

Matematica Discreta

Secondo Compitino - AAAAA
20 dicembre 2011

Nome e Cognome:

Numero Matricola:

Giustificare ogni risposta.

Esercizio 1

Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ insiemi. Determinare quante sono

- (i) le funzioni iniettive $f : A \rightarrow B$ tali che $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$;
- (ii) le funzioni surgettivi $f : A \rightarrow B$ tali che $f(b) = f(c) = 3$;
- (iii) le funzioni $f : A \rightarrow B$ per cui $f(a) = f(b) = 1$.

Soluzione

- (i) Il numero di funzioni iniettive $f : A \rightarrow B$ che soddisfano la condizione $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$ e' pari al numero di funzioni iniettive dall'insieme $A - \{b, c\} = \{a, d, e\}$ nell'insieme $B - \{1, 3\} = \{2, 4, 5\}$. Quindi in totale sono $3! = 6$.
- (ii) Non vi sono funzioni surgettive $f : A \rightarrow B$ che soddisfano la condizione $f(b) = f(c) = 3$, perche' dobbiamo coprire i rimanenti 4 elementi di B (che sono 1, 2, 4, 5) con i rimanenti 3 elementi di A (che sono a, d, e). E questo non e' possibile.
- (iii) Supponiamo che $f(a) = f(b) = 1$. Per avere una funzione di dominio A dobbiamo determinare i valori $f(c), f(d), f(e)$. Per ciascuno di questi abbiamo 5 possibilità. Quindi in totale abbiamo $5^3 = 125$ funzioni $f : A \rightarrow B$ per cui $f(a) = f(b) = 1$.

Esercizio 2

Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si eseguono 6 estrazioni. Determinare quanti sono

- (i) gli allineamenti (con ordine) che si possono ottenere come risultato delle 6 estrazioni supponendo di rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.
- (ii) gli allineamenti (con ordine) in cui non compare il numero 10 che si possono ottenere come risultato delle 6 estrazioni supponendo di rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.
- (iii) gli allineamenti (senza ordine) che si possono ottenere come risultato delle 6 estrazioni supponendo di rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.
- (iv) gli allineamenti (senza ordine) che si possono ottenere come risultato delle 6 estrazioni supponendo di NON rimettere, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna.

Soluzione

- (i) $D'_{10,6} = 10^6$. Disposizioni con ripetizione
- (ii) $D'_{9,6} = 9^6$. Disposizioni con ripetizione
- (iii) $C'_{10,6} = (10 + 6 - 1 \text{ su } 6) = 15!/6! \times 9!$. Combinazioni con ripetizione
- (iv) $C_{10,6} = (10 \text{ su } 6) = 10!/6! \times 4!$. Combinazioni semplici

Esercizio 3

Si determini qual e' il resto della divisione di $(512)^{99}$ per 7.

Soluzione

$512 = 2^9 = (2^3)^3 = (7+1)^3 \equiv 1^3 = 1$ modulo 7. Quindi $(512)^{99} = 1^{99} = 1$.

Esercizio 4

Si determinino x e y , se esistono, tali che $6x + 47y = 1$. Perché non esistono x e y tali che $6x + 48y = 1$?

Soluzione

6 e 47 sono coprimi, quindi esistono x e y tali che $6x + 47y = 1$. Questi due numeri interi si ottengono applicando l'algoritmo di Euclide per calcolare il MCD. In questo caso si ottengono facilmente anche senza applicare l'algoritmo di Euclide: $6 \times 8 + 47 \times (-1) = 1$.

Non esistono x e y tali che $6x + 48y = 1$, perché 6 e 48 non sono coprimi. 2 divide entrambi i numeri.