Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 21 maggio 2014.

Tema A

CORREZIONE

Nome

Cognome

Matricola Aula Posto

Codice insegnamento: Crediti

Intende sostenere: Mod. 1 Mod. 2

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Modulo 1	/ /	/30
Modulo 2	/ /	/30
Test OFA	/ /	superato non sup.

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - x^2}, & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$.*

Domanda numero 2: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3: *Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

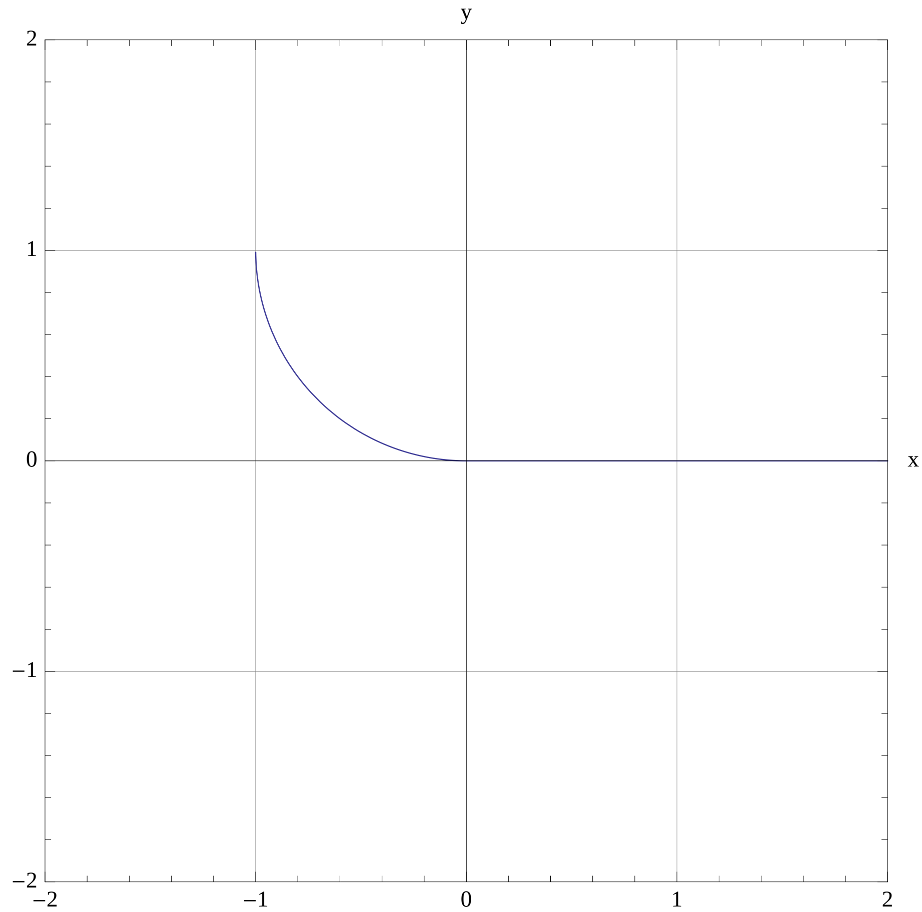
Domanda numero 4: *Calcolare*

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) dx.$$

Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$
Punti di discontinuità: non ve ne sono.
- Non vi sono asintoti orizzontali od obliqui. Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$: $y = 0$.
- Derivata
$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0. \end{cases}$$
Vi sono infiniti punti di stazionarietà, quelli della semiretta $y > 0$, che sono di minimo debole.

  Il punto $x = -1$ è di massimo forte.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}, & -1 < x < 0. \end{cases}$$
- Estremo superiore $= 1$. Estremo inferiore $= 0$. Massimo assoluto $= 1$. Minimo assoluto $= 0$.
- Grafico della funzione.



- Abbiamo:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx =$$
$$\int_{-1}^{0} (1 - \sqrt{1 - x^2})dx = 1 - \pi/4$$

Il risultato si può ottenere anche osservando che l' area sottesa dal grafico della funzione è quella dell' insieme complementare di un quarto di cerchio unitario, nel quadrato $[-1, 0] \times [1, 0]$.

Test 2 Domanda numero 5: *Usando lo sviluppo di Taylor, provare che*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + o(h).$$

Lo sviluppo di Taylor di f attorno al punto x_0 arrestato ai termini lineari asserisce che

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)\, h + o(h^2).$$

Quindi

$$f'(x_0)\, h = f(x_0) - f(x_0 - h) + o(h^2).$$

Dividendo ambo i membri per h, e ricordando che $o(h^2)/h = o(h)$, otteniamo

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + o(h).$$

QED

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y''(x) - y'(x) + 2y(x) = -\frac{7e^{x/2}}{4}. \tag{2}$$

Domanda numero 6: *Determinarne la soluzione generale.*

Domanda numero 7: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = -1$, $y'(0) = -1/2$, e schizzarne un grafico.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (1/2) \pm \iota\sqrt{7}/2$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(x/2)(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\exp(x/2) + B$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{8B = 0, 7(1 + A) = 0\},$$

ossia $A = -1$, $B = 0$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = -\exp(x/2).$$

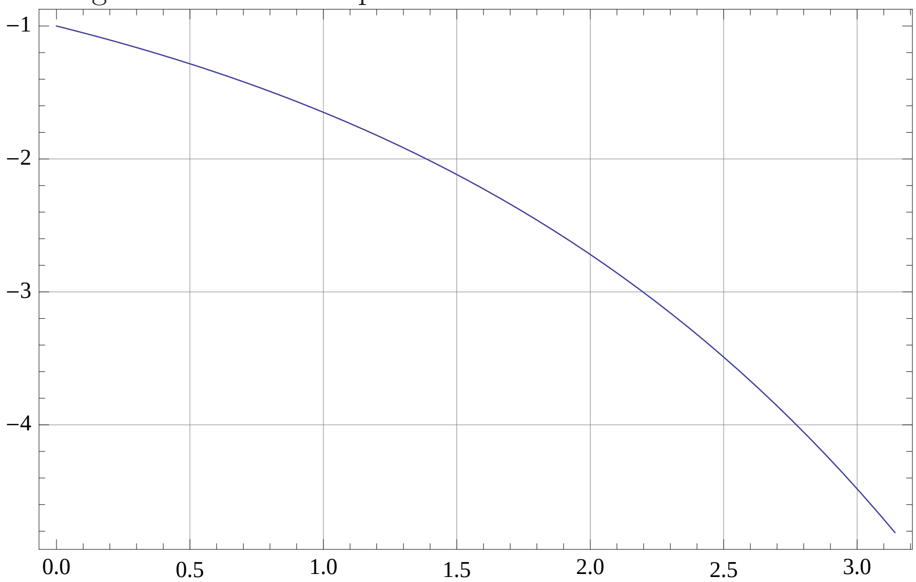
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(x/2)(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)) - \exp(x/2). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = -\exp(x/2).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.

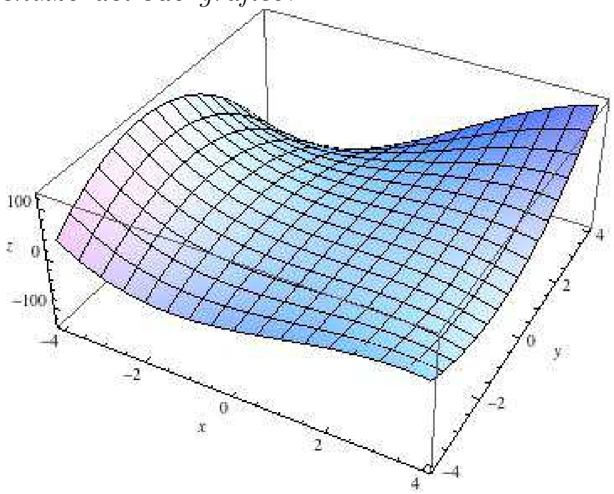


Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = -2 - x + 3x^2 - x^3 - 4y + 4xy - 2y^2 + 2xy^2$$

Per aiutarvi, ecco uno schizzo del suo grafico.

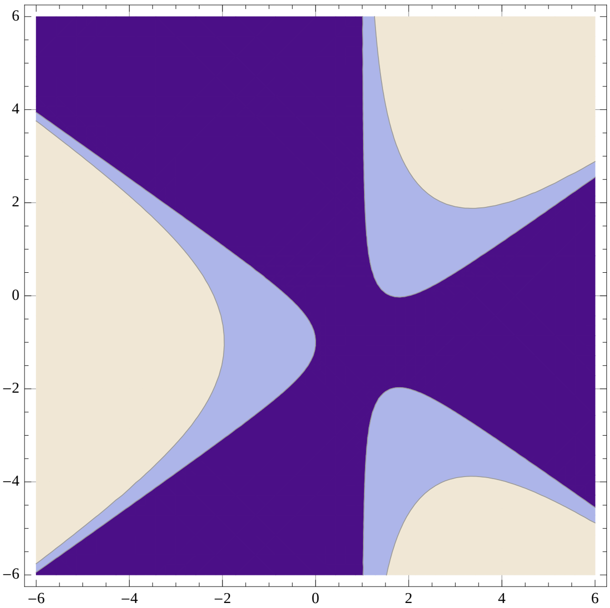


Domanda numero 8: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 9: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(+1, y)$.

Domanda numero 10: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, -1)$.

Nel grafico seguente, sono schizzate alcune curve.



Domanda numero 11: *Dire quali curve di livello della funzione data sono schizzate. Se non vi sono curve di livello della funzione, ditelo.*

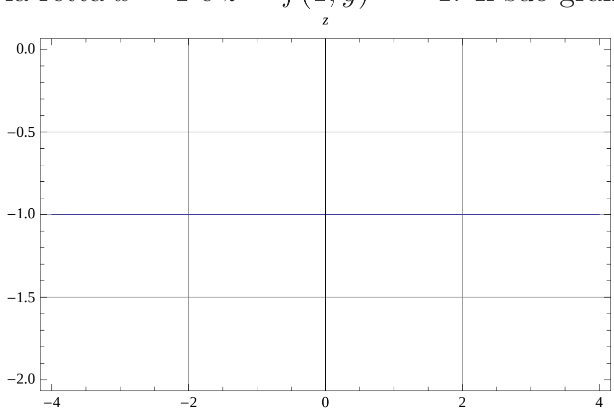
Domanda numero 12: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

Domanda numero 13: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

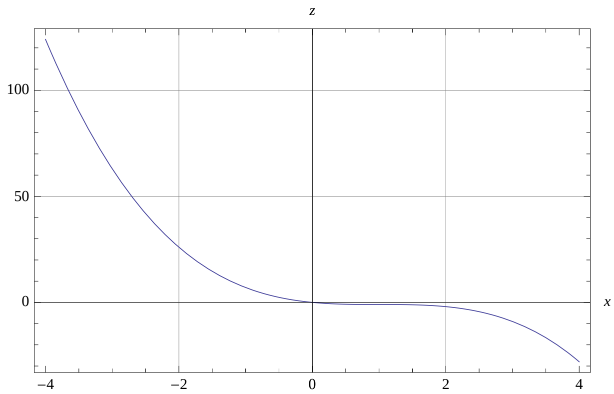
Risoluzione.

- Il dominio è:
$$D = \mathbb{R}^2.$$
La funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.

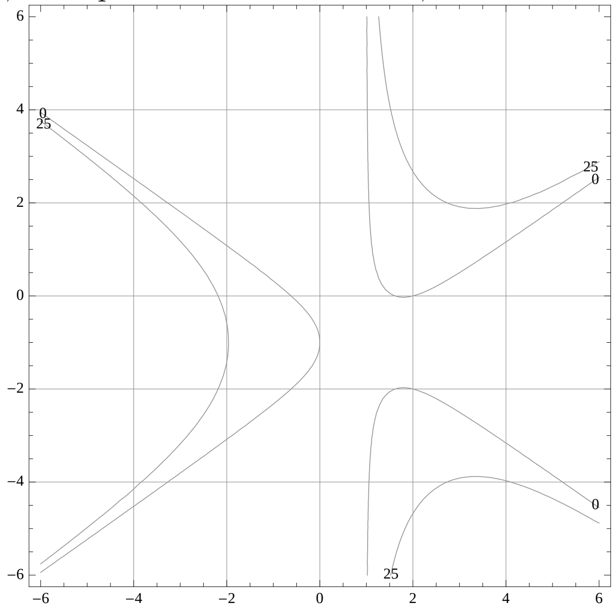
- La funzione lungo la retta $x = 1$ è $z = f(1, y) = -1$. Il suo grafico è riportato qui sotto.



- La funzione lungo la retta $y = -1$ è $z = f(x, -1) = -3x + 3x^2 - x^3$. Il suo grafico è riportato qui sotto.



- Calcolando il valore della funzione in ognuno dei rami delle curve disegnate, si vede che sono curve di livello: il valore della funzione è costante su ogni ramo. Le curve, riportate qui sotto, corrispondono ai valori $z = 0, 25$.



- Gradiente:

$$\nabla f = \left(-3x^2 + 6x + 2y^2 + 4y - 1, 4xy + 4x - 4y - 4\right)$$

- Matrice Hessiana:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} -6x + 6 & 4y + 4 \\ 4y + 4 & -4 + 4x \end{pmatrix}$$

Punti di stazionarietà: dobbiamo risolvere il sistema non lineare

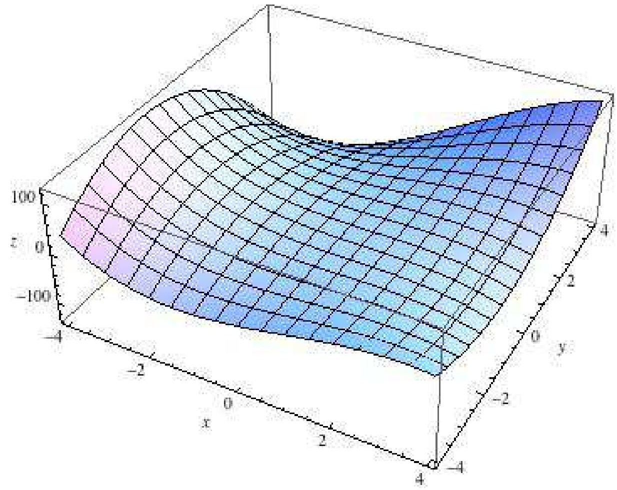
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 1 = 0, \\ -4xy - 4x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione equivale a $(y - 1)(x + 1) = 0$. La coppia $\bar{x} = (1, -1)$ soddisfa anche la prima equazione. Quindi i punti di stazionarietà sono $\bar{x} = (1, -1)$.

Abbiamo $\bar{M} = M(1, -1) = 0$, quindi l' Hessiano non fornisce informazioni sul carattere del punto. Tuttavia, il grafico di $f(x, -1)$ mostra che è un punto di sella.

- L' estremo superiore di f è $+\infty$, l' estremo inferiore è $-\infty$.

- Schizzo della superficie (non richiesto)



Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int_\gamma y \, ds,$$

$$\gamma = \{(x, y) : x = x_0 + r\cos(t), y = y_0 + r\sin(t), 0 \le t < 2\pi\},$$

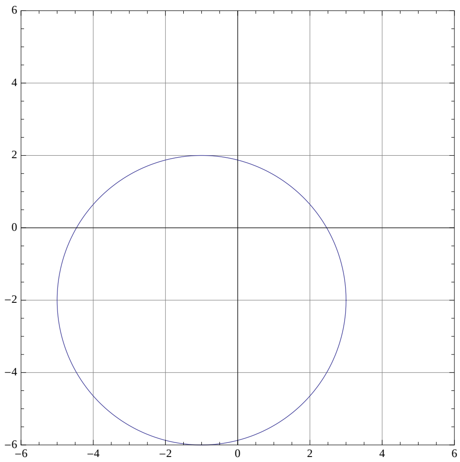
dove $x_0 = -1$, $y_0 = -2$, $r = 4$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva* γ.

Domanda numero 15: *Calcolare il valore dell' integrale.*

Risoluzione.

- Grafico della curva γ:



- Abbiamo:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t} = 4.$$

Quindi il valore dell' integrale è:

$$I = \int_0^{2\pi} (y_0 + r\sin(t))\,4\,dt = -16\pi.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 21 maggio 2014.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐

Codice insegnamento: ☐☐☐☐☐☐ Crediti ☐☐

Intende sostenere: Mod. 1 ☐ Mod. 2 ☐

Attività	gg/mm/aaaa	esito
Modulo 1	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Modulo 2	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	☐☐/30
Test OFA	☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐	superato / non sup.

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{1-x^2}, & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per* $x \to \pm\infty$.

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

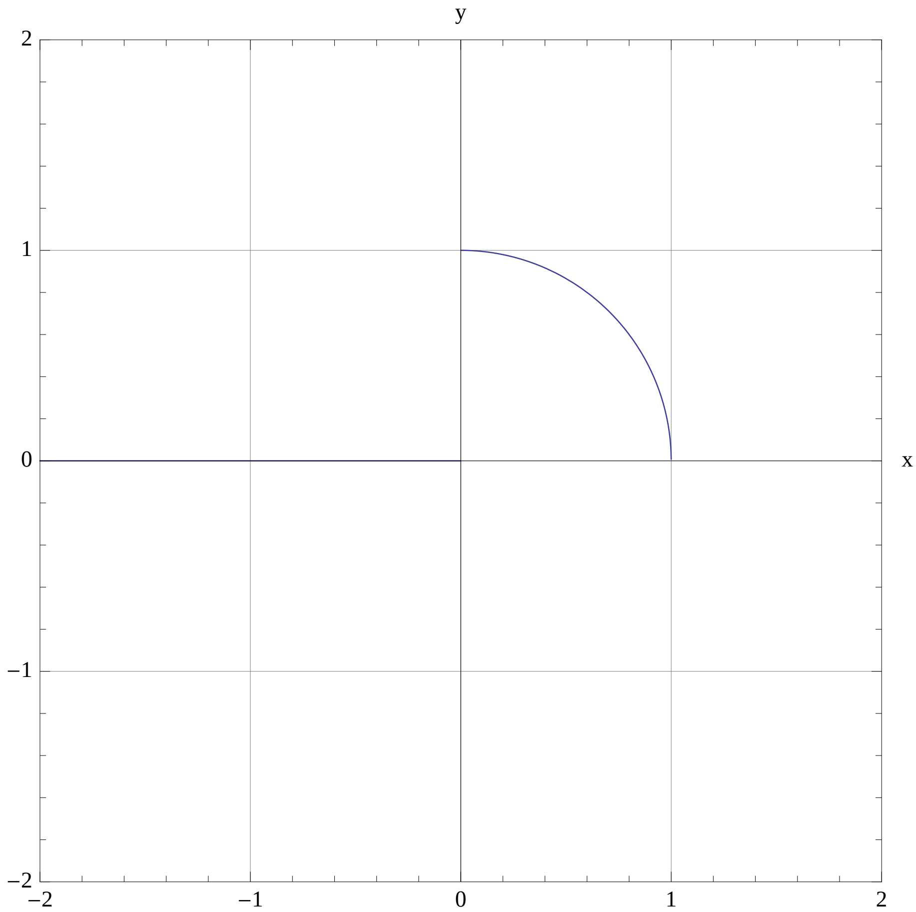
Domanda numero 4*: Calcolare*

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$
Punti di discontinuità: $x = 0$.
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 1.$$
- Non vi sono asintoti orizzontali od obliqui. Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$: $y = 0$.
- Derivata
$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$
Vi sono infiniti punti di stazionarietà, quelli della semiretta $y \leq 0$, che sono di minimo debole.

  Il punto $x = 0$ è di massimo forte.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$
- Estremo superiore $= 1$. Estremo inferiore $= 0$. Non esiste massimo assoluto. Minimo assoluto $= 0$.
- Grafico della funzione.



- Abbiamo:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx =$$
$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \pi/4$$

Il risultato si può ottenere anche osservando che l' area sottesa dal grafico della funzione è un quarto di cerchio unitario.

Test 2 Domanda numero 5: *Usando lo sviluppo di Taylor, provare che*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + o(h).$$

Lo sviluppo di Taylor di f attorno al punto x_0 arrestato ai termini lineari asserisce che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h^2).$$

Quindi

$$f'(x_0)\,h = f(x_0 + h) - f(x_0) + o(h^2).$$

Dividendo ambo i membri per h, e ricordando che $o(h^2)/h = o(h)$, otteniamo

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + o(h).$$

QED

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y''(x) - y'(x) + 2y(x) = \frac{7e^{x/2}}{4}. \tag{2}$$

Domanda numero 6: *Determinarne la soluzione generale.*

Domanda numero 7: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$, e schizzarne un grafico.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (1/2) \pm \iota\sqrt{7}/2$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(x/2)(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\exp(x/2) + B$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{8B = 0, 7(-1 + A) = 0\},$$

ossia $A = 1$, $B = 0$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = \exp(x/2).$$

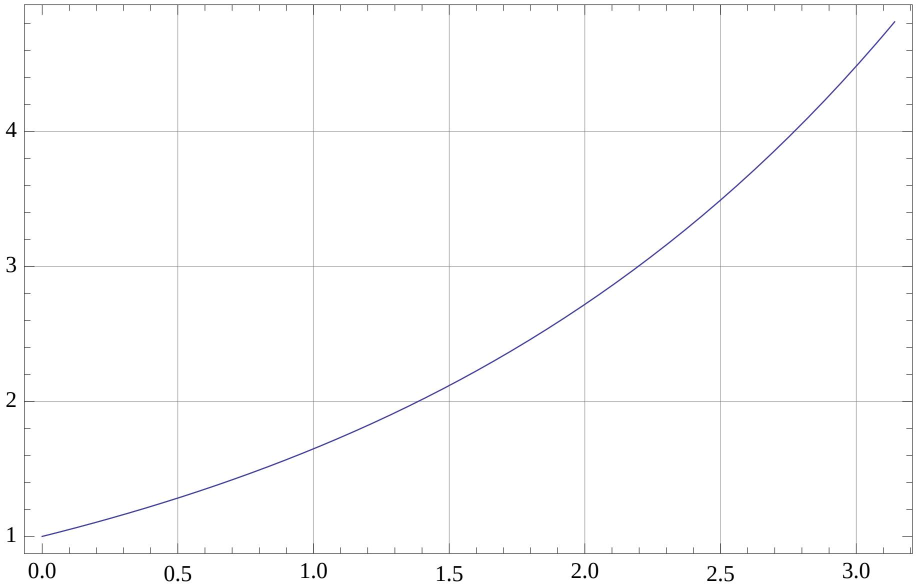
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(x/2)(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)) + \exp(x/2). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \exp(x/2).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.

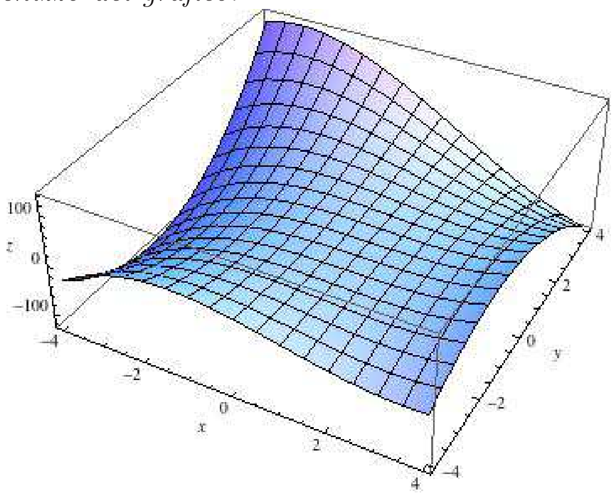


Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 - 2xy^2 - 4xy + x + 2y^2 + 4y + 2.$$

Per aiutarvi, ecco uno schizzo del grafico.

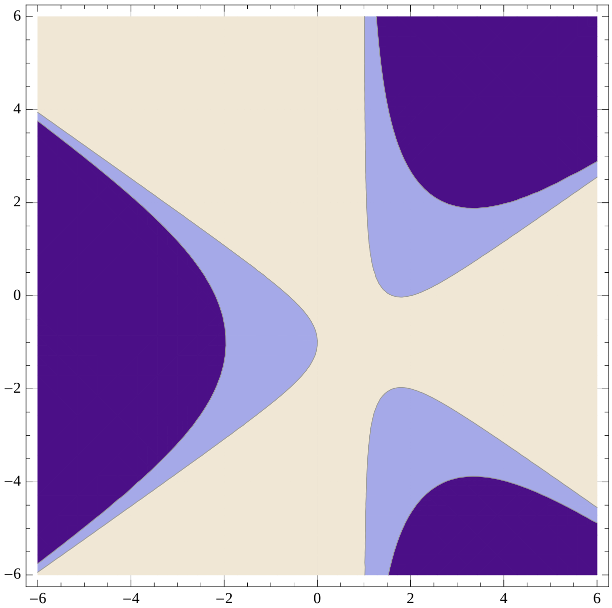


Domanda numero 8: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 9: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(+1, y)$.

Domanda numero 10: *Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(x, -1)$.

Nel grafico seguente, sono schizzate alcune curve.



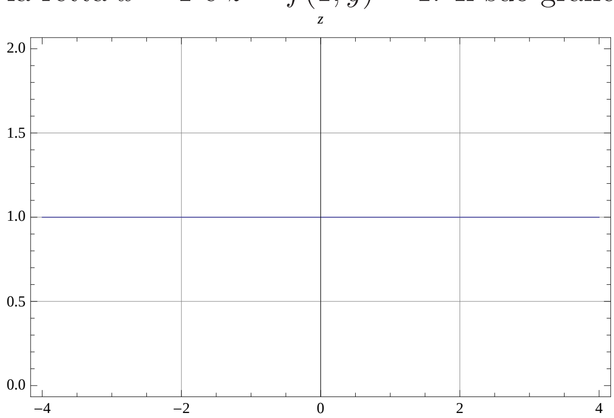
Domanda numero 11: *Dire quali curve di livello della funzione data sono schizzate. Se non vi sono curve di livello della funzione, ditelo.*

Domanda numero 12: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

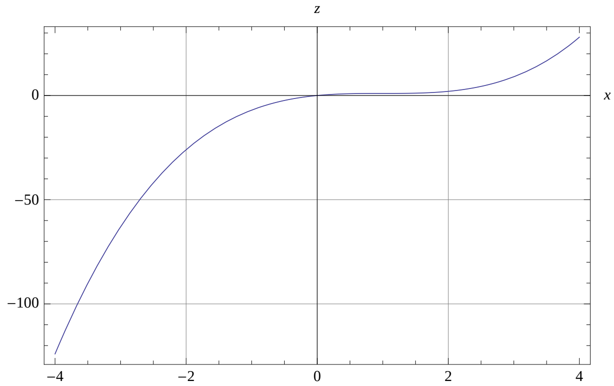
Domanda numero 13: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

Risoluzione.

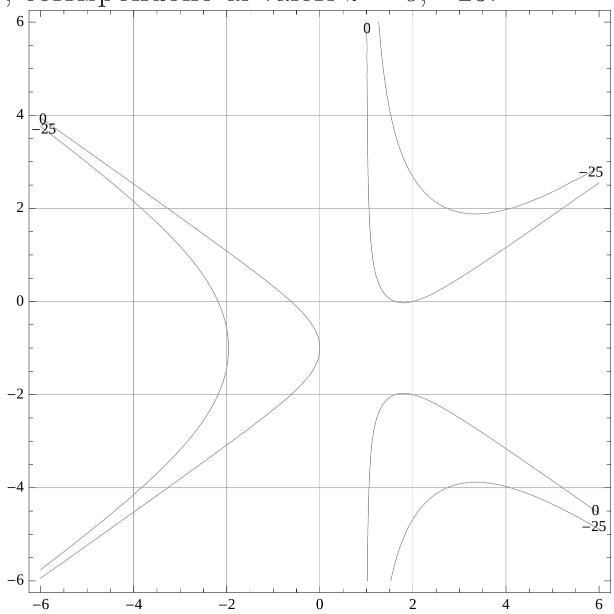
- Il dominio è:
$$D = \mathbb{R}^2.$$
La funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.
- La funzione lungo la retta $x = 1$ è $z = f(1, y) = 1$. Il suo grafico è riportato qui sotto.



- La funzione lungo la retta $y = -1$ è $z = f(x, -1) = 3x - 3x^2 + x^3$. Il suo grafico è riportato qui sotto.



- Calcolando il valore della funzione in ognuno dei rami delle curve disegnate, si vede che sono curve di livello: il valore della funzione è costante su ogni ramo. Le curve, riportate qui sotto, corrispondono ai valori $z = 0, -25$.



- Gradiente:
$$\nabla f = \left(3x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 1, -4xy - 4x + 4y + 4\right)$$

- Matrice Hessiana:
$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6 & -4y - 4 \\ -4y - 4 & 4 - 4x \end{pmatrix}$$

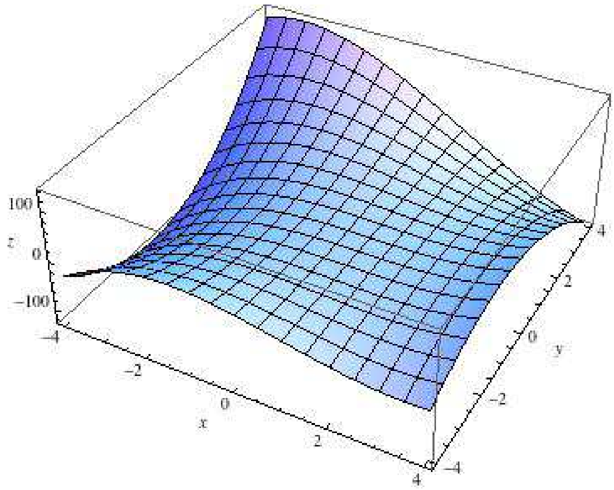
  Punti di stazionarietà: dobbiamo risolvere il sistema non lineare
$$\begin{cases} 3x^2 - 6x - 2y^2 - 4y + 1 = 0, \\ -4xy - 4x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

  La seconda equazione equivale a $(y - 1)(x + 1) = 0$. La coppia $\bar{x} = (1, -1)$ soddisfa la prima equazione. Quindi i punti di stazionarietà sono $\bar{x} = (1, -1)$.

  Abbiamo $\bar{M} = M(1, -1) = 0$, quindi l' Hessiano non fornisce informazioni sul carattere del punto. Tuttavia, il grafico di $f(x, -1)$ mostra che è un punto di sella.

- L' estremo superiore di f è $+\infty$, l' estremo inferiore è $-\infty$.

- Schizzo della superficie (non richiesto)



Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int_\gamma y \, ds,$$

$$\gamma = \{(x, y) : x = x_0 + r\cos(t), y = y_0 + r\sin(t), 0 \le t < 2\pi\},$$

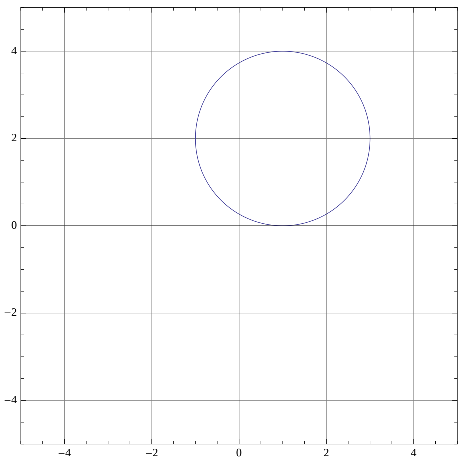
dove $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $r = 2$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva* γ.

Domanda numero 15: *Calcolare il valore dell' integrale.*

Risoluzione.

- Grafico della curva γ:



- Abbiamo:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2.$$

Quindi il valore dell' integrale è:

$$I = \int_0^{2\pi} (y_0 + r\sin(t))\, 2\, dt = 8\pi.$$

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Modulo 2, *** fine testo ***