Probabilità e Statistica
Prova d'esame
14 dicembre 2012

AVVERTENZE:

1. **La prova dura 2 ore.**
2. **E' ammesso il solo utilizzo delle tavole presenti nel sito del corso.**
3. **Alla fine della prova si dovranno consegnare SOLO i fogli con il testo del compito e le soluzioni riportate in modo sintetico negli appositi spazi. NON si accetteranno fogli di brutta copia.**
4. **Il compito è considerato insufficiente se vi sono meno di 6 risposte esatte ai quesiti a risposta multipla.**

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Quesiti a risposta multipla

1. Se per una variabile quantitativa lo scarto interquartile è zero, allora

   A la media aritmetica è zero

   B tutte le frequenze assolute sono uguali tra loro

   X la mediana coincide con il primo quartile

2. Quali delle seguenti espressioni è sempre zero?

   A $\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{y}$

   X $\sum_{i=1}^{n} y_i - n\overline{y}$

   C $\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{y}/n$

3. Se due v.a. $X \sim$ Bernoulli(0.1) e $Y \sim$ Bernoulli(0.6) sono indipendenti, allora:

   A $P(X = 1|Y = 0) = 0.6$

   B $P(X = 1|Y = 0) = 0.06$

   X $P(X = 1|Y = 0) = 0.1$

4. Se due eventi A e B sono incompatibili, allora

   X $P(B|A) = 0$

   B $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

   C $P(B|A) = P(B)$

5. Se due v.c. X e Y sono indipendenti

   X $\mathbb{V}ar(X - 2Y) = \mathbb{V}ar(X) + 4\mathbb{V}ar(Y)$

   B $\mathbb{V}ar(X - Y) = \mathbb{V}ar(X) - \mathbb{V}ar(Y)$

   C $\mathbb{V}ar(2X + Y) = 2\mathbb{V}ar(X) + \mathbb{V}ar(Y)$

6. Se $X_1, \dots X_n$ sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite, allora

   A $\bar{X}_n$ ha distribuzione normale standard

   B $\bar{X}_n$ ha distribuzione approssimatamente normale standard

   C $\bar{X}_n$ ha distribuzione normale solo se le X_i, $i = 1, \dots, n$, sono normali

7. La funzione di ripartizione di una v.a. non è mai

   A negativa

   B pari a uno

   C non crescente

8. Se la successione di variabili casuali X_n, $n = 1, 2, \dots$ converge in probabilità a c allora:

   A $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$

   B $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = c$

   C $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0 \; \forall \; \varepsilon > 0$

9. Si associ al comando `qnorm(0.03, 1, 2)` il corrispondente risultato:

   A -1.660

   B 4.762

   C -2.762

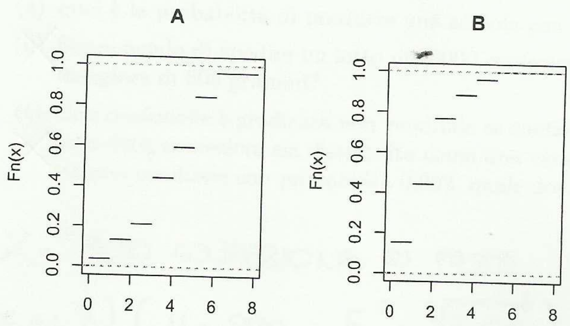
10. Quale comando si utilizza in R per calcolare $P(X > 3.3)$ se $X \sim Exp(\lambda = 3)$?

   A `1-pexp(3.3, 3)`

   B `1-dexp(3.3, 3)`

   C `1- pexp(3, 3.3)`

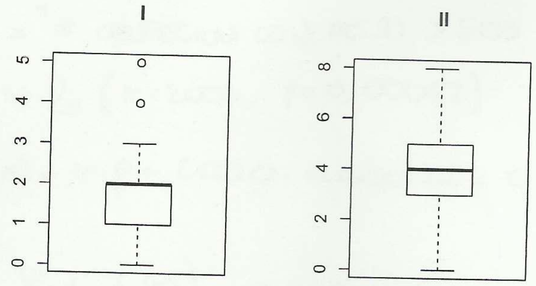
1. È stato rilevato il numero settimanale di ordini inevasi in due filiali (A e B) di una società nell'arco di un anno. Per ogni filiale vengono rappresentate le rispettive funzioni di ripartizione empiriche.



Si chiede di

(a) chiarire quali sono le unità statistiche, la numerosità della popolazione e le variabili rilevate;

(b) associare ai seguenti diagrammi a scatola e baffi (I e II) le rispettive funzioni di ripartizione empiriche;



(c) completare la seguente tabella:

	A	B
Minimo	0	0
Mediana	4	2
Massimo	8	5
Scarto interquartile	2	1

(d) Sulla base di quanto osservato, quale delle due filiali risulta più efficiente?

a) UNITÀ STATISTICHE: SETTIMANE LAVORATIVE (52 # CAMPIONE)

VARIABILI RILEVATE: ORDINI INEVASI PER SETTIMANA (QUANTITATIVA DISCRETA).

b) A -> II B -> I

d) LA SECONDA IN QUANTO HA PICCHI MINORI DI ORDINI INEVASI.

2. Una data confezione di pasta pesa in media 500 grammi. Supponendo che il peso delle confezioni sia ben descritto da una variabile casuale normale e che la varianza sia pari a 2.012,

   (a) qual è la probabilità di produrre una scatola con almeno 505 grammi di pasta?

   (b) Supponendo di spedire un lotto di 20000 confezioni, quante confezioni ci si attende possano avere un peso maggiore di 505 grammi?

   (c) Una confezione è giudicata non vendibile se contiene meno di 490 grammi di pasta. Supponendo ora che il peso delle confezioni sia distribuito come una variabile casuale normale di media 500 e che una confezione sia non vendibile con probabilità 0.002, quale dovrà essere la varianza della variabile casuale?

X = "PESO CONFEZIONE DI PASTA"

$X \sim N(\mu = 500,\ \sigma^2 = \sqrt{2.012}^2)$

a) $P(X > 505) = 1 - P(X \leq 505) = 1 - \phi\left(\frac{505-500}{\sqrt{2.012}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{5}{1{,}41845}\right) =$

$= 1 - \phi(3{,}524) = 1 - 0{,}99978 = 0{,}00022$

b) Y = "# CONFEZIONI CON PESO > 505"

$Y \sim Bi(m = 2000,\ p = 0{,}00022)$

$E(x) = m \cdot p = 2000 \cdot 0{,}00022 = 0{,}44$

c) $P(X_1 < 490) = 0{,}002$

X_1 = "CONFEZIONI VENDIBILI"

$X_1 \sim N(\mu = 500,\ \sigma^2 = ?)$

$= P\left(\frac{X_1 - 500}{\sigma} < \frac{490-500}{\sigma}\right) = 0{,}00022$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) = 0{,}00022 \Rightarrow 1 - \phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}00022$

$\Rightarrow \phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}99978 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} = 3{,}51 \Rightarrow \sigma = \frac{10}{3{,}51} = 2{,}84900$

$\Rightarrow \sigma^2 = 2{,}849^2 = 8{,}1168$

3. Siano X e Y due variabili casuali discrete. Si considerino le funzione di probabilità:

x	$p_X(x)$
0	3/6
1	1/6
2	2/6

y	$p_{Y\|X}(y\|x)$ $(x = 0, 1, 2)$
1	3/5
2	2/5

(a) Calcolare la funzione di probabilità congiunta di X e Y.

(b) È vero che $E(XY) = E(X)E(Y)$?

(c) Calcolare $\text{Var}(Z)$, dove $Z = X - 2Y$.

(d) Calcolare $\Pr(XY < 1.6)$.

X \ Y	1	2	$P_X(x)$
0	9/30	6/30	3/6
1	3/30	2/30	1/6
2	6/30	4/30	2/6
$P_Y(y)$	3/5	2/5	1

ESSENDO $P_{Y|X}(Y|X)$ NON DIPENDENTE DA
$\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow$ ✓

$$VAR(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 9/6 - 5/6^{\,2} = 9/6 - 25/36 = 20/36$$

$$VAR(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 11/5 - 7/5^{\,2} = 11/5 - 49/25 = 6/25$$

$E(X) = 1/6 + 2/6 \cdot 2 = 5/6$ $\quad$ $E(Y) = 1 \cdot 3/5 + 2 \cdot 2/5 = 7/5$

$E(X^2) = 1/6 + 2/6 \cdot 4 = 9/6$ $\quad$ $E(Y^2) = 1 \cdot 3/5 + 4 \cdot 2/5 = 11/5$

$$VAR(X - 2Y) = VAR(X) + 4\, VAR(Y) - \cancel{COV(X, -2Y)} \quad \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \frac{20}{36} + 4 \cdot 6/25 = \frac{\cancel{20}^{\,\cancel{10}\,5}}{\cancel{36}_{\,\cancel{18}\,9}} + 24/25 = \frac{5}{9} + 24/25 =$$

$$P(X \cdot Y < 1.6) = P(0,1) + P(0,2) + P(1,1) = 9/30 + 6/30 = 15/30 = 1/2$$