Calcolabilità e linguaggi formali

7 Gennaio 2013

Esercizio 1

Un programma si aspetta in input una sequenza non banale di stringhe decimali non banali. Ciascuna è racchiusa tra parentesi quadre e non vi sono spaziature superflue.
Es: [1052][41][0] oppure [903] . . .

(a) dare una grammatica per descrivere l'input del programma.

(b) classificare la grammatica data.

(c) classificare il linguaggio in input. Se il linguaggio è tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente. Se il linguaggio è tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non è un linguaggio regolare.

Soluzione

(a) Diamo una grammatica per l'input del programma. Le produzioni sono:
$S \to [X]|[X]S$
$X \to 0|...|9|0X|...|9X$

(b) La grammatica é tipo 2.

(c) Il linguaggio in input é tipo 3 (regolare). Infatti possiamo descriverlo con un'espressione regolare:
sia $R = (0 + ... + 9)(0 + ... + 9)^*$, allora il linguaggio in input é $L = [R]([R])^*$

Esercizio 2

(a) Dare la definizione formale di automa finito deterministico e di automa finito non deterministico.

(b) Dare un esempio di automa finito deterministico e di uno non deterministico.

Esercizio 3

Applicare i teoremi di Rice all'insieme $I = \{x : dom(\phi_x) \text{ è finito}\}$.

Soluzione

L'insieme I rispetta le funzioni perché $\phi_x = \phi_y$ implica $dom(\phi_x) = dom(\phi_y)$. Allora i domini sono o entrambi finiti oppure infiniti. $I \neq \emptyset$ perché i programmi della funzione $f_\emptyset$ stanno in I. $\bar{I}I \neq \emptyset$ perché i programmi della funzione identica stanno in $\bar{I}$. Dal primo teorema di Rice segue che I non è semidecidibile. $\bar{I}$ non è decidibile per Rice1, mentre $\bar{I}$ non è semidecidibile per Rice3.

Esercizio 4

Enunciare e dimostrare il secondo teorema di Rice.

Soluzione

Ricordiamo che, se $f, g : N \to N$ sono funzioni parziali, allora $f \leq g$ se grafico$(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$ è contenuto o uguale a grafico$(g) = \{(x, y) : y = g(x)\}$.
Teorema. Sia I un insieme che rispetta le funzioni. Se esistono due funzioni calcolabili f e g tali che

1. $\{x : \phi_x = f\} \subseteq I$;

2. $\{x : \phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$;

3. $f \leq g$

allora I non è semidecidibile.
Prova. Come prima cosa osserviamo che $f < g$ (altrimenti $I \cap \bar{I} \neq \emptyset$!). Proviamo a ridurre $\bar{K}$ ad I. Definiamo la seguente funzione h.

$$h(x,y) = \begin{cases} g(y), & \text{if } x \in K \text{ oppure } y \in dom(f) \\ \uparrow, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione h è calcolabile: Consideriamo tre programmi P_f, Q_g e R tali che (i) P_f calcola f; (ii) Q_g calcola g; (iii) R semidecide K. Facciamo partire in parallelo l'esecuzione di P_f con input y e l'esecuzione di R con input x.
(1) Termina prima P_f; allora interrompiamo l'esecuzione di R con input x. Il risultato è $h(x,y) = f(y) = g(y)$;
(2) Termina prima R. Allora $x \in K$, interrompiamo l'esecuzione di P_f e facciamo partire il programma Q_g con input y. Se quest'ultimo termina allora $h(x,y) = g(y)$, altrimenti $h(x,y) =\uparrow$.
(3) Non terminano P_f con input y e R con input x. Allora $h(x,y) =\uparrow$.
Applichiamo il teorema del parametro ad h per ottenere una funzione calcolabile totale s tale che

$$\phi_{s(x)}(y) = h(x,y).$$

Proviamo che s riduce $\bar{K}$ ad I.

$$x \in \bar{K} \Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = g(y) \text{ per ogni } y \in dom(f)$$

$$\Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = f(y) \text{ per ogni } y \text{ (perché } f(y) = g(y) \text{ per ogni } y \in dom(f)) \Rightarrow s(x) \in I$$

Inoltre,

$$x \in K \Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = g(y) \text{ per ogni } y \in dom(g) \Rightarrow s(x) \in \bar{I}$$

Esercizio 5

Definire per ricorsione primitiva la seguente funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Determinare le funzioni g e h associate allo schema di ricorsione primitiva $f = REC(g,h)$.

Soluzione

$f(x,0) = x^2$ e $f(x,y+1) = x^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 = f(x,y) + 2y + 1$. Allora abbiamo $g(x) = x^2$ e $h(x,y,z) = z + 2y + 1$.