Calcolabilità e linguaggi formali

Seconda parte - A
21 dicembre 2011

Esercizio 1

Determinare se le seguenti espressioni regolari sono equivalenti tra loro:
$((R + U^*) + (S^* + RR^*)^*)^* \quad , \quad ((US^* + R)^* + S + (U^*R^*)^{**})^*$
Giustificare una risposta positiva mostrando come le due espressioni si possano ridurre ad una comune.
Giustificare una risposta negativa con un controesempio, cioé una stringa che appartiene ad una espressione ma non all'altra.

Esercizio 2

Data la seguente grammatica libera da contesto:
$S \to XY|TT, Z \to aZ|bZ|TZ|\epsilon, T \to aaT|VV, X \to aXa|b, V \to bbT, Y \to aaa|\epsilon,$

(a) semplificarla;

(b) determinare il linguaggio generato;

(c) classificarlo. Se il linguaggio é tipo 3, dare un'espressione regolare corrispondente. Se il linguaggio é tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio regolare.

Calcolabilità e linguaggi formali

21 Maggio 2013

Esercizio 4

Data la seguente grammatica
$S \to AC|B|C$,
$A \to aCa|DE$,
$B \to aB|aD$,
$C \to bCb|bb$,
$D \to aDb|bDa$,
$E \to a|bb$,
$F \to b|aFa$.

(a) Semplificare la grammatica e determinare il linguaggio generato;

(b) Classificarlo. Se il linguaggio é tipo 3, dare un'espressione regolare corrispondente. Se il linguaggio é tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio regolare.

Soluzione

Per prima cosa semplifichiamo la grammatica.
Eliminiamo i simboli improduttivi, $\{D, B\}$:
$S \to AC|C$,
$A \to aCa$,
$C \to bCb|bb$,
$E \to a|bb$,
$F \to b|aFa$.
Quindi eliminiamo i simboli irraggiungibili, $\{E, F\}$:
$S \to AC|C$,
$A \to aCa$,
$C \to bCb|bb$.

(a) Il linguaggio generato é:
$L = \{ab^{2n}ab^{2k}|n, k \geq 1\} \cup \{b^{2m}|m \geq 1\} = abb(bb)^*abb(bb)^* + bb(bb)^* = (abb(bb)^*a + \epsilon)bb(bb)^*$

(b) É un linguaggio regolare (tipo 3), come si vede dal punto (a).

Esercizio 5

Siano R, S, U espressioni regolari.
Semplificare le seguenti espressioni regolari, mostrando tutti i passaggi di semplificazione.

(a) $(R\epsilon^* + (S^*R^* + R^*S^*))^* + (RSS + U^*)^*(U^* + R^*)^*$

(b) $(\emptyset U + S^*)S^* + S^*R^* + (U^*R^*)^{**} + (US^* + R)^*$

Soluzione

(a) $(R\epsilon^* + (S^*R^* + R^*S^*))^* + (RSS + U^*)^*(U^* + R^*)^* =$
$= (R + S^*R^* + R^*S^*)^* + (RSS + U)^*(U + R)^* =$
$= (R + S + R + R + S)^* + (RSS + U)^*(U + R)^* =$
$= (R + S)^* + (RSS + U)^*(U + R)^*$

(b) $(\emptyset U + S^*)S^* + S^*R^* + (U^*R^*)^{**} + (US^* + R)^* =$
$= (\emptyset + S^*)S^* + S^*R^* + (U^*R^*)^* + (US^* + R)^* =$
$= (S^*)S^* + S^*R^* + (U + R)^* + (US^* + R)^* =$
$= S^* + S^*R^* + (U + R)^* + (US^* + R)^* =$
$= S^*R^* + (U + R)^* + (US^* + R)^* =$ perché $S^* \subset S^*R^*$
$= S^*R^* + (US^* + R)^*$ perché $(U + R)^* \subset (US^* + R)^*$

Calcolabilità e linguaggi formali

4 Settembre 2013

Domanda 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{(a^n a)^m ba^k : k \geq 0, n > 1, 1 < m < 4\}$;
$L_2 = \{a^n (a^m b) a^k : k \geq 0, n = 2, m = k\}$.

(b) Determinare il tipo della grammatica data nella classificazione di Chomsky.

(c) Determinare il tipo del linguaggio. Se il linguaggio è di tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente. Se il linguaggio è di tipo 2 dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non è un linguaggio regolare.

Soluzione

(a) Semplifichiamo la descrizione di L_1.
$L_1 = \{(a^n a)^m ba^k : k \geq 0, n > 1, 1 < m < 4\} =$
$= \{(a^{n+1})^m ba^k : k \geq 0, n > 1, m \in \{2,3\}\} =$
$= \{a^{2(n+1)} ba^k : k \geq 0, n > 1\} + \{a^{3(n+1)} ba^k : k \geq 0, n > 1\} =$
$= \{a^{2h} ba^k : k \geq 0, h > 2\} + \{a^{3h} ba^k : k \geq 0, h > 2\}$.
Diamo una grammatica per L_1. Le produzioni sono:
$S \to AbB|CbB$, $A \to aaA|a^6$, $B \to aB|\epsilon$, $C \to aaaC|a^9$.

Semplifichiamo la descrizione di L_2.
$L_2 = \{a^n (a^m b) a^k : m, k \geq 0, n = 2, m = k\} = \{aaa^m ba^m : m \geq 0\}$.
Diamo una grammatica per L_2. Le produzioni sono:
$S \to aaX$, $X \to aXa|b$.

(b) Entrambe le grammatiche sono libere da contesto (tipo 2).

(c) L_1 é un linguaggio regolare (tipo 3).
Una espressione regolare corrispondente é la seguente:
$a^6(aa)^*ba^* + a^9(aaa)^*ba^*$.

L_2 é un linguaggio libero da contesto (tipo 2).
Applichiamo il pumping lemma tipo 3 per dimostrare che non é un linguaggio regolare.
Per ogni n naturale, consideriamo la stringa $x = a^{n+2}ba^n$, x appartiene ad L e $|x| \geq n$.
Ogni scomposizione di x in tre parti, $x = uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| = r \geq 1$ é tale che v é in a^+, quindi pompando i volte v, con $i = 0$, otteniamo $uw = a^{n+2-r}ba^n$ che non appartiene ad L. CVD

Domanda 2

(a) Definire induttivamente le espressioni regolari *(suggerimento: sono necessari 6 casi).*

(b) Associare un automa finito ad ogni caso della definizione induttiva di espressione regolare

Calcolabilità e linguaggi formali

21 Gennaio 2013

Esercizio 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{a^n(ab)^m a^k : n, m, k \geq 0, m > 2\}$;
$L_2 = \{a^n a^m b^m a^k : n, m, k \geq 0, k > n\}$.

(b) Determinare il tipo della grammatica data nella classificazione di Chomsky.

(c) Determinare il tipo del linguaggio. Se il linguaggio è di tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente. Se il linguaggio è di tipo 2 dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non è un linguaggio regolare.

Soluzione

(a) Diamo una grammatica per L_1. Le produzioni sono:
$S \to ABA$, $A \to aA|\epsilon$, $B \to abB|ababab$.
Diamo una grammatica per L_2. Le produzioni sono:
$S \to Sa|Xa$, $X \to aXa|B$, $B \to aBb|\epsilon$.

(b) Entrambe le grammatiche sono libere da contesto (tipo 2).

(c) L_1 é un linguaggio regolare (tipo 3). Una espressione regolare corrispondente é la seguente:
$a^*ababab(ab)^*a^*$.
L_2 un linguaggio libero da contesto (tipo 2). Applichiamo il pumping lemma tipo 3 per dimostrare che non é un linguaggio regolare.
Per ogni n naturale, consideriamo la stringa $x = a^n b^n a$, x appartiene ad L e $|x| \geq n$.
Ogni scomposizione di x in tre parti, $x = uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| = r \geq 1$ é tale che v é in a^+, quindi pompando i volte v, con $i = 0$, otteniamo $uw = a^{n-r}b^n a$ che non appartiene ad L. CVD

Esercizio 2

(a) Dare un esempio di automa a pila.

(b) Determinare, indicandone i motivi, se si tratta di una automa a pila deterministico o non deterministico.

Calcolabilità e linguaggi formali

Secondo compitino - A
17 dicembre 2012

Esercizio 1

Data la seguente grammatica libera da contesto

$S \to aScc|B|ABC$,
$A \to aaAa|aaFa$,
$B \to bB|b$,
$C \to Ccc|cD$,
$D \to dD|E$,
$E \to EF|C$,
$F \to FFa|a|D$.

(a) Semplificarla.

(b) Determinare il linguaggio generato;

(c) Classificarlo. Se il linguaggio é tipo 3, dare un'espressione regolare corrispondente. Se il linguaggio é tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio regolare.

Soluzione

(a) Eliminiamo i simboli improduttivi: $\{C, D, E\}$. Otteniamo:
$S \to aScc|B$,
$A \to aaAa|aaFa$,
$B \to bB|b$,
$F \to FFa|a$.
Eliminiamo i simboli irraggiungibili da S: $\{A, F\}$. Otteniamo:
$S \to aScc|B$,
$B \to bB|b$,
Unfold di B in $S \to B$. Otteniamo:
$S \to aScc|bB|b$,
$B \to bB|b$,

(b) Il linguaggio generato dalla grammatica é:
$L = \{a^n b^m c^{2n} | n \geq 0 \ e \ m > 0\}$

(c) Il linguaggio é tipo 2.
Dimostriamo con il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio tipo 3.
Per ogni n naturale, consideriamo la stringa $x = a^n bc^{2n}$, x appartiene ad L e $|x| \geq n$.
Ogni scomposizione di x in tre parti, $x = uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| = r \geq 1$ é tale che v é in a^+, quindi pompando i volte v, con $i = 0$, otteniamo $uw = a^{n-r}bc^{2n}$ che non appartiene ad L. CVD

Esercizio 3

Siano R, S, U espressioni regolari.
Semplificare la seguente espressione regolare, mostrando tutti i passaggi di semplificazione.
$(R^*S)^* + (R^{**} + S + U)^* + (RS^*)^*(R\emptyset + S^*)S^*$

Soluzione

$(R^*S)^* + (R^{**} + S + U)^* + (RS^*)^*(R\emptyset + S^*)S^* =$
$= (R^*S)^* + (R^* + S + U)^* + (RS^*)^*(\emptyset + S^*)S^* =$
$= (R^*S)^* + (R + S + U)^* + (RS^*)^*S^*S^* =$
$= (R^*S)^* + (R + S + U)^* + (RS^*)^*S^* =$
$= (R + S + U)^* + (RS^*)^*S^* =$ perché $(R^*S)^* \subset (R + S + U)^*$
$= (R + S + U)^*$ perché $(RS^*)^*S^* \subset (R + S + U)^*$

Calcolabilità e linguaggi formali

Secondo compitino - B
17 dicembre 2012

Esercizio 1

Data la seguente grammatica libera da contesto

$S \to 000S0|ASD|B,$
$A \to 0A|C11|F,$
$B \to 1B|1,$
$C \to 1|C11,$
$D \to 1D|EF,$
$E \to D|AE,$
$F \to 1F|E.$

(a) Semplificarla.

(b) Determinare il linguaggio generato;

(c) Classificarlo. Se il linguaggio é tipo 3, dare un'espressione regolare corrispondente. Se il linguaggio é tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio regolare.

Soluzione

(a) Eliminiamo i simboli improduttivi: $\{D, E, F\}$. Otteniamo:
$S \to 000S0|B,$

$A \to 0A|C11$

$B \to 1B|1,$

$C \to 1|C11.$
Eliminiamo i simboli irraggiungibili da S: $\{A, C\}$. Otteniamo:
$S \to 000S0|B,$
$B \to 1B|1.$
Unfold di B in $S \to B$. Otteniamo:
$S \to 000S0|1B|1,$
$B \to 1B|1.$

(b) Il linguaggio generato dalla grammatica é:
$L = \{0^{3n}1^m0^n | n \geq 0 \ e \ m > 0\}$

(c) Il linguaggio é tipo 2.
Dimostriamo con il pumping lemma tipo 3 che non é un linguaggio tipo 3.
Per ogni n naturale, consideriamo la stringa $x = 0^{3n}10^n$, x appartiene ad L e $|x| \geq n$.
Ogni scomposizione di x in tre parti, $x = uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| = r \geq 1$ é tale che v é in a^+, quindi pompando i volte v, con $i = 0$, otteniamo $uw = 0^{3n-r}10^n$ che non appartiene ad L. CVD

Esercizio 3

Siano R, S, U espressioni regolari.
Semplificare la seguente espressione regolare, mostrando tutti i passaggi di semplificazione.
$(R + U^* + \epsilon^* S^*) + (S^* + RR^*)^* + (U^*(S^*R^* + RS))^*$

Soluzione

$(R + U^* + \epsilon^* S^*) + (S^* + RR^*)^* + (U^*(S^* R^* + RS))^* =$
$= R + U^* + S^* + (S + RR^*)^* + (U^* S^* R^* + U^* RS)^* =$
$= R + U^* + S^* + (S + RR^*)^* + (U + S + R + U^* RS)^* =$
$= R + U^* + S^* + (S + RR^*)^* + (U + S + R)^* =$ perché $U^* RS \subset (U + S + R)^*$
$= (U + S + R)^*$
perché $R + U^* + S^* + (S + RR^*)^* \subset (U + S + R)^*$