Cose da ricordare di Ricerca Operativa

(minchia che materia inutile)

Disclaimer: Questi appunti non sostituiscono un bel niente, bisogna studiare, seguire in classe, fustigarsi eccetera. Però nell'eventualità è utile ripassare certe cose su questi appunti, che comunque vanno integrati molto e rivisti.

Forma standard	**Forma canonica**	**Forma canonica**
max cx $Ax = b$ $x \geq 0$	max cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min cx $Ax \geq b$ $x \geq 0$
Utile per il simplesso	Utili per il duale	

Produzione	**Dieta**	**Trasporto**
max cx $Ax \leq b$ $x \geq 0$	min cx $Ax \geq b$ $x \geq 0$	min CX? ...
Ditta che vuole vendere vari tipi di biciclette, che impiegano risorse di diverso tipo. L'imprenditore vuole massimizzare la vendita pur essendo vincolato dalle risorse. - c è il prezzo di vendita delle singole risorse - x sono le singole risorse - A è la matrice risorse/prodotto (I riga indica le risorse per produrre il prod. di tipo 1). - b è la quantita di risorse disponibile.	Si vuole costruire una dieta alimentare minimizzando i costi dei cibi pur avendo i vincoli di requisiti minimi dell'organismo per ogni nutriente. - c è il costo dei singoli alimenti - x sono le quantità dei singoli alimenti - A è la matrice alimenti/ fattori nutritivi (I riga le quantità di un certo fattore nutritivo nei vari alimenti). - b è il minimo quantitativo di un certo fattore nutritivo.	Ditta che produce merce e deve trasportarla alla destinazione attraverso varie strade, si vuole minimizzare il costo totale rispetando le consegne. - C è la matrice dei costi dei vari trasporti di una quantità unitaria di merce da una partenza i ad un arrivo j - X è la matrice che indica quante unità portare da i a j - a è il vettore delle unità distribuite alla partenza, b delle unità richieste all'arrivo.

Algoritmo del simplesso

1. Portare il problema in forma standard:
    a. Ricordarsi di mettere max(...) in funzione obiettivo. Variabili slack/surplus hanno coefficiente pari a 0.
    b. Inserire variabili slack (s_1, s_2, s_3, ...) nei vari vincoli di $\leq$ per renderli d'uguaglianza (surplus per i vincoli di $\geq$).
2. Preparazione tabella:

max cx $Ax = b$ $x \geq 0$	A	slack	b
	c	0...0	0

    slack è una matrice diagonale identica indicante i coefficienti delle slack.
3. Itero il metodo del simplesso finché la parte di riga c non diventa 0...0:
    a. Scelgo il maggiore dei coefficienti di c per annullarlo, individuo tale colonna k
    b. Scelgo il pivot, cioè considero la colonna k e prendo a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, ... cioè gli elementi della colonna sopra il maggiore dei coefficienti scelti nel punto a. Eseguo le divisioni b_1/a_{1k}, b_2/a_{2k},... e considero b_h/a_{hk} la divisione che dà risultato minore. Il mio pivot sarà in posizione h,k.

c. Divido tutti gli elementi della riga del pivot (riga h) per il pivot stesso, in modo da ottenere 1 al posto del pivot. Ottengo così una riga h^I.
d. Rendo 0 tutti gli altri elementi nella colonna del pivot (colonna k) sommando a ciascuna riga un multiplo della riga h^I. Multiplo significa che moltiplico h^I per un qualsiasi reale in modo da ottenere 0 nella colonna del pivot.

4. Nell'ultima cella in basso a destra avrò il valore di z*. Poi avrò in c tutti zeri per il punto 3, e sopra questi zeri, colonne di zeri e un 1. Per sapere qual'è x ottimo, prendo la prima colonna e vedo in che riga è scritto l'1. Se è in riga s-esima, vado a controllare il valore di b_s. Questa è la coordinata x dell'ottimo.

Spiegazione geometrica:

Parto dall'origine in cui x e y valgono 0 e le slack hanno valore positivo, il gradiente mi dirige più verso Nord o verso Est a seconda della sua direzione. Ammettiamo mi sposti verso Nord nell'incrocio tra l'asse y e il I vincolo, qui ho x=0 y>0 s_1=0 s_2, s_3>0. Così via fino a spostarmi nel vertice che mi rende ottima la funzione obbiettivo.

Richiami di algebra lineare

- Due vettori <u>x</u> e <u>y</u> sono linearmente dipendenti se giacciono sulla stessa retta, cioè se <u>y</u>=a*<u>x</u>.
- Una **Base** è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale con meno elementi possibile.
  Es. {(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)} è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
- Una matrice contiene almeno due vettori linearmente dipendenti se ha determinante 0, con operazioni elementari (riduzioni di gauss) si può ottenere una riga/colonna tutta di zeri.
- **Rango di una matrice** 5x7: Ammettiamo che tutte le sottomatrici 5x5 abbiano determinante 0, se esiste almeno una matrice 4x4 con determinante ≠ 0, allora la matrice ha rango 4.
  Per contare il numero di sottomatrici si usa il calcolo combinatorio, infatti le sottomatrici 5x5 in una 5x7 sono $\binom{7}{5} = \frac{7*6}{2}$. Perciò il rango altro non è che il numero massimo dei vettori (riga oppure colonna) linearmente indipendenti.
- Un sistema lineare può ammettere una, nessuna o infinite soluzioni. Per discuterle si utilizza il teo. di Rouché-Capelli, per trovarle (risolvere il sistema) si usa la regola di Cramer (se il sistema ha matrice quadrata) oppure la tecnica di Gauβ.
- **Teorema Rouché-Capelli**: Un sistema A<u>x</u>=<u>b</u> ha matrice incompleta A e matrice completa A|<u>b</u>.
  Tale sistema ammette soluzione ⇔ rango(A)=rango(A|<u>b</u>).
  Cioè la colonna delle b deve essere ottenibile mediante una combinazione lineare delle colonne di A, cioè deve essere linearmente dipendente dai vettori di A.
  Corollario: Un sistema omogeneo (<u>b</u>=vettore nullo) ammette sempre soluzione (soluzione è il vettore nullo perché A<u>x</u>=<u>0</u> ⇒ <u>x</u>=<u>0</u>).
- **Regola di Cramer** su una matrice A di dimensioni 3x3: sia A|<u>b</u> la matrice completa di dimensioni 4x3.
  Chiamo A^1 la matrice A dove al posto della prima colonna vi sostinuisco <u>b</u>, A^2 la matrice dove al posto della seconda colonna vi sostituisco b, e così via.
  Le soluzioni del sistema sono:
  $$x = \frac{\det(A^1)}{\det(A)}; \quad y = \frac{\det(A^2)}{\det(A)}; \quad z = \frac{\det(A^3)}{\det(A)}.$$
- **Tecnica di Gauβ o del "Pivot"**: Dato un sistema A<u>x</u>=<u>b</u> con matrice incompleta A, e completa A|<u>b</u>, scrivo la matrice completa, posso ridurla in a matrice associata ad un sistema equivalente (con la stessa soluzione) mediante tre tipi di operazioni:
  1. Moltiplicazione di una riga per una costante k∈ℝ

2. Scambio di due righe
3. Somma di due righe (date due righe, scrivo la somma di due righe e una delle due righe a piacere).

Componendo questi tre tipi di operazioni si ridurrà il più possibile il sistema nella forma “a gradini” cioè con la diagonale (1,1 , 2,2 , 3,3 , ... , n,n) con tutti 1 e a sinistra degli 1 tutti 0, ad esempio in una matrice di questo tipo:

$$\left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

Una volta compiuta questa semplificazione è molto più semplice vedere la soluzione. Riprendendo la matrice qui sopra, sapendo che le componen ti di un vettore sono x,y,z,u,v:
Per forza di cose ricaviamo queste tre equazioni y=1, v+z=2, 2v+z+x=3. Di u non possiamo dire nulla, può valere quanto ci pare, perciò è incognito.
Se vogliamo possiamo scegliere una componente a caso come variabile, ad esempio z, ed esplicitare le altre componenti in z. Poi possiamo scrivere tutte le infinite soluzioni come combinazione lineare di vettori usando come incognite u e z.
y=1 , v=2-z , x=3-z-2(2-z)=z-1.

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-1 \\ 1 \\ z \\ u \\ 2-z \end{vmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

- Definizione e calcolo della **matrice inversa**: data la matrice quadrata A (non singolare, cioè con det(A)≠0), sappiamo che $A^{-1}xA=1$ (dove 1 indica la matrice identica). A^{-1} è detta matrice inversa sinistra. Data una matrice inversa A^{-1}, è semplice calcolare un sistema come A<u>x</u>=<u>b</u>: <u>x</u> = (A^{-1})<u>b</u>.
Si calcola la matrice C dei complementi algebrici di A, cioè in posizione 1,1 avrò il determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando la colonna 1 e la riga 1. In posizione 2,1 avrò il determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando la colonna 2 e la riga 1 però con segno opposto, rispettando i segni, in posizioni pari segno + e in posizione dispari segno -, come nella matrice dei segni qui sotto:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

La matrice inversa corrisponde al reciproco del determinante di A per la trasposta della matrice C appena calcolata.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * C^t$$

- Quante **soluzioni di base** ha un sistema? Prendo la matrice A associata al sistema che per il teorema di Rouché-Capelli ha almeno una soluzione, verifico quante sottomatrici di rango identico al rango di A hanno determinante non nullo. Ad esempio, se vedo che ho una matrice 4x3 e vedo che i primi due vettori sono linearmente dipendenti, ho due soluzioni di base, cioè ponendo il primo vettore a zero oppure il secondo, in questo modo ottengo due matrici di rango 3 con determinante non nullo.

Algebra lineare applicata alla programmazione lineare

La regione ammissibile è un insieme convesso i cui vertici corrispondono alle soluzioni di base (dimostrato).

Teorema fondamentale della programmazione lineare: dato un problema in forma standard,

- Se esistono soluzioni ammissibili ⇒ esistono anche soluzioni di base ammissibili.
- Se esistono soluzioni ottime ⇒ esistono anche soluzioni di base ottime.

Interpretazione geometrica del teorema:

- Se la regione ammissibile non è vuota ⇒ c'è almeno un vertice.
- Se c'è un ottimo ⇒ basta cercarlo tra i vertici.

Tecnica di *penalizzazione* nel simplesso

Inserisco in ogni vincolo una variabile artificiale a_1, a_2, a_3, ...
Nella funzione obbiettivo inserisco queste nuove variabili artificiali moltiplicate per un numero negativo molto grande, detto coefficiente di penalizzazione, ad esempio $-1000a_1$ $-1000a_2$ $-1000a_3$ ...
Risolvo normalmente con l'algoritmo del simplesso.

Metodo delle *due fasi*

Il metodo delle due fasi consiste nell'aggiungere sempre una variabile artificiale per ogni vincolo e usare come funzione obbiettivo il minimo della somma delle variabili artificiali. Applico poi il metodo del simplesso per portare fuori base le colonne delle variabili sintetiche e in base altrettante colonne iniziali. Elimino la parte della tabella contenente le colonne delle variabili artificiali (compreso quel pezzo di funzione obbiettivo). In questa prima fase ho trovato una soluzione di base. Riscrivo la funzione obbiettivo con i segni cambiati nell'ultima riga e procedo ad applicare il metodo del simplesso (seconda fase).

Questo metodo è utile per risolvere problemi con molti vincoli di tipo ≤ perché invece che adoperare variabili artificiali apposite sfrutto le variabili slack.

Degenerazione: capita quando 3 o più vincoli si incrociano sullo stesso punto, nell'algoritmo del simplesso, se la funzione obbiettivo non cambia valore in qualche passaggio, allora siamo incorsi in una soluzione di base degenere.

Dualità

Grazie alla formulazione della dualità si possono risolvere i problemi di p.l. in modo più agevole.

Ogni problema di programmazione lineare ha associato un duale, per calcolarlo conviene impostare il problema in forma standard.

- La funzione obbiettivo cambia segno (max->min e min->max)
- I vincoli diventano variabili (e le variabili vincoli)

Ecco come un problema cambia:

$$\begin{array}{c} \max \underline{c}\,\underline{x} \\ A\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \min \underline{y}\,\underline{b} \\ \underline{y}A \geq \underline{c} \\ \underline{y} \geq \underline{0} \end{array}$$

Ecco invece le regole per trasformare funzione obbiettivo, vincoli e variabili:

	Primale	Duale	
Funzione Obiettivo	max min	min max	**Funzione Obiettivo**
Vincoli	$\leq$ $\geq$ $=$	≥ 0 ≤ 0 Libere	**Variabili**
Variabili	≥ 0 ≤ 0 Libere	$\geq$ $\leq$ $=$	**Vincoli**

Duale dei problemi di produzione, dieta e trasporto

Duale Produzione: Si immagini di vendere tutte le risorse giacenti in magazzino, si vuole minimizzare il prezzo d'acquisto, il venditore pone dei vincoli all'acquirente, cioè che il prezzo di vendita delle risorse sia maggiore della vendita del prodotto stesso (altrimenti gli converrebbe vendere il prodotto).

Duale Dieta: Si immagini di vendere pastiglie sostituitive ai cibi, si vuole massimizzare la vendita delle pastiglie, pur avendo dei vincoli "di mercato" che una pastiglia che sostituisce un certo fattore nutriente convenga economicamente di più dell'alimento (altrimenti la gente comprerà l'alimento).

Duale Trasporto: Si immagini di essere una ditta di trasporti che propone un contratto (il cui prezzo di vendita va massimizzato) che però abbia i vincoli che costi di meno ad un contraente piuttosto che questo gestisca da solo l'aspetto logistico.

Minpath: Problema di teoria dei grafi, dato un grafo, qual è il percorso minimo tra i vari nodi?
In programmazione lineare si può risolvere questo problema immaginando di iniettare una quantità unitaria di liquido nella sorgente del grafo e ponendo come vincoli che in ogni nodo entra ed esca la stessa quantità di liquido, ponendo come variabili le quantità di liquido passanti per ogni arco. Si minimizzi la quantità passante per ogni arco moltiplicata per il costo di passaggio per quell'arco.

Duale Minpath: Si immagini di rappresentare il grafo in modo fisico con spago e nodi. Tirando ai due capi della sorgente e uscita, si massimizza la lunghezza del cammino minimo pur essendo vincolati da esso.

Teorema fondamentale della dualità (sancisce il legame tra primale e duale):

Siano P e D due problemi (primale e rispettivo duale),

- sia P che D hanno soluzione ammissibile ⇒ P e D hanno soluzione ottima e il valore nella funzione obbiettivo coincide.

  Cioè R.A. $\neq \emptyset$ (sia in P che in D) $\Rightarrow \exists x_P^*$ e $\exists x_D^*$ e $z_P^* = z_D^*$.
  ($z_P^* = z_D^*$ è utile per verificare la correttezza dei problemi di p.l.)

- Se P ha ottimo infinito ⇒ D non ha soluzione.
  Cioè $z_P^* = \infty \Rightarrow$ R.A.$= \emptyset$

Corollario e proprietà varie (dimostrate)

- ∃ $\underline{x}$, $\underline{y}$ soluzioni ammissibili ⇔ ∃ $\underline{x}^*$, $\underline{y}^*$ e $\underline{c}\ \underline{x}^*=\underline{y}^*\underline{b}$
- ∀ x, y soluzioni ammissibili ⇒ $\underline{c}\ \underline{x} \leq \underline{y}\ \underline{b}$ (basta moltiplicare a sx $\underline{y}$ nei vincoli P e a dx $\underline{x}$ nei vincoli D e poi eguagliarli)
- ∃ $\underline{x}$, $\underline{y}$ soluzioni ammissibili e $\underline{c}\ \underline{x} = \underline{y}\ \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = \underline{x}^*$ e $\underline{y} = \underline{y}^*$
- P ha ottimo finito ⇒ D ha ottimo finito
- Se R.A. = ∅ in P ⇒ (R.A. = ∅ anche in D) oppure ($z_D^*=\infty$)

Condizioni di complementarietà

Le condizioni di complementarietà servono a risolvere un problema con il metodo del simplesso, ecco le generiche condizioni di complementarietà dei vincoli i-esimo e j-esimo:

$$y_i\ (a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - b_i) = 0 \qquad\qquad x_j\ (a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m - c_j) = 0$$

In concreto:
- un vincolo a non è attivo* in P ⇔ a = 0 in D
- ho una soluzione $\underline{x}^* \neq 0$ in P ⇔ il vincolo x nel D è d'uguaglianza

*Un **vincolo è attivo** se tocca la R.A. e tocca il punto (o i punti) di ottimo. Cioè se sostituendo nel vincolo stesso la soluzione ottima (es. $\underline{x}^*$ e $\underline{y}^*$) ottengo 0.
Viceversa non è attivo quando non tocca la R.A. o se non partecipa all'ottimo. Cioè se sostituendovi la soluzione ottima non ottengo 0.

Teorema:
$\underline{x} = \underline{x}^*$ e $\underline{y} = \underline{y}^*$ ⇔ valgono le condizioni di complementarietà.

Interpretazione nel problema di produzione: un vincolo che non contribuisce all'ottimo è per esempio una risorsa abbondante in magazzino, sono limitato dalle altre risorse ma non da questa. Nel duale questa variabile vale 0 perché da quanta ne ho, potrei benissimo regalarla per liberarmene.

Altre nozioni teoriche

- Un insieme si dice **convesso** se per ogni coppia di elementi (x,y), tutti i punti compresi nel segmento xy ne fanno parte:
  (x,y)∈I e ax+(1-a)y∈I con 0≤a≤1.
- Si dice **vertice** di un insieme convesso, un punto che non è interno a nessun segmento tutto contenuto nell'insieme.
- La regione ammissibile di un problema di PL è un insieme convesso (dimostrato).