Cap. 9: Derivata e integrale.

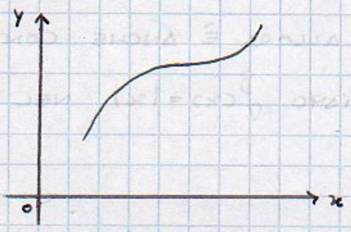
Lo studio di derivata & integrale permette di risolvere due problemi geometrici:

a. Data una funzione f, qual è l'equazione della retta tangente f nel punto (x_0, y_0)?

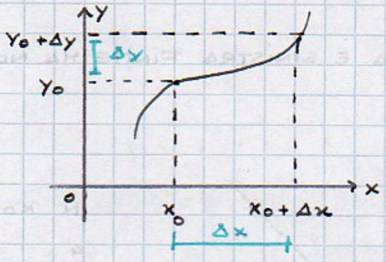
b. Dato il grafico di una funzione f, qual è l'area della porzione di piano delimitata da f, $x = x_0$, $y = y_0$ e l'asse x?

La derivata.

Consideriamo la funzione f: dom $\to \mathbb{R}$. Il suo grafico è:



Individuiamo 2 punti di f: x_0 e $x_0 + \Delta x$. Δx = incremento della variabile indipendente x. Corrispondentemente, esiste anche Δy, cioè l'incremento della variabile dipendente y: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Il rapporto $\Delta y / \Delta x$ è detto "rapporto incrementale" della funzione f, relativo al punto x_0 e all'incremento Δx. Geometricamente il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta secante f nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Dato che il rapporto incrementale varia al variare di Δx, è interessante studiare il caso in cui $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Se tale limite esiste & è finito, la f si dice derivabile in x_0. Il valore di questo limite finito è la derivata di f in x_0. È indicata con $f'(x_0)$ o con $D(f(x)) \mid x = x_0$. Geometricamente, la derivata in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente f in $(x_0, f(x_0))$.

Nota: trattandosi di un limite, esisteranno limite dx e limite sx. Perché f sia derivabile in x_0, limite dx e sx devono essere coincidenti; (→ casi speciali).

Nota 2: la derivata di $f(x)$ in x_0 è un numero! Da non confondersi con la funzione derivata che associa, ad ogni punto in cui è definita la funzione, la sua pendenza.

NOTA 3: L'EQUAZIONE PER CALCOLARE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO x_0 È:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

DOVE x_0 È DATO, y_0 È RICAVATO PER SOSTITUZIONE, $m = f'(x_0)$, CIOÈ È LA DERIVATA CHE, GEOMETRICAMENTE, È IL COEFF. ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE.

CONTINUITÀ, DERIVABILITÀ E PUNTI NOTEVOLI

UNA FUNZIONE f È DERIVABILE NEL PUNTO x_0 SE LA DERIVATA DESTRA E LA DERIVATA SINISTRA SONO FINITE E COINCIDONO:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = L \quad \text{valore finito.}$$

SE UNA FUNZIONE È DERIVABILE IN x_0, ALLORA È ANCHE CONTINUA IN x_0; NON È PERÒ VERO IL CONTRARIO: PER ESEMPIO, PRENDIAMO $f(x) = |x|$. NEL PUNTO $x_0 = 0$, LE DERIVATE DESTRA E SINISTRA SONO:

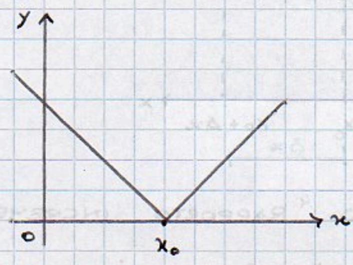
1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} |x|/x = -1$

CIOÈ NON COINCIDONO: $f(x) = |x|$ È CONTINUA IN $x_0 = 0$, MA NON È DERIVABILE IN $x_0 = 0$.

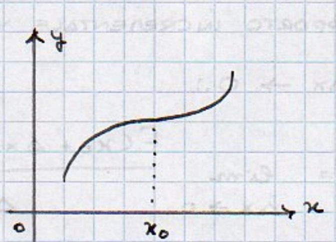
STUDIANDO LE DIFFERENZE TRA DERIVATA SX E DX SI INDIVIDUANO 3 "ANDAMENTI" PARTICOLARI DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE f IN x_0:

1) PUNTO ANGOLOSO: DERIVATA DESTRA E SINISTRA FINITE MA NON COINCIDENTI



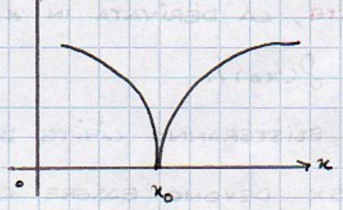
IN x_0 SI FORMA UN "ANGOLO" & f CAMBIA COEFF. ANGOLARE.

2) FLESSO: DERIVATA DESTRA E SINISTRA COINCIDENTI MA NON FINITE. SONO CIOÈ ENTRAMBE $+\infty$ O $-\infty$.



È IL PUNTO IN CUI $f(x)$ CAMBIA LA CONVESSITÀ.

3) CUSPIDE: DERIVATA DESTRA E SINISTRA DIVERSE E INFINITE $(+\infty, -\infty \,;\, -\infty, +\infty)$:



È IL PUNTO IN CUI SI FORMA UNA PUNTA.

MASSIMI, MINIMI E TEOREMI SULLE DERIVATE.

RICORDIAMO: DATA LA FUNZIONE f, x_0 È MASSIMO RELATIVO DI f SE IN UN INTORNO DI x_0 LA FUNZIONE ASSUME VALORI SEMPRE INFERIORI A $f(x_0)$. IL MASSIMO DIVENTA ASSOLUTO

SE ESTENDIAMO L'INTORNO A TUTTO IL DOMINIO DI f. LO STESSO VALE PER LA DEFINIZIONE DI MINIMO RELATIVO O ASSOLUTO.

→ NEI PUNTI DI MASSIMO O MINIMO — SIA RELATIVO CHE ASSOLUTO — LA DERIVATA È SEMPRE ZERO:

- **TEOREMA di FERMAT:** SIA f UNA FUNZIONE DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$. SE f HA UN MASSIMO O MINIMO, in x_0 ALLORA IN QUEL PUNTO $f'(x_0) = 0$.

DIM. PRENDIAMO x_0 COME MASSIMO. NE DERIVA CHE LE DERIVATE DESTRA E SINISTRA SONO:

$$f'_+(x_0) \leq 0$$
$$f'_-(x_0) \geq 0$$

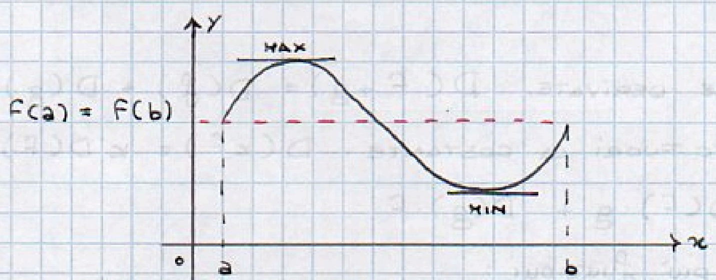
DATO CHE f È DERIVABILE IN (a,b), ALLORA $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, DA CUI DERIVA CHE $f'(x_0) = 0$ ■

- **TEOREMA di ROLLE:** SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b). SE $f(a) = f(b)$, ALLORA ESISTE UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ IN CUI $f'(x_0) = 0$.

DIM. ESSENDO f CONTINUA IN $[a,b]$[1], PER WEIERSTRASS AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTO.

1. SE MASSIMO E MINIMO SONO AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO $[a,b]$, DATO CHE $f(a) = f(b)$ PER IPOTESI, $M = m$; NE DERIVA CHE f È UNA FUNZIONE COSTANTE E QUINDI $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, COMPRESO x_0.
2. SE MASSIMO E MINIMO SONO INTERNI ALL'INTERVALLO $[a,b]$, ALLORA POSSIAMO SCEGLIERE $x_0 = M$. PER IL TEOREMA DI FERMAT, $f'(x_0) = 0$.

■



- **TEOREMA di LAGRANGE (o del valor medio).** SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b). ESISTE UN PUNTO $x_0 \in (a,b)$ TALE CHE:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

DIM:

DEFINIAMO LA FUNZIONE $h(x) = f(x) - f'(x_0)(x-a)$

$$= f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

DATO CHE $h(a) = h(b) = f(a)$, $h(x)$ è continua in (a,b) e derivabile in $[a,b]$. La derivata è: $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Per il TEOREMA di ROLLE, ALLORA ESISTE UN $x_0 \in (a,b)$ per cui la derivata è nulla:

$$h'(x_0) = 0 \rightarrow 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ■

---

1 È UN INTERVALLO CHIUSO & LIMITATO.

derivata e funzioni crescenti

LA DERIVATA PERMETTE DI CAPIRE IN CHE INTERVALLI LA FUNZIONE f È CRESCENTE O DECRESCENTE:

- Se $f'(x) > 0 \longrightarrow f$ CRESCENTE
- Se $f'(x) < 0 \longrightarrow f$ DECRESCENTE

• TEOREMA SULLA f COSTANTE. Sia f UNA FUNZIONE DERIVABILE IN (a,b). Se $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, ALLORA f È UNA FUNZIONE COSTANTE.

DIM: PRENDIAMO $x_1, x_2 \in (a,b)$ TALI CHE $x_1 < x_2$. DATO CHE f È DERIVABILE IN (a,b), SARÀ ANCHE CONTINUA IN (a,b), QUINDI POSSO TROVARE UN x_0 TRA x_1 E x_2:

$$x_1 < x_0 < x_2$$

MA ALLORA: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_0) = 0$ QUINDI $f(x_1) = f(x_2)$, CIOÈ f COSTANTE.

Regole di Derivazione

#1 - derivate elementari.

COSTANTE: $D(k) = 0$

IDENTICA: $D(x) = 1$

RADICE: $D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

POTENZA: $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$

e^x: $D(e^x) = e^x$

LOGARITMO e: $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

SENO: $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

COSENO: $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ ⚠ SEGNO!

TANGENTE: $D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

COTANGENTE: $D(\operatorname{ctg} x) = -1 - \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

ESPONENZIALE: $D(a^x) = a^x \ln a$

LOGARITMO: $D(\log_a x) = \dfrac{1}{x} \log_a e$

regole per i calcoli.

SOMMA: È LA SOMMA DELLE DERIVATE. $D(f+g) = D(f) + D(g)$

FUNZIONE x COSTANTE: PORTO FUORI LA COSTANTE. $D(kf) = k\,D(f)$

PRODOTTO: $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + D(g) \cdot f$

vale anche per più funzioni:

$$D(f \cdot g \cdot h) = D(f) \cdot g \cdot h + f \cdot D(g) \cdot h + f \cdot g \cdot D(h)$$

QUOZIENTE: $$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D(f) \cdot g - D(g) \cdot f}{g^2}$$

↳ POSSO RICAVARE LA DERIVATA DI TANGENTE & COTANGENTE

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D(\operatorname{ctg} x) = D\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$$

↳ E ANCHE DELLA FUNZIONE RECIPROCA.

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{0 \cdot f - f'(x) \cdot 1}{f^2(x)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

COMPOSTA: $D(f(g(x))) = D(f(g(x))) \cdot D(g(x))$ CIOÈ DERIVO OGNI "LIVELLO".

INVERSA: UTILE PER LE FUNZIONI INVERSE DELLE "CLASSICHE" TRIGONOMETRICHE.

ESEMPIO. $y = \operatorname{arctg} x \rightarrow x = \operatorname{tg} y$

$D(\operatorname{arctg} x) = D\left(\frac{1}{\operatorname{tg} y}\right) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$ ma $\operatorname{tg} y = x$, quindi:

$= \frac{1}{1+x^2}.$

ESEMPIO. $y = \arcsin x \rightarrow x = \sin y$

$D(\arcsin x) = D\left(\frac{1}{\sin y}\right) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ ma $x = \sin y$

$\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$y = \arccos x \rightarrow x = \cos y$

$D(\arccos x) = D\left(\frac{1}{\cos y}\right) = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

NOTA: UTILE DERIVATA di MODULO.

Dato $|x|$ sappiamo che:

$$|x| \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

inoltre, $D(x) = 1$. Perciò vorremmo poter scrivere $D(|x|)$ IN MODO da mantenere el "oscillazione" da 1 a -1. UN MODO UTILE È:

$$D(|x|) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} \quad \left(\text{A SECONDA DELL'UTILITÀ}\right)$$

È COMODO NEL CASO DI LOGARITMI (se l'argomento è completamente in modulo).

DE L'HOPITAL: È UNO STRUMENTO PER CALCOLARE I LIMITI DI FORME INDETERMINATE, DI TIPO $0/0$ o ∞/∞.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{DERIVO } f \text{ e } g: \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'} = L$$

L È ANCHE IL LIMITE DI $\frac{f}{g}$, CIOÈ È IL VALORE INIZIALE CHE CERCAVAMO.

USO DELLA DERIVATA PER PUNTI NOTEVOLI. DATA f, HO:

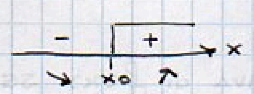
a. CON $f'(x) = 0$ TROVO I PUNTI DI STAZIONARIETÀ

b. CON $f'(x) > 0$ TROVO DOVE f È CRESCENTE.

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$
(ma basta la derivata 1ª come qui:)

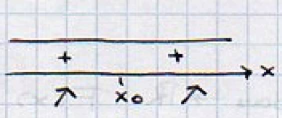
Abbiamo alcuni casi

1.

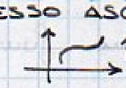


x_0 = MINIMO RELATIVO.

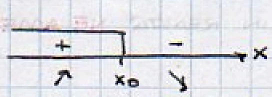
3.



x_0: FLESSO ASCENDENTE



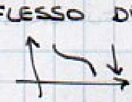
2.



x_0 = MASSIMO RELATIVO

4.

x_0: FLESSO DISCENDENTE



E SONO TUTTE OTTENUTE SOMMANDO UNA COSTANTE. INFATTI

se $F(x) = h(x) + c$
allora $F'(x) = h'(x)$ $\quad D(c) = 0$ ~ derivata di costante

L'INSIEME DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE È DETTO INTEGRALE INDEFINITO:

$$\int f(x)\,dx = \underbrace{F(x) + c}_{}$$

TUTTE LE PRIMITIVE DI $f(x)$, con $c \in \mathbb{R}$.

L'INTEGRALE INDEFINITO È fondamentale per il calcolo dell'integrale definito:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1) CALCOLO L'INT. INDEFINITO, IN b.
2) VI SOTTRAGGO L'INT. INDEFINITO, IN a.

proprietà

- COSTANTE: $\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$
- SOMMA: $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

integrali immediati:

- $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$ $\qquad$ • $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$ $\qquad$ • $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad$ • $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$.

dalle regole di derivazione:

- $\int [f(x)]^a f'(x)\,dx = \frac{1}{a+1} f(x)^{1+a} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int f'(x) \operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$ $\qquad$ $\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f x}\,dx = \operatorname{tg} f(x) + c$ $\qquad$ • $\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = -\operatorname{ctg} f(x) + c$
- $\int f'(x)\, e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

Altri casi:

- $\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$

Integrale indefinito

↳ LA FUNZIONE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ SE $F'(x) = f(x)$. SE UNA FUNZIONE $f(x)$ AMMETTE, IN UN INTERVALLO I, LA PRIMITIVA $F(x)$, ALLORA NE HA INFINITE, CHE SI OTTENGONO AGGIUNGENDO UNA COSANTE QUALUNQUE c A $F(x)$.

↳ motivo: SE $F'(x) = f(x)$, È ANCHE VERO CHE $D(F(x)+c) = D(F(x)) = f(x)$

CIOÈ LA DERIVATA DELLA COSTANTE c È SEMPRE ZERO.

LA TOTALITÀ DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE È L'INTEGRALE INDEFINITO DI UNA FUNZIONE.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

PROPRIETÀ:

1. $\int k f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ OSSIA POSSO PORTARE FUORI DALL'INTEGRALE UNA COSTANTE.

2. $\int (f(x) + g(x) + h(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$ OSSIA L'INTEGRALE DELLA SOMMA È UGUALE ALLA SOMMA DEGLI INTEGRALI

INTEGRALI IMMEDIATI:

- $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c$ È IL CONTRARIO DELLA $D(\frac{1}{a+1}x^{a+1}) = x^a$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c$
- $\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \cos x = \operatorname{sen} x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$

DALLE REGOLE DI DERIVAZIONE

1. $\int [f(x)]^a f'(x) = \frac{1}{a+1} \cdot f(x)^{a+1} + c$ ⇝ POTENZA DI UNA FUNZIONE
2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$
3. $\int f'(x)\operatorname{sen} f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$
4. $\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$
4. $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = \operatorname{tg} f(x) + c$
5. $\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} = -\operatorname{ctg} f(x) + c$
6. $\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

altri casi:

- $\int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = a^{f(x)}\log_a e + c$
- $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$
- $\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} f(x) + c$

ALTRE TECNICHE DI DERIVAZIONE

1. PER SOSTITUZIONE: SI TRATTA DI INDIVIDUARE UNA PARTE DELL'INTEGRALE E DI SOSTITUIRLA, RICALCOLANDO dx.

$$\int \frac{\log\sqrt{x}}{x}\,dx = \qquad x = t^2 \rightarrow dx = D(t^2) = 2t$$

$$\int \frac{\log t}{\cancel{t^2}}\, 2\cancel{t} = \quad 2\int \frac{\log t}{t} = \quad \log^2 t + c \quad \text{ma } t = \sqrt{x} \text{ quindi}$$

$$\rightarrow \log^2\sqrt{x} + c$$

2. PER PARTI. DATA UNA FUNZIONE DEL TIPO $f'(x)\,g(x)$, APPLICO LA FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI:

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = \underbrace{f(x)\,g(x)}_{\text{ENTRAMBE NON DERIVATE}} - \int \underbrace{f(x)\cdot g'(x)\,dx}_{\text{IL CONTRARIO DELL'INTEGRALE}}$$

IN QUESTI CASI x^n È IL FATTORE NON DERIVATO:

$$\int x^n \operatorname{sen} x\,dx \qquad \int x^n \cos x\,dx \qquad \int x^n e^x\,dx$$

IN QUESTI È IL FATTORE DERIVATO

$$\int x^n \log x\,dx \qquad \int x^n \operatorname{arctg} x\,dx \qquad \int x^n \operatorname{arcctg} x\,dx$$

$$\int x^n \operatorname{arcsen} x\,dx \qquad \int x^n \arccos x\,dx$$

⇝ IN QUESTI CASI, x^n PUÒ, DA DERIVATO, AVERE VALORE 1.

3. PER LE FUNZIONI RAZIONALI:

caso 1: GRADO NUMERATORE > GRADO DENOMINATORE:
↳ effettuo la DIVISIONE TRA POLINOMI

ALTRIMENTI: ESEMPIO.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,dx \qquad \text{SCOMPONGO IL DENOMINATORE: } (x-2)(x-3)$$

$$\int \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}\,dx \overset{*}{\Rightarrow} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \qquad \text{OTTENGO LA SOMMA \& LA SVOLGO}$$

$$= \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x+2)(x-3)} = \frac{x(A+B)-3A-2B}{(x+2)(x-3)}$$

CONFRONTO CON $2x-1$, IL DENOMINATORE:

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ 3A+3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 5 \end{cases}$$

RIPRENDO *

$$\int \frac{-3}{x+2}\,dx + \int \frac{5}{x-3}\,dx = -3\log(x+2) + 5\log(x-3) + c.$$

STUDIO DI FUNZIONI

1. DOMINIO O CONDIZIONI D'ESISTENZA.

   - POLINOMIO : $\mathbb{R}$
   - FUNZIONE RAZIONALE: DOMINIO + DENOMINATORE $\neq 0$
   - LOGARITMO: $\log x \quad x > 0$
   - RADICE: $\sqrt[2]{x} \quad x \geq 0$; $\sqrt[3]{x}$ NESSUNA CONDIZIONE;
   - ESPONENZIALE: $\mathbb{R}$.
   - SENO, COSENO: $\mathbb{R}$
   - TANGENTE: $\mathbb{R} \setminus \{ \pi/2 + k\pi \}$

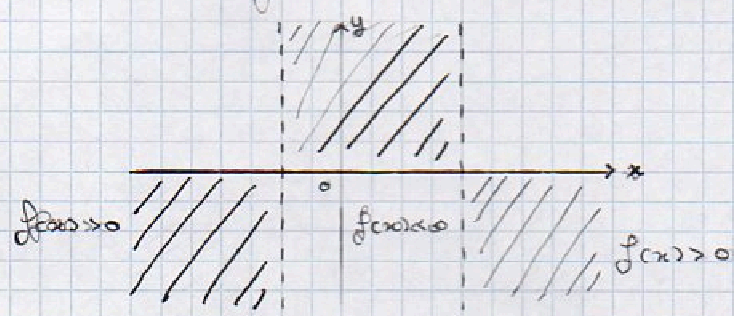
2. LIMITE NEI PUNTI DI SINGOLARITÀ

   - ASINTOTI VERTICALI $(x \to x_0 \quad f(x) = \pm \infty)$
   - ASINTOTI ORIZZONTALI $(x \to \pm\infty, \ f(x) = l,$ VALORE FINITO$)$
   - ASINTOTO OBLIQUO, DI RETTA $y = mx + q$, DOVE:

   $$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad q = \lim_{x \to x_0} f(x) - mx$$

   CONDIZIONE: $\nexists$ ASINTOTO ORIZZONTALE & VERTICALE MA SONO INFINITI

3. SEGNO: STUDIO DI $f(x) > 0$ PER OTTENERE DEGLI INTERVALLI DI QUESTO TIPO:



4. DERIVATA PRIMA:

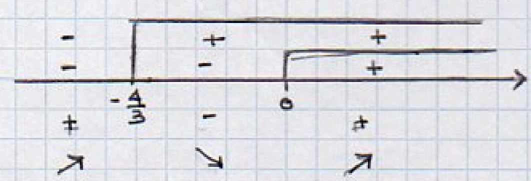
   1) Calcolo CONCAVITÀ / CONVESSITÀ:

   $f'(x) > 0 \to$ NON DECRESCENTE

   $f'(x) < 0 \to$ NON CRESCENTE

   2) MASSIMO E MINIMO RELATIVO: SEMPRE DAL SEGNO DI $f'(x)$. PER ESEMPIO: $f(x) = x^3 + 2x^2$. $f'(x) = 3x^2 + 4x$

   $3x^2 + 4x > 0 \to x(3x+4) \to x > 0 \ \cup \ x > -4/3$



$\to$ $-\frac{4}{3}$ MASSIMO RELATIVO

0 MINIMO RELATIVO

5. DERIVATA SECONDA:

   $f''(x) < 0 \to$ CONCAVA

   $f''(x) > 0 \to$ CONVESSA

6. FUNZIONE PARI o DISPARI:

Se: $f(-x) = f(x)$ PARI: SIMMETRIA RISPETTO A Y

Se: $f(-x) = -f(x)$ DISPARI: SIMMETRIA RISPETTO A x.

7. PUNTI ANGOLOSI, CUSPIDI, FLESSI.

1) SE DERIVATA DX $\neq$ DERIVATA SX, MA FINITE ENTRAMBE: PUNTO ANGOLOSO.

2) SE DERIVATA DX = DERIVATA SX, MA INFINITE: FLESSO.

↳ DATO CHE È IL PUNTO IN CUI CAMBIA LA CONCAVITÀ, LO OTTENGO ANCHE CALCOLANDO $f''(x) = 0$.

3) SE DERIVATA DX != DERIVATA SX (MA ENTRAMBE INFINITE), HO UNA CUSPIDE.