Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 4: Variabili aleatorie continue

1. Sia data una variabile aleatoria X la cui funzione di densità è $f(x) = ke^{-|x|}$ per ogni $x \in R$.
a) Determinare la costante di normalizzazione k. [$k = 1/2$]
b) Calcolare media, mediana e varianza di X. [0, 0, 2]
c) Calcolare la funzione di ripartizione di X.

2. Determinare il valore di k per cui le seguenti funzioni sono delle densità:
a) $f(x) = k\sin(x)$, $0 < x < \pi/4$; [$k = 2/(2-\sqrt{2})$]
b) $f(x) = k$, $x \in (-1, 1)$; [$k = 1/2$]
c) $f(x) = kx^2$, $x \in (-k, k)$; [$k = \sqrt[4]{3/2}$]
d) $f(x) = 2k|1-x|$, $x \in (-k, k)$. [$k = 1/2$]

3. X indica la vita in ore di una lampadina ed è distribuita secondo la densità

$$f(x) = c/x^2 \mathbf{I}_{(100,+\infty)}(x).$$

Trovare il valore di c per cui questa funzione è una densità di probabilità; calcolare la f.r. di X, la sua media, la varianza, i quartili e la $P(X > 500)$. [$c = 100$, non esiste, non esiste, 400/3, 200, 400, 1/5]

4. Si fissa a 1 il livello minimo delle acque di un fiume, mentre il livello massimo è una v.a. Y con f.r.

$$F(y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leq y < \infty.$$

a) Disegnare $F(y)$ e verificare che è una f.r.;
b) Trovare la densità di Y e farne il grafico;
c) Calcolare la probabilità che il livello del fiume superi la soglia di guardia $k > 1$; [$1/k^2$]
d) Calcolare media, varianza, moda e mediana di Y. [2, non esiste, 1, $\sqrt{2}$]

5. Se $Z \sim N(0, 1)$, trovare le costanti a e b per cui $P(Z \leq a) = 0.9686$ e $P(Z \geq b) = 0.1788$. [1.86, 0.92]

6. Se $X \sim N(3, 5^2)$, calcolare $P(4 \leq X \leq 6)$, $P(1 \leq X \leq 5)$, $P(-1 \leq X \leq 2)$. [0.1464, 0.3108, 0.2088]

7. Se $X \sim N(4, 4^2)$, calcolare la costante c per cui $P(|X - 4| \leq c) = 0.9505$. [7.84]

8. Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Determinare i valori della media e della varianza di X sapendo che $P(X \leq 2.45) = 0.15$ e $P(X \geq 2.6) = 0.06$. [2.51, 0.00336]

9. Sia X una v.a. con distribuzione uniforme di media 6 e varianza 2. Si trovino densità di probabilità e funzione di ripartizione di X. Si calcoli la mediana di X, il terzo quartile e $P(X \leq 5.5)$. [6, 7.2247, 0.3979].

10. Il voto all'esame di Statistica segue una distribuzione normale di media $\mu = 20$ ed è inoltre noto che il 70% degli studenti supera l'esame. Stabilire quale voto viene superato soltanto dal 10% degli studenti. [24.92]

11. Sia X una v.a. con distribuzione uniforme nell'intervallo $[2, 6]$ e sia Y una v.a. esponenziale di media $1/\lambda$. Si determini il valore di λ per cui $P(X \leq 4) = P(Y \leq 4)$. $[\lambda = \log 2/4 = 0.173]$

12. La durata X di vita (in mesi) di una batteria segue una distribuzione esponenziale con funzione di ripartizione $F(x) = 1 - e^{-7x}$, $x \geq 0$. Calcolare la probabilità che la batteria abbia una durata di 3 mesi dato che è già durata un mese. Qual è la probabilità che su 30 batterie meno di 5 durino più di 1/3 di mese? [e^{-14}, 0.8397]

13. La quantità di pomodoro dei barattoli prodotti da una certa ditta ha distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 300$ gr. Si sa inoltre che la probabilità che un barattolo contenga più di 304 gr è pari a 0.1. Trovare il valore di σ^2. I barattoli vengono giudicati conformi solo se contengono almeno 297 gr. Qual è la probabilità che in una cassetta contenente 25 barattoli ve ne siano più di 2 non conformi [9.741993, 0.8165782]?

14. Sia $X \sim U(0, 1)$. Scrivere la densità e la f.r. di X e disegnarne i grafici. Calcolare media, varianza e il valore z per cui $P(X > z + E(X)) = 1/4$. [0.5, 0.0833, 0.25]

15. Si suppone che il tempo di vita delle lampadine prodotte da una ditta segua una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 0.005$ (1/giorni). Qual è la probabilità che una lampadina duri almeno 300 giorni? Qual è la probabilità che, dopo 150 giorni di funzionamento, una lampadina duri ancora almeno 120 giorni? Se dalla produzione si scelgono 50 lampadine, qual è la probabilità che solo 3 di queste durino più di 300 giorni? [0.2231, 0.5488, 0.00153]

16. I diametri delle ruote per bicicletta prodotte da una ditta hanno distribuzione normale con media 58.5 cm e varianza 0.9 cm^2. Determinare:
a) la percentuale di ruote con diametro compreso fra 58.1 cm e 58.8 cm; [0.2874]
b) la percentuale di ruote con diametro superiore a 58.7 cm, dato che il loro diametro è superiore a 58.5 cm; [0.8330]
c) la probabilità che su 10 ruote scelte a caso dalla produzione, soltanto una abbia diametro inferiore a 58.3 cm. [0.03265]
La ditta afferma che in un lotto di 20 ruote consegnate ad un costruttore di biciclette, 2 hanno diametro inferiore a 58.3 cm.
d) Calcolare la probabilità che proprio queste due ruote vengano utilizzate per la costruzione della prossima bicicletta. [0.00526]

17. Un'azienda può scegliere di acquistare da due fornitori, A e B, un pezzo meccanico che dev'essere lungo 10 cm. La lunghezza del pezzo del fornitore A segue una distribuzione uniforme tra $10 - a$ cm e $10 + a$ cm, con a costante non nota; la lunghezza del pezzo del fornitore B segue invece una distribuzione normale con media 10 cm e varianza 4 cm^2. La probabilità di scegliere A è pari a 2/3.
a) Calcolare, in funzione di a, la probabilità che un pezzo acquistato dall'azienda sia al di fuori dell'intervallo di specifica $(9, 11)$ cm.
b) Calcolare per quale valore di a i due fornitori producono il pezzo con la stessa lunghezza media e la stessa varianza. $[a = 2\sqrt{3}]$

18. Il tempo di durata (in ore) di un certo componente elettronico di una macchina segue una distribuzione con densità di probabilità $f(x) = 1/2e^{-x/2}$, $x \geq 0$. Qual è la probabilità che su 100 componenti esattamente k abbiano durata maggiore di 2 ore? $[\binom{100}{k}e^{-k}(1 - e^{-1})^{100-k}]$