Matematica Discreta

Seconda parte - BBBBBB
20 dicembre 2011

Nome e Cognome:

Numero Matricola:

Giustificare ogni risposta.

Esercizio 1

Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insiemi. Determinare quante sono

(i) le funzioni iniettive $f : B \to A$ tali che $f(2) = a$ e $f(3) = b$;

(ii) le funzioni surgettivi $f : B \to A$;

(iii) le funzioni $f : B \to A$ per cui $f(1) = f(2) = e$.

Soluzione

(i) Il numero di funzioni iniettive $f : B \to A$ che soddisfano la condizione $f(2) = a$ e $f(3) = b$ e' pari al numero di funzioni iniettive dall'insieme $B - \{2, 3\} = \{1, 4, 5\}$ nell'insieme $A - \{a, b\} = \{c, d, e\}$. Quindi in totale sono $3! = 6$.
(ii) Poiche' A e B hanno la stessa cardinalità, per coprire tutti gli elementi di A ho bisogno esattamente di tutti gli elementi di B. Quindi il numero di funzioni surgettive e' uguale al numero di funzioni iniettive: $5!$.
(iii) Supponiamo che $f(1) = f(2) = e$. Per avere una funzione di dominio B dobbiamo determinare i valori $f(3), f(4), f(5)$. Per ciascuno di questi abbiamo 5 possibilità. Quindi in totale abbiamo $5^3 = 125$ funzioni $f : B \to A$ per cui $f(1) = f(2) = e$.

Esercizio 2

(i) Si vuole costituire un comitato di 5 membri scelti tra 10 persone. Quanti differenti comitati si possono formare?

(ii) Si svolge una gara podistica alle olimpiadi. Quanti possibili podi si possono avere se i partecipanti alla gara sono 10?

(iii) Un'urna contiene 15 palline numerate da 1 a 15. Si eseguono 4 estrazioni. Determinare quanti sono i risultati che si possono ottenere come risultato delle 4 estrazioni supponendo di NON rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna e non considerando l'ordine di estrazione.

Soluzione

(i) L'ordine dei componenti del comitato non e' importante. Quindi utilizziamo la figura combinatoria delle combinazioni semplici. In totale, (10 su5).
(ii) Abbiamo 10 possibilità per il primo posto.,9 per il secondo posto e 8 possibilità per il terzo posto. In totale $10 \times 9 \times 8$.
(iii) Combinazioni semplici: (15 su 4).

Esercizio 3

Si determini qual'e' il resto della divisione di $(144)^{78}$ per 11.

Soluzione

$144 = 12^2 \equiv 1^2 = 1$ modulo 11. Quindi $(144)^{78} \equiv 1^7 8 = 1$ modulo 11.

Esercizio 4

Si determino x e y, se esistono, tali che $8x + 47y = 1$. Perche' non esistono x e y tali che $27x + 42y = 1$?

Soluzione

8 e 47 sono coprimi. Quindi esistono x e y tali che $8x + 47y = 1$. Per il calcolo si utlizzaa l'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD. In questo caso semplice, x e y si trovano subito: $x = 6$ e $y = -1$.
27 e 42 non sono coprimi (3 divide entrambi i numeri). Quindi non esistono x e y interi tali che $27x + 42y = 1$.