Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 03 giugno 2014.

Tema A

CORREZIONE

Nome

Cognome

Matricola   Aula   Posto

Codice insegnamento: Crediti

Intende sostenere: Mod. 1   Mod. 2

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Modulo 1	/ /	/30
Modulo 2	/ /	/30
Test OFA	/ /	superato non sup.

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \frac{-1 - \tanh x}{2}. \tag{1}$$

Ricordo che

$$f_1(x) = \tanh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per* $x \to \pm\infty$.

Si può vedere che

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

Domanda numero 4*: Calcolare*

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Risoluzione.
Si ha anche

$$f(x) = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli: Notiamo che

  $$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = +1.$$

  Quindi

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$$

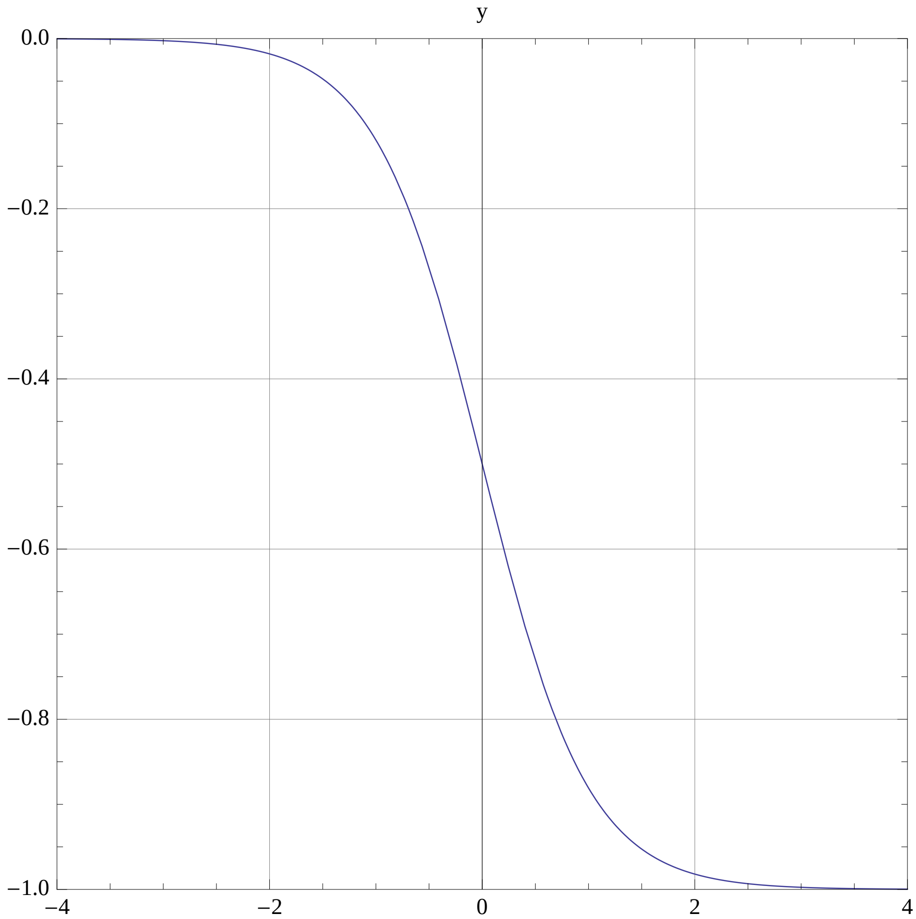
  Non vi sono punti di discontinuità.
- Non vi sono asintoti verticali od obliqui. Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$: $y = -1$. Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$: $y = 0$.
- Derivata

  $$f'(x) = -\frac{1}{2\cosh^2 x} = -\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

  Non vi sono punti di stazionarietà.
- La derivata seconda è:

  $$f''(x) = +\frac{\tanh(x)}{2\cosh^2 x} = \frac{\sinh x}{2\cosh^3 x} = 4\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3}.$$

  Positiva se $x > 0$, negativa altrimenti, quindi il punto $x = 0$ è di flesso.
- Estremo superiore = 0. Estremo inferiore = -1. Non esistono né massimo, né minimo assoluto.
- Grafico della funzione.



- Abbiamo:

$$I_1 = \int \tanh x \, dx = \int f_1(x) dx = \int \frac{1}{\cosh x} (\cosh x)' dx.$$

Quindi, posto $y = \cosh x$, abbiamo

$$I_1 = \int \frac{1}{y} dy = \log y = \log(\cosh x) + C.$$

Perciò:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \tanh(x) \, dx = [\log(\cosh x)]_{-1}^{1} = 0.$$

Da cui infine,

$$I = \int_{-1}^{1} (-1/2) dx = -1.$$

Test 2 Domanda numero 5: *Usando lo sviluppo di Taylor, provare che*

$$g'(x_0) = \frac{g(x_0+u) - g(x_0-u)}{2\,u} + o(u^2).$$

Risoluzione.
Lo sviluppo di Taylor di g attorno al punto x_0 arrestato ai termini quadratici asserisce che

$$g(x_0+u) = g(x_0) + g'(x_0)\,u + (1/2)g''(x_0)u^2 + o(u^3),$$

e

$$g(x_0-u) = g(x_0) + g'(x_0)\,(-u) + (1/2)g''(x_0)(-u)^2 + o(u^3).$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni, otteniamo

$$g(x_0+u) - g(x_0-u) = g'(x_0)\,2\,u + o(u^3),$$

ossia

$$g'(x_0)\,2\,u = g(x_0+u) - g(x_0-u) + o(u^3).$$

Dividendo ambo i membri per u, e ricordando che $o(u^3)/u = o(u^2)$, otteniamo

$$g'(x_0) = \frac{g(x_0+u) - g(x_0-u)}{2\,u} + o(u^2).$$

QED

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = -\frac{x(y^2+1)}{y}. \tag{2}$$

Domanda numero 6: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(0) = -1$.

Domanda numero 7: *Determinarne il dominio massimale di soluzione.*

Domanda numero 8: *Schizzare un grafico della soluzione.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è non lineare, a variabili separabili. Separandole, otteniamo

$$\int \frac{y}{y^2+1}\, dy = -x^2/2 + C.$$

ossia

$$(1/2)\log(y^2+1) = -x^2/2 + C. \tag{3}$$

Quindi

$$y^2 + 1 = \exp(2C)\exp(-x^2),$$

da cui, ponendo $D = \exp(2C) > 0$, otteniamo

$$y = \pm\sqrt{D\exp(-x^2) - 1}. \tag{4}$$

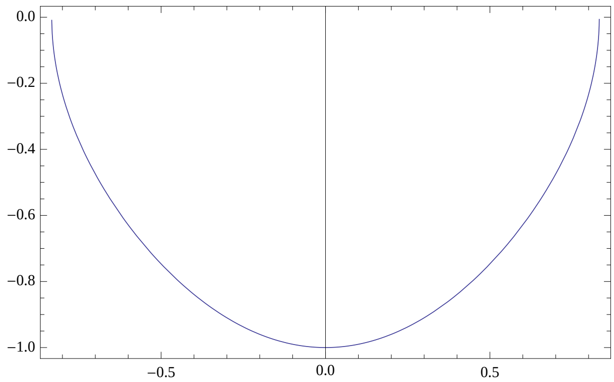
Dalle condizioni iniziali ricaviamo $y < 0$, quindi deve essere

$$y = -\sqrt{D\exp(-x^2) - 1},$$

da cui $D = 2$. Quindi la soluzione cercata è:

$$y = -\sqrt{2\exp(-x^2) - 1}.$$

L' intervallo massimale di definizione è $-\ln(1/2) \leq x \leq \ln(1/2)$.
Il grafico della funzione è schizzato sotto.



Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x^2 + y^2 > 1, \\ 1 & \textit{altrimenti} \end{cases}.$$

Domanda numero 9: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 10: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(0, y)$.

Domanda numero 11: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, 0)$.

Domanda numero 12: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(x, y) = 2, 4$.

Domanda numero 13: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

Domanda numero 14: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

Risoluzione.

- Il dominio è:

$$D = \mathbb{R}^2.$$

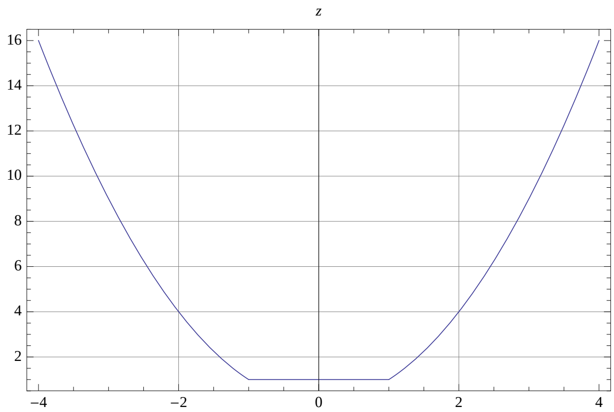
La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 - C$, dove

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}.$$

- La funzione lungo la retta $x = 0$ è

$$z = f(0, y) = \begin{cases} y^2, & y^2 > 1, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

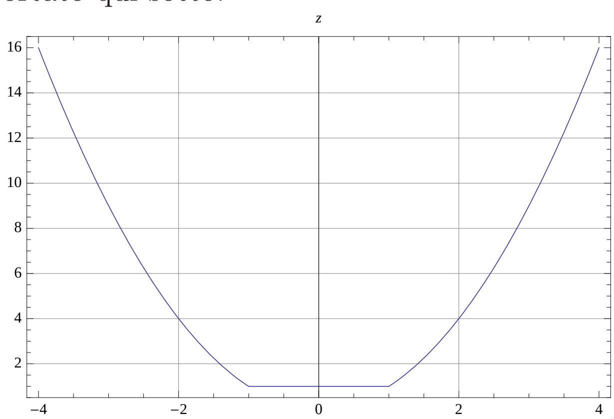
Il suo grafico è riportato qui sotto.



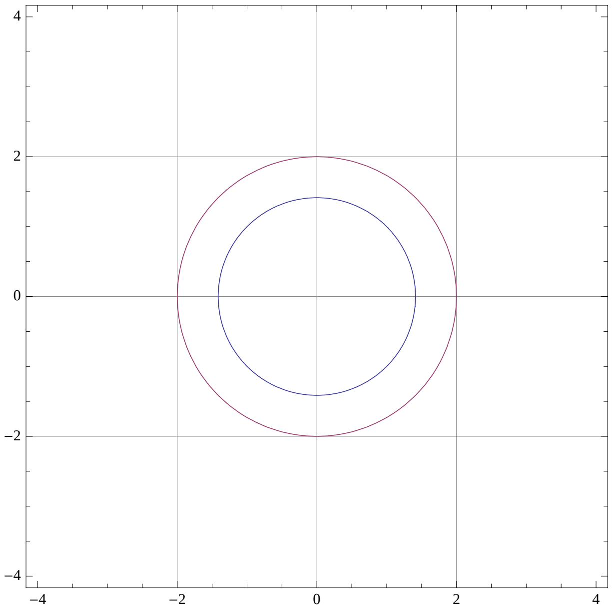
- La funzione ristretta alla retta $y = 0$ è

$$z = f(x, 0) = \begin{cases} x^2, & x^2 > 1, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il suo grafico è riportato qui sotto.



- Le curve di livello, $z = 2, 4$ sono schizzate qui sotto.



- Gradiente:

$$\nabla f = \begin{cases} (2x, 2y), & x^2 + y^2 > 1, \\ 0, & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

- Matrice Hessiana:

$$M(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & x^2 + y^2 > 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x^2 + y^2 < 1. \end{cases}$$

  Punti di stazionarietà: quando $x^2 + y^2 > 1$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\{2x = 0, 2y = 0\}$$

  Troviamo il punto di stazionarietà: $\bar{x} = (0,0)$, che non appartiene alla regione $x^2 + y^2 > 1$.

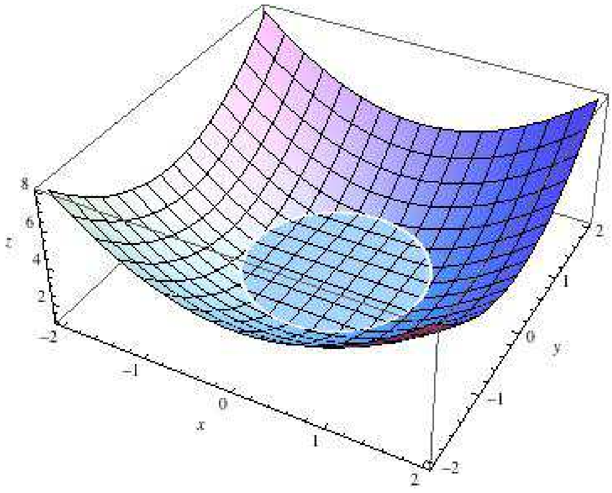
  Tutti i punti

$$\hat{C} = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$$

  sono punti di minimo debole.

- L' estremo superiore f è $+\infty$. La funzione non ha massimo assoluto. L' estremo inferiore e minimo assoluto è 1.

- Schizzo della superficie (non richiesto)


z
x
y

Test 5 *Sia*

$$I = \int\int_R y^2 dxdy, \quad R = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x > 0, y > 0\} \tag{5}$$

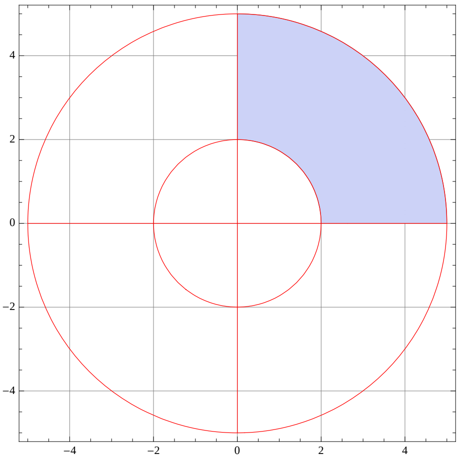
Domanda numero 15: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 16: *Schizzare un grafico del dominio in coordinate polari.*

Domanda numero 17: *Calcolare il valore dell' integrale, usando coordinate polari.*

Risoluzione.

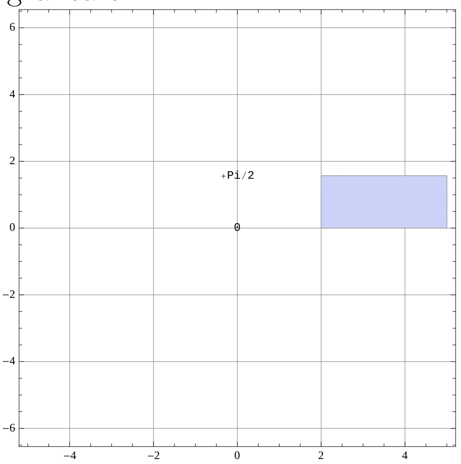
- Grafico del dominio di integrazione.



Effettuando il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, il dominio di integrazione diventa

$$R' = \{(r,\theta) : 2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

La cui rappresentazione grafica è:



- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int\int_R x^2\, dydx = \int_2^5 \int_0^{\pi/2} (r^2 \sin^2(\theta)) d\theta r dr =$$
$$\int_2^5 r^3 [\theta/2 - \sin(2\theta)/4]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr =$$
$$609\pi/16.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Modulo 2, *** fine testo ***

Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 03 giugno 2014.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐

Codice insegnamento: ☐☐☐☐☐☐ Crediti ☐☐

Intende sostenere: Mod. 1 ☐ Mod. 2 ☐

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Modulo 1	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Modulo 2	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Test OFA	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	superato ☐ non sup. ☐

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \frac{1 + \tanh x}{2}. \tag{1}$$

Ricordo che

$$f_1(x) = \tanh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}.$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$.*

Si può vedere che

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

Domanda numero 4: *Calcolare*

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Risoluzione.
Si ha anche

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli: Notiamo che

  $$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1, \quad \lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = +1.$$

  Quindi

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

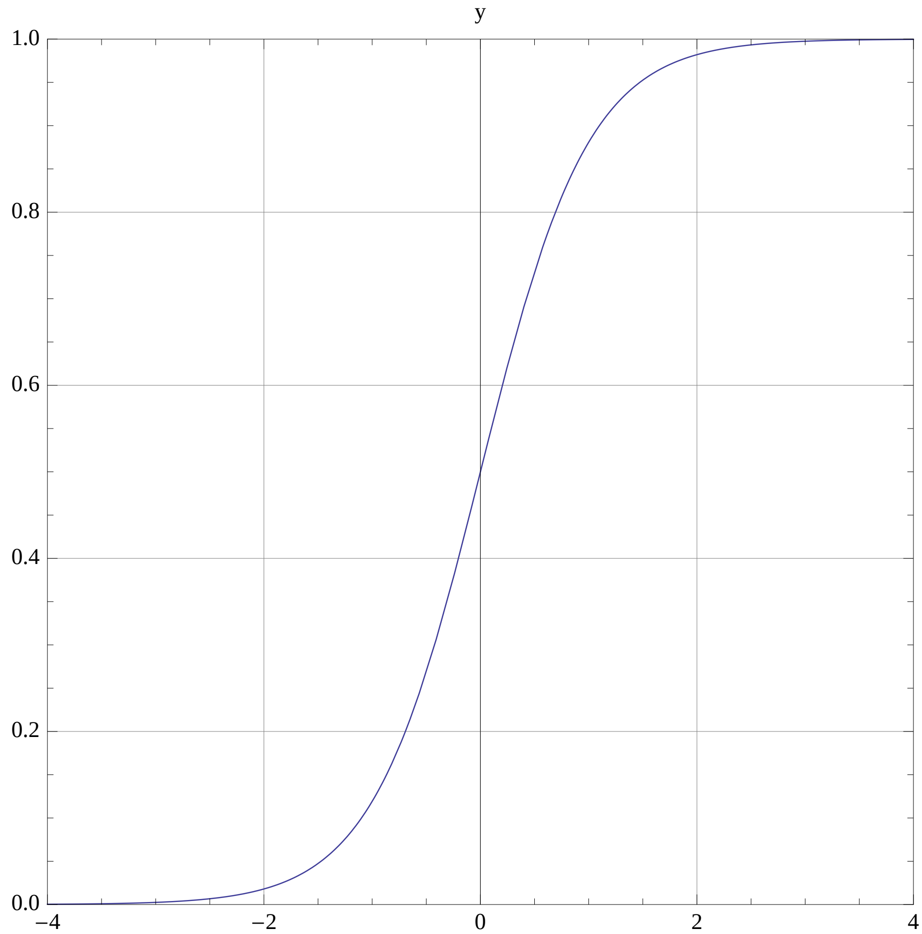
  Non vi sono punti di discontinuità.
- Non vi sono asintoti verticali od obliqui. Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$: $y = 1$. Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$: $y = 0$.
- Derivata

  $$f'(x) = \frac{1}{2\cosh^2 x} = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

  Non vi sono punti di stazionarietà.
- La derivata seconda è:

  $$f''(x) = -\frac{\tanh(x)}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{2\cosh^3 x} = -4\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3}.$$

  Positiva se $x < 0$, negativa altrimenti, quindi il punto $x = 0$ è di flesso.
- Estremo superiore $= +1$. Estremo inferiore $= 0$. Non esistono né massimo, né minimo assoluto.
- Grafico della funzione.



- Abbiamo:

$$I_1 = \int \tanh x\, dx = \int f_1(x) dx = \int \frac{1}{\cosh x} (\cosh x)' dx.$$

Quindi, posto $y = \cosh x$, abbiamo

$$I_1 = \int \frac{1}{y} dy = \log y = \log(\cosh x) + C.$$

Perciò:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \tanh(x)\, dx = [\log(\cosh x)]_{-1}^{1} = 0.$$

Da cui infine,

$$I = \int_{-1}^{1} (1/2) dx = 1.$$

Test 2 Domanda numero 5: *Usando lo sviluppo di Taylor, provare che*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2\,h} + o(h^2).$$

Risoluzione.
Lo sviluppo di Taylor di f attorno al punto x_0 arrestato ai termini quadratici asserisce che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + (1/2)f''(x_0)h^2 + o(h^3),$$

e

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0)\,(-h) + (1/2)f''(x_0)(-h)^2 + o(h^3).$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni, otteniamo

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = f'(x_0)\,2\,h + o(h^3),$$

ossia

$$f'(x_0)\,2\,h = f(x_0+h) - f(x_0-h) + o(h^3).$$

Dividendo ambo i membri per h, e ricordando che $o(h^3)/h = o(h^2)$, otteniamo

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2\,h} + o(h^2).$$

QED

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y' = \frac{x(y^2+1)}{y}. \tag{2}$$

Domanda numero 6*: Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(0) = 1$.

Domanda numero 7*: Determinarne il dominio massimale di soluzione.*

Domanda numero 8*: Schizzare un grafico della soluzione.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è non lineare, a variabili separabili. Separandole, otteniamo

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = x^2/2 + C.$$

ossia

$$(1/2)\log(y^2+1) = x^2/2 + C.$$

Quindi

$$y^2 + 1 = \exp(2C)\exp(x^2),$$

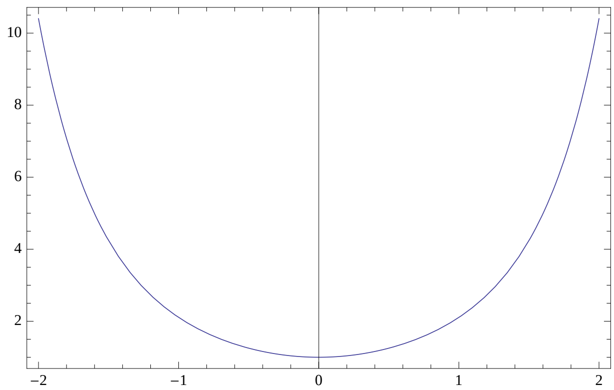
da cui, ponendo $D = \exp(2C) > 0$, otteniamo

$$y = \pm\sqrt{D\exp(x^2) - 1}.$$

Dalle condizioni iniziali ricaviamo $y > 0$, $D = 2$, quindi la soluzione cercata è:

$$y = \sqrt{2\exp(x^2) - 1}.$$

L' intervallo massimale di definizione è tutto $\mathbb{R}$.
Il grafico della funzione è schizzato sotto.



Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x^2+y^2<1, \\ 1 & \textit{altrimenti} \end{cases}.$$

Domanda numero 9: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 10: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(0,y)$.

Domanda numero 11: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x,0)$.

Domanda numero 12: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(x,y) = 1/4, 1/2$.

Domanda numero 13: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

Domanda numero 14: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

Risoluzione.

- Il dominio è:

$$D = \mathbb{R}^2.$$

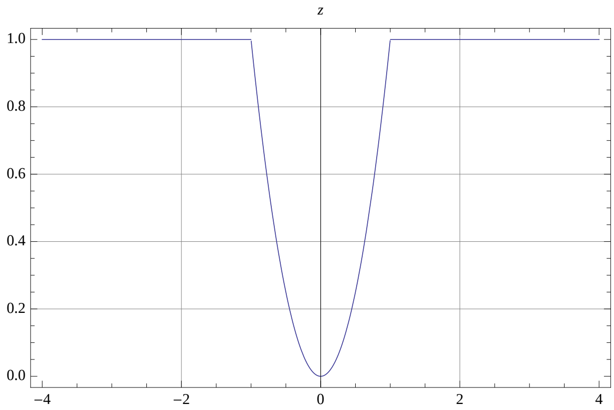
La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2 - C$, dove

$$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}.$$

- La funzione lungo la retta $x = 0$ è

$$z = f(0, y) = \begin{cases} y^2, & y^2 < 1, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

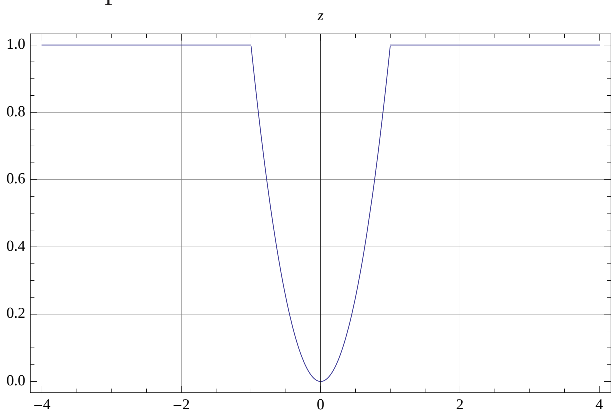
Il suo grafico è riportato qui sotto.



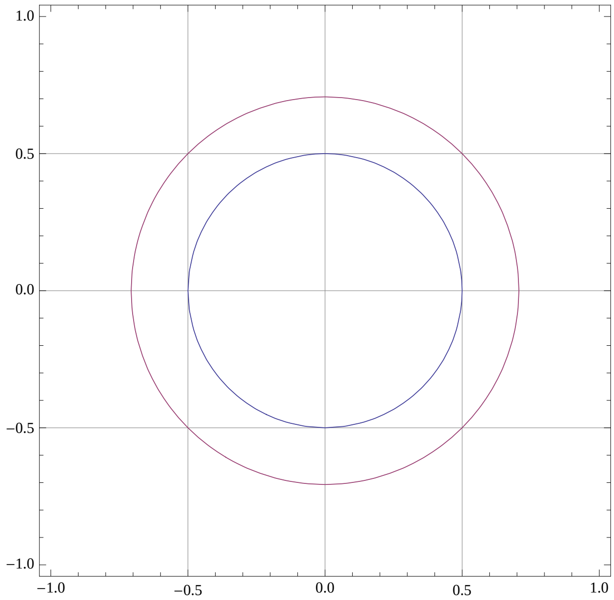
- La funzione ristretta alla retta $y = 0$ è

$$z = f(x, 0) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il suo grafico è riportato qui sotto.



- Le curve di livello, $z = 1/4, 1/2$ sono schizzate qui sotto.



- Gradiente:

$$\nabla f = \begin{cases} (2x, 2y), & x^2+y^2<1, \\ 0, & x^2+y^2>1. \end{cases}$$

- Matrice Hessiana:

$$M(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & x^2+y^2<1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x^2+y^2>1. \end{cases}$$

  Punti di stazionarietà: quando $x^2+y^2<1$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\{2x=0, 2y=0\}$$

  Troviamo il punto di stazionarietà: $\bar{x}=(0,0)$. In questo punto $\bar{M}=M(0,0)=4>0$, $\bar{M}_{11}=2>0$ quindi abbiamo un punto di minimo.

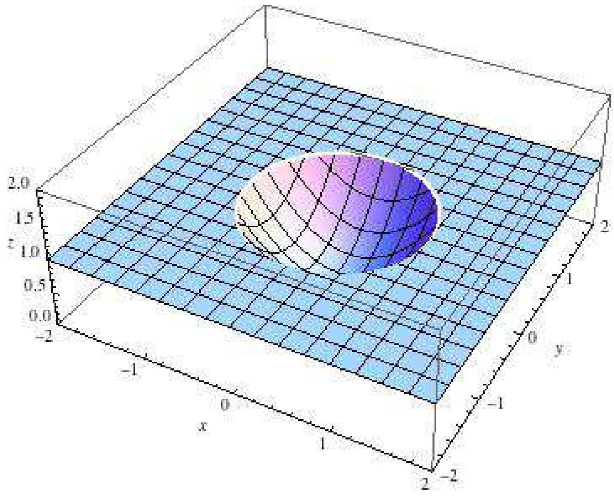
  Tutti i punti

$$\hat{C} = \{(x,y)|x^2+y^2 \geq 1\}$$

  sono punti di massimo debole.

- L' estremo superiore e massimo assoluto di f è 1. l' estremo inferiore e minimo assoluto è 0.

- Schizzo della superficie (non richiesto)


2.0
1.5
z 1.0
0.5
0.0
−2
−1
0
x
1
2
−2
−1
0
y
1
2

Test 5 *Sia*

$$I = \int\int_R x^2 dxdy, \quad R = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, x > 0, y > 0\} \tag{3}$$

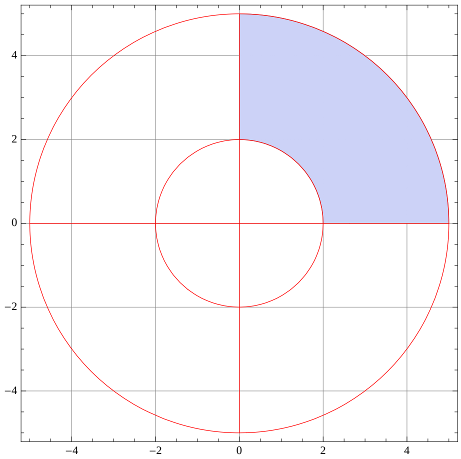
Domanda numero 15: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 16: *Schizzare un grafico del dominio in coordinate polari.*

Domanda numero 17: *Calcolare il valore dell' integrale, usando coordinate polari.*

Risoluzione.

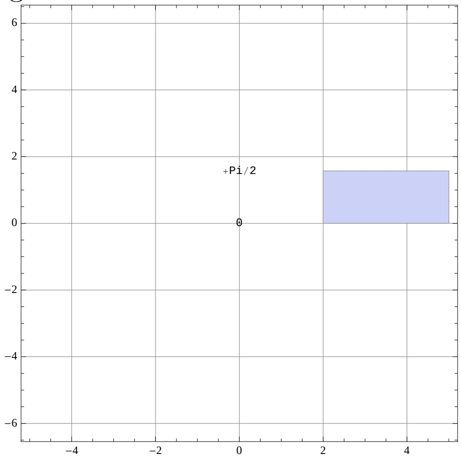
- Grafico del dominio di integrazione.



Effettuando il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, il dominio di integrazione diventa

$$R' = \{(r, \theta) : 2 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

La cui rappresentazione grafica è:



- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int\int_R x^2\, dydx = \int_2^5 \int_0^{\pi/2} (r^2\cos^2(\theta))d\theta r dr =$$
$$\int_2^5 r^3[\theta/2 + \cos(2\theta)/4]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} dr =$$
$$609\pi/16.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Modulo 2, *** fine testo ***