Esercizi vari

Alberto Carraro

December 20, 2009

Esercizio 1. *Si consideri l'alfabeto di tre simboli $L = \{a, b, c\}$ e sia L^* l'insieme di tutte le stringhe finite costruite sull'alfabeto L. Definire induttivamente una funzione $|\_| : L^* \to \mathbb{N}$ tale che $|s|$ sia la lunghezza della stringa $s \in L^*$.*

Soluzione 1. *Indichiamo con ε la stringa vuota. Le lettere $s, s', \cdots$ variano sull'insieme L^*, mentre $l, l', \cdots$ variano su L. Poniamo induttivamente:*

- $|\varepsilon| = 0$
- $|ls| = 1 + |s|$

Esercizio 2. *Si considerino gli alfabeti di tre simboli $N = \{0, 1, 2\}$ e $L = \{a, b, c\}$. Definire induttivamente una funzione biiettiva $f : L^* \to N^*$.*

Soluzione 2. *Indichiamo con ε la stringa vuota. Le lettere $s, s', r, r' \cdots$ variano sull'insieme L^*, mentre $l, l', \cdots$ variano su L. Le lettere $t, t', \cdots$ variano sull'insieme N^*, mentre $n, n', \cdots$ variano su N. Usiamo la notazione $|t|$ per indicare anche la lunghezza di una stringa $t \in N^*$. Poniamo induttivamente:*

- $f(\varepsilon) = \varepsilon$
- $f(ls) = \begin{cases} 0f(s) & \textit{se } l = a \\ 1f(s) & \textit{se } l = b \\ 2f(s) & \textit{se } l = c \end{cases}$

Come prima cosa osserviamo che $|s| = |f(s)|$ per ogni $s \in L^*$. Quindi se $|s| \neq |s'|$ allora $f(s) \neq f(s')$. Questo vuol dire che per mostrare l'iniettività di f basta controllare che

$$\textit{per ogni } s, s' \textit{ tali che } |s| = |s'| \textit{ se } s \neq s' \textit{ allora } f(s) \neq f(s')$$

Inoltre osserviamo che $f(ls) = f(l)f(s)$, per ogni $l \in L$ ed $s \in L^*$. Procediamo per induzione sulla lunghezza delle stringhe. Il caso base è immediato dato che ε è la sola stringa di lunghezza 0 e $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Supponiamo ora che $s, s' \in L^*$ siano tali che $s \neq s'$ e $|s| = |s'| = k + 1$ e che f mappi in maniera iniettiva tutte le stringhe di lunghezza fino a k. Essendo di lunghezza $k + 1$, avremo che $s = lr$ e $s' = l'r'$, per qualche $l, l' \in L$ e $r, r' \in L^*$. Abbiamo quindi

$$f(s) = f(lr) = f(l)f(r) \textit{ e } f(s') = f(l'r') = f(l')f(r')$$

Abbiamo quindi due casi:

$l = l'$: *In questo caso si deve avere $r \neq r'$. Quindi*

$$\begin{array}{rcl} f(s) & = & f(l)f(r) \\ & \neq & f(l)f(r') \textit{ per l'ipotesi induttiva,} \\ & = & f(s') \end{array}$$

$l \neq l'$: *In questo caso chiaramente $f(s) = f(l)f(r) \neq f(l')f(r') = f(s')$, poiché $f(l) \neq f(l')$.*