[Testo degli esami]

Esame 27 Gennaio AA

Esrcizio 1
A$\underline{x}$ = $\underline{b}$ con $A = (m * n)$ e $m < n$ e $rango\ m$
Definizione di soluzione di base

Quanto sopra, implica che la matrice A abbia più gruppi di m colonne **linearmente indipendenti**, scegliendo **un** gruppo di queste colonne, si crea la matrice B, ponendo a 0 tutte le altre componenti, riesco a risolvere il sistema ottenuto $(m * m)$, una volta risolto trovo **una** soluzione di base (possono esserci più soluzioni di base, nel caso ci siano altri gruppi di m linearmente indipendenti).
Le m componenti di $\underline{x}$ corrispondenti alle colonne di B sono dette componenti di base, le altre sono fuori base. Nel caso in cui una o più componenti di $\underline{x}$ in base siano nulle, la soluzione di base è detta degenere

Esempio:

$$2x + 3y + 4w = 7$$
$$x - y + 3w = -1$$

Ho 3 coppie di vettori linearmente indipendenti, (x,y)(x,w)(y,w), ne scelgo 1 ad esempio (x,y) e pongo a 0 le altre

$$2x + 3y = 7$$
$$x - y = -1$$

Risolvo, trovando la soluzione di base

$$x = 4/5,\ y = 9/5,\ w = 0$$

Esercizio 2

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato si considerino due vettori, **x** e **w**, soluzioni ammissibili per un PL in forma standard. Occorre provare che anche la generica combinazione lineare convessa **y** = a**x**+(1-a)**w** è soluzione ammissibile per lo stesso PL. In effetti, per il modo come è costruito, il vettore **y** soddisfa i vincoli di non negatività (come **x** e **w**); inoltre, poiché da A**x**=**b**, segue anche aA**x** = a**b** e da A**w** = **b** segue anche (1-a)A**w** = (1-a)**b**, sommando a membro a membro si ottiene:

a A**x+**(1-a)A **w** = A**y** = a**b**+(1-a)**b** = **b**,

cioè anche **y** è soluzione ammissibile.

Le implicazioni di tale teorema sono notevoli: la regione ammissibile non può essere costituita da due o più sottoregioni disgiunte. Se si tratta di un insieme limitato, assume l'aspetto di un poliedro convesso (in due dimensioni, si ha un poligono convesso).

Esercizio 3

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+4y-2z=9 \end{cases}$$

Svolgimento 1° fase: Avremo una funzione obiettivo Min (q1+q2) oppure Max (-q1 - q2) , con vincoli pari a

$$\begin{cases} 2x+y+z+q1=4 \\ x+4y-2z+q2=9 \end{cases}$$

Svilupperemo il problema con il metodo del simplesso

2	1	1	1	0	4
1	4	-2	0	1	9
0	0	0	1	1	0

--> (III - II) and (III - I)

2	1	1	1	0	4
1	4	-2	0	1	9
-3	-5	1	0	0	-13

--->il Pivot sarà 4 [4/1 9/4]

2	1	1	1	0	4
1	$\boxed{4}$	-2	0	1	9
0	0	0	1	1	0

---> moltiplico tutta la II° riga per ¼ probabilmente qui sopra l'ultima riga è -3 -5 1 0 0 -13

2	1	1	1	0	4
1/4	1	-1/2	0	1/4	9/4
-3	-5	1	0	0	-13

---> (I - II) and (III + 5II) sotto nella cella in basso a destra non è -7/4?

$\boxed{7/4}$	0	3/2	1	-1/4	7/4
1/4	1	-1/2	0	1/4	9/4
-7/4	0	3/2	0	5/4	7/4

---> il pivoto sarà 7/4 (7/4 / 7/4 9/4 / ¼)

1	0	12/14	4/7	-1/7	1
1/4	1	-1/2	0	1/4	9/4
-7/4	0	-3/2	0	5/4	7/4

---> (II - ¼ I) and (III + 7/4 I)

1	0	12/14	4/7	-1/7	1
0	1	-5/7	-1/7	2/7	2
0	0	0	1	1	0

2°Fase:
Non sarà necessaria poichè chiedeva solo una soluzione ammissibile
In ogni caso avessimo dovuto continuare sarebbe stata impostata così la seconda fase

1	0	12/14	1
0	1	-5/7	2
0	0	0	0

---> ho mandato una mail a Mason poichè mancando la funzione obiettivo all'inizio , non so se è giusto mettere nell'ultima riga tutti 0 , visto che li sarebbero andati i valori della funzione obiettivo
Se mi risponde vi dico e aggiorno

Esercizio 4

$$max\ (kx + y)$$

$$y - x \le 3$$

$$y + x \le 9$$

$$3y + x \ge 9$$

$$x, y \ge 0$$

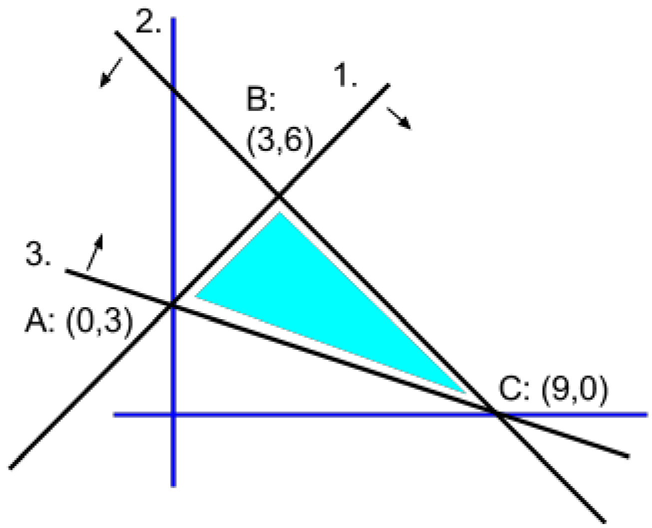
Rette:

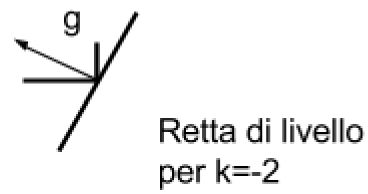
$y = 3 + x$ 1.

$y = 9 - x$ 2.

$y = 3 - 1/3x$ 3.

Disegno la Regione ammissibile





Per $k = -2$ il punto di max è A

Esercizio 5

Possiamo escludere la retta 3. xkè essendo un porblema di max e essendo y sempre positivo, le g vanno verso l'alto, quindi nel caso la retta di livello sia parallela alla retta 3. il max sarà cmq altrove (precisamente in B)

Quindi valutiamo le rette 1. e 2. e i punti A, B, C

$1. \Rightarrow m1 = 1$; $2. \Rightarrow m2 = -1$

però $kx + y = 0 \Rightarrow y = -kx$ essendo k negativo, devo invertire anche gli m

$1. \Rightarrow m1 = -1$; $2. \Rightarrow m2 = 1$

Quindi:

. $k < -1$ l'ottimo è nel punto A

. $k = -1$ infinite soluzioni ottime nel segmento AB

. $-1 < k < 1$ l'ottimo è nel punto B

. $k = 1$ infinite soluzioni ottime nel segmento BC

. $k > 1$ l'ottimo è nel punto C

Questo è quello che stavamo facendo in classe col Poss, dove lui diceva di togliere la retta che inizialmente non contribuiva al max, quindi la 2, come potete notare dalla mia soluzione non è corretto, almeno da quanto ho capito io, poi se il prof lo ha spiegato diversamente, fatemelo sapere… STAY TUNED :P

Esame del 27 Gennaio AB

Esercizio 1

Considerando una matrice mxn, il rango è il più alto valore m'<=m per cui almeno una sottomatrice m'*m' ha determinante = 0

in una matrice mxn una soluzione ammissibile si trova quando si hanno m colonne linearmente indipendenti, ciò implica che la matrice mxm deve avere determinante = 0, perchè ciò sia possibile e per la definizione di rango, il rango della matrice deve essere esattamente m, viceversa il sistema non avrà soluzioni di base ammissibili

Ricapitolando

A=mxn e rango=m => almeno una soluzione ammissibile

A=mxn e rango<m => nessiuna soluzione ammissibile

Esercizio 2

Dimostrazione. Occorre dimostrare, da un lato, che dato un vertice della Regione Ammissibile esso corrisponde ad una soluzione di base ammissibile, d'altra parte che data una soluzione di base (ammissibile) essa corrisponde ad un vertice di RA. Entrambe le dimostrazioni procedono per assurdo.

Vertice RA => Soluione Ammissibile

Per quanto riguarda la prima parte, sia **x** un vettore soluzione ammissibile corrispondente ad un vertice e supponiamo che abbia k (<=n) componenti strettamente positive e supponiamo anche, per comodità, che si tratti delle prime k. Ciò significa che vale l'eguaglianza

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

dove i k vettori $\mathbf{a}_j$ (j=1, 2, …, k) costituiscono le prime k colonne di A. Affermare che **x** è una soluzione di base equivale ad affermare che i k vettori colonna in questione sono linearmente indipendenti. In effetti, se per assurdo questi vettori fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbe una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + y_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Se diciamo allora **y** il vettore (n-dimensionale)

$$\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_k \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0),$$

prendendo un numero e > 0 sufficientemente piccolo, i due vettori **p** = **x** - e **y** e **q** = **x** + e **y** risulterebbero soluzioni ammissibili - differenti dal vettore **x -** (è pressoché banale verificare che hanno componenti non negative e risolvono il sistema A **x** = **b**; d'altra parte qualche componente di **y** è strettamente diversa da zero quindi **p** e **q** non possono coincidere con **x**): **x** sarebbe a questo punto una loro combinazione lineare convessa ($\mathbf{x}$ = ½ $\mathbf{p}$ + ½ $\mathbf{q}$) e quindi il punto di mezzo del segmento che congiunge i due punti ammissibili **p** e **q**, contro l'ipotesi che **x** sia un vertice. Pertanto non è possibile che i k vettori colonna $\mathbf{a}_j$, (j=1, 2, …, k) siano linearmente dipendenti: essi viceversa sono linearmente indipendenti e quindi **x** è una soluzione di base.

Soluione Ammissibile => Vertice RA

Per dimostrare la seconda parte procediamo ancora per assurdo. Consideriamo allora una soluzione di base ammissibile **x** e supponiamo che essa sia combinazione convessa di altri due vettori, anch'essi ammissibili, **y** e **w**: $\mathbf{x} = a\,\mathbf{y} + (1\text{-}a)\,\mathbf{w}$. Si vedrà, in realtà, che ciò non è possibile e che questi due vettori devono forzatamente coincidere con **x**. Supponiamo, per comodità, che le componenti di **x** fuori base, e pertanto nulle, siano le ultime n-m. Si può allora scrivere il seguente insieme di eguaglianze:

$$x_1 = a\,y_1 + (1\text{-}a)\,w_1;\; x_2 = a\,y_2 + (1\text{-}a)\,w_2;\; \dots\;;\; x_m = a\,y_m + (1\text{-}a)\,w_m;$$
$$0 = x_{m+1} = a\,y_{m+1} + (1\text{-}a)\,w_{m+1};\; \dots.\;;\; 0 = x_n = a\,y_n + (1\text{-}a)\,w_n.$$

Poiché **y** e **w** sono ammissibili, anche le loro ultime n-m componenti non possono che essere 0 (si osservi che altrimenti non sarebbe possibile ottenere 0 come combinazione lineare di elementi non negativi). Ma allora sia **x** sia **y** sia **w** hanno nulle le stesse ultime n-m componenti e quindi sono soluzioni (di base) corrispondenti alla stessa matrice di base: in altre parole, risolvono lo stesso sistema (quadrato), perciò devono coincidere. Se ne può concludere, come si è già detto, che è impossibile ottenere **x** come combinazione lineare convessa di vettori diversi da **x** stesso e quindi **x** è un vertice della Regione Ammissibile.

Esercizio 3

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$$

Seguendo le definizioni: $Ax=b \rightarrow A^{-1}Ax = bA^{-1} \rightarrow Ix = bA^{-1}$

3	1	-1
2	-1	1
0	1	2

1
0
2

Det= -15

A^t =

3	2	0
1	-1	1
-1	1	2

A^{d^t}=

-3	-3	0
-4	6	-5
2	-3	-5

Ricordo che la matrice A^d^t deve essere impostata così, cioè i valori devono essere + o - come di seguito

+	-	+
-	+	-
+	-	+

calcolare cella 1,1 di A^d^t:
tolgo riga 1 e colonna 1 da A^t, della restante matrice 2*2 faccio il determinante e lo metto nella cella 1,1 di A^d^t e così via

$$x = 1/15 * \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

--> = -1/5

$$y = 1/15 * \begin{bmatrix} -4 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

---> = -14/15

$$z = 1/15 * \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

---> = -8/15

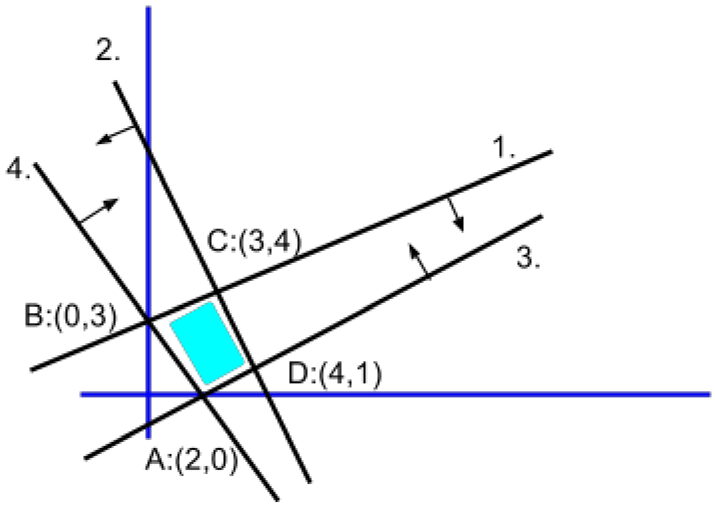
Esercizio 4

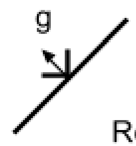
$max\ (kx + y)$

$$3y - x \leq 9$$
$$y + 3x \leq 13$$
$$2y - x \geq -2$$
$$2y + 3x \geq 6$$
$$x, y \geq 0$$

rette

$y = 3 + 1/3x$ 1.
$y = 13 - 3x$ 2.
$y = 1/2x - 1$ 3.
$y = 3 - 3/2x$ 4.





Per $k = -1$ il massimo è nel punto B, ora andremo a valutare al variare di K

Esercizio 5
Discuto k
Facendo 2 opinioni da me sono giunto a quanto segue
Anzitutto
$kx + y = 0$ => $y = -kx$ (non importa che passino per 0 o meno, andremmo a valutare le parallele, per trovare il massimo)
in questo caso il k accompagna la x, e la y è positiva, quindi andremmo a valutare il 1° e 2° quadrante del piano cartesiano (i 2 in alto, sono il I e II?, beh i 2 in alto).
Essendo la nostra retta con il k negativo, ed escludendo le y negative, avremo che:
1. per k positivi saremo nel quadrante a sinistra;
2. per k = 0 avremo la retta parallela all'asse x;
3. per k negativi saremo nel quadrante a destra.

Per trovare il massimo dovremo seguire il vettore g, cioè perpendicolare alla retta di livello (visto che il nostro è un problema di max andremo verso y positivi, creando il g con il k iniziale fornito si scopre il verso del vettore), quindi
1. dovrò seguire il verso alto destra
2. dovrò seguire il verso alto
3. dovrò seguire il verso alto sinistra

e trovare l'ultimo punto/i nella regione ammissibile
Escludo quindi (per quanto appena detto) il punto A e le rette che lo generano, dalla RA (non avrò mai massimo in quel punto o nei punti lungo le rette, perchè il nostro è un problema di max)
Quindi rimangono da valutare le rette $1.$ e $2.$ con corrispondenti valori $m1 = 1/3$ e $m2 = -3$ che

dovrò calcolare al negativo calcolando l'equazione della retta originale $y = -kx$ e il valore ambiguo k=0

nei punti rimasti B, C, D

Riassumendo quanto detto ottengo:

.Per $-\infty < k < -1/3$ la retta di livello avrà inclinazione tra l'asse x e la retta $1.$ quindi il massimo è nel punto C

.Per $k = -1/3$ la retta di livello è parallela alla retta $1.$ quindi ho infinite soluzioni nel segmento (B, C)

.Per $-1/3 < k < 0$ la retta di livello avrà inlcinazione tra la retta $1.$ e l'asse y, quindi il massimo è nel punto B

.Per $k = 0$ la retta di livello è parallela all'asse x, quindi il punto massimo è C

.Per $0 < k < 3$ la retta di livello avrà inclinazione tra l'asse y e la retta $2.$ quindi il massimo è nel punto D

.Per $k = 3$ la retta di livello è parallela alla retta $2.$ quindi ho infinite soluzioni nel segmento (C, D)

.Per $3 < k < \infty$ la retta di livello avrà inclinazione tra e la retta $2.$ e l'asse delle x quindi il massimo è nel punto C

ho confuso il vettore g con la retta di livello, invertendo alcune cose, risistemo qui sotto

.Per $-\infty < k < -1/3$ la retta di livello avrà inclinazione tra l'asse y e la retta $1.$ quindi il massimo è nel punto B

.Per $k = -1/3$ la retta di livello è parallela alla retta $1.$ quindi ho infinite soluzioni nel segmento (B, C)

> .Per $-1/3 < k < 0$ la retta di livello avrà inlcinazione tra la retta $1.$ e l'asse x, quindi il massimo è nel punto C
>
> .Per $k = 0$ la retta di livello è parallela all'asse x, quindi il punto massimo è C
>
> .Per $0 < k < 3$ la retta di livello avrà inclinazione tra l'asse x e la retta $2.$ quindi il massimo è nel punto C

.Riassumedo gli ultimi 3 punti: Per $-1/3 < k < 3$ il massimo è nel punto C

.Per $k = 3$ la retta di livello è parallela alla retta $2.$ quindi ho infinite soluzioni nel segmento (C, D)

.Per $3 < k < \infty$ la retta di livello avrà inclinazione tra e la retta $2.$ e l'asse delle y quindi il massimo è nel punto D

Non mi tornava che tra -⅓ e 0 discostava così tanto da 0… così rivedendo l'esercizio fato insieme sono giunto a questa conclusione

Ovviamente nel compito non servirà fare tutti questi passaggi, questi sono solo per capire come io ho ragionato, e vedere se ho ragione… buttate un occhio e ditemi cosa ne pensate…

27 Gennaio AC

Esercizio 1

Un insieme di vettori si dice formato da vettori linearmente indipendenti tra loro se l'unico modo per ottenere come loro combinazione lineare il vettore 0 (nullo) è usare coefficienti pari a 0.
Se abbiamo tre vettori:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La cui matrice sarà la seguente

1	0	1
1	3	0
4	2	1

Det = 8 quindi essendo diverso da 0 , i vettori a b c sono linearmente indipendenti!

Esercizio 2

Dimostrazione. Occorre dimostrare, da un lato, che dato un vertice della Regione Ammissibile esso corrisponde ad una soluzione di base ammissibile, d'altra parte che data una soluzione di base (ammissibile) essa corrisponde ad un vertice di RA. Entrambe le dimostrazioni procedono per assurdo.

Per quanto riguarda la prima parte, sia **x** un vettore soluzione ammissibile corrispondente ad un vertice e supponiamo che abbia k (£n) componenti strettamente positive e supponiamo anche, per comodità, che si tratti delle prime k. Ciò significa che vale l'eguaglianza

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_k \mathbf{a}_k = \mathbf{b},$$

dove i k vettori $\mathbf{a}_j$ (j=1, 2, …, k) costituiscono le prime k colonne di A. Affermare che **x** è una soluzione di base equivale ad affermare che i k vettori colonna in questione sono linearmente indipendenti. In effetti, se per assurdo questi vettori fossero linearmente dipendenti, allora esisterebbe una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli

$$y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Se diciamo allora **y** il vettore (n-dimensionale)

$$\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_k \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0),$$

prendendo un numero e > 0 sufficientemente piccolo, i due vettori **p** = **x** - e **y** e **q** = **x** + e **y** risulterebbero soluzioni ammissibili - differenti dal vettore **x -** (è pressoché banale verificare che hanno componenti non negative e risolvono il sistema A **x** = **b**; d'altra parte qualche componente di **y** è strettamente diversa da zero quindi **p** e **q** non possono coincidere con **x**): **x** sarebbe a questo punto una loro combinazione lineare convessa (**x** = ½ **p** + ½ **q**) e quindi il punto di mezzo del segmento che congiunge i due punti ammissibili **p** e **q**, contro l'ipotesi che **x** sia un vertice. Pertanto non è possibile che i k vettori colonna $\mathbf{a}_j$, (j=1, 2, …, k) siano linearmente dipendenti: essi viceversa sono linearmente indipendenti e quindi **x** è una soluzione di base.

Per dimostrare la seconda parte procediamo ancora per assurdo. Consideriamo allora una soluzione di base ammissibile **x** e supponiamo che essa sia combinazione convessa di altri due vettori, anch'essi ammissibili, **y** e **w**: **x** = a **y +** (1**-**a) **w.** Si vedrà, in realtà, che ciò non è possibile e che questi due vettori devono forzatamente coincidere con **x.** Supponiamo, per comodità, che le componenti di **x** fuori base, e pertanto nulle, siano le ultime n-m. Si può allora scrivere il seguente insieme di eguaglianze:

$$x_1 = a\, y_1 + (1\text{-}a)\, w_1;\ x_2 = a\, y_2 + (1\text{-}a)\, w_2;\ \dots;\ x_m = a\, y_m + (1\text{-}a)\, w_m;$$
$$0 = x_{m+1} = a\, y_{m+1} + (1\text{-}a)\, w_{m+1};\ \dots\ ;\ 0 = x_n = a\, y_n + (1\text{-}a)\, w_n.$$

Poiché **y** e **w** sono ammissibili, anche le loro ultime n-m componenti non possono che essere 0 (si osservi che altrimenti non sarebbe possibile ottenere 0 come combinazione lineare di elementi non negativi). Ma allora sia **x** sia **y** sia **w** hanno nulle le stesse ultime n-m componenti e quindi sono soluzioni (di base) corrispondenti alla stessa matrice di base: in altre parole, risolvono lo stesso sistema (quadrato), perciò devono coincidere. Se ne può concludere, come si è già detto, che è impossibile ottenere **x** come combinazione lineare convessa di vettori diversi da **x** stesso e quindi **x** è un vertice della Regione Ammissibile.

Esercizio 3)

Partendo da una funzione obiettivo Max ($x1 + x2 + x3$) e i vincoli:

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = b1 \\ x1 + x2 + x3 = b2 \end{cases}$$

Divideremo in due il procedimento per arrivare ad una soluzione ottima

<u>**1°fase**:</u> Introdurremo delle variabili artificiali y e quindi affronteremo un problema artificiale,

$Ax + Iy = b$
x; y 0

dove avremo come funzione obiettivo Max($-y1 - y2$) oppure Min ($y1 + y2$) , così avremo i vincoli seguenti

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 + y1 = b1 \\ x1 + x2 + x3 + y2 = b2 \end{cases}$$

Inizieremo a sviluppare applicando il metodo del simplesso

			*	*	
x1	x2	x3	1	0	b1
x1	x2	x3	0	1	b2
0	0	0	1	1	0

fino ad ottenere

*	*				
1	0	x3	y1	y2	b1
0	1	x3	y1	y2	b2
0	0	0	1	1	0

---> x1=b1 and x2=b2

Se si riuscirà a risolvere il problema della 1°fase ottenendo come ottimo Z=0, allora automaticamente le variabiloi artificiali andranno fuori base così da trovare una soluzione ammissibile formata solo da x.
Può succedere che non esista una soluzione del prob. articiale , quindi il sistema Ax = b; x>=0 non ammette soluzione: il problema originale e inammissibile!

<u>2°Fase:</u> Eliminando le colonne della variabili artificaili avremo

*	*		
1	0	x3	b1
0	1	x3	b2
-X1	-X2	-X3	0

---> dove X1,X2,X3 sono i valori della funzione obiettivo iniziale

Continuando lo svolgimento con il metodo del simplesso, alla fine dovremo ottenere

x1	1	0	b1
x1	0	1	b2
X1	0	0	Z

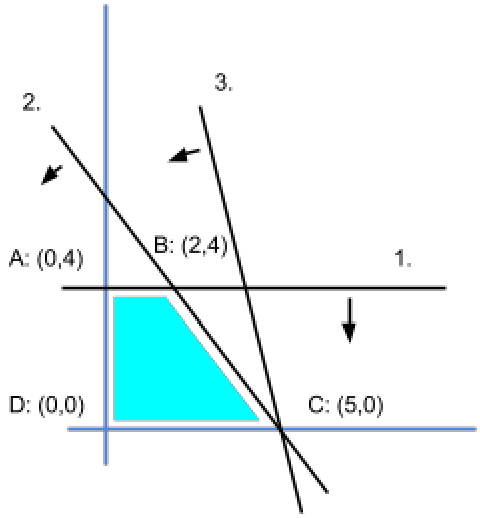
---> x1=0 x2=b1 x3=b2 sostituendo i valori appena trovati nella funzione obiettivo , dovremo ottenere lo stesso valore Z che abbiamo in tabella.

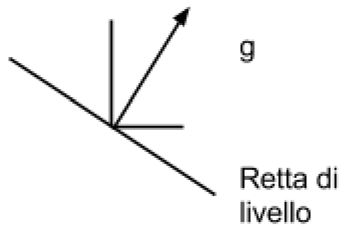
Esercizio 4

$$\max\,(2x+3y)$$
$$y<4$$
$$y+x\leq 6$$
$$y+2x\leq k$$
$$x,y\geq 0$$

rette (con k=10)

$y=4$ 1.
$y=6-x$ 2.
$y=10-2x$ 3.





per k=10 il max è in B

Esercizio 5
Discuto k
Al variare di k la retta 3 trasla lungo l'asse x, senza cambiare inclinazione (infatti l'm rimarrà sempre -2), quindi bisogna valutare cosa succede quando e dopo che incontra i punti B, A, D (vedremo poi che in realtà il punto A non sarà mai max)
per trovare i k in questi punti, devo far passare la retta 3 per tali punti ed estrapolare k, per farlo devo trovare prima il fascio di rette che passa per il punto, e poi imporre l'm della mia retta, cercate su google, cmq
. Retta passante per B e parrallela a 3. => y=8-2x quindi k=8

Attenzione!!! traslando la retta, ad un certo MOMENTO, per come è inclnata la retta di livello, il max ricadrà in un nuovo punto che si creerà nel segmento CD (quindi la nostra attenzione si sposta da BA+AD a CD), troviamo questo MOMENTO intersecando la retta di livello passante per C con l'asse y (cioè facendo attraversare alla retta di livello il segmento BA+AD, e trovare dove si interromperà la nostra attenzione per quella porzione di segmento e spostarla sull'altro CD)
la retta di livello che passa per C è $y = -2/3x + 5$
intersecandola con x=0 si trova il punto E (0,5)
la retta parallela a 3. passante per E è $y = -2x + 5$ quindi k=5

Riepilogando quanto detto:
.Per $k > 8$ la retta non pregiudica la RA, quindi il max è in B
.Per $k = 8$ il max sarebbe in B, ma visto che che coincide con lintersezione di 3 rette la sol. è degenere
.Per $5 < k < 8$ ad ogni parametro k si creerà UN nuovo punto di max nel segmento AB
.Per $0 < k < 5$ ad ogni parametro k si creerà UN nuovo punto di max nel segmento DC

.Per $k = 0$ la regione ammissibile si riduce al solo punto di max D
. Per $k < 0$ la RA è vuota

compito AD (14 Maggio 2012)

Esercizio 1) Indicare per quali valori del parametro *k* i vettori (3 1 *k*), (2 2 4), (5 -1 4) sono linearmente dipendenti.

Un insieme di vettori si dice formato da vettori linearmente dipendenti quando esiste una loro combinazione lineare uguale al vettore 0 con coefficienti non tutti uguali a 0
Avendo (3 1 k) (2 2 4) (5 -1 4) , i vettori saranno linearmente indipendenti per quale valore di K ?

3	1	k
2	2	4
5	-1	4

Det: 3[(2*4) - (-1*4)] - 1 [(2*4) - (5*4)] + k [(2*-1) - (5*2)]=0 → 12K=48 → K=4

Quindi per K=4 i vettori saranno linearmente dipendenti poichè sostituendo il 4 al K nel determinante risulterà =0

Esercizio 2

Dimostrazione. Per dimostrare l'enunciato si considerino due vettori, **x** e **w**, soluzioni ammissibili per un PL in forma standard. Occorre provare che anche la generica combinazione lineare convessa **y** = a**x**+(1-a)**w** è soluzione ammissibile per lo stesso PL. In effetti, per il modo come è costruito, il vettore **y** soddisfa i vincoli di non negatività (come **x** e **w**); inoltre, poiché da A**x**=**b**, segue anche aA**x** = a**b** e da A**w** = **b** segue anche (1-a)A**w** = (1-a)**b**, sommando a membro a membro si ottiene:

$$a\,A\mathbf{x}+(1-a)A\,\mathbf{w} = A\mathbf{y} = a\mathbf{b}+(1-a)\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

cioè anche **y** è soluzione ammissibile.

Le implicazioni di tale teorema sono notevoli: la regione ammissibile non può essere costituita da due o più sottoregioni disgiunte. Se si tratta di un insieme limitato, assume l'aspetto di un poliedro convesso (in due dimensioni, si ha un poligono convesso).

Esercizio 3

Per ogni $\underline{x}$, $\underline{y}$ ammissibili → $\underline{c}\ \underline{x} \leq \underline{y}\ \underline{b}$

[P]	[D]
max $\underline{c}\ \underline{x}$	min $\underline{y}\ \underline{b}$
$A\underline{x} \leq \underline{b}$	$\underline{y}A \geq \underline{c}$

$\underline{x} \geq 0$ $\underline{y} \geq 0$

$\underline{c}\,\underline{x} \leq \underline{y}A\underline{x} \leq \underline{y}\,\underline{b} \quad \leftrightarrow \quad \underline{c}\,\underline{x} \leq \underline{y}\,\underline{b}$

(La dimostrazione, in versione comprensibile, è/dovrebbe essere questa:

Sia dato un problema primale di massimo e un corrispondente problema duale di minimo:

max $\underline{c}\,\underline{x}$ min $\underline{y}\,\underline{b}$

$A\underline{x} \leq \underline{b}$ $\underline{y}A \geq \underline{c}$

$\underline{x} \geq 0$ $\underline{y} \geq 0$

Siano date x° e y°, soluzioni ammissibili rispettivamente al primale e duale. Ne deriva che:

$A\underline{x°} \leq \underline{b}$

$\underline{y°}A \geq \underline{c}$

Moltiplico il primo a sinistra per y°, il secondo a destra per x°:

$y°A\underline{x°} \leq y°\underline{b}$

$\underline{y°}Ax° \geq \underline{cx}° \to cx° \leq \underline{y}°Ax°$

Da cui deriva che $cx° \leq y°\underline{b}$.

Esercizio 4

$max(y-2x)$

$y+3x \geq 6$

$2y-x \leq 5$

$y+x \leq k$

$y-3x+18 \geq 0$

$x,y \geq 0$

rette

$y = 6-3x$ 1.

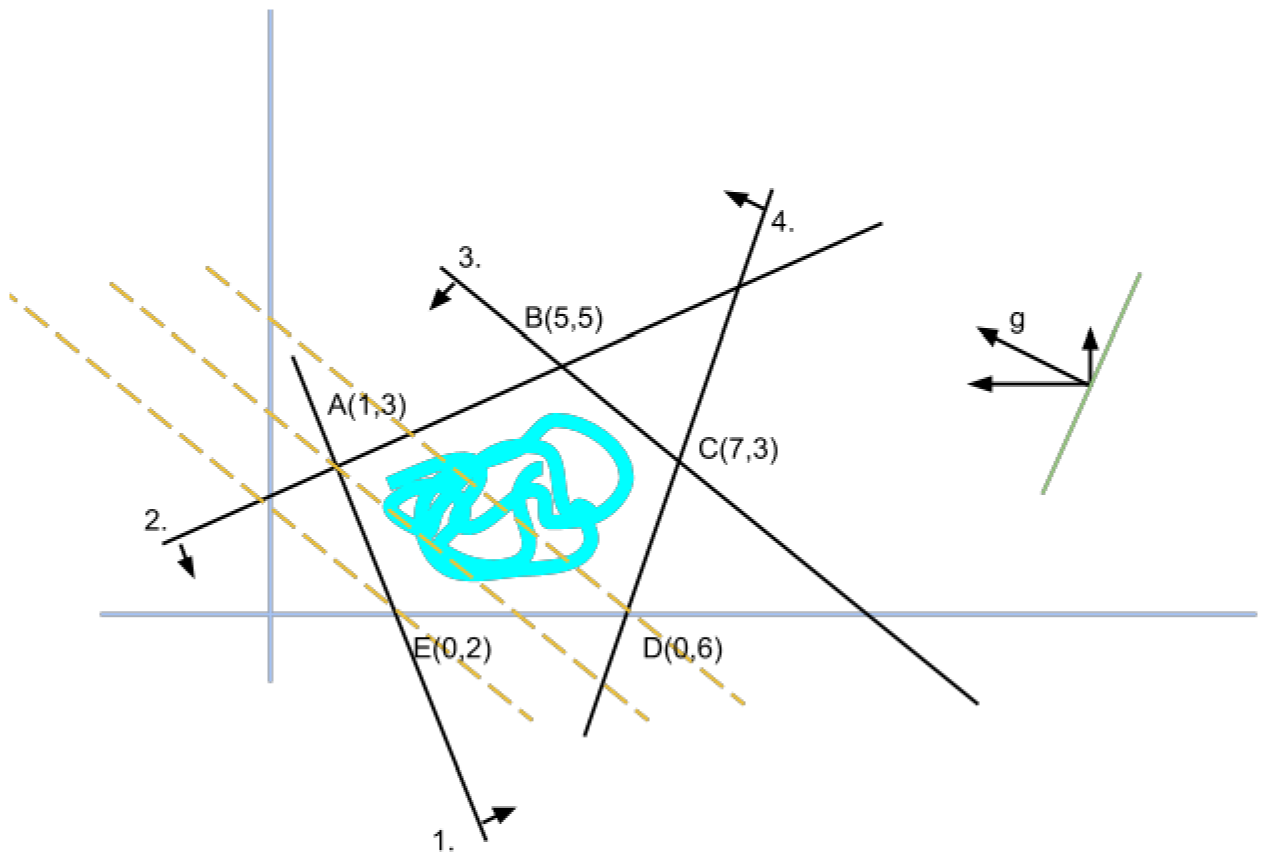
$y = 5/2+1/2x$ 2.

$y = k-x$ 3.

$y = 18+3x$ 4.

Risolvere per via geometrica con k=10

Per k=10



Per k=10, max è nel punto A

Esercizio 5

La soluzione diventa degenere quando il punto di massimo coincide con l'intersezione di 3 vincoli, questo succede per i valori di k che spostano la retta 2. tanto da farla intersecare con A (ottimo in A ma intersezione di 2., 1., 3.) o con E (RA diventa un punto, dato dall'intersezione di 1., 3., e l'asse x) nel disegno ho segnato anche l'intersezione con D, ma in quel caso l'ottimo rimane A

Ricapitolando, la solzuione è degenere per:

k=4 (retta parallela a 3. passante per A)

k=2 (retta parallela a 3. passante per E)

Riassumo come fare a trovare una retta parrallela ad un'altra (3.) e passante per un punto (A(1,3))

Fascio di rette per A

y-3=m(x-1)   formula generale -> y-y1=m(x-x1) dove (x1,y1) è un punto

sostituisco m con l'm che la rende parallela a 3. cioè l'm di 3 che è -1

y-3=-x+1

y=-x+4

ciò => k=4 (mettendo a sistema con la 3 nel primo sistema in alto)

Compito 14 Maggio 2012 (AE)

Esercizio 1

x	y	w	t	z		b
2	3	-4	5	0		1
1	1	-2	2	2		-2
-1	4	2	3	0		-5

Per trovare la/le soluzione/i di base bisognerà:

- trovare sottomatrice B (3x3) con determinante diverso da 0
- porre a 0 tutte le incognite fuori di B

Avremo

$\binom{5}{2}$ = 10 CAS

(1°,2°,3°) (1°,3°,4°) (2°,3°,4°) (2°,3°,5°) (3°,4°,5°) (1°,2°,4°)
(1°3°,5°) (2°,3°,4°) (1°,2°,5°) (1°,4°,5°) (2°,4°,5°)   [In rosso quelle NON soluzione base]

1° e 3° colonne da scartare poichè la terza colonna è il doppio della prima (Linearmente dipendenti)
1°, 2° , 4° colonne da scartare perchè 1°+2° = 4° (Linearmente dipendenti)

Esercizio 2

Primale/Duale

Max ↔ Min
Min ↔ Max

(Pvincoli - Dvariabili)
≤ ↔ ≥ 0
≥ ↔ ≤ 0
= ↔ free

(Pvariabili - Dvincoli)
≤ 0 ↔ ≤
≥ 0 ↔ ≥
free ↔ =

Facendo un esempio:

[P] Max 3x+y-2z

$$\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \begin{cases} x-y+5z <= 2 \\ 2x+4y+z=6 \\ 1/2\ x -y + 8z >=8 \end{cases}$$

x >= 0
y <= 0
z free

[D] Min 2a+6b+8c

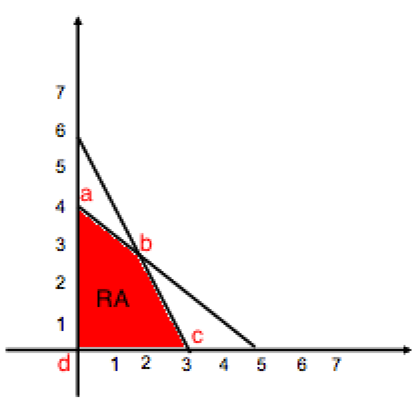
$$\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \begin{cases} a+2b+1/2c >=3 \\ -a+4b-c <= 1 \\ -5a+b+8c=-2 \end{cases}$$

a >= 0
b free
c <= 0

Quindi nel caso in cui i vincoli del primale siano uguaglianze , nel duale avremo variabili free come dimostrato nell’esempio.

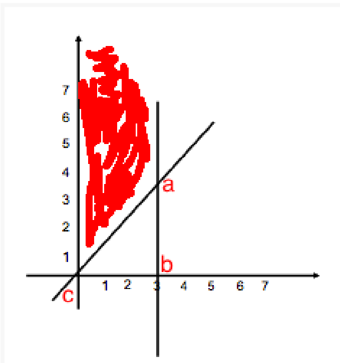
Esercizio 3

Si ha **infinite soluzioni ottime** quando ho l'ottimo su un segmento formato da due punti con stesso valore di Z (ovviamente il valore massimo fra tutti gli z)
Facendo un esempio grafico sarà più chiaro



Se sostituendo i valori dei punti in cui è contenuto l’ottimo, otterremo lo stesso Z sia in b che in c , allora vorrà dire che avremo un ottimo sul segmento bc e quindi avremo infinite soluzioni ottime.

Si ha **soluzione ottima infinita**, quando ad ogni valore che trovi ottimo, si iuscirà a trovarne comunque uno ottimo migliore, in pratica quando la regione ammissibile NON è chiusa, ma aperta in direzione di g, e la retta di livello si puo spostare all'infinito trovando sempre soluzioni migliori.
Facendo un esempio grafico sarà più chiaro



In questo caso avremo X limitato ma con il valore di Z che può crescere in maniera indefinita essendo che Y può crescere in maniera illimitata.

Esercizio 4

$$max\ k(x-2y)$$

$$y - x \leq 3$$
$$y \leq 6$$
$$y - 2x + 8 \geq 0$$
$$5y \geq 2x$$

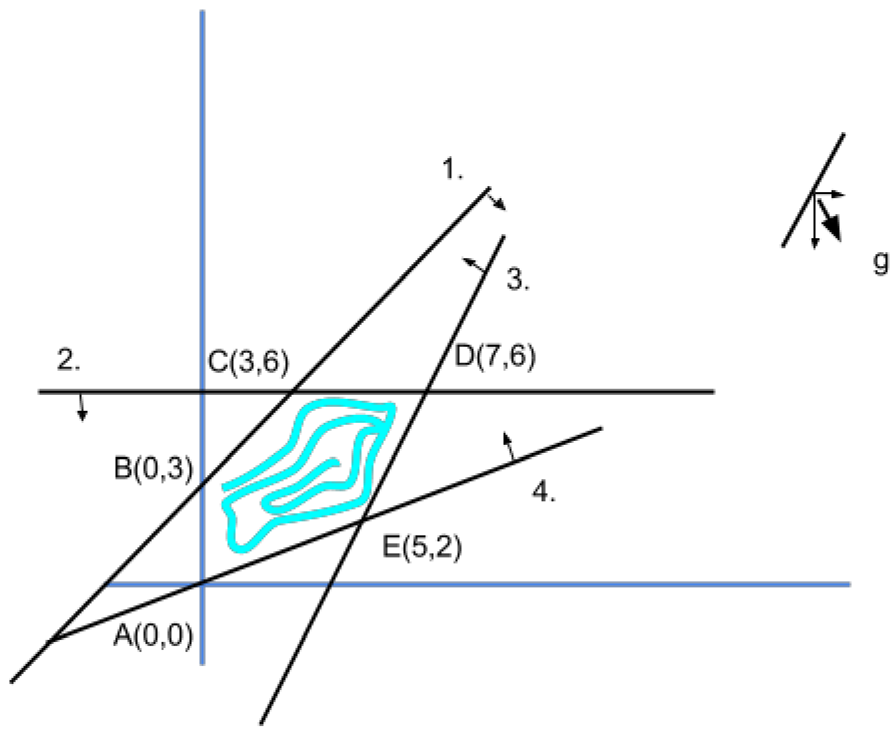
rette

$y = 3 + x$ 1.

$y = 6$ 2.

$y = -8 + 2x$ 3.

$y = 2/5x$ 4.



Per k=1/2 il max è nel punto E, come si può notare dal vettore gradiente

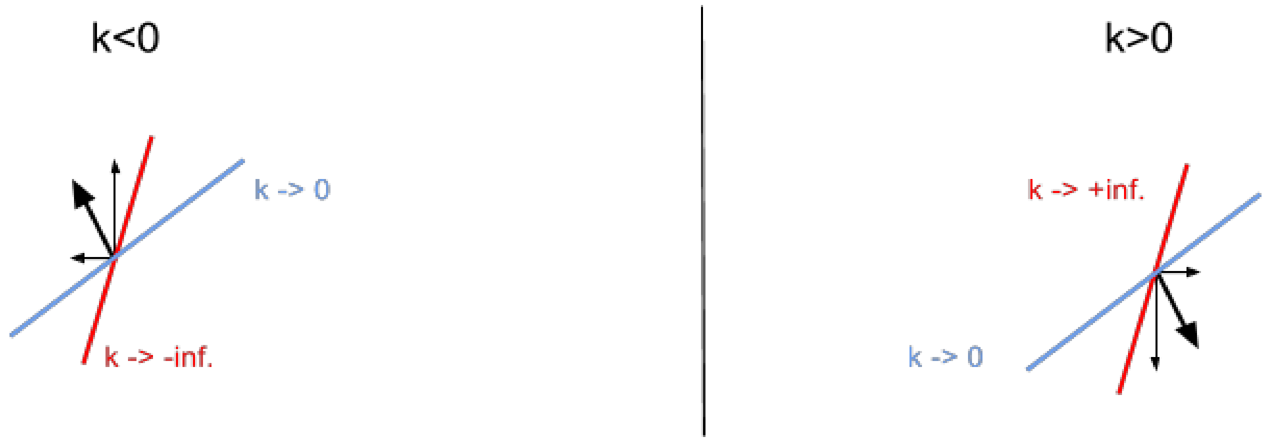
Esercizio 5

Qui la situazione è + complicata che in precedenza, perchè al variare di k varia sia x che y… vediamo anzitutto come o meglio quando cambia il segno:

$kx - 2ky$

k<0 => x<0 e y>0 quindi g è verso alto sinistra (contrario di come in figura)
per k tendente a 0, (1, 2...) la retta di livello tende ad essere a 45° cioè x=y,
per k tendente a -infinito la retta di livello tende al verticale, perchè y cresce il doppio di x
k>0 => x>0 e y<0 quindi g + verso basso destra (come in figura)
per k tendente a 0, (1, 2...) la retta di livello tende ad essere a 45° cioè x=y,
per k tendente a -infinito la retta di livello tende al verticale, perchè y cresce il doppio di x

In poche parole la retta di livello oscilla tra i 45° per k tendente a 0 e i 90° per k distante da 0, quel che cambia tra k negativo e k positivo è il verso del vettore gradiente



Ecco uno schizzo per meglio capire, come si può vedere dipendentemente dal segno di k andremo ad eliminare alcuni vincoli

k<0
Eliminiamo i vincoli 4. e 3. rimangono 1. e 2. e y=0 con m rispettivamente 1, 0, infinito (molto alto)
Notiamo subito che la retta di livello non arriverà mai ad avere gradiente 1, questo significherebbe avere x=y, nel nostro caso non lo sarà mai, tanto meno 0, quindi sarà sempre più verticale della retta 1. ma mai perfettamente verticale, quindi sempre meno verticale della retta y=0, questo implica che la retta di livello si inclinerà sempre tra la retta y=0 e la retta 1., in tutti questi casi il massimo sarà nel punto 0,3

k>0
Eliminiamo i vincoli 1. 2. e y=0 rimangono 3. e 4. con m rispettivamente 2 e 2/5 la retta di livello non avrà mai gradiente 2, perchè abbiamo visto essere compreso tra 0 e 1 (verticale e 45°) quindi basta valutare prima e dopo il 2/5

Raga ora mi sorge un prblema, so che se diventa + verticale della 3. il max è nel punto D, mentre se è + orizzontale della 3. il max è nel punto E, però non so per quali valori di K succede… posso solo fare delle prove, ad esempio k=½ come da consegna è E per k=⅖ è ancora E

Ricapitolando

.k<0 Max in B

.k=0 Degenere? sarebbe Max (0) definitelo per favore

.0<k<? Max in E

.k=? Infinite soluzioni in ED

.k>? Max in D

il? si dovrebbe risolvere ponendo a sistema

k(x-2y)   ma non si troverà mai il valore di k, quindi non so

y=2x-8

Eserizio 6

Compito AF (31 Maggio 2012)

Esercizio 1

$$\begin{cases} x+2y-w+4t+3z = 1 \\ 2x+y-2w+t+3z=2 \\ -x+w-z=3 \end{cases}$$

Da cui la matrice

$$\begin{array}{ccccc} x & y & w & t & z \\ \end{array} \qquad b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Per trovare la/le soluzione/i di base bisognerà:

- trovare sottomatrice B (3x3) con determinante diverso da 0
- porre a 0 tutte le incognite fuori di B

Avremo

$\binom{5}{2}$ = 10 CAS

(1,,2,3)   No dopo verifica
(1,3,4)   No dopo verifica
(2,3,4)   OK
(3,4,5)   OK
(1,2,4)   OK
(1,3,5)   OK
(2,3,5)   NO poichè 1+2=5
(1,2,5)   NO poichè 2-3 = 5
(1,4,5)   OK
(2,4,5)   OK

Esercizio 2

Data una funzione obiettivo Max (x1+x2+x3) , e vincoli pari a

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 = b1 \\ x1 + x2 + x3 = b2 \end{cases}$$

con il metodo della Penalizzazione dovremo aggiungere delle variabili artificiali molto grandi, tanto che la funzione obiettivo diventerà Max (x1 + x2 + x3 - 1000y1 - 1000y2) , e i vincoli diventeranno

$$\begin{cases} x1 + x2 + x3 + y1 = b1 \\ x1 + x2 + x3 + y2 = b2 \end{cases}$$

Applicando il consueto metodo del simplesso avremo :

x1	x2	x3	1	0	b1
x1	x2	x3	0	1	b2
-X1	-X2	-X3	1000	1000	0

che procedendo con lo svolgimento ci farà ottenere in finale

			*	*	
x1	x2	x3	1	0	b1
x1	x2	x3	0	1	b2
X1	X2	X3	0	0	Z

Se lo svolgimento sarà corretto, avremo y1=b1 , y2=b2 e quindi sosotituendo i valori trovati nella funzione obiettivo avremo che 1000y1 + 1000y2 = Z

Esercizio 3

Ogni problema di PL ha il suo duale (a meno di forme equivalenti) con una corrispondenza 1 → 1 con il primale.
Nel caso di Regione ammissibile illimitata e ottimo non finito nel primale, nel duale avremo un ottimo vuoto ...

Esercizio 4

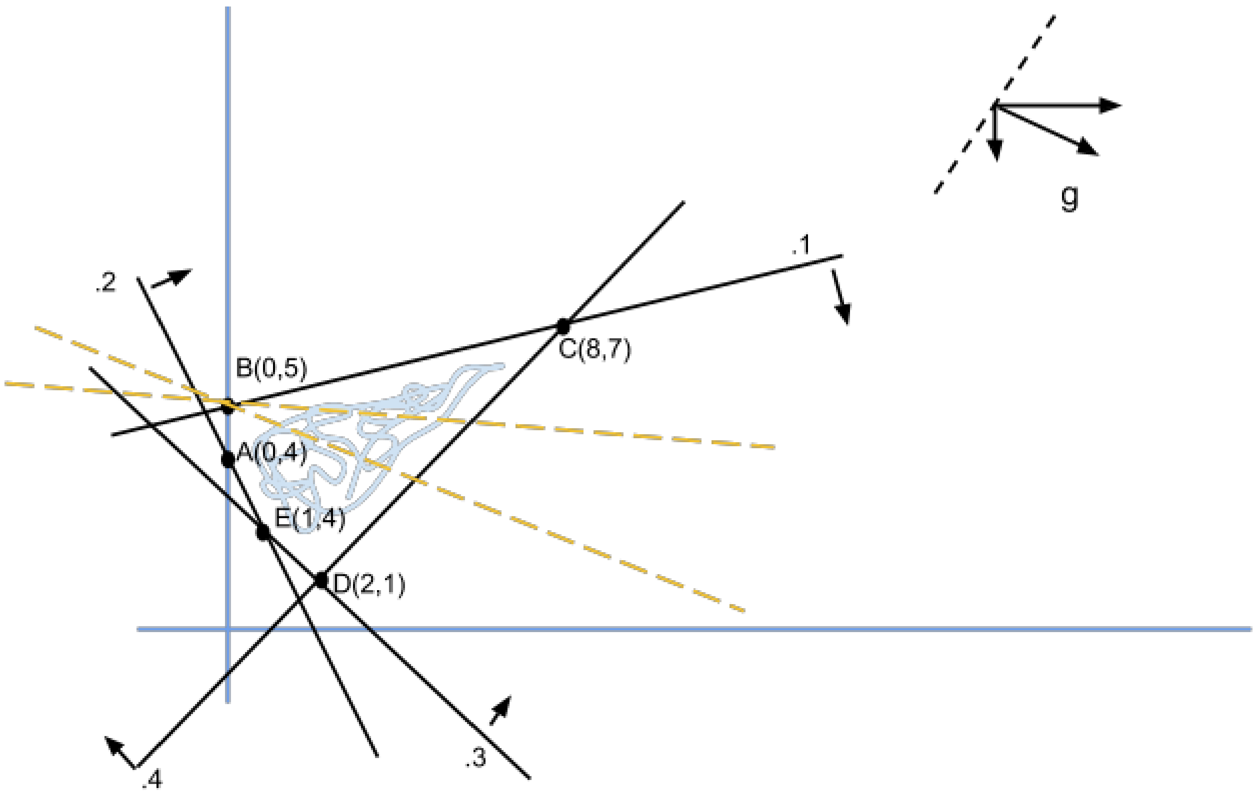
$$max\ (2x - y)$$

$$\begin{aligned} y - kx &\leq 5 \\ y + 2x &\leq 4 \\ y + x &\geq 3 \\ y - x + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x, y \geq 0$$

rette

$y = 5 + kx$ 1.
$y = 4 - 2x$ 2.
$y = 3 - x$ 3.
$y = x - 1$ 4.



per k=¼ La RA è come in figura, quindi il max + in C

Esercizio 5
al variare di k la retta 1. gira attorno al punto B, mostrato in giallo sul disegno.
per k=0 la retta sarà orizzontale, per valori superiori ruoterà in senso antiorario per valori inferiori ruoterà in senso orario (sempre rispetto a k=0)
1. Soluzione ottima non esiste => RA vuota o aperta in direzione di g, per k=1 la retta 1. sarà parallela alla retta 4. questo implica che per valori >=1 la RA sarà aperta, cià implica soluzione infinitamente ottima, ciò equivale a dire che non esiste ottimo
2. Soluzione degenere, implica che il max sia nell'inserzione di 3 o + vincoli, questo accade quando 1. passa per D o E
per trovarle basta fare la retta passante per 2 punti dove il primo è il nostro B e il secondo D e poi E… per farlo nel nostro caso basta trovare il giusto m da sostituire a k, quindi (y2-y1)/(x2-x1)
k=-2 passa per D ed è degenere
k=-1 passa per E ed è degenere

raga domando a voi, modificando il k è possibile trovare una retta verticale? Non credo perchè retta verticale sarebbe senza y e li non c'è modo di toglierla modificando k, quindi non ci sarà mai sol. degenere in A

Esercizio 6

Compito AG (11 Settembre 2012)

Esercizio 1

$$\begin{cases} 2x-4y+w=1 \\ x-2y=2 \\ -x+2y+w+z=3 \end{cases}$$

Da cui avremo la matrice

$$\begin{array}{cccc} x & y & w & z \\ \end{array} \qquad b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Per trovare la/le soluzione/i di base bisognerà:

- trovare sottomatrice B (3x3) con determinante diverso da 0
- porre a 0 tutte le incognite fuori di B

Avremo (4 3) = (4 1) → 4 combinazioni

(1,2,3)   NO poichè 2 è doppio di 1
(1,2,4)   NO Poichè 2 è doppio di 1
(2,3,4) OK
(1,3,4) OK

Esercizio 2

Quando si applica il metodo delle 2 fasi?

Quando abbiamo un generico problema di PI in forma standard :

Min(Max) cx
Ax = b
x >= 0

Quale è il problema ausiliare da risolvere?

Inseriremo un vettore di variabili ausliari (y € R), e risolveremo con il metodo del simplesso il problema ausiliare

Min (y1+y2+...yn) OR Max (-y1-y2-....-yn)

$$Ax + y = b$$

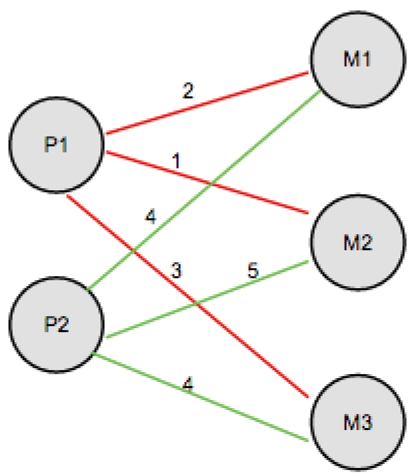
x >=0

y >=0

Quali indicazioni dà la soluzione del problema ausiliare?

Se si riuscirà a risolvere il problema nella prima fase, cioè il problema ausiliare, ottenendo come ottimo Z=0 allora automaticamente le variabili ausiliari y andranno fuori base , trovando così una soluzione ammissibile formata solo da x.

Esercizio 3



Min ($2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23}$)

x11 + x12 + x13 = p1
x21 + x22 + x23 = p2
----
x11+x21= m1
x12+x22= m2
x13+x23= m3

$\rightarrow$

x11 + x12 + x13 =3
x21 + x22 + x23 = 4
----
x11+x21=2
x12+x22=3
x13+x23=2

1	1	1	0	0	0	=3
0	0	0	1	1	1	=4
1	0	0	1	0	0	=2
0	1	0	0	1	0	=3
0	0	1	0	0	1	=2

Esercizio 4

$max(2x+y)$

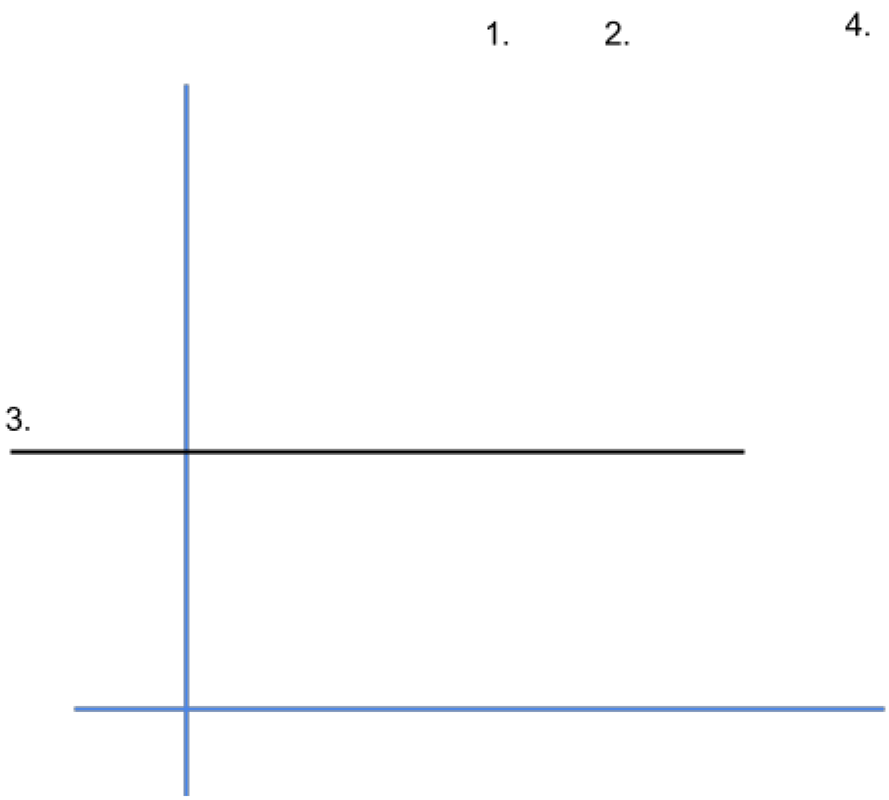
$$y-kx \leq 5$$
$$y+x \leq 11$$
$$x \leq 8$$
$$y-x+7 \geq 0$$

nel testo è sbagliato, < o >?? c'è un 3 apice, troverò il + adatto

$x,y \geq 0$

rette

$y = kx+5$ 1.
$y = 11-x$ 2.
$x = 8$ 3.
$y = x-7$ 4.



Esercizio 5

Esercizio 6

COMPLEMENTARIETA' ESEMPIO

vincoli primale : $x+y<8$; $x+3/2\ y < 6$; $3/2\ x + y -4 <0$
ottimo primale: (0,4)

vincoli duale : $a+b+3/2c > 1$; $a+3/2b +c > 2$

complementarietà :

Sostituendo (0,4)

a(x+y-8)=0 -> diverso da 0 si elimina
b(x+3/2y-6) =0 → =0 resta
c(3/2x + y -4)=0 → =0 resta

poi fai il solito procedimento del duale