Università "Ca'Foscari" Venezia

Dipartimento di Scienze Ambientali,
Informatica e Statistica

Giovanni Fasano †

Brevi NOTE sul Metodo del
BRANCH & BOUND

† Università Ca'Foscari Venezia, Dipartimento di Management, S.Giobbe Cannaregio 873, 30121 Venezia, ITALY. E-mail:fasano@unive.it ; URL: http://venus.unive.it/~fasano - A.A. 2014-2015.

Le presenti note sintetizzano alcune linee guida relative al Metodo del Branch & Bound, per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare. Le note si riferiscono al corso di Ricerca Operativa, svolto dal docente Giovanni Fasano nell'A.A. 2014-2015, presso l'Università Ca'Foscari Venezia, sede di via Torino (Mestre). Le lezioni sono state organizzate nell'ambito del Corso di Laurea in *Informatica*.

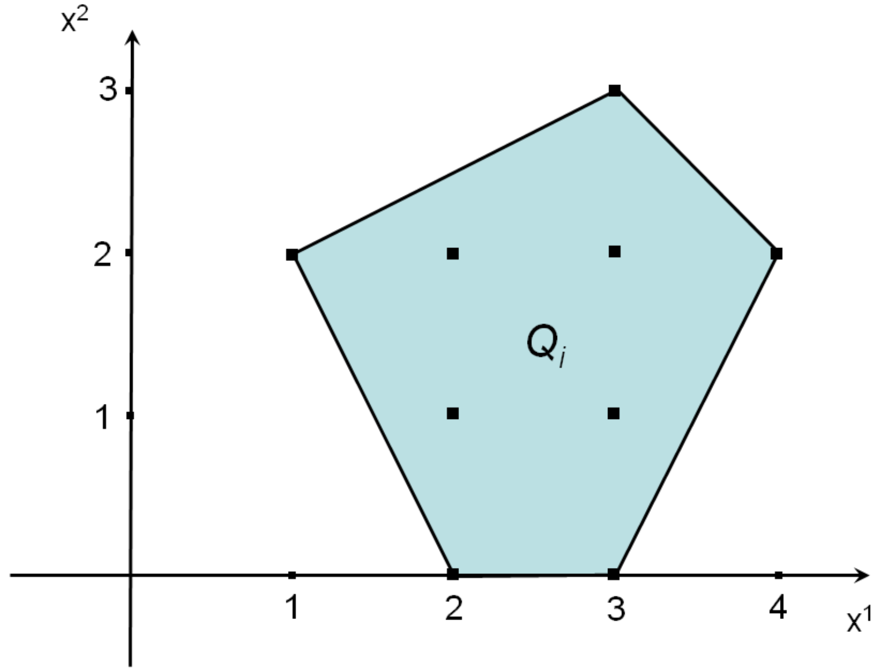

Figura 1: Il poliedro Q_i e l'insieme $S_i = \{(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(4,2)\}$ dei punti a coordinate intere in esso contenuti, i.e. $S_i \subseteq Q_i$.

1 Note e premesse sul Metodo del Branch & Bound (B&B)

Il B&B rappresenta una tecnica iterativa esatta, di tipo enumerativo, per la soluzione di problemi di Programmazione Matematica Intera/Mista e, più in particolare, per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI) e Programmazione Lineare Mista (PLM). Si spponga pertanto di voler risolvere il problema di PLI (nel seguito si indicherà con $\boldsymbol{Z}$ l'insieme dei numeri interi, i.e. $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in Q_0 \\ \quad x \in \boldsymbol{Z}^n, \end{array}} \quad \equiv \quad \boxed{\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in S_0, \end{array}} \tag{1}$$

nel quale $Q_0 = \{x \in I\!R^n : Ax \geq b\}$ è un generico poliedro in $I\!R^n$, $S_0 = Q_0 \cap \boldsymbol{Z}^n$, $A \in I\!R^{m \times n}$, $c \in I\!R^n$ e $b \in I\!R^m$. L'insieme S_0 contiene tutti e soli i punti del poliedro Q_0 a coordinate intere. Più in generale, si indicherà di seguito con S_i l'insieme dei punti a coordinate intere dato da $S_i = Q_i \cap \boldsymbol{Z}^n$, dove Q_i è un poliedro in $I\!R^n$ (si veda l'esempio nella Figura 1).

Premesse

- I punti a coordinate intere in S_i non necessariamente coincidono con i vertici del poliedro Q_i (contrariamente a quanto mostrato in Figura 1), pertanto se si tentasse di risolvere il problema

$$\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in Q_0, \end{array}$$

non necessariamente si avrebbe una soluzione x_0 a coordinate intere.

- Definendo i vettori

$$x_0 \quad \text{soluzione di} \quad \begin{cases} \min c^T x \\ \quad x \in Q_0 \end{cases}$$

e

$$\hat{x}_0 \quad \text{soluzione di} \quad \begin{cases} \min c^T x \\ \quad x \in S_0 \end{cases}$$

si ha naturalmente

$$f(\hat{x}_0) \geq f(x_0),$$

poichè $S_0 \subseteq Q_0$.

- Il Metodo del B&B consiste anzitutto nel *partizionare* (BRANCHING) in modo intelligente la regione ammissibile S_0, nei sottoproblemi S_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, così che

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$$

$$\emptyset = S_i \cap S_j, \quad 0 \leq i \neq j \leq k,$$

cercando (se necessario) una stima, per difetto, di una soluzione del sottoproblema

$$\begin{aligned} \min \ & c^T x \\ & x \in S_i. \end{aligned} \qquad (P_i)$$

Il problema (P_i) così generato viene detto *aperto* e viene inserito in una lista. Nella procedura riportata in Sezione 2 si considererà per semplicità una partizione semplificata, che non pregiudica la convergenza del metodo.

- Per calcolare una stima della soluzione di (P_i) si deve *calcolare un bound* (BOUNDING) per (P_i). In particolare, detta $\hat{x}_i$ una soluzione di (P_i) e posto $\hat{z}_i = c^T \hat{x}_i$, per calcolare un bound di (P_i) calcoliamo x_i, soluzione ottima del problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \ & c^T x \\ & x \in Q_i, \end{aligned} \qquad (PL_i)$$

ed indichiamo con z_i il valore $z_i = c^T x_i$. Sarà senz'altro $z_i \leq \hat{z}_i$ poichè il poliedro Q_i è tale che $S_i \subseteq Q_i$. Si dice che (PL_i) è un *rilassamento* di (P_i). Ribadiamo che il poliedro Q_i contiene gli stessi punti a coordinate intere di S_i.

2 Sintesi del Metodo del B&B

Fatte le precedenti premesse, il Metodo del B&B può essere schematizzato come segue:

1. Sia $\tilde{z} = c^T \tilde{x}$ l'*ottimo corrente* (calcolato in qualche modo, anche attraverso tecniche euristiche) di (P_0). Nel caso peggiore, ovvero se non si è in grado di stimarlo in nessun modo, si pone $\tilde{z} = +\infty$ e $\tilde{x}$ si pone *non noto*.

2. Sia $\mathcal{L}$ la lista dei cosiddetti *problemi aperti* (P_i), $i \geq 0$ (dei quali cioè è ancora necessario cercare un possibile bound per la soluzione). All'inizio della procedura $\mathcal{L}$ contiene solo il problema iniziale (P_0), ovvero si pone

$$\mathcal{L} = \{(P_0)\}.$$

3. Si estrae dalla lista $\mathcal{L}$ il problema (P_i) (la scelta del problema (P_i) da estrarre dalla lista $\mathcal{L}$, i.e. la *regola di estrazione*, è arbitraria) e se ne risolve il rilassamento (PL_i) con le seguenti regole:

   (a) se (PL_i) ammette soluzione x_i e risulta $z_i \geq \tilde{z}$, allora **si chiude** (P_i), ovvero il sottoproblema (P_i) non può contenere alcuna soluzione a coordinate intere migliore della soluzione corrente $\tilde{x}$;

   (b) se (PL_i) ha un insieme ammissibile vuoto, allora **si chiude** (P_i), in quanto il sottoproblema (P_i) è anch'esso vuoto. Quindi (P_i) non può contenere alcuna soluzione a coordinate intere migliore della soluzione corrente $\tilde{x}$;

   (c) se (PL_i) ammette soluzione x_i e risulta $z_i < \tilde{z}$, allora ci sono due possibili casi:

   - se $x_i \in \boldsymbol{Z}^n$ (ovvero se x_i ha tutte componenti intere), allora si pone $\tilde{x} = x_i$, $\tilde{z} = c^T x_i$ e **si chiude** il sottoproblema (P_i) (in quanto x_i è anch'esso soluzione di (P_i)), ovvero

   $$\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{(P_i)\};$$

   - se $x_i \notin \boldsymbol{Z}^n$ (ovvero se x_i NON ha tutte componenti intere), allora **si partiziona** il problema (P_i) nei due sottoproblemi (P_{i+1}) e (P_{i+2}), e si pone

   $$\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus \{(P_i)\} \cup \{(P_{i+1}), (P_{i+2})\},$$

   ovvero da $\mathcal{L}$ si toglie (P_i) e si inseriscono (P_{i+1}) e (P_{i+2}). In particolare, se la componente x_i^j di x_i risulta NON intera*, i.e.

   $$x_i^j = \alpha \notin \boldsymbol{Z},$$

   allora il problema (P_i) viene 'partizionato' nei due sottoproblemi

   $$\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in S_i \\ \quad x^j \leq \lfloor \alpha \rfloor \end{array} \qquad (P_{i+1})$$

   e

   $$\begin{array}{l} \min\ c^T x \\ \quad x \in S_i \\ \quad x^j \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1, \end{array} \qquad (P_{i+2})$$

   essendo $\lfloor \alpha \rfloor$ la parte intera inferiore di α. A questi ultimi vengono associati i problemi rilassati (PL_{i+1}) e (PL_{i+2}), ottenuti 'dividendo' (PL_i) come

*Qualora vi siano più componenti del vettore x_i non intere, se ne sceglie arbitrariamente una

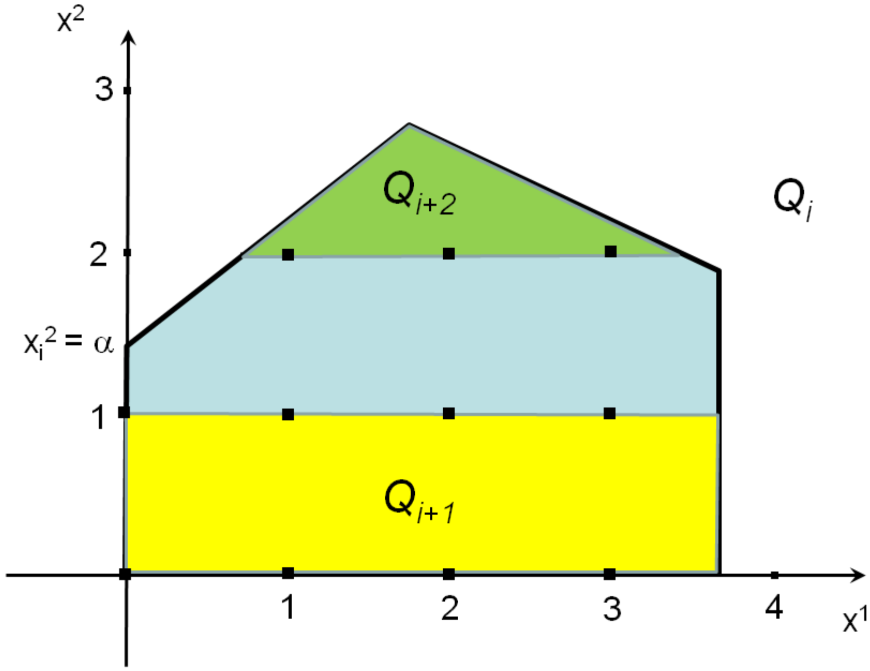

Figura 2: A partire dal poliedro Q_i si generano i poliedri $Q_{i+1} = Q_i \cup \{x \in I\!R^2 : x^2 \leq \lfloor \alpha \rfloor\}$ e $Q_{i+2} = Q_i \cup \{x \in I\!R^2 : x^2 \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1\}$, così che $S_{i+1} \subseteq Q_{i+1}$ e $S_{i+2} \subseteq Q_{i+2}$.

segue:

$$\begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \quad x \in Q_i \\ \quad x^j \leq \lfloor \alpha \rfloor \end{array} \qquad (PL_{i+1})$$

e

$$\begin{array}{l} \min \ c^T x \\ \quad x \in Q_i \\ \quad x^j \geq \lfloor \alpha \rfloor + 1. \end{array} \qquad (PL_{i+2})$$

Ciò garantisce che (si veda anche la Figura 2)

$$S_i = S_{i+1} \cup S_{i+2} \qquad \text{e} \qquad \emptyset = S_{i+1} \cap S_{i+2}.$$

4. Se la lista $\mathcal{L}$ risulta vuota (i.e. non vi sono più sottoproblemi al suo interno, da estrarre) allora STOP (la procedura del B&B termina): il punto $\tilde{x}$ è una soluzione di 1. Altrimenti si torna al punto 3.