Teorema Rice 1

2 novembre 2013

Sommario

Dimostrazione e qualche esempio

by MLS

Indice

1 Prerequisiti: Insiemi che rispettano le funzioni

Diciamo che un insieme I rispetta le funzioni se:

$\forall x \in I\ se\ (\Phi_x = \Phi_y) \Longrightarrow y \in I$

In altre parole I rispetta le funzioni se contiene tutti i programmi che si equivalgono (che fanno le stesse cose).

- Teorema: Su I rispetta le funzioni anche il suo complementare $\overline{I}$ rispetta le funzioni.

  Infatti supponiamo per assurdo che un $\overline{I}$ non rispetti le funzioni e che $x \in \overline{I}$ sia un programma che appartiene ad $\overline{I}$. Allora un eventuale equivalente y di x starà in I. In I quindi ci sarà y ma non il suo equivalente x il chè contraddice l'ipotesi che I rispetti le funzioni. □

Nella sezione 3 ci sono alcuni esempi di insiemi che rispettano le funzioni e no.

2 Teorema di Rice n° 1 (R1)

- Ipotesi

  I è un insieme che rispetta le funzioni

- Tesi

  1. I è decidibile sse $I = N \vee I = \emptyset$
  2. se la funzione vuota ($\{x : \Phi_x = f_\emptyset\}$) appartiene ad I allora I non è semidecidibie
  3. se la funzione vuota ($\{x : \Phi_x = f_\emptyset\}$) appartiene ad $\overline{I}$ allora $\overline{I}$ non è semidecidibile.

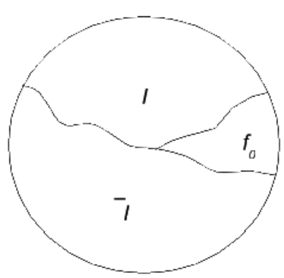
2.1 Dimostrazione

2.2 Dimostrazione della tesi 1)

Poichè si tratta di un'implicazione doppia, bisogna dimostrare partendo prima dall'ipotesi che $I = N \vee I = \emptyset$, e poi dall'ipotesi che I

a) sia $I = N \vee I = \emptyset$ in questo caso è semplice trovare un programma che decide I. Infatti questo programma dirà sempre *no* nel primo caso e sempre *sì* nel secondo, qualsiasi sia l'input.

b) dimostriamo che se $I \neq N \wedge I \neq \emptyset$ allora I non è decidibile. Poichè I e $\overline{I}$ entrambi rispettano le funzioni allora i programmi (equivalenti) che calcolano la funzione vuota, stanno tutti o in $\overline{I}$ o in I. Supponiamo che stiano in I. La situazione è quindi quella descritta nella figura seguente.



Supponiamo che z sia (la codifica di un) programma che sta in $\overline{I}$. Costruiamo quindi la seguente funzione: $f(x,y) = \begin{cases} \Phi_z(y) & se\, x \in K \\ \uparrow & altrimenti \end{cases}$

Analizziamo questa funzione; prendiamo un x qualsiasi e diamolo in pasto alla funzione che semidecide K. Se questa ci dice che x appartiene a K allora lanciamo il progamma P_z con input y quindi in questo caso $f(x,y) = \Phi_z(y)$ che convergerà o divergerà a seconda del comportamento del progamma P_z con input y. Se invece x non appartiene a K la funzione che semidecide K divergerà e con lei la nostra $f(x,y)$. La funzione è quindi calcolabile e ad essa possiamo applicare il teorema del parametro. Esisterà quindi una funzione $S(x)$ totale e calcolabile tale per cui $\Phi_{S(x)} = f(x,y)$.
Detto questo:

- se $x \in K$ allora $\Phi_{S(x)}(y) = \Phi_z(y)$ dunque $S(x)$ è la codifica di un programma equivalente a z che sta in $\overline{I}$, che rispetta le funzioni e quindi anche $S(x)$ sta in $\overline{I}$. Abbiamo preso un elemento che sta in K (il programma x) e l'abbiamo trasformato in un elemento che sta in $\overline{I}$ (il programma $S(x)$) .
- se $x \notin K$ allora $\Phi_{S(x)}(y) \uparrow$ e questo per qualsiasi valore di y . $S(x)$ (è un programma che) calcola la funzione vuota. Tutti i programmi che calcolano la funzione vuota stanno in I e quindi anche $S(x)$.

Abbiamo dimostrato che $S(x)$ riduce K ad $\overline{I}$ ($K \leq_T \bar{I}$): poichè K non è decidibile non lo è nemmeno $\overline{I}$ e quindi neanche I.
L'ipotesi $I \neq N \wedge I \neq \emptyset$ ci ha portato a dire che I non è decidibile quindi I è decidibile se $I \neq N \vee I \neq \emptyset$. $\square$

2.3 Dimostrazione della tesi 2)

L'insieme dei programmi che calcolano la funzione vuota sta in I. Abbiamo dimostrato che $K \leq_T \bar{I}$ ma per le proprietà dell'operatore riduzione possiamo dire anche che $\bar{K} \leq_T I$ quindi non essendo $\bar{K}$ semidecidibile non lo è nemmeno I. $\square$

- Dimostrazione della tesi 3)

  Poichè l'insieme dei programmi che calcolano la funzione vuota sta in $\bar{I}$ basta cambiare la dimostrazione 1) ponendo l'elemento z in I. Si otterrà che $K \leq_T I$ e per la proprietà dell'operatore riduzione $\bar{K} \leq_T \bar{I}$ quindi non essendo $\bar{K}$ semidecidibile non lo è nemmeno $\bar{I}$. $\square$

3 Considerazioni ed esempi

Per utilizzare R1 per prima cosa bisogna valutare se l'insieme in esame non sia vuoto o non sia tutto $\mathbb{N}$, poi se rispetta le funzioni. Si tenga presente che se un insieme è vincolato da limiti di tempo (... che l'elaborazione termini in n passi) o che faccia qualcosa di specifico legato alla sua codifica (... che l'output sia sia $< x$ per esempio) probabilmente non rispetta le funzioni. Poi bisogna valutare se la funzione vuota sta nell'insieme o nel suo complementare. A questo punto, se l'insieme rispetta le funzioni è diverso dall'insieme vuoto ed è diverso da tutto $\mathbb{N}$ allora non è decidibile per la prima ipotesi, poi si applica la seconda o la terza delle tesi di R1 concludendo che l'insieme o il suo complentare non sono semidecidibili.

1. $K = \{x : P_x \downarrow x\}$ è l'insieme dei programmi che terminano su se stessi. Non rispetta le funzioni; Infatti sia $x \in K$ un elemento di K. Possiamo costruire un programma equivalente (che fa le stesse cose di P_x) aggiungendo P_x alcune istruzioni inutili (che non fanno niente). Questo nuovo programma avrà una codifica diversa x' e terminerà anch'esso su x, $(P_{x'} \downarrow x)$, ma non è detto che termini su se stesso, perchè P_x non lo garantisce, quindi in questo caso apparterrebbe a $\bar{K}$. Abbiamo dimostrato che non tutti i programmi equivalenti a programmi che stanno in K stanno in K quindi K non rispetta le funzioni. A K e a $\bar{K}$ non può essere applicato R1.

2. $R = \{x : (\exists y)\, P_x \downarrow y\}$ è l'insieme dei programmi che terminano per almeno un input.

   L'insieme non è vuoto, perchè possiamo sempre costruire un programma che termini per qualche (almeno uno) input.

   L'insieme non coincide con $\mathbb{N}$ perchè ci sono programmi che non terminano mai (la funzione vuota e i suoi equivalenti) e quindi, per la prima tesi R non è decidibile.

   L'insieme rispetta le funzioni. Infatti sia $x \in R$ un elemento di R. Un programma equivalente ad x dovrà terminare per gli stessi input per i quali termina x. Termina per almeno un input e quindi appartiene ad R.

   La funzione vuota sta (ovviamente) nel complementare di R quindi $\bar{R}$ non è semidecidibile.

3. $I = \{dom\,(\Phi_x)\ \text{è}\, finito\}$ è l'insieme di tutte le funzioni che terminano in un numero finito di punti (non totali).

   L'insieme non è vuoto: esistono funzioni che terminano in un numero finito di punti.

   L'insieme non coincide con $\mathbb{N}$: esistono funzioni che terminano per ogni input, e funzioni che non terminano mai e che quindi non appartengono ad I.

   L'insieme rispetta le funzioni. Se $x \in I$ e y è (la codifica di) un programma che equivale a x anch'esso terminerà in un numero finito di punti quindi apparterrà ad I. Quindi per la prima tesi di R1 l'insieme non è decidibile.

   Per la terza tesi di R1 poichè la funzione vuota appartiene ad $\bar{I}$ (infatti non termina mai per cui non può appartenere ad I) $\bar{I}$ non è semidecidibile.

4. $I = \{x : (\forall y)\, P_x \downarrow y \rightarrow 0 \leq y \leq 10\}$. Per capire cosa contiene quest'insieme dobbiamo analizzare la tabella della verità dell'implicazione. Poichè l'implicazione è falsa solo se è vera la premessa e falsa la conseguente allora non apparterrano ad I i programmi che terminano su y e $y > 10$. Appatengono ad I tutti i programmi che terminano per input compreso tra 0 e 10 oppure non terminano mai.

   L'insieme non è vuoto. Non è difficile capire che ci possono essere dei programmi che si comportano in maniera tale da appartenere ad I. La funzione vuota è calcolata da una infinità di programmi che stanno in I.

   L'insieme non coincide con $\mathbb{N}$: esistono funzioni (programmi) che terminano per input maggiori di 10 e che quindi non appartengono ad I. Per la prima tesi di R1 I non è decidibile.

   L'insieme rispetta le funzioni.Se $x \in I$ e y è (la codifica di) un programma che equivale a x anch'esso terminerà per input compreso tra e 10 oppure non terminerà mai esattamente come $x \in I$ quindi apparterrà ad I.

   Per la seconda tesi di R1, poichè la funzione vuota appartiene ad I allora I non è nemmeno semidecidibile.