Teorema Rice 2

November 19, 2013

Abstract

Dimostrazione e qualche esempio

by MLS

Contents

1 Prerequisiti: Relazione d'ordine parziale tra funzioni **2**

2 Teorema di Rice n° 2 (R2) **3**

2.1 Dimostrazione 3

3 Considerazioni ed esempi **4**

1 Prerequisiti: Relazione d'ordine parziale tra funzioni

Consideriamo il grafico di una funzione. Il grafico di una funzione $f(x)$ può venir visto, dal punto di vista insiemistico come un insieme di coppie $Grafico = \{(x, y) : x \in dom(f), y = f(x)\}$. L'insieme grafico descrive completamente la rappresentazione usuale di una funzione sul piano cartesiano.

L'insieme delle infinte finzioni possibili può venir organizzato in classi entro le quali è possibile definire un ordine. Ricordiamo al volo che una relazione d'ordine è una relazione binaria (che coinvolge due elementi dell'insieme) riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Diremo che una funzione f è più piccola di un'altra funzione g se il domino di f è interamente contenuto nel domino di g, se $\forall x \in dom(f) : f(x) = g(x)$ e se g ha un dominio che contiene più punti di quello di f . In altre parole f è più piccola di g , e scriveremo che $f \leq g$ se il grafico di g contiene completamente quello di f e inoltre contiene almeno un'altra coppia di valori. I grafici delle due funzioni sono perfettamente identici fino a coprire completamente il grafico di f, mentre g avrà un grafico che andrà oltre. Si dice anche che g estende f . Vedi figura seguente.

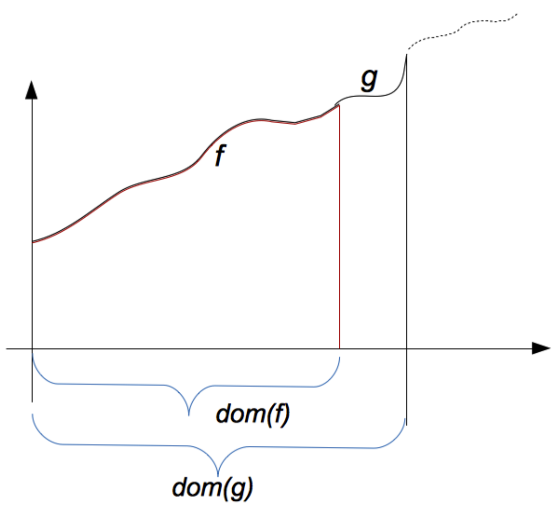

Figure 1: $f \leq g$

La figura 1 descrive due funzioni continue per comodità. Ricordiamoci che le funzioni che trattiamo operano sull'insieme dei numeri naturali.

Risulta evidente che si possono confrontare solamente funzioni che hanno "pezzi" di dominio in comune. Questa definizione d'ordine non consente di mettere in relazione funzioni che non hanno questa caratteristica. Avendo introdotto una relazione d'ordine ci si domanda se c'è una funzione più piccola di tutte e se ce n'è una di più garnde di tutte. La funzione vuota f_0 avendo come dominio l'insieme vuoto $\emptyset$ non può estendere alcuna altra funzione, mentre viene estesa da tutte quelle che hanno almeno un punto nel proprio dominio: è quindi la funzione minima. Non esiste una sola funzione massima, ma ce n'è un'infinità: tutte le funzioni totali che hanno come dominio l'intero $\mathbb{N}$.

2 Teorema di Rice n° 2 (R2)

- Ipotesi

    1. I è un insieme che rispetta le funzioni
    2. f e g siano due funzioni calcolabili
    3. $\{x : \Phi_x = f\} \subseteq I$
    4. $\{x : \Phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$
    5. $f \leq g$

- Tesi:
  L'insieme I non è semidecidibile.

In altre parole un insieme I non è semidecidibile se data una funzione f che appartiene ad I, possiamo dimostrare che una sua estensione g appartiene ad $\bar{I}$.

2.1 Dimostrazione

Sia I l'insieme da esaminare e siano f e g due funzioni calcolabili che rispettino le ipotesi 2,3,4,5. Se riusciamo a ridurre $\bar{K}$ ad I, allora per le prorpietà della riduzione, poichè $\bar{K}$ non è semidecidibile, non lo sarà neanche I. Come al solito, per operare la riduzione, utilizzeremo il teorema del parametro applicandolo ad una funzione calcolabile.

Consideriamo quindi la seguente funzione: $h(x,y) = \begin{cases} g(y) & se\, x \in K \\ f(y) & se\, x \notin K \end{cases}$, dimostriamo che è calcolabile ed applichiamo il teorema del parametro.

Per dimostrare che h è calcolabile, dimostriamo che esiste un programma che la calcola. Sia P questo programma. P avvierà il programma che semidecide K ed in parallelo un programma che calcola f . Si possono verificare i tre seguenti casi:

1. il programma che semidecide K termina per primo. Poichè x appartiene a K P farà partire un programma che calcola g, che darà come risultato $h(x,y)$

2. il programma che calcola $f(y)$ termina per primo. Per l'ipotesi 5 g estende f , quindi il dominio di g conterrà tutti i punti del dominio di f; di conseguenza anche l'input y particolare per il quale f è terminato in questa particolare computazione appartiene al dominio di g e quindi $g(y) = f(y)$. Non ci interessa più vedere se x appartiene a K perchè in tutte e due i casi, che stia in K oppure che non ci stia, sarà sempre $h(x,y) = f(y)$

3. nessuno dei due programmi termina. La situazione è dunque che: $x \notin K$ e $f \uparrow y$. Significa che la funzione $h(x,y)$ sta cercando di calcolare un valore in un punto in cui non è definita.

In definitiva il programma P esiste e quindi $h(x,y)$ è calcolabile. Possiamo quindi applicare il teorema del parametro. Esisterà quindi una funzione totale $S(x)$ tale che $\Phi_{S(x)}(y) = h(x,y)$. In questo caso avremo che:

- se $x \in K$ allora $\Phi_{S(x)}(y) = h(x,y) = g(y)$ per l'ipotesi 4 la funzione g non appartiene ad I e quindi $S(x)$ codifica un programma che non appartiene ad I , poichè per l'ipotesi 1 I rispetta le funzioni.

- se $x \notin K$ allora $\Phi_{S(x)}(y) = h(x,y) = f(y)$ per l'ipotesi 3 la funzione f appartiene ad I e quindi $S(x)$ codifica un programma che appartiene ad I , poichè per l'ipotesi 1 I rispetta le funzioni.

Quindi abbiamo trovato una funzione che prende elementi di K e li converte in elementi di $\bar{I}$. Significa che abbiamo ridotto K a $\bar{I}$: $K \leq_T \bar{I}$. per la proprietà dell'operatore riduzione abbiamo anche che: $\bar{K} \leq_T I$. Poichè $\bar{K}$ non è semidecidbile allora non lo è nemmeno I .$\square$

3 Considerazioni ed esempi

Come per R1 anche R2 necessita dell'esame preliminare dell'insieme per decidere se rispetta o no le funzioni. Dopodichè si esaminano le funzioni apparteneti a quell'insieme. Si cerca quindi di vedere se c'è una funzione che le estende e si cerca di capire se sta in nell'insieme o nel suo complemento. Se sta nel suo compemento l'insieme non è semidecidibile. Se sta nell'insieme allora potrebbe essere semidecidibile.

1. $I = \{x : (\forall y)\, P_x \uparrow y\}$ è l'insieme che contiene la funzione vuota e tutte le sue equivalenti. Ovviamente rispetta le funzioni.

   $f(x) = f_0(x)$ è calcolabile e sta in I . Come detto nel cap. 1, la funzione vuota viene estesa da tutte le funzioni che hanno almeno un punto nel proprio dominio. Sia $g(x) = k$ la funzione costante. Questa funzione termina per ogni valore e quindi è totale. Non può stare in I e quindi starà in $\bar{I}$.

   Poichè vengono rispettate tutte le ipotesi di R2 I non è semidecidibile.

2. $I = \left\{ x : \Phi_x(y) = \left(\begin{cases} y & se\, y\, è\, pari \\ \uparrow & altrimenti \end{cases} \right) \right\}$ questa funzione è chiaramente calcolabile: testare se un numero è pari è semplice. Se y è pari il programma restituirà y, se è dispari entrerà un un un loop infinito. Questo insieme rispetta le funzioni, in quanto è l'insieme di tutte le funzioni equivalenti a Φ_x.

   $I \neq \emptyset$, perchè abbiamo visto che esistono funzioni che fanno quanto richiesto, e $I \neq \mathbb{N}$ perchè ci sono funzioni che terminano per ogni valore di y quindi non appartengono ad I .

   Per R1 I non è decidibile. Poichè la funzione vuota sta in $\bar{I}$ (facile da verificare) $\bar{I}$ non è semidecidibile.

   Consideriamo queste due funzioni: $$\begin{aligned} f(y) &= \begin{cases} y & se\, y\, è\, pari \\ \uparrow & altrimenti \end{cases} \\ g(y) &= y \end{aligned}$$

   La funzione $f(y)$ appartiene ad I . La funzione $g(y)$ (identità) estende la funzione $f(y)$ e sta in $\bar{I}$ perchè nei punti dove è definita $f(y)$ fa quello che fa $f(y)$, negli altri punti fa un'altra cosa. Per R2 I non è semidecidibile.

3. Sia $I = \{x : \Phi_x(3) = 5\}$ Questo insieme contiene tutte le funzioni che terminano in 3 e danno come risultato 5.

   $I \neq \emptyset$, perchè possiamo costruire programmi che fanno quanto richiesto, e $I \neq \mathbb{N}$ perchè la finzione vuota per esempio non appartiene ad I .

   I rispetta le funzioni: Se $x \in I$ e $\Phi_x = \Phi_y$ allora $\Phi_y(3) = \Phi_x(3) = 5$ φy(3) = φx(3) = 5. Quest'ultima uguaglianza vale perche´ $x \in I$.

   Per R1 I non è decidibile e, poichè la funzione vuota sta in $\bar{I}$, $\bar{I}$ non è semidecidibile.

   I è semidecidibile tramite il metodo di scansione a quanti di tempo.

R2 non si può applicare ad I perchè I è semidecidibile.

R2 si può applicare ad $\bar{I}$. Consideriamo queste due funzioni: $\begin{array}{ccc} f(x) & = & f_{\emptyset} \\ g(x) & = 5 & \forall x \end{array}$ La prima, $f(x)$, sta ovviamente in $\bar{I}$, mentre la seconda, che estende $f(x)$ sta in I . $\bar{I}$ non è semidecidibile.