Calcolabilità e linguaggi formali AAAAAA

20 Dicembre 2013

Esercizio 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{a^n b^m a^k : n, m, k \geq 1\}$;
$L_2 = \{a^n a^m b^m a^k : n, m, k \geq 1\}$.

(b) Determinare il tipo della grammatica data.

(c) Determinare il tipo del linguaggio. Se il linguaggio è di tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente.

Soluzione

Una Grammatica regolare per L_1:
S::= aS | aA
A::= bA | bC
C::= aC | a
Il linguaggio L_1 e' quindi regolare. Un'espressione regolare per L_1: $aa^*bb^*aa^*$.
Il linguaggio L_2 e' libero perche' generato da una grammatica libera dal contesto:
S::= ABA
A::= aA | a
B::= aBb | ab
Dimostriamo che il linguaggio L_2 non e' regolare. Supponiamo per assurdo che esiste un automa a stati finiti con n stati che riconosce L_2. Allora la stringa $aa^{n+1}b^{n+1}a \in L_2$ viene riconosciuta dall'automa. Siccome abbiamo $n+1$ caratteri b consecutivi nella stringa ed n sono gli stati dell'automa, necessariamente l'automa passera' almeno due volte da uno stesso stato q nella lettura delle b. Possiamo quindi scrivere $aa^{n+1}b^{n+1}a = aa^{n+1}b^k b^r b^s a$ ($k + r + s = n + 1$ e $r \geq 1$) e lo stato q dell'automa dopo la lettura della stringa $aa^{n+1}b^k$ e' uguale allo stato dopo la lettura della stringa $aa^{n+1}b^k b^r$. Ne segue che anche la stringa $aa^{n+1}b^{k+s}a \notin L_2$ ($k + s < n + 1$) viene riconosciuta dall'automa. Contraddizione.

Esercizio 2

Siano R, S e U espressioni regolari. Semplificare la seguente espressione regolare, mostrando tutti i passaggi di semplificazione:

$$((R^*S)^* + U + (US)^*)^*$$

Soluzione

Ricordiamo che

$$R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n = \{\lambda\} \cup R \cup RR \cup RRR \cup \dots$$

dove $R^n = RR \dots R$ (n-volte) e' la concatenazione del linguaggio R con se stesso n volte, ed $R^0 = \{\lambda\}$. Ricordiamo che λ e' la stringa vuota. Allora abbiamo

$$R^*S = (\bigcup_{n\geq 0} R^n)S = (\{\lambda\} \cup R \cup RR \cup RRR \cup \dots)S = \{\lambda\}S \cup RS \cup RRS \cup RRRS \cup \dots = S \cup RS \cup RRS \cup RRRS \cup \dots$$

Si vede quindi che $R^*S = \bigcup_{n\geq 0}(R^n S)$ e che R^*S non contiene in generale il linguaggio R, mentre $S \subseteq R^*S$. Veniamo ora alla semplificazione:

$$\begin{array}{rcll} ((R^*S)^* + U + (US)^*)^* & = & (R^*S + U + (US)^*)^* & \text{da } ((R^*S)^* + \dots)^* = (R^*S + \dots)^* \\ & = & (R^*S + U + US)^* & \text{da } (\dots + (US)^*)^* = (\dots + US)^* \\ & = & (R^*S + U)^* & \text{da } S \subseteq R^*S \text{ e } US \subseteq (S + U)^* \end{array}$$

Esercizio 3

Enunciare il secondo ed il terzo teorema di Rice.

Esercizio 4

Sia P l'insieme dei numeri naturali pari e sia $I = \{x : dom(\phi_x) = P\}$. Applicare, se possibile, Rice 2 e Rice 3 ad I.

Soluzione

E' possibile applicare Rice2. Si considerino le funzioni calcolabili f, g definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in P; \\ \uparrow & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in P; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha che $dom(f) = P$ e $dom(g) = N$. Quindi $\{x : \phi_x = f\} \subseteq I$ e $\{x : \phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$. Infine dalla definizione di f e g si vede chiaramente che g estende f. Quindi da Rice2 I non e' semidecidibile.
E' possibile applicare Rice3. Sia f la funzione definita precedentemente. L'insieme P e' infinito. Se $\theta < f$ ha dominio finito, allora $dom(\theta) \subseteq P$ e $dom(\theta) \neq P$. Quindi $\{x : \phi_x = \theta\} \subseteq \bar{I}$. Dall'arbitrarieta' di θ approssimante finita di f, si ricava che $\{x : \phi_x = \theta, dom(\theta) \text{ finito}, \ \theta < f\} \subseteq \bar{I}$. Quindi da Rice3 si ricava che I non e' semidecidibile.