Esercizi per il corso di
Probabilità e Statistica

Foglio 7: Somme di v.a. e teoremi limite

1. La durata delle telefonate urbane segue una distribuzione normale di media $\mu = 10$ minuti e scarto quadratico medio $\sigma = 3$ minuti. Selezionato un campione casuale semplice $X_1, \ldots, X_{20}$ di 20 telefonate, trovare la distribuzione della media campionaria $\bar{X}_{20}$ e la probabilità che la durata media delle telefonate sia compresa fra 9.5 e 10.3 minuti. $[N(\mu = 10, \sigma^2 = 0.45)$, 0.447]

2. La resistenza al carico dei sacchetti di plastica utilizzati per contenere generi alimentari segue una distribuzione normale di media 3.2 chili e scarto quadratico medio 5 chili. Qual è la probabilità che un sacchetto abbia una resistenza al carico tra i 2.8 e i 3.4 chili? Se si seleziona un campione casuale semplice di numerosità 30, qual è la probabilità che la media campionaria abbia una resistenza al carico tra i 2.8 e i 3.4 chili? [0.048, 0.257]

3. La durata in ore delle pile prodotte da una ditta segue una distribuzione normale di media $\mu = 100$ ore e varianza σ^2 ignota. Quanto vale la varianza se con una probabilità pari a 0.95 la media campionaria, calcolata su un campione di $n = 10$ pile, è maggiore di 88.4? $[22.302^2]$

4. I pezzi meccanici forniti da due produttori A e B hanno un tempo di vita (in anni) con distribuzione normale rispettivamente con media $\mu_A = 6.5$ e $\mu_B = 6$ e scarto quadratico medio $\sigma_A = 0.9$ e $\sigma_B = 0.8$. Qual è la probabilità che un campione casuale di 36 pezzi del produttore A abbia un tempo di vita medio almeno di un anno superiore a quello di un campione di numerosità 49 dal produttore B? [0.004]

5. Si determini la probabilità di ottenere almeno 25 volte testa in 40 lanci di una moneta equilibrata. Si confronti il risultato esatto con quello ottenuto utilizzando l'approssimazione normale, con e senza correzione per continuità. [0.0769, 0.1029, 0.0774]

6. Il peso di certe confezioni ha distribuzione normale con scarto quadratico medio pari a 2.5 chili. Quanto grande deve essere un campione se si vuole garantire che con probabilità almeno 0.95 la media campionaria non differisca dalla media μ della popolazione per più di 0.5 chili? $[n \geq 97]$

7. Siano $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ le medie di due campioni casuali semplici di numerosità n estratti da una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$. Determinare per quale valore di n si ha una probabilità del 10% che le due medie differiscano fra loro per più di σ. $[n = 6]$

8. Siano $X_1, \ldots, X_{80}$ i.i.d. $\sim f(x) = 3x^2$, con $x \in (0, 1)$. Si approssimi la probabilità che la somma $S_{80} = \sum_{i=1}^{80} X_i$ sia minore di 65. [0.998]

9. Gli alberi di una foresta hanno un'altezza media di 11.4 metri con una deviazione standard di 1.3 metri. Con riferimento ad un campione di numerosità 20, utilizzando il teorema limite centrale,
a) si approssimi la probabilità che la media campionaria sia compresa tra 9.7 e 11; [0.0844]
b) si determinino gli estremi dell'intervallo centrato nella media della popolazione, entro cui è compresa la media campionaria con probabilità 0.8. $[(11.0275, 11.7725)]$

10. Si consideri la media campionaria per campioni provenienti da una popolazione di media 175 e varianza 42. Applicando la disuguaglianza di Chebychev, si determini:
a) il limite inferiore della probabilità che la media campionaria sia compresa tra 170 e 180 assumendo una numerosità campionaria pari a 50; [0.9664]
b) la numerosità campionaria necessaria affinché $P(174 < \bar{X}_n < 176) \geq 0.9$. $[n \geq 420]$