Appunti ed esercizi di combinatoria

Alberto Carraro

December 2, 2009

0.1 Le formule principali per contare

Disposizioni. Sia A un insieme di $n \geq 1$ elementi distinti. Le sequenze di $1 \leq k \leq n$ elementi scelti senza ripetizione (si ordine, no ripetizione) sono

$$D_{n,k} = \prod_{i=1}^{k} n - i + 1 = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio 1. *Sia $A = \{a, b, c\}$ e $k = 2$ ($n = 3$). Le sequenze che formiamo saranno dunque $\langle ba \rangle$, $\langle ca \rangle$, $\langle ab \rangle$, $\langle cb \rangle$, $\langle ac \rangle$, $\langle bc \rangle$. Il loro numero è $3 \cdot 2$.*

Le *permutazioni* sono un caso particolare delle disposizioni, quando $k = n$. In questo caso si ha

$$D_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} n - i + 1 = n(n-1)\cdots 1 = n!$$

Esempio 2. *Sia $A = \{a, b, c\}$ e $k = n = 3$. Le sequenze che formiamo saranno dunque $\langle bca \rangle$, $\langle abc \rangle$, $\langle cab \rangle$, $\langle bac \rangle$, $\langle cba \rangle$, $\langle acb \rangle$. Il loro numero è $3 \cdot 2$.*

Disposizioni con ripetizione. Sia A un insieme di $n \geq 1$ elementi distinti le sequenze di $1 \leq k \leq n$ elementi scelti con ripetizione (si ordine, si ripetizione) sono

$$D^*_{n,k} = n^k$$

Esempio 3. *Sia $A = \{a, b, c\}$ e $k = 2$ ($n = 3$). Le sequenze che formiamo saranno dunque $\langle aa \rangle$, $\langle ba \rangle$, $\langle ca \rangle$, $\langle ab \rangle$, $\langle bb \rangle$, $\langle cb \rangle$, $\langle ac \rangle$, $\langle bc \rangle$, $\langle cc \rangle$. Il loro numero è 3^2.*

Combinazioni. Sia A un insieme di $n \geq 1$ elementi distinti. Gli insiemi di $1 \leq k \leq n$ elementi scelti tra n (no ordine, no ripetizione) sono

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si noti che

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

cioè si è trattato di quozientare lo spazio delle disposizioni senza ripetizione rispetto alla proprietà di avere gli stessi elementi ma in ordine diverso.

Esempio 4. *Sia $A = \{a, b, c\}$ e $k = 2$ ($n = 3$). Gli insiemi che formiamo saranno dunque $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$. Il loro numero è $\frac{3 \cdot 2}{2}$.*

Ricordiamo che si pone per convenzione $0! = 1$. Quindi $C_{n,0} = \binom{n}{0} = 1$ e dunque anche per $k = 0$ l'interpretazione delle combinazioni come numero di sottoinsiemi di A aventi cardinalità k è rispettata.

Combinazioni con ripetizione. Sia A un insieme di $n \geq 1$ elementi distinti. I *multiinsiemi* di $1 \leq k \leq n$ elementi (no ordine, si ripetizione) sono

$$C^*_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)\cdots n}{k!} = \frac{\prod_{i=1}^{k} n+k-i}{k!}$$

Si noti che

$$C^*_{n,k} = \frac{D^*_{n,k}}{\frac{n^k \cdot k!}{(n+k-1)\cdots n}}$$

cioè anche stavolta si è trattato di quozientare lo spazio delle disposizioni con ripetizione rispetto alla proprietà di avere gli stessi elementi ma in ordine diverso. Stavolta però l'idea che sta dietro l'operazione effettuata è molto più complessa (una spiegazione si trova nel libro di testo "Discrete mathematics", di N. L. Biggs, Theorem 11.2 pag 109).

Esempio 5. *Sia* $A = \{a, b, c\}$ *e* $k = 2$ *(*$n = 3$*). I multiinsiemi che formiamo saranno dunque:* $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, $[a, a]$, $[b, b]$, $[c, c]$. *Il loro numero è* $\frac{4 \cdot 3}{2}$.

0.2 Esercizi

Esercizio 1 (Disposizioni con ripetizione)**.** *Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si eseguono 5 estrazioni rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato dele 5 estrazioni? E quanti sono gli allineamenti in cui non compare il numero 20?*

Soluzione 1. *Poiché* $A = \{1, \ldots, 20\}$ *la risposta alla prima domanda sarà* $D^*_{20,5} = 20^5$ *essendo* $n = 20$ *e* $k = 5$. *Per la seconda domanda basta osservare che gli oggetti disponibili sono quelli contenuti in* $\{1, \ldots, 19\}$ *e pertanto la risosta sarà* $D^*_{19,5} = 19^5$.

Esercizio 2 (Disposizioni senza ripetizione)**.** *Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Si eseguono 5 estrazioni senza rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quanti sono gli allineamenti che si possono ottenere come risultato delle 5 estrazioni? E quanti quelli in cui non compare il numero 20?*

Soluzione 2. *Abbiamo* $n = 20$ *e* $k = 5$. *Poiché si rimettono le palline nell'urna la prima risposta sarà* $D_{20,5} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$. *Per la seconda risposta avremo* $D_{19,5} = 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$.

Esercizio 3 (Permutazioni)**.** *Abbiamo* 30 *palline numerate da 1 a 30e altrettante scatole egualmente numerate. In quanti modi possiamo disporre le 30 palline nelle 30 scatole? E in quanti modi si può farlo quando si richiede che la pallina numerata con un certo fissato* $1 \leq m \leq 30$*, occupi la scatola col numero* m*?*

Soluzione 3. *Per la prima domanda i modi sono* $D_{30,30} = 30!$. *Per la seconda i modi sono* $D_{29,29} = 29!$.

Esercizio 4 (Combinazioni)**.** *Si vuole costituire un comitato di 5 membri scelti tra 10 persone. Quanti differenti comitati si possono formare?*

Soluzione 4. *Ognuna delle persone può apparire al piú una volta nel comitato e due l'ordine delle persone non conta quindi il numero richiesto è* $C_{10,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

Esercizio 5 (Disposizioni con ripetizione)**.** *Una scimmia digita 3 tasti in maniera casuale su una tastiera per computer con 21 caratteri (alfabeto italiano). Qual è la probabilità che la scimmia digiti una parola di tre lettere (anche senza senso) che inizia con una consonante e finisce con due vocali?*

Soluzione 5. *Tutte le configurazioni di lettere che possono essere scritte dalla scimmia sono* $D^*_{21,3} = 21^3$. *Le configurazioni "buone" sono per noi* $16 \cdot 5 \cdot 5$, *perché la prima consonante può essere scelta in 16 modi diversi, la prima vocale in 5 modi diversi e la seconda vocale ancora in 5 modi diversi. Qiondi la probabilità richiesta è* $\frac{16 \cdot 5 \cdot 5}{21^3}$.

Esercizio 6 (Permutazioni)**.** *Nel sacchetto delle lettere di Scarabeo metto solo le tessere "a", "a", "a", "a", "a","b", "b", "c", "r", "r". Qual'è la probabilità che compaia la parola "abracadabra" se le estraggo casualmente mettendole sulla sbarretta del gioco?*

Soluzione 6. *I casi possibili sono tutte le permutazioni* $D_{11,11} = 11!$. *Se le lettere nel sacchetto fossero tutte diverse tra loro allora avremmo un solo caso favorevole. Ma non è cosí perché certe lettere occorrono piú volte e quindi certe permutazioni portano alla stessa parola. Etichettiamo le tessere con un numero da 1 a 11. Per ottenere le permutazioni buone la lettera "a" può essere posizionata in 5! modi diversi, la lettera "b" in 2! modi diversi, la lettera "r" in 2! modi diversi e la lettera "c" in un solo modo. Tra tutte le permutazioni di tessere numerate quelle buone sono* $5! \cdot 2! \cdot 2!$ *e quindi la probabilità richiesta è* $\frac{5! \cdot 2! \cdot 2!}{11!}$.

Esercizio 7 (Combinazioni)**.** *Un'urna contiene 100 palline di cui 30 bianche e 70 rosse. Si vuole conoscere la probabilità di estrarre 5 palline bianche in una successione di 10 estrazioni senza reimmissione.*

Soluzione 7. *L'ordine non conta quindi posso pensare che la cardinalità dello spazio dei risultati possibili sia dato da* $C_{100,10} = \binom{100}{10}$. *Vi sono poi 30 palline bianche da cui possiamo estrarne 5 sicché esse posono essere selezionate in* $C_{30,5} = \binom{30}{5}$ *modi diversi. Per ogni scelta delle palline bianche le 5 rosse possono essere scelte tra le 70 disponibili in* $C_{70,5} = \binom{70}{5}$ *modi. Pertanto il numero degli allineamenti che contengono 5 palline bianche è* $\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}$ *e la probabilità richiesta è* $\frac{\binom{30}{5} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{100}{10}}$.

Un altro modo di risolvere l'esercizio è fare riferimento al numero degli allineamenti che tengono conto anche all'ordine in cui si presentano le palline. In questo caso lo spazio degli allineamenti possibili ha cardinalità $D_{100,10}$. *Le cinque posizioni occupate dalle palline bianche nella successione delle 10 estrazioni possono essere scelte in* $C_{10,5}$ *modi. Quando una tale scelta è fatta la prima pallina bianca può essere scelta in 30 modi, la seconda in 29, la terza in 28, la quarta in 27 e la quinta in 26 cioè* $D_{30,5}$ *modi in tutto e similmente per le palline rosse:* $D_{70,5}$. *In definitiva il numero di allineamenti contenenti 5 palline bianche e 5 rosse sarà* $\binom{10}{5} \cdot D_{30,5} \cdot D_{70,5}$ *e la probabilità* $\frac{\binom{10}{5} \cdot D_{30,5} \cdot D_{70,5}}{D_{100,10}}$.

Esercizio 8. *In quanti modi si possono assegnare 20 impiegati a 4 uffici se ad ogni ufficio devono essere assegnati 5 impiegati?*

Soluzione 8. *Posso assegnare ogni impiegato ad una delle 20 sedie disponibili. Il numero di queste assegnazioni è pari alle permutazioni* $D_{20,20} = 20!$. *Tra queste assegnazioni (alle sedie) ci sono permutazioni che portano alla stesssa assegnazione* *in termini di ufficio. Per ogni ufficio le permutazioni equivalenti sono $D_{5,5} = 5!$ perchè ci sono 5 sedie in ogni ufficio. Quindi il numero richiesto è $\frac{20!}{(5!)^4}$.*

Un altro modo, forse più semplice, è il seguente. Per il primo ufficio possiamo scegliere la configurazione di occupanti in $C_{20,5}$ modi diversi. Per ogni tale scelta possiamo configurare il secondo ufficio in $C_{15,5}$ modi diversi. Per ogni tale scelta possiamo configurare il terzo ufficio in $C_{10,5}$ modi diversi. Per ogni tale scelta la composizione dell'ultimo ufficio è univocamente determinata: infatti $C_{5,5} = 1$. la risposta cercata dunque è $C_{20,5} \cdot C_{15,5} \cdot C_{10,5} \cdot C_{5,5}$. Notiamo che in effetti

$$\begin{aligned} C_{20,5} \cdot C_{15,5} \cdot C_{10,5} \cdot C_{5,5} &= \frac{20!}{5!15!} \cdot \frac{15!}{5!10!} \cdot \frac{10!}{5!5!} \\ &= \frac{20!15!10!}{5!15!5!10!5!5!} \\ &= \frac{20!}{(5!)^4} \qquad \textit{magia!! ;)} \end{aligned}$$

Esercizio 9 (Combinazioni)**.** *Da una lista di 10 ragazzi e 7 ragazze si deve formare un comitato comprendente 5 ragazzi e 3 ragazze. Quanti possibili comitati si possono formare?*

Soluzione 9. *Possiamo scegliere i ragazzi in $\binom{10}{5}$ modi diversi e per ognuno di questi modi possiamo scegliere le ragazze in $\binom{7}{3}$ modi e quindi il numero richiesto è $\binom{10}{5} \cdot \binom{7}{3}$.*

Esercizio 10 (Disposizioni)**.** *Quanti codici si possono formare utilizzando tre cifre e due lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere), se le lettere occupano le prime due posizioni e cifre e lettere possono ripetersi? Quanti codici presentano qualche ripetizione?*

Soluzione 10. *Per il primo quesito usiamo le disposizioni con ripetizione e quindi abbiamo $D^*_{26,2} \cdot D^*_{10,3} = 26^2 \cdot 10^3$. Per il secondo quesito possiamo calcolare facilemnte il numero di codici che non presentano ripetizioni: $D_{26,2} \cdot D_{10,3} = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$. Quindi i codici con qualche ripetizione sono $D^*_{26,2} \cdot D^*_{10,3} - D_{26,2} \cdot D_{10,3}$.*

Esercizio 11 (Disposizioni)**.** *Qual'è la probabilità che n persone scelte a caso abbiano tutte compleanno diverso? (Si ignorino gli anni bisestili).*

Soluzione 11. *Supponendo che ogni giorno di nascita sia equiprobabile (cosa che in realtà non è) la probabilità richiesta è $\frac{D_{365,n}}{D^*_{365,n}}$ se $n \leq 365$ e 0 altrimenti.*

Esercizio 12 (Combinazioni)**.** *Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, per ogni $n \geq 0$.*

Soluzione 12. *Pensiamo a 2^n come la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$, dove A è un insieme di n elementi. Il numero di sottoinsiemi di A è uguale al numero dei sottoinsiemi di A con 0 elementi più il numero dei sottoinsiemi di A con 1 elemento più il numero dei sottoinsiemi di A con 2 elementi, ecc. fino al numero dei sottoinsiemi di A con n elementi. Siccome per ogni $k \in \{0, \ldots, n\}$ abbiamo che $\binom{n}{k}$ è il numero dei sottoinsiemi di A con k elementi, la risposta è immediata.*

Esercizio 13 (Combinazioni)**.** *Dimostrare che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, per ogni $0 \leq k \leq n$.*

Soluzione 13. *Ci sono due possibili strade. Una è effettuare il calcolo:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

L'altra è di mostrare che c'è una biiezione tra la famiglia dei sottoinsiemi di A aventi k elementi e la famiglia dei sottoinsiemi di A aventi $n-k$ elementi. Qual'è una possibile biiezione?