Probabilità e Statistica

27 maggio 2013

AVVERTENZE:

1. **La prova dura 2 ore.**
2. **E' ammesso il solo utilizzo delle tavole presenti nel sito del corso.**
3. **Alla fine della prova si dovranno consegnare SOLO i fogli con il testo del compito e le soluzioni riportate in modo sintetico negli appositi spazi. NON si accetteranno fogli di brutta copia.**
4. **Il compito è considerato insufficiente se vi sono meno di 6 risposte esatte ai quesiti a risposta multipla.**

COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Quesiti a risposta multipla

1. Se in una tabella di frequenza per una variabile numerica con più di una modalità le frequenze assolute sono tutte uguali, allora

   X A la varianza può essere zero

   B la media può essere zero

   C lo scarto interquartile non è calcolabile

2. La funzione di ripartizione è sempre

   X A non negativa

   B pari a uno

   C strettamente crescente

3. Se A e B sono incompatibili allora necessariamente

   A sono indipendenti

   X B $\Pr(A \cap B) = 0$

   C $\Pr(A \cup B) = 1$

4. Se due v.c., $X \sim$ Bernoulli(0.1) e $Y \sim$ Bernoulli(0.6), sono stocasticamente indipendenti, allora:

   A $P(X = 1|Y = 0) = 0.6$

   B $P(X = 1|Y = 0) = 0.06$ con $X \perp\!\!\!\perp Y$

   X C $P(X = 1|Y = 0) = 0.1$ $\Rightarrow P(X|Y) = P(X)$

5. Per una variabile aleatoria discreta Y a valori in $\{1, 2, 3\}$ quale delle seguenti espressioni è falsa?

   A $\Pr(Y < 2) = \Pr(Y = 1)$

   B $\Pr(Y \leq 3.1) = 1$

   X C $\Pr(Y < 1) > 0$

6. Se $Y_1, \ldots, Y_n$ sono variabili casuali indipendenti, tutte di media μ e varianza σ^2 e n è sufficientemente grande, allora

   A $\sum_i Y_i$ ha distribuzione $\mathcal{N}(n\mu, \sigma^2)$

   B $\overline{Y}$ ha distribuzione $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$

   C $\overline{Y}$ ha distribuzione approssimata $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$

7. Un possibile risultato del comando `rbinom(4, 4, 0.2)` è

   A 1 3 0 0

   B 3 -1 2 0

   C 0.4096 0.1536 0.0256 0.0016

8. Si associ al commando `ppois(3, 2)` il corrispondente risultato

   A 3

   B 0.1804

   C 0.8571

9. La moda di una variabile statistica si può calcolare

   A sempre

   B solo per variabili quantitative

   C per variabili quantitative e per variabili qualitative ordinali

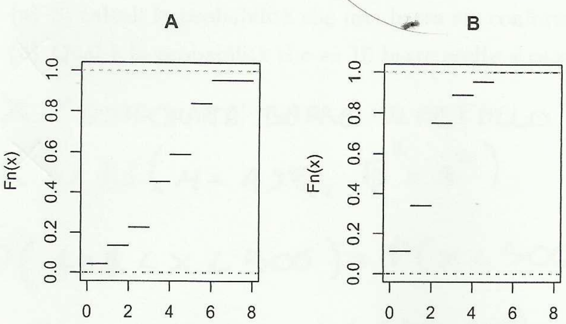
10. Se la covarianza tra due v.c. X e Y è zero, allora necessariamente

   A le due v.c. sono indipendenti

   B $\mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}(X), \forall y$

   C le due v.c. sono incorrelate

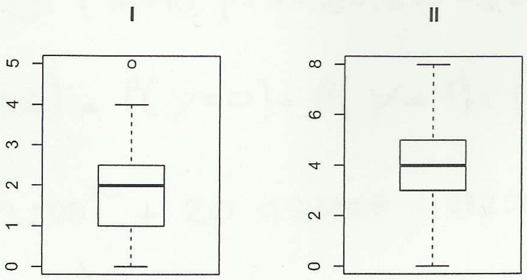
1. È stato rilevato il numero settimanale di automobili assemblate in due filiali (A e B) di un'azienda nell'arco di un anno (44 settimane lavorative). Per ogni filiale vengono rappresentate le rispettive funzioni di ripartizione empiriche.



Si chiede di:

(a) chiarire quali sono le unità statistiche, la numerosità della popolazione e le variabili rilevate;

(b) associare ai seguenti diagrammi a scatola e baffi (I e II) le rispettive funzioni di ripartizione empiriche;



(c) completare la seguente tabella:

	A	B
Minimo	0	0
Mediana	4	2
Massimo	8	5
Scarto interquartile	1,5	2

(d) Sulla base di quanto osservato, quale delle due filiali risulta più efficiente?

a) UNITÀ STATISTICHE: SONO LE SETTIMANE

NUMEROSITÀ DEL CAMPIONE 52 (SETTIMANE IN UN ANNO)

VARIABILI RILEVATE: # AUTOMOBILI ASSEMBLATE.

b) A -> II B -> I

d) LA PRIMA IN QUANTO HA PICCHI ANCHE DI 8 AUTOMOBILI

2. La lunghezza in millimetri delle barre di metallo prodotte da una ditta ha distribuzione normale con media $\mu = 495$ e varianza $\sigma^2 = 9$. Per contratto la lunghezza deve essere pari a 500mm, a meno di un margine di errore $\epsilon = 6mm$.

   (a) Si calcoli la probabilità che una barra sia conforme alle specifiche richieste.

   (b) Qual è la probabilità che su 10 barre scelte a caso dalla produzione meno di 2 siano non conformi?

a) X = "CONFORMITÀ BARRE DI METALLO"

$X \sim N(\mu = 495,\ \sigma^2 = 3^2)$

$P(494 < X < 506) = P(X < 506) - P(X < 494) =$

$= \phi\left(\frac{500-495}{3}\right) - \phi\left(\frac{494-495}{3}\right) = \phi(3,67) - \phi(-0,34) =$

$= \phi(3,67) + \phi(0,34) - 1 = 0,99988 - 0,63307 = 0,63295.$

b) $Y \sim Bi(m = 10,\ p = 1 - 0,63295 = 0,36705)$

$P(Y < 2) = P(Y=0) + P(Y=1) = \binom{20}{0} 0,36705^0 \cdot 0,63295^{20} + \binom{20}{1} 0,36705^1\, 0,63295^{19} =$

$= 0,63295^{20} + 20 \cdot 0,36705 \cdot 0,63295^{19} = 0,00134$

3. Siano X e Y due variabili casuali con densità congiunta $f(x, y) = k1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)$.

(a) Si determini la costante di normalizzazione k.

(b) Si calcolino le densità marginali di X e Y.

(c) È vero che $E(XY) = E(X)E(Y)$?

(d) Si calcolino densità e valore atteso di X condizionato a $Y = 0.5$.

(e) Si calcoli $\Pr(X + Y < 0.5)$.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x\,y) = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^y K\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[Kx\right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 Ky\,dy = \left[Ky^2/2\right]_0^1 = \frac{K}{2} \Rightarrow \frac{K}{2} = 1 \Rightarrow K = 2.$$

$$f_x(x) = \int_0^1 2\,dy = 2\int_0^y dy = 2\left[y\right]_0^y = 2$$

$$f_y(y) = \int_0^y 2\,dx = \left[2x\right]_0^1 = 2y$$

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(y) \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$ IN QUESTO CASO $X \not\perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow$

$\Rightarrow E(X \cdot y) \neq E(x) \cdot E(y)$

$$* \quad E(X \mid y = 0{,}5) = E(X) = \int_0^y x \cdot 2y\,dx = \int_0^y x\,dx = \left[x^2/2\right]_0^y = \frac{y^2}{2} =$$

$$= \frac{0{,}5^2}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(x + y < 0{,}5) \overset{x=y}{=} P(x + x < 1/2) = P\left(x < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4}\left(\int_0^y 2\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^{1/4} \left[2x\right]_0^y dy = \int_0^{1/4} 2y\,dy = \left[y^2\right]_0^{1/4} = \frac{1}{16}$$

$$* \quad f(x \mid y = 0{,}5) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y}$$

$$E(x \mid y = 0{,}5) = \int_0^y f(x \mid y = 0{,}5) \cdot x\,dx = \int_0^{0{,}5} 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^{0{,}5} = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$$