Calcolabilità e Linguaggi Formali
Recupero compitino 2

9 gennaio 2014

Esercizio 1

Date le seguenti due grammatiche, con simboli iniziali rispettivamente S e X,

1. $S ::= ABC|FD|G$,
   $A ::= aAa|D$,
   $B ::= bB|\epsilon$,
   $C ::= cCc|ccc$,
   $D ::= d|dD$,
   $F ::= FaF|bG$,
   $G ::= bF|AG$.
2. $X ::= 1X|XT|Y$,
   $Y ::= 1Y1|11$,
   $T ::= T0|TZ$,
   $Z ::= 1Z1|1Z|T$.

(a) Semplificarle.

(b) Determinare il linguaggio generato da ciascuna grammatica.

(c) Classificare i linguaggi generati.
Se il linguaggio è regolare, dare un'espressione regolare corrispondente.
Se il linguaggio è libero, dimostrare che non è un linguaggio regolare.

Soluzione

(a)
1. Eliminiamo i simboli improduttivi: $\{F, G\}$. Otteniamo:
   $S ::= ABC$,
   $A ::= aAa|D$,
   $B ::= bB|\epsilon$,
   $C ::= cCc|ccc$,
   $D ::= d|dD$.
2. Eliminiamo i simboli improduttivi: $\{T, Z\}$. Otteniamo:
   $X \rightarrow 1X|Y$,
   $Y \rightarrow 1Y1|11$.

(b) Il linguaggio generato dalla prima grammatica è:
$L_1 = \{a^n d^m a^n b^k c^{3+2l} | n, k, l \geq 0 \text{ e } m > 0\}$
Il linguaggio generato dalla seconda grammatica è:
$L_2 = \{1^n | n \geq 2\}$

(c) L_1 è tipo 2.
Dimostriamo con il pumping lemma tipo 3 che non è un linguaggio tipo 3.
Per ogni n naturale, consideriamo la stringa $x = a^n d a^n c^3$, x appartiene ad L e $|x| \geq n$.
Ogni scomposizione di x in tre parti, $x = uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| = r \geq 1$ è tale che v è in a^+, quindi pompando i volte v, con $i = 0$, otteniamo $uw = a^{n-r} d a^n c^3$ che non appartiene ad L. CVD
L_2 è tipo 3 e corrisponde all'espressione regolare: 111^*.

Esercizio 2

- Dare la definizione formale di automa finito deterministico.
- Illustrare la definizione data con un esempio.

Esercizio 3

Applicare, se possibile, i teoremi Rice2 e Rice3 all'insieme $I = \{x : \phi_x(3) = 5 \text{ and } x \leq 10^3\}$.

Soluzione

Vedi Recupero Compitino 1 9 Gennaio 2014

Esercizio 4

Provare che esiste un numero naturale n tale che

$$dom(\phi_n) = \{n\}.$$

Soluzione

Si applica il secondo teorema di ricorsione: Se h è una funzione calcolabile totale, allora esiste un numero naturale n tale che $\phi_n = \phi_{h(n)}$. Definiamo la seguente funzione calcolabile f:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y; \\ \uparrow & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Dal teorema del parametro esiste una funzione calcolabile totale s tale che

$$\phi_{s(x)}(y) = f(x,y).$$

Infine applichiamo il secondo teorema di ricorsione alla funzione totale s. Esiste un numero naturale n tale che $\phi_n = \phi_{s(n)}$. Quindi abbiamo:

$$\phi_n(n) = \phi_{s(n)}(n) = f(n,n) = 1$$

mentre, se $y \neq n$, si ottiene:

$$\phi_n(y) = \phi_{s(n)}(y) = f(n,y) = \uparrow.$$