Calcolabilità e linguaggi formali
Compito con soluzione2

Esercizio 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{a^n b a^m b a^n | n, m > 0\}$;
$L_2 = \{a^n b a^m b a^k | n, m, k > 0\}$;
$L_3 = \{a^n b a^{n+m} b a^m | n, m > 0\}$.

(b) Classificare le grammatiche date secondo la classificazione di Chomsky.

(c) Dire se é possibile dare un automa finito per qualcuno dei linguaggi dati.

Esercizio 2

Enunciare e dimostrare il primo teorema di Rice.

Soluzione

Un insieme $I \subseteq N$ rispetta le funzioni se

$$x \in I \wedge \phi_x = \phi_y \Rightarrow y \in I.$$

Se un insieme I rispetta le funzioni allora anche $\bar{I}$ rispetta le funzioni.
Ricordiamo che, se una funzione totale $s : N \to N$ riduce l'insieme A all'insieme B:

$$x \in A \Leftrightarrow s(x) \in B,$$

allora le proprietà negative di A si trasmettono a B, mentre le proprietà positive di B si trasmettono ad A.

Teorema. Sia $I \subseteq N$ che rispetta le funzioni. Allora valgono le seguenti condizioni:

1. I è decidibile sse $I = \emptyset$ oppure $I = N$.
2. Se $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq I$ allora I non è semidecidibile.
3. Se $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq \bar{I}$ allora $\bar{I}$ non è semidecidibile.

Prova. (1) Se $I = \emptyset$ oppure $I = N$ allora I è banalmente decidibile. Proviamo il viceversa. Supponiamo che $\emptyset \neq I \neq N$. Dall'ipotesi che I rispetta le funzioni, abbiamo due possibilità: $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq I$ oppure $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq \bar{I}$. Supponiamo, per esempio, che $\{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq I$ e scegliamo una costante $c \in \bar{I}$ (la costante c esiste perché $\bar{I}$ è non vuoto). Allora definiamo:

$$f(x, y) = \text{ if } x \in K \text{ then } \phi_c(y) \text{ else } \uparrow.$$

La funzione f è calcolabile. Possiamo quindi applicare il teorema del parametro ed ottenere una funzione calcolabile totale $s : N \to N$ tale che:

$$f(x, y) = \phi_{s(x)}(y).$$

Abbiamo

$$x \in K \Rightarrow \forall y(\phi_{s(x)}(y) = \phi_c(y)) \Rightarrow (\phi_{s(x)} = \phi_c) \Rightarrow s(x) \in \bar{I} \text{ (perché } c \in \bar{I} \text{ e } \bar{I} \text{ rispetta le funzioni).}$$

$$x \notin K \Rightarrow \forall y(\phi_{s(x)}(y) =\uparrow) \Rightarrow (\phi_{s(x)} = f_\emptyset) \Rightarrow s(x) \in I \text{ (perché } \{x : \phi_x = f_\emptyset\} \subseteq I \text{ e } I \text{ rispetta le funzioni).}$$

Quindi abbiamo ridotto K a $\bar{I}$. Ne segue che $\bar{I}$ e I non sono decidibili. Siccome $\bar{K}$ è ridotto a I. abbiamo che I non è semidecidibile, ricordando che nella riduzione le proprietà negative si trasmettono in avanti e quelle positive indietro. (2) e' già provato. In modo simile (scambiando I e $\bar{I}$) si prova (3).

Esercizio 3

Definire un programma ricorsivo che calcola la seguente funzione $f(x) = 5x$ se $x = 0$ e $f(x) = 1$ se $x \neq 0$.
Si ha a disposizione sg, $\overline{sg}$ ed il prodotto.

Soluzione

Definiamo $f(0) = 0$ (perchè quando $x = 0$ abbiamo che $5x = 0$) e $f(x+1) = 1$. Allora $g \equiv 0$ e $h \equiv P^2_{2,1}; 1$. In conclusion $f \equiv REC(g, h)$.

Esercizio 4

Si verifichi se l'insieme $I = \{x : \exists y, z(\phi_x(y) = z)\}$ e' decidibile oppure semidecidibile.
Lo stesso per il complementare.

Soluzione

Un modo alternativo per definire I: $I = \{x : \phi_x \neq f_\emptyset)\}$. I e' semidecidibile perché $x \in I$ sse P_x converge su almeno un input sse spazzando il piano Tempo$\times$Inputs troviamo un punto di convergenza.
I non e' decidibile per il primo teorema di Rice: I rispetta le funzioni perché $\phi_x = \phi_y$ implica $\phi_x \neq f_\emptyset$ sse $\phi_y \neq f_\emptyset$. I e' non vuoto perche' contiene i programmi della funzione identica. $\bar{I}$ e' non vuoto perche' contiene i programmi della funzione vuota. Allora per Rice1 I e' indecidibile e $\bar{I}$ non e' semidecidibile.