COMPITI DI Calcolabilità con soluzione5

1. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x,y) = y \times (y+1)^x$. Si trovino poi le funzioni g ed h tali che $f = recprim(g,h)$.

   Soluzione: $f(0,y) = y$ and $f(x+1,y) = y \times (y+1)^{x+1} = y \times (y+1)^x \times (y+1) = f(x,y) \times (y+1)$. Allora $g(y) = y$ e $h(x,y,z) = z \times (y+1)$.

2. Sia $I = \{x : \text{dom}(\phi_x) \text{ è infinito}\}$. Quali teoremi di Rice si possono applicare ad I ed al complementare di I?

   Soluzione:

   (1) $I \neq \emptyset$: La funzione identica è calcolabile ed ha l'insieme dei numeri naturali come dominio infinito. Allora ogni programma che calcola l'identità appartiene ad I.

   (2) $I \neq N$: la funzione vuota ha dominio vuoto. Allora i programmi che calcolano la funzione vuota appartengono al complementare di I.

   (3) I rispetta le funzioni: Sia $x \in I$ e $\phi_x = \phi_y$. Da $x \in I$ ricaviamo che ϕ_x ha dominio infinito. Da $\phi_x = \phi_y$ ricaviamo che domϕ_x = dom(ϕ_y). Ne segue che dom(ϕ_y) è infinito ed $y \in I$.

   Da (1)-(3) segue che possiamo applicare il primo teorema di Rice: I non è decidibile; dal momento che i programmi della funzione vuota appartengono al complementare di I, si ha che il complementare di I non è semidecidibile.

   Il secondo teorema di Rice non può essere applicato ad I. Ogni estensione di una funzione con dominio infinito ha dominio infinito.

   Il terzo teorema di Rice può essere applicato ad I. I programmi che calcolano la funzione successore, che ha dominio infinito, appartengono ad I. Si consideri un'arbitraria approssimazione finita g della funzione successore. Il dominio di g è finito per definizione di funzione finita. Allora i programmi che calcolano g appartengono al complementare di I. Quindi possiamo applicare Rice 3 per ottenere che I non è semidecidibile.

3. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) = codom(\phi_x)\}$. Applicare i teoremi di Rice ad I ed al suo complementare.

   Soluzione:

   (1) $I \neq \emptyset$: La funzione vuota $f_\emptyset$ e' calcolabile e $dom(f_\emptyset) = codom(f_\emptyset) = \emptyset$. Allora ogni programma che calcola la funzione vuota appartiene ad I.

   (2) $I \neq N$: la funzione successore S verifica $dom(S) \neq codom(S)$ perche' $dom(S) = N$ e $codom(S) = N \setminus \{0\}$. Allora i programmi che calcolano la funzione successore appartengono al complementare di I.

(3) I rispetta le funzioni: Sia $x \in I$ e $\phi_x = \phi_y$. Da $x \in I$ ricaviamo che $dom(\phi_x) = codom(\phi_x)$. Da $\phi_x = \phi_y$ ricaviamo che $dom(\phi_x) = dom(\phi_y)$ e $codom(\phi_x) = codom(\phi_y)$. Infine da queste ultime due uguaglianze e da $dom(\phi_x) = codom(\phi_x)$ si ha che $dom(\phi_y) = codom(\phi_y)$, cosicchè $y \in I$.

(4) Da (1)-(3) segue che possiamo applicare il primo teorema di Rice ad I: I non è decidibile; dal momento che i programmi della funzione vuota appartengono ad I, si ha che I non è semidecidibile.

Rimane da determinare se $\bar{I}$ (il complementare di I) è semidecidibile oppure no.

(5) Il secondo teorema di Rice può essere applicato a $\bar{I} = \{x : dom(\phi_x) \neq codom(\phi_x)\}$. Si consideri la funzione f tale che $f(0) = 1$ e $dom(f) = \{0\}$. Allora i programmi che calcolano f appartengono a $\bar{I}$ perche' $dom(f) = \{0\}$ e $codom(f) = \{1\}$. Estendiamo f ad una funzione g tale che $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ e $dom(g) = \{0, 1\}$. Allora i programmi che calcolano g appartengono ad I. Rice 2 ci permette di concludere che $\bar{I}$ non è semidecidibile.

(6) Il secondo teorema di Rice può essere applicato anche ad I. Si consideri la funzione f tale che $f(0) = 0$ e $dom(f) = \{0\}$. Allora i programmi che calcolano f appartengono a I perche' $dom(f) = \{0\} = codom(f)$. Estendiamo f ad una funzione g tale che $g(0) = 0$, $g(1) = 2$ e $dom(g) = \{0, 1\}$. Allora i programmi che calcolano g appartengono al complementare di I perche' $dom(g) = \{0, 1\} \neq codom(g) = \{0, 2\}$. Rice 2 ci permette di concludere che I non è semidecidibile (che gia' sapevamo).

(7) Il terzo teorema di Rice non può essere applicato a $\bar{I}$. Supponiamo per assurdo che esista f calcolabile con $dom(f) \neq codom(f)$ tale che, per ogni funzione finita $\theta < f$, $dom(\theta) = codom(\theta)$, da cui $\{x : \phi_x = \theta\} \subseteq I$. Allora abbiamo:

$$dom(f) = \bigcup_{\theta < f, \theta \text{ finita}} dom(\theta) = \bigcup_{\theta < f, \theta \text{ finita}} codom(\theta) = codom(f).$$

Assurdo. Quindi Rice 3 non è applicabile.

4. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = y^x$. Si trovino poi le funzioni g ed h tali che $f = recprim(g, h)$.

   Soluzione: $f(0, y) = 1$ e $f(x + 1, y) = y^{x+1} = y \times y^x = y \times f(x, y)$. Allora $g(y) = 1$ e $h(x, y, z) = y \times z$.

5. Sia $I = \{x : \phi_x = \phi_{125}\}$. Quali teoremi di Rice si possono applicare ad I ed al complementare di I?

   Soluzione: I e' l'insieme dei programmi che calcolano la funzione calcolata dal programma codificato dal numero 125. Non conosciamo la funzione di codifica. Quindi dovremo distinguere vari casi. Prima pero' verifichiamo se possiamo applicare i teoremi di Rice.

   (1) $I \neq \emptyset$: ogni programma che calcola la funzione ϕ_{125} appartiene ad I.

(2) $I \neq N$: Esistono infinite funzioni calcolabili. Sia f calcolabile tale che $f \neq \phi_{125}$. Allora i programmi che calcolano f appartengono al complementare di I.

(3) I rispetta le funzioni: Sia $x \in I$ e $\phi_x = \phi_y$. Da $x \in I$ ricaviamo che $\phi_x = \phi_{125}$. Allora $\phi_y = \phi_x = \phi_{125}$ da cui ricaviamo $y \in I$.

(4) Da (1)-(3) segue che possiamo applicare il primo teorema di Rice ad I: I non e' decidibile. Distinguiamo due casi:

(4.1) $\phi_{125} = f_\emptyset$. Allora I non e' semidecidibile.

(4.2) $\phi_{125} \neq f_\emptyset$. Allora i programmi che calcolano la funzione vuota appartengono ad $N \setminus I$, che non e' semidecidibile.

(5) Il secondo teorema di Rice puo' essere applicato anche ad I? Distinguiamo vari casi:

(5.1) ϕ_{125} e' una funzione totale. Allora non esistono estensioni proprie di ϕ_{125} e quindi Rice 2 non e' applicabile.

(5.2) ϕ_{125} non e' una funzione totale. Allora esiste $r \notin dom(\phi_{125})$. Estendiamo ϕ_{125} ad una funzione g come segue: $g(x) \equiv$ if $x = r$ then 0 else $\phi_{125}(x)$. $g < \phi_{125}$ e' calcolabile ed i programmi che calcolano g appartengono al complementare di I. Quindi applicando Rice 2 otteniamo che I non e' semidecidibile.

(6) Il secondo teorema di Rice puo' essere applicato ad $N \setminus I = \{x : \phi_x \neq \phi_{125}\}$? Distinguiamo vari casi:

(6.1) $\phi_{125} = f_\emptyset$. Allora $N \setminus I = \{x : \phi_x \neq f_\emptyset\}$ e' semidecidibile. Quindi Rice 2 non e' applicabile. Un algoritmo che determina se $x \in N \setminus I$ "spazza" il piano alla ricerca di un input su cui P_x converge.

(6.2) $\phi_{125} \neq f_\emptyset$. Allora Rice 2 e' applicabile a $N \setminus I$ perche' $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq N \setminus I$ mentre $f_\emptyset < \phi_{125}$ e $\{x : \phi_x = f_{125}\} \subseteq I$. Si conclude che $N \setminus I$ non e' semidecidibile.

(7) Il terzo teorema di Rice puo' essere applicato a I? Abbiamo vari casi:

(7.1) ϕ_{125} ha dominio infinito. Rice 3 puo' essere applicato ad I perche' i programmi di *tutte* le approssimazioni finite di ϕ_{125} appartengono al complementare di I (in quanto I contiene solo i programmi che calcolano ϕ_{125}).

(7.2) ϕ_{125} ha dominio finito. Rice 3 non e' applicabile per ragioni evidenti.

(8) Il terzo teorema di Rice puo' essere applicato a $N \setminus I = \{x : \phi_x \neq \phi_{125}\}$? No, non puo' essere applicato. Comunque scegliamo una funzione $f \neq \phi_{125}$ calcolabile con dominio infinito, tutte o tutte meno al piu' ϕ_{125} (se $\phi_{125} < f$ e $dom(\phi_{125})$ finito) le approssimazioni finite di f sono calcolate da programmi che appartengono a $N \setminus I$.

6. Determinare il minimo punto fisso della seguente equazione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1; \\ f(x+1) + 1, & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

7. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 0; \\ f(f(x-1)-1), & \text{se } x \neq 0; \end{cases}$$

Si determini il minimo punto fisso della precedente definizione ricorsiva verificando che il funzionale associato è ricorsivo.