EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Le equazioni differenziali sono equazioni in cui l'incognita – $y(x)$ – compare assieme alle sue derivate ($y'(x), y''(x)$, etc). L'ordine di derivazione dell'incognita è l'**ordine** delle equazioni differenziali: per esempio se l'incognita è derivata un massimo di due volte l'equazione differenziale è di *secondo* ordine.

Una semplice equazione differenziale è:

$$y'(x) = x$$

Per trovare il valore di $y(x)$ basta **integrare entrambi i termini**:

$$\int y'(x)dx = \int xdx \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

Risolvere un'equazione differenziale significa trovarne **l'integrale generale**: ogni equazione differenziale **ha sempre infinite soluzioni**, ma se viene specificata qualche condizione – per esempio, $y(0) = 1$, detto ***Problema di Cauchy*** - l'equazione differenziale **ha una sola soluzione**. Nel nostro caso, il sistema:

$$\begin{cases} y'(x) = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

…ha una sola soluzione, ottenuta prima calcolando l'integrale generale dell'equazione differenziale, quindi sostituendo nel risultato i valori della condizione:

$$y(0) = 1 \;\rightarrow\; 1 = \frac{0^2}{2} + c \rightarrow \; \boldsymbol{c = 1}$$

…da cui l'unica soluzione:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \mathbf{1}.$$

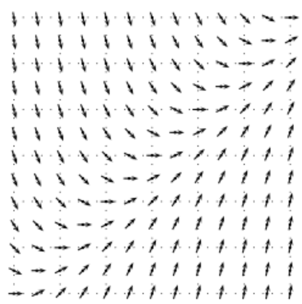
Interpretazione qualitativa. Prima di vedere i vari tipi di equazioni differenziali esistenti cerchiamo di capire qualitativamente cosa comporta lo studio di questo tipo d'equazioni. Prendiamo l'equazione differenziale

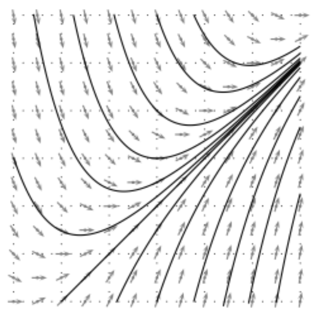
$$y'(x) + y(x) = x$$

Riscriviamola così:

$$y'(x) = x - y(x)$$

Leggiamola: la derivata della funzione y(x) è uguale alla differenza tra le coordinate del punto $P(x, y(x))$. Perciò, se $x = y(x)$, la derivata sarà nulla. Al variare di x, la derivata cambierà inclinazione rivelandoci se la funzione è o meno crescente. Quello che si ottiene, per un tot di punti, è questo grafico:





Nello specifico, il grafico di una delle soluzioni dell'equazione differenziale è la retta d'equazione $y = x - 1$. Effettivamente, svolgendo i calcoli, abbiamo:

$$y'(x) = x - y(x) \quad \rightarrow \quad D(x-1) = x - x + 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 1$$

L'uguaglianza è verificata, quindi la funzione $y(x)$ è una soluzione dell'equazione. Il grafico qualitativo generale dell'equazione differenziale è questo a lato. Vediamo ora **vari metodi** per risolvere queste equazioni differenziali.

1. Equazioni differenziali del 1° ordine lineari.

Sono equazioni differenziali in cui l'incognita è derivata *una sola volta.* Hanno forma canonica:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Notare che hanno questa forma e *solo* questa: $y'(x)$ non è moltiplicata per nessun fattore! Nel caso si trovi un'equazione come questa…

$$x^2 y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

…bisogna dividere ogni termine per il fattore x^2:

$$y'(x) + \frac{a(x)y(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

Il metodo per risolvere questo tipo di disequazione è:

a) Individuare il **fattore integrante**, che ha forma $e^{A(x)}$, dove $A(x) = \int a(x)dx$.

b) Moltiplicare a destra e a sinistra per il fattore integrante:

$$\boldsymbol{e^{A(x)}}y'(x) + \boldsymbol{e^{A(x)}}a(x)y(x) = \boldsymbol{e^{A(x)}}\,f(x)$$

c) Si scopre che **la parte sinistra dell'equazione è la derivata del prodotto di due funzioni**, quindi integriamo entrambi i membri:

$$\int (\boldsymbol{e^{A(x)}}y'(x) + \boldsymbol{e^{A(x)}}a(x)y(x))dx = \int (\boldsymbol{e^{A(x)}}\,f(x))dx \quad \rightarrow$$

$$e^{A(x)}\,f(x) = \int e^{A(x)}\,a(x)\,dx \quad \boldsymbol{ricordarsi} + \boldsymbol{c}!$$

d) Si ricava infine $y(x)$, dividendo entrambi i membri per $e^{A(x)}$.

Esercizio 1. Risolvere l'equazione differenziale seguente:

$$y'(x) + y(x) = x$$

Fattore integrante: $A(x) = \int a(x)dx \rightarrow A(x) = \int 1dx = x \rightarrow \quad e^x$

Moltiplichiamo entrambi i membri: $e^x y'(x) + e^x y(x) = e^x x$

Dato che $e^x y'(x) + e^x y(x)$ è la derivata di $e^x y(x)$, otteniamo:

$$e^x y(x) = \int e^x x dx$$

L'integrale va risolto per parti: $F(x) = x,\ G'(x) = e^x$.

$$\int e^x x dx = xe^x - \int 1 * e^x = xe^x - e^x + c$$

Perciò:

$$e^x y(x) = xe^x - e^x + c \ \rightarrow \ y(x) = \frac{xe^x - e^x + c}{e^x} = \boldsymbol{x - 1 + \frac{c}{e^x}}$$

Esercizio 2. Risolvere questo problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 4x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è nella forma $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$, quindi usiamo il metodo appena visto:

Fatto integrante: $A(x) = \int a(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \ \rightarrow e^{\ln|x|} \rightarrow |x|$. Decidiamo, specificandolo, che risolveremo l'equazione differenziale per un x positivo. Moltiplichiamo entrambi i membri per il fattore integrante:

$$xy'(x) + x\frac{y(x)}{x} = x4x^2 \ \rightarrow \quad x\,y'(x) + y(x) = 4x^3$$

$x\,y'(x) + y(x)$ è la derivata di $xy(x)$:

$$xy(x) = \int 4x^3 dx = 4 * \frac{1}{4}x^4 = x^4 + c$$

Divido per x , ricavandomi $y(x)$. $\qquad y(x) = 4x^3 + \frac{c}{x}$

Imponiamo ora la condizione iniziale: $y(-1) = 0 \rightarrow\ 0 = (-1)^3 + \frac{c}{-1} \rightarrow \boldsymbol{c = 1.}$ La risposta finale del nostro problema quindi è:

$$y(x) = x^3 + \frac{1}{x} \qquad (con\ x > 0)$$

Esercizio 3. Risolvere questo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (e^x + 1)y'(x) - y(x) = (e^x + 1)e\hat{\ }x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Attenzione! L'equazione differenziale **non è in forma canonica** quindi dobbiamo dividere a destra e a sinistra per $(e^x + 1)$:

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{y(x)}{e^x+1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Calcoliamo il fattore integrante:

$$a(x) = -\frac{1}{e^x + 1} \rightarrow \mathrm{A}(x) = \int -\frac{1}{e^x + 1}dx - \int \frac{1}{e^x + 1}dx = -\int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \log(e^{-x} + 1)$$

$$\boldsymbol{e^{A(x)}} = e^{\log(e^{-x}+1)} = \boldsymbol{(e^{-x} + 1)}$$

Moltiplichiamo l'equazione differenziale per il fattore integrante:

$$\boldsymbol{(e^{-x} + 1)}y'(x) - \boldsymbol{(e^{-x} + 1)}\frac{y(x)}{e^x + 1} = \boldsymbol{(e^{-x} + 1)}e^x$$

$$y'(x) = \frac{1}{\boldsymbol{(e^{-x} + 1)}}\int (e^{-x} + 1)e^x dx = \frac{1}{\boldsymbol{(e^{-x} + 1)}}\int 1 + e^x dx = \frac{\boldsymbol{x + e^x + c}}{\boldsymbol{(e^{-x} + 1)}}$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = -1$:

$$y(0) = \frac{0+1+c}{1+1} \rightarrow -2 = 1 + c \rightarrow \boldsymbol{c = -3} \text{ c}$$

L'unica soluzione del nostro problema, quindi, è:

$$y(x) = \frac{x + e^x - \boldsymbol{3}}{(e^{-x} + 1)}$$

2. Equazioni di primo ordine a variabili separate. Sono equazioni differenziali in cui è presente una funzione di x e una funzione di y:

$$y' = f(x)y(x)$$

Un esempio è $y' = \cos x * \operatorname{sen} y$. **Non** è una equazione differenziale a variabili separate $y' = \cos(xy)$. Il metodo per risolverle è:

$$\begin{cases} y' = (x+1)y & x \in \mathrm{R} \\ y(2) = -1. \end{cases}$$

1) **Isolo y' a destra**, se non è già stato fatto. Eventualmente sono necessari dei passaggi e delle trasformazioni, ma il risultato dev'essere sempre così:

$$y' = (x + 1)y$$

2) **Considero che $y' = \frac{dy}{dx}$:**

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)y$$

3) **Riscrivo** l'equazione in questa forma, spostando gli y a sinistra e le x a sinistra:

$$\frac{dy}{y} = (x + 1)dx$$

4) **Integro** entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (x + 1)dx \quad \rightarrow \quad \ln|y(x)| = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + c$$

5) Riscrivo entrambe le **funzioni come esponenti di e**:

$$e^{\ln|y(x)|} = e^{\frac{1}{2}(x+1)^2+c} \quad \rightarrow \quad y(x) = e^{\frac{1}{2}(x+1)^2+c} \rightarrow y(x) = e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}\, e^c$$

6) Posto $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e^c}$, ottengo $y(x) = Ae^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$, ossia tutte le possibili soluzioni dell'equazione differenziale.

3) Equazioni differenziali di secondo ordine. La forma canonica è:

$$a_n y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x)$$

…ossia è una combinazione lineare dell'incognita y e delle sue derivate è uguale ad una funzione di x. Per esempio è un'equazione differenziale completa di secondo tipo: $y'' - 3y' + 2y = x^2$. La soluzione di questo tipo d'equazioni differenziali è composta da due parti: problema omogeneo e problema particolare:

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x)$$

Problema omogeneo: $\boldsymbol{y_0(x)}$.

Consideriamo l'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 0$. I passi sono:

a. **Tradurre l'equazione differenziale nel suo polinomio caratteristico**. Per tradurre, ricordare che "grado di derivazione" = "grado di z". Perciò

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad diventa \quad z^2 - 3z + 2z^0 = 0 \to z^2 - 3z + 2 = 0^*$$

Nota 1: $2y$ ha grado di derivazione 0, quindi si traduce semplicemente con 2; y ha grado di derivazione 0, e si traduce con 1.

b. **Risolvere il polinomio**, trovando i valori di z. È **fondamentale ricordare la molteplicità del risultato**:

a) Più risultati identici: vanno distinti attraverso potenze di x. È il caso dei polinomi di secondo grado con delta nullo.

Esempio: $z^2 + 2x + 1,\ z_1 = z_2 = 1$. In questo caso si ottiene e^{1x}, xe^{1x}. In generale avrò come soluzione $e^{\alpha x},\ \ \boldsymbol{xe^{\alpha x}},\ \ x^2e^{\alpha x},\ \ \ldots\ ,\ \ x^{n-1}e^{\alpha x}$ se il polinomio ammette *n* soluzioni.

b) Se nella fattorizzazione abbiamo $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\ldots)$, cioè una serie di soluzioni distinte, otteniamo $e^{\alpha x}, e^{bx}, e^{cx},\ etc.$

c) Se il polinomio associato non ha soluzioni reali (per esempio non è scomponibile, avendo $\Delta < \boldsymbol{0}$), si devono trovare le **soluzioni complesse coniugate**:

a. Calcolo il delta, che verrà minore di zero.

b. Osservo che: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{-1} * \sqrt{\Delta} = i\sqrt{\Delta}$. Quindi calcolo normalmente le soluzioni dell'equazioni, che avranno forma $z_{1,2} = \alpha + i\beta$. Quindi individuo le soluzioni che cercavo: $e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sen\beta x$. Nel caso la molteplicità sia maggiore di 2 otteniamo:

$$e^{\alpha x}cos\beta x + xe^{\alpha x}cos\beta x + x^2e^{\alpha x}cos\beta x + \cdots + x^{n-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}sen\beta x + xe^{\alpha x}sen\beta x + x^2e^{\alpha x}sen\beta x + \cdots + x^{n-1}\,e^{\alpha x}sen\beta x$$

c. Si fa una **combinazione lineare** delle soluzioni trovate.

$$y_0(x) =: c_1e^{\boldsymbol{\alpha x}} + c_2xe^{\boldsymbol{\alpha x}} + c_3x^2e^{\boldsymbol{\alpha x}} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\boldsymbol{\alpha x}}$$

Riprendendo il nostro esempio, l'equazione differenziale $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0$ ha come polinomio associato $z^2 - 2z - 3 = 0$, che ha soluzioni z= $3, z = -1$. Otteniamo quindi e^{3x} e e^{-1}:

$$y_o(x) = c_2 e^{3x} + c_2 e^{-1}.$$

Se l'equazione differenziale non ha $f(x)$ a destra dell'uguale, l'esercizio è finito. È anche possibile avere il **problema di Cauchy** anche con equazioni differenziali di secondo ordine omogenee:

Esempio 1.

$$\begin{cases} y''(x) - 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Troviamo tutte le soluzioni all'equazione differenziale:

$$y''(x) - 9y = 0 \quad \to \quad z^2 - 9 = 0 \quad \to \quad z = \pm 3 \quad \to \quad e^{-3x}, e^{+3x} \quad \to \quad \boldsymbol{y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}}.$$

Imponiamo ora le condizioni:

$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad e \quad y'(x) = -3c_1 e^{-3x} + 3c_2 e^{-3x} \; con \; x = 0 \to -3c_1 + 3c_2 = 6$

Otteniamo un sistema a due incognite:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -3c_1 + 3c_2 = 6 \end{cases}$$

E otteniamo che $c_2 = \frac{3}{2} e \; c_1 = -\frac{1}{2}$. La soluzione finale, quindi, è: $y(x) = \boldsymbol{-\frac{1}{2} e^{-3x} + \frac{3}{2} e^{3x}}$.

Problema particolare: $y_*(x)$.

a. Prima di tutto, interpretiamo $f(x)$ in questa forma:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P(x) \cdot (cos\beta x \; oppure \; sen\beta x)$$

...dove P(x) rappresenta un generico polinomio, di cui vorrò sapere il grado. Nel nostro caso, $f(x) = x^2$ quindi ottengo $\alpha = 0, \quad P(x) = 2° \; grado, \quad \beta = 0$.

b. Con i valori ottenuti individuiamo il numero $z = \alpha + i\beta$. Nel nostro caso, $z = 0$.

c. Ci domandiamo Il valore appena trovato – z – è **soluzione del polinomio caratteristico** *?

Risposta: no -> molteplicità m = 0;

Risposta: sì -> m = 1 (è un'unica soluzione), 2 (è due soluzioni), 3 (…)

d. Iniziamo a comporre $y_*(x)$:

$$y_*(x) = x^m e^{\alpha x}(Q_1(x) cos\; \beta x + Q_2(x) sen\beta x)$$

...con Q_1 e Q_2 polinomi generici dello stesso grado di $P(x)$. Nel nostro caso, abbiamo:

$$y_*(x) = x^1 e^{0x}(Q_1 cos 0) = xQ_1$$

...perché il seno di 0 è 0, mentre il coseno di 0 è 1. Ora bisogna analizzare cosa possa essere Q_1. In questo caso è un generico polinomio dello stesso grado di $P(x)$: $Ax + B$, di grado 1. Quindi ottengo: $y_*(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$.

Ora vogliamo **sostituire** $y_*(x)$ nella nostra equazione differenziale di partenza:

$$y'''(Ax^3 + Bx^2) + 3y''(Ax^3 + Bx^2) = 9x.$$

Calcolo le derivate:

$$derivata\ 1° = 3Ax^2 + 2Bx$$

$$derivata\ 2° = 6Ax + 2B$$

$$derivata\ 3° = 6A$$

Quindi ottengo:

$$6A + 3(6Ax + 2B) = 9x \rightarrow \ \boldsymbol{18A}x + 6A + 6B = \boldsymbol{9}x$$

Quindi impongo: $18Ax \ = \ 9x \rightarrow \ \boldsymbol{A} \ = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$$6A + 6B = 0 \rightarrow 3 + 6B = 0 \rightarrow B = \ -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

Quindi sostituisco A e B appena trovati:

$$y_*(x) = Ax^3 + Bx^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

Sommo le due soluzioni (omogenea e particolare e ottengo):

$$y(x) = y_0(x) + y_*(x) \ \rightarrow \ \boldsymbol{c_1 + c_2x + c_3e^{-3x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2}$$

Equazioni differenziali e matrici: calcolo del determinante, autovalori e autovettori.

Prima di tutto riprendiamo alcune nozioni di base sulle matrici. Una **matrice** è una **tabella formata da *m*-righe e *n*-colonne di elementi**. A seconda delle caratteristiche e della disposizione di questi elementi la matrice assume nomi diversi:

1. Una **matrice nulla** è composta da elementi tutti a 0.
2. Una **matrice quadrata** ha tante righe quante colonne. I suoi elementi in posizione $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ formano la *diagonale principale della matrice*.
3. La **matrice identica** (I_n, dove n è il numero di righe e colonne) è una matrice **quadrata** avente la **diagonale principale a 1**, il resto degli elementi a 0.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Date due matrici A e B è possibile moltiplicare A*B (**prodotto tra due matrici**) solo **se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B**. Il risultato è una nuova matrice che avrà il numero di righe di A e il numero di colonne di B. Un esempio di prodotto tra matrici è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

…dove i calcoli sono:

0*1 + (-1)*4 + 2*3 = -4 + 6 = 2;

3*1 + 4*4 + (-6)*3 = 3 + 16 – 18 = 1.

1. Calcolo del determinante. Il **determinante di una matrice** viene calcolato **solo per matrici quadrate**. Alcune formule di base per calcolarlo sono:

1. Determinante della **matrice identica**: $det\,(I_n) = 1$.
2. Determinante di **matrici 1x1**: $det[a] = a$
3. Determinante di **matrici 2x2**:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

4. Determinante di **matrici 3x3**:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

Per ricordare come fare conviene scrivere così:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

5. Determinante di **matrici quadrate superiori a 3x3**: si usa una tecnica ricorsiva. Data la matrice seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

…il determinante si ottiene così:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ossia seleziono la prima colonna, prendo l'elemento e lo moltiplico per il determinante del resto della matrice, alternando i segni quando si cambia colonna.

Scala per righe. Le matrici possono anche essere trasformate in forma scala per righe attraverso tre diverse operazioni:

- **Primo tipo**: sostituire la A_i con $(A_i + aA_j)$;
- **Secondo tipo**: scambiare tra di loro le righe Ai e Aj;
- **Terzo tipo**: moltiplicare la riga Ai per uno scalare non nullo c.

1. **Autovalori e autovettori**. Sia A una matrice quadrata $n \, x \, n$. Un vettore u si dice *autovettore* della matrice A se:
    - $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}.$
    - Esiste uno scalare λ tale che $Au = \lambda u$. Tale scalare è anche detto **autovalore** di A.

Il fatto che u sia un autovettore di A relativo a λ significa anche che u è una soluzione non nulla del sistema omogeneo $(A - \lambda I_n)x = 0$, dove I_n è la matrice identità. Più precisamente uno scalare λ è un autovalore di A solo se $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Esempio 1: calcolare gli autovalori. **Calcolare gli autovalori** della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se λ è un autovalore, allora è necessario che $det(A - \lambda I_n) = 0$. Per verificarlo i passi sono:

1. Calcoliamo la matrice λI_n:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Effettuiamo la sottrazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1-\lambda} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2-\lambda} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}$$

3. Calcoliamo il determinante:

$$\det P = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6 = \boldsymbol{\lambda^2 - 3\lambda - 4}$$

4. Si **eguaglia il determinante a 0**, come da definizione, e si risolve l'equazione:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \ \boldsymbol{\lambda = -1}, \ \boldsymbol{\lambda = 4}$$

…e di conseguenza abbiamo ottenuto i due autovalori.

Abbiamo perciò visto che è possibile trovare gli autovalori di una matrice calcolando le radici del polinomio $det(A - \lambda I_n) = 0$, detto anche **polinomio caratteristico della matrice A** . Una volta calcolati gli autovalori, dobbiamo ottenere il corrispondente autovettore. Consideriamo ancora la matrice A di partenza e i due autovalori $\boldsymbol{\lambda = -1}, \ \boldsymbol{\lambda = 4}$. Calcoliamo l'autovettore per $\boldsymbol{\lambda = 4}$:

$$\begin{pmatrix} 1-\boldsymbol{\lambda} & -2 \\ -3 & 2-\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathbf{4} & -2 \\ -3 & 2-\mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Mettiamo la matrice in forma scala per righe: sottraggo cioè la prima riga alla seconda e divido la prima riga rimanente per -3:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{\frac{2}{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

…e quindi un autovettore è $[2/3 \quad -1]$.

Gli autovalori/autovettori vengono usati per **risolvere sistemi di disequazioni (lineari)**.

Sistemi lineari a coefficienti costanti, omogenei.

Per esempio, prendiamo questo sistema:

$$a) \begin{cases} x' + x - y = 0 \\ y' - 4x + y = 0 \end{cases}$$

Il metodo per risolvere è:

1. **Riscrivo il sistema** spostando la derivata a sinistra, il resto a destra:

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = 4x - y \end{cases}$$

2. Ricavo la **forma matriciale X'= AX**, dove la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **Calcolo gli autovalori**, con la formula secondo cui $det(A - \lambda I_n) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 - 4.$$

Da cui si ottengono i due autovalori $\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3}$. **Dato che gli autovalori, in questo caso, sono due (con molteplicità 1)**, l'integrale generale avrà forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{1t} u + c_2 e^{-3t} v$$

…dove *u* e *v* sono due autovettori associati a $\boldsymbol{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3}$.

4. Calcolo **un autovettore per ciascun autovalore**. Comincio con $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$:

$$\begin{pmatrix} -1-\mathbf{1} & 1 \\ 4 & -1-\mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \to -2x + y = 0$$

Preso il vettore generico $v(x, y)$, ottengo quindi $v(x, 2x)$. Per $x = 1$, ad esempio, ho il vettore $v(1,2)$, che è effettivamente l autovettore cercato. Faccio la stessa cosa per il secondo autovalore e ottengo che il secondo autovettore associato è $v(1, -2)$. La soluzione quindi è:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{1t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui il polinomio del calcolo dell'autovalore abbia **delta negativo**, il risultato del sistema è:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t}(sen\beta x * u + cos\beta x * v) + c_2 e^{\alpha t}(sen\beta x * u + cos\beta x * v)$$

Se invece il polinomio dell'autovalore ha **un solo risultato con molteplicità 2**, il risultato del sistema è:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\alpha t} u + c_2 e^{\alpha t}(t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$$

…dove u è l'autovettore calcolato a partire dall'autovalore trovato, mentre v è un autovettore generico, per esempio ottenuto con $x = 0$.