Tutorato di Calcolo Modulo II
Esercizi

Flavio Sartoretto e Filippo Bergamasco

4 aprile 2013

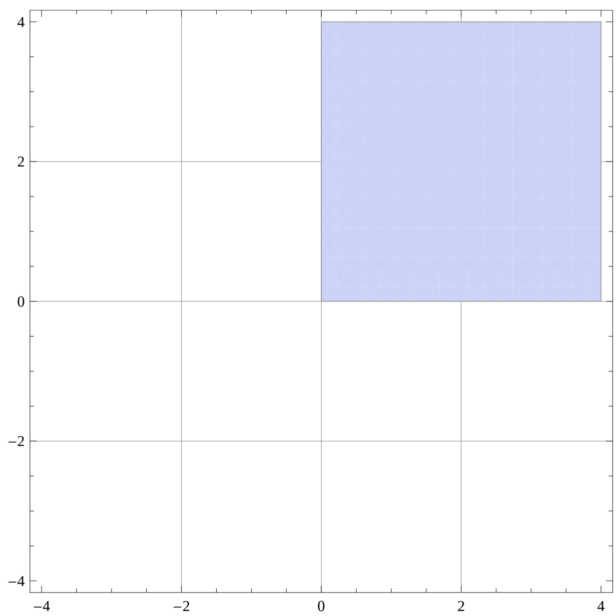
Funzioni di due variabili

Domini

Determinare il dominio (naturale) delle seguenti funzioni e schizzarlo.

$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{1}$$

Risoluzione: i radicandi debbono essere positivi, quindi $\mathrm{dom}(f) = \{(x, y)$ t.c. $x \geq 0, y \geq 0\}$. Eccone una rappresentazione:



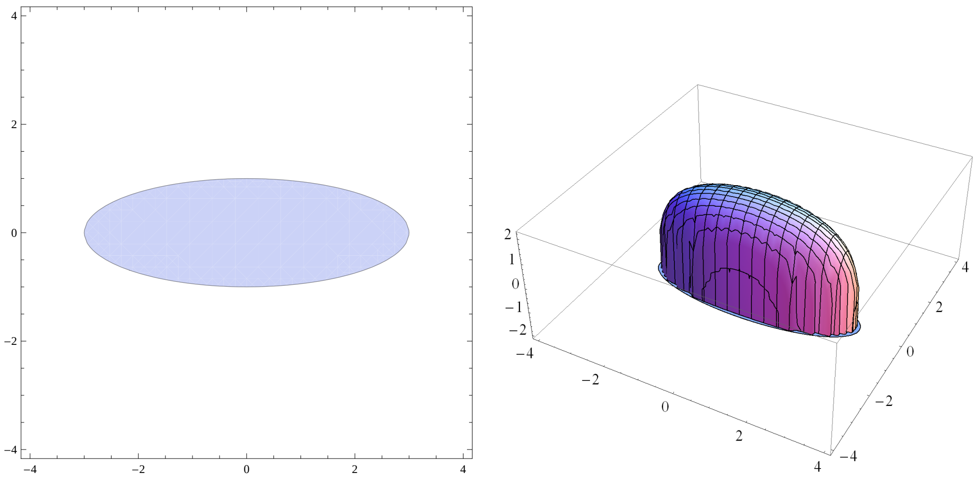


Figura 1: Dominio (a sinistra) e grafico (a destra) della funzione (2)

$$f(x, y) = log(9 - x^2 - 9y^2) \tag{2}$$

Risoluzione: L'argomento della funzione logaritmo deve essere maggiore di zero. Perciò

$$dom(f) = \{(x, y)\ t.c.\ 9 - x^2 - 9y^2 > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 < 1\}$$

Ricordiamo che l'equazione canonica di un ellisse i cui semiassi di lunghezze a e b coincidono con gli assi cartesiani è:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

La disequazione $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$ rappresenta l'area di piano interna all'ellisse $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$, schizzata nella figura 1.

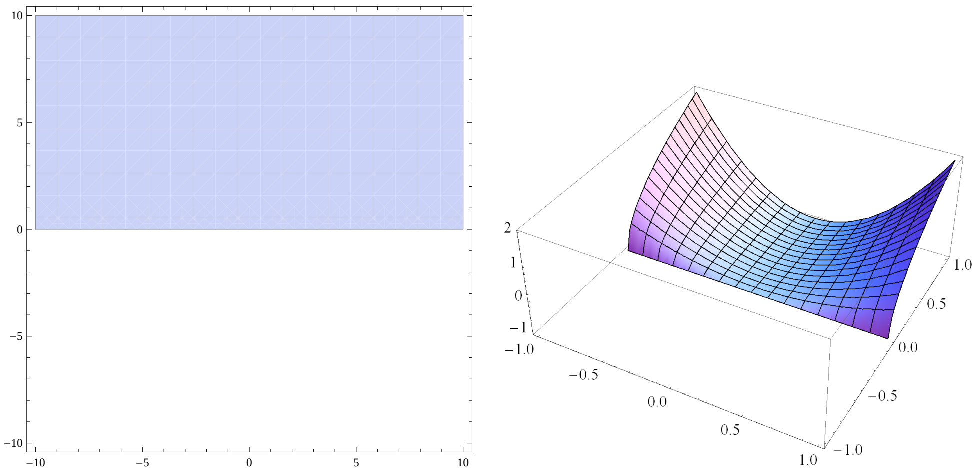


Figura 2: Dominio (a sinistra) e grafico (a destra) della funzione (3)

$$f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} - 1 \tag{3}$$

Risoluzione: Il radicando y deve essere positivo, quindi:

$$dom(f) = \{(x,y) \; t.c. \; y \geq 0\}$$

ossia il semipiano chiuso delimitato dalla retta $y = 0$, schizzato nella figura 2.

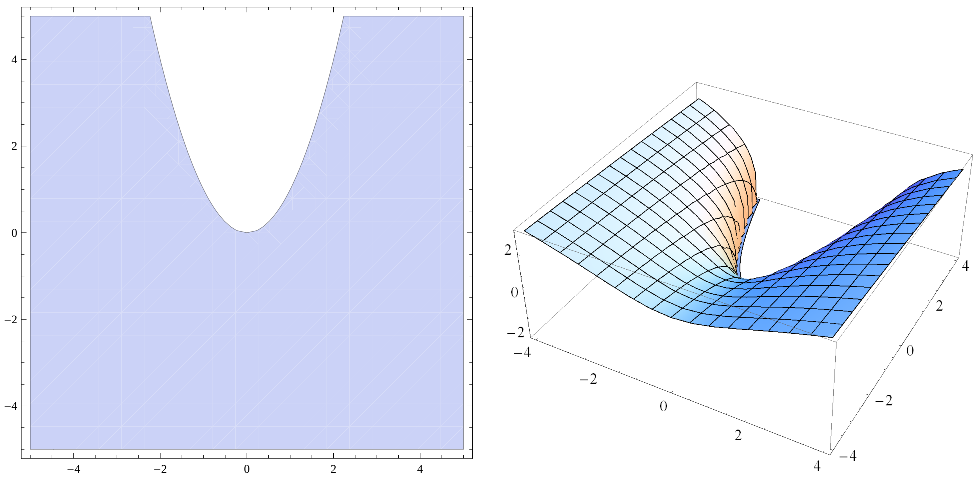


Figura 3: Dominio (a sinistra) e grafico (a destra) della funzione (4)

$$f(x,y) = log(x^2 - y) \tag{4}$$

Risoluzione: L'argomento della funzione logaritmo deve essere maggiore di zero. Quindi

$$dom(f) = \{(x,y)\ t.c.\ x^2 - y > 0\}$$

Ricordando che $y = x^2$ è l'equazione di una parabola che ha concavità rivolta verso l'alto, vertice in $O(0,0)$, la disequazione $y < x^2$ rappresenta la regione di piano schizzata in figura 3, al di sotto di tale parabola.

Limiti

Sia $O = (0,0)$ l'origine degli assi. Determinare se sono validi i seguenti limiti.

$$\lim_{(x,y)\to O} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 \tag{5}$$

Risoluzione: sia $y = mx$, allora

$$L = \lim_{(x,y)\to O} \frac{x^2 - (mx)^2}{x^2 + (mx)^2} =$$
$$\lim_{(x,y)\to O} \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

Se $m = 1$, $L = 0$, $m = 2$, $L = -3/5$, il valore di L dipende da m, quindi il limite non esiste.

$$\lim_{(x,y)\to O} \frac{3x^2}{x^2+y^2} = 0 \tag{6}$$

Risoluzione: Sia $y = mx$, allora:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{3x^2}{x^2+m^2x^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{3x^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{3}{1+m^2} \end{aligned}$$

Se $m = 1, L = \frac{3}{2}$, $m = 2, L = \frac{3}{5}$. Il valore di L dipende da m pertanto il limite per $(x,y) \to O$ non esiste.

$$\lim_{(x,y)\to O} \frac{4y}{x+y} = 0 \tag{7}$$

Risoluzione: Sia $y = mx$, allora:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{4mx}{x+mx} \\ &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{4mx}{x(1+m)} \\ &= \lim_{(x,y)\to O} \frac{4m}{1+m} \end{aligned}$$

Il valore di L dipende da m; ad esempio $m = 1 \Rightarrow L = 2$, $m = 2 \Rightarrow L = \frac{8}{3}$. Pertanto, il limite proposto non esiste.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-1}{x+y-3} = 0 \tag{8}$$

Riscriviamo il limite come

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-1}{x+y-3} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x-1}{x-1+y-2}$$

Ponendo $z = x - 1$, $w = y - 2$, il limite è equivalente al

$$\lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{z}{z+w}$$

Assumendo $y = kx$, il limite diventa

$$\lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{1}{1+k} = L.$$

Il valore di L varia con k, pertanto il limite dato non esiste.

Continuità

Dire se le seguenti funzioni sono continue nei punti e/o insiemi dati.

$$f(x,y) = x^2 + y, \quad \mathrm{dom}(f) \tag{9}$$

Risoluzione: la funzione è continua nel suo dominio, perché somma di funzioni continue in tutto $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = x + y^2, dom(f) \tag{10}$$

Risoluzione: La funzione è continua nel suo dominio $\mathbb{R}^2$, perchè somma di funzioni continue in tutto $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad P = O \tag{11}$$

Risoluzione: la funzione non è continua in O poichè non è ivi definita (il denominatore si annulla).

Derivate

Dire se le seguenti funzioni sono differenziabili nel punto dato e in tal caso calcolarne il gradiente e valutarlo in tale punto.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad P = O \tag{12}$$

Risoluzione: la funzione non è definita nel punto, quindi in particolare non differenziabile.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}, \quad P = O \tag{13}$$

Risoluzione: la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. $\nabla f = (x,y)$, $\nabla f(O) = (0,0)$.

$$f(x,y) = \log(x+y), \quad P = (1,1) \tag{14}$$

Risoluzione: La funzione è differenziabile nell' insieme dei punti $\{(x,y) \text{ t.c. } x+y>0\}$. In tale insieme $\nabla f = (\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y})$, $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$f(x,y) = \exp(x+y), \quad P = O \tag{15}$$

la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$. $\nabla f = (\exp(x+y), \exp(x+y))$, $\nabla f(O) = (1,1)$.