Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 5: Trasformazioni di variabili aleatorie

1. Se il 65% della popolazione di una vasta comunità è a favore di una proposta di aumento delle tasse scolastiche, approssimare la probabilità che un campione casuale di 100 persone contenga
(a) almeno 50 persone favorevoli alla proposta;
(b) tra 60 e 70 persone favorevoli alla proposta;
(c) meno di 75 persone favorevoli alla proposta.

2. Sia X una variabile casuale normale con funzione generatrice dei momenti $M_X(t) = e^{2t(1+t)}$. Determinare $P(0 < X < 4)$.

3. Se X è uniformemente distribuita in $(-1, 1)$, si determini:
(a) $P(|X| > \frac{1}{2})$;
(b) la densità della variabile $|X|$.

4. Sia X una variabile casuale esponenziale di parametro λ. Si determini la distribuzione di $Y = F_X(X)$.

5. La variabile casuale X ha funzione di densità

$$f_X(x) = \frac{x^2}{9}, \qquad 0 < x < 3.$$

Trovare la densità della variabile casuale $Y = X^3$.

6. Sia X una variabile casuale con funzione di densità $f_X(x; \lambda) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, per $x > 0$. Trovare le funzioni di densità di $Y = \ln X$ e $Z = X/(X + 1)$.

7. Sia X una variabile casuale con distribuzione uniforme sull'intervallo $(0, 20)$. Trovare la funzione di densità della variabile casuale $Y = (X+3)/2$. Determinare anche la media e la varianza di Y.

8. I mancini formano il 12% della popolazione. Approssimare la probabilità che vi siano almeno 20 studenti mancini in una scuola di 200 studenti. Precisare le ipotesi utilizzate.

9. Si consideri una variabile casuale X con funzione generatrice dei momenti $M_X(t) = 9/(3 - t)^2$. Trovare la media e la varianza della variabile casuale X.

10. Sia X una variabile casuale distribuita secondo una legge esponenziale di parametro λ. Trovare la distribuzione della variabile casuale $Y = X^2$.

11. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ e $c > 0$, provare che cX è esponenziale di parametro λ/c.

12. Se X è uniformemente distribuita in $(0, 1)$, determinare la densità di $Y = e^X$.

13. Sia X una v.a. con distribuzione normale di media $\mu = 5$ e varianza $\sigma^2 = 4$. Si calcoli il valore atteso della v.a. $Y = (X - 5)^2$. [4]

14. Sia X una v.a. geometrica di parametro p. Si calcoli il valore atteso e la funzione di probabilità di $Y = 2X - 1$. $[(2 - 3p)/p]$