Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 01 giugno 2012.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x^2 \log(x). \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio.*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Domanda numero 2: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

$f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x =$

$= x(1 + 2\log x) > 0$ se $1 + 2 \log x > 0$

ossia $\log x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x > e^{-1/2}$

quindi $f'(x) > 0$ se $x > e^{-1/2}$

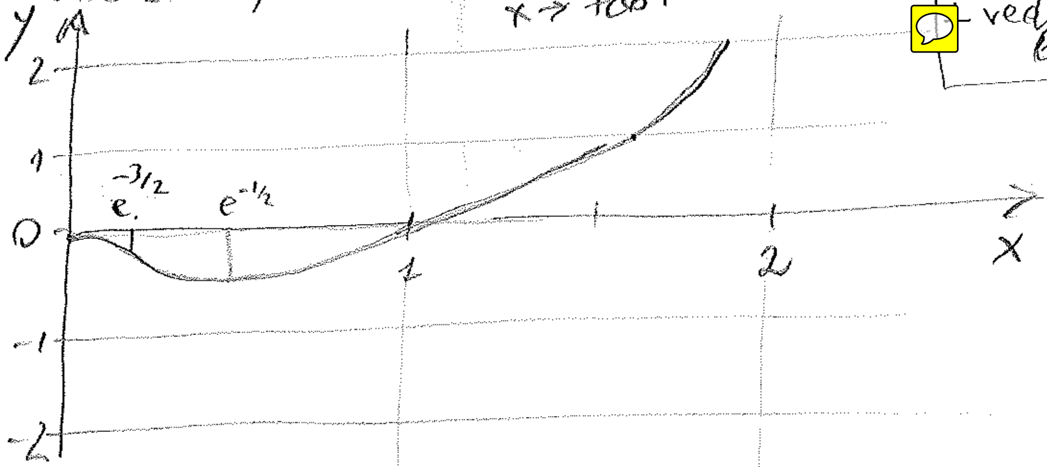
Inoltre $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$

Domanda numero 3: *Studiare punti di stazionarietà ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

$f''(x) = 3 + 2 \log x > 0$ se $x > e^{-3/2}$: curva convessa

L'unico punto di stazionarietà, vista la discussione precedente, è $x = e^{-1/2}$, ed è un minimo. Schizzando il grafico, vediamo che è il minimo assoluto, essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f(e^{-1/2}) < 0$

vedi a lato



Test 2 Domanda numero 4: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3}{x^3} = +\infty.$$

Bisogna provare che

$$(\forall M>0)(\exists \delta>0)\left(0<x<\delta \Rightarrow \frac{3}{x^3}>M\right) \quad (1)$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$\frac{3}{x^3} > M$, che vale per $x < \sqrt[3]{3/M}$.

Ponendo $\delta = \sqrt[3]{3/M}$ la (1) è vera

QED

+ inserto pag. precedente:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-2)\frac{1}{x^3}} = 0$$

regola di de l'Hôpital

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y' - (4/x)\,y - x = 0; \tag{2}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, e schizzarne un grafico.*

La soluzione generale dell'omogenea $y' = g(x)\,y$ è $y = C e^{G(x)}$ se

$$G(x) = \int \frac{4}{x}\,dx = 4 \ln|x| = \ln x^4,$$

La soluzione generale della completa è

$$y = C(x)\, e^{G(x)} \quad \text{se} \quad C(x) = \int x\, e^{-\ln x^4}\,dx =$$

$$= \int x\left(+\frac{1}{x^4}\right) dx = -\frac{1}{2x^2} + D, \text{ quindi}$$

$$y = \left(-\frac{1}{2x^2} + D\right) e^{\ln x^4} = \left(-\frac{1}{2x^2} + D\right) x^4 =$$

$= -\dfrac{x^2}{2} + D x^4$. <u>Non esiste</u> una soluzione che soddisfa $y(0) = 1$

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^6 + y^4$$

Domanda numero 6*: Determinarne punti di stazionarietà ed estremali.*

$f'_x = 2x + 6x^5$; $f'_y = 2y + 4y^3$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ sse $x=0, y=0$ punto di stazionarietà

$f''_{xx} = 2 + 30x^4$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2 + 12y^2$ in $(0,0)$

$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$; $H_{11} > 0$ quindi è un minimo

Domanda numero 7*: Calcolare il polinomio di Taylor lineare attorno al punto $P = (1,2)$.*

$t_1(x,y) = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) =$

$= 22 + 8(x-1) + 36(y-2) =$

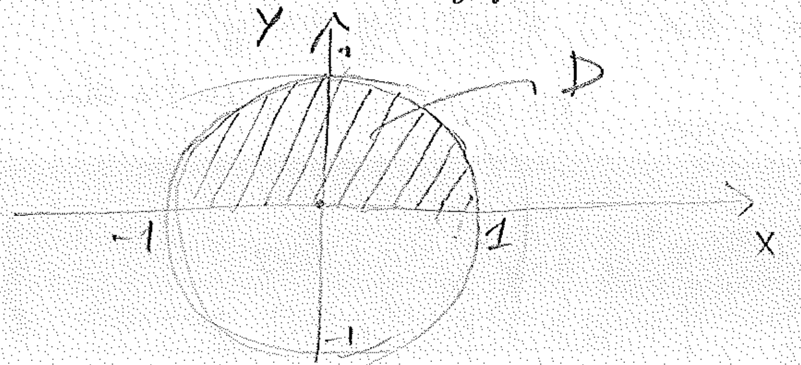
$= 8x + 36y - 58.$

Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int\int_D y^2 dxdy, \tag{3}$$

essendo $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Domanda numero 8: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*



Domanda numero 9: *Calcolare il valore dell' integrale (usare coordinate polari...)*

La trasformazione in coordinate polari è $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r \operatorname{sen}\phi \end{cases}$, dato che $r^2 = x^2+y^2$ la condizione $x^2+y^2 \leq 1$ diventa $r \leq 1$, mentre $y \geq 0$ diventa $\operatorname{sen}\phi \geq 0$, ovvero $0 \leq \phi \leq \pi$, quindi il dominio trasformato è $D' = \{(r,\phi) \mid 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \phi \leq \pi\}$. Ricordando che la jacobiana della trasformazione polare è r, otteniamo

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^\pi r^3 \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi \right) dr = \int_0^1 r^3 dr \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi =$$

*** fine testo ***

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 dr \left[\phi - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\phi \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 01 giugno 2012.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x^3 \log(x). \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio.*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Domanda numero 2: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

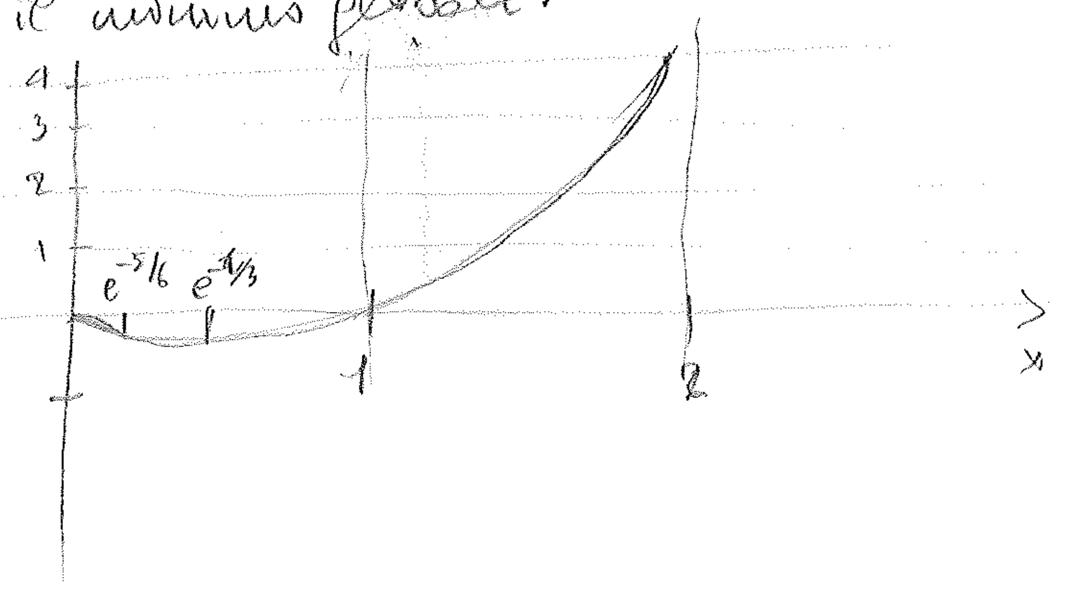
$f'(x) = 3x^2 \log x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \log x + x^2 = x^2(3\log x + 1) > 0$ se $\log x > -1/3$, ossia se $x > e^{-1/3} \Rightarrow f'(x) > 0$.

Inoltre $\lim_{x \to 0+} f'(x) = 0$

Domanda numero 3: *Studiare punti di stazionarietà ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

$f''(x) = x(6\log x + 5) > 0$ se $x > e^{-5/6}$: curva convessa

L'unico punto di stazionarietà vista la discussione precedente è $\bar{x} = e^{-1/3}$, ed è un minimo. Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (+ vedi a lato), $f(\bar{x}) < 0$, è anche il minimo globale.



Test 2 Domanda numero 4: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2}{x^5} = +\infty.$$

Dobbiamo provare che

$$(\forall M>0)(\exists \delta>0)\left(0<x<\delta \Rightarrow \frac{2}{x^5}>M\right) \quad (1)$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$\frac{2}{x^5} > M$, vera per $x < \sqrt[5]{2/M}$.

Quindi se prendiamo $\delta = \sqrt[5]{2/M}$ la (1) è vera.

QED

+inserto a pag 2: $\boxed{\text{regola di de l'Hôpital}}$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/x^3} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{(-3)\frac{1}{x^4}} = 0$$

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y' - (2/x)\,y - x = 0; \tag{2}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, e schizzarne un grafico.*

La soluzione generale dell'omogenea

$y' = g(x)y$ è $y = Ce^{G(x)}$ se

$G(x) = \int \frac{1}{x} dx = 2\ln|x| = \ln x^2$

La soluzione generale della completa è

$y = C(x)\,e^{G(x)}$ se $C(x) = \int x e^{-\ln x^2} dx =$

$= \int x \frac{1}{x^2} dx = \ln|x| + D$ quindi

$y = (\ln|x| + D)\, e^{\ln x^2} = (\ln|x| + D)\, x^2$

Non esiste una soluzione che soddisfa $y(0) = 1$

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 + y^6$$

Domanda numero 6: *Determinarne punti di stazionarietà ed estremali.*

$f'_x = 2x + 4x^3 \; ; \; f'_y = 2y + 6y^5$

$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ sse $x = 0,\ y = 0$ unico punto di stazionarietà

$f''_{xx} = 2 + 12x^2 \; ; \; f''_{xy} = 0 \; ; \; f''_{yy} = 2 + 30y^4$

$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \; ; \; H_{11} > 0$ quindi è un minimo

Domanda numero 7: *Calcolare il polinomio di Taylor lineare attorno al punto* $P = (2,1)$.

$t_1(x,y) = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(y-1) =$

$= 36(x-2) + 8(y-1) + 22 =$

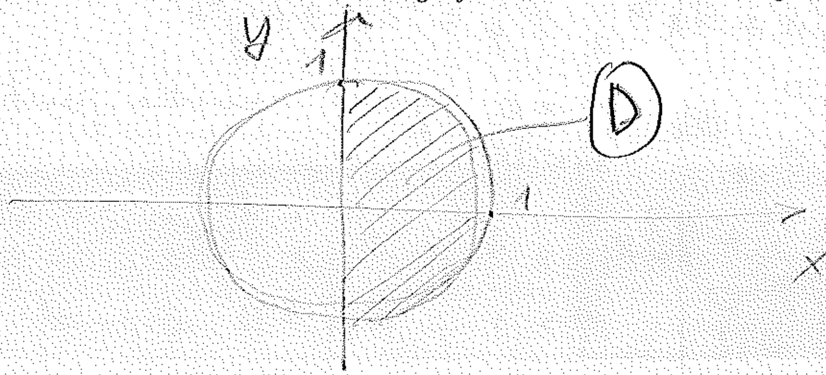
$= 36x + 8y - 58$

Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int\int_D x^2 dxdy, \tag{3}$$

essendo $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

Domanda numero 8: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*



Domanda numero 9: *Calcolare il valore dell' integrale (usare coordinate polari...)*

La trasformazione in coordinate polari è $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$, dato che $r^2 = x^2+y^2$, la condizione $x^2+y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq r \leq 1$, mentre $x \geq 0$ diventa $\cos\phi \geq 0$, ossia $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Il dominio trasformato è $D' = \{(r,\phi) \mid 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$. Ricordando che lo Jacobiano della trasformazione è r, otteniamo $I = \int_0^1 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} r^3 \cos^2\phi \, d\phi =$

$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{1+\cos 2\phi}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi =$

$= \frac{1}{8}\left[\phi + \frac{\sin 2\phi}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{8}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \pi/8$

*** fine testo ***