprirà che si parla esattamente di queste funzioni.

La formula del resto di Lagrange fornisce una semplice condizione sufficiente affinché una funzione coincida con la propria serie di Taylor:

Proposizione 2.12.12. *Sia $f \in \mathscr{C}^\infty(I_{x_0})$, I_{x_0} intorno di x_0. Se*

$$\exists C \geqslant 0 \; : \; |f^{(k)}(x)| \leqslant C, \; \forall x \in I_{x_0}, \tag{2.12.3}$$

allora f coincide con la propria serie di Taylor (e quindi è in particolare analitica).

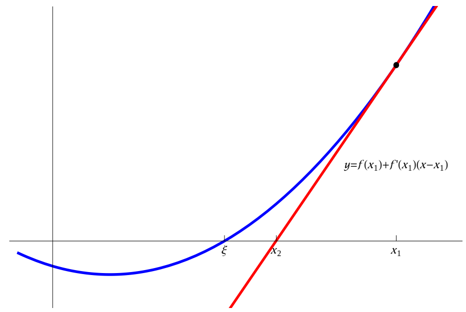
Dim. — Basta in questo caso osservare che

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leqslant C \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \; n \longrightarrow +\infty$$

essendo $\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ il termine generale di una serie convergente (quale?). ∎

2.13 Applicazioni del Calcolo Differenziale

In questa sezione conclusiva illustriamo alcune applicazioni del calcolo differenziale. Ovviamente è solo una infinitesima scelta tra il possibile.



2.13.1 Algoritmo di Newton per la ricerca degli zeri

Consideriamo una funzione $f \in \mathscr{C}([a,b])$ continua e derivabile tale che $f(a)f(b) < 0$. Sappiamo allora che f ha almeno uno zero in $[a,b]$. Supponendo ulteriormente che f sia **convessa**, Newton ha inventato un algoritmo semplice e "smart" per trovare gli zeri della funzione. Vediamo come con una figura:
Fissiamo un punto $x_1 \in [a,b]$. Se x_1 non è uno zero di f allora consideriamo la tangente al grafico passante per $(x_1, f(x_1))$. Essendo f convessa questa è tutta sotto al grafico di f. Inoltre, se $f'(x_1) \neq 0$ abbiamo che questa intercetta l'asse delle ascisse in un punto x_2 che, come la figura suggerisce, si trova più vicino allo zero di x_1. Precisamente x_2 è tale che

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0, \iff x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

In effetti: se per esempio $f(x_1) > 0$ osserviamo che non può essere $f'(x_1) \leqslant 0$. Infatti, per convessità, f' è crescente, e allora si avrebbe che $f'(x) \leqslant 0$ per $x < x_1$, cioè f sarebbe decrescente per $x < x_1$ e dunque x_1 non ci potrebbero essere zeri a sinistra di x_1, il che contraddice l'ipotesi iniziale. Dunque $f'(x_1) > 0$ e ne segue che $x_2 < x_1$. Inoltre non può essere nemmeno

$$f(x_2) < 0,$$

perché altrimenti perché in questo caso la corda passante per $(x_2, f(x_2))$ e $(x_1, f(x_1))$, che per convessità è sopra al grafico di f in $[x_2, x_1]$, sarebbe sotto la retta tangente costruita sopra, ovvero quest'ultima sarebbe strettamente sopra al grafico di f, in contraddizione con quanto segue dalla convessità. Morale: $f(x_2) > 0$ per cui si può ripetere pari pari il procedimento e costruire il punto

$$x_3 := x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Iterando, si costruisce così una successione (x_n) avente le seguenti proprietà:

$$\xi < x_n < b, \; x_n \searrow, \; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Per monotonia $x_n \longrightarrow \ell$ e passando al limite nell'equazione che definisce la successione, e assumendo che $f' \in \mathscr{C}$ abbiamo

$$\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)}, \iff f(\ell) = 0.$$

2.13.2 Confronto asintotico per la convergenza delle serie

I metodi degli sviluppi asintotici possono essere fruttuosamente impiegati nello studio della convergenza delle serie (e successivamente, come vedremo, nello studio del problema analogo della convergenza di integrali generalizzati). Vediamo con un esempio come:

Esempio 2.13.1. *Sia*

$$a_n := n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n}\right), \quad n > 0,$$

ove α è un numero reale positivo.

i) Determinare, al variare di α, due costanti $C = C(\alpha), \beta = \beta(\alpha) \in \mathbb{R}$ tali che $a_n \sim \frac{C}{n^\beta}$.

ii) Determinare i valori di α tali che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente.

Sol. — i) Anzitutto osserviamo che, tenendo conto degli sviluppi asintotici

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin x = x + o(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \to 0,$$

si ha

$$1 - \cos \frac{1}{n} = \frac{(1/n)^2}{2} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}, \quad n \to +\infty,$$

mentre

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha} - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Abbiamo allora tre casi: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ed $\alpha > 1$. Se $\alpha < 1$ allora

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \Longrightarrow \quad o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

per cui

$$\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

Quindi,

$$a_n \sim n^2 \frac{1}{2n^2} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha}, \quad \text{per } 0 < \alpha < 1.$$

Se $\alpha = 1$ lo sviluppo impiegato per sin non è sufficiente: infatti in questo caso risulterebbe

$$\frac{1}{n^1} - \sin \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

che non ci da un preciso ordine di grandezza per la quantità $\frac{1}{n^1} - \sin \frac{1}{n}$. Impiegando lo sviluppo fino al terzo ordine per sin otteniamo

$$\frac{1}{n^1} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{(1/n)^3}{6} + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)\right) = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3},$$

da cui

$$a_n \sim n^2 \frac{1}{2n^2} \frac{1}{6n^3} = \frac{1}{12n^3}.$$

Se, infine, $\alpha > 1$, abbiamo che

$$\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n},$$

da cui

$$a_n \sim n^2 \frac{1}{2n^2}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2n}.$$

ii) Dal punto precedente bisogna distinguere tre casi. Se $0 < \alpha < 1$ si ha che

$$a_n \sim \frac{1}{2n^\alpha},$$

per cui è definitivamente $a_n > 0$ (pertanto la serie è, definitivamente, a termini di segno costante) ed asintotica alla serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{2n^\alpha}$ che converge se e solo se $\alpha > 1$. Quindi per $\alpha < 1$ la serie $\sum_n a_n$ è divergente per confronto asintotico.

Se $\alpha = 1$ si ha che

$$a_n \sim \frac{1}{12n^3},$$

quindi, nuovamente, definitivamente dev'essere $a_n > 0$. Poiché la serie $\sum_n \frac{1}{12n^3}$ è convergente, converge anche la serie $\sum_n a_n$ per confronto asintotico.

Se $\alpha > 1$ si ha che

$$a_n \sim -\frac{1}{2n},$$

quindi è $a_n < 0$ definitivamente (e di conseguenza la serie $\sum_n a_n$ è definitivamente a termini di segno costante). D'altra parte $\sum_n \frac{1}{2n}$ è divergente, quindi diverge anche $\sum_n a_n$ per confronto asintotico.

In conclusione: la serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\alpha = 1$. $\blacksquare$

Capitolo 3

Primitive

3.1 Il problema

Detta in termini molto semplici il problema che ci poniamo qui è quello di invertire l'operazione di derivata. In altre parole:

data f su D trovare F derivabile su D tale che $F' = f$ su D.

La funzione F viene detta *primitiva* di f. La principale applicazione di questo problema è, come vedremo nel prossimo capitolo, al calcolo degli integrali. Per questo motivo la soluzione (eventuale) di questo problema (la funzione F) viene indicata con un simbolo simile a quello usato per gli integrali.

Non c'è sostanzialmente molto altro da dire, eccetto che rispondere alla questione: *come si fa?* La risposta è tutt'altro che banale ed, in ultima sostanza, non esiste, nel senso che salvo per qualche tipo particolare di famiglia di funzioni, data una f in generica è impossibile esprimere una sua primitiva in termini di un numero finito di funzioni elementari tramite le usuali operazioni algebriche o di composizione. Ciò non deve sorprendere poiché di fatto invertiamo un'operazione che con le funzioni elementari si comporta molto meccanicamente. Un po' come se decidiamo di invertire la funzione numerica $x \longmapsto x^2$. Per quanto la diretta sia banale (è solo una moltiplicazione) l'inversa è complicata trattandosi di $y \longmapsto \sqrt{y}$: non abbiamo una formula di calcolo per qualsiasi y sebbene magari si sappia che $\sqrt{y}$ esista!

Per questo è bene levarsi dalla testa ogni illusione entrando nell'ambito del calcolo delle primitive: non ci saranno formule di calcolo risolutive, ma solo formule che trasformano il problema in (si spera!) un problema più semplice.

3.2 Preliminari

Cominciamo con la

Definizione 3.2.1. *Data una funzione $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, D aperto, una funzione $F : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su D e tale che $F' = f$ su D (cioè $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$) si dice* **primitiva** *di f. Si scrive*

$$F(x) = \int f(x)\, dx, \text{ o anche } F = \int f.$$

In realtà siamo partiti già male poiché in genere questo problema, se ha una soluzione, ne ha infinite.

Proposizione 3.2.2. *Due primitive di una funzione f su un intervallo I differiscono per una costante additiva. Quindi, se F è una primitiva di f su I allora tutte le primitive di f sono della forma $F + c$ dove $c \in \mathbb{R}$.*

Dim. — Siano F, G due primitive di f su I. Allora

$$F' = f,\ G' = f,\ \text{su } I,\ \implies\ F' - G' = (F - G)' = 0,\ \text{su } I.$$

A questo punto mostriamo il

Lemma 3.2.3. *Sia h derivabile su I intervallo tale che $h' = 0$ su I. Allora h è costante.*

Dim. — Segue subito dalla formula dell'incremento finito di Lagrange: siano $x, y \in I$, per esempio $x < y$. Allora $[x, y] \subset I$ (perché I è intervallo), e h è derivabile su I: quindi è derivabile su $]x, y[$ e continua su $[x, y]$. Per il teorema di Lagrange allora

$$\exists \xi \in]x, y[\ :\ h(y) - h(x) = h'(\xi)(y - x) = 0.$$

Dunque $h(x) = h(y)$ per ogni $x, y \in I$, cioè h è costante. ■

In virtù del lemma quindi $F - G = c$. ■

Dunque, almeno sugli intervalli trovata una primitiva sono trovate automaticamente tutte. Continueremo ad indicare con $\int f(x)\, dx$ una particolare primitiva.

3.3 Primitive elementari e quasi elementari

La prima osservazione è che possiamo ricavare immediatamente alcune primitive elementari leggendo alla rovescia la tabella delle derivate elementari. Per esempio: essendo

$$(e^x)' = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

si può dire che e^x è una primitiva di e^x. In simboli

$$\int e^x\ dx = e^x.$$

Per esempio, ancora

$$(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R},\ \iff\ \int \cos x\ dx = \sin x,\ x \in \mathbb{R},$$

mentre

$$(\cos x)' = -\sin x,\ \iff\ (-\cos x)' = \sin x,\ \iff\ \int \sin x\ dx = -\cos x.$$

Ancora:

$$(\log x)' = \frac{1}{x},\ x \in]0, +\infty[,\ \iff\ \int \frac{1}{x}\ dx = \log x,\ x \in]0, +\infty[.$$

Possiamo dire qualcosa su $\int \frac{1}{x}\ dx$ per $x \in]-\infty, 0[$? Basta osservare che $(\log(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ quindi

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \log(-x),\ \ x \in]-\infty, 0[.$$

In altre parole

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \log|x|,\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Procedendo così con tutte le funzioni elementari arriviamo alla seguente tabella:

$$\int e^x\ dx = e^x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[,$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[,$$

$$\int \sinh x\ dx = \cosh x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[,$$

$$\int \cosh x\ dx = \sinh x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[,$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R},\ \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \text{se } \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha < -1, \\ x \in]0, +\infty[,\ \text{se } \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \log|x|, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x, \qquad x \in]-\infty, +\infty[,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x, \qquad x \in]-1, 1[,$$

$$\int \frac{1}{(\cos(x))^2}\ dx = \int (1 + (\tan x)^2)\ dx = \tan x, \quad x \in]-\infty, +\infty[\backslash \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

In questa tabella non compaiono le primitive di alcune funzioni elementari come log, arcsin, arctan semplicemente perché al momento non si leggono dalla tabella delle derivate. Da questa tabella ed utilizzando la regola della catena possiamo dedurre altre primitive praticamente immediate. In effetti, per esempio,

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x), \iff \int e^{f(x)} f'(x)\ dx = e^{f(x)}.$$

Procedendo allo stesso modo con tutte le altre funzioni otteniamo la tabella

$$\int e^{f(x)} f'(x)\ dx = e^{f(x)}, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)|,$$

$$\int \sin(f(x))f'(x)\ dx = -\cos(f(x)), \qquad \int \cos(f(x))f'(x)\ dx = \sin(f(x)),$$

$$\int \sinh(f(x))f'(x)\ dx = \cosh(f(x)), \qquad \int \cosh(f(x))f'(x)\ dx = \sinh(f(x)),$$

$$\int f(x)^\alpha f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\ dx = \arctan f(x),$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\ dx = \arcsin f(x), \qquad \int \frac{f'(x)}{(\cos f(x))^2}\ dx = \tan f(x).$$

Le primitive di questa seconda famiglia vengono usualmente dette primitive quasi elementari, poiché la maggiore difficoltà consiste nel riconoscere la struttura apposita. Di fatto, i metodi che vedremo successivamente consistono nel ridurre il calcolo a qualcosa di questo tipo, per cui è bene imparare subito a riconoscere queste forme.

3.4 Regole di calcolo

Un po' impropriamente chiamiamo regole di calcolo delle formule che permettono, almeno in linea di principio, di trasformare il calcolo di una primitiva in quello di una (si spera!) più semplice. Il punto è proprio questo: a differenza che nel caso delle derivate, l'applicazione delle regole di calcolo per le primitive non è mai meccanica, ma richiede una certa abilità che si può acquisire solo con una certa pratica e imparando a ragionare sempre in modo da "semplificare" il problema posto. Quanto all'origine, le regole di calcolo altro non sono che le regole di derivazione lette "alla rovescia".

3.4.1 Linearità

Sappiamo che

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G',\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Se allora $F' = f$ e $G' = g$, cioè se

$$F = \int f,\ G = \int g,\ \implies\ \alpha \int f + \beta \int g = \int (\alpha f + \beta g).$$

In altre parole abbiamo la

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.4.1}$$

In altre parole il calcolo di una primitiva di una combinazione lineare può essere ridotto al calcolo delle primitive dei singoli termini della combinazione.

3.4.2 Formula di calcolo per parti

Le vere due regole di calcolo sono quella che vediamo ora e quella del prossimo paragrafo. Cominciamo con la cosiddetta *formula di calcolo per parti.* Sappiamo che

$$(fg)' = f'g + fg', \iff fg = \int (f'g + fg'), \iff \int f'g = fg - \int fg',$$

ovvero

$$\int f'(x)g(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx. \tag{3.4.2}$$

Anche in questo caso il senso della formula non è tanto quello di dare una regola per calcolare una primitiva, quanto per trasformare un problema in un altro (con l'ottica che quest'ultimo sia più semplice). Ciò richiede una serie di accortezze nell'applicazione della formula che vediamo esemplificate di seguito. Anzitutto: talvolta riconoscere la forma $f'g$ è una "scelta obbligata".

Esempio 3.4.1. *Calcolare*

$$\int x \log x\ dx.$$

Sol. — Possiamo osservare che $x = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$, mentre non viene in mente niente tale che $\log x = (\ldots)'$. Applicando la formula per parti dunque abbiamo

$$\begin{aligned}\int x \log x\ dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\ dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} (\log x)'\ dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x\ dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

Questo esempio mostra bene anche cosa s'intenda per "trasformare un problema in un più semplice": come si vede, dopo l'applicazione della formula il problema si è ridotto al calcolo di una primitiva elementare. ■

Altre volte occorre creare "ad artificio" un prodotto.

Esempio 3.4.2. *Calcolare*

$$\int \log x\ dx.$$

Sol. — Possiamo scrivere $\log x = 1 \cdot \log x = (x)' \cdot \log x$. Allora

$$\int \log x\ dx = \int (x)' \log x\ dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x \log x - \int 1\ dx = x \log x - x. \quad ■$$

Altre volte la scelta non è obbligata ma non è nemmeno indifferente.

Esempio 3.4.3. *Calcolare*

$$\int x \sin x\ dx.$$

Sol. — Possiamo scrivere $x\sin x = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \sin x = x(-\cos x)'$. Nel primo caso abbiamo

$$\int x\sin x \; dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \sin x \; dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x \; dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x \; dx,$$

e si direbbe che il nuovo problema non solo non è immediato ma sembra più complicato di quello iniziale. Naturalmente potremmo iterare il metodo, pensando che $x^2\cos x = \left(\frac{x^3}{3}\right)'\cos x = x^2(\sin x)'$. Appare chiaro che la seconda ipotesi è del tutto inutile poiché riporta alla formula iniziale:

$$\begin{aligned}\int x\sin x \; dx &= \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x \; dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2(\sin x)' \; dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\left(x^2\sin x - \int 2x\sin x \; dx\right) = \int x\sin x \; dx,\end{aligned}$$

identità d'indubbio fascino ma purtroppo inutile. Se invece si opta per l'altra ipotesi, cioè $x^2\cos x = \left(\frac{x^3}{3}\right)'\cos x$ si scopre che le cose si complicano ancora di più perché si ottiene

$$\int x\sin x \; dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x \; dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\cos x + \int \frac{x^3}{3}\sin x \; dx\right) = \ldots$$

da cui non è difficile immaginare un percorso senza fine. Se invece torniamo all'inizio e optiamo per la scrittura $x\sin x = x(-\cos x)'$ tutto si semplifica drasticamente:

$$\int x\sin x \; dx = -x\cos x + \int \cos x \; dx = -x\cos x - \sin x.$$

Questo esempio mostra quindi che la scelta della forma non è un fatto automatico. ∎

Altre volte ancora la primitiva viene ottenuta iterando il procedimento per parti fino ad ottenere un'"equazione" nella quantità che si vuole trovare.

Esempio 3.4.4. *Calcolare*

$$\int e^{2x}\sin(3x) \; dx.$$

Sol. — Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(3x) \; dx &= \int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \sin(3x) \; dx = \frac{e^{2x}}{2}\sin(3x) - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x) \; dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\sin(3x) - \frac{3}{2}\int \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \cos(3x) \; dx = \frac{e^{2x}}{2}\sin(3x) - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin(3x) \; dx\right) \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\left(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos(3x)\right) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin(3x) \; dx,\end{aligned}$$

da cui

$$\int e^{2x}\sin(3x) \; dx = \frac{4}{13}\frac{e^{2x}}{2}\left(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos(3x)\right) = \frac{2}{13}e^{2x}\left(\sin(3x) - \frac{3}{2}\cos(3x)\right). \quad ∎$$

3.4.3 Formula di calcolo per sostituzione

L'operazione di sostituzione ha come sempre lo scopo di semplificare la scrittura di una certa espressione introducendo una nuova variabile costituita da un certo "pacchetto" fisso contenente la variabile. Facciamo un esempio. Supponiamo di voler calcolare

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx.$$

Sarebbe bello chiamare $y = \sqrt{x}$ e dire che

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = \int e^y\ dy = e^y = e^{\sqrt{x}}.$$

Purtroppo spesso quelle che sembrano regole naïf sono palesi castronate. In effetti

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} \neq e^{\sqrt{x}}.$$

Se ci si pensa un secondo si scopre il perché ciò non funzioni. Supponiamo infatti, in generale, di dover calcolare la primitiva di una certa funzione,

$$\int f(x)\ dx$$

e di voler introdurre una nuova variabile $y = \varphi(x)$. Quando facciamo un cambio di variabile è naturale riferirsi ad una situazione in cui x (vecchia variabile) ed y (nuova variabile) siano legate $1-1$, in corrispondenza biunivoca cioè. Se allora chiamiamo $x = \psi(y)$ (cioè $\psi = \varphi^{-1}$) allora possiamo notare che

$$F(x) = \int f(x)\ dx, \implies (F(\psi(y)))' = F'(\psi(y))\psi'(y) = f(\psi(y))\psi'(y),$$

da cui

$$F(\psi(y)) = \int f(\psi(y))\psi'(y)\ dy.$$

Ma allora è come dire che

$$\int f(x)\ dx\Big|_{y=\varphi(x),\ x=\psi(y)} = \int f(\psi(y))\psi'(y)\ dy. \tag{3.4.3}$$

Questa formula prende il nome di formula di calcolo per sostituzione. A parole dice che: calcolare la primitiva di $f(x)$ è come calcolare la primitiva di $f(\psi(y))\psi'(y)$ dove $y = \psi(x)$. Vediamo sull'esempio di cui sopra come si procede normalmente (un po' di pratica aiuta facilmente a comprendere lo schema di funzionamento).

Esempio 3.4.5. *Calcolare*

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx.$$

Sol. — Poniamo $y = \sqrt{x}$. Ciò vuol dire $x = y^2 =: \psi(y)$. Quindi $\psi'(y) = 2y$. Allora

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx \overset{y=\sqrt{x},\ x=y^2}{=} \int e^y 2y\ dy.$$

Quest'ultima è molto semplice e può facilmente essere calcolata per parti. Infatti

$$\int e^y y\ dy = \int (e^y)' y\ dy = e^y y - \int e^y \cdot 1\ dy = e^y y - e^y,$$

quindi

$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx \overset{y=\sqrt{x},\ x=y^2}{=} e^y y - e^y = \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}. \quad \blacksquare$$

Esempio 3.4.6. *Calcolare*

$$\int \sqrt{e^{2x}-1}\ dx.$$

Sol. — Poniamo $y = \sqrt{e^{2x}-1}$, ovvero $y^2 = e^{2x} - 1$, cioè $2x = \log(1+y^2)$, ovvero $x = \frac{1}{2}\log(1+y^2) =: \psi(y)$. Abbiamo $\psi'(y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{1+y^2} = \frac{y}{1+y^2}$, per cui

$$\int \sqrt{e^{2x}-1}\ dx \overset{y=\sqrt{e^{2x}-1},\ x=\frac{1}{2}\log(1+y^2)}{=} \int y \cdot \frac{y}{1+y^2}\ dy = \int \frac{y^2}{1+y^2}\ dy = \int \frac{y^2+1-1}{1+y^2}\ dy$$

$$= \int 1\ dy - \int \frac{1}{1+y^2}\ dy = y - \arctan y = \sqrt{e^{2x}-1} - \arctan\sqrt{e^{2x}-1}. \quad \blacksquare$$

Osservazione 3.4.7. *Spesso si usa scrivere così: se $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ allora $dx = \psi'(y)\ dy$ per cui*

$$\int f(x)\ dx = \int f(\psi(y))\ \psi'(y)\ dy.$$

Personalmente è una notazione che non mi piace, ma la sostanza è corretta naturalmente. $\blacksquare$

3.5 Primitive delle funzioni razionali

Per le funzioni razionali esiste un algoritmo di calcolo delle relative primitive. Questo algoritmo è basato sul calcolo di primitive in alcuni casi particolari e poi, in generale, ad un metodo di riduzione ai casi particolari. I casi particolari sono i seguenti:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\ dx, \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2+bx+c)^n}\ dx, \ (a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}).$$

Vediamoli in dettaglio. Un'avvertenza. Non è opportuno memorizzare formule, quanto comprendere la procedura che è estremamente semplice!

3.5.1 Primitive di $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\ dx$

Questo è molto semplice trattandosi di una primitiva quasi elementare:

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\ dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{(ax+b)^n}\ dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\log|ax+b|, & n = 1, \\[2ex] \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} = -\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}}, & n > 1. \end{cases}$$

3.5.2 Primitive di $\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx$.

Cominciamo col caso particolare del calcolo di

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx.$$

In questo caso si hanno tre alternative a seconda che $\Delta := b^2-4ac$ sia positivo, nullo o negativo.

- $\Delta > 0$. Allora
$$ax^2+bx+c = a(x-\xi)(x-\eta), \text{ con } \xi \neq \eta.$$
Allora
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\xi)(x-\eta)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-\xi}+\frac{B}{x-\eta}\right)$$
dove A e B possono essere facilmente determinati in modo che l'identità sia vera: bisogna che
$$A(x-\eta)+B(x-\xi) \equiv 1, \iff \begin{cases} A+B=0, \\ \\ -A\eta - B\xi = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A, \\ \\ A = \frac{1}{\xi-\eta}. \end{cases}$$
Come si vede questo sistema ha sempre un'unica soluzione (A,B) se $\Delta > 0$. Ma allora
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a}\int \left(\frac{A}{x-\xi}+\frac{B}{x-\eta}\right) dx = \frac{1}{a}\left(A\log|x-\xi| + B\log|x-\eta|\right).$$

- $\Delta = 0$. In questo caso
$$ax^2+bx+c = a(x-\xi)^2, \implies \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \int \frac{1}{a(x-\xi)^2}\, dx = \frac{1}{a}\frac{-1}{x-\xi} = -\frac{1}{a(x-\xi)}.$$

- $\Delta < 0$. In questo caso le due radici sono complesse. L'idea è di ricondursi al caso prototipo $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x$. Vediamo come: anzitutto *mostriamo che il polinomio può essere riscritto nella forma* 1+*quadrato*. Abbiamo
$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$
Notiamo che $\alpha := \frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$, e se scriviamo $\beta := \frac{b}{2a}$ allora
$$ax^2+bx+c = a\left((x+\beta)^2+\alpha\right) = a\alpha\left(\left(\frac{x+\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+1\right),$$
per cui
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a\alpha}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{a\sqrt{\alpha}}\int \frac{1/\sqrt{\alpha}}{1+\left(\frac{x+\beta}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{a\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{x+\beta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Passiamo ora al caso
$$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx.$$
Questo si riconduce facilmente al precedente. Anzitutto si trasforma il numeratore in modo da far comparire la derivata del denominatore. Essendo
$$(ax^2+bx+c)'=2ax+b,$$
allora
$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2ax+\frac{2a\beta}{\alpha}}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \frac{\alpha}{2a}\int \frac{\frac{2a\beta}{\alpha}-b}{ax^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{\alpha}{2a}\log|ax^2+bx+c| + \frac{\alpha}{2a}\left(\frac{2a\beta}{\alpha}-b\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx,\end{aligned}$$
ed ora si procede come nel punto precedente.

Esempio 3.5.1. *Calcolare*
$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Sol. — Riduciamo anzitutto il numeratore ricostruendo la derivata del denominatore $(x^2+2x+2)'=2x+2$. Abbiamo
$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{4}{x^2+2x+2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + 2\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx.\end{aligned}$$
Ora: $\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot 2 = 4-8=-4<0$. Dobbiamo quindi "completare" il quadrato. Qui è particolarmente semplice perché
$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1, \implies \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,dx = \arctan(x+1),$$
per cui
$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\log|x^2+2x+2| + 2\arctan(x+1) \equiv \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)+2\arctan(x+1). \quad \blacksquare$$

Infine consideriamo il caso
$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx,\ n>2.$$
L'idea è, tramite un'integrazione per parti, di abbassare progressivamente n e di ricondursi al caso precedente. Omettiamo i noiosi dettagli e vedremo in seguito qualche esempio concreto.

3.5.3 Caso Generale

Siamo ora pronti per il caso generale. Consideriamo il problema di calcolare

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \quad \text{dove } p, q \in \mathbb{R}[x].$$

La prima osservazione è che ci possiamo ricondurre subito al caso in cui il grado di p sia minore di quello di q. Infatti, in caso contrario, possiamo effettuare la divisione ed ottenere che

$$\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{\widetilde{p}(x)}{q(x)}, \quad \text{con } r \in \mathbb{R}[x],\ \deg \widetilde{p} < \deg q.$$

Quindi supponiamo $\deg p < \deg q$. Ora il denominatore q si potrà sempre scrivere nella forma

$$q(x) = a(x-x_1)^{m_1} \cdots (x-x_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1} \cdots (x^2+b_hx+c_h)^{n_h}$$

dove $a \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{R}$ e $x_i \neq x_j$, $m_j \in \mathbb{N}$, $b_j, c_j \in \mathbb{R}$ con $\Delta_j := b_j^2 - 4c < 0$, $n_h \in \mathbb{N}$. Vale allora la seguente *decomposizione di Hermite*:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{a}\left(\sum_{j=1}^{m_1} \frac{A_{1,j}}{(x-x_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{k,j}}{(x-x_k)^j} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{B_{1,j}x + C_{1,j}}{(x^2+b_1x+c_1)^j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n_h} \frac{B_{h,j}x + C_{h,j}}{(x^2+b_hx+c_h)^j}\right)$$

quindi per linearità il calcolo di $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ è ricondotto ai casi precedenti. Quanto ai coefficienti A, B, C essi vengono determinati imponendo che l'identità precedente valga. Non dimostriamo questo fatto, invece illustriamo con qualche esempio la sua semplice applicazione.

Esempio 3.5.2. *Calcolare*

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx.$$

Sol. — Osserviamo che

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1),$$

e questa formula non è ulteriormente riducibile poiché il discriminante della parte di secondo grado è negativo. Quindi

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

La decomposizione di Hermite è

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Ora

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{x^3+1} = \frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C)}{x^3+1},$$

per cui dovrà essere

$$\begin{cases} A+B=1 \\ B+C-A=0, \\ A+C=1, \end{cases}$$

che produce $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{2}{3}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log|x^2-x+1| + \int \frac{1}{x^2-x+1}dx.\end{aligned}$$

Resta l'ultimo pezzo, che è un integrale del tipo di quelli già trattati e che da luogo all'arcotangente. Quindi bisogna operare per completare il quadrato:

$$x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1\right) = \frac{3}{4}(y^2+1),$$

avendo posto

$$y := \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}, \quad x = \sqrt{\frac{3}{4}}y + \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{\frac{3}{4}}\,dy = \sqrt{\frac{4}{3}}\arctan y + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right).$$

In conclusione:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3}\log|x^2-x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right). \quad \blacksquare$$

Esempio 3.5.3. *Calcolare*

$$\int \frac{2x^4+x^3+3x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx.$$

Sol. — La decomposizione di Hermite è

$$\frac{2x^4+x^3+3x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

da cui, svolgendo i calcoli, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A+D=2, \\ E=1, \\ 2A+B+D=3, \\ C+E=0, \\ A=1, \end{cases}$$

che risolto produce: $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 1$ e $E = 1$. Pertanto

$$\int \frac{2x^4+x^3+3x^2+1}{x(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

Ora

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + c,$$

mentre
$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \arctan x + c.$$
Resta da calcolare $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$. Operando l'artificio visto sopra si ha

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x^2+1} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \arctan x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx.$$

Quest'ultimo integrale è calcolabile per parti, osservato che

$$\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)',$$

per cui
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2}x\ dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' x\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}x - \int \frac{1}{x^2+1}(x)'dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} - \arctan x + c\right).\end{aligned}$$

Mettendo assieme i vari pezzi si ottiene il risultato finale. ■

3.5.4 Alcune sostituzioni standard

Vediamo ora alcuni casi particolari di primitive il cui calcolo è riconducibile a quello di primitive di funzioni razionali tramite sostituzioni standard.

Primitive del tipo $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\ dx$

Consideriamo una primitiva del tipo
$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\ dx$$

dove R è razionale (cioè $R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$, con p e q polinomi), allora

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx\Big|_{y=\sqrt[n]{ax+b},x=\frac{y^n-b}{a}} = \int R\left(\frac{y^n-b}{a}, y\right)\frac{n}{a}y^{n-1}dy,$$

e la funzione
$$y \longmapsto R\left(\frac{y^n-b}{a}, y\right)y^{n-1},$$

è una funzione razionale di y, cui può essere applicata la procedura vista nel paragrafo precedente. Alla fine si otterrà, naturalmente, una primitiva nella variabile y: per tornare alla variabile x basterà sostituire $y = \sqrt[n]{ax+b}$. Vediamo il metodo in un esempio:

Esempio 3.5.4. *Calcolare*
$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$$

Sol. — Poniamo $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$. Quindi
$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx\Big|_{y=\sqrt{x}, x=y^2} &= \int \frac{y}{y+1} 2y \, dy = 2\int \frac{y^2-1+1}{y+1} dy = 2\left(\int (y-1)dy + \int \frac{1}{y+1} dy\right) \\ &= 2\left(\frac{(y-1)^2}{2} + \log|1+y|\right) = 2\left(\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2} + \log|1+\sqrt{x}|\right). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Primitive del tipo $\int R(e^x)\ dx$

Consideriamo ora il problema di determinare
$$\int R(e^x) dx,$$
dove R è un'opportuna funzione razionale, cioè $R(\xi) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}$ con p e q polinomi. È naturale provare ad effettuare la sostituzione $y = e^x$, cioè $x = \log y$. Allora
$$\int R(e^x) dx\Big|_{y=e^x, x=\log y} = \int R(y)\frac{1}{y} dy.$$
La funzione $y \longmapsto \frac{R(y)}{y}$ è razionale, a cui può essere applicato il metodo di calcolo delle primitive per funzioni razionali.

Esempio 3.5.5. *Calcolare*
$$\int \frac{\cosh x + \sinh x}{1 + 2\cosh x}\ dx.$$

Sol. — Notiamo che se scriviamo $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, allora
$$P := \int \frac{\cosh x + \sinh x}{1 + 2\cosh x}\ dx = \int \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}}{1 + 2\frac{e^x+e^{-x}}{2}}\ dx = \int \frac{e^x}{1 + e^x + \frac{1}{e^x}}\ dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + e^x + 1}\ dx,$$
chiaramente una funzione razionale di e^x. Posto allora $y = e^x$, $x = \log y =: \psi(y)$, $\psi'(y) = \frac{1}{y}$, allora
$$\begin{aligned}P &= \int \frac{y^2}{y^2+y+1}\frac{1}{y}\ dy = \int \frac{y}{y^2+y+1}\ dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y+1-1}{y^2+y+1}\ dy = \frac{1}{2}\int \frac{2y+1}{y^2+y+1}\ dy - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\ dy \\ &= \frac{1}{2}\log|y^2+y+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y+1}\ dy.\end{aligned}$$
Ora $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$, per cui bisogna completare il quadrato al denominatore:
$$y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

per cui

$$\int \frac{1}{y^2+y+1}\ dy = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\ dy = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2y+1}{\sqrt{3}}.$$

Pertanto

$$P = \frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

Primitive del tipo $\int R(\sin x, \cos x)\ dx$

Consideriamo ora il problema di determinare

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

dove R è un'opportuna funzione razionale, cioè $R(\xi,\eta) = \frac{p(\xi,\eta)}{q(\xi,\eta)}$ con p e q polinomi nelle variabili ξ ed η. In questo caso è possibile ricondurre il calcolo della primitiva in esame al calcolo della primitiva di una opportuna funzione razionale, ma la sostituzione è meno evidente. Infatti consiste nel porre

$$y = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan y.$$

Questo perché valgono le formule

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}, \quad \cos x = \frac{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}. \tag{3.5.1}$$

Queste formule vengono dette *formule parametriche* per il seno ed il coseno e sono verificabili a partire dalle proprietà di seno e coseno. Con tali formule abbiamo che

$$\int R(\sin x, \cos x)dx\Big|_{y=\tan\frac{x}{2},\ x=2\arctan y} = \int R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}\ dy,$$

che, per quanto complesso possa apparire, è comunque la primitiva di una funzione razionale.

Esempio 3.5.6. *Calcolare*

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x}\ dx.$$

Sol. — Operando la sostituzione standard dobbiamo calcolare:

$$\int \frac{1}{\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\ dy = 2\int \frac{1}{2y-1+y^2}\ dy.$$

Abbiamo che

$$y^2+2y-1 = (y-(-1-\sqrt{2}))(y-(-1+\sqrt{2})).$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2y-1+y^2} = \frac{\alpha}{y+1+\sqrt{2}} + \frac{\beta}{y+1-\sqrt{2}},$$

dove $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Allora

$$\int \frac{1}{2y - 1 + y^2} dy = -\frac{1}{\sqrt{2}} \log |y + 1 + \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \log |y + 1 - \sqrt{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{|y + 1 - \sqrt{2}|}{|y + 1 + \sqrt{2}|}.$$

Tornando alla x abbiamo, infine,

$$\int \frac{1}{\sin x - \cos x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{|\tan \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}|}{|\tan \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}|}. \quad \blacksquare$$

Capitolo 4

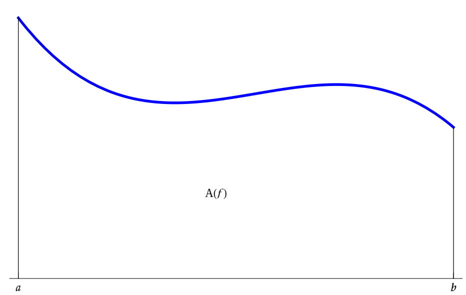
Integrale di Riemann

4.1 Introduzione

La teoria dell'integrazione si pone l'obiettivo di fornire una metodo sufficientemente generale per il calcolo di aree di figure piane. Per fissare le idee consideriamo una funzione $f : [a, b] \longrightarrow [0, +\infty[$. Vogliamo "misurare" l'area della porzione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse, cioè l'area dell'insieme

$$A(f) := \{(x, y) \ : \ a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} .$$

L'idea in fondo è molto semplice e si può far risalire ad Archimede, che fu il primo ad introdurre il



metodo di esaustione, e cioè di approssimare un'area generica tramite aree elementari per le quali l'area è appunto definita dalla geometria euclidea. L'area che viene così definita prende il nome di *integrale di Riemann della funzione* f. La definizione di integrale di Riemann è indubbiamente complessa nelle notazioni, ma l'idea di fondo è tutto sommato semplice da cui discendono in maniera abbastanza intuitiva le proprietà dell'integrale. Per questo motivo ometteremo gran parte delle "noiose" dimostrazioni che non aggiungono sostanzialmente niente alla comprensione.

Come spesso accade, ad una definizione naturale si associa una difficoltà pratica nel calcolare l'integrale. La grande scoperta di Torricelli è la connessione tra calcolo integrale e calcolo delle primitive attraverso il cosiddetto *teorema fondamentale del Calcolo Integrale*.

4.2 Definizione di funzione integrabile

Per definire le approssimazioni dell'area compresa tra il grafico di f e l'asse x utilizzeremo dei rettangoli aventi base sull'asse x. Per far ciò introduciamo alcune definizioni.

Definizione 4.2.1 (suddivisione)**.** *Una suddivisione di un intervallo* $[a, b]$ *è un insieme di punti* $\pi := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ *tali che*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Si pone

$$|\pi| := \max_{k=0,\dots,N-1} |x_{k+1} - x_k|.$$

L'insieme di tutte le suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ *viene indicato con* $\Pi[a, b]$.

Definizione 4.2.2 (somma inferiore e superiore)**.** *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia una funzione limitata. Se* $\pi \in \Pi[a, b]$ *si chiama* **somma inferiore** *di* f *relativa alla partizione* π

$$\underline{S}(\pi) := \sum_{k=0}^{N-1} m_k(x_{k+1} - x_k), \quad m_k := \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Si chiama **somma superiore** *di* f *relativa alla partizione* π

$$\overline{S}(\pi) := \sum_{k=0}^{N-1} M_k(x_{k+1} - x_k), \quad m_k := \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

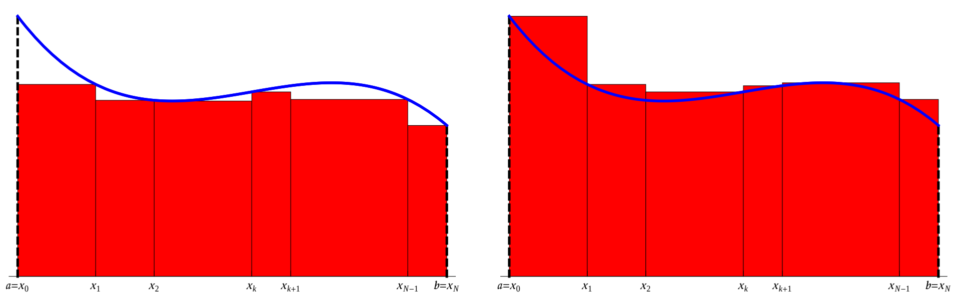


Figura 4.1: L'area a sx corrisponde ad una somma inferiore, a destra a una somma superiore.

È evidente che

Proposizione 4.2.3. *Sia* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sia una funzione limitata. Allora*

i) $\underline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi)$ *per ogni* $\pi \in \Pi[a, b]$*;*

ii) $\underline{S}(\pi_1) \leqslant \underline{S}(\pi_2)$, $\overline{S}(\pi_2) \leqslant \overline{S}(\pi_1)$, *per ogni* $\pi_1, \pi_2 \in \Pi[a, b]$ *con* $\pi_1 \subset \pi_2$.

Dim. — Esercizio. ■

Nel caso di una funzione positiva è chiaro che una somma inferiore è un'*approssimazione per difetto* dell'area di $A(f)$ mentre una somma superiore ne è un'*approssimazione per eccesso*. Definiamo ora le migliori approssimazioni per eccesso e per difetto. Dalla proposizione precedente appare evidente che la migliore approssimazione per difetto sarà il "massimo" delle somme inferiori, così come la migliore approssimazione per eccesso sarà il "minimo" delle somme superiori. In genere non esisteranno minimo e massimo per cui la definizione appropriatà è la seguente:

Definizione 4.2.4 (area inferiore e superiore)**.** *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Si chiamano rispettivamente* **area inferiore** *e* **area superiore** *le quantità*

$$\underline{A}(f) := \sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \underline{S}(\pi), \quad \overline{A}(f) := \inf_{\pi \in \Pi[a,b]} \overline{S}(\pi).$$

Evidentemente

Proposizione 4.2.5. *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora*

$$-\infty \leqslant \underline{A}(f) \leqslant \overline{A}(f) \leqslant +\infty. \tag{4.2.1}$$

Dim. — Evidente. ∎

Quando la migliore approssimazione per difetto coincide con la migliore approssimazione per eccesso diciamo che il valore comune è l'area di $A(f)$, che prende il nome di integrale.

Definizione 4.2.6 (funzione Riemann integrabile)**.** *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Si dice che f è* **Riemann integrabile su** $[a,b]$ *se $\underline{A}(f) = \overline{A}(f) \in \mathbb{R}$. In tal caso si pone*

$$\int_a^b f(x)\ dx := \underline{A}(f) \equiv \overline{A}(f).$$

L'insieme delle funzioni Riemann integrabili su $[a,b]$ è indicato col simbolo $\mathscr{R}([a,b])$.

Il prossimo esempio è banale ma istruttivo.

Esempio 4.2.7. *Le funzioni costanti sono integrabili e se $f \equiv C$ su $[a,b]$ allora*

$$\int_a^b C\ dx = C(b-a)$$

(come deve essere!). Infatti in questo caso

$$\underline{S}(\pi) = \sum_k m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_k C(x_{k+1} - x_k) = C(b-a),$$

e analogamente $\overline{S}(\pi) = C(b-a)$, per cui $\underline{A}(f) = \overline{A}(f) = C(b-a)$. ∎

4.3 Classi di funzioni integrabili

Una volta definito il concetto di funzione integrabile la prima questione naturale è: è vero che ogni funzione limitata è integrabile? La risposta è no come mostra il seguente celebre

Esempio 4.3.1 (la funzione di Dirichlet)**.** *La funzione*

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ \\ 1, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

non *è integrabile su* $[0,1]$. Infatti: sia $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ una partizione qualunque di $[0,1]$. Notiamo che, per la densità di razionali e irrazionali nei reali

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = 0, \quad M_k := \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = 1.$$

Pertanto

$$\underline{S}(\pi) = \sum_{k=0}^{N-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = 0, \quad \overline{S}(\pi) = \sum_{k=0}^{N-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) = 1.$$

Dunque

$$\underline{A}(f) = \sup_{\pi \in \Pi[0,1]} \underline{S}(\pi) = 0, \quad \overline{A}(f) = \inf_{\pi \in \Pi[0,1]} \overline{S}(\pi) = 1. \quad \blacksquare$$

Sarebbe naturalmente auspicabile avere una caratterizzazione diretta delle funzioni Riemann–integrabili. Tuttavia questo non è così semplice. Ciò che ora vedremo è come in una serie di casi notevoli si possa in generale stabilire l'integrabilità di una funzione. Utilizzeremo spesso il seguente fatto, che non è altro che la definizione:

Proposizione 4.3.2. *Una funzione limitata* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *è Riemann–integrabile su* $[a,b]$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \pi_\varepsilon \in \Pi[a,b] \ : \ \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4.3.1}$$

Dim. — È semplicemente un esercizio su sup e inf. Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora, essendo

$$I := \int_a^b f(x)\, dx = \sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \underline{S}(\pi) \in \mathbb{R},$$

fissato $\varepsilon > 0$ si trova una suddivisione π_ε^1 di $[a,b]$ tale che

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{S}(\pi_\varepsilon^1).$$

Similmente, essendo

$$I = \inf_{\pi \in \Pi[a,b]} \overline{S}(\pi)$$

si trova π_ε^2 tale che

$$\overline{S}(\pi_\varepsilon^2) \leqslant I + \varepsilon.$$

Prendiamo allora $\pi_\varepsilon := \pi_\varepsilon^1 \cup \pi_\varepsilon^2$. Allora, in virtù della Proposizione 4.2.3 abbiamo

$$I - \varepsilon \leqslant \underline{S}(\pi_\varepsilon^1) \leqslant \underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon^2) \leqslant I + \varepsilon, \quad \Longrightarrow \quad \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon.$$

Viceversa. Supponiamo sia vera la (4.3.1) e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, se $\pi \supset \pi_\varepsilon$, sempre per la Proposizione 4.2.3, abbiamo

$$\underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \underline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon).$$

Passando al sup nelle somme inferiori otteniamo

$$\underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \sup_{\pi \in \Pi[a,b]} \underline{S}(\pi) = \underline{A}(f) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon).$$

Per la (4.2.1) inoltre

$$\underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \underline{A}(f) \leqslant \overline{A}(f) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon),$$

da cui $\underline{A}(f), \overline{A}(f) \in \mathbb{R}$ e

$$0 \leqslant \overline{A}(f) - \underline{A}(f) \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Siccome ε è arbitrario si conclude che $\underline{A}(f) = \overline{A}(f)$, cioè $f \in \mathscr{R}([a,b])$. $\blacksquare$

4.3.1 Funzioni Continue

Il primo caso importante e sufficientemente generale per molte applicazioni è quello delle funzioni continue.

Teorema 4.3.3. *Se $f \in \mathscr{C}([a,b])$ allora $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Vale inoltre la seguente formula: se $\pi \in \Pi[a,b]$, $\pi = \{x_0, \dots, x_N\}$ e $P := \{y_0, \dots, y_{N-1}\}$ è tale che $y_k \in [x_k, x_{k+1}]$, poniamo*

$$S(\pi, P) := \sum_{k=0}^{N-1} f(y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Una coppia (π, P) soddisfacente le condizioni precedenti si dice **suddivisione puntata**. *Allora: se*

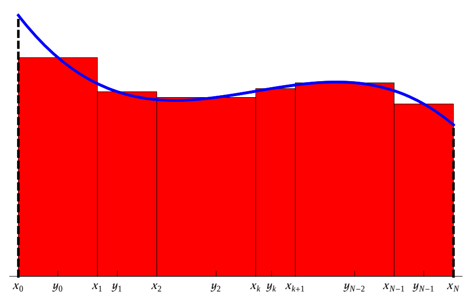


Figura 4.2: In colore l'area $S(\pi, P)$.

(π_n, P_n) è una successione di suddivisioni puntate tali che $|\pi_n| \longrightarrow 0$ si ha

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_n S(\pi_n, P_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{N_n - 1} f(y_k^n)(x_{k+1}^n - x_k^n). \tag{4.3.2}$$

Osservazione 4.3.4. *È da questa formula che discende la notazione $\int_a^b f(x)\ dx$: $\int$ è una S stilizzata e sta per somma, dx vuole ricordare $x_{k+1} - x_k$.* $\blacksquare$

Dim. — **Integrabilità:** mostriamo che vale la (4.3.1). Fissiamo $\varepsilon > 0$. Il punto chiave è il Teorema di Heine–Cantor: essendo f continua su $[a,b]$ compatto, è allora uniformemente continua. Quindi

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0, \; : \; |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, \; \forall x, y \in [a,b] \; : \; |x - y| \leqslant \delta(\varepsilon). \tag{4.3.3}$$

Prendiamo una qualsiasi partizione $\pi_\varepsilon \in \Pi[a,b]$ tale che $|\pi_\varepsilon| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Notiamo che

$$0 \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} M_k (x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{N-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Per il teorema di Weierstrass esistono $\xi_k, \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tali che

$$M_k = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(\eta_k), \quad m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = \min_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(\xi_k),$$

per cui, in virtù della (4.3.3),

$$0 \leqslant M_k - m_k = f(\eta_k) - f(\xi_k) \leqslant \varepsilon.$$

Ma allora

$$0 \leqslant \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon (b - a).$$

Formula di approssimazione (4.3.2). Per n sufficientemente grande $|\pi_n| \leqslant \delta(\varepsilon)$ (quindi $n \geqslant n_0(\varepsilon)$). Quindi per quanto appena detto, essendo

$$m_k^n \leqslant f(y_k^n) \leqslant M_k^n, \; \forall k, \quad \Longrightarrow \quad \underline{S}(\pi_n) \leqslant S(\pi_n) \leqslant \overline{S}(\pi_n),$$

da cui

$$-\varepsilon(b-a) \leqslant \underline{S}(\pi_n) - \overline{S}(\pi_n) \leqslant S(\pi_n) - \int_a^b f(x) \; dx \leqslant \overline{S}(\pi_n) - \underline{S}(\pi_n) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

ovvero

$$\left| \int_a^b f(x) \; dx - S(\pi_n) \right| \leqslant \varepsilon(b-a), \quad \forall n \geqslant n_0(\varepsilon). \quad \blacksquare$$

4.3.2 Funzioni monotone

Un altro caso interessante, fors'anche più semplice da mostrare, è quello delle funzioni monotone:

Teorema 4.3.5. *Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e monotona. Allora $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Inoltre, se $(\pi_n) \subset \Pi[a,b]$ è una sequenza di suddivisioni tali che $|\pi_n| \longrightarrow 0$ allora*

$$\int_a^b f(x) \; dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{N_n - 1} f(x_k^n)(x_{k+1}^n - x_k^n). \tag{4.3.4}$$

Dim. — Supponiamo, ad esempio, $f \nearrow$. Allora

$$m_k := \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k), \quad M_k := \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}),$$

per cui

$$\underline{S}(\pi) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k), \quad \overline{S}(\pi) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k).$$

Ma allora

$$0 \leqslant \overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)(x_{k+1} - x_k) \leqslant |\pi| \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right) = |\pi| \left(f(b) - f(a)\right).$$

Ma allora

$$0 \leqslant \overline{S}(\pi_n) - \underline{S}(\pi_n) \leqslant |\pi_n|(f(b) - f(a)) \longrightarrow 0.$$

Infine: la somma nella (4.3.4) altro non è che $\underline{S}(\pi_n)$. ■

La (4.3.4) è la formula utilizzata da Archimede per calcolare alcuni integrali non banali:

Esempio 4.3.6.

$$\int_0^b x^2 \; dx = \frac{b^3}{3}, \;\; \forall b > 0.$$

Sol. — La funzione $f(x) := x^2$, $x \in [0, b]$ è continua quindi integrabile (oppure monotona e quindi ancora integrabile). Utilizziamo la (4.3.4) prendendo come suddivisione di $[0, b]$ quella in n parti uguali, cioè

$$x_k = k\frac{b}{n}, \;\; k = 0, 1, \dots, n.$$

Allora

$$\int_0^b x^2 \; dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(k\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{b^3}{3}. \;\; ■$$

Calcolare $\int_0^b x^m \; dx$ con il metodo precedente (in particolare, con la suddivisione precedente) si fa molto complesso non appena $n \geqslant 3$.

Esempio 4.3.7.

$$\int_0^b e^x \; dx = e^b - 1, \;\; \forall b > 0.$$

Sol. — Anche in questo caso la funzione $f(x) := e^x$ $x \in [0, b]$ è sia continua che monotona, quindi integrabile in base ad uno dei due teoremi precedenti. Applicando di nuovo la (4.3.4) prendendo come suddivisione di $[0, b]$ quella in n parti uguali, cioè

$$x_k = k\frac{b}{n}, \;\; k = 0, 1, \dots, n.$$

otteniamo

$$\int_0^b e^x \; dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k\frac{b}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{b/n}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{b}{n} \frac{1-e^b}{1-e^{b/n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^b}{\frac{1-e^{b/n}}{b/n}} = e^b - 1. \;\; ■$$

Ovviamente appare impossibile procedere ogni volta con questo tipo di calcoli che sono molto legati all'abilità a trovare formule finite per somme. Notiamo un fatto apparentemente curioso: se pensiamo alla funzione

$$b \longmapsto \int_0^b x^2 \; dx, \;\; \Longrightarrow \;\; \left(\int_0^b x^2 \; dx\right)' = \left(\frac{b^3}{3}\right)' = b^2,$$

e similmente
$$\left(\int_0^b e^x \ dx\right)' = \left(e^b - 1\right)' = e^b.$$
Questo fatto è tutt'atro che accidentale e, come vedremo tra un paio di sezioni, costituisce il contenuto del *teorema fondamentale del calcolo integrale* e connette l'operazione di integrale al calcolo delle primitive.

4.4 Proprietà dell'integrale di Riemann

L'integrale di Riemann gode di una serie di proprietà semplici e naturali riassunte nella

Proposizione 4.4.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

i) *(***linearità***) se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}([a,b])$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e vale*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \ dx = \alpha \int_a^b f(x) \ dx + \beta \int_a^b g(x) \ dx. \tag{4.4.1}$$

ii) *(***isotonia***) se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ e $f \leqslant g$ su $[a,b]$ allora*
$$\int_a^b f(x) \ dx \leqslant \int_a^b g(x) \ dx. \tag{4.4.2}$$
In particolare: se $f \geqslant 0$ su $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x) \ dx \geqslant 0$.

iii) *(***disuguaglianza triangolare***) se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ e*
$$\left|\int_a^b f(x) \ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \ dx. \tag{4.4.3}$$

iv) *(***decomposizione***) se $f \in \mathscr{R}([a,b]), \mathscr{R}([b,c])$ allora $f \in \mathscr{R}([a,c])$ e*
$$\int_a^c f(x) \ dx = \int_a^b f(x) \ dx + \int_b^c f(x) \ dx.$$
In particolare: se $f \in \mathscr{C}([a,b] \backslash \{\xi_1, \ldots, \xi_N\})$ ed continua da destra e da sinistra in ciascuno dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_N$, allora $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

v) *(***restrizione***) se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $f \in \mathscr{R}([c,d])$ per ogni $[c,d] \subset [a,b]$ e vale*
$$\int_c^d f(x) \ dx = \int_a^b f(x)\chi_{[c,d]}(x) \ dx, \quad \textit{dove } \chi_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c,d], \\ 0, & x \notin [c,d]. \end{cases}$$

vi) *se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $fg \in \mathscr{R}([a,b])$* [1]

[1] Ma attenzione!! Non è vero che $\int_a^b f(x)g(x) \ dx = \left(\int_a^b f(x) \ dx\right)\left(\int_a^b g(x) \ dx\right)$.

vii) se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora se $f^+ := \max\{f,0\}$ e $f^- := \max\{-f,0\}$ (rispettivamente dette **parte positiva** *e* **parte negativa** *di f) si ha $f^+, f^- \in \mathscr{R}([a,b])$.*

Dim. — Le dimostrazioni sono lunghe e noiose rapportate alla "naturalezza" delle conclusioni che meritano di essere omesse. ■

Per scopi futuri è conveniente estendere la definizione di integrale nel seguente modo:

Definizione 4.4.2. *Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ si pone*

$$\int_b^a f(x)\ dx := -\int_a^b f(x)\ dx.$$

In questo senso si dice che $f \in \mathscr{R}([b,a])$.

Utilizzando la proposizione 4.4.1 è facile estendere le proprietà dell'integrale anche al caso precedente

Proposizione 4.4.3. *Valgono le seguenti proprietà:*

*i) (***linearità***) se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ allora*

$$\int_b^a (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_b^a f(x)\ dx + \beta \int_b^a g(x)\ dx. \tag{4.4.4}$$

*ii) (***isotonia***) se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ e $f \leqslant g$ su $[a,b]$ allora*

$$\int_b^a f(x)\ dx \geqslant \int_b^a g(x)\ dx. \tag{4.4.5}$$

In particolare: se $f \geqslant 0$ su $[a,b]$ allora $\int_b^a f(x)\ dx \leqslant 0$.

*iii) (***disuguaglianza triangolare***) se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ e*

$$\left|\int_b^a f(x)\ dx\right| \leqslant \left|\int_b^a |f(x)|\ dx\right| = \int_a^b |f(x)|\ dx. \tag{4.4.6}$$

*iv) (***decomposizione***) se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ (non importa come sono ordinati) allora*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(x)\ dx + \int_\beta^\gamma f(x)\ dx.$$

Dim. — Esercizio. ■

4.5 Teorema della media

Il teorema della media afferma che l'area sotto al grafico di una funzione continua f equivale all'area di un rettangolo avente per base l'intervallo $[a,b]$ e per altezza un opportuno valore della funzione f:

Teorema 4.5.1. *Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$. Allora esiste $\xi \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b-a).$$

La quantità $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$ si chiama **media integrale** *di f su $[a,b]$.*

Dim. — La dimostrazione è semplicissima. Osserviamo anzitutto che per il Teorema di Weierstrass f ammette minimo e massimo assoluti su $[a,b]$. Siano, rispettivamente, m ed M il valore minimo e il valore massimo, cioè

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Allora

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,\ \forall x \in [a,b], \quad \stackrel{isotonia}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b m\ dx \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b M\ dx,$$

cioè

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant M(b-a), \quad \Longleftrightarrow \quad m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \leqslant M.$$

Ma allora, per il Teorema dei valori intermedi, esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx. \quad \blacksquare$$

4.6 Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

In questa sezione presentiamo il risultato più importante e profondo della teoria dell'integrazione secondo Riemann. Introduciamo anzitutto la fondamentale

Definizione 4.6.1 (Funzione integrale)**.** *Sia $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e sia $c \in [a,b]$ fissato. Si chiama* funzione integrale centrata in *c la funzione*

$$F_c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_c(x) := \int_c^x f(y)\ dy,\ x \in [a,b].$$

Naturalmente se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ si ha che $f \in \mathscr{R}([c,x])$ per ogni $x \in [a,b]$ quindi la funzione integrale è ben definita. Il teorema fondamentale è il seguente:

Teorema 4.6.2. *Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ e sia F_c la sua funzione integrale centrata in un certo $c \in [a,b]$, ovvero $F_c(x) := \int_c^x f(y)\ dy$, $x \in [a,b]$. Allora F_c è continua e derivabile e vale*

$$F_c'(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b].$$

In particolare $F_c \in \mathscr{C}^1([a,b])$. In altre parole: **ogni funzione integrale di f è una primitiva di f.**

Dim. — Evidentemente basta mostrare che F_c è derivabile (perché allora è anche continua) e vale $F_c' = f$ (perché allora $F_c' \in \mathscr{C}$, cioè $F_c \in \mathscr{C}^1$). A tal fine sia $h > 0$ (ragionamento analogo per $h < 0$) e osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_c^{x+h} f(y)\ dy - \int_c^x f(y)\ dy\right) = \frac{1}{h}\left(\int_c^x f(y)\ dy + \int_x^{x+h} f(y)\ dy - \int_c^x f(y)\ dy\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\ dy.\end{aligned}$$

Quest'ultima è una media integrale (la media di f sull'intervallo $[x, x+h]$): essendo f continua, per il teorema della media esiste un punto $\xi_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\ dy \overset{T.\ media}{=} f(\xi_h).$$

Chiaramente per $h \longrightarrow 0+$ si ha $\xi_h \longrightarrow x+$ quindi, essendo f continua

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F_c(x+h) - F_c(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} f(\xi_h) = f(x).$$

In altre parole la derivata destra di F_c in x e vale $f(x)$. Similmente si ottiene la stessa conclusione con la derivata sinistra e quindi si conclude. ■

Osservazione 4.6.3 (Importante). *Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma, in particolare, che* **ogni funzione continua ammette una primitiva** *(la funzione integrale).*

Poiché sugli intervalli le primitive differiscono per una costante additiva (ved. Proposizione 3.2.2) abbiamo il

Corollario 4.6.4. *Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ ed F una primitiva di f su $[a,b]$. Allora vale la* **formula fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{4.6.1}$$

Dim. — Infatti: consideriamo la funzione integrale F_a. Per il teorema fondamentale del Calcolo Integrale essa è una primitiva di f. Ma allora $F_a - F$ è costante in virtù della Proposizione 3.2.2, ovvero $F_a - F \equiv k \in \mathbb{R}$. Allora

$$F_a(a) - F(a) = k, \quad F_a(b) - F(b) = k.$$

D'altra parte

$$F_a(a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0, \quad F_a(b) = \int_a^b f(x)\ dx,$$

per cui

$$\int_a^b f(x)\ dx = F_a(b) = F(b) + k = F(b) + (F_a(a) - F(a)) = F(b) - F(a). \quad ■$$

La formula fondamentale del calcolo integrale fornisce quindi la connessione tra calcolo delle primitive e calcolo degli integrali di Riemann. La procedura è semplice: presa una funzione continua se ne calcola una primitiva sull'intervallo in esame. Dopodiché si prende la differenza tra il valore della primitiva nell'estremo finale e quello nell'estremo iniziale e il gioco è fatto! Più semplice di così. . .

Esempio 4.6.5. *Calcolare*

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1}\, dx.$$

Sol. — Si tratta di una funzione continua su $[0, +\infty[$ ed in particolare sull'intervallo $[0, \log 4]$. Dunque, come noto, f è Riemann–integrabile. Cominciamo col calcolo di una primitiva dell'integranda.

$$\int \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1} dx \Big|_{y=\sqrt{e^x-1}, x=\log(1+y^2)} = \int \frac{y}{8\frac{1}{1+y^2} + 1} \frac{2y}{1+y^2} dy = \int \frac{2y^2}{y^2+9} dy = 2 \int \frac{y^2 + 9 - 9}{y^2+9} dy$$

$$= 2\left[\int dy - 9 \int \frac{1}{y^2+9} dy\right] = 2\left[y - \int \frac{1}{\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 1} dy\right] = 2\left[y - 3 \arctan \frac{y}{3}\right] = 2\sqrt{e^x - 1} - 6 \arctan \frac{\sqrt{e^x - 1}}{3}.$$

Quindi, per la formula fondamentale del calcolo integrale, avremo che

$$\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{8e^{-x} + 1} dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 6 \arctan \frac{\sqrt{e^x - 1}}{3} \Big|_{x=0}^{x=\log 4} = 2\sqrt{3} - \pi. \quad \blacksquare$$

4.6.1 Teorema di Darboux

Il teorema fondamentale del calcolo fornisce una risposta abbastanza generale al problema dell'esistenza di una primitiva per un'assegnata funzione f: se f è continua allora ogni sua funzione integrale ne è una primitiva. Ma esistono funzioni che non ammettono primitiva, cioè che non sono la derivata di alcuna funzione? Abbastanza facilmente la risposta è sì anche se non è per niente banale, ed è conseguenza del seguente risultato che afferma, in sostanza, che la derivata di una funzione derivabile verifica la proprietà dei valori intermedi:

Teorema 4.6.6 (Darboux)**.** *Sia $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora $F'([a, b])$ è un intervallo.*

Dim. — Supponiamo per assurdo che $F'([a, b])$ non sia un intervallo. Esistono allora $\alpha, \beta \in [a, b]$, per esempio $\alpha < \beta$, e $k \notin F'([a, b])$ tali che $F'(\alpha) < k < F'(\beta)$. Sostituendo $F(x)$ con $G(x) := F(x) - kx$ abbiamo che $G' = F' - k$ e $G'(\alpha) < 0 < G'(\beta)$ con $0 \notin G'([a, b])$. Ma questo è impossibile: G è continua su $[\alpha, \beta]$ quindi ha un min/max in $[\alpha, \beta]$. Notiamo che essendo $G'(\alpha) < 0$, α è un max locale ed essendo $G'(\beta) > 0$ nuovamente β è un max locale. Quindi il minimo di G su $[\alpha, \beta]$ deve essere interno a $[\alpha, \beta]$, per cui in tale punto si avrà $G' = 0$ per il teorema di Fermat. $\blacksquare$

Quindi per trovare un esempio di una funzione che non ammetta primitiva basta prendere una funzione f definita su un intervallo tale che $f([a, b])$ non sia un intervallo!

Notiamo, per concludere, che "non ammettere una primitiva" non significa affatto che questa non sia "calcolabile" in termini finiti. Il classico esempio è fornito dalla funzione $f(x) := e^{-x^2}$. Essa è continua su $\mathbb{R}$, quindi per il teorema fondamentale del calcolo ammette una primitiva. Tuttavia, se si prova a calcolarla esplicitamente si scopre che il compito è tutt'altro che banale, e presto si ha come la sensazione che sia addirittura impossibile. Almeno se l'obiettivo è quello di ottenere un risultato espressione di una combinazione finita di funzioni elementari. Si può mostrare, ma noi qui non lo faremo, che una forma per una primitiva può essere ottenuta tramite uno sviluppo in serie: l'idea è che essendo

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!},$$

si abbia

$$\int e^{-x^2}\ dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{2n}}{n!}\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Che il risultato sia corretto è conseguenza del Teorema di derivazione delle funzioni analitiche 2.4.1. In altre parole bisogna stare attenti a non confondere l'esistenza o meno di una primitiva con la calcolabilità o meno in termini finiti della stessa!

4.7 Formule d'integrazione

Un altro modo di scrivere la (4.6.1) è la seguente:

Corollario 4.7.1. *Sia* $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$*. Allora*

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a). \tag{4.7.1}$$

Dim. — Evidente. ■

Da questa deduciamo subito la versione per gli integrali di Riemann delle formule di calcolo per parti e per sostituzione.

Proposizione 4.7.2 (formula d'integrazione per parti)**.** *Siano* $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$*. Allora*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx. \tag{4.7.2}$$

Dim. — Basta osservare che

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \implies \int_a^b (fg)'(x)\ dx = \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\ dx.$$

Ma per la (4.7.1) si ha

$$\int_a^b (fg)'(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

da cui facilmente si conclude. ■

Proposizione 4.7.3 (formula di cambio di variabili)**.** *Sia* $f \in \mathscr{C}([a,b])$*,* $\psi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$*,* $\psi \in \mathscr{C}^1$*, biiettiva con inversa* $\psi^{-1} \in \mathscr{C}^1$*. Allora*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy. \tag{4.7.3}$$

Dim. — Sia F una primitiva di f (che esiste in virtù del teorema fondamentale del calcolo integrale). Allora $F' = f$ per cui

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Consideriamo ora $\int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy$. Anzitutto: affermiamo che $\psi' > 0$ o $\psi' < 0$ su tutto $[c, d]$. Infatti: se ψ' cambiasse segno allora da qualche parte dovrebbe annullarsi. Ma essendo

$$\psi^{-1}(\psi(y)) = y,\ \forall y \in [c, d],\quad \Longrightarrow\quad (\psi^{-1})'(\psi(y))\psi'(y) = 1,\ \forall y \in [c, d]$$

questo è evidentemente impossibile. Supponiamo per esempio che $\psi' > 0$ su $[c, d]$. Allora

$$\int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy = \int_c^d F'(\psi(y))\psi'(y)\ dy = \int_c^d (F(\psi(y)))'\ dy \overset{(4.7.1)}{=} F(\psi(d)) - F(\psi(c)).$$

Essendo $\psi \nearrow$ e biiettiva necessariamente $\psi(d) = b$ e $\psi(c) = a$ per cui

$$\int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Se invece $\psi' < 0$, cioè $\psi \searrow$,

$$\int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy = -\int_c^d F'(\psi(y))\psi'(y)\ dy = -\int_c^d (F(\psi(y)))'\ dy \overset{(4.7.1)}{=} -\left(F(\psi(d)) - F(\psi(c))\right).$$

Ma ora $\psi(d) = a$ mentre $\psi(c) = b$ essendo $\psi \nearrow$ e dunque, nuovamente,

$$\int_c^d f(\psi(y))|\psi'(y)|\ dy = -\left(F(a) - F(b)\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx. \quad \blacksquare$$

Osservazione 4.7.4. *Come facilmente si verifica (è sostanzialmente scritto nella dimostrazione della proposizione precedente) la (4.7.3) può equivalentemente essere riscritta nella seguente forma:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(y))\psi'(y)\ dy. \quad \blacksquare \tag{4.7.4}$$

4.8 Applicazioni

4.8.1 Calcolo di aree

Esempio 4.8.1 (Area del cerchio)**.** *Calcolare l'area di un cerchio di raggio r.*

Sol. — Evidentemente

$$\text{Area}\left(x^2 + y^2 \leqslant r^2\right) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx.$$

La funzione $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ è continua su $[-r, r]$, quindi integrabile. Calcoliamo l'integrale. Anzitutto

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = r\int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\ dx \overset{y := \frac{x}{r},\ x = ry =: \psi(y)}{=} r\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}r\ dy = r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\ dy.$$

Changing again variable, $y = \sin\theta =: \psi(\theta)$, ψ is a $\mathscr{C}^1$ increasing change of variable between $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ and $[-1, 1]$. Therefore

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\ dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin\theta)^2}\cos\theta\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos\theta|\cos\theta\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2\ d\theta.$$

Finally, by parts,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)(\sin\theta)'\ d\theta = [(\cos\theta)(\sin\theta)]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin\theta)(\sin\theta)\ d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^2\ d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-(\cos\theta)^2\ d\theta = \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2\ d\theta$$

da cui

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2\ d\theta = \pi, \iff \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^2\ d\theta = \frac{\pi}{2},$$

ed infine $\mathrm{Area}(x^2+y^2 \leqslant r^2) = 2\cdot\frac{\pi}{2}r^2 = \pi r^2$. ■

4.8.2 Funzioni integrali

Col Teorema fondamentale del calcolo integrale si è visto che se $f \in \mathscr{C}([a,b])$ allora la funzione integrale

$$F_c(x) := \int_c^x f(y)\ dy,\ x \in [a,b],$$

è $\mathscr{C}^1$ e $F_c'(x) = f(x)$. Capita spesso di dover studiare la derivabilità di una funzione del tipo

$$\Phi(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\ dy,$$

ammesso l'espressione abbia senso. Di fatto un'applicazione elementare della regola della catena ci fornisce l'espressione per la derivata:

Proposizione 4.8.2. *Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$, $\alpha,\beta : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che $\alpha(x),\beta(x) \in [a,b]$ per ogni $x \in I$ intervallo. Supponiamo che α e β siano funzioni derivabili su I. Allora*

$$\Phi(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\ dy,\ x \in I,$$

è derivabile e

$$\Phi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x),\ x \in I.$$

Dim. — Sia $c \in [a,b]$ fissato. Allora per la proprietà di decomposizione

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(y)\,dy = \int_{\alpha(x)}^{c} f(y)\,dy + \int_c^{\beta(x)} f(y)\,dy = -\int_c^{\alpha(x)} f(y)\,dy + \int_c^{\beta(x)} f(y)\,dy = -F_c(\alpha(x)) + F_c(\beta(x)),$$

dove F_c è la funzione integrale di f centrata in c. Essendo f continua, per il teorema fondamentale del calcolo e la regola della catena,

$$\Phi'(x) = -F_c'(\alpha(x))\alpha'(x) + F_c'(\beta(x))\beta'(x) = -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x).\quad ■$$

Esempio 4.8.3. *Calcolare il*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\sin y}{y}\ dy.$$

Sol. — Possiamo considerare la funzione $f(y) := \frac{\sin y}{y}$ definita e continua su tutto $\mathbb{R}$ con $f(0) = 1$. Chiaramente

$$\int_x^{2x} \frac{\sin y}{y}\ dy = \int_x^{0} \frac{\sin y}{y}\ dy + \int_0^{2x} \frac{\sin y}{y}\ dy \longrightarrow 0,$$

per $x \longrightarrow 0$. Dunque il limite si presenta come una forma $\frac{0}{0}$. Applicando la regola di Hôpital e ricordando la formula di derivazione della Proposizione precedente, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} \frac{\sin y}{y}\ dy}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 - \frac{\sin x}{x} \cdot 1}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \sin x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x) - \cos x}{1} = 1. \quad \blacksquare$$

Capitolo 5

Integrali Generalizzati

5.1 Introduzione

Per molte applicazioni la nozione di integrale di Riemann risulta troppo stretta. Una delle restrizioni insite nella definizione stessa di integrale è che le funzioni di cui si vuole calcolare l'integrale debbono essere *limitate* e definite su *intervalli limitati*. Non c'è solo questo. Per esempio per molte applicazioni importanti sarebbe opportuno dare un senso all'integrale di funzioni molto irregolari, come la funzione di Dirichlet che abbiamo visto quale esempio di funzione non integrabile.

La soluzione più soddisfacente a tutti questi problemi è una teoria più generale dell'integrazione, che viene detta *integrazione alla Lebesgue* e che sarà oggetto di corsi successivi. In questo capitolo introdurremo una nozione di integrale utile a superare (in parte) le due restrizioni iniziali: la limitatezza delle funzioni che si vuole integrare e la limitatezza dei domini di definizione. Il concetto che ne scaturirà è quello di *integrale generalizzato*. Una volta introdotta questa estensione ci occuperemo del problema della *convergenza* di questi integrali. Convergenza di fatto significa stabilire se sono finiti o meno senza necessariamente calcolarli, come avviene per le serie numeriche. In effetti l'analogia con le serie è molto stretta poiché vedremo che, opportunamente adattati, valgono praticamente gli stessi risultati. È utile quindi, per una migliore comprensione di questo Capitolo, ripassare i fondamentali delle serie numeriche.

5.2 Definizioni

5.2.1 Integrale generalizzato su intervalli illimitati

Cominciamo dal problema di voler dare un senso al simbolo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

La cosa più naturale da fare è definire questo come limite di integrali di Riemann ordinari del tipo $\int_a^R f(x)\, dx$ quando $R \longrightarrow +\infty$. Per avere un senso quindi sarà necessario che $f \in \mathscr{R}([a,R])$ per ogni $R > a$. È utile premettere al tutto la seguente

Definizione 5.2.1 (funzione localmente integrabile)**.** *Sia $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è* **localmente integrabile** *su D se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ per ogni $[a,b] \subset D$. In tal caso scriviamo $f \in \mathscr{R}_{loc}(D)$.*

Osservazione 5.2.2. *Ovviamente* $\mathscr{R}_{loc}([a,b]) = \mathscr{R}([a,b])$. *Inoltre,* $\mathscr{C}(D) \subset \mathscr{R}_{loc}(D)$. Infatti se $f \in \mathscr{C}(D)$ allora $f \in \mathscr{C}([a,b]) \subset \mathscr{R}([a,b])$ per ogni $[a,b] \subset D$. ■

Possiamo ora introdurre la

Definizione 5.2.3. *Sia* $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,+\infty[)$. *Diciamo che* f *è* **integrabile in senso generalizzato** *su* $[a,+\infty[$ *se*

$$\exists \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)\ dx \in \mathbb{R}.$$

In tal caso il valore del limite si chiama **integrale generalizzato di** f **su** $[a,+\infty[$ *e viene indicato col simbolo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Definizione analoga per $\int_{-\infty}^b f(x)\ dx$.

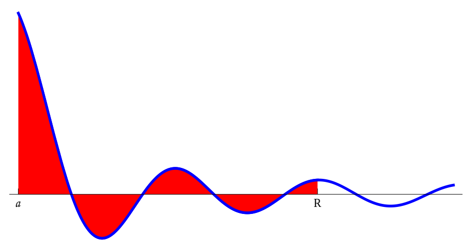


Figura 5.1: In colore l'area $\int_a^R f(x)\ dx$.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5.2.4. *Sia* $a > 0$. *Allora*

$$\exists \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx \iff \alpha > 1.$$

Sol. — Infatti. Ovviamente $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ è localmente integrabile su $[a,+\infty[$ perché è continua. Chiaramente, se $R > a$,

$$\int_a^R \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \int_a^R x^{-\alpha}\ dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{x=a}^{x=R} = \frac{R^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1, \\ \\ \log x\Big|_{x=a}^{x=R} = \log R - \log a, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Da questo è evidente che

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \\ +\infty, & \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

In particolare: per $\alpha > 1$ si ha $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$. ■

Esercizio 5.2.5. *Del tutto similmente si vede che* $\int_{-\infty}^{b} \frac{1}{|x|^\alpha}\ dx < +\infty$ *sse* $\alpha > 1$.

Esempio 5.2.6.

$$\exists \int_a^{+\infty} e^{\beta x}\ dx, \quad \Longleftrightarrow \quad \beta < 0.$$

Sol. — Anche in questo caso il conto è semplice: anzitutto $f(x) := e^{\beta x}$ essendo continua su $[0, +\infty[$ è ivi localmente integrabile. Inoltre

$$\int_a^R e^{\beta x}\ dx = \begin{cases} \frac{e^{\beta x}}{\beta}\Big|_{x=a}^{x=R} = \frac{e^{\beta R}}{\beta} - \frac{e^{\beta a}}{\beta}, & \beta \neq 0, \\ \\ R - a, & \beta = 0. \end{cases}$$

È chiaro allora che se esiste finito $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{\beta x}\ dx$ sse $\beta < 0$. In tal caso

$$\int_a^{+\infty} e^{\beta x}\ dx = \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{e^{\beta R}}{\beta} - \frac{e^{\beta a}}{\beta} \right) = -\frac{e^{\beta a}}{\beta}. \quad \blacksquare$$

Esercizio 5.2.7. *Del tutto similmente si vede che* $\int_{-\infty}^{b} e^{\beta x}\ dx < +\infty$ *sse* $\beta > 0$.

Sarà utile per il seguito ricordare questi esempi fondamentali. Diamo infine la

Definizione 5.2.8. *Sia* $f \in \mathscr{R}_{loc}(\mathbb{R})$. *Diciamo che* f *è* **integrabile in senso generalizzato su** $\mathbb{R}$ *se esistono* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx$ *e* $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ *per qualche* $a \in \mathbb{R}$. *In tal caso si pone*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx + \int_a^{+\infty} f(x)\ dx.$$

Osservazione 5.2.9. *È facile mostrare che la definizione non dipende dallo specifico* a.

È evidente che vale la seguente

Proposizione 5.2.10. *Siano* $f, g \in \mathscr{R}_{loc}([a, +\infty[)$. *Allora, se* f *e* g *sono integrabili in senso generalizzato su* $[a, +\infty[$ *allora anche* $\alpha f + \beta g$ *lo è per ogni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e*

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\ dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\ dx.$$

Dim. — Esercizio. $\blacksquare$

5.2.2 Integrale generalizzato di funzioni illimitate

Con la stessa filosofia vogliamo ora trattare il caso di una funzione non necessariamente limitata.

Definizione 5.2.11. *Sia* $f \in \mathscr{R}_{loc}(]a, b])$. *Diciamo che* f *è* **integrabile in senso generalizzato su** $]a, b]$ *se*

$$\exists \lim_{r\to a+} \int_r^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}.$$

In tal caso si pone $\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{r\to a+} \int_r^b f(x)\ dx$.

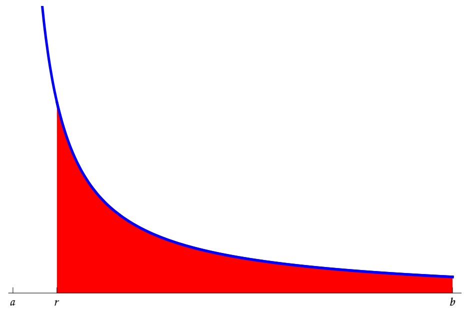


Figura 5.2: In colore l'area $\int_r^b f(x)\ dx$.

Occorre subito chiarire la possibile ambiguità nelle notazioni, visto che utilizziamo lo stesso simbolo per l'integrale di Riemann e per quello generalizzato. L'ambiguità in realtà non sussiste. Infatti:

Proposizione 5.2.12. *Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora è anche integrabile in senso generalizzato e i due integrali (quello di Riemann e quello generalizzato) coincidono.*

Dim. — Proviamo in realtà un fatto più generale, da cui la conclusione discenderà immediatamente:

Lemma 5.2.13. *Sia $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e sia $F_c(x) := \int_c^x f(y)\ dy$ una sua funzione integrale ($c \in [a,b]$ fissato). Allora $F_c \in \mathscr{C}([a,b])$. Anzi, di più: F_c è lipschitziana.*

Dim. — Infatti:

$$F_c(x_1) - F_c(x_2) = \int_c^{x_1} f(y)\ dy - \int_c^{x_2} f(y)\ dy = \int_c^{x_1} f(y)\ dy + \int_{x_2}^{c} f(y)\ dy = \int_{x_2}^{x_1} f(y)\ dy.$$

Ora: essendo f limitata, $|f(x)| \leqslant M$, per cui, per la disuguaglianza triangolare

$$|F_c(x_1) - F_c(x_2)| \leqslant \left| \int_{x_2}^{x_1} |f(y)|\ dy \right| \leqslant \left| \int_{x_2}^{x_1} M\ dy \right| \leqslant M|x_1 - x_2|,\ \forall x_1, x_2 \in [a,b]. \quad \blacksquare$$

Ma allora,

$$\lim_{r \to a+} \int_r^b f(x)\ dx = -\lim_{r \to a+} \int_b^r f(x)\ dx = -\lim_{r \to a+} F_b(r) = -F_b(a) = -\int_b^a f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx. \quad \blacksquare$$

Esempio 5.2.14. *Se $b > a$,*

$$\exists \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\ dx, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1.$$

Sol. — Infatti: $f(x) := \frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \mathscr{C}(]a,b])$, quindi $f \in \mathscr{R}_{loc}(]a,b])$. Inoltre

$$\int_r^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\ dx = \begin{cases} \left.\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{x=r}^{x=b} = \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(r-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1, \\ \\ \left.\log(x-a)\right|_{x=r}^{x=b} = \log(b-a) - \log(r-a), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Da questo è immediato concludere che

$$\lim_{r\to a+}\int_r^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha<1, \\ \\ +\infty, & \alpha\geqslant 1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

In modo simile si definisce $\int_a^b f(x)\,dx$ con $f\in\mathscr{R}_{loc}([a,b[)$.

Definizione 5.2.15. *Sia* $f\in\mathscr{R}_{loc}(]a,b[)$. *Diciamo che* f *è* **integrabile in senso generalizzato su** $]a,b[$ *se esistono* $\int_a^c f(x)\,dx$ *e* $\int_c^b f(x)\,dx$ *per qualche* $c\in]a,b[$. *In tal caso si pone*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Osservazione 5.2.16. *Anche in questo caso è semplice verificare che la definizione non dipende da* $c\in]a,b[$.

Anche in questo caso si ha la linearità dell'integrale generalizzato:

Proposizione 5.2.17. *Siano* $f,g\in\mathscr{R}_{loc}(]a,b])$. *Allora, se* f *e* g *sono integrabili in senso generalizzato su* $]a,b]$ *allora anche* $\alpha f+\beta g$ *lo è per ogni* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *e*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Dim. — Esercizio. $\blacksquare$

5.3 Criteri di integrabilità

Formalmente il problema di stabilire l'esistenza (o, con un sinonimo, *convergenza*) di un integrale generalizzato rimanda al calcolo di un limite di un integrale di Riemann con un estremo variabile. Nelle applicazioni (come ad esempio nel Calcolo delle Probabilità) si incontrano molti integrali importanti che però non è semplice (se non impossibile) stabilire con la definizione l'esistenza. Il caso più classico è fornito dall'*integrale di Gauss*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Il problema è che è impossibile calcolare una primitiva della funzione $x\longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ in termini di un numero finito di funzioni elementari (affermazione indubbiamente un po' vaga, ma il lettore si renderà subito conto di cosa si parla provando a calcolare la primitiva...). Il problema è di fatto simile a quello delle serie numeriche: per stabilire se convergono non è necessario calcolarne la somma ma verificare alcune proprietà qualitative del termine generale. Vedremo ora, proprio in analogia con le serie, che ciò si verifica anche con gli integrali generalizzati. Per avere chiaro il parallelo conviene operare la seguente traduzione:

$$\sum_n a_n \leftrightsquigarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \sum_{n=0}^N a_n \leftrightsquigarrow \int_a^R f(x)\,dx. \tag{5.3.1}$$

Con questa "tabella di conversione" per esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leftrightsquigarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\ dx,\ \ \sum_{n=0}^{\infty} q^n,\ \leftrightsquigarrow \int_0^{+\infty} q^x\ dx \equiv \int_0^{+\infty} e^{\beta x}\ dx,\ (q = e^\beta,\ \beta = \log q).$$

Come per le serie distingueremo il caso delle integrande a segno costante da quelle a segno variabile.

5.3.1 Caso integranda a segno costante

Per comodità diremo che

$$f \in \mathscr{R}^+_{loc}(D),\ \text{ se }\ f \in \mathscr{R}_{loc}(D),\ \text{e } f \geqslant 0,\ \text{su } D.$$

Analogamente parleremo di $\mathscr{R}^-_{loc}(D)$. Nel seguito ci limiteremo al caso di funzioni positive essendo del tutto evidente che con opportune modifiche l'impianto resta valido nel caso delle funzioni negative. Inoltre poiché molto di quello che si dice nel caso in cui l'intervallo di integrazione sia del tipo $[a, +\infty[$ vale opportunamente adattato a tutti gli altri casi ci limiteremo a considerare il primo.

Ricordiamo che se $(a_n) \subset [0, +\infty[$ allora $\sum_n a_n$ può essere solo convergente o divergente a $+\infty$. Questo perché le somme parziali sono crescenti e le successioni monotone ammettono limite finito o $+\infty$. In virtù della "tabella di conversione" (5.3.1) abbiamo la

Proposizione 5.3.1. *Sia $f \in \mathscr{R}^+_{loc}([a, +\infty[)$. Allora*

$$\exists \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\ dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Dim. — Infatti basta osservare che $\int_a^\sharp f(x)\ dx \nearrow$ perché se $R_2 > R_1$ allora

$$\int_a^{R_2} f(x)\ dx = \int_a^{R_1} f(x)\ dx + \int_{R_1}^{R_2} f(x)\ dx \overset{isotonia}{\geqslant} \int_a^{R_1} f(x)\ dx.$$

Quindi il limite esiste perché le funzioni monotone hanno sempre limite (eventualmente uguale a $+\infty$) e la funzione integrale $\int_a^\sharp f(x)\ dx$, per quanto detto, è monotona crescente. ■

Allora il problema di stabilire se esiste l'integrale generalizzato di f diventa quello di stabilire se il limite è finito o meno. Come per le serie numeriche, il confronto con qualcosa di noto può dirimere la questione senza che sia necessario fare conti espliciti:

Teorema 5.3.2 (confronto). *Siano $f, g \in \mathscr{R}^+_{loc}([a, +\infty[)$ tali che*

$$f(x) \leqslant g(x),\ \forall x \in [a, +\infty[.$$

Allora:

$$se\ \exists \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \in \mathbb{R},\ \implies\ \exists \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \in \mathbb{R}.$$

Dim. — Basta osservare per l'isotonia che

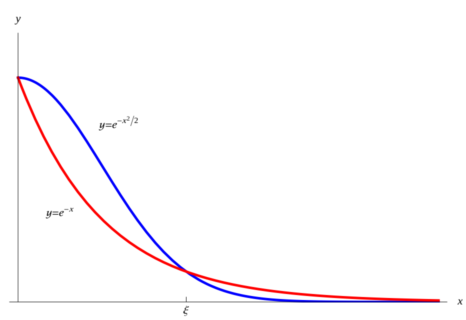
$$\int_a^R f(x)\ dx \leqslant \int_a^R g(x)\ dx,$$

per cui
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\,dx \leqslant \lim_{R\to+\infty}\int_a^R g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty,$$
dopodiché si conclude in virtù della proposizione precedente. ■

Come si usa il criterio del confronto? Come per le serie: l'importante è maggiorare la funzione assegnata f con una g che si sa essere integrabile. Per questo la funzione g viene anche detta **maggiorante integrabile**. In genere si cerca di rifarsi a funzioni di cui si conosce l'integrabilità, per esempio le funzioni viste negli esempi precedenti (tipo $\frac{1}{\sharp^\alpha}$ o $e^{\beta\sharp}$) o combinazioni di queste. Sembra semplice ma in realtà maggiorare bene è un po' un'arte: è difficile maggiorare con qualcosa di utile, facile maggiorare con qualcosa di inutile! Inutile significa **non convergente**. Infatti un tipico errore è quello di credere che se $f \leqslant g$ e $\int_a^{+\infty} g = +\infty$ allora $\int_a^{+\infty} f = +\infty$, che è ovviamente falso! Quindi spesso occorre ingegnarsi un po', come vediamo nel seguente

Esempio 5.3.3. *L'integrale di Gauss*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
è convergente.

Sol. — Studiamo la convergenza di $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ (l'altra metà è analoga). È evidente che $e^{-\frac{\sharp^2}{2}} \in \mathscr{R}^+_{loc}([0,+\infty[)$ (è infatti una funzione continua). Sembra naturale comparare questa funzione con qualcosa del tipo $e^{-\sharp}$. Non possiamo tuttavia dire
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant e^{-x},\ \forall x \geqslant 0.$$
perché
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant e^{-x}, \iff e^{-\frac{x^2}{2}+x} \leqslant 1, \iff -\frac{x^2}{2}+x \leqslant 0, \iff x(x-2) \geqslant 0,$$
cioè sse $x \geqslant 2$.



A questo punto si aprono due strade. Chiaramente, ricordato che l'esistenza di $\int_0^{+\infty}$ non dipende dall'estremo iniziale potremmo dire che equivale all'esistenza di $\int_2^{+\infty}$. Su $[2,+\infty[$ abbiamo che $g(x) := e^{-x}$ è una maggiorante integrabile di $f(x) := e^{-x^2/2}$: se segue, per il teorema del confronto, che $\exists\ \int_2^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$.

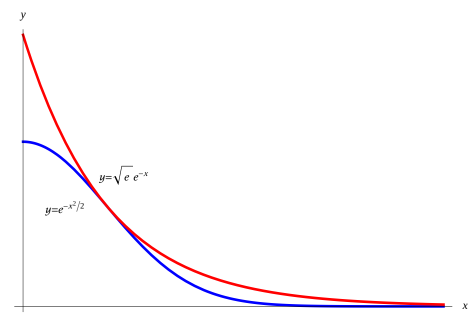
In alternativa potremmo ragionare così. Sicuramente esiste una costante $C > 0$ tale che
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant Ce^{-x},\ \forall x \geqslant 0.$$

Infatti ciò equivale a dire che $e^{-\frac{x^2}{2}+x} \leqslant C$ per ogni $x \in [0,+\infty[$. La funzione $\lambda(x) := e^{-\frac{x^2}{2}+x}$ è chiaramente limitata su $[0,+\infty[$ essendo continua e $\lambda(+\infty) = 0$. In particolare, da queste ultime osservazioni segue che ammette massimo assoluto per il Teorema di Weierstrass. Essendo

$$\lambda'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,(-x+1)\,,$$

si vede immediatamente che il massimo è raggiunto per $x = 1$. Quindi basta prendere $C = \lambda(1) = e^{1/2}$. In altre parole

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant \sqrt{e}e^{-x},\ \forall x \geqslant 0.$$



Ora possiamo applicare il criterio del confronto: la funzione $g(x) := \sqrt{e}e^{-x}$ è evidentemente una maggiorante integrabile su $[0,+\infty[$. ■

Come per le serie abbiamo il

Corollario 5.3.4 (confronto asintotico)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{R}^+_{loc}([a,+\infty[)$, $f, g > 0$ su $[a,+\infty[$. Allora se $f \sim_{+\infty} g$ si ha*

$$\exists \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \iff \exists \int_a^{+\infty} g(x)\ dx.$$

Dim. — Infatti, se $f \sim_{+\infty} g$ significa che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In particolare, esiste $\widetilde{a} \geqslant a$ tale che

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 2,\ \forall x \geqslant \widetilde{a}, \iff \frac{1}{2}g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2g(x),\ \forall x \geqslant \widetilde{a}.$$

Se allora esiste $\int_a^{+\infty} g(x)\ dx$ chiaramente esiste $\int_{\widetilde{a}}^{+\infty} 2g(x)\ dx$ per cui, per confronto, esiste $\int_{\widetilde{a}}^{+\infty} f(x)\ dx$ e quindi esiste $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$. Invertendo le parti in commedia si ottiene l'altra metà dell'implicazione. ■

Il confronto asintotico è spesso più semplice da applicare rispetto al confronto poiché il comportamento asintotico delle funzioni elementari è in genere ben conosciuto e spesso, come già illustrato nel caso delle serie, gli sviluppi asintotici aiutano molto.

Esempio 5.3.5. *Dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito*

$$\int_1^{+\infty} (x-1)\arctan\frac{1}{x^\alpha}\ dx.$$

Sol. — La funzione $f_\alpha(x) := (x-1)\arctan\frac{1}{x^\alpha} \in \mathscr{C}([1,+\infty[)$ per cui $f_\alpha \in \mathscr{R}_{loc}([1,+\infty[)$. Evidentemente poi $f \geqslant 0$ su $[1,+\infty[$. Andiamo a vedere il comportamento di f a $+\infty$. Tenendo conto del fatto che, per $\alpha > 0$, $\frac{1}{x^\alpha} \longrightarrow 0+$ per $x \longrightarrow +\infty$ e che $\arctan\xi \sim_0 \xi$, abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim_{+\infty} (x-1)\frac{1}{x^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

ed essendo $f_\alpha > 0$ su $]1,+\infty[$, si ha che f_α è integrabile a $+\infty$ se e solo se $\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ lo è, e questo è vero se e solo se $\alpha - 1 > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$. ■

Osservazione 5.3.6 (utile!)**.** *Spesso non è necessario conoscere esattamente il segno della funzione per cui si vuole stabilire se un integrale generalizzato converge.* Infatti: supponiamo di aver mostrato che $f \sim_{+\infty} g$ e g è a segno costante. Allora anche f è a segno costante in un intorno di $+\infty$. Il ragionamento è lo stesso della dimostrazione precedente poiché, se per esempio $g > 0$, $f \geqslant \frac{1}{2}g$ per $x \geqslant \widetilde{a}$, implica in particolare che $f > 0$ per $x \geqslant \widetilde{a}$. ■

Ecco le versioni del confronto e del confronto asintotico per gli intervalli limitati:

Teorema 5.3.7 (confronto)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{R}^+_{loc}(]a,b])$ tali che*

$$f(x) \leqslant g(x),\ \ \forall x \in]a,b].$$

Allora:

$$se\ \exists \int_a^b g(x)\ dx \in \mathbb{R},\ \ \Longrightarrow\ \ \exists \int_a^b f(x)\ dx \in \mathbb{R}.$$

Dim. — Identica a quella vista sopra. ■

Corollario 5.3.8 (confronto asintotico)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{R}^+_{loc}(]a,b])$, $f, g > 0$ su $]a,b]$. Allora se $f \sim_{a+} g$ si ha*

$$\exists \int_a^b f(x)\ dx \iff \exists \int_a^b g(x)\ dx.$$

Dim. — Identica all'analoga vista sopra. ■

Oltre all'analogia stretta nei risultati c'è una connessione molto stretta tra integrali generalizzati e serie:

Teorema 5.3.9 (criterio della serie)**.** *Sia $f \in \mathscr{R}^+_{loc}([1,+\infty[)$, $f \searrow$. Allora*

$$\exists \int_1^{+\infty} f(x)\ dx, \iff \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty.$$

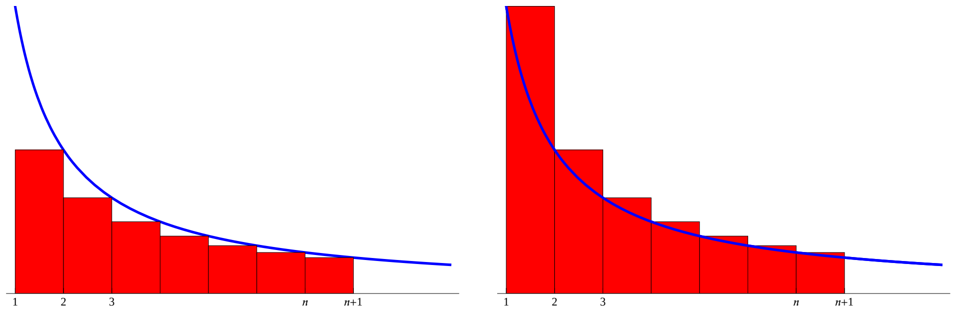


Figura 5.3: L'area a sx è $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, quella a destra $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Dim. — Osserviamo che per decomposizione

$$\int_1^N f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)\ dx$$

ed essendo $f \searrow$, si ha $f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1)$ per $x \in [n, n+1]$, per cui, per isotonia

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\ dx \leqslant f(n),$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leqslant \int_1^N f(x)\ dx \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Da questo la conclusione è immediata. **Se esiste** $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$, allora

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{n=2}^{N} f(n) \leqslant \int_1^N f(x)\ dx \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\ dx,\ \forall N \in \mathbb{N},$$

ed essendo $f(n) \geqslant 0$ per ogni n si deduce che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ è convergente. Viceversa, **se** $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$ allora

$$\int_1^N f(x)\ dx \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n),\ \forall N,\ \implies \int_1^R f(x)\ dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n),\ \forall R \geqslant 1,$$

da cui la conclusione in virtù della proposizione 5.3.1. ■

5.3.2 Caso integranda a segno variabile

Come per le serie, quando l'integranda ha segno variabile le cose si complicano e il confronto non funziona più. Mantenendo l'analogia con le serie introduciamo la

Definizione 5.3.10. *Sia $f \in \mathscr{R}_{loc}([a, +\infty[)$. Diciamo che f è* **assolutamente integrabile su** $[a, +\infty[$ *se*

$$\exists \int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx.$$

Analoga definizione nel caso $f \in \mathscr{R}_{loc}(]a, b])$ etc.

Come per le serie

Proposizione 5.3.11. *Sia $f \in \mathscr{R}_{loc}([a,+\infty[)$. Se f è assolutamente integrabile allora è integrabile su $[a,+\infty[$.*

Dim. — Osserviamo che

$$0 \leqslant f^+ = \max\{f,0\} \leqslant |f|, \quad 0 \leqslant f^- = \max\{-f,0\} \leqslant |f|.$$

Per il teorema del confronto, essendo $|f|$ una maggiorante integrabile per f^+ e f^- si ha che queste sono entrambe integrabili. Ma allora, per linearità, anche f lo è essendo $f = f^+ - f^-$. $\blacksquare$

Come per le serie la convergenza assoluta è più forte (e non equivalente) alla convergenza semplice, così l'integrabilità assoluta è più forte e non equivalente all'integrabilità. Possiamo di fatto importare lo stesso esempio delle serie.

Esempio 5.3.12. *La funzione*

$$f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [n,n+1[, \ n \ \textit{pari}, \\ \\ -\frac{1}{n}, & x \in [n,n+1[, \ n \ \textit{dispari}, \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,n+1[}(x),$$

è integrabile su $[1,+\infty[$ ma non assolutamente integrabile.

Sol. — È facile osservare che $f \in \mathscr{R}_{loc}([1,+\infty[)$. Infatti su ogni intervallo $[a,b] \subset [1,+\infty[$ f è continua salvo in un numero finito di punti dove, comunque, ammette limite da destra e da sinistra. Vediamo ora che è integrabile: dobbiamo calcolare $\int_1^R f(x)\, dx$. Sia $N \leqslant R < N+1$. Allora

$$\int_1^R f(x)\, dx = \int_1^N f(x)\, dx + \int_N^R f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^N}{N} \int_N^R dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^N}{N}(R-N).$$

Se $R \longrightarrow +\infty$ allora $N \longrightarrow +\infty$ e $0 \leqslant R - N \leqslant 1$. Quindi $\frac{(-1)^N}{N}(R-N) \longrightarrow 0$ (limitata per infinitesima) mentre

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ convergente.}$$

Dunque

$$\exists \lim_{R \to +\infty} \int_1^R f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Vediamo che f **non** è assolutamente integrabile. Infatti, per lo stesso ragionamento

$$\int_1^R |f(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{N}(R-N) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \quad \blacksquare$$

La strategia generale, come per le serie, sarà quindi quella di verificare se si abbia convergenza assoluta.

Esempio 5.3.13. *Stabilire l'esistenza di*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Sol. — L'integranda è continua su $[0,+\infty[$, quindi localmente integrabile. Inoltre

$$\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{x^2+1} =: g(y).$$

Ora g è positiva ed integrabile su $[0,+\infty[$, poiché

$$\int_0^{+\infty} g(x)\ dx = \arctan x|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi f è assolutamente integrabile e quindi integrabile. ■

5.4 Criterio di Abel–Dirichlet

Un utile criterio, in analogia con le serie, è il

Teorema 5.4.1 (criterio di Abel–Dirichlet)**.** *Siano $f, g \in \mathscr{C}^1([a,+\infty[$. Supponiamo che*

i) g sia limitata;

ii) f sia infinitesima per $x \longrightarrow +\infty$;

iii) f' sia assolutamente integrabile su $[a,+\infty[$.

Allora

$$\exists \int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\ dx.$$

Dim. — Si basa sulla formula di integrazione per parti (4.7.2):

$$\int_a^R f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=R} - \int_a^R f'(x)g(x)\ dx = f(R)g(R) - f(a)g(a) - \int_a^R f'(x)g(x)\ dx.$$

Ora, per i) e ii) si ha che $f(R)g(R) \longrightarrow 0$ per $R \longrightarrow +\infty$ quindi

$$\exists \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)g'(x)\ dx, \iff \exists \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f'(x)g(x)\ dx,$$

cioè sse esiste $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\ dx$. Ma $|f'(x)g(x)| \leqslant M|f'(x)|$, dove M è tale che $|g(x)| \leqslant M$ per ogni $x \in [a,+\infty[$ essendo g limitata. Per cui $M|f'|$ è una maggiorante integrabile per $|f'g|$. In virtù di iii) $M|f'|$ è integrabile e quindi $f'g$ è assolutamente integrabile, quindi integrabile. ■

Esempio 5.4.2. *Stabilire se l'integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{1+x^4}\ dx$$

è convergente o meno.

Sol. — La funzione $\varphi(x) := \frac{x^3 \sin x}{1+x^4} \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$, quindi è localmente integrabile su $[0,+\infty[$. Si ha che $\varphi(x) = f(x)g'(x)$, dove $f(x) = \frac{x^3}{1+x^4}$, $g'(x) = (-\cos x)'$. Chiaramente le condizioni i) e ii) del criterio di Abel–Dirichlet sono verificate. Per quanto riguarda la iii) abbiamo

$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x^4) - x^3 4x^3}{(1+x^4)^2} = -\frac{x^6 - 3x^2}{(1+x^4)^2} \sim_{+\infty} -\frac{x^6}{x^8} = -\frac{1}{x^2},$$

e quest'ultima è assolutamente integrabile su $[1,+\infty[$. Quindi l'integrale richiesto esiste finito su $[1,+\infty[$, e siccome la funzione è integrabile anche su $[0,1]$ se ne deduce che φ è integrabile in senso generalizzato su $[0,+\infty[$. ■

Esempio 5.4.3. *La funzione* $\varphi(x) := \frac{\sin x}{x}$ *è integrabile ma non assolutamente integrabile su* $[0,+\infty[$.

Sol. — La funzione $\varphi \in \mathscr{C}(]0,+\infty[)$ ed è prolungabile con continuità anche in $x = 0$. Quindi è localmente integrabile su $[0,+\infty[$. Mostriamo, per esempio, l'esistenza di $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ dx$ (evitiamo lo 0 che comunque, per quanto appena detto, non è un problema). Applicando il criterio di Abel–Dirichlet $\varphi(x) = f(x)g'(x)$ dove $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = \sin x$, cioè $g(x) = -\cos x$. Evidentemente f è infinitesima e g è limitata. Inoltre $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ è integrabile assolutamente su $[\pi,+\infty[$. Da questo si deduce che φ è integrabile.

La non esistenza di $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx$ è un po' più delicata. Anzitutto osserviamo che una maggiorante elementare per $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ è $\frac{1}{x}$ che però non è integrabile a $+\infty$, quindi non si può concludere nulla. Ora osserviamo che

$$\int_\pi^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \overset{(\star)}{\geqslant}$$

Quando $k\pi \leqslant x \leqslant (k+1)\pi$, si ha che $\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k\pi}$, per cui

$$\overset{(\star)}{\geqslant} \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\ dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ dx = C \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(k+1)\pi},$$

dove $C = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ dx$ è una costante vista la periodicità di $|\sin x|$ (si può facilmente determinare del resto e risulta valere 2). Ma allora

$$\int_\pi^{N\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2}{\pi(k+1)} \longrightarrow +\infty,\ N \to +\infty.$$

Di conseguenza non può esistere $\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\ dx$. ■

Le analogie con le serie presentano però un'importante differenza. Si ricorderà che **condizione necessaria** affinché la serie $\sum_n a_n$ è che sia $a_n \longrightarrow 0$. Si potrebbe immaginare che **condizione necessaria** affiché esista $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ è che sia $f(x) \longrightarrow 0$. Questo è falso come mostrano i seguenti esempi.

Esempio 5.4.4. *Esiste*

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\ dx.$$

Sol. — Infatti: se chiamiamo $\varphi(x) := \cos(x^2)$, $\varphi\mathscr{C}([0,+\infty[)$, quindi $\varphi \in \mathscr{R}_{loc}([0,+\infty[)$. Osserviamo che

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}\ 2x\cos(x^2) = \frac{1}{2x}\left(\sin(x^2)\right)' = f(x)g'(x).$$

Le funzioni f e g soddisfano le ipotesi di applicabilità del criterio di Abel–Dirichlet. Infatti: $g(x) = \sin(x^2)$ è chiaramente limitata essendo $|g(x)| \leqslant 1$; f è invece infinitesima a $+\infty$ con $f'(x) = -\frac{1}{2x^2}$ assolutamente integrabile. Pertanto esiste $\int_1^{+\infty} \varphi(x)\ dx$. ■

Addirittura la funzione può essere illimitata!

Esempio 5.4.5. *Esiste*

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\ dx.$$

Sol. — Infatti, ovviamente la funzione integranda è continua e quindi localmente integrabile. Scriviamo poi

$$\varphi(x) = x\cos(x^4) = \frac{1}{3x}3x^2\cos(x^3) =: f(x)g'(x),$$

dove $f(x) = \frac{1}{3x}$, $g(x) = \sin(x^3)$. Chiaramente f è infinitesima per $x \longrightarrow +\infty$ e g è limitata. Inoltre $f'(x) = -\frac{1}{3x^2}$ è assolutamente integrabile a $+\infty$. Per il criterio di Abel–Dirichlet φ è integrabile su $[0,+\infty[$. ■

5.5 Applicazioni

5.5.1 Funzioni integrali

Esempio 5.5.1. *Sia*

$$F(x) := \int_x^{2x} e^{-y^2} dy.$$

Determinarne il dominio, segno, eventuali simmetrie, limiti e asintoti, continuità, derivabilità, monotonia, estremanti locali e globali, convessità e tracciarne un grafico qualitativo.

Sol. — **Dominio:** Essendo l'integranda continua su tutto $\mathbb{R}$ è immediato rilevare che $D(F) =]-\infty,+\infty[$.
Segno: osserviamo anzitutto che l'integranda è sempre positiva ($f(y) := e^{-y^2} > 0$). La proprietà di monotonia dice che se $x < 2x$ allora l'integrale è positivo, viceversa negativo. Ora $x < 2x$ se e solo se $x > 0$. Quindi, nuovamente

$$F(x) > 0 \iff x > 0.$$

$F(0) = 0$ ed $x_0 = 0$ è l'unico zero di F.
Simmetrie: prendiamo $x > 0$: allora $x < 2x$ per cui $-2x < -x$, e quindi

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-y^2} dy = -\int_{-2x}^{-x} e^{-y^2} dy\Big|_{z=-y} = -\int_x^{2x} e^{-(-z)^2} dz = -F(x).$$

Quindi F è dispari, per cui basta dedicarsi allo studio di F su $[0,+\infty[$.
Comportamento agli estremi — Per calcolare $F(+\infty)$ (per disparità avremo automaticamente il comportamento a $-\infty$) osserviamo che

$$F(x)=\int_x^0 e^{-y^2}\,dy+\int_0^{2x} e^{-y^2}\,dy=-\int_0^{x} e^{-y^2}\,dy+\int_0^{2x} e^{-y^2}\,dy.$$

La funzione integranda è integrabile in senso generalizzato a $+\infty$, per cui

$$\int_0^{x} e^{-y^2}\,dy\longrightarrow \ell,\qquad \int_0^{2x} e^{-y^2}\,dy\longrightarrow \ell,\quad x\longrightarrow+\infty,$$

per cui, chiaramente,

$$F(x)\longrightarrow -\ell+\ell=0,\quad x\longrightarrow+\infty.$$

Quindi la retta $y=0$ è asintoto orizzontale per F a $+\infty$ (ed a $-\infty$ per simmetria).
Continuità e derivabilità: essendo l'integranda continua e gli estremi funzioni continue, la funzione integrale è continua. Inoltre essendo anche derivabili gli estremi, F è derivabile e si ha

$$F'(x)=(2x)'e^{-y^2}\Big|_{y=2x}-(x')e^{-y^2}\Big|_{y=x}=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(2e^{-3x^2}-1\right).$$

Monotonia e estremanti: $F'(x)>0$ se e solo se

$$2e^{-3x^2}-1>0\iff -3x^2>\log\frac{1}{2}=-\log 2\iff x^2<\frac{\log 2}{3}\iff |x|<\sqrt{\frac{\log 2}{3}}.$$

Possiamo riassumere lo studio del segno di F' nella seguente tabella:

	$-\infty \quad -\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{\log 2}{3}} \quad \sqrt{\frac{\log 2}{3}}$	$\sqrt{\frac{\log 2}{3}} \quad +\infty$
$\operatorname{sgn}(F')$	$-$	$+$	$-$
F	↘	↗	↘

Da questa tabella emerge che $x=-\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ è minimo assoluto e $x=\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ è massimo assoluto.
Concavità: Dall'espressione di F' risulta che F è derivabile due volte e

$$F''(x)=2e^{-4x^2}(-8x)-e^{-x^2}(-2x)=2xe^{-x^2}\left(1-8e^{-3x^2}\right)$$

Essendo $e^{-x^2}>0$ per ogni x, abbiamo che $F''(x)>0\iff x\left(1-8e^{-3x^2}\right)>0$. Il segno di x è facile: positivo se $x>0$, negativo se $x<0$. Viceversa $1-8e^{-3x^2}>0$ se e solo se

$$e^{-3x^2}<\frac{1}{8}\iff -3x^2<-\log 8=-3\log 2\iff x^2>\log 2\iff |x|>\sqrt{\log 2}.$$

Dunque avremo:

	$-\infty \quad -\sqrt{\log 2}$	$-\sqrt{\log 2} \quad 0$	$0 \quad \sqrt{\log 2}$	$\sqrt{\log 2} \quad +\infty$
$\operatorname{sgn}(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{sgn}(1-8e^{-3x^2})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{sgn}(F')$	$-$	$+$	$-$	$+$
F	↓	↑	↓	↑

Da questa tabella emerge che $x=\pm\sqrt{\log 2}$ sono punti di flesso, così come $x=0$ (la cui tangente è $F'(0)=0$, quindi orizzontale). Osservato che $\sqrt{\log 2}>\sqrt{\frac{\log 2}{3}}$, il grafico di F è il seguente:

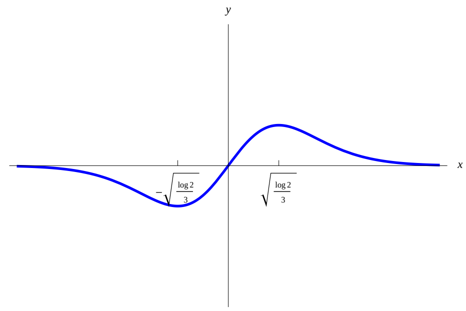


Figura 5.4: Il grafico di F.

5.5.2 Cenni alla funzione Gamma di Eulero

Si chiama funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Ecco alcune proprietà elementari della funzione Gamma:

Proposizione 5.5.2. *La funzione Gamma di Eulero è definita su* $]0, +\infty[$ *e vale la relazione*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \ \forall x > 0.$$

In particolare: $\Gamma(n+1) = n!$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Dim. — Per $x > 0$ si ha $e^{-t}t^{x-1} \sim_{0+} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ quindi l'integrale generalizzato in $0+$ esiste per confronto asintotico sse $1-x < 1$, cioè sse $x > 0$. A $+\infty$ si può applicare il criterio del confronto: infatti esisterà sicuramente una costante $C > 0$ tale che

$$e^{-t}t^{x-1} \leqslant Ce^{-\frac{t}{2}}, \iff e^{-\frac{t}{2}}t^{x-1} \leqslant C.$$

Ciò si deve al fatto che chiaramente $\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{2}}t^{x-1} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Morale: l'integrale generalizzato esiste finito sicuramente per ogni $x > 0$. Quanto alla formula

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\, dt = \int_0^{+\infty} \left(-e^{-t}\right)' t^x\, dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}xt^{x-1}\, dt = x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\, dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Infine

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot \Gamma(1),$$

e

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = 1. \quad \blacksquare$$

In un certo senso la funzione Gamma di Eulero è un'interpolazione continua del fattoriale (ed in effetti proprio per rispondere a questo tipo di problema venne introdotta da Eulero). Alcuni valori della funzione Gamma rappresentano grandezze notevoli. Per esempio:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}\,dt \overset{t=y^2,\ y=\sqrt{t}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\frac{1}{y}2y\,dy = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy,$$

che è l'integrale di Gauss. Non è per niente elementare, almeno con gli strumenti del calcolo in una variabile, ma si può dimostrare che

Teorema 5.5.3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Dim. — A titolo di curiosità proponiamo una dimostrazione che tuttavia richiede l'accettazione (naturale del resto) di un passaggio non banale. Scriviamo

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}\,dt\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{-1/2}\,ds\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-1/2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{-1/2}\,ds\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(t+s)}s^{-1/2}\,ds\right)\,dt = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\left(\int_t^{+\infty} e^{-r}(r-t)^{-1/2}\,dr\right)\,dt.\end{aligned}$$

Ora, immaginando l'integrale come una somma, vogliamo invertire l'ordine delle due somme. Questo sembra una cosa naturale pensandoalle somme finite per la commutatività e l'associatività, ma trattando con somme infinite come noto queste proprietà vengono meno in genere. Non è questo il caso quando si sommano quantità a segno costante, per cui qui accettiamo di poter invertire l'ordine. Occorre fare poi attenzione perché l'ultimo integrale è prima in r con $t \leqslant r < +\infty$ e poi in t con $0 \leqslant t < +\infty$. Pensando di invertire l'ordine, dovremo integrare prima in t con $0 \leqslant t \leqslant r$ e poi in r con $0 \leqslant r < +\infty$. Morale

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^r e^{-r}t^{-1/2}(r-t)^{-1/2}\,dt\right)\,dr = \int_0^{+\infty} e^{-r}\left(\int_0^r t^{-1/2}(r-t)^{-1/2}\,dt\right)\,dr.$$

Ora, cambiando variabili

$$\int_0^r t^{-1/2}(r-t)^{-1/2}\,dt = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{r}\right)^{-1/2}\,d\frac{t}{r} \overset{u=\frac{t}{r}}{=} \int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\,du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\,du.$$

Cambiando nuovamente variabile

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\,du \overset{u=(\sin\theta)^2}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{|\sin\theta|\sqrt{1-(\sin\theta)^2}}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2\frac{\pi}{2} = \pi,$$

per cui

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-r}\pi\,dr = \pi. \quad \blacksquare$$

Ancora più delicato è il

Teorema 5.5.4 (formula di Striling)**.**

$$\Gamma(x+1) \sim_{+\infty} \frac{x^x\sqrt{2\pi x}}{e^x}.$$

In particolare: $n! \sim_{+\infty} e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$.

Dim. — (idea) : L'idea consiste nello scrivere l'integrale della Gamma nella forma

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{x\log t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t+x\log t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\phi(t)}\,dt,$$

dove naturalmente $\phi(t) := t - x\log t$. Si vede facilmente che $\phi(0+) = +\infty$, $\phi(+\infty) = +\infty$ e ϕ ha un unico minimo:

$$\phi'(t) = 1 - \frac{x}{t} \geqslant 0, \iff \frac{x}{t} \leqslant 1, \iff t \geqslant x,$$

cioè il minimo è $t = x$. Ora essendo l'integranda $e^{-\phi(t)}$ l'idea è che "vicino" a $0+$ e a $+\infty$ il contributo all'integrale sia trascurabile e la maggior parte della contribuzione all'integrale arrivi dai valori di $t \approx x$. Qui

$$\phi(t) \approx \phi(x) + \phi'(x)(t-x) + \frac{\phi''(x)}{2}(t-x)^2.$$

Notato che $\phi''(t) = \frac{x}{t^2}$ e sostituendo si ottiene

$$\phi(t) \approx (x - x\log x) + \frac{1}{2x}(t-x)^2$$

da cui

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &\approx \int_0^{+\infty} e^{-\left((x-x\log x)+\frac{1}{2x}(t-x)^2\right)}\,dt = e^{-x}x^x\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}}\,dt = e^{-x}x^x\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2x}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt\\
&= e^{-x}x^x\sqrt{2x}\int_0^{+\infty} e^{-\left(s-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)^2}\,ds = e^{-x}x^x\sqrt{2x}\int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\\
&\approx e^{-x}x^x\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = e^{-x}x^x\sqrt{2x}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Ovviamente è tutt'altro che banale rendere rigorosi gli $\approx$. ∎

Parte II

Problemi

Capitolo 6

Continuità e limiti in $\mathbb{R}$

6.1 Calcolo di limiti

Problema 6.1. Classificare le eventuali forme indeterminate e calcolare i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-5x+1}{x+2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+1}}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{9x^2+1}-3x)$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}+\sqrt[3]{x^5+x^2}}{\sqrt[4]{x^9-2x-1}-\sqrt[5]{x^7-x^5}}$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{|x-2|}{(x^2+1)(x-2)}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+x+\frac{|x|}{x}}$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$.
13. $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$.

14) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)x$.

Problema 6.2 ($\star$)**.** Trovare tutti i possibili valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1}-(ax^2+bx)\right) \in \mathbb{R}.$$

Problema 6.3. Classificare le eventuali forme indeterminate e calcolare i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{2x}}{2^x+e^{x^2}}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x+x^2}{\sqrt{x}+x\log x+x^2}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\log x}{(\log x-1)^2}$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(\log(\log x))}{(\log(\log x))^\alpha}$, $(\alpha > 0)$.

7. $\lim_{x\to 0+} \frac{\log x - 1}{\sqrt{x}\log^4 x}$ 8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\log(x^2)} + \cos x}{4^x + \pi^x}$. 9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^x + \sin(x^x)}{6^x + x^2\log x}$.

10. $\lim_{x\to 0+} \frac{x^{x^x}}{x}$. 11. $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} e^{-x^2\log x}$ 12. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$.

13. $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - e^{2\sqrt{x^2+1}}}{e^{2x} + x^4}$

Problema 6.4. Ordinare in ordine crescente rispetto a $\gg_{+\infty}$ le seguenti funzioni:

$$2^{2^{2x}}, \quad x^{2^x}, \quad x\sqrt{x}, \quad 2^{\log x + \log(\log x)}, \quad x^{1+\frac{1}{\sqrt{\log x}}}.$$

Problema 6.5. Discutere esistenza e valore del

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + a^x}{e^{ax} + x^{a+1}\log x}, \; a > 1.$$

Problema 6.6. Mostrare che

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0, \quad \forall \alpha > 0, \; \beta \in \mathbb{R}.$$

Problema 6.7. Riducendosi a limiti fondamentali calcolare i seguenti

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^3}{(\sin x)^2}$. 3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^2)}{x-1}$.

4. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(3x))^2}{x^2(1-\cos x)}$. 5. $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x - \cos x}{1-\sin x - \cos x}$. 6. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

7. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sin x}$ 8. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\tan x}$. 9. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$.

10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(3x)}-1}{\sinh(2x)}$. 11. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(2x)}{1-\cos x}$. 12. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$.

13. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$. 14. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\log x}\right)^{\frac{\log x}{x}}$. 15. $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\log x}$. 17. $\lim_{x\to 0+} (\log x)(\log(1-x))$. 18. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{x}{x-1}}$.

19. $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} \tan x$. 20. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\tan x}$. 21. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^x$.

22. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\arctan x}{x}\right)^x$. 23. $\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$. 24. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin(4x)}$.

25. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(3x)}-1}{x}$. 26. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(2-\cos(2x))}{x^2}$. 27. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(3x)}-1}{\log(1+\tan(2x))}$.

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$. 29.($\star$) $\lim_{x\to 1+} \frac{x^x-1}{(\log x - x + 1)^2}$ 30.($\star$) $\lim_{x\to 0-} (1-e^x)^{\sin x}$.

31. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{x+1}{x^2}\right)^x$. 32. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^x$

Problema 6.8. Utilizzando gli sviluppi asintotici calcolare

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x-3x^2+4x^3)}{\log(1-x+2x^2-3x^3)}$. 2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1+x\sin x - x^3)}$.

3. $\lim_{x\to 0+} \frac{\log\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \cos(\sin x)+1}{\sqrt{x}}$. 4. $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\log\left(1+x^2-x\tan(x^2)\right)-\sin(x^3)}$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x\log\left(x^2+\cos x\right)}{e^{x^3}+x^2-1}$. 6. $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x + (\sinh x)^3}{x\log\cosh x + (x\log x)^4}$.

Problema 6.9. Utilizzando gli sviluppi asintotici calcolare, in funzione del parametro $\alpha > 0$ i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} - \cos\frac{1}{x^2}\right)$. 2. $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\log\frac{e^x-1}{e^x+1} - \sin\frac{1}{x}\right)$.

3. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+4} + \sin\frac{1}{x}\right)^{x^\alpha}$. 4. $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^\alpha}-1-x^\alpha-\frac{1}{2}\sin x}{\sin\sqrt[3]{x^2}-x^{2/3}}$.

5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^\alpha}-1+x\log x}{\sin\left(x^{2\alpha}\right)+1-\cos\left(x^2\right)}$. 6. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-\sin(x^2)}{e^{x^2}-\cos\left(x^{2\alpha}\right)}$.

Problema 6.10 ($\star$)**.** Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito il

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} - 1 - \sin\frac{x+1}{x^3+3x+2}\right)$$

Problema 6.11 ($\star$)**.** Trovare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tali che

$$\cos\left(\frac{x+2}{x^2+4}\right) = \alpha + \frac{\beta}{x^\gamma} + o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right), \text{ as } x \longrightarrow +\infty.$$

Problema 6.12 ($\star$)**.** Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione

$$f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2},$$

sia infinitesima del massimo ordine possibile per $x \to 0$.

6.2 Continuità

Problema 6.13. Per ognuna delle seguenti funzioni determinare: i) il dominio D di definizione; ii) il sottoinsieme S di D dove sono continue; iii) se $S \subsetneq D$, come potrebbe essere definita f nei punti rimanenti in modo da ottenere una funzione continua (eventualmente unilaterale) in detti punti?

1. $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x-1}$,
2. $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.
3. $f(x) := \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$.
4. $f(x) := \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2-1}$.
5. $f(x) := \dfrac{|x|}{x}$.
6. $f(x) := \dfrac{1}{1+x+\frac{x}{|x|}}$.
7. $f(x) := \sin \pi \dfrac{x}{|x|}$.
8. $f(x) := x \log |x|$.

Problema 6.14. Determinare i possibili valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{2}, \\ ax^2 + b, & \frac{\pi}{2} \leqslant x < 2, \\ 3, & x \geqslant 2, \end{cases}$$

appartenga a $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Problema 6.15. Find all the possible $a, b \in \mathbb{R}$ such that the function

$$f(x) := \begin{cases} -2\sin x, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ a\sin x + b, & -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & x \geqslant \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

belongs to $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Problema 6.16. Determinare i possibili $x_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & x < x_0, \\ x^2 - 2x - 1, & x \geqslant x_0. \end{cases}$$

appartenga a $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Problema 6.17. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinarne i) il dominio di definizione D, ii) il segno, iii) il sottoinsieme di D dove f è continua.

1. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}{x}$.
2. $f(x) := \dfrac{x \log x}{x-1}$.
3. $f(x) := \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.
4. $f(x) := x e^{\frac{x}{x-1}}$.
5. $f(x) := \sqrt{x+1} - 2x + 1$.
6. $f(x) := \sin\left(\dfrac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1}\right)$.

Problema 6.18. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) := [x] + \sqrt{x - [x]}$, dove $[x]$ è la parte intera di x. Mostrare che $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Problema 6.19. Determinare tutti i possibili $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} |x|^b \cos x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

appartenga a $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Problema 6.20. Stabilire se la funzone

$$f(x) := e^{1/x} \sin x, \ x \neq 0,$$

può essere estesa anche in $x = 0$ con continuità.

Problema 6.21. Sia $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} a \cos x + \log(1 - x), & x < 0, \\ \\ \sinh \frac{x}{x^2+1} - a \cos \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Ci sono valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che f possa essere estesa anche in $x = 0$ di modo da ottenere una funzione continua?

Problema 6.22. Sia

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Determinarne il dominio di definizione e stabilire dove è continua.

6.3 Problemi generali

Problema 6.23. Sia f limitata in un intorno di $+\infty$. Allora $\log(x + f(x)) \sim_{+\infty} \log x$.

Problema 6.24. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e g tale che non esiste il limite $\lim_{x \to x_0} g(x)$. Allora

$$\nexists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)).$$

Problema 6.25. Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e g limitata in un intorno di x_0. Mostrare che

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

Problema 6.26. Sia $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. Mostrare che $|f| \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$. È vero che se $|f| \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ allora $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$? In caso affermativo fornire una dimostrazione, altrimenti un controesempio.

Problema 6.27. Siano f, g continue in x_0. Allora $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ sono continue in x_0.

Problema 6.28. Quante e quali sono le funzioni $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ tali che $f(x)^2 = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Problema 6.29. Si consideri l'equazione $3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$. Mostrare che ha soluzioni in $]-\infty, 0[$, in $]0,1[$ e in $]1, +\infty[$. Come determinare una soluzione in $]0,1[$ con un'approssimazione inferiore a $\frac{1}{10}$?

Problema 6.30. Sia p un polinomio di grado dispari. Dedurre che p ha almeno uno zero in $\mathbb{R}$.

Problema 6.31. Sia p un polinomio di grado pari tale che $p(0) < 0$. Mostrare che p ha almeno due zeri in $\mathbb{R}$.

Problema 6.32. Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ tale che $f([a,b]) = [a,b]$. Allora esiste uno $\xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = \xi$. (sugg.: ξ è tale che $f(\xi) - \xi = 0\dots$).

Problema 6.33 ($\star$). Sia $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

i) Mostrare che non è possibile che l'equazione $f(x) = c$ abbia esattamente due soluzioni (distinte) per ogni $c \in \mathbb{R}$.
ii) Mostrare che è possibile costruirne una tale che l'equazione $f(x) = c$ abbia esattamente tre soluzioni distinte per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Problema 6.34 ($\star$). Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ e definiamo

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \sup_{y \in [a,x]} f(y), \; x \in [a,b].$$

Mostrare che $g \in \mathscr{C}([a,b])$. (sugg.: g è monotona...)

Problema 6.35 ($\star$). Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$ tale che ogni punto di $[a,b]$ è di minimo locale per f. Allora f è ....

Capitolo 7

Calcolo Differenziale

7.1 Derivabilità

Problema 7.1. Sia

$$f(x) := \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostrare che

i) f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed, in particolare, in $x_0 = 0$.

ii) f non è derivabile in $x_0 = 0$.

Problema 7.2. Sia

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

i) Mostrare che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed, in particolare, in $x_0 = 0$.

ii) È vero che f è derivabile in $x_0 = 0$? (dimostrare o confutare)

Problema 7.3. Sia

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{(\sin x^2)^5}{(\tan x^3)^2}, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Dire se f è prolungabile con continuità in $x_0 = 0$. In tal caso dire se il prolungamento è anche derivabile e, se così, determinare $f'(0)$.

Problema 7.4. Sia

$$f(x) := \frac{x \log x}{x^2 - 1}, \quad x \in]0, +\infty[\backslash \{1\}.$$

Mostrare che f è prolungabile con continuità anche in $x = 1$. Discutere se tale prolungamento sia derivabile o meno.

7.2 Regole di calcolo

Problema 7.5. Facendo uso delle regole di calcolo, dire dove sono derivabili e determinare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$. 2. $\sin(\log x)$. 3. $(1+e^x)^3$. 4. $(\sin x)^{\cos x}$. 5. $\log\left(1+|\log|x||\right)$.

6. $\sqrt{|x|^3+1}$. 7. $|x+1|^{\frac{x}{x-1}}$. 8. $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$. 9. $\cosh|x|$. 10. $\sinh|x|$.

Problema 7.6. Per ciascuna delle seguenti funzioni stabilire se è continua e derivabile in $x=0$:

1. $e^{-|x|}$. 2. $x|x|$. 3. $|x\sin x|$. 4. $x[x-1]$. 5. $[x](x-1)$.

Problema 7.7. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. x^6-2x^3+6x.	2. $\frac{4}{x^3}+5x^4-\frac{7}{x^5}+\frac{1}{x^8}$.	3. $\left(x^3-\frac{1}{x^3}+3\right)^4$.
4. $\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$.	5. $\sqrt{x^2+1}-x$.	6. $\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.
7. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}$.	8. $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$.	9. $(\sin x)^3-3\sin x$.
10. $\frac{x^2}{\cos x}$.	11. $\tan x+\frac{1}{\cos x}$.	12. $x^2\tan(x^2+x+1)$.
13. $\frac{x^2}{1+\cos x}+\tan\frac{x}{2}$.	14. $x\arcsin x$.	15. $\sin(2\arctan x)$.
16. $\frac{x}{1+x^2}-\arctan x$.	17. $\arcsin(\sin x)$.	18. $\arctan\frac{1-\cos x}{\sin x}$.
19. $\arctan\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$.	20. $x(\log x-1)$.	21. $\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.
22. $\log\log x$.	23. $x\tan x+\log(\cos x)$.	24. $\arctan\left(\log\frac{1}{x^2}\right)$.
25. e^{e^x}.	26. $xe^{1-\cos x}$.	27. $2^{\frac{x}{\log x}}$.
28. $\log(\sinh x-1)$.	29. $\cosh(\sinh x)$.	30. $\frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.
31. $\sqrt{\arctan\left(\sinh\frac{x}{3}\right)}$.	32. x^x.	33. x^{x^x}.
34. $(x^x)^x$.	35. $\sin\left(x^{\log x}\right)$.	36. $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

7.3 Regole di Hôpital

Problema 7.8. Classificare l'eventuale forma indeterminata e calcolare, applicando correttamente le regole di Hôpital, i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-(\sin x)^2}{x^4}$. 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\log\cos x}{x\sin x}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x}$. 5) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$. 6) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\cos(2x)-\cos x}{x^2}$.

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$. 8) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3(\log x)^2}{e^x}$. 9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(e^x+1)^{\frac{1}{x}}$.

10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. 11) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\log_x(e^x-1)$. 12) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

13) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$. 14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$. 15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Problema 7.9 ($\star$)**.** Calcolare i seguenti limiti

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$. 2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{-x^x+x}{\log x-x+1}$. 3) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}\sin x+x^2}{\sqrt{e^x-1}\log(x+1)}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$. 5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{(\sin x)^2}}$. 6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\log(x+1)}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

7) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(x^2\log\frac{x}{x+1}+x\right)$. 8) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}$. 9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}x\left[\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{6x}-e^3\right]$.

Problema 7.10. Trovare $a,b\in\mathbb{R}$ affinché la funzione $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}(a+1)\arcsin x-6(b+3)\sin x, & \text{se } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 2a(x^4+x)-(b+3)(\sqrt{x}+\tan x), & \text{se } 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

sia derivabile in $x_0=0$.

Problema 7.11. Trovare $a,b\in\mathbb{R}$ affinché la funzione $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}b(x^4+3x)+(2-a)\cos\frac{1}{x}, & \text{se } -1\leqslant x<0,\\ (2b+3)(e^x-1)+(2-a)\tan 3x, & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

sia derivabile in $x_0=0$.

Problema 7.12. Determinare $a \in \mathbb{R}$ di modo tale che la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cos \frac{\pi}{2x}}{\log x}, & 0 < x < 1,\ x > 1, \\ a, & x = 1, \end{cases}$$

sia continua per $x = 1$. Per tale valore stabilire poi se è vero che

i) f è derivabile in $x = 1$ (ed in tal caso determinare $f'(1)$);

ii) f è lipschitziana su $]0, +\infty[$.

7.4 Formula di Taylor

Problema 7.13. Calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi asintotici

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{1 + x^2 - e^{x^2} + (\sin x)^3}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2(\sin x)^2 + \sin x^2}{x^4 + x^3 + x\sin x}$.

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2) + x^2 + (\tan x)^2 + \sin x}{x^3 + \log(1 + x)}$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{(\sin x)^3 + x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1 - \cos x} + (\tan x)^2 + \arctan x}$.

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(2 - \cos(2x))}{(\log(\sin(3x) + 1))^2}$.

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(\sin x)^3} - 1 - (\tan x)^3}{x^3\left(e^{x^2} - e^{(\sin x)^2}\right)}$.

10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2}}{(\tan x)^3 + x^5}$.

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{xe^{x^7} - \cos(x^4) + 1 - x}{\sinh x^4 - \log(1 + x^4)}$.

13. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{x^2}{2}} - \cosh x + (\sinh x)^3}{x\log\cosh x + (x\log x)^4}$.

Problema 7.14. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il valore dei seguenti limiti

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^\alpha}$.

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + x^\alpha) - \sin x}{1 - \cos(x^\alpha)}$.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{e^{x^\alpha} - 1 - x^\alpha - \frac{1}{2}\sin x}{\ln(1 + x) - x}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^\alpha) - e^x}{x\log(1 + x^\alpha) - x^\alpha}$.

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \arctan(x^2)}{e^{x^2} - \cos\left(x^{2\alpha}\right)}$.

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^\alpha} - 1 + x\log x}{\sin\left(x^{2\alpha}\right) + 1 - \cos\left(x^2\right)}$.

Problema 7.15. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il valore dei seguenti limiti

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x^\alpha) - \sinh(x^2)}{\log(1+2x^2) - (\cos(2x) - 1)}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - e^{-x^2}}{\cosh x + \cos(x^\alpha) - 2}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1+x^3) - e^{x^\alpha} - 1}{x\sinh(x^2) - \sin x(\cos x - 1)}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{xe^{x^3} - \cos(x^2) + 1 - x}{\sinh x^\alpha - \log(1+x^4)}$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos x + (\log(1+x))^2}{x^3}$.

Problema 7.16 ($\star$)**.** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt[3]{1 - \sin\sqrt{x}} - e^x + \frac{\sqrt{x}}{3}}{\arctan x}.$$

Problema 7.17 ($\star$)**.** Stabilire per quali valore di $\alpha > 0$ esiste finito e non nullo il

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log\left(x + e^{\sqrt{x}}\right) - \sin\sqrt{x} - x}{x^\alpha}.$$

Problema 7.18. Determinare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\sin x - 2b\log(1+x) + \frac{2}{3}(a-2)x^3}{x^2}$$

esiste finito e diverso da 0.

Problema 7.19 ($\star$)**.** Calcolare il

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^{-2}\left(2^{\sqrt[3]{1+\sin x}} - 2 - \frac{2\log 2}{3}\sin x\right).$$

7.5 Applicazioni del calcolo differenziale

7.5.1 Studio di funzione

Problema 7.20. Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare: dominio, eventuali simmetrie, comportamento agli estremi del dominio, segno (ove possibile), continuità e derivabilità, limiti di f' agli estremi del proprio dominio di definizione, segno di f' e monotonia, eventuali estremanti locali e globali, concavità ed eventuali punti di flesso:

1. $f(x) := x^5 + x^4 - 2x^3$.
2. $f(x) := x^2 \log|x|$.
3. $f(x) := x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.
4. $f(x) := \log\left|1 - \frac{1}{\log|x|}\right|$.
5. $f(x) := \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

6. $f(x) := 2x + \arctan \frac{x}{x^2-1}$.
7. $f(x) := 2x + \frac{\sinh x}{\sinh x - 1}$.
8. $f(x) := x\sqrt{|\log x|}$.
9. $f(x) := x^x$.

Problema 7.21. Sia
$$f(x) = \arctan \left| \frac{1}{\sinh x} \right| - \frac{\sinh x}{3}.$$

i) Determinare il dominio di f, il comportamento agli estremi dello stesso compresi eventuali asintoti.

ii) Dire dove f e continua e dove derivabile. Calcolare f'.

iii) Determinare crescenza e decrescenza di f ed eventuali estremanti (precisandone la natura).

iv) Con le informazioni ottenute tracciare un grafico di f.

Problema 7.22. Data la funzione
$$f(x) = \arctan(e^x - 1) + \log|e^x - 4|$$
trovarne

i) l'insieme di definizione

ii) limiti ed eventuali asintoti

iii) crescenza e decrescenza

iv) punti di massimo e minimo, relativi ed assoluti

v) abbozzarne il grafico

Problema 7.23. Sia
$$f(x) = \arctan\left((x+1)e^{\frac{1}{x}}\right).$$

i) Determinare il dominio D di f, il segno di f ed il comportamento agli estremi di D (compresi eventuali asintoti).

ii) Dire in quali parti di D la funzione è continua e dove è derivabile. Calcolare, per tali punti, f'.

iii) Determinare la monotonia di f ed invididuare eventuali massimi e minimi, specificando se si tratta di estremi relativi (locali) o assoluti (globali).

iv) Con le informazioni raccolte tracciare un grafico di f.

v) Dire per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$f(x) = \alpha,$$
ha una ed una sola soluzione. Giustificare rigorosamente la risposta.

N.B.: Non è richiesto lo studio della concavità di f.

Problema 7.24. Studiare la funzione f definita da Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^{1/3}}{\log^3(x+1)}, & \text{se } x \neq -1, \\ \\ 0, & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, eventuali punti di estremo relativo ed assoluto, eventuali punti di flesso orizzontale, abbozzo del grafico; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**]

Problema 7.25. Sia

$$f(x) = 2x + \arctan \frac{x}{x^2 - 1}.$$

i) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie (parità o disparità di f), il comportamento agli estremi dello stesso (compresi eventuali asintoti).
ii) Dire dove f è continua e dove è derivabile e calcolare f'.
iii) Determinare gli eventuali estremanti precisandone la natura (se assoluti o relativi).
iv) Con le informazioni ottenute determinare il segno di f e trovare tutte gli zeri di f.
v) Tracciare un grafico qualitativo di f.

N.B. — Non è richiesto lo studio della concavità di f

Problema 7.26. Studiare la funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{3x^2 + 2x}\,.$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità, derivabilità e eventuali limiti della derivata prima, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico]

Problema 7.27. Sia

$$f(x) := 2 \arcsin \frac{1}{\cosh(x-1)} + x.$$

Determinare:

i) Dominio di f ed il comportamento agli estremi dello stesso compresi eventuali asintoti.
ii) Determinare gli insiemi dove f è continua, dove è derivabile e stabilire la natura di eventuali punti di non derivabilità.
iii) Determinare gli intervalli di monotonia con eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
iv) Abbozzare il grafico.

N.B. : può essere utile ricordare che $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$

Problema 7.28. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log\left(\sinh^2 x + 2\sinh x + 4\right).$$

[Dominio, segno, limiti ed eventuali asintoti, continuità ed eventuali prolungamenti per continuità, derivata, monotonia, punti di estremo relativo ed assoluto, abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio della derivata seconda]

7.5.2 Disuguaglianze

Problema 7.29. Studiare le seguenti disequazioni:

$$1.\ \ \log x < \sqrt{x}. \quad 2.\ \ \log x - \frac{x-1}{x} \geqslant 0, \quad 3.\ \ e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}. \quad 4.\ \ \frac{x - 2\log|x+1|}{\sqrt{e^x - 2x - 1}} \leqslant 0.$$

Problema 7.30. Determinare per quali $\alpha > 0$ l'equazione

$$e^y = \alpha y,\ \ y \in \mathbb{R},$$

ammette una soluzione.

Problema 7.31. Determinare i possibili valori del parametro reale α di modo che la funzione

$$f(x) := \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$$

sia crescente su $\mathbb{R}$.

Problema 7.32. Per quali valori del parametro reale α la funzione $f_\alpha(x) := e^{\alpha x} - \alpha^2 x$ è monotona su $[0, +\infty[$?

Problema 7.33 ($\star$)**.** Sia $p > 1$. Provare la disuguaglianza

$$2^{1-p} \leqslant \frac{t^p + 1}{(t+1)^p} \leqslant 1,\ \ \forall t \geqslant 1.$$

Dedurne la disuguaglianza

$$2^{1-p} \leqslant \frac{x^p + y^p}{(x+y)^p} \leqslant 1, \quad \forall x, y > 0.$$

Problema 7.34. Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che la funzione $f_\alpha(x) := e^x - \alpha x^3$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$?

7.5.3 Convergenza per le serie

Problema 7.35. Sia

$$f(x) := x - \arctan x.$$

i) Studiando brevemente la funzione f su $[0, +\infty[$ mostrare che $x \geqslant \arctan x$ per ogni $x \geqslant 0$.

ii) Scrivere lo sviluppo asintotico di f in $x = 0+$ arrestato al primo termine polinomiale utile. Dedurne C, α tali che $f(x) \sim C x^\alpha$ per $x \to 0+$.

iii) Determinare per quali $\beta > 0$ è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \left(\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right).$$

Problema 7.36. Stabilire se le seguenti serie sono convergenti o meno

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} - 2e^{\frac{1}{2n}}\right)$.
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \log\left(\frac{2n^2+3}{2n^2+2}\right)$.
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1)-\log n}{\sqrt{n}+\log n}$.
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right) \left(\sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$.

Problema 7.37. Determinare per quali $\alpha > 0$ converge ciascuna delle serie seguenti:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{n} - e^{-\frac{1}{n^\alpha}}\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n + \sin n) \left(\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(\cos \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^\alpha}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(e^{\frac{1}{2n^\alpha}} - \cosh \frac{1}{n}\right)$.
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} \left(\sinh \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$.
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left(\sin \frac{1}{n^\alpha} - \sinh \frac{1}{n^3}\right)$.
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n^4} - e^{\frac{1}{n^\alpha}} + 1\right)$.

Problema 7.38 ($\star$)**.** Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha \left[e^{\frac{\beta}{n^2}} - \cos \frac{1}{n} + \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2\right].$$

Problema 7.39 ($\star$)**.** Discutere convergenza semplice e convergenza assoluta per le seguenti serie numeriche:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{(-1)^n}{n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right)$.

Problema 7.40 ($\star$)**.** Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^n}.$$

i) Si può applicare il criterio di Leibniz per studiarne la convergenza?

ii) Dimostrare che la serie è convergente. (sugg.: può essere utile osservare che $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \dots$)

Problema 7.41 ($\star\star$)**.** Sia $a > 0$. Stabilire se converge o meno la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right).$$

7.6 Problemi generali

Problema 7.42. Sia f derivabile in $x = 0$ e tale che $f(0) = 1$. Mostrare che esiste

$$\lim_{x\to 0} (f(x))^{1/x} = e^{f'(0)}.$$

Problema 7.43. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su $\mathbb{R}$. Mostrare che se f è pari allora f' è dispari e che se f è dispari allora f' è pari.

Problema 7.44. Determinare i valori del parametro $q \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $x^3 - 6x^2 + 9x = q$ ammetta una sola soluzione reale.

Problema 7.45. Sia $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Allora esiste $\xi > a$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Problema 7.46. Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile su I intervallo e tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Mostrare che f è monotona. (sugg.: $\operatorname{sgn}(f')$ deve essere costante. . .).

Problema 7.47. Sia f derivabile su $[0, +\infty[$ tale che

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ allora quale possibile valore deve avere questo limite?

Problema 7.48 ($\star$). Sia $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(0) > 0, \quad f'(0) > 0, \quad xf''(x) = (1 - \cos x)f'(x) + (e^{x^2} - 1)f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Stabilire la natura del punto $x = 0$.

Problema 7.49 ($\star$). Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$. Determinare tutte le possibili condizioni su $a, b, c \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(ax) - bf(cx)^2}{\log(1 + x^2)} = 1.$$

Problema 7.50 ($\star$). Sia $f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R})$. Stabilire se converge o meno la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right] - 2f'(0) \right).$$

Problema 7.51 ($\star$)**.** Dopo aver dimostrato che $\frac{x}{2} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ per x in un intervallo contenente 0 da determinare, sia $(a_n) \subset]0,+\infty[$ e $b_n := \prod_{k=1}^{n}(1+a_n)$. Mostrare che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} b_n, \quad \iff \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ converge.}$$

Problema 7.52 ($\star$)**.** Sia $(a_n) \subset [0,+\infty[$, $a_n \geq 0$ per ogni n. Mostrare che

$$\sum_n a_n \text{ converge} \quad \iff \quad \sum_n \frac{a_n}{1+a_n} \text{ converge.}$$

Problema 7.53 ($\star\star$)**.** Sia $(a_n) \subset [0,+\infty[$. Dimostrare che

$$\sum_n a_n \text{ converge} \quad \iff \quad \sum_n \sin(a_n) \text{ converge.}$$

Problema 7.54 ($\star$)**.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostrare che se f è continua allora è convessa.

Capitolo 8

Primitive

Il calcolo delle primitive non è in genere una procedura automatica. Per questo motivo in questo capitolo vengono riportati anche i risultati (che tuttavia non sono controllati e sicuri al 100%!): **vanno utilizzati solo per controllo del proprio risultato**. Ricordare che le primitive sugli intervalli differiscono per una costante additiva: spesso si trovano risultati apparentemente difformi a causa di questo fatto.

Problema 8.1 (Prim. quasi–elementari)**.** Calcolare le seguenti primitive:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\tan x}}{(\cos x)^2}\,dx,$ $\quad\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+\tan x)^3}\right]$
2. $\displaystyle\int \tan x\,dx,$ $\quad[-\log|\cos x|]$
3. $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx,$ $\quad\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]$
4. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx,$ $\quad\left[\log(e^x+e^{-x})\right]$
5. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{(x-\cos x)^4}\,dx,$ $\quad\left[-\frac{1}{3(x-\cos x)^3}\right]$
6. $\displaystyle\int \frac{e^x\arctan e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$ $\quad\left[\frac{1}{2}(\arctan e^x)^2\right]$
7. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx,$ $\quad\left[\log|x^2+3x+4|\right]$
8. $\displaystyle\int \frac{x^{x^2}x(2\log x+1)}{\sqrt{1-x^{x^2}}}\,dx,$ $\quad[\arcsin x^x]$
9. $\displaystyle\int e^{-2x+5}\,dx,$ $\quad\left[-\frac{1}{2}e^{-2x+5}\right]$
10. $\displaystyle\int (\cos x)^3\,dx,$ $\quad\left[\sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3\right]$
11. $\displaystyle\int 2^{\sin x}\cos x\,dx,$ $\quad\left[\frac{2^{\sin x}}{\log 2}\right]$
12. $\displaystyle\int (\sinh x)^3\,dx,$ $\quad\left[\frac{1}{3}(\cosh x)^3-\cosh x\right]$
13. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx,$ $\quad[\log(e^x+1)]$
14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\log x}{x}\,dx,$ $\quad\left[2\sqrt{x}-\frac{1}{2}(\log x)^2\right]$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx,$ $\quad\left[-\frac{1}{\log x}\right]$
16. $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx,$ $\quad[-\log|\sin x+\cos x|]$

Problema 8.2 (per parti)**.** Calcolare le seguenti primitive:

1. $\displaystyle\int x\cos x\ dx,$ $\quad [x\sin x+\cos x]$

2. $\displaystyle\int \log x\ dx,$ $\quad [x\log x-x]$

3. $\displaystyle\int x\log x\ dx,$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]$

4. $\displaystyle\int x^\alpha\log x\ dx,\ (\alpha\neq -1),$ $\quad \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(\log x-\frac{1}{\alpha+1}\right)\right]$

5. $\displaystyle\int \arcsin x\ dx,$ $\quad \left[x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\right]$

6. $\displaystyle\int xe^x\ dx,$ $\quad [xe^x-x]$

7. $\displaystyle\int e^x\sin x\ dx,$ $\quad \left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]$

8. $\displaystyle\int (\sin x)^2\ dx,$ $\quad \left[\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)\right]$

9. $\displaystyle\int \arctan x\ dx,$ $\quad \left[x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]$

10. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\ dx,$ $\quad \left[2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)\right]$

11. $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx,$ $\quad \left[x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right]$

12. $\displaystyle\int \sin(\log x)\ dx,$ $\quad \left[\frac{x}{2}\left(\sin\log x-\cos\log x\right)\right]$

13. $\displaystyle\int \frac{(\log x)^2}{x^2}\ dx,$ $\quad \left[-\frac{(\log x)^2}{x}-2\frac{\log x}{x}-\frac{2}{x}\right]$

Problema 8.3 (per parti)**.** Calcolare le seguenti primitive:

1. $\displaystyle\int \log(x+\sqrt{1+x^2})\ dx,$ $\quad \left[x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\right]$

2. $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\ dx,$ $\quad \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos(\beta x)+\beta\sin(\beta x))\right]$

3. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\ dx,$ $\quad \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]$

4. $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\ dx,$ $\quad \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right]$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx,$ $\quad \left[\frac{1}{2}\arctan x-\frac{x}{x^2+1}\right]$

Problema 8.4 (per sostituzione)**.** Calcolare le seguenti primitive:

1. $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\ dx,$ $\quad \left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right]$

2. $\displaystyle\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx,$ $\quad \left[2(\sqrt{x}+e^{\sqrt{x}})\right]$

3. $\displaystyle\int \sqrt{e^x-1}\ dx,$ $\quad \left[2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan\sqrt{e^x-1}\right)\right]$

4. $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\ dx,$ $\quad \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\right]$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\ dx,$ $\quad [2\log|\sqrt{x}+1|]$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\ dx,$ $\quad \left[2\arctan\sqrt{2x-1}\right]$

7. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}\,dx,$ $\qquad[\arcsin(\log x)]$

9. $\displaystyle\int e^x\log(1+e^x)\,dx,$ $\qquad[(e^x-1)\log(1+e^x)-e^x]$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}}{1+x}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+2\arctan\sqrt{x}\right]$

11. $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx,$ $\qquad\left[(x-1)\sqrt{e^{2x}-1}+\arctan\sqrt{e^{2x}-1}\right]$

Problema 8.5. Calcolare le seguenti primitive:

1. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-5x+6}\,dx,$ $\qquad[10\log|x-3|-7\log|x-2|]$

2. $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2+2x+3}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{5}{2}\log(x^2+2x+3)+2\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$

3. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{3}{2}\log(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}\right]$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-7x+6}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{1}{2}\log|x^2-7x+6|+\frac{7}{10}\log\left|\frac{x-6}{x-1}\right|\right]$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-7x+10}\,dx,$ $\qquad\left[x+\frac{25}{3}\log|x-5|-\frac{4}{3}\log|x-2|\right]$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx,$ $\qquad\left[x+3\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]$

Problema 8.6. Calcolare le seguenti primitive di funzioni razionali:

1. $\displaystyle\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx,$ $\qquad[3\log|x-3|+5\log|x+4|+7\log|x-1|]$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx,$ $\qquad\left[2\log|x-1|-\log|x|-\frac{x}{(x-1)^2}\right]$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx,$ $\qquad\left[\frac{1}{3}\arctan x-\frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2}\right]$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^6+x^4}\,dx,$ $\qquad\left[\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}\right]$

5. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2(x^2+x+1)}\,dx,$ $\qquad\left[3\log|x|-\frac{3}{2}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

7. $$\int \frac{x}{(x+2)^2(x-1)}\,dx, \qquad \left[-\tfrac{1}{2}\log|x+2| - \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{x+2} + \tfrac{1}{9}\log|x-1|\right]$$

8. $$\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)(x+1)^2}\,dx, \qquad \left[\log|x+1| - \tfrac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \tfrac{3}{x+1} - \sqrt{3}\arctan\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

Problema 8.7. Calcolare

1. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx, \qquad [2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + \log(\sqrt[4]{x}+1)]$$

2. $$\int \frac{1}{x+\sqrt{2x+3}}\,dx, \qquad [= \tfrac{1}{2}\log|\sqrt{2x+3}-1| + \tfrac{3}{2}\log(\sqrt{2x+3}+3)]$$

3. $$\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}\,dx, \qquad [x+1+4\sqrt{x+1}+4\log(\sqrt{x+1}-1)]$$

4. $$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx, \qquad \left[2\arctan\sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}} + \log\tfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]$$

5. $$\int \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^3\,dx, \qquad \left[(3-x)\sqrt{\tfrac{x}{1-x}} - 3\arctan\sqrt{\tfrac{x}{1-x}}\right]$$

Problema 8.8. Calcolare

1. $$\int \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}, \qquad \left[\tfrac{1}{2}\tfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + \tfrac{1}{2}\arctan e^x\right]$$

2. $$\int \frac{\cosh x+\sinh x}{1+2\cosh x}\,dx, \qquad \left[\tfrac{1}{2}\log(e^{2x}+e^x+1) - \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

3. $$\int \frac{1}{\sinh x+2\cosh x}\,dx, \qquad \left[\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\tfrac{2\tanh\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right]$$

Problema 8.9. Calcolare

1. $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx, \qquad \left[\log\left|\tan\tfrac{x}{2}\right|\right]$$

2. $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \left[x + \tfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}\right]$$

3. $$\int \frac{2+\cos x}{(1+2\cos x)\sin x}\,dx, \qquad \left[\log\left|\tfrac{\sin x}{1+2\cos x}\right|\right]$$

4. $$\int \frac{5+\cos x}{(5+3\cos x)\cos x}\,dx, \qquad \left[\log\left|\tfrac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| - \arctan\left(\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{x}{2}\right)\right]$$

Capitolo 9

Integrale di Riemann

9.1 Calcolo di integrali

Problema 9.1. Dei seguenti integrali definiti mostrare che esistono e determinarne il valore:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{(\cos x)^3}\,dx.$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$
4. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log x}{x}\sqrt{(\log x)^2-1}\;e^{\sqrt{(\log x)^2-1}}\,dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{\log 4} \frac{\sqrt{e^x-1}}{8e^{-x}+1}\,dx.$
6. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\log x}{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}\,dx.$
7. $\displaystyle\int_{1/4}^1 \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}\,dx.$
8. $\displaystyle\int_{-\log 3}^{-\log 2} \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-4e^x+3}\,dx.$
9. $\displaystyle\int_{\log 2}^{2\log 2} e^x \arctan\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx.$
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\left(\sinh\sqrt{\log x}\right)^2}{x}\,dx.$

Problema 9.2. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'ellisse di equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Problema 9.3 ($\star$)**.** Calcolare i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{y^2}\,dy.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\int_0^{x^2} e^y\sqrt{y}\cos\sqrt{y}\,dy - x\cos x + x\right).$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \left(e^{t^2}-7\sin(t^2)\right)\,dt - 12\sin x + 11x}{x^7}.$

Problema 9.4 ($\star\star$)**.** Siano

$$f(x) := \int_0^x \frac{\cos t}{1+t}\ dt, \quad g(x) := \int_0^{\sin x} \frac{1}{2+e^t}\ dt,$$

definite per x in un opportuno intervallo contenente $x = 0$, e sia

$$F(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & x \neq 0, \\ \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare α per cui F è continua in $x = 0$.

ii) Stabilire se esiste β (ed in tal caso determinarlo) per cui si abbia

$$F(x) - \alpha = \beta x + o(x), \quad x \to 0.$$

Problema 9.5 ($\star$)**.** Sia

$$f(x) := \int_{x^2}^{2x^2} \frac{\log t}{1+t}\ dt.$$

i) Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) \sim_{+\infty} cx^a(\log x)^b$.

ii) Stabilire se f è limitata su $[1, +\infty[$.

Problema 9.6 ($\star$)**.** Dimostrare che per ogni $x \geqslant 1$ si ha

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\ dt \leqslant 1 + \log x.$$

(sugg.: studiare la funzione $f(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t}\ dt - 1 - \log x \ldots$)

Problema 9.7. Mostrare che

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\ dt \leqslant \frac{x^2}{2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

9.2 Problemi generali

Problema 9.8. Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$. Vale anche il viceversa?

Problema 9.9. Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$, $f \geqslant 0$ su $[a,b]$. Mostrare che se $\int_a^b f(x)\ dx = 0$ allora necessariamente $f \equiv 0$ su $[a,b]$. (sugg.: ricordare la permanenza del segno...).

Problema 9.10. Sia $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Mostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\ dx = 0.$$

(sugg.: $\sin(nx) = \left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)' \ldots$)

Problema 9.11 ($\star$)**.** Calcolare il

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(2\frac{\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(n\frac{\pi}{n}\right)}{n}.$$

(sugg.: il limite è una somma puntata. . .)

Problema 9.12. Sia $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ e poniamo $M := \max_{[0,1]} |f'|$.

i) Provare che

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx\right| \leqslant \frac{M}{n},\ \forall n \geqslant 1.$$

ii) ($\star\star$) Provare che

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\, dx\right| \leqslant \frac{M}{2n},\ \forall n \geqslant 1.$$

Problema 9.13 ($\star$)**.** Sia $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx^2}\, dx.$$

Problema 9.14 ($\star$)**.** Provare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\, dx = 1,\ \forall r > 0.$$

Da questo dedurre che se $f \in \mathscr{C}([-1,1])$ allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2} f(x)\, dx = f(0).$$

Problema 9.15 ($\star\star$)**.** Sia $f \in \mathscr{C}([a,b])$. Mostrare che

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \max_{[a,b]} |f|.$$

(sugg.: il $\leqslant$ è immediato; per il $\geqslant$ osservare che se x_{max} e punto di massimo per $|f|$ allora $|f(x)| \geqslant |f(x_{max})| - \varepsilon$ per ogni $x \in I_{x_{max}} \ldots$).

Problema 9.16 ($\star\star$)**.** Sia $\alpha > 0$. Dimostrare che valgono le disuguaglianze

$$\frac{e^{\alpha e}-e^{\alpha}}{\alpha e} \leqslant \int_0^1 e^{\alpha e^x}\, dx \leqslant \frac{e^{\alpha e}-e^{\alpha}}{\alpha}.$$

(sugg: l'integrale **non** si calcola esplicitamente, ma tentare di provare a farlo può essere utile. . .)

Problema 9.17 ($\star\star$)**.** Determinare tutte le possibili funzioni $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue ed i numeri $a \in \mathbb{R}$ tali che

$$e^x = 2 + \int_a^{x^2} f(y)\, dy.$$

(sugg.: derivare ambo i membri. . .)

Capitolo 10

Integrali generalizzati

Problema 10.1. Applicando la definizione, stabilire se i seguenti integrali generalizzati esistono e determinarne il relativo valore:

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx.$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx.$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x\log x}{(1+x^2)^2}\,dx.$ 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+4}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2x+1}}\,dx.$ 6. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx.$ 7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3x^2+2}{x^{3/2}}\,dx.$ 8. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx.$

9. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx.$

Problema 10.2. Sia $\alpha > 0$ ed

$$f_\alpha(x) := \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}-2e^x+2)^\alpha},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

i) Calcolare le primitive di f_1 (cioè $\alpha = 1$).

ii) Dimostrare che esiste e calcolare $\int_{-\infty}^0 f_1(x)\,dx$.

iii) Per quali $\alpha > 0$ esiste $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$?

Problema 10.3. Sia $\alpha > 0$ e

$$f_\alpha(x) := (x-1)\arctan\frac{1}{x^\alpha},\quad x \in I :=]0,+\infty[.$$

i) Determinare le primitive di f_1 ($\alpha = 1$) su I.

ii) Servirsi del risultato precedente per dire se esiste (e, in tal caso, quanto vale) $\int_0^1 f(x)\,dx$.

iii) Dire per quali $\alpha > 0$ esiste finito $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$.

Problema 10.4. Sia

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \log\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f_α è integrabile a $+\infty$. Dire quindi se esiste, ed in tal caso quanto vale $\int_1^{+\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x)\,dx$.

Problema 10.5. Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che esista

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})^\alpha}\, dx,$$

e calcolarne il valore per $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Problema 10.6. Stabilire per quali valori $\alpha > 0$ è convergono i seguenti integrali generalizzati:

$$\int_0^{\pi^2} x^\alpha \frac{\sin\sqrt{x}}{(\pi^2 - x^2)^\alpha}\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{x^\alpha (1+x)^{2\alpha}}.$$

Del secondo, calcolarlne il valore per $\alpha = 1$.

Problema 10.7. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan(x^\alpha)}{(1-\cos x)^\beta}\, dx$$

sia convergente.

Problema 10.8. Sia

$$f_\alpha(x) := e^x \arctan \frac{1}{(e^x - 1)^\alpha}, \;\; x \in]0, +\infty[.$$

i) Calcolare le primitive di $f_{1/2}$ (cioè $\alpha = \frac{1}{2}$) su $]0, +\infty[$.

ii) Calcolare, se esiste

$$\int_0^1 e^x \arctan \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\, dx.$$

iii) Determinare gli $\alpha > 0$ tali che f_α sia integrabile in $x = 0+$ e quelli per cui è integrabile a $+\infty$. Esistono dei valori di α per i quali $\exists \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$?

Problema 10.9. Sia

$$f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha} \log(1 + \sqrt[3]{x}), \quad x \in [0, +\infty[.$$

i) Calcolare le primitive di f_0 (cioè $\alpha = 0$) su $]0, +\infty[$.

ii) Determinare gli $\alpha > 0$ tali che f_α sia integrabile in $0+$.

iii) ($\star\star$) Determinare gli $\alpha > 0$ tale che f_α sia integrabile a $+\infty$.

Problema 10.10. Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ esiste finito l'integrale

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{(e^x - e)^\alpha}\, dx. \quad 2. \int_1^{+\infty} \frac{\big(1 + \cos(\pi x^2)\big)^{\frac{\alpha}{2}}}{(\log x)^2} \sin\frac{1}{x^\alpha}\, dx. \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\cosh x) - \frac{\pi}{4}}{(\sinh x)^\alpha}\, dx.$$

Problema 10.11. Discutere, al variare dei parametri $\alpha, \beta > 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

Problema 10.12. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log(\log n))^\alpha}.$$

Problema 10.13. Provare che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{N}, \ \forall N \geqslant 1.$$

Problema 10.14. Applicando il criterio di Abel–Dirichlet discutere la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

$$1. \ \int_0^{+\infty} x \sin(x^4) \ dx. \quad 2. \ \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\log x} \ dx \quad 3. \ \int_0^{+\infty} \sin(e^x - 1) \ dx.$$

Problema 10.15. Sia

$$f(x) := \int_0^x \log\left(1 - e^{\frac{y-1}{y^2}}\right) \ dy.$$

Determinare: dominio di f, segno, limiti agli estremi del dominio (se finiti o meno) ed eventuali asintoti, continuità e derivabilità, eventuali limiti della derivata agli estremi del proprio dominio e punti in cui è possibile estendere f con continuità/derivabilità, monotonia ed estremanti, grafico qualitativo.

Problema 10.16. Sia

$$f(x) := \log\frac{4}{3} + \int_0^x \log\left(1 + \frac{t-1}{t^2+4}\right) \ dt.$$

Determinare il dominio di f, i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti, continuità e derivabilità, eventuali limiti della derivata agli estremi del proprio dominio di definizione, monotonia ed estremanti, concavità, e disegnare un grafico qualitativo. Dedurre il segno di f.

Problema 10.17. Sia

$$f(x) := \int_0^x \arctan\frac{t^2}{t^2-2} \ dt.$$

Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi dello stesso ed eventuali asintoti, continuità e derivabilità, eventuali limiti della derivata agli estremi del proprio dominio di definizione, monotonia ed estremanti, concavità, e disegnare un grafico qualitativo. Dedurre il segno di f.

Problema 10.18. Sia $f \in \mathscr{C}([0, +\infty[)$ decrescente tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

i) Mostrare che se $\int_0^{+\infty} f(x) \ dx$ è convergente allora anche $\int_0^{+\infty} f(x)^2 \ dx$ lo è.

ii) Vale il viceversa di i), cioè se $\int_0^{+\infty} f(x)^2 \ dx$ è convergente allora anche $\int_0^{+\infty} f(x) \ dx$ lo è ?

Problema 10.19. Sia $f \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$. Mostrare che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) := \ell \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\ dt = \ell.$$

Cosa si può dire del viceversa?

Problema 10.20 ($\star$)**.** Sia $f \in \mathscr{R}_{loc}([0,+\infty[)$ positiva e decrescente tale che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx < +\infty.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0.$$

Problema 10.21. Sia $f \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-s_0 x} f(x) = 0,\ (\star)$$

per un certo $s_0 \in \mathbb{R}$.

i) Dimostrare che è ben definita la funzione

$$[\Lambda f](s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\ dx, \quad \forall s > s_0.$$

ii) Mostrare che le funzioni $e^{\alpha x}$, $\cos(\omega x)$ e x^n verificano la proprietà ($\star$) e calcolare Λf per ognuna di queste funzioni.

iii) Supponiamo che f ed f' soddisfino ($\star$) per un certo s_0. Mostrare che vale la formula

$$\left[\Lambda f'\right](s) = s\,[\Lambda f](s) - f(0).$$

Λf si dice **trasformata di Laplace di** f ed ha grande importanza nelle applicazioni.

Problema 10.22 ($\star\star$)**.** Sia $k \in C(\mathbb{R})$, $k \geqslant 0$ e tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\ dx = 1.$$

i) Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} nk(nx)\ dx$.

ii) Mostrare che per ogni funzione $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, limitata su $\mathbb{R}$ e assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} nk(nx) f(x)\ dx = f(0).$$