PROF. BUSETTO (1)

Teorema 2.3: Un sistema omogeneo di equazioni lineari con più incognite che equazioni ha una soluzione non nulla.

Esempio 2.8: Il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + w &= 0 \\ x - 3y + z - 2w &= 0 \\ 2x + y - 3z + 5w &= 0 \end{aligned}$$

ha una soluzione non nulla, perché vi sono quattro incognite e solo tre equazioni.

Esempio 2.9: Riduciamo a gradini il sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ x - 4y + 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -5y + 3z &= 0 \\ -5y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -5y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Esso ha una soluzione non nulla, poiché, con la forma a gradini, abbiamo ottenuto soltanto due equazioni nelle tre incognite. Sia per esempio $z = 5$; allora $y = 3$ e $x = 2$. In altri termini, la terna $(2, 3, 5)$ è una particolare soluzione non nulla.

Esempio 2.10: Riduciamo in forma a gradini il sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ -y + 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ 11z &= 0 \end{aligned}$$

Dato che in detta forma si hanno tre equazioni in tre incognite, il sistema ha soltanto la soluzione zero $(0, 0, 0)$.

PROBLEMI RISOLTI

SOLUZIONE DI EQUAZIONI LINEARI

2.1. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z + 2v - 5w &= 3 \\ y - 4z + v &= 1 \\ v - 3w &= 2 \end{aligned}$$

Il sistema è disposto a gradini. Dato che le equazioni cominciano rispettivamente con le incognite x, y e v, le altre incognite z e w sono le variabili libere.

Per ottenere la soluzione generale, poniamo per esempio $z = a$ e $w = b$. Sostituendo nella terza equazione,

$$v - 3b = 2 \quad \text{o} \quad v = 2 + 3b$$

E sostituendo nella seconda,

$$y - 4a + 2 + 3b = 1 \quad \text{o} \quad y = 4a - 3b - 1$$

Sostituendo ancora nella prima,

$$2x - 3(4a - 3b - 1) + 6a + 2(2 + 3b) - 5b = 3 \quad \text{o} \quad x = 3a - 5b - 2$$

Così la soluzione generale del sistema è

$$x = 3a - 5b - 2, \quad y = 4a - 3b - 1, \quad z = a, \quad v = 2 + 3b, \quad w = b$$

ovvero $(3a - 5b - 2, 4a - 3b - 1, a, 2 + 3b, b)$, in cui a e b sono dei numeri reali arbitrari. Alcuni testi pongono la soluzione generale in termini delle variabili libere z e w invece di a e b, come segue:

$$\begin{aligned} x &= 3z - 5w - 2 \\ y &= 4z - 3w - 1 \qquad \text{o} \qquad (3z - 5w - 2,\ 4z - 3w - 1,\ z,\ 2 + 3w,\ w) \\ v &= 2 + 3w \end{aligned}$$

Dopo aver trovato la soluzione generale, possiamo trovarne una particolare per sostituzione in quella generale stessa. Siano per esempio $a = 2$ e $b = 1$; allora

$$x = -1,\ y = 4,\ z = 2,\ v = 5,\ w = 1 \qquad \text{o} \qquad (-1, 4, 2, 5, 1)$$

è una soluzione particolare del sistema dato.

2.2. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

Ridurre nella forma a gradini. Eliminare la x dalla seconda e terza equazione con le operazioni $L_2 \to -3L_1 + L_2$ e $L_3 \to -5L_1 + L_3$:

$$\begin{array}{rr} -3L_1: & -3x - 6y + 9z = 3 \\ L_2: & 3x - y + 2z = 7 \\ \hline -3L_1 + L_2: & -7y + 11z = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -5L_1: & -5x - 10y + 15z = 5 \\ L_3: & 5x + 3y - 4z = 2 \\ \hline -5L_1 + L_3: & -7y + 11z = 7 \end{array}$$

Otterremo così il sistema equivalente

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ -7y + 11z &= 10 \\ -7y + 11z &= 7 \end{aligned}$$

La seconda e la terza equazione mostrano che il sistema è inconsistente, perché se si sottrae si ottiene $0x + 0y + 0z = 3$ o $0 = 3$.

2.3. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

Ridurre nella forma a gradini. Eliminare la x dalla seconda e terza equazione con le operazioni $L_2 \to -3L_1 + 2L_2$ e $L_3 \to -5L_1 + 2L_3$:

$$\begin{array}{rr} -3L_1: & -6x - 3y + 6z = -30 \\ 2L_2: & 6x + 4y + 4z = 2 \\ \hline -3L_1 + 2L_2: & y + 10z = -28 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -5L_1: & -10x - 5y + 10z = -50 \\ 2L_3: & 10x + 8y + 6z = 8 \\ \hline -5L_1 + 2L_3: & 3y + 16z = -42 \end{array}$$

Otteniamo così il seguente sistema, e dalla terza equazione eliminiamo poi la y con l'operazione $L_3 \to -3L_2 + L_3$:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ y + 10z &= -28 \\ 3y + 16z &= -42 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ y + 10z &= -28 \\ -14z &= 42 \end{aligned}$$

Nella forma a gradini si hanno tre equazioni in tre incognite; quindi il sistema ha un'unica soluzione. Per la terza equazione, $z = -3$. Sostituendo nella seconda si ottiene $y = 2$. Sostituendo poi nella prima, $x = 1$. Perciò $x = 1$, $y = 2$ e $z = -3$, ovvero la terna $(1, 2, -3)$ è l'unica soluzione del sistema.

2.4. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x - y + 4z &= 2 \\ 4x + 3y - 2z &= 14 \end{aligned}$$

Questo sistema va ridotto nella forma a gradini, eliminando la x dalla seconda e terza equazione con le operazioni $L_2 \to -2L_1 + L_2$ e $L_3 \to -4L_1 + L_3$:

$$\begin{array}{rr} -2L_1: & -2x - 4y + 6z = -12 \\ L_2: & 2x - y + 4z = 2 \\ \hline & -5y + 10z = -10 \\ \text{o} & y - 2z = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} -4L_1: & -4x - 8y + 12z = -24 \\ L_3: & 4x + 3y - 2z = 14 \\ \hline & -5y + 10z = -10 \\ \text{o} & y - 2z = 2 \end{array}$$

Così il sistema è equivalente a

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ y - 2z &= 2 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned} \qquad \text{o semplicemente} \qquad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

(Dato che seconda e terza equazione sono identiche, possiamo trascurarne una.)

Nella disposizione a gradini ci sono solo due equazioni nelle tre incognite; quindi il sistema ha infinite soluzioni e, in particolare, $3 - 2 = 1$ variabile libera, cioè z.

Per ottenere la soluzione generale, poniamo ad esempio $z = a$. Sostituiamo nella seconda equazione ottenendo $y = 2 + 2a$. Sostituendo ancora nella prima abbiamo $x + 2(2 + 2a) - 3a = 6$ o $x = 2 - a$. Quindi la soluzione generale è

$$x = 2 - a, \quad y = 2 + 2a, \quad z = a \quad \text{ovvero} \quad (2 - a, 2 + 2a, a)$$

in cui a è un qualsiasi numero reale.

Il valore, diciamo, $a = 1$ conduce alla soluzione particolare $x = 1$, $y = 4$, $z = 1$ oppure $(1, 4, 1)$.

2.5. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} x - 3y + 4z - 2w &= 5 \\ 2y + 5z + w &= 2 \\ y - 3z \qquad &= 4 \end{aligned}$$

Questo sistema non è disposto a gradini, dato che, per esempio, la y appare come prima incognita sia nella seconda che nella terza equazione. Però se riscriviamo il sistema in modo che w sia seconda incognita, otteniamo il sistema seguente, che è disposto a gradini:

$$\begin{aligned} x - 2w - 3y + 4z &= 5 \\ w + 2y + 5z &= 2 \\ y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Ora, se si assegna per soluzione una quaterna (a, b, c, d), non è chiaro se b deve essere sostituito a w o ad y; quindi, per ragioni teoriche, considereremo distinti i due sistemi. Naturalmente questo non ci impedisce di usare il nuovo sistema per trovare la soluzione di quello originale.

Sia $z = a$. Sostituendo nella terza equazione, troviamo $y = 4 + 3a$. Ancora sostituendo nella seconda si ha $w + 2(4 + 3a) + 5a = 2$ ovvero $w = -6 - 11a$, e, nella prima,

$$x - 2(-6 - 11a) - 3(4 + 3a) + 4a = 5 \quad \text{o} \quad x = 5 - 17a$$

Perciò la soluzione generale del sistema originale è

$$x = 5 - 17a, \quad y = 4 + 3a, \quad z = a, \quad w = -6 - 11a,$$

in cui a è un qualsiasi numero reale.

4

2.6. Determinare i valori di a per i quali il seguente sistema nelle incognite x, y, z presenta: (i) nessuna soluzione, (ii) più di una soluzione, (iii) un'unica soluzione:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Ridurre il sistema disponendolo a gradini. Eliminare la x dalla seconda e terza equazione con le operazioni $L_2 \to -2L_1 + L_2$ e $L_3 \to -L_1 + L_3$:

$$\begin{array}{rrcl} -2L_1: & -2x - 2y + 2z &=& -2 \\ L_2: & 2x + 3y + az &=& 3 \\ \hline & y + (a+2)z &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} -L_1: & -x - y + z &=& -1 \\ L_3: & x + ay + 3z &=& 2 \\ \hline & (a-1)y + 4z &=& 1 \end{array}$$

Così il sistema equivalente è

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + (a+2)z &= 1 \\ (a-1)y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

Eliminiamo ora la y dalla terza equazione con l'operazione $L_3 \to -(a-1)L_2 + L_3$,

$$\begin{array}{rrcl} -(a-1)L_2: & -(a-1)y + (2-a-a^2)z &=& 1-a \\ L_3: & (a-1)y + 4z &=& 1 \\ \hline & (6-a-a^2)z &=& 2-a \\ \text{o} & (3+a)(2-a)z &=& 2-a \end{array}$$

ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ y + (a+2)z &= 1 \\ (3+a)(2-a)z &= 2-a \end{aligned}$$

il quale ha un'unica soluzione se il coefficiente di z nella terza equazione non è zero, ovvero se $a \neq 2$ e $a \neq -3$. Nel caso che sia $a = 2$, la terza equazione è $0 = 0$ ed il sistema ha più di una soluzione. Se è $a = -3$, la terza equazione è $0 = 5$ ed il sistema non ha soluzione.

Riassumendo, abbiamo: (i) $a = -3$, (ii) $a = 2$, (iii) $a \neq 2$ e $a \neq -3$.

2.7. A quale condizione debbono obbedire a, b e c perché il sistema seguente nelle incognite x, y, z abbia una soluzione?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

Ridurre nella forma a gradini. Eliminando la x dalla seconda e dalla terza equazione mediante le operazioni $L_2 \to -2L_1 + L_2$ e $L_3 \to -L_1 + L_3$, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2y - 5z &= b - 2a \\ -4y + 10z &= c - a \end{aligned}$$

Eliminando poi la y dalla terza equazione con l'operazione $L_3 \to 2L_2 + L_3$, otteniamo infine il sistema equivalente

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2y - 5z &= b - 2a \\ 0 &= c + 2b - 5a \end{aligned}$$

5

Il sistema non avrà soluzione se la terza equazione risulta della forma $0 = k$ con $k \neq 0$; se cioè $c + 2b - 5a \neq 0$. Perciò il sistema stesso avrà almeno una soluzione se

$$c + 2b - 5a = 0 \quad \text{o} \quad 5a = 2b + c$$

Notare che in questo caso il sistema avrà più di una soluzione. In altri termini, esso non ne può avere una sola.

SISTEMI OMOGENEI DI EQUAZIONI LINEARI

2.8. Determinare se ognuno di questi sistemi ha una soluzione non nulla:

$$\begin{array}{ccc} & & x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + 3z - 2w = 0 & x + 2y - 3z = 0 & 2x + 5y + 2z = 0 \\ 3x - 7y - 2z + 4w = 0 & 2x + 5y + 2z = 0 & x + 4y + 7z = 0 \\ 4x + 3y + 5z + 2w = 0 & 3x - y - 4z = 0 & x + 3y + 3z = 0 \\ \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \end{array}$$

(i) Il sistema deve avere una soluzione non nulla, dato che vi sono più incognite che equazioni.

(ii) Ridurre a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x - y - 4z &= 0 \end{aligned} \quad \text{in} \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 8z &= 0 \\ -7y + 5z &= 0 \end{aligned} \quad \text{e in} \quad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 8z &= 0 \\ 61z &= 0 \end{aligned}$$

In questa forma abbiamo esattamente tre equazioni in tre incognite: il sistema ha un'unica soluzione, la soluzione zero.

(iii) Ridurre ancora a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y + 7z &= 0 \\ x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \\ 2y + 8z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Troviamo così solo due equazioni nelle tre incognite: il sistema ha una soluzione non nulla.

2.9. I vettori $u_1, \ldots, u_m$ in – diciamo – $\mathbf{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti*, o semplicemente *dipendenti*, se esistono degli scalari $k_1, \ldots, k_m$, non tutti zero, tali che $k_1 u_1 + \cdots + k_m u_m = 0$. Altrimenti vengono definiti *indipendenti*. Determinare se i vettori u, v, w sono dipendenti o indipendenti nei casi:

(i) $u = (1, 1, -1),\ v = (2, -3, 1),\ w = (8, -7, 1)$

(ii) $u = (1, -2, -3),\ v = (2, 3, -1),\ w = (3, 2, 1)$

(iii) $u = (a_1, a_2),\ v = (b_1, b_2),\ w = (c_1, c_2)$

In ciascun caso:

(*a*) sia $xu + yv + zw = 0$, con x, y, z scalari non noti;

(*b*) trovare il sistema omogeneo equivalente;

(*c*) determinare se il sistema ha una soluzione non nulla. Se questa esiste, i vettori sono dipendenti; se no, essi sono indipendenti.

(i) Sia $xu + yv + zw = 0$:

$$x(1, 1, -1) + y(2, -3, 1) + z(8, -7, 1) = (0, 0, 0)$$

ovvero $\quad (x, x, -x) + (2y, -3y, y) + (8z, -7z, z) = (0, 0, 0)$

o $\quad (x + 2y + 8z,\ x - 3y - 7z,\ -x + y + z) = (0, 0, 0)$

6

Uguagliamo le componenti corrispondenti e riduciamo il sistema in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y + 8z &= 0 \\ x - 3y - 7z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 8z &= 0 \\ -5y - 15z &= 0 \\ 3y + 9z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 8z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 8z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

In tale forma si hanno solo due equazioni in tre incognite, e il sistema ha una soluzione non nulla. Di conseguenza i vettori sono dipendenti.

Osservazione: Non c'è bisogno di risolvere il sistema per determinare se i vettori sono dipendenti o meno; basta sapere se esiste una soluzione diversa da zero.

(ii)
$$\begin{aligned} x(1, -2, -3) + y(2, 3, -1) + z(3, 2, 1) &= (0, 0, 0) \\ (x, -2x, -3x) + (2y, 3y, -y) + (3z, 2z, z) &= (0, 0, 0) \\ (x + 2y + 3z, -2x + 3y + 2z, -3x - y + z) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -2x + 3y + 2z &= 0 \\ -3x - y + z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 7y + 8z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 7y + 8z &= 0 \\ 30z &= 0 \end{aligned}$$

In forma a gradini si hanno esattamente tre equazioni nelle tre incognite, quindi il sistema ha soltanto la soluzione zero. Di conseguenza, i vettori sono indipendenti.

(iii)
$$\begin{aligned} x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) + z(c_1, c_2) &= (0, 0) \\ (a_1x, a_2x) + (b_1y, b_2y) + (c_1z, c_2z) &= (0, 0) \\ (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z) &= (0, 0) \end{aligned} \quad \text{e quindi} \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema ha una soluzione non nulla per il teorema 2.3, cioè perché si hanno più incognite che equazioni; quindi i vettori sono dipendenti. In altre parole, abbiamo dimostrato che a tre a tre i vettori in $\mathbf{R}^2$ sono dipendenti.

2.10. Supponiamo che in un sistema omogeneo di equazioni lineari i coefficienti di una delle incognite siano tutti zero. Dimostrare che il sistema ha una soluzione non nulla.

Poniamo che $x_1, \ldots, x_n$ siano le incognite del sistema, e x_j sia l'incognita i cui coefficienti sono tutti zero. Ogni equazione del sistema avrà la forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_{j-1}x_{j-1} + 0x_j + a_{j+1}x_{j+1} + \cdots + a_nx_n = 0$$

Allora, per esempio, $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, in cui 1 è la componente j-esima, è una soluzione non nulla di ogni equazione e quindi del sistema.

PROBLEMI DIVERSI

2.11. Dimostrare il teorema 2.1: Poniamo che u sia una soluzione particolare del sistema omogeneo (*), e che W sia la soluzione generale del sistema omogeneo associato (**). Allora

$$u + W = \{u + w : w \in W\}$$

è la soluzione generale del sistema non omogeneo (*).

Indichi U la soluzione generale del sistema non omogeneo (*). Poniamo $u \in U$, e che sia $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Dato che u è una soluzione di (*) abbiamo, per $i = 1, \ldots, m$,

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = b_i$$

Ora poniamo che sia $w \in W$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Essendo w una soluzione del sistema omogeneo (**) abbiamo, per $i = 1, \ldots, m$,

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n = 0$$

7

Da cui, sempre per $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + \cdots + a_{in}(u_n + w_n) \\ &= a_{i1}u_1 + a_{i1}w_1 + a_{i2}u_2 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}u_n + a_{in}w_n \\ &= (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) + (a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n) \\ &= b_i + 0 = b_i \end{aligned}$$

Ovvero, $u + w$ è una soluzione di (*). Perciò $u + w \in U$, quindi

$$u + W \subset U$$

Poniamo ora che $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sia un elemento arbitrario di U, ovvero soluzione di (*). Allora, per $i = 1, \ldots, m$,

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i$$

Si osservi che $v = u + (v - u)$. Noi diciamo che $v - u \in W$. Per $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} a_{i1}(v_1 - u_1) + a_{i2}(v_2 - u_2) + \cdots + a_{in}(v_n - u_n) \\ &= (a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n) - (a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) \\ &= b_i - b_i = 0 \end{aligned}$$

Perciò $v - u$ è una soluzione del sistema omogeneo (*), ovvero $v - u \in W$. E' quindi $v \in u + W$, per cui

$$U \subset u + W$$

Le due relazioni di inclusione ci danno $U = u + W$; cioè, $u + W$ è la soluzione generale del sistema non omogeneo (**).

2.12. Consideriamo il sistema (*) di equazioni lineari (pag. 18). Moltiplicando l'equazione i-esima per c_i e sommando, si ottiene l'equazione

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})x_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})x_n = c_1b_1 + \cdots + c_mb_m \quad (1)$$

Essa viene definita *combinazione lineare* delle equazioni di (*). Dimostrare che ogni soluzione di (*) è anche una soluzione della combinazione lineare (*1*).

Poniamo che $u = (k_1, \ldots, k_n)$ sia una soluzione di (*). Allora

$$a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{in}k_n = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \quad (2)$$

Per dimostrare che u è una soluzione della (*1*), dobbiamo verificare l'equazione

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{m1})k_1 + \cdots + (c_1a_{1n} + \cdots + c_ma_{mn})k_n = c_1b_1 + \cdots + c_mb_m$$

Ma questa può essere riordinata nella forma

$$c_1(a_{11}k_1 + \cdots + a_{1n}k_n) + \cdots + c_m(a_{m1} + \cdots + a_{mn}k_n) = c_1b_1 + \cdots + c_mb_m$$

o, per la (*2*), $\quad c_1b_1 + \cdots + c_mb_m = c_1b_1 + \cdots + c_mb_m$

che è evidentemente un'affermazione vera.

2.13. Nel sistema (*) di equazioni lineari si supponga $a_{11} \neq 0$. Sia (#) il sistema che si ottiene da (*) con l'operazione $L_i \to -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i, \ i \neq 1$. Dimostrare che (*) e (#) sono sistemi equivalenti, ovvero hanno lo stesso insieme soluzione.

Per la detta operazione su (*), ogni equazione di (#) è una combinazione lineare di quelle di (*); quindi, per il problema precedente, ogni soluzione di (*) è anche una soluzione di (#).

D'altra parte, applicando l'operazione $L_i \to \frac{1}{a_{11}}(-a_{i1}L_1 + L_i)$ a (#), otteniamo il sistema originale (*). Cioè ogni equazione di (*) è una combinazione lineare di equazioni di (#); quindi ogni soluzione di (#) è anche una soluzione di (*).

Entrambe le condizioni dimostrano che (*) e (#) hanno lo stesso insieme soluzione.

8

2.14. Dimostrare il teorema 2.2: Si consideri un sistema nella forma a gradini:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

in cui $1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $a_{11} \neq 0,\ a_{2j_2} \neq 0,\ \ldots,\ a_{rj_r} \neq 0$. Il problema si risolve nel modo seguente. Abbiamo due casi:

(i) $r = n$. Il sistema ha un'unica soluzione.

(ii) $r < n$. Allora possiamo assegnare dei valori arbitrari alle $n - r$ variabili libere, ottenendo una soluzione del sistema.

La dimostrazione si fa per induzione sul numero r di equazioni del sistema. Se $r = 1$, abbiamo la singola equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad \text{in cui } a_1 \neq 0$$

Le variabili libere sono $x_2, \ldots, x_n$. Assegnamo loro dei valori arbitrari; diciamo $x_2 = k_2,\ x_3 = k_3,\ \ldots,\ x_n = k_n$. Sostituendo nell'equazione e risolvendo rispetto a x_1,

$$x_1 = \frac{1}{a_1}(b - a_2k_2 - a_3k_3 - \cdots - a_nk_n)$$

Detti valori costituiscono una soluzione dell'equazione; infatti sostituendo si ottiene

$$a_1\left[\frac{1}{a_1}(b - a_2k_2 - \cdots - a_nk_n)\right] + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b \qquad \text{o} \qquad b = b$$

che è un'affermazione vera.

Inoltre se $r = n = 1$, abbiamo allora $ax = b$, in cui $a \neq 0$. Notare che $x = b/a$ è una soluzione, essendo vera $a(b/a) = b$. Ancora, se $x = k$ è una soluzione, cioè $ak = b$, è $k = b/a$. Perciò, come si è enunciato, l'equazione ha un'unica soluzione.

Assumiamo ora $r > 1$, e che il teorema sia vero per un sistema di $r - 1$ equazioni. Noi vediamo queste $r - 1$ equazioni

$$\begin{aligned} a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots\cdots\cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

come un sistema nelle incognite $x_{j_2}, \ldots, x_n$. Notare che il detto sistema è disposto a gradini. Per induzione possiamo assegnare dei valori arbitrari alle $(n - j_2 + 1) - (r - 1)$ variabili libere, nel sistema ridotto, per avere una soluzione (diciamo $x_{j_2} = k_{j_2},\ \ldots,\ x_n = k_n$). Come nel caso $r = 1$, questi valori, ed altri valori ancora arbitrari per le $j_2 - 2$ variabili libere addizionali (diciamo $x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_{j_2-1} = k_{j_2-1}$), portano ad una soluzione per la prima equazione; ed è

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}k_2 - \cdots - a_{1n}k_n)$$

(Si noti che vi sono $(n - j_2 + 1) - (r - 1) + (j_2 - 2) = n - r$ variabili libere.) Per di più detti valori per $x_1, \ldots, x_n$ soddisfano anche le altre equazioni, dato che nelle dette i coefficienti di $x_1, \ldots, x_{j_2-1}$ sono zero.

Ora, se $r = n$, allora è $j_2 = 2$. Perciò per induzione otteniamo un'unica soluzione del sottosistema, e quindi una, unica ancora, del sistema completo. Di conseguenza il teorema è provato.

2.15. Un sistema (*) di equazioni lineari si definisce *consistente* se nessuna combinazione lineare delle sue equazioni coincide con l'equazione

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \qquad \text{con } b \neq 0 \tag{1}$$

Dimostrare che il sistema (*) è consistente se e solo se è riducibile nella forma a gradini.

Poniamo che (*) sia riducibile in detta forma a gradini. Allora esso avrà una soluzione la quale, per il problema 2.12, è soluzione di ogni combinazione lineare delle sue equazioni. Poiché la (*1*) non ha soluzioni, non può essere una combinazione lineare delle equazioni di (*). E' come dire che (*) è consistente.

Poniamo invece che (*) non sia riducibile in forma a gradini. Allora, nel procedimento di riduzione, deve dare un'equazione con la forma (*1*). Come dire che la (*1*) è una combinazione lineare delle equazioni di (*). Ed allora (*) non è consistente, cioè è inconsistente.

9

Supponiamo ancora che blocchi corrispondenti di A e B abbiano le stesse misure. Sommare questi blocchi corrispondenti vuol dire sommare gli elementi corrispondenti di A e B. Di conseguenza:

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2n}+B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \dots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix}$$

Il caso del prodotto di matrici è meno ovvio ma ancora valido. Supponiamo dunque che le matrici U e V vengano ripartite in blocchi come segue:

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1p} \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{m1} & U_{m2} & \dots & U_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{p1} & V_{22} & \dots & V_{pn} \end{pmatrix}$$

in modo che il numero di colonne di ciascun blocco U_{ik} sia uguale al numero di righe di ciascun blocco V_{kj}. Allora

$$UV = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m1} & W_{m2} & \dots & W_{mn} \end{pmatrix}$$

in cui $$W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj}$$

La dimostrazione della formula suddetta è semplice, ma lunga e dettagliata. Viene lasciata come problema supplementare (problema 3.68).

PROBLEMI RISOLTI

SOMMA DI MATRICI E MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

3.1. Calcolare:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (iii) $-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

(i) Sommare gli elementi corrispondenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 2-5 & -3+6 & 4-1 \\ 0+2 & -5+0 & 1-2 & -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii) La somma non è definita, essendo le matrici di forma diversa.

(iii) Moltiplicare per lo scalare -3 ogni elemento della matrice:

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 \\ -12 & 15 & -18 \end{pmatrix}$$

3.2. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare $3A + 4B - 2C$.

Compiere prima le moltiplicazioni per gli scalari, poi la somma matriciale:

$$3A + 4B - 2C = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 & -12 \\ 0 & -4 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -25 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

3.3. Trovare x, y, z, w se $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$.

Scrivere prima ciascun membro come un'unica matrice:

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+w-1 & 2w+3 \end{pmatrix}$$

Uguagliare gli elementi corrispondenti per ottenere il sistema di quattro equazioni,

$$\begin{aligned} 3x &= x+4 \\ 3y &= x+y+6 \\ 3z &= z+w-1 \\ 3w &= 2w+3 \end{aligned} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{aligned} 2x &= 4 \\ 2y &= 6+x \\ 2z &= w-1 \\ w &= 3 \end{aligned}$$

La soluzione è: $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$, $w = 3$.

3.4. Dimostrare il teorema 3.1(v): Siano A e B delle matrici $m \times n$; e k uno scalare. Allora è $k(A+B) = kA + kB$.

Poniamo $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Allora $a_{ij} + b_{ij}$ è l'elemento ij-esimo di $A + B$, e $k(a_{ij} + b_{ij})$ è l'elemento ij-esimo di $k(A + B)$. D'altra parte ka_{ij} e kb_{ij} sono gli elementi ij-esimi di kA e kB rispettivamente, e analogamente $ka_{ij} + kb_{ij}$ è l'elemento ij-esimo di $kA + kB$. Ma k, a_{ij} e b_{ij} sono degli scalari in un campo; quindi

$$k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}, \quad \text{per ogni } i, j$$

Perciò $k(A + B) = kA + kB$, essendo uguali i corrispondenti elementi.

Osservazione: Notare la somiglianza tra questa dimostrazione e quella del teorema 1.1(v) nel problema 1.6 a pag. 7. Infatti tutti gli altri punti del teorema in esame sono dimostrati nello stesso modo dei corrispondenti punti del teorema 1.1.

PRODOTTO DI MATRICI

3.5. Indichi $(r \times s)$ una matrice di dimensioni $r \times s$. Trovare le dimensioni dei seguenti prodotti, sempre che il prodotto sia definito:

(i) $(2\times 3)(3\times 4)$ (iii) $(1\times 2)(3\times 1)$ (v) $(3\times 4)(3\times 4)$

(ii) $(4\times 1)(1\times 2)$ (iv) $(5\times 2)(2\times 3)$ (vi) $(2\times 2)(2\times 4)$

Ricordiamo che una matrice $m \times p$ ed una $q \times n$ sono moltiplicabili solo quando è $p = q$, e allora il prodotto è una matrice $m \times n$. Perciò ognuno dei suddetti prodotti è definito se i numeri "interni" sono uguali, ed il prodotto avrà la dimensione dei numeri "esterni", nell'ordine dato.

(i) Il prodotto è una matrice 2×4.

(ii) Il prodotto è una matrice 4×2.

(iii) Il prodotto non è definito: i numeri interni 2 e 3 non sono uguali.

(iv) Il prodotto è una matrice 5×3.

(v) Il prodotto non è definito, anche se le matrici hanno la stessa forma.

(vi) Il prodotto è una matrice 2×4.

 11

3.6. Siano $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$. Trovare (i) AB, (ii) BA.

(i) Poiché A è 2×2 e B è 2×3, il prodotto AB è definito, ed è una matrice 2×3. Per avere gli elementi della prima riga di AB, moltiplicare la prima riga $(1, 3)$ di A per le colonne $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ di B rispettivamente:

$$\begin{pmatrix}\text{[redacted]} & \\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{[redacted]}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot3 & 1\cdot0+3\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+3\cdot6\\ & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2+9 & 0-6 & -4+18\\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & -6 & 14\\ & & \end{pmatrix}$$

Gli elementi della seconda riga di AB si ottengono moltiplicando la seconda riga $(2, -1)$ di A per le colonne di B rispettivamente:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ \text{[redacted]} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{[redacted]}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & -6 & 14\\ 2\cdot2+(-1)\cdot3 & 2\cdot0+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-4)+(-1)\cdot6\end{pmatrix}$$

Perciò $$AB = \begin{pmatrix}11 & -6 & 14\\ 1 & 2 & -14\end{pmatrix}$$

(ii) Si noti che B è 2×3, mentre A è 2×2. Poiché i numeri interni 3 e 2 non sono uguali, il prodotto BA non è definito.

3.7. Date $A = (2,1)$ e $B = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 5 & -3\end{pmatrix}$, trovare (i) AB, (ii) BA.

(i) Dato che A è 1×2 e B è 2×3, il prodotto AB è definito ed è una matrice 1×3, cioè un vettore riga con 3 componenti. Per ottenere queste si moltiplica la riga di A per ogni colonna di B:

$$AB = (\text{[redacted]})\begin{pmatrix}\text{[redacted]}\end{pmatrix} = (2\cdot1+1\cdot4,\ 2\cdot(-2)+1\cdot5,\ 2\cdot0+1\cdot(-3)) = (6, 1, -3)$$

(ii) Si noti che B è 2×3 ed A è 1×2. Dato che i numeri interni 3 ed 1 non sono uguali, il prodotto BA non è definito.

3.8. Date $A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix}1 & -2 & -5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$, trovare (i) AB, (ii) BA.

(i) Poiché A è 3×2 e B è 2×3, il prodotto AB è definito ed è una matrice 3×3. Per ottenere la prima riga di AB si moltiplica la prima riga di A rispettivamente per ogni colonna di B:

$$\begin{pmatrix}\text{[redacted]} & \\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{[redacted]}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3 & -4-4 & -10+0\\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -8 & -10\\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Per avere la seconda riga moltiplicare rispettivamente la seconda riga di A per ogni colonna di B:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1+0 & -2+0 & -5+0\\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & -2 & -5\\ & & \end{pmatrix}$$

Per ottenere la terza riga si moltiplica infine la terza riga di A per ogni colonna di B:

12

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\text{[redacted]}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{[redacted]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3+12 & 6+16 & 15+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Perciò
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

(ii) Essendo B una matrice 2×3 ed A una 3×2, il prodotto BA è definito, ed è una matrice 2×2. Per avere la prima riga di BA si moltiplica la prima riga di B per ogni colonna di A rispettivamente:

$$\begin{pmatrix} \multicolumn{3}{c}{\text{[redacted]}} \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{[redacted]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2+15 & -1+0-20 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ & \end{pmatrix}$$

Per la seconda riga si moltiplica la seconda riga di B rispettivamente per ogni colonna di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ \multicolumn{3}{c}{\text{[redacted]}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{[redacted]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 6+4+0 & -3+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Perciò
$$BA = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Si noti che in questo caso sia AB che BA sono definite, ma non sono uguali; infatti non hanno neanche la stessa forma.

3.9. Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare la forma di AB. (ii) Indichi c_{ij} l'elemento della i-esima riga, j-esima colonna della matrice prodotto AB, ovvero $AB = (c_{ij})$. Trovare c_{23}, c_{14}, c_{21}.

(i) Dato che A è una matrice 2×3 e B una 3×4, il prodotto AB sarà una matrice 2×4.

(ii) c_{ij} è definito come prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B. Quindi:

$$c_{23} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) = 0 + 0 + 6 = 6$$

$$c_{14} = (2, -1, 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 2 + 1 + 0 = 3$$

$$c_{21} = (1, 0, -3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 1 + 0 - 12 = -11$$

3.10. Calcolare: (i) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ (v) $(2, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(3, 2)$

(i) Il primo fattore è una 2×2, il secondo ancora una 2×2: il prodotto è dunque definito ed è una matrice 2×2.

13

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 6\cdot 2 & 1\cdot 0 + 6\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 4 + 5\cdot 2 & (-3)\cdot 0 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(ii) Il primo fattore è una 2×2, il secondo una 2×1; il prodotto è definito ed è una matrice 2×1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 6\cdot(-7) \\ (-3)\cdot 2 + 5\cdot(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ -41 \end{pmatrix}$$

(iii) Ora il primo fattore è una 2×1, il secondo una 2×2; i numeri interni 1 e 2 sono diversi, il prodotto non è definito.

(iv) Qui il primo fattore è una 2×1, il secondo 1×2: allora il prodotto è definito ed è una matrice 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}(3, 2) = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 & 1\cdot 2 \\ 6\cdot 3 & 6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

(v) Il primo fattore è una 1×2, il secondo 2×1; il prodotto è definito ed è una matrice 1×1: quella che spesso scriviamo come scalare.

$$(2, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} = (2\cdot 1 + (-1)\cdot(-6)) = (8) = 8$$

3.11. Dimostrare il teorema 3.2(i): $(AB)C = A(BC)$.

Siano $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kl})$. Inoltre, sia $AB = S = (s_{ik})$ e $BC = T = (t_{jl})$. Allora:

$$s_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$t_{jl} = b_{j1}c_{1l} + b_{j2}c_{2l} + \cdots + b_{jn}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kl}$$

Ora, se moltiplichiamo S per C, ovvero (AB) per C, l'elemento della i-esima riga, l-esima colonna della matrice $(AB)\,C$ sarà

$$s_{i1}c_{1l} + s_{i2}c_{2l} + \cdots + s_{in}c_{nl} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_{ij}b_{jk})c_{kl}$$

D'altra parte, moltiplicando A per T, ovvero per BC, l'elemento della i-esima riga, l-esima colonna della matrice $A(BC)$ sarà

$$a_{i1}t_{1l} + a_{i2}t_{2l} + \cdots + a_{im}t_{ml} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_{jl} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{kl})$$

Essendo le suddette somme uguali, il teorema è dimostrato.

3.12. Dimostrare il teorema 3.2(ii): $A(B + C) = AB + AC$.

Siano $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{jk})$. Siano ancora $D = B + C = (d_{jk})$, $E = AB = (e_{ik})$ e $F = AC = (f_{ik})$. Allora

$$d_{jk} = b_{jk} + c_{jk}$$

$$e_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$f_{ik} = a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{im}c_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk}$$

Quindi l'elemento della i-esima riga, k-esima colonna della matrice $AB + AC$ sarà

$$e_{ik} + f_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

D'altra parte l'elemento della i-esima riga, k-esima colonna della matrice $AD = A(B + C)$ è

$$a_{i1}d_{1k} + a_{i2}d_{2k} + \cdots + a_{im}d_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}d_{jk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk})$$

Quindi è $A(B + C) = AB + AC$, dato che gli elementi corrispondenti sono uguali.

14

TRASPOSTA

3.13. Trovare la trasposta A^t della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Riscrivere le righe di A come colonne di A^t: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

3.14. Sia A una matrice arbitraria. Sotto quali condizioni è definito il prodotto AA^t?

Poniamo che A sia una matrice $m \times n$; allora A^t è una $n \times m$. Perciò il prodotto AA^t è sempre definito. Si osservi che l'A^tA è ugualmente definito. Qui AA^t è una matrice $m \times m$, mentre A^tA è una matrice $n \times n$.

3.15. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Trovare (i) AA^t, (ii) A^tA.

Per ottenere A^t, riscriviamo le righe di A come colonne: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Allora

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot2+0\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1)+0\cdot4 \\ 3\cdot1+(-1)\cdot2+4\cdot0 & 3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+3\cdot(-1) & 1\cdot0+3\cdot4 \\ 2\cdot1+(-1)\cdot3 & 2\cdot2+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot0+(-1)\cdot4 \\ 0\cdot1+4\cdot3 & 0\cdot2+4\cdot(-1) & 0\cdot0+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

3.16. Dimostrare il teorema 3.3(iv): $(AB)^t = B^tA^t$.

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$. Allora l'elemento nella i-esima riga, j-esima colonna della matrice AB sarà

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} \qquad (1)$$

Quindi (1) è l'elemento che compare nella riga j-esima, colonna i-esima della matrice trasposta $(AB)^t$.

D'altra parte la riga j-esima di B^t consiste negli elementi della colonna j-esima di B:

$$(b_{1j} \;\; b_{2j} \;\; \ldots \;\; b_{mj}) \qquad (2)$$

Inoltre la colonna i-esima di A^t consiste negli elementi della riga i-esima di A:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a_{im} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Per conseguenza, l'elemento che compare nella riga j-esima, colonna i-esima della matrice B^tA^t è il prodotto di (2) per (3), che dà (1). Perciò $(AB)^t = B^tA^t$.

15

MATRICI A GRADINI E OPERAZIONI ELEMENTARI DI RIGA

3.17. Segnare gli elementi distinti in ognuna delle seguenti matrici a gradini. Quali fra queste sono delle matrici a gradini ridotte per righe?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Elementi distinti sono i primi elementi non zero di ogni riga; quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Una matrice a gradini è ridotta per righe se i suoi elementi distinti sono tutti 1, e sono gli unici elementi non nulli nelle rispettive colonne. Così seconda e terza matrice sono ridotte per righe, mentre la prima non lo è.

3.18. Sia data $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (i) Ridurre A in forma a gradini. (ii) Ridurre A in forma canonica per righe, cioè in forma a gradini ridotta per righe.

(i) Usare le operazioni $R_2 \to -2R_1 + R_2$ e $R_3 \to -3R_1 + R_3$, quindi la $R_3 \to -7R_2 + 3R_3$ per ridurre A in forma a gradini:

$$A \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix} \text{ e in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Metodo 1.** Applicare l'operazione $R_1 \to 2R_2 + 3R_1$, e poi le $R_1 \to -R_3 + 7R_1$ e $R_2 \to 4R_3 + 7R_2$ all'ultima matrice in (i) per ridurre ulteriormente A:

$$\text{in } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix} \text{ e in } \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 21 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

Infine, moltiplicando R_1 per 1/21, R_2 per 1/21 ed R_3 per 1/7, otteniamo la forma canonica per righe di A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 \end{pmatrix}$$

Metodo 2. Nell'ultima matrice di (i) si moltiplica R_2 per 1/3 ed R_3 per 1/7, ottenendo una matrice a gradini in cui gli elementi distinti sono tutti 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 \end{pmatrix}$$

Applichiamo ora l'operazione $R_1 \to 2R_2 + R_1$, e poi le $R_2 \to (4/3)R_3 + R_2$ e $R_1 \to (-1/3)R_3 + R_1$, ottenendo così la già vista forma canonica per righe di A.

Osservazione: Un vantaggio del primo metodo consiste nel fatto che le frazioni non sono comparse fino all'ultimo passaggio.

16

3.19. Determinare la forma canonica per righe di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

A diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ e ancora $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

in $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e in $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si noti che la terza matrice è già nella forma a gradini.

3.20. Ridurre la $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ in forma a gradini e poi in forma a gradini ridotta per righe, cioè nella sua forma canonica per righe.

I calcoli si fanno solitamente più semplici se l'elemento su cui ruota è 1. Scambiare dunque subito la prima con la terza riga:

A in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

diventa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -26/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e poi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/9 \\ 0 & 1 & -26/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Notare che la terza matrice è già in forma canonica.

3.21. Dimostrare che ciascuna delle seguenti operazioni elementari di riga ha un'operazione inversa dello stesso tipo.

$[E_1]$: Scambio della riga i-esima con la riga j-esima: $R_i \leftrightarrow R_j$.

$[E_2]$: Moltiplicare la riga i-esima per uno scalare non nullo k: $R_i \to kR_i,\ k \neq 0$.

$[E_3]$: Sostituire la riga i-esima con la j-esima moltiplicata per k più la i-esima stessa: $R_i \to kR_j + R_i$.

(i) Scambiando due volte le stesse due righe, otteniamo la matrice originale; è come dire che questa operazione è la sua propria inversa.

(ii) Moltiplicando la riga i-esima per k e poi per k^{-1}, o per k^{-1} e poi per k, si ottiene la matrice originale. In altri termini, le operazioni $R_i \to kR_i$ e $R_i \to k^{-1}R_i$ sono inverse.

(iii) Applicando l'operazione $R_i \to kR_j + R_i$ e quindi la $R_i \to -kR_j + R_i$, oppure usando la $R_i \to -kR_j + R_i$ e poi la $R_i \to kR_j + R_i$, si ottiene la matrice originale. In altre parole, le operazioni $R_i \to kR_j + R_i$ e $R_i \to -kR_j + R_i$ sono inverse.

MATRICI QUADRATE

3.22. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Trovare (i) A^2, (ii) A^3, (iii) $f(A)$, in cui $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

(i) $$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 + (-3)\cdot 4 & 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

17

(ii) $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot(-8) & 1\cdot(-4) + 2\cdot 17 \\ 4\cdot 9 + (-3)\cdot(-8) & 4\cdot(-4) + (-3)\cdot 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix}$$

(iii) Per trovare $f(A)$, sostituire prima A ad x, e $5I$ alla costante 5, nel polinomio dato $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$:

$$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I = 2\begin{pmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare poi ogni matrice per il rispettivo scalare:

$$= \begin{pmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sommare infine gli elementi corrispondenti delle matrici:

$$= \begin{pmatrix} -14 - 4 + 5 & 60 - 8 + 0 \\ 120 - 16 + 0 & -134 + 12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{pmatrix}$$

3.23. Con riferimento al problema 3.22, dimostrare che A è uno zero del polinomio $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

A è uno zero di $g(x)$ se la matrice $g(A)$ è la matrice zero. Calcolare $g(A)$ come si è fatto per $f(A)$, sostituendo cioè A ad x e $11I$ alla costante 11 in $g(x) = x^2 + 2x - 11$:

$$g(A) = A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare poi ogni matrice per lo scalare che la precede:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Sommare infine gli elementi corrispondenti:

$$g(A) = \begin{pmatrix} 9 + 2 - 11 & -4 + 4 + 0 \\ -8 + 8 + 0 & 17 - 6 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo $g(A) = 0$, A è uno zero del polinomio $g(x)$.

3.24. E' data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Trovare un vettore colonna non zero $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, per il quale sia $Au = 3u$.

Esplicitiamo prima l'equazione matriciale $Au = 3u$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Scriviamo di nuovo ambo i membri come una matrice singola (vettore colonna):

$$\begin{pmatrix} x + 3y \\ 4x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$$

Uguagliamo gli elementi corrispondenti per ottenere il sistema di equazioni (e per ridurre in forma a gradini):

$$\begin{aligned} x + 3y &= 3x \\ 4x - 3y &= 3y \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 4x - 6y &= 0 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 2x - 3y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad \text{o} \quad 2x - 3y = 0$$

Il sistema si riduce ad un'equazione omogenea a due incognite, ed ha perciò infinite soluzioni. Per avere una soluzione non nulla poniamo, per esempio, $y = 2$; allora $x = 3$. Cioè $x = 3$, $y = 2$ è una soluzione del sistema. Quindi il vettore $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è non nullo, ed ha le proprietà che $Au = 3u$.

3.25. Trovare l'inversa di $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Metodo 1. Cerchiamo degli scalari x, y, z, w per cui

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 3x+5z & 3y+5w \\ 2x+3z & 2y+3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

o che soddisfino $\begin{cases} 3x+5z = 1 \\ 2x+3z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3y+5w = 0 \\ 2y+3w = 1 \end{cases}$

La soluzione del primo sistema è $x = -3$, $z = 2$, e quella del secondo è $y = 5$, $w = -3$. Perciò l'inversa della matrice assegnata è $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Metodo 2. Abbiamo ricavato a suo tempo la formula generale per l'inversa A^{-1} della matrice 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{in cui} \quad |A| = ad - bc$$

Perciò se $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, è allora $|A| = 9 - 10 = -1$ e $A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

PROBLEMI DIVERSI

3.26. Calcolare AB con la moltiplicazione a blocchi, essendo:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Abbiamo qui $A = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & T \end{pmatrix}$, in cui E, F, G, R, S, T sono i blocchi assegnati. Quindi

$$AB = \begin{pmatrix} ER & ES+FT \\ 0 & GT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \ \ 0 \ \ 0) & (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.27. Poniamo $B = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$, cioè che R_i sia la riga i-esima di B. Ammettiamo che BA sia definito. Dimostriamo che $BA = (R_1A, R_2A, \ldots, R_nA)$, ovvero che R_iA è la riga i-esima di BA.

Siano $A^1, A^2, \ldots, A^m$ le colonne di A. Per definizione di moltiplicazione matriciale, la riga i-esima di BA è $(R_i \cdot A^1, R_i \cdot A^2, \ldots, R_i \cdot A^m)$. Ma con la moltiplicazione matriciale si ha $R_iA = (R_i \cdot A^1, R_i \cdot A^2, \ldots, R_i \cdot A^m)$. Perciò la riga i-esima di BA è R_iA.

3.28. Sia $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ il vettore riga avente 1 nella posizione i-esima e 0 in tutte le altre. Dimostrare che $e_iA = R_i$, riga i-esima di A.

Osservare che e_i è riga i-esima di I, matrice identità. Per il problema precedente, la riga i-esima di IA è e_iA. Ma $IA = A$. Di conseguenza $e_iA = R_i$, riga i-esima di A.

3.29. Dimostrare: (i) Se A ha una riga zero, anche AB ha una riga zero.

(ii) Se B ha una colonna zero, anche AB ha una colonna zero.

(iii) Qualsiasi matrice con una riga zero o una colonna zero è non invertibile.

(i) Sia R_i la riga zero di A, e $B^1, \ldots, B^n$ le colonne di B. Allora la riga i-esima di AB è

$$(R_i \cdot B^1, R_i \cdot B^2, \ldots, R_i \cdot B^n) = (0, 0, \ldots, 0)$$

19

(ii) Sia C_j la colonna zero di B, e $A_1, \ldots, A_m$ le righe di A. Allora la colonna j-esima di AB è

$$\begin{pmatrix} A_1 \cdot C_j \\ A_2 \cdot C_j \\ \cdots \\ A_m \cdot C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Se la matrice A è invertibile, deve esistere una matrice A^{-1} tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Ma la matrice identità I non ha righe zero o colonne zero; quindi, per (i) e (ii), A non può avere una riga o una colonna zero. In altri termini, una matrice con una riga o una colonna zero non può essere invertibile.

3.30. Siano A e B delle matrici invertibili (dello stesso ordine). Dimostrare che il prodotto AB è anche invertibile, e che $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Sarà quindi per induzione $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ dove le A_i sono invertibili.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e $$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

Perciò $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.31. Siano u e v dei vettori distinti. Dimostrare che, per ogni scalare $k \in K$, i vettori $u + k(u-v)$ sono ancora distinti.

Basta dimostrare che se

$$u + k_1(u-v) = u + k_2(u-v) \tag{1}$$

allora $k_1 = k_2$. Supponiamo che la (1) sussista. Quindi

$$k_1(u-v) = k_2(u-v) \quad \text{ovvero} \quad (k_1-k_2)(u-v) = 0$$

Poiché u e v sono distinti, $u - v \neq 0$. Di qui abbiamo $k_1 - k_2 = 0$ e $k_1 = k_2$.

MATRICI ELEMENTARI E APPLICAZIONI*

3.32. Una matrice ottenuta dalla matrice identità con una sola operazione elementare di riga si chiama *matrice elementare*. Determinare le matrici elementari, quadrate di ordine 3, che corrispondono alle operazioni $R_1 \leftrightarrow R_2$, $R_3 \rightarrow -7R_3$ e $R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2$.

Applicare dette operazioni alla matrice identica $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ottenendo

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.33. Sia e un'operazione elementare di riga, ed E la corrispondente matrice elementare quadrata di ordine m, cioè $E = e(I_m)$. Dimostrare allora che per una matrice $m \times n$ qualsiasi A, $e(A) = EA$. E' come dire che il risultato $e(A)$ dell'applicazione dell'operazione e alla matrice A può essere ottenuto moltiplicando A per la matrice elementare corrispondente E.

Sia R_i la riga i-esima di A; questo si indica scrivendo $A = (R_1, \ldots, R_m)$. Per il problema 3.27, se B è una matrice per cui il prodotto AB è definito, allora $AB = (R_1B, \ldots, R_mB)$. Poniamo ancora

$$e_i = (0, \ldots, 0, \hat{1}, 0, \ldots, 0), \qquad \wedge = i$$

* Questo paragrafo è piuttosto approfondito; si può saltarlo in prima lettura. Esso non è necessario, se non per alcuni risultati nel capitolo 9 sui determinanti.

Qui $\wedge = i$ significa che 1 è la componente i-esima. Per il problema 3.28, $e_i A = R_i$. Osserviamo inoltre che $I = (e_1, \ldots, e_m)$ è la matrice identità.

(i) Sia e l'operazione elementare di riga $R_i \leftrightarrow R_j$. Allora, per $\wedge = i$ e $\wedge = j$,

$$E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, \widehat{\widehat{e_i}}, \ldots, e_m)$$

e
$$e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{R_j}, \ldots, \widehat{\widehat{R_i}}, \ldots, R_m)$$

Perciò

$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{e_jA}, \ldots, \widehat{\widehat{e_iA}}, \ldots, e_mA) = (R_1, \ldots, \widehat{R_j}, \ldots, \widehat{\widehat{R_i}}, \ldots, R_m) = e(A)$$

(ii) Sia ora e l'operazione elementare di riga $R_i \to kR_i$, $k \neq 0$. Allora, per $\wedge = i$,

$$E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{ke_i}, \ldots, e_m) \quad \text{e} \quad e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_i}, \ldots, R_m)$$

Quindi
$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{ke_iA}, \ldots, e_mA) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_i}, \ldots, R_m) = e(A)$$

(iii) Sia infine e l'operazione elementare di riga $R_i \to kR_j + R_i$. Allora, per $\wedge = i$,

$$E = e(I) = (e_1, \ldots, \widehat{ke_j + e_i}, \ldots, e_m) \quad \text{e} \quad e(A) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_j + R_i}, \ldots, R_m)$$

Usando la $(ke_j + e_i)A = k(e_jA) + e_iA = kR_j + R_i$ si avrà

$$EA = (e_1A, \ldots, \widehat{(ke_j + e_i)A}, \ldots, e_mA) = (R_1, \ldots, \widehat{kR_j + R_i}, \ldots, R_m) = e(A)$$

Dimostriamo così il teorema.

3.34. Dimostrare che A è equivalente per righe e B solo ed esclusivamente se esistono delle matrici elementari $E_1, \ldots, E_s$ tali che $E_s \cdots E_2E_1A = B$.

Per definizione, A è equivalente per righe a B se esistono delle operazioni elementari di riga $e_1, \ldots, e_s$ per le quali $e_s(\cdots(e_2(e_1(A)))\cdots) = B$. Ma, per il problema precedente, quanto detto sussiste solo ed esclusivamente se $E_s \cdots E_2E_1A = B$, in cui E_i è la matrice elementare corrispondente ad e_i.

3.35. Dimostrare che le matrici elementari sono invertibili, e che le loro inverse sono ancora delle matrici elementari.

Sia E la matrice elementare che corrisponde all'operazione elementare di riga e: $e(I) = E$. Sia e' l'operazione inversa di e (vedere il problema 3.21) ed E' la corrispondente matrice elementare. Allora, per il problema 3.33,

$$I = e'(e(I)) = e'E = E'E \quad \text{e} \quad I = e(e'(I)) = eE' = EE'$$

Quindi E' è l'inversa di E.

3.36. Dimostrare che sono equivalenti gli enunciati che seguono:

(i) A è invertibile.

(ii) A è equivalente per righe alla matrice identità I.

(iii) A è un prodotto di matrici elementari.

Poniamo che A sia invertibile, nonché equivalente per righe alla matrice a gradini B ridotta per righe. Esistono allora delle matrici elementari $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tali che $E_s \cdots E_2E_1A = B$. Poiché A è invertibile, e così è ogni matrice elementare E_i, il prodotto stesso è invertibile. Ma se $B \neq I$, B ha una riga zero (problema 3.47); quindi B è non invertibile (problema 3.29). Perciò $B = I$. In altre parole, (i) implica (ii).

Ora, se sussiste la (ii), esistono allora delle matrici elementari $E_1, E_2, \ldots, E_s$ tali che

$$E_s \cdots E_2E_1A = I, \quad \text{e quindi} \quad A = (E_s \cdots E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_s^{-1}$$

Per il problema precedente, le E_i^{-1} sono anche delle matrici elementari. Perciò (ii) implica (iii).

Ed ora, se sussiste la (iii) $(A = E_1E_2 \ldots E_s)$, allora deve seguirne la (i), dato che il prodotto di matrici invertibili è ancora invertibile.

21

3.37. Siano A e B delle matrici quadrate dello stesso ordine. Dimostrare che se $AB = I$, è allora $B = A^{-1}$. Perciò $AB = I$ solo ed unicamente se $BA = I$.

Poniamo che A non sia invertibile. Allora A non risulta equivalente per righe alla matrice identica I, e quindi è equivalente per righe ad una matrice con una riga zero. In altri termini, esistono delle matrici elementari $E_1, \ldots, E_s$ tali che $E_s \cdots E_2E_1A$ ha una riga zero. Quindi $E_s \cdots E_2E_1AB$ ha una riga zero. Ne consegue che AB è equivalente per righe ad una matrice con una riga zero, e perciò non è equivalente per righe ad I. Questo contraddice al fatto che è $AB = I$, e perciò A è invertibile. Quindi

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I = A^{-1}$$

3.38. Poniamo che A sia invertibile e, diciamo, riducibile per righe alla matrice identica I tramite la sequenza di operazioni elementari $e_1, \ldots, e_n$. (i) Dimostrare che questa sequenza di operazioni elementari di riga, applicata ad I, riconduce ad A^{-1}. (ii) Usare questo risultato per ottenere l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

(i) Sia E_i la matrice elementare corrispondente all'operazione e_i. Allora per l'ipotesi, e per il problema 3.34, $E_n \cdots E_2E_1A = I$. Perciò $(E_n \cdots E_2E_1I)A = I$, e quindi $A^{-1} = E_n \cdots E_2E_1I$. In altre parole, A^{-1} si può ottenere dalla I applicando le operazioni elementari di riga $e_1, \ldots, e_n$.

(ii) Formare la matrice a blocchi (A, I) e ridurla per righe alla forma canonica:

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ in } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{in } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ in } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{in } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Notare che la matrice a blocchi finale è nella forma (I, B). Quindi A è invertibile, e B è la sua inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Nel caso in cui la matrice a blocchi finale non sia nella forma (I, B), la matrice data non è equivalente per righe ad I, e quindi non è invertibile.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

OPERAZIONI MATRICIALI

Nei problemi 3.39-3.41 siano:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.39. Trovare: (i) $A + B$, (ii) $A + C$, (iii) $3A - 4B$.

3.40. Trovare: (i) AB, (ii) AC, (iii) AD, (iv) BC, (v) BD, (vi) CD.

3.41. Trovare: (i) A^t, (ii) A^tC, (iii) D^tA^t, (iv) B^tA, (v) D^tD, (vi) DD^t.

(22)

Ora, U e W sono sottospazi di V. Abbiamo:

$$U + W = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \quad \text{e} \quad U \cap W = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{R}\right\}$$

E' come dire che $U + W$ consiste in quelle matrici che hanno l'elemento inferiore destro uguale a zero, mentre $U \cap W$ consiste in quelle la cui seconda riga e seconda colonna sono zero.

Definizione: Lo spazio vettoriale V si dice *somma diretta* dei suoi sottospazi U e W,

$$V = U \oplus W$$

se ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come $v = u + w$ in uno e soltanto un modo, essendo $u \in U$ e $w \in W$.

Vale il seguente teorema.

Teorema 4.9: Lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei propri sottospazi U e W solo ed esclusivamente se: (i) $V = U + W$, e (ii) $U \cap W = \{0\}$.

Esempio 4.16: Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ sia U il piano xy, e W il piano yz:

$$U = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\} \quad \text{e} \quad W = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbf{R}\}$$

E' allora $\mathbf{R}^3 = U + W$ dato che ogni vettore in $\mathbf{R}^3$ è la somma di un vettore in U e di uno in W. Tuttavia $\mathbf{R}^3$ non è la somma diretta di U e W, dato che tali somme non sono uniche; per esempio,

$$(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7) \quad \text{ed anche} \quad (3, 5, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)$$

Esempio 4.17: In $\mathbf{R}^3$ sia U il piano xy, e W sia l'asse z:

$$U = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\} \quad \text{e} \quad W = \{(0, 0, c) : c \in \mathbf{R}\}$$

Ogni vettore $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ si può però scrivere come somma di un vettore in U e di uno in V, in un modo soltanto:

$$(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$$

Di conseguenza $\mathbf{R}^3$ è la somma diretta di U e W, ovvero $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

PROBLEMI RISOLTI

SPAZI VETTORIALI

4.1. Dimostrare il teorema 4.1: Sia V uno spazio vettoriale su di un campo K.

(i) Per ogni scalare $k \in K$ e $0 \in V$, $k0 = 0$.

(ii) Per $0 \in K$ ed ogni vettore $u \in V$, $0u = 0$.

(iii) Se $ku = 0$, essendo $k \in K$ e $u \in V$, allora $k = 0$ o $u = 0$.

(iv) Per ogni $k \in K$ ed ogni $u \in V$, $(-k)u = k(-u) = -ku$.

(i) Dall'assioma $[A_2]$ con $u = 0$, ricaviamo $0 + 0 = 0$. Allora per l'assioma $[M_1]$ è $[M_1]$, $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$. Sommando $-k0$ ad ambo i membri si ottiene il risultato voluto.

(ii) Per una proprietà di K, $0 + 0 = 0$. Quindi, per l'assioma $[M_2]$, $0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$. Sommando $-0u$ ad entrambe le parti, si giunge al risultato richiesto.

23

(iii) Poniamo $ku = 0$ e $k \neq 0$. Esiste allora uno scalare k^{-1} tale che $k^{-1}k = 1$; quindi

$$u = 1u = (k^{-1}k)u = k^{-1}(ku) = k^{-1}0 = 0$$

(iv) Usando la $u + (-u) = 0$, otteniamo $0 = k0 = k(u + (-u)) = ku + k(-u)$. Sommando $-ku$ ad ambo i membri otteniamo $-ku = k(-u)$.

Con la $k + (-k) = 0$ si ha $0 = 0u = (k + (-k))u = ku + (-k)u$. Aggiungendo $-ku$ ad entrambe le parti abbiamo $-ku = (-k)u$. Perciò $(-k)u = k(-u) = -ku$.

4.2. Dimostrare che per ogni scalare k e ogni vettore u e v, $k(u-v) = ku - kv$.

Con la definizione di sottrazione $(u - v = u + (-v))$ e con il risultato del teorema 4.1 (iv) $(k(-v) = -kv)$,

$$k(u-v) = k(u+(-v)) = ku + k(-v) = ku + (-kv) = ku - kv$$

4.3. Nell'enunciato dell'assioma $[M_2]$, $(a + b)u = au + bu$, quale operazione è rappresentata da ogni segno più?

Il $+$ in $(a+b)u$ indica l'addizione dei due scalari a e b; perciò esso rappresenta l'operazione addizione nel campo K. D'altro canto, il $+$ in $au + bu$ indica la somma dei vettori au e bu; quindi esso rappresenta l'operazione di somma vettoriale. Perciò ogni $+$ rappresenta un'operazione diversa.

4.4. Nell'enunciato dell'assioma $[M_3]$, $(ab)u = a(bu)$, quale operazione è rappresentata da ciascun prodotto?

In $(ab)u$ il prodotto ab degli scalari a e b indica moltiplicazione nel campo K, là dove il prodotto dello scalare ab e del vettore u indica moltiplicazione per uno scalare.

In $a(bu)$ il prodotto bu dello scalare b per il vettore u indica moltiplicazione per uno scalare; il prodotto dello scalare a per il vettore bu indica ancora moltiplicazione per uno scalare.

4.5. Sia V l'insieme di tutte le funzioni da un insieme non vuoto X in un campo K. Per tutte le funzioni $f, g \in V$ e per ogni scalare $k \in K$, siano $f + g$ e kf le funzioni in V definite come segue:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (kf)(x) = kf(x), \qquad \forall x \in X$$

(Il simbolo $\forall$ significa "per ogni".) Dimostrare che V è uno spazio vettoriale su K.

Dal momento che X non è vuoto, anche V non è vuoto. Ora dobbiamo dimostrare che sussistono tutti gli assiomi di uno spazio vettoriale.

$[A_1]$: Siano $f, g, h \in V$. Per dimostrare che $(f+g) + h = f + (g+h)$, è necessario dimostrare che sia la funzione $(f+g)+h$ che la $f+(g+h)$ assegnano lo stesso valore ad ogni $x \in X$. Ora,

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x), \qquad \forall x \in X$$
$$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)), \qquad \forall x \in X$$

Ma $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ sono scalari nel campo K, nel quale l'addizione di scalari è associativa; quindi

$$(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$$

Di conseguenza, $(f+g) + h = f + (g+h)$.

$[A_2]$: Indichi $\mathbf{0}$ la funzione zero: $\mathbf{0}(x) = 0$, $\forall x \in X$. Allora per ogni $f \in V$,

$$(f+\mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + 0 = f(x), \qquad \forall x \in X$$

Perciò $f + \mathbf{0} = f$, e $\mathbf{0}$ è il vettore zero in V.

24

$[A_3]$: Per ogni funzione $f \in V$, sia $-f$ la funzione definita da $(-f)(x) = -f(x)$. Allora,

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x), \quad \forall x \in X$$

Quindi $f + (-f) = \mathbf{0}$.

$[A_4]$: Siano $f, g \in V$. Allora

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x), \quad \forall x \in X$$

Quindi $f + g = g + f$. (Notare che $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ deriva dal fatto che $f(x)$ e $g(x)$ sono scalari nel campo K, in cui l'addizione è commutativa.)

$[M_1]$: Siano $f, g \in V$ e $k \in K$. Allora

$$\begin{aligned}(k(f+g))(x) &= k((f+g)(x)) = k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x) \\ &= (kf)(x) + (kg)(x) = (kf + kg)(x), \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

Ne deriva che $k(f+g) = kf + kg$. (Notare che $k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x)$ proviene dal fatto che $k, f(x), g(x)$ sono scalari nel campo K, in cui la moltiplicazione è distributiva con l'addizione.)

$[M_2]$: Siano $f \in V$ e $a, b \in K$. Allora

$$\begin{aligned}((a+b)f)(x) &= (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + bf(x) \\ &= (af + bf)(x), \quad \forall x \in X\end{aligned}$$

Perciò $(a+b)f = af + bf$.

$[M_3]$: Siano $f \in V$ e $a, b \in K$. Allora

$$((ab)f)(x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = a(bf)(x) = (a(bf))(x), \quad \forall x \in X$$

Quindi $(ab)f = a(bf)$.

$[M_4]$: Sia $f \in V$. Allora, per l'unità $1 \in K$, $(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Quindi $1f = f$.

Dal momento che tutti gli assiomi sono soddisfatti, V è uno spazio vettoriale su K.

4.6. Sia V l'insieme di coppie ordinate di numeri reali: $V = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{R}\}$. Dimostrare che V non è uno spazio vettoriale su R rispetto ad ognuna delle seguenti operazioni di addizione in V e di moltiplicazione per uno scalare su V:

(i) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ e $k(a, b) = (ka, b)$;

(ii) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $k(a, b) = (ka, kb)$;

(iii) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ e $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$.

Dimostrare che in ogni caso non sussiste uno degli assiomi per uno spazio vettoriale.

(i) Siano $r = 1$, $s = 2$, $v = (3, 4)$. Allora

$$(r+s)v = 3(3, 4) = (9, 4)$$

$$rv + sv = 1(3, 4) + 2(3, 4) = (3, 4) + (6, 4) = (9, 8)$$

Poiché $(r+s)v \neq rv + sv$, l'assioma $[M_2]$ non sussiste.

(ii) Siano $v = (1, 2)$, $w = (3, 4)$. Allora

$$v + w = (1, 2) + (3, 4) = (1, 2)$$

$$w + v = (3, 4) + (1, 2) = (3, 4)$$

Poiché $v + w \neq w + v$, non sussiste l'assioma $[A_4]$.

(iii) Siano $r = 1$, $s = 2$, $v = (3, 4)$. Allora

$$(r+s)v = 3(3, 4) = (27, 36)$$

$$rv + sv = 1(3, 4) + 2(3, 4) = (3, 4) + (12, 16) = (15, 20)$$

Perciò $(r+s)v \neq rv + sv$, e quindi l'assioma $[M_2]$ non sussiste.

SOTTOSPAZI

4.7. Dimostrare il teorema 4.2: W è un sottospazio di V solo ed esclusivamente se (i) W non è vuoto, (ii) $v, w \in W$ implica $v + w \in W$, e (iii) $v \in W$ implica $kv \in W$ per ogni scalare $k \in K$.

Poniamo che W soddisfi (i), (ii) e (iii). Per la (i) W è non vuoto; per le (ii) e (iii) sono ben definite per W le operazioni di somma vettoriale e moltiplicazione per uno scalare. Inoltre sussistono in W gli assiomi $[A_1]$, $[A_4]$, $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$, $[M_4]$, dal momento che i vettori di W appartengono a V. Dobbiamo quindi solo dimostrare che anche gli $[A_2]$ e $[A_3]$ sussistono in W. Per la (i) W è non vuoto, diciamo $u \in W$. Allora per la (iii) $0u = 0 \in W$ e $v + 0 = v$ per ogni $v \in W$. Quindi W soddisfa $[A_2]$. Da ultimo, se $v \in W$, allora $(-1)v = -v \in W$ e $v + (-v) = 0$; quindi W soddisfa $[A_3]$. Perciò W è un sottospazio di V.

Reciprocamente, se W è un sottospazio di V, sussistono evidentemente le (i), (ii), (iii).

4.8. Dimostrare il corollario 4.3: W è un sottospazio di V solo ed esclusivamente se (i) $0 \in W$ e (ii) $v, w \in W$ implica $av + bw \in W$ per ogni scalare $a, b \in K$.

Poniamo che W soddisfi le (i), (ii). Allora, per la (i), W è non vuoto. Inoltre, se $v, w \in W$, per la (ii) è $v + w = 1v + 1w \in W$; e se $v \in W$ e $k \in K$, per la (ii) è $kv = kv + 0v \in W$. Perciò, dal teorema 4.2, W è un sottospazio di V.

Reciprocamente, se W è un sottospazio di V evidentemente sussistono in esso le (i) e (ii).

4.9. Sia $V = \mathbf{R}^3$. Dimostrare che W è un sottospazio di V, quando:

(i) $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbf{R}\}$, ovvero W è il piano xy consistente in quei vettori la cui terza componente è zero;

(ii) $W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$, cioè W consiste nei vettori per ognuno dei quali vige la proprietà che la somma delle componenti è zero.

(i) $0 = (0, 0, 0) \in W$ dato che la terza componente di 0 è 0. Per tutti i vettori $v = (a, b, 0)$, $w = (c, d, 0)$ in W, e tutti gli scalari (numeri reali) k e k',

$$\begin{aligned} kv + k'w &= k(a, b, 0) + k'(c, d, 0) \\ &= (ka, kb, 0) + (k'c, k'd, 0) = (ka + k'c, kb + k'd, 0) \end{aligned}$$

Perciò $kv + k'w \in W$, quindi W è un sottospazio di V.

(ii) $0 = (0, 0, 0) \in W$ perché $0 + 0 + 0 = 0$. Poniamo che $v = (a, b, c)$, $w = (a', b', c')$ appartengano a W, ovvero $a + b + c = 0$ e $a' + b' + c' = 0$. Allora per ogni scalare k e k',

$$\begin{aligned} kv + k'w &= k(a, b, c) + k'(a', b', c') \\ &= (ka, kb, kc) + (k'a', k'b', k'c') \\ &= (ka + k'a', kb + k'b', kc + k'c') \end{aligned}$$

e ancora,

$$\begin{aligned} (ka + k'a') + (kb + k'b') + (kc + k'c') &= k(a + b + c) + k'(a' + b' + c') \\ &= k0 + k'0 = 0 \end{aligned}$$

Perciò $kv + k'w \in W$, e quindi W è un sottospazio di V.

4.10. Sia $V = \mathbf{R}^3$. Dimostrare che W non è un sottospazio di V, quando:

(i) $W = \{(a, b, c) : a \geq 0\}$, ovvero W consiste in quei vettori la cui prima componente è non negativa;

(ii) $W = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$, cioè W consiste nei vettori la cui lunghezza non è maggiore di 1;

(iii) $W = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbf{Q}\}$, cioè W consiste nei vettori le cui componenti sono numeri razionali.

Dimostrare per ogni caso che una delle proprietà del teorema 4.2 non sussiste

(i) $v = (1, 2, 3) \in W$ e $k = -5 \in \mathbf{R}$. Ma $kv = -5(1, 2, 3) = (-5, -10, -15)$ non appartiene a W dal momento che -5 è negativo. Quindi W non è un sottospazio di V.

26

(ii) $v = (1, 0, 0) \in W$ e $w = (0, 1, 0) \in W$. Ma $v + w = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ non appartiene a W, dal momento che $1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$. Perciò W non è un sottospazio di V.

(iii) $v = (1, 2, 3) \in W$ e $k = \sqrt{2} \in \mathbf{R}$. Ma $kv = \sqrt{2}\,(1, 2, 3) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ non appartiene a W, dal momento che le sue componenti non sono numeri razionali. Quindi W non è un sottospazio di V.

4.11. Sia V lo spazio vettoriale di tutte le matrici quadrate $n \times n$ su un campo K. Dimostrare che W è un sottospazio di V, quando:

(i) W consiste nelle matrici simmetriche, ovvero tutte le matrici $A = (a_{ij})$ per cui $a_{ji} = a_{ij}$;

(ii) W consiste in tutte le matrici che commutano con una matrice data T; ovvero $W = \{A \in V : AT = TA\}$.

(i) $0 \in W$, poiché tutti gli elementi di 0 sono 0, e quindi uguali. Poniamo ora che $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ appartengano a W, ovvero $a_{ji} = a_{ij}$ e $b_{ji} = b_{ij}$. Per ogni scalare $a, b \in K$, $aA + bB$ è la matrice il cui elemento ij-esimo è $aa_{ij} + bb_{ij}$. Ma $aa_{ji} + bb_{ji} = aa_{ij} + bb_{ij}$. Così $aA + bB$ è anche simmetrica, perciò W è un sottospazio di V.

(ii) $0 \in W$ dato che $0T = 0 = T0$. Supponiamo ora $A, B \in W$; ovvero, $AT = TA$ e $BT = TB$. Per ogni scalare $a, b \in K$,

$$\begin{aligned}(aA + bB)T &= (aA)T + (bB)T = a(AT) + b(BT) = a(TA) + b(TB) \\ &= T(aA) + T(bB) = T(aA + bB)\end{aligned}$$

Così $aA + bB$ commuta con T, ovvero appartiene a W; quindi W è un sottospazio di V.

4.12. Sia V lo spazio vettoriale di tutte le matrici 2×2 sul campo reale R. Dimostrare che W non è un sottospazio di V, quando:

(i) W consiste in tutte le matrici a determinante zero;

(ii) W consiste in tutte le matrici A per cui $A^2 = A$.

(i) (Ricordiamo che $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.) Le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartengono a W, dal momento che $\det(A) = 0$ e $\det(B) = 0$. Ma $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non appartiene a W, poiché $\det(A + B) = 1$. Allora W non è un sottospazio di V.

(ii) La matrice unità $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a W poiché

$$I^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ma $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W, dato che

$$(2I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq 2I$$

Quindi W non è un sottospazio di V.

4.13. Sia V lo spazio vettoriale di tutte le funzioni dal campo reale R in R. Dimostrare che W è un sottospazio di V, quando:

(i) $W = \{f : f(3) = 0\}$, ovvero W consiste nelle funzioni che applicano 3 in 0;

(ii) $W = \{f : f(7) = f(1)\}$, ovvero W consiste in quelle funzioni che assegnano lo stesso valore a 7 e ad 1;

(iii) W consiste nelle funzioni dispari, ovvero le funzioni f per cui $f(-x) = -f(x)$.

Qui $\mathbf{0}$ indica la funzione zero: $\mathbf{0}(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

(i) $\mathbf{0} \in W$ poiché $\mathbf{0}(3) = 0$. Poniamo $f, g \in W$, ovvero $f(3) = 0$ e $g(3) = 0$. Allora per tutti i numeri reali a e b,

$$(af + bg)(3) = af(3) + bg(3) = a0 + b0 = 0$$

Da cui $af + bg \in W$, e così W è un sottospazio di V.

(ii) $\mathbf{0} \in W$ dato che $\mathbf{0}(7) = 0 = \mathbf{0}(1)$. Poniamo $f, g \in W$, cioè $f(7) = f(1)$ e $g(7) = g(1)$. Allora, per tutti i numeri reali a e b,

$$(af + bg)(7) = af(7) + bg(7) = af(1) + bg(1) = (af + bg)(1)$$

Quindi $af + bg \in W$, e allora W è un sottospazio di V.

(iii) $\mathbf{0} \in W$ poiché $\mathbf{0}(-x) = 0 = -0 = -\mathbf{0}(x)$. Supponiamo che sia $f, g \in W$, ovvero $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Allora per qualsiasi numero reale a e b,

$$(af + bg)(-x) = af(-x) + bg(-x) = -af(x) - bg(x) = -(af(x) + bg(x)) = -(af + bg)(x)$$

Quindi $af + bg \in W$, e W è un sottospazio di V.

4.14. Sia V lo spazio vettoriale di tutte le funzioni del campo reale $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Dimostrare che W non è un sottospazio di V, quando:

(i) $W = \{f : f(7) = 2 + f(1)\}$;

(ii) W consiste in tutte le funzioni non negative, ovvero tutte le funzioni f per cui $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

(i) Supponiamo $f, g \in W$, ovvero $f(7) = 2 + f(1)$ e $g(7) = 2 + g(1)$. Allora

$$\begin{aligned}(f+g)(7) &= f(7) + g(7) = 2 + f(1) + 2 + g(1) \\ &= 4 + f(1) + g(1) = 4 + (f+g)(1) \neq 2 + (f+g)(1)\end{aligned}$$

Quindi $f + g \notin W$, e così W non è un sottospazio di V.

(ii) Sia $k = -2$ e $f \in V$ sia definita dalla $f(x) = x^2$. Allora $f \in W$ poiché $f(x) = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$. Ma $(kf)(5) = kf(5) = (-2)(5^2) = -50 < 0$. Da questo si ha che $kf \notin W$, e così W non è un sottospazio di V.

4.15. Sia V lo spazio vettoriale di polinomi $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$ a coefficienti reali, ovvero $a_i \in \mathbf{R}$. Determinare se W è o no un sottospazio di V, quando:

(i) W consiste in tutti i polinomi a coefficienti integrali;

(ii) W consiste in tutti polinomi di grado ≤ 3;

(iii) W è costituito da tutti polinomi $b_0 + b_1t^2 + b_2t^4 + \cdots + b_nt^{2n}$, ovvero polinomi con sole potenze pari di t.

(i) No, giacché dei multipli scalari di vettori di W non sempre appartengono a W. Per esempio $v = 3 + 5t + 7t^2 \in W$ ma $\frac{1}{2}v = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t + \frac{7}{2}t^2 \notin W$. (Notare che W è "chiuso" rispetto all'addizione vettoriale, cioè somme di elementi di W appartengono a W.)

(ii) e (iii) Sì. Poiché, in ogni caso, W è non vuoto, la somma degli elementi di W appartiene a W, e i multipli scalari di ogni elemento di W appartengono a W.

4.16. Si consideri un sistema omogeneo di equazioni lineari in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ su di un campo K:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Si dimostri che l'insieme soluzione W è un sottospazio dello spazio vettoriale K^n.

$0 = (0, 0, \ldots, 0) \in W$ poiché, evidentemente,

$$a_{i1}0 + a_{i2}0 + \cdots + a_{in}0 = 0, \quad \text{per } i = 1, \ldots, m$$

Poniamo che $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ appartengano a W, ovvero, per $i = 1, \ldots, m$,

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = 0$$
$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = 0$$

Siano a e b degli scalari in K. Allora

$$au + bv = (au_1 + bv_1, au_2 + bv_2, \ldots, au_n + bv_n)$$

e, per $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} a_{i1}(au_1 + bv_1) + a_{i2}(au_2 + bv_2) + \cdots + a_{in}(au_n + bv_n) \\ = a(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n) + b(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n) \\ = a0 + b0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi $au + bv$ è una soluzione del sistema, ovvero appartiene a W. Di conseguenza W è un sottospazio di K^n.

COMBINAZIONI LINEARI

4.17. Scrivere il vettore $v = (1, -2, 5)$ come combinazione lineare dei vettori $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ e $e_3 = (2, -1, 1)$.

Vogliamo esprimere v come $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, con x, y e z scalari ancora incogniti. Così vogliamo che sia

$$\begin{aligned} (1, -2, 5) &= x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) + z(2, -1, 1) \\ &= (x, x, x) + (y, 2y, 3y) + (2z, -z, z) \\ &= (x + y + 2z, x + 2y - z, x + 3y + z) \end{aligned}$$

Formiamo il sistema equivalente di equazioni ponendo gli elementi corrispondenti a due a due uguali, e riducendo in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 2y - z &= 4 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ y - 3z &= -3 \\ 5z &= 10 \end{aligned}$$

Si noti che il suddetto sistema è consistente, e perciò ha una soluzione. Risolvendo rispetto alle incognite otteniamo $x = -6$, $y = 3$, $z = 2$. Quindi $v = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3$.

4.18. Scrivere il vettore $v = (2, -5, 3)$ in $\mathbf{R}^3$ come combinazione lineare dei vettori $e_1 = (1, -3, 2)$, $e_2 = (2, -4, -1)$ e $e_3 = (1, -5, 7)$.

Porre v in forma di combinazione lineare degli e_i, usando le incognite x, y e z: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\begin{aligned} (2, -5, 3) &= x(1, -3, 2) + y(2, -4, -1) + z(1, -5, 7) \\ &= (x + 2y + z, -3x - 4y - 5z, 2x - y + 7z) \end{aligned}$$

Formiamo il sistema equivalente di equazioni riducendolo in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -3x - 4y - 5z &= -5 \\ 2x - y + 7z &= 3 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - 2z &= 1 \\ -5y + 5z &= -1 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - 2z &= 1 \\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Il sistema è inconsistente, cioè non ha soluzioni. Di conseguenza v non può essere scritto come combinazione lineare dei vettori e_1, e_2 ed e_3.

4.19. Per quale valore di k il vettore $u = (1, -2, k)$ in $\mathbf{R}^3$ è una combinazione lineare dei vettori $v = (3, 0, -2)$ e $w = (2, -1, -5)$?

Poniamo $u = xv + yw$:

$$(1, -2, k) = x(3, 0, -2) + y(2, -1, -5) = (3x + 2y, -y, -2x - 5y)$$

Formiamo il sistema equivalente di equazioni:

$$3x + 2y = 1, \quad -y = -2, \quad -2x - 5y = k$$

Dalle prime due, $x = -1$, $y = 2$. Sostituendo nell'ultima equazione si ottiene $k = -8$.

29

4.20. Scrivere il polinomio $v = t^2 + 4t - 3$ su R come combinazione lineare dei polinomi $e_1 = t^2 - 2t + 5$, $e_2 = 2t^2 - 3t$ ed $e_3 = t + 3$.

Porre v come combinazione lineare degli e_i usando le incognite x, y e z: $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$$\begin{aligned} t^2 + 4t - 3 &= x(t^2 - 2t + 5) + y(2t^2 - 3t) + z(t+3) \\ &= xt^2 - 2xt + 5x + 2yt^2 - 3yt + zt + 3z \\ &= (x+2y)t^2 + (-2x - 3y + z)t + (5x + 3z) \end{aligned}$$

Uguagliare i coefficienti con le stesse potenze di t, riducendo il sistema in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y \qquad &= 1 \\ -2x - 3y + z &= 4 \\ 5x \qquad + 3z &= -3 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y \qquad &= 1 \\ y + z &= 6 \\ -10y + 3z &= -8 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y \quad &= 1 \\ y + z &= 6 \\ 13z &= 52 \end{aligned}$$

Si noti che il sistema è consistente e quindi ha una soluzione. Risolvendo rispetto alle incognite si ha $x = -3$, $y = 2$, $z = 4$. Così $v = -3e_1 + 2e_2 + 4e_3$.

4.21. Scrivere la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare delle matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Porre E come combinazione lineare di A, B, C usando le incognite x, y, z: $E = xA + yB + zC$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x + 2z \\ x + y & y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Formare il sistema equivalente di equazioni uguagliando a due a due gli elementi corrispondenti:

$$x = 3, \quad x + y = 1, \quad x + 2z = 1, \quad y - z = -1$$

Sostituire $x = 3$ nella seconda e terza equazione, ottenendo $y = -2$ e $z = -1$. Dato che questi valori soddisfano anche l'ultima equazione, essi costituiscono una soluzione del sistema. Quindi $E = 3A - 2B - C$.

4.22. Supponiamo che u sia una combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$, e che ogni v_i sia a sua volta una combinazione lineare dei vettori $w_1, \ldots, w_n$:

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \quad \text{e} \quad v_i = b_{i1}w_1 + b_{i2}w_2 + \cdots + b_{in}w_n$$

Dimostrare che u è anche una combinazione lineare dei vettori w_i. Così, se $S \subset L(T)$, è allora $L(S) \subset L(T)$.

$$\begin{aligned} u &= a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m \\ &= a_1(b_{11}w_1 + \cdots + b_{1n}w_n) + a_2(b_{21}w_1 + \cdots + b_{2n}w_n) + \cdots + a_m(b_{m1}w_1 + \cdots + b_{mn}w_n) \\ &= (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_mb_{m1})w_1 + \cdots + (a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \cdots + a_mb_{mn})w_n \end{aligned}$$

o semplicemente $u = \sum_{i=1}^{m} a_iv_i = \sum_{i=1}^{m} a_i\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}w_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_ib_{ij}\right)w_j$

GENERATORI

4.23. Dimostrare che i vettori $u = (1,2,3)$, $v = (0,1,2)$ e $w = (0,0,1)$ generano $\mathbf{R}^3$.

Dobbiamo dimostrare che un vettore arbitrario $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ è una combinazione lineare di u, v e w.

Poniamo $(a, b, c) = xu + yv + zw$:

$$(a, b, c) = x(1, 2, 3) + y(0, 1, 2) + z(0, 0, 1) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$$

Formiamo poi il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= a \\ 2x + y \quad\; &= b \\ 3x + 2y + z &= c \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} z + 2y + 3x &= c \\ y + 2x &= b \\ x &= a \end{aligned}$$

Il sistema suddetto è nella forma a gradini, ed è consistente; infatti $x = a$, $y = b - 2a$, $z = c - 2b + a$ è una soluzione. Così u, v e w generano $\mathbf{R}^3$.

4.24. Trovare delle condizioni per a, b e c in modo che $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ appartenga allo spazio generato da $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$ e $w = (0, 3, -4)$.

Poniamo (a, b, c) come combinazione lineare di u, v, w usando delle incognite x, y, z: $(a, b, c) = xu + yv + zw$.

$$(a, b, c) \;=\; x(2, 1, 0) + y(1, -1, 2) + z(0, 3, -4) \;=\; (2x + y,\, x - y + 3z,\, 2y - 4z)$$

Formiamo il sistema equivalente di equazioni lineari e riduciamole nella forma a gradini:

$$\begin{aligned} 2x + y \quad\quad &= a \\ x - y + 3z &= b \\ 2y - 4z &= c \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2x + y \quad\quad &= a \\ 3y - 6z &= a - 2b \\ 2y - 4z &= c \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2x + y \quad\quad &= a \\ 3y - 6z &= a - 2b \\ 0 &= 2a - 4b - 3c \end{aligned}$$

Il vettore (a, b, c) appartiene allo spazio generato da u, v, w solo ed esclusivamente se il sistema ora visto è consistente; ed esso è consistente solo ed unicamente se $2a - 4b - 3c = 0$. Si noti in particolare che u, v e w non generano l'intero spazio $\mathbf{R}^3$.

4.25. Dimostrare che il piano xy $W = \{(a, b, 0)\}$ in $\mathbf{R}^3$ è generato da u e v, in cui: (i) $u = (1, 2, 0)$ e $v = (0, 1, 0)$; (ii) $u = (2, -1, 0)$ e $v = (1, 3, 0)$.

Dimostrare che in ciascun caso un vettore arbitrario $(a, b, 0) \in W$ è una combinazione lineare di u e v.

(i) Porre $(a, b, 0) = xu + yv$:

$$(a, b, 0) \;=\; x(1, 2, 0) + y(0, 1, 0) \;=\; (x,\, 2x + y,\, 0)$$

Formare quindi il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x \quad\; &= a \\ 2x + y &= b \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} y + 2x &= b \\ x &= a \end{aligned}$$

Il sistema è consistente; infatti $x = a$, $y = b - 2a$ è una soluzione. Quindi u e v generano W.

(ii) Porre $(a, b, 0) = xu + yv$:

$$(a, b, 0) \;=\; x(2, -1, 0) + y(1, 3, 0) \;=\; (2x + y,\, -x + 3y,\, 0)$$

Formare il sistema seguente riducendolo in forma a gradini:

$$\begin{aligned} 2x + y &= a \\ -x + 3y &= b \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2x + y &= a \\ 7y &= a + 2b \end{aligned}$$

Il sistema è consistente e quindi ha una soluzione. Perciò W è generato da u e v. (Notare che non c'è bisogno di risolvere rispetto ad x e y; è necessario solo sapere che una soluzione esiste.)

4.26. Dimostrare che lo spazio vettoriale V di polinomi su di un qualsiasi campo K non può essere generato da un numero finito di vettori.

Ogni insieme finito S di polinomi ne contiene uno di grado massimo, diciamo m. Allora il sottospazio $L(S)$ generato da S non può contenere dei polinomi di grado maggiore di m. Quindi sarà $V \neq L(S)$ per ogni insieme finito S.

4.27. Dimostrare il teorema 4.5: Sia S un sottoinsieme non vuoto di V. Allora $L(S)$, insieme di tutte le combinazioni lineari di vettori in S, è un sottospazio di V contenente S. Per di più, se W è un qualsiasi altro sottospazio di V contenente S, allora $L(S) \subset W$.

Se $v \in S$, allora $1v = v \in L(S)$; quindi S è un sottoinsieme di $L(S)$. Inoltre $L(S)$ è non vuoto, dal momento che S è non vuoto. Poniamo ora $v, w \in L(S)$; diciamo,

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \quad \text{e} \quad w = b_1w_1 + \cdots + b_nw_n$$

in cui $v_i, w_j \in S$ e a_i, b_j sono scalari. Allora

$$v + w = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n$$

e, per ogni scalare k,

$$kv = k(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = ka_1v_1 + \cdots + ka_mv_m$$

appartiene ad $L(S)$, dato che ognuno è una combinazione lineare di vettori in S. Di conseguenza $L(S)$ è un sottospazio di V.

Supponiamo ora che W sia un sottospazio di V che contiene S, e poniamo $v_1, \ldots, v_m \in S \subset W$. Allora tutti i multipli $a_1v_1, \ldots, a_mv_m \in W$, in cui $a_i \in K$, e quindi anche la somma $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m \in W$. Il che è come dire che W contiene tutte combinazioni lineari di elementi di S. Di conseguenza $L(S) \subset W$, come enunciato.

SPAZIO RIGA DI UNA MATRICE

4.28. Determinare se le seguenti matrici hanno lo stesso spazio riga:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ridurre per righe ogni matrice alla forma canonica per righe:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché le righe non zero delle forme ridotte di A e di C sono le stesse, A e C hanno lo stesso spazio riga. Invece le righe non zero della forma ridotta di B non sono le stesse delle altre, perciò B ha un diverso spazio riga.

4.29. Consideriamo una matrice arbitraria $A = (a_{ij})$. Poniamo che $u = (b_1, \ldots, b_n)$ sia una combinazione lineare delle righe $R_1, \ldots, R_m$ di A; diciamo $u = k_1R_1 + \cdots + k_mR_m$. Dimostrare che per ogni i è $b_i = k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + \cdots + k_ma_{mi}$, in cui $a_{1i}, \ldots a_{mi}$ sono gli elementi della colonna i-esima di A.

Abbiamo $u = k_1R_1 + \cdots + k_mR_m$; quindi

$$\begin{aligned}(b_1, \ldots, b_n) &= k_1(a_{11}, \ldots, a_{1n}) + \cdots + k_m(a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \\ &= (k_1a_{11} + \cdots + k_ma_{m1}, \ldots, k_1a_{m1} + \cdots + k_ma_{mn})\end{aligned}$$

Uguagliando a due a due le componenti corrispondenti, otteniamo il risultato voluto.

4.30. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice a gradini ad elementi distinti $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$, e $B = (b_{ij})$ un'altra matrice a gradini con elementi distinti $b_{1k_1}, b_{2k_2}, \ldots, b_{sk_s}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & * & * & * & * & * & * \\ & a_{2j_2} & * & * & * & * & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{rj_r} & * & * & \\ & & & & & & \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1k_1} & * & * & * & * & * & * \\ & b_{2k_2} & * & * & * & * & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_{sk_s} & * & * & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

Supponiamo che A e B abbiano lo stesso spazio riga. Si dimostri che allora gli elementi distinti di A e B sono nella stessa posizione: $j_1 = k_1,\ j_2 = k_2,\ \ldots,\ j_r = k_r$, e $r = s$.

Evidentemente $A = 0$ solo ed esclusivamente se $B = 0$, e così dobbiamo dimostrare il teorema solo quando $r \geqslant 1$ e $s \geqslant 1$. Dimostriamo prima che $j_1 = k_1$, e supponiamo $j_1 < k_1$. Allora la colonna j_1-esima di B è zero. Dato che la prima riga di A è nello spazio riga di B abbiamo dal problema precedente $a_{1j_1} = c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0$ essendo i c_i degli scalari. Ma ciò è in contraddizione col fatto che gli elementi distinti sono $a_{1j_1} \neq 0$. Quindi $j_1 \geq k_1$, e similmente $k_1 \geq j_1$. Così $j_1 = k_1$.

Sia ora A' la sottomatrice di A che da questa si ottiene cancellandone la prima riga, e B' la sottomatrice di B ottenuta allo stesso modo da B. Dimostriamo che A' e B' hanno lo stesso spazio riga, e il teorema ne seguirà per induzione, dato che A' e B' sono anche matrici a gradini.

Sia $R = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ una qualsiasi riga di A', e $R_1, \ldots, R_m$ siano le righe di B. Poiché R si trova nello spazio riga di B esistono degli scalari $d_1, \ldots, d_m$ tali che $R = d_1R_1 + d_2R_2 + \cdots + d_mR_m$. Dato che A è in forma a gradini ed R non ne è la prima riga, l'elemento j_1-esimo di R è zero: $a_i = 0$ per $i = j_1 = k_1$. Inoltre, poiché B è in forma a gradini, tutti gli elementi della colonna k_1-esima di B sono 0 eccetto il primo: $b_{1k_1} \neq 0$, ma $b_{2k_1} = 0, \ldots, b_{mk_1} = 0$. E così

$$0 = a_{k_1} = d_1b_{1k_1} + d_2 0 + \cdots + d_m 0 = d_1b_{1k_1}$$

Abbiamo poi $b_{1k_1} \neq 0$, quindi $d_1 = 0$. Così R è una combinazione lineare di $R_2, \ldots, R_m$, e perciò si trova nello spazio riga di B'. Dato che R era una qualsiasi riga di A', lo spazio riga di A' è contenuto nello spazio riga di B'. Similmente lo spazio riga di B' è contenuto nello spazio riga di A'. Perciò A' e B' hanno lo stesso spazio riga, e il teorema è dimostrato.

4.31. Dimostrare il teorema 4.7: se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono delle matrici a gradini ridotte per riga, esse hanno lo stesso spazio riga solo ed esclusivamente se hanno le stesse righe non zero.

Ovviamente, se A e B hanno le stesse righe non zero, esse hanno lo stesso spazio riga. Così noi dobbiamo soltanto dimostrare vera l'affermazione contraria.

Poniamo che A e B abbiano lo stesso spazio riga, e che $R \neq 0$ sia la riga i-esima di A. Esistono allora degli scalari $c_1, \ldots, c_s$ tali che

$$R = c_1R_1 + c_2R_2 + \cdots + c_sR_s \tag{1}$$

in cui gli R_i sono le righe non zero di B. Il teorema è dimostrato se facciamo vedere che $R = R_i$ ovvero $c_i = 1$ ma $c_k = 0$ per $k \neq i$.

Sia a_{ij_i} l'elemento distinto di R, ovvero il primo elemento non nullo in R. Per la (*1*) e per il problema 4.29,

$$a_{ij_i} = c_1b_{1j_i} + c_2b_{2j_i} + \cdots + c_sb_{sj_i} \tag{2}$$

Ma per il problema precedente b_{ij_i} è un elemento distinto di B, e dato che B è ridotta per righe, esso è il solo elemento non nullo nella colonna j_i-esima di B. Perciò dalla (*2*) otteniamo $a_{ij_i} = c_ib_{ij_i}$. Tuttavia $a_{ij_i} = 1$ e $b_{ij_i} = 1$ poiché A e B sono ridotte per righe; da cui $c_i = 1$.

Supponiamo ora che sia $k \neq i$, e b_{kj_k} sia l'elemento distinto in R_k. Per la (*1*) e il problema 4.29,

$$a_{ij_k} = c_1b_{1j_k} + c_2b_{2j_k} + \cdots + c_sb_{sj_k} \tag{3}$$

33

Dal momento che B è ridotta per righe, b_{kj_k} è il solo elemento non nullo nella colonna j_k-esima di B; quindi per la (3) avremo $a_{ij_k} = c_k b_{kj_k}$. Ancora, per il problema precedente, a_{kj_k} è un elemento distinto di A, e poiché A è ridotta per righe $a_{ij_k} = 0$. Così $c_k b_{kj_k} = 0$, e dato che $b_{kj_k} = 1$, $c_k = 0$. Di conseguenza $R = R_i$ e il teorema è dimostrato.

4.32. Determinare se le matrici seguenti hanno lo stesso spazio colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

Notare che questo è possibile solo ed esclusivamente se le trasposte A^t e B^t hanno lo stesso spazio riga. Ridurre così A^t e B^t in forma a gradini ridotta per righe:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 17 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che A^t e B^t hanno lo stesso spazio riga, A e B hanno lo stesso spazio colonna.

4.33. Sia R un vettore riga, e B una matrice per la quale è definita la RB. Dimostrare che RB è una combinazione lineare delle righe di B. Inoltre, se A è una matrice per cui AB è definita, dimostrare che lo spazio riga di AB è contenuto nello spazio riga di B.

Poniamo che sia $R = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ e $B = (b_{ij})$. Indichino $B_1, \ldots, B_m$ le righe di B, e $B^1, \ldots, B^n$ le colonne. Allora è

$$\begin{aligned} RB &= (R \cdot B^1, R \cdot B^2, \ldots, R \cdot B^n) \\ &= (a_1 b_{11} + a_2 b_{21} + \cdots + a_m b_{m1}, a_1 b_{12} + a_2 b_{22} + \cdots + a_m b_{m2}, \ldots, a_1 b_{1n} + a_2 b_{2n} + \cdots + a_m b_{mn}) \\ &= a_1(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}) + a_2(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}) + \cdots + a_m(b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn}) \\ &= a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_m B_m \end{aligned}$$

Così RB è una combinazione lineare delle righe di B, come enunciato.

Per il problema 3.27 le righe di AB sono $R_i B$, in cui R_i è la riga i-esima di A. Quindi per il risultato precedente ogni riga di AB si trova nello spazio riga di B. Così lo spazio riga di AB è contenuto nello spazio riga di B.

SOMME E SOMME DIRETTE

4.34. Siano U e W dei sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che:

(i) U e W sono contenuti in $U + W$;

(ii) $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V contenente U e W, ovvero $U + W$ è il sottospazio generato da U e W: $U + W = L(U, W)$.

(i) Sia $u \in U$. Per ipotesi W è un sottospazio di V, quindi $0 \in W$. Ne deriva $u = u + 0 \in U + W$. Consegue che U è contenuto in $U + W$. Similmente W è contenuto in $U + W$.

(ii) Essendo $U + W$ un sottospazio di V (teorema 4.8) che contiene sia U che W, esso deve contenere anche il sottospazio generato da U e W: $L(U, W) \subset U + W$.

D'altro canto se è $v \in U + W$ sarà $v = u + w = 1u + 1w$, con $u \in U$ e $w \in W$; quindi v è una combinazione lineare di elementi di $U \cup W$ ed appartiene perciò a $L(U, W)$. Così abbiamo $U + W \subset L(U, W)$.

Le due relazioni di inclusione ci danno il risultato che volevamo.

34

4.35. Supponiamo che U e W siano sottospazi di uno spazio vettoriale V, e che $\{u_i\}$ generi U e $\{w_j\}$ generi W. Dimostrare che $\{u_i, w_j\}$, ovvero $\{u_i\} \cup \{w_j\}$, genera $U + W$.

Sia $v \in U + W$. Allora $v = u + w$ in cui $u \in U$ e $w \in W$. Dato che $\{u_i\}$ genera U, u è una combinazione lineare degli u_i; e dato che $\{w_j\}$ genera W, anche w è una combinazione lineare dei w_j:

$$u = a_1 u_{i_1} + a_2 u_{i_2} + \cdots + a_n u_{i_n}, \qquad a_j \in K$$

$$w = b_1 w_{j_1} + b_2 w_{j_2} + \cdots + b_m w_{j_m}, \qquad b_j \in K$$

Così $\quad v = u + w = a_1 u_{i_1} + a_2 u_{i_2} + \cdots + a_n u_{i_n} + b_1 w_{j_1} + b_2 w_{j_2} + \cdots + b_m w_{j_m}$

e allora $\{u_i, w_j\}$ genera $U + W$.

4.36. Dimostrare il teorema 4.9: Lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei suoi sottospazi U e W solo ed esclusivamente se (i) $V = U + W$ e (ii) $U \cap W = \{0\}$.

Poniamo $V = U \oplus W$. Allora ogni $v \in V$ si può scrivere unicamente nella forma $v = u + w$, con $u \in U$ e $w \in W$. Così, in particolare, $V = U + W$. Supponiamo adesso $v \in U \cap W$. Allora:

$$(1) \quad v = v + 0 \ \text{ con } \ v \in U,\ 0 \in W; \ \text{ e } \quad (2) \quad v = 0 + v \ \text{ in cui } \ 0 \in U,\ v \in W$$

Dal momento che una somma simile per v deve essere unica, è $v = 0$. Di conseguenza $U \cap W = \{0\}$.

Supponiamo d'altro canto che sia $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$. Sia ancora $v \in V$. Dal momento che $V = U + W$, esistono $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$. Dobbiamo dimostrare che una simile somma è unica. Poniamo ancora che $v = u' + w'$, con $u' \in U$ e $w' \in W$. Allora

$$u + w = u' + w' \quad \text{e così} \quad u - u' = w' - w$$

Ma $u - u' \in U$ e $w' - w \in W$; da qui per la $U \cap W = \{0\}$,

$$u - u' = 0, \quad w' - w = 0 \quad \text{e quindi} \quad u = u', \quad w = w'$$

Perciò una simile somma per $v \in V$ è unica, e $V = U \oplus W$.

4.37. Siano U e W i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ definiti dalle

$$U = \{(a, b, c):\ a = b = c\} \quad \text{e} \quad W = \{(0, b, c)\}$$

(Si noti che W è il piano yz.) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

Osservare prima che $U \cap W = \{0\}$, per $v = (a, b, c) \in U \cap W$, implica che

$$a = b = c \quad \text{e } a = 0, \text{ il che porta } \quad a = 0, \ b = 0, \ c = 0$$

ovvero $v = (0, 0, 0)$.

Noi affermiamo inoltre che $\mathbf{R}^3 = U + W$. Perché se $v = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, allora $v = (a, a, a) + (0, b - a, c - a)$ con $(a, a, a) \in U$ e $(0, b - a, c - a) \in W$. Entrambe le condizioni, $U \cap W = \{0\}$ e $\mathbf{R}^3 = U + W$, implicano $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

4.38. Sia V lo spazio vettoriale di matrici quadrate di ordine n, su di un campo $\mathbf{R}$. Siano U e W rispettivamente i sottospazi delle matrici simmetriche e delle matrici antisimmetriche. Dimostrare che $V = U \oplus W$. (La matrice M è simmetrica solo ed esclusivamente se $M = M^t$, ed è antisimmetrica solo ed unicamente se $M^t = -M$.)

Dimostriamo prima che $V = U + W$. Sia A un'arbitraria matrice quadrata di ordine n. Notare che

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

Affermiamo che $\frac{1}{2}(A + A^t) \in U$, e che $\frac{1}{2}(A - A^t) \in W$. Dalla

$$(\tfrac{1}{2}(A + A^t))^t = \tfrac{1}{2}(A + A^t)^t = \tfrac{1}{2}(A^t + A^{tt}) = \tfrac{1}{2}(A + A^t)$$

si vede che $\frac{1}{2}(A + A^t)$ è simmetrica. Inoltre,

$$(\tfrac{1}{2}(A - A^t))^t = \tfrac{1}{2}(A - A^t)^t = \tfrac{1}{2}(A^t - A) = -\tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

ovvero $\frac{1}{2}(A - A^t)$ è antisimmetrica.

Dimostriamo poi che $U \cap W = \{0\}$. Supponiamo che sia $M \in U \cap W$. Allora $M = M^t$ e $M^t = -M$, il che implica $M = -M$ ovvero $M = 0$. Quindi $U \cap W = \{0\}$. Di conseguenza $V = U \oplus W$.

35

L'esempio seguente ci dà un'applicazione pratica di questo risultato.

Esempio 5.13: Determinare se le matrici che seguono sono dipendenti o indipendenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

I vettori coordinati di dette matrici, relativi alla base dell'esempio 5.4 a pag. 89, sono

$$[A] = (1, 2, -3, 4, 0, 1), \quad [B] = (1, 3, -4, 6, 5, 4), \quad [C] = (3, 8, -11, 16, 10, 9)$$

Formiamo la matrice M avente per righe i suddetti vettori coordinati:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & -11 & 16 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Riduciamo per righe M in forma a gradini:

$$M \text{ diventa } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice a gradini ha soltanto due righe non zero, i vettori coordinati $[A]$, $[B]$ e $[C]$ generano uno spazio a 2 dimensioni e sono perciò dipendenti. Di conseguenza le matrici originali A, B e C sono dipendenti.

PROBLEMI RISOLTI

DIPENDENZA LINEARE

5.1. Determinare se u, v sono o no linearmente dipendenti:

(i) $u = (3, 4)$, $v = (1, -3)$

(ii) $u = (2, -3)$, $v = (6, -9)$

(iii) $u = (4, 3, -2)$, $v = (2, -6, 7)$

(iv) $u = (-4, 6, -2)$, $v = (2, -3, 1)$

(v) $u = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(vii) $u = 2 - 5t + 6t^2 - t^3$, $v = 3 + 2t - 4t^2 + 5t^3$

(viii) $u = 1 - 3t + 2t^2 - 3t^3$, $v = -3 + 9t - 6t^2 + 9t^3$

Due vettori u, v sono dipendenti solo ed esclusivamente se uno è un multiplo dell'altro.

(i) No. (ii) Sì, per $v = 3u$. (iii) No. (iv) Sì, per $u = -2v$. (v) Sì, per $v = 2u$. (vi) No. (vii) No. (viii) Sì, per $v = -3u$.

5.2. Determinare se i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$ sono o no linearmente dipendenti:

(i) $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1)$

(ii) $(1, -3, 7)$, $(2, 0, -6)$, $(3, -1, -1)$, $(2, 4, -5)$

(iii) $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$

(iv) $(2, -3, 7)$, $(0, 0, 0)$, $(3, -1, -4)$

(i) **Metodo 1.** Porre una combinazione lineare di vettori uguale al vettore zero, usando degli scalari incogniti x, y, z:

$$x(1, -2, 1) + y(2, 1, -1) + z(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

36

Allora $\quad (x, -2x, x) + (2y, y, -y) + (7z, -4z, z) = (0, 0, 0)$

ovvero $\quad (x + 2y + 7z, -2x + y - 4z, x - y + z) = (0, 0, 0)$

Poniamo uguali a due a due le componenti corrispondenti per ottenere il sistema omogeneo equivalente, riducendolo nella forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ -2x + y - 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ 5y + 10z &= 0 \\ -3y - 6z &= 0 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + 2y + 7z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema in questa forma ha solo due equazioni non zero nelle tre incognite; quindi esso ha una soluzione non nulla. E perciò i vettori originali sono linearmente dipendenti.

Metodo 2. Formiamo la matrice le cui righe sono i vettori dati, riducendola in forma a gradini con l'uso di operazioni elementari di riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -6 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che la matrice a gradini ha una riga zero, i vettori sono dipendenti. (I tre vettori dati generano uno spazio di dimensione 2.)

(ii) Sì, poiché a quattro a quattro (o più) i vettori $\mathbf{R}^3$ sono dipendenti.

(iii) Formare la matrice le cui righe sono vettori dati, riducendola poi per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & 11 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poiché la matrice a gradini non ha righe zero i vettori sono indipendenti.
(I tre vettori dati generano uno spazio a tre dimensioni.)

(iv) Poiché $0 = (0, 0, 0)$ è uno dei vettori, essi sono dipendenti.

5.3. Sia V lo spazio vettoriale di matrici 2×2 su $\mathbf{R}$. Si determini se le matrici $A, B, C \in V$ sono dipendenti:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Poniamo uguale alla matrice zero una combinazione lineare delle matrici A, B, C, usando degli scalari incogniti x, y, z; poniamo cioè $xA + yB + zC = 0$. Così:

$$x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero
$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o
$$\begin{pmatrix} x + y + z & x + z \\ x & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

37

Uguagliamo a due a due gli elementi corrispondenti per ottenere il sistema omogeneo equivalente di equazioni:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x + \phantom{y+{}} z &= 0 \\ x \phantom{{}+y+z} &= 0 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo detto sistema otteniamo solo la soluzione zero, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Abbiamo così dimostrato che $xA + yB + zC$ implica $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; quindi le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti.

(ii) Poniamo uguale al vettore zero una combinazione lineare delle matrici A, B, C, usando degli scalari incogniti x, y, z; poniamo cioè $xA + yB + zC = 0$. Così:

$$x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero
$$\begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & -y \\ 2y & 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & -5z \\ -4z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o
$$\begin{pmatrix} x + 3y + z & 2x - y - 5z \\ 3x + 2y - 4z & x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uguagliamo a due a due gli elementi corrispondenti, ottenendo il sistema omogeneo equivalente di equazioni lineari; riduciamolo in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x - y - 5z &= 0 \\ 3x + 2y - 4z &= 0 \\ x + 2y \phantom{{}-4z} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ -7y - 7z &= 0 \\ -7y - 7z &= 0 \\ -y - z &= 0 \end{aligned}$$

ovvero, infine,
$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema in forma a gradini ha una variabile libera e quindi una soluzione non zero, per esempio $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$. Abbiamo dimostrato che $xA + yB + zC = 0$ non implica $x = 0$, $y = 0,\ z = 0$; quindi le matrici sono linearmente dipendenti.

5.4. Sia V lo spazio vettoriale di polinomi di grado $\leqslant 3$ su $\mathbf{R}$. Si determini se $u, v, w \in V$ sono indipendenti o dipendenti:

(i) $u = t^3 - 3t^2 + 5t + 1,\quad v = t^3 - t^2 + 8t + 2,\quad w = 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5$

(ii) $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3,\quad v = t^3 + 6t^2 - t + 4,\quad w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$

(i) Porre uguale al polinomio zero una combinazione lineare dei polinomi u, v, w, usando degli scalari incogniti x, y, z: porre cioè $xu + yv + zw = 0$. Così

$$x(t^3 - 3t^2 + 5t + 1) + y(t^3 - t^2 + 8t + 2) + z(2t^3 - 4t^2 + 9t + 5) = 0$$

ovvero $\quad xt^3 - 3xt^2 + 5xt + x + yt^3 - yt^2 + 8yt + 2y + 2zt^3 - 4zt^2 + 9zt + 5z = 0$

o $\quad (x + y + 2z)t^3 + (-3x - y - 4z)t^2 + (5x + 8y + 9z)t + (x + 2y + 5z) = 0$

I coefficienti delle potenze di t debbono essere ognuno uguale a zero:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ -3x - y - 4z &= 0 \\ 5x + 8y + 9z &= 0 \\ x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Risolvendo questo sistema omogeneo si ottiene solo la soluzione zero: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; quindi u, v, w sono indipendenti.

(ii) Porre uguale al polinomio zero una combinazione lineare dei polinomi u, v, w, usando degli scalari incogniti x, y, z: porre cioè $xu + yv + zw = 0$. Così

$$x(t^3 + 4t^2 - 2t + 3) + y(t^3 + 6t^2 - t + 4) + z(3t^3 + 8t^2 - 8t + 7) = 0$$

ovvero $$xt^3 + 4xt^2 - 2xt + 3x + yt^3 + 6yt^2 - yt + 4y + 3zt^3 + 8zt^2 - 8zt + 7z = 0$$

o $$(x+y+3z)t^3 + (4x+6y+8z)t^2 + (-2x-y-8z)t + (3x+4y+7z) = 0$$

Porre uno ad uno uguali a zero i coefficienti delle potenze di t, riducendo il sistema in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 6y + 8z &= 0 \\ -2x - y - 8z &= 0 \\ 3x + 4y + 7z &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ 2y - 4z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

o infine:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema nella forma a gradini ha una variabile libera, e quindi una soluzione non zero. Abbiamo dimostrato che $xu + yv + zw = 0$ non implica che sia $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$; quindi i polinomi sono linearmente dipendenti.

5.5. Sia V lo spazio vettoriale di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Dimostrare che $f, g, h \in V$ sono indipendenti, essendo (i) $f(t) = e^{2t}$, $g(t) = t^2$, $h(t) = t$; (ii) $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = t$.

In ciascun caso porre uguale alla funzione zero una combinazione lineare delle suddette funzioni, usando degli scalari incogniti x, y, z: $xf + yg + zh = 0$; dimostrare quindi che $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Sottolineiamo che $xf + yg + zh = 0$ significa che è $xf(t) + yg(t) + zh(t) = 0$ per qualsiasi valore di t.

(i) Nell'equazione $xe^{2t} + yt^2 + zt = 0$, sostituiamo

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{per ottenere} \quad xe^0 + y0 + z0 = 0 \quad \text{o} \quad x = 0 \\ t &= 1 \quad \text{per ottenere} \quad xe^2 + y + z = 0 \\ t &= 2 \quad \text{per ottenere} \quad xe^4 + 4y + 2z = 0 \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} x = 0 \\ xe^2 + y + z = 0 \\ xe^4 + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ otteniamo solo la soluzione zero: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Quindi f, g, h sono indipendenti.

(ii) **Metodo 1.** Nell'equazione $x \sin t + y \cos t + zt = 0$ sostituiamo

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{per ottenere} \quad x\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot 0 = 0 \quad \text{o} \quad y = 0 \\ t &= \pi/2 \quad \text{per avere} \quad x\cdot 1 + y\cdot 0 + z\pi/2 = 0 \quad \text{o} \quad x + \pi z/2 = 0 \\ t &= \pi \quad \text{per avere} \quad x\cdot 0 + y(-1) + z\cdot\pi = 0 \quad \text{o} \quad -y + \pi z = 0 \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema $\begin{cases} y = 0 \\ x + \pi z/2 = 0 \\ -y + \pi z = 0 \end{cases}$ ed otteniamo solo la soluzione zero: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Quindi f, g, h sono indipendenti.

Metodo 2. Prendiamo le derivate prima, seconda e terza di $x \sin t + y \cos t + zt = 0$ rispetto a t:

$$x \cos t - y \sin t + z = 0 \qquad (1)$$

$$-x \sin t - y \cos t = 0 \qquad (2)$$

$$-x \cos t + y \sin t = 0 \qquad (3)$$

39

Sommiamo le (*1*) e (*3*) per ottenere $z = 0$. Moltiplichiamo la (*2*) per sint t, la (*3*) per cos t e sommiamo:

$$\begin{array}{lrcl} \sin t \times (2): & -x \sin^2 t - y \sin t \cos t & = & 0 \\ \cos t \times (3): & -x \cos^2 t + y \sin t \cos t & = & 0 \\ \hline & -x(\sin^2 t + \cos^2 t) & = & 0 \quad \text{ovvero} \quad x = 0 \end{array}$$

Moltiplichiamo infine la (*2*) per $-\cos t$ e la (*3*) per sint t e sommiamo, ottenendo:

$$y(\cos^2 t + \sin^2 t) = 0 \quad \text{o} \quad y = 0$$

Poiché $\qquad x \sin t + y \cos t + zt = 0$ implica $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

f, g, h sono indipendenti.

5.6. Siano u, v, w dei vettori indipendenti. Dimostrare che $u+v$, $u-v$ e $u-2v+w$ sono ancora indipendenti.

Poniamo $x(u+v) + y(u-v) + z(u-2v+w) = 0$, con x, y, z scalari. Allora $xu + xv + yu - yv + zu - 2zv + zw = 0$, ovvero

$$(x+y+z)u + (x-y-2z)v + zw = 0$$

Ma u, v, w sono linearmente indipendenti; quindi i coefficienti nella relazione suddetta sono ciascuno uguale a zero:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di questo sistema è $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. E allora $u+v$, $u-v$ e $u-2v+w$ sono indipendenti.

5.7. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dei vettori indipendenti, e poniamo che sia u una combinazione lineare dei v_i, diciamo $u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$, essendo gli a_i degli scalari. Dimostrare che questa espressione di u è unica.

Poniamo $u = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_mv_m$, dove i b_i sono scalari. Sottraendo si ha

$$0 = u - u = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_m - b_m)v_m$$

Ma i v_i sono linearmente indipendenti, quindi i coefficienti di questa relazione sono ciascuno uguale a zero:

$$a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_m - b_m = 0$$

E allora $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_m = b_m$, e così la suddetta espressione di u come combinazione lineare dei v_i è unica.

5.8. Dimostrare che i vettori $v = (1+i, 2i)$ e $w = (1, 1+i)$ in $\mathbf{C}^2$ sono linearmente dipendenti sul campo complesso **C**, mentre sono linearmente indipendenti sul campo reale **R**.

Ricordiamo che due vettori sono dipendenti solo ed esclusivamente se uno è multiplo dell'altro. Dato che la prima coordinata di w è 1, v può essere multiplo di w solo ed unicamente se $v = (1+i)w$. Ma $1 + i \notin R$; quindi v, w sono indipendenti su **R**. Poiché

$$(1+i)w = (1+i)(1, 1+i) = (1+i, 2i) = v$$

e $1 + i \in \mathbf{C}$, essi sono dipendenti su **C**.

5.9. Poniamo che $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ contenga un sottoinsieme dipendente, diciamo $\{v_1, \ldots, v_r\}$. Dimostriamo che anche S è dipendente. Quindi ogni sottoinsieme di insieme indipendente sarà ancora indipendente.

Dato che $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è dipendente, esistono degli scalari $a_1, \ldots, a_r$ non tutti zero tali che

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0$$

Esistono quindi degli scalari, $a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0$, non tutti zero, tali che

$$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + 0v_{r+1} + \cdots + 0v_m = 0$$

Di conseguenza S è dipendente.

5.10. Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ sia indipendente, e $\{v_1, \ldots, v_m, w\}$ sia dipendente. Dimostrare che w è una combinazione lineare dei vettori v_i.

Metodo 1. Dato che $\{v_1, \ldots, v_m, w\}$ è dipendente, esistono degli scalari $a_1, \ldots, a_m, b$, non tutti zero, tali che $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m + bw = 0$. Se è $b = 0$ allora uno degli a_i è non nullo e $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$. Ma questo è in contraddizione con l'ipotesi che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ sia indipendente. Di conseguenza $b \neq 0$ e quindi

$$w = b^{-1}(-a_1v_1 - \cdots - a_mv_m) = -b^{-1}a_1v_1 - \cdots - b^{-1}a_mv_m$$

Ovvero, w è una combinazione lineare dei v_i.

Metodo 2. Se $w = 0$, abbiamo $w = 0v_1 + \cdots + 0v_m$. D'altra parte se è $w \neq 0$ allora per il lemma 5.2 uno dei vettori in $\{v_1, \ldots, v_m, w\}$ è una combinazione lineare dei vettori precedenti. Questo vettore non può essere uno dei v, dato che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è indipendente. Perciò w è una combinazione lineare dei v_i.

DIMOSTRAZIONI DI TEOREMI

5.11. Si dimostri il lemma 5.2: I vettori non nulli $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti solo ed esclusivamente se uno di essi, diciamo v_i, è una combinazione lineare dei vettori precedenti: $v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1}$.

Poniamo $v_i = a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1}$. Allora

$$a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + 0v_{i+1} + \cdots + 0v_m = 0$$

ed il coefficiente di v_i è non nullo. Quindi i v_i sono linearmente dipendenti.

Reciprocamente, supponiamo che i v_i siano linearmente dipendenti. Esistono allora degli scalari $a_1, \ldots, a_m$, non tutti zero, tali che $a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$. Sia k il più grande numero intero per cui $a_k \neq 0$. Allora

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k + 0v_{k+1} + \cdots + 0v_m = 0 \quad \text{ovvero} \quad a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$$

Poniamo $k = 1$; sarà allora $a_1v_1 = 0$, $a_1 \neq 0$ e quindi $v_1 = 0$. Ma i v_i sono vettori non nulli; perciò $k > 1$ e

$$v_k = -a_k^{-1}a_1v_1 - \cdots - a_k^{-1}a_{k-1}v_{k-1}$$

Il che è come dire che v_k è una combinazione lineare di detti vettori.

5.12. Dimostrare il teorema 5.1: Le righe non zero $R_1, \ldots, R_n$ di una matrice in forma a gradini sono linearmente indipendenti.

Supponiamo che $\{R_n, R_{n-1}, \ldots, R_1\}$ sia dipendente. Allora una delle righe, diciamo R_m, è combinazione lineare delle righe precedenti:

$$R_m = a_{m+1}R_{m+1} + a_{m+2}R_{m+2} + \cdots + a_nR_n \qquad (*)$$

Ora immaginiamo che la componente k-esima di R_m sia il primo suo elemento non zero. Allora, dato che la matrice è in forma a gradini, le componenti k-esime di $R_{m+1}, \ldots, R_n$ sono tutte zero, e così la componente k-esima di (*) è $a_{m+1} \cdot 0 + a_{m+2} \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$. Ma ciò contraddice l'ipotesi che la componente k-esima di R_m sia non nulla. Così $R_1, \ldots, R_n$ sono indipendenti.

5.13. Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ generi uno spazio vettoriale V. Dimostrare:

(i) Se $w \in V$, allora $\{w, v_1, \ldots, v_m\}$ è linearmente dipendente e genera V.

(ii) Se v_i è una combinazione lineare dei vettori precedenti, allora $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$ genera V.

(i) Se è $w \in V$, w è una combinazione lineare dei v_i, dal momento che $\{v_i\}$ genera V. In accordo con ciò, $\{w, v_1, \ldots, v_m\}$ è linearmente dipendente. E' chiaro che w ed i v_i generano V, poiché i v_i di per sé generano V. Come dire che $\{w, v_1, \ldots, v_m\}$ genera V.

41

(ii) Poniamo $v_i = k_1v_1 + \cdots + k_{i-1}v_{i-1}$, e sia $u \in V$. Dato che $\{v_i\}$ genera V, u è una combinazione lineare dei v_i, diciamo $u = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$. Sostituendo i v_i otteniamo

$$\begin{aligned} u &= a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_i(k_1v_1 + \cdots + k_{i-1}v_{i-1}) + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_mv_m \\ &= (a_1 + a_ik_1)v_1 + \cdots + (a_{i-1} + a_ik_{i-1})v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_mv_m \end{aligned}$$

Così $\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$ genera V. In altri termini, possiamo eliminare v_i dall'insieme generatore e avere ancora un insieme generatore.

5.14. Dimostrare il lemma 5.4: Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ generi uno spazio vettoriale V. Se $\{w_1, \ldots, w_m\}$ è linearmente indipendente è allora $m \leq n$ e V è generato da un insieme di forma $\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}$. Così in particolare $n+1$ o più vettori di V sono linearmente dipendenti.

E' sufficiente dimostrare il teorema per il caso in cui non tutti i v_i sono zero. (Da dimostrarsi anche questo.) Dato che $\{v_i\}$ genera V, dal problema precedente abbiamo che

$$\{w_1, v_1, \ldots, v_n\} \tag{1}$$

è linearmente dipendente, e genera inoltre V. Per il lemma 5.2 uno dei vettori in (*1*) è una combinazione lineare dei vettori precedenti. Questo vettore non può essere w_1, perciò deve essere uno dei v, diciamo v_j. Così per il problema precedente possiamo cancellare v_j dall'insieme generatore (*1*) ottenendo il nuovo insieme generatore

$$\{w_1, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \tag{2}$$

Ripetiamo il ragionamento per il vettore w_2. E' come dire che, dal momento che (*2*) genera V, l'insieme

$$\{w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \tag{3}$$

è linearmente dipendente e genera inoltre V. Ancora per il lemma 5.2 uno dei vettori in (*3*) è una combinazione lineare dei vettori precedenti. Insistiamo sul fatto che questo vettore non può essere w_1 o w_2, dal momento che $\{w_1, \ldots, w_m\}$ è indipendente; quindi esso dev'essere uno dei v, diciamo v_k. Perciò come nel problema precedente possiamo cancellare v_k dall'insieme generatore (*3*) ottenendo il nuovo insieme generatore

$$\{w_1, w_2, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

Proseguiamo ripetendo il ragionamento con w_3, e così via. Ad ogni passaggio siamo in grado di aggiungere uno dei w e cancellare uno dei v nell'insieme generatore. Se $m \leq n$, otteniamo allora finalmente un insieme generatore nella forma richiesta:

$$\{w_1, \ldots, w_m, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-m}}\}$$

In ultimo dimostriamo che non è possibile $m > n$. In tal caso infatti dopo n dei suddetti passaggi si ha l'insieme generatore $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Ciò implica che w_{n+1} sia una combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_n$, il che contraddice all'ipotesi che $\{w_i\}$ sia linearmente indipendente.

5.15. Dimostrare il teorema 5.3: Sia V uno spazio vettoriale a dimensioni finite. Qualsiasi base di V allora avrà lo stesso numero di vettori.

Poniamo che $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sia una base di V, e un'altra base sia $\{f_1, f_2, \ldots\}$. Poiché $\{e_i\}$ genera V, la base $\{f_1, f_2, \ldots\}$ deve contenere n o meno vettori, altrimenti per il problema precedente essa è dipendente. D'altra parte se la base $\{f_1, f_2, \ldots\}$ contiene meno di n vettori, sempre per il problema precedente la $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è dipendente. Così la base $\{f_1, f_2, \ldots\}$ contiene esattamente n vettori, ed in tal modo il teorema è dimostrato.

5.16. Provare il teorema 5.5: Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ sia un sottoinsieme indipendente massimo in un insieme S che genera uno spazio vettoriale V. Allora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base di V.

Supponiamo $w \in S$. Allora, dato che $\{v_i\}$ è un sottoinsieme indipendente massimo di S, $\{v_1, \ldots, v_m, w\}$ è linearmente dipendente. Per il problema 5.10, w è una combinazione lineare dei v_i, ovvero $w \in L(v_i)$. Quindi $S \subset L(v_i)$. Questo conduce a $V = L(S) \subset L(v_i) \subset V$. Di conseguenza $\{v_i\}$ genera V e, poiché è indipendente, è una base di V.

5.17. Poniamo che V sia generato da un insieme finito S. Dimostrare che V ha dimensione finita e che, in particolare, un sottoinsieme di S è una base di V.

Metodo 1. Di tutti i sottoinsiemi indipendenti di S, e di essi se ne ha un numero finito dato che S è finito, uno è il massimo. Per il problema precedente questo sottoinsieme di S è una base di V.

Metodo 2. Se S è indipendente, è una base di V. Se è dipendente, uno dei vettori è combinazione lineare dei vettori precedenti. Possiamo eliminare questo vettore ed avere ancora un insieme generatore. Continuiamo il procedimento fino ad ottenere un sottoinsieme che sia indipendente e generi V, ovvero che sia una base di V.

5.18. Dimostrare il teorema 5.6: Sia V di dimensione finita n. Allora:

(i) Qualsiasi insieme di $n+1$ o più vettori è linearmente dipendente.

(ii) Qualsiasi insieme linearmente indipendente è parte di una base.

(iii) Un insieme linearmente indipendente ad n elementi è una base.

Supponiamo che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sia una base di V.

(i) Dato che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ genera V, per il lemma 5.4 tutti gli $n+1$ o più vettori sono dipendenti.

(ii) Poniamo che $\{v_1, \ldots, v_r\}$ sia indipendente. Per il lemma 5.4, V è generato da un insieme di forma

$$S = \{v_1, \ldots, v_r, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-r}}\}$$

Per il problema precedente un sottoinsieme di S è una base. Ma S contiene n elementi ed ogni base di V contiene n elementi. Così S è una base di V e contiene $\{v_1, \ldots, v_r\}$ quale sottoinsieme.

(iii) Per la (ii) un insieme indipendente T con n elementi è parte di una base. Ma ogni base di V contiene n elementi. Perciò T è una base.

5.19. Dimostrare il teorema 5.7: Sia W un sottospazio di spazio vettoriale V ad n dimensioni. Allora $\dim W \leq n$. In particolare, se $\dim W = n$, è allora $W = V$.

Poiché V ha dimensione n, tutti gli $n+1$ o più vettori sono linearmente dipendenti. Inoltre, dato che una base di W consiste in vettori linearmente indipendenti, essa non può contenere più di n elementi. Di conseguenza $\dim W \leq n$.

In particolare se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ è una base di W, dato che è un insieme indipendente ad n elementi esso è anche una base di V. Perciò è $W = V$ quando $\dim W = n$.

5.20. Dimostrare il teorema 5.8: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Si noti che $U \cap W$ è sottospazio sia di U che di W. Poniamo $\dim U = m$, $\dim W = n$, e $\dim(U \cap W) = r$. Poniamo ancora che $\{v_1, \ldots, v_r\}$ sia una base di $U \cap W$. Per il teorema 5.6(ii) possiamo estendere $\{v_i\}$ a base di U e a base di W; diciamo

$$\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{m-r}\} \quad \text{e} \quad \{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$$

basi rispettivamente di U e di W. Sia

$$B = \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{m-r}, w_1, \ldots, w_{n-r}\}$$

Osserviamo che B ha esattamente $m+n-r$ elementi. Così il teorema è provato se possiamo mostrare che B è base di $U+W$. Dal momento che $\{v_i, u_j\}$ genera U e $\{v_i, w_k\}$ genera W, l'unione $B = \{v_i, u_j, w_k\}$ genera $U+W$. Perciò è sufficiente dimostrare che B è indipendente.

Sia per ipotesi

$$a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1u_1 + \cdots + b_{m-r}u_{m-r} + c_1w_1 + \cdots + c_{n-r}w_{n-r} = 0 \qquad (1)$$

in cui a_i, b_j, c_k sono degli scalari. Sia

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r + b_1u_1 + \cdots + b_{m-r}u_{m-r} \qquad (2)$$

Dalla (*1*) abbiamo anche

$$v = -c_1 w_1 - \cdots - c_{n-r} w_{n-r} \tag{3}$$

Poiché $\{v_i, u_j\} \subset U$, $v \in U$ per la (*2*); e poiché $\{w_k\} \subset W$, $v \in W$ per la (*3*). Di conseguenza $v \in U \cap W$. Ora $\{v_i\}$ è base di $U \cap W$ e quindi esistono degli scalari $d_1, \ldots, d_r$ per cui $v = d_1 v_1 + \cdots + d_r v_r$. Così per la (*3*) si ha

$$d_1 v_1 + \cdots + d_r v_r + c_1 w_1 + \cdots + c_{n-r} w_{n-r} = 0$$

Ma $\{v_i, w_k\}$ è base di W, perciò è indipendente. Allora detta equazione induce $c_1 = 0, \ldots, c_{n-r} = 0$. Sostituendo nella (*1*) si ottiene

$$a_1 v_1 + \cdots + a_r v_r + b_1 u_1 + \cdots + b_{m-r} u_{m-r} = 0$$

Ma $\{v_i, u_j\}$ è base di U e quindi è indipendente. Allora l'equazione precedente dà $a_1 = 0, \ldots, a_r = 0, b_1 = 0, \ldots, b_{m-r} = 0$.

Dato che l'equazione (*1*) implica che gli a_i, b_j e c_k sono tutti 0, $B = \{v_i, u_j, w_k\}$ è indipendente ed il teorema è provato.

5.21. Dimostrare il teorema 5.9: Rango riga e rango colonna di una matrice qualsiasi sono uguali.

Sia A un'arbitraria matrice $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_m$ ne indichino le righe:

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \quad \ldots, \quad R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

Poniamo che il rango riga sia r, e che i seguenti r vettori costituiscano una base per lo spazio riga:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}), \quad S_2 = (b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}), \quad \ldots, \quad S_r = (b_{r1}, b_{r2}, \ldots, b_{rn})$$

Ognuno dei vettori riga allora è una combinazione lineare degli S_i:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11} S_1 + k_{12} S_2 + \cdots + k_{1r} S_r \\ R_2 &= k_{21} S_1 + k_{22} S_2 + \cdots + k_{2r} S_r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_m &= k_{m1} S_1 + k_{m2} S_2 + \cdots + k_{mr} S_r \end{aligned}$$

in cui i k_{ij} sono scalari. Uguagliando a due a due le componenti i-esime di ciascuna delle suddette equazioni vettoriali, si ottiene questo sistema di equazioni, ognuna delle quali è valida per $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11} b_{1i} + k_{12} b_{2i} + \cdots + k_{1r} b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21} b_{1i} + k_{22} b_{2i} + \cdots + k_{2r} b_{ri} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{mi} &= k_{m1} b_{1i} + k_{m2} b_{2i} + \cdots + k_{mr} b_{ri} \end{aligned}$$

Così, per $i = 1, \ldots, n$:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \cdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \cdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \cdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \cdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

In altri termini ciascuna delle colonne di A è una combinazione lineare degli r vettori

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \cdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \cdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \cdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

Perciò lo spazio colonna della matrice A sarà al più di dimensione r; abbiamo cioè rango colonna $\leqslant r$. E da questo risulta che rango colonna $\leqslant$ rango riga.

Similmente (oppure considerando la matrice trasposta A^t) si ottiene rango riga $\leqslant$ rango colonna. Così è chiaro che rango riga e rango colonna sono uguali.

BASE E DIMENSIONE

5.22. Determinare se le seguenti sono o no delle basi dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$:

(i) $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 5)$
(ii) $(1, 2, 3)$, $(1, 0, -1)$, $(3, -1, 0)$ e $(2, 1, -2)$.
(iii) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ e $(2, -1, 1)$
(iv) $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 5)$ e $(5, 3, 4)$

(i); (ii). No; una base di $\mathbf{R}^3$ deve contenere esattamente 3 elementi: $\mathbf{R}^3$ ha infatti dimensione 3.

(iii) I vettori costituiscono una base solo ed unicamente se sono indipendenti. Formiamo perciò la matrice le cui righe sono i vettori dati, riducendola per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice a gradini non ha righe zero: i tre vettori sono quindi indipendenti, formando una base per $\mathbf{R}^3$.

(iv) Costruiamo la matrice che ha per righe i vettori dati, riducendola per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice a gradini ha una riga zero, cioè solo due righe non zero; quindi i tre vettori sono dipendenti e non formano perciò una base per $\mathbf{R}^3$.

5.23. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$ e $(3, 8, -3, -5)$. (i) Trovare una base e la dimensione di W. (ii) Estendere la base di W a base dell'intero spazio $\mathbf{R}^4$.

(i) Formiamo la matrice le cui righe sono i vettori dati, riducendola per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le righe non zero $(1, -2, 5, -3)$ e $(0, 7, -9, 2)$ formano una base dello spazio riga, cioè di W. Così in particolare $\dim W = 2$.

(ii) Cerchiamo quattro vettori indipendenti che comprendano i suddetti due. I vettori $(1, -2, 5, -3)$, $(0, 7, -9, 2)$, $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ sono indipendenti (dato che formano una matrice a gradini), e costituiscono quindi una base di $\mathbf{R}^4$ che è estensione della base di W.

5.24. Sia W lo spazio generato dai polinomi

$$v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \qquad v_3 = t^3 + 6t - 5$$
$$v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1 \qquad v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$$

Trovare una base e la dimensione di W.

I vettori coordinati di detti polinomi, relativi alla base $\{t^3, t^2, t, 1\}$ sono rispettivamente

$$[v_1] = (1, -2, 4, 1) \qquad [v_3] = (1, 0, 6, -5)$$
$$[v_2] = (2, -3, 9, -1) \qquad [v_4] = (2, -5, 7, 5)$$

Formiamo la matrice le cui righe siano detti vettori coordinati, e riduciamola per righe nella forma a gradini

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 1\\ 2 & -3 & 9 & -1\\ 1 & 0 & 6 & -5\\ 2 & -5 & 7 & 5\end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 2 & -6\\ 0 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Le righe non zero $(1, -2, 4, 1)$ e $(0, 1, 1, -3)$ della matrice a gradini formano una base dello spazio generato dai vettori coordinati, e così i polinomi corrispondenti

$$t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \quad \text{e} \quad t^2 + t - 3$$

costituiscono una base di W. Perciò $\dim W = 2$.

5.25. Trovare la dimensione e una base per lo spazio soluzione W del sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0\\ x + 2y + 3z + s + t &= 0\\ 3x + 6y + 8z + s + 5t &= 0 \end{aligned}$$

Riduciamo in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0\\ z + 2s - 2t &= 0\\ 2z + 4s - 4t &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x + 2y + 2z - s + 3t &= 0\\ z + 2s - 2t &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema in questa forma ha 2 equazioni (non zero) in 5 incognite; perciò la dimensione dello spazio soluzione W è $5 - 2 = 3$. Le variabili libere sono y, s, t. Poniamo

(i) $y = 1,\ s = 0,\ t = 0$, (ii) $y = 0,\ s = 1,\ t = 0$, (iii) $y = 0,\ s = 0,\ t = 1$

per avere le rispettive soluzioni

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (5, 0, -2, 1, 0), \quad v_3 = (-7, 0, 2, 0, 1)$$

L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base dello spazio soluzione W.

5.26. Trovare un sistema omogeneo il cui insieme soluzione W sia generato da

$$\{(1, -2, 0, 3), (1, -1, -1, 4), (1, 0, -2, 5)\}$$

Metodo 1. Sia $v = (x, y, z, w)$. Formiamo la matrice M le cui prime righe siano i vettori dati, l'ultima sia v; riduciamola per righe nella forma a gradini:

$$M = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -2 & 5\\ x & y & z & w\end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 2x + y & z & -3x + w\end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2x + y + z & -5x - y + w\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Le prime tre righe originali mostrano che W ha dimensione 2. Così $v \in W$ solo ed esclusivamente se la riga addizionale non aumenta la dimensione dello spazio riga. Poniamo quindi gli ultimi due elementi della terza riga a destra uguali a zero, ottenendo il richiesto sistema omogeneo

$$\begin{aligned} 2x + y + z \qquad &= 0\\ 5x + y \qquad - w &= 0 \end{aligned}$$

Metodo 2. Sappiamo che $v = (x, y, z, w) \in W$ solo ed unicamente se v è una combinazione lineare dei generatori di W:

$$(x, y, z, w) = r(1, -2, 0, 3) + s(1, -1, -1, 4) + t(1, 0, -2, 5)$$

Questa equazione vettoriale nelle incognite r, s, t è equivalente al sistema che segue:

46

$$\begin{aligned} r + s + t &= x \\ -2r - s &= y \\ -s - 2t &= z \\ 3r + 4s + 5t &= w \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} r + s + t &= x \\ s + 2t &= 2x + y \\ -s - 2t &= z \\ s + 2t &= w - 3x \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} r + s + t &= x \\ s + 2t &= 2x + y \\ 0 &= 2x + y + z \\ 0 &= 5x + y - w \end{aligned} \qquad (1)$$

Così $v \in W$ solo ed esclusivamente se il sistema suddetto ha una soluzione, ovvero se

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 5x + y - w &= 0 \end{aligned}$$

Questo è il sistema omogeneo richiesto.

Nota: Osservare che la matrice incrementata del sistema (*1*) è la trasposta della matrice *M* usata con il primo metodo.

5.27. Siano U e W i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = \{(a, b, c, d) :\ b + c + d = 0\}, \qquad W = \{(a, b, c, d) :\ a + b = 0,\ c = 2d\}$$

Trovare la dimensione ed una base di (i) U, (ii) W, (iii) $U \cap W$.

(i) Stiamo cercando una base dell'insieme di soluzioni (a, b, c, d) dell'equazione

$$b + c + d = 0 \quad \text{o} \quad 0 \cdot a + b + c + d = 0$$

Variabili libere sono a, c, d. Poniamo

(*1*) $a = 1, c = 0, d = 0$, (*2*) $a = 0, c = 1, d = 0$, (*3*) $a = 0, c = 0, d = 1$

per ottenere le rispettive soluzioni

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (0, -1, 1, 0), \quad v_3 = (0, -1, 0, 1)$$

L'insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di U, e $\dim U = 3$.

(ii) Cerchiamo una base dell'insieme di soluzioni (a, b, c, d) del sistema

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ c &= 2d \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} a + b &= 0 \\ c - 2d &= 0 \end{aligned}$$

Variabili libere sono b, d. Poniamo

(*1*) $b = 1, d = 0$, (*2*) $b = 0, d = 1$

per ottenere come rispettive soluzioni

$$v_1 = (-1, 1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 0, 2, 1)$$

L'insieme $\{v_1, v_2\}$ è base di W, e $\dim W = 2$.

(iii) $U \cap W$ consiste in quei vettori (a, b, c, d) che soddisfano alle condizioni che definiscono U e a quelle che definiscono W, ovvero alle tre equazioni

$$\begin{aligned} b + c + d &= 0 \\ a + b \qquad &= 0 \\ c \qquad &= 2d \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} a + b \qquad &= 0 \\ b + c + d &= 0 \\ c - 2d &= 0 \end{aligned}$$

Variabile libera è d. Se poniamo $d = 1$ abbiamo la soluzione $v = (3, -3, 2, 1)$. Così $\{v\}$ è una base di $U \cap W$, e $\dim (U \cap W) = 1$.

5.28. Trovare la dimensione dello spazio vettoriale generato da:

(i) $(1, -2, 3, -1)$ e $(1, 1, -2, 3)$

(ii) $(3, -6, 3, -9)$ e $(-2, 4, -2, 6)$

(iii) $t^3 + 2t^2 + 3t + 1$ e $2t^3 + 4t^2 + 6t + 2$

(iv) $t^3 - 2t^2 + 5$ e $t^2 + 3t - 4$

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

(vii) 3 e -3.

47

Due vettori non zero generano uno spazio W di dimensione 2 se sono indipendenti, di dimensione 1 se sono dipendenti. E ricordiamo che due vettori sono dipendenti solo ed esclusivamente se uno è multiplo dell'altro. Da cui: (i) 2, (ii) 1, (iii) 1, (iv) 2, (v) 2, (vi) 1, (vii) 1.

5.29. Sia V lo spazio vettoriale di matrici simmetriche 2×2 su K. Dimostrare che $\dim V = 3$. (E' opportuno ricordare che $A = (a_{ij})$ è simmetrica solo ed unicamente se $A = A^t$, ovvero, in modo equivalente, se $a_{ij} = a_{ji}$.)

Una matrice simmetrica 2×2 arbitraria può essere della forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ in cui $a, b, c \in K$. (Si noti che ci sono tre "variabili".) Ponendo

(i) $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$, (ii) $a = 0,\ b = 1,\ c = 0$, (iii) $a = 0,\ b = 0,\ c = 1$

otteniamo le rispettive matrici

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostriamo che $\{E_1, E_2, E_3\}$ è una base di V, ovvero che (*1*) genera V e (*2*) è indipendente.

(1) Per la suddetta matrice arbitraria A in V si ha

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

Così $\{E_1, E_2, E_3\}$ genera V.

(2) Poniamo $xE_1 + yE_2 + zE_3 = 0$, con x, y, z incognite scalari. Poniamo cioè

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uguagliando a due a due gli elementi corrispondenti si ottiene $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. In altri termini,

$$xE_1 + yE_2 + zE_3 = 0 \quad \text{implica} \quad x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

Di conseguenza $\{E_1, E_2, E_3\}$ è indipendente.

Così $\{E_1, E_2, E_3\}$ è una base di V, e la dimensione è 3.

5.30. Sia V lo spazio di polinomi in t di grado $\leq n$. Dimostrare che ciascuno dei seguenti è base di V:

(i) $\{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n\}$, (ii) $\{1, 1-t, (1-t)^2, \ldots, (1-t)^{n-1}, (1-t)^n\}$.

Così $\dim V = n + 1$.

(i) E' chiaro che ogni polinomio di V è combinazione lineare di $1, t, \ldots, t^{n-1}, t^n$. Inoltre $1, t, \ldots, t^{n-1}, t^n$ sono indipendenti, dal momento che nessuno è una combinazione lineare dei polinomi precedenti. Così $\{1, t, \ldots, t^n\}$ è una base di V.

(ii) (Si noti che per la (i), $\dim V = n + 1$; e così tanti polinomi indipendenti in numero di $n + 1$ formano una base di V.) Ora ogni polinomio nella sequenza $1, 1-t, \ldots, (1-t)^n$ è di grado maggiore dei precedenti, e perciò non è combinazione lineare dei suddetti. Così gli $n + 1$ polinomi $1, 1-t, \ldots, (1-t)^n$ sono indipendenti, e formano una base di V.

5.31. Sia V lo spazio vettoriale di coppie ordinate di numeri complessi sul campo reale R (vedere il problema 4.42). Dimostrare che V ha dimensione 4.

Noi diciamo che la seguente è una base di V:

$$B = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$$

Poniamo $v \in V$. Allora $v = (z, w)$, con z, w numeri complessi, e quindi $v = (a + bi, c + di)$ in cui a, b, c, d sono numeri reali. Allora

$$v = a(1, 0) + b(i, 0) + c(0, 1) + d(0, i)$$

Perciò B genera V.

 51

(ii) $(a, b, c) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(1,0,0) = (x+y+z, x+y, x)$

Allora $\quad x+y+z = a, \quad x+y = b, \quad x = c$

da cui $x = c$, $y = b-c$, $z = a-b$. Perciò $[v] = (c, b-c, a-b)$, ovvero $[(a,b,c)] = (c, b-c, a-b)$.

5.37. Sia V lo spazio vettoriale di matrici 2×2 su **R**. Trovare il vettore coordinato della matrice $A \in V$ relativo alla base

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{in cui} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Porre A in forma di combinazione lineare delle matrici della base, usando per questo scalari incogniti x, y, z, w:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & -z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x+z+w & x-y-z \\ x+y & x \end{pmatrix}$$

Uguagliamo gli elementi corrispondenti per avere il sistema

$$x+z+w = 2, \quad x-y-z = 3, \quad x+y = 4, \quad x = -7$$

da cui $x = -7$, $y = 11$, $z = -21$, $w = 30$. Perciò $[A] = (-7, 11, -21, 30)$. (Si noti che il vettore coordinato di A dev'essere un vettore di $\mathbf{R}^4$, dato che $\dim V = 4$.)

5.38. Sia W lo spazio vettoriale di matrici simmetriche 2×2 su **R**. (Vedere il problema 5.29.) Trovare il vettore coordinato della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix}$ relativamente alla base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\right\}$.

Mettere A in forma di combinazione lineare delle matrici della base, usando come incognite scalari x, y, z:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -11 & -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+4z & -2x+y-z \\ -2x+y-z & x+3y-5z \end{pmatrix}$$

Uguagliare gli elementi corrispondenti per ottenere il sistema equivalente di equazioni lineari; ridurre poi in forma a gradini:

$$\begin{aligned} x+2y+4z &= 4 \\ -2x+y-z &= -11 \\ -2x+y-z &= -11 \\ x+3y-5z &= -7 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x+2y+4z &= 4 \\ 5y+7z &= -3 \\ y-9z &= -11 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x+2y+4z &= 4 \\ 5y+7z &= -3 \\ 52z &= 52 \end{aligned}$$

Otteniamo $z = 1$ dalla terza equazione, $y = -2$ dalla seconda, $x = 4$ dalla prima. Così soluzione del sistema sarà $x = 4$, $y = -2$, $z = 1$; e perciò $[A] = (4, -2, 1)$. (Essendo $\dim W = 3$ per il problema 5.29, vettore coordinato di A deve essere un vettore di $\mathbf{R}^3$.)

5.39. Siano $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ delle basi di uno spazio vettoriale V (con dimensione 3). Poniamo

$$\begin{aligned} e_1 &= a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 \\ e_2 &= b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3 \\ e_3 &= c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Sia P la matrice che ha come righe rispettivamente i vettori coordinati di e_1, e_2, e_3, relativamente alla base $\{f_i\}$:

52

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Dimostriamo adesso che, per qualsiasi vettore $v \in V$, $[v]_e P = [v]_f$. Vale a dire che moltiplicando il vettore coordinato di v relativo alla base $\{e_i\}$ per la matrice P si ottiene il vettore coordinato di v relativo alla base $\{f_i\}$. (La matrice P viene spesso chiamata matrice cambiamento di base.)

Poniamo $v = re_1 + se_2 + te_3$; allora $[v]_e = (r, s, t)$. Usando la (1) si ha

$$\begin{aligned} v &= r(a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3) + s(b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3) + t(c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3) \\ &= (ra_1 + sb_1 + tc_1)f_1 + (ra_2 + sb_2 + tc_2)f_2 + (ra_3 + sb_3 + tc_3)f_3 \end{aligned}$$

Quindi
$$[v]_f = (ra_1 + sb_1 + tc_1,\ ra_2 + sb_2 + tc_2,\ ra_3 + sb_3 + tc_3)$$

D'altra parte
$$\begin{aligned} [v]_e P &= (r, s, t) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= (ra_1 + sb_1 + tc_1,\ ra_2 + sb_2 + tc_2,\ ra_3 + sb_3 + tc_3) \end{aligned}$$

E di conseguenza $[v]_e P = [v]_f$.

Nota: Nel capitolo 8 scriveremo dei vettori coordinati come vettori colonna invece che come vettori riga. Allora per quanto visto

$$Q[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 + sb_1 + tc_1 \\ ra_2 + sb_2 + tc_2 \\ ra_3 + sb_3 + tc_3 \end{pmatrix} = [v]_f$$

in cui Q è la matrice le cui colonne sono i vettori coordinati rispettivamente di e_1, e_2, e_3 relativi alla base $\{f_i\}$. Si noti che Q è la trasposta di P, e che essa appare a sinistra del vettore colonna $[v]_e$, mentre P appare alla destra del vettore riga $[v]_e$.

RANGO DI UNA MATRICE

5.40. Trovare il rango della matrice A, quando:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

(i) Ridurre per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dal momento che la matrice a gradini ha due righe non zero, rango $(A) = 2$.

(ii) Poiché rango per righe è uguale a rango per colonne, è più facile costruire la trasposta di A e ridurla poi per righe in forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Perciò si ha rango $(A) = 3$.

(53)

(iii) Le due colonne sono linearmente indipendenti, dato che una non è multiplo dell'altra. Quindi rango $(A) = 2$.

5.41. Siano A, B delle matrici arbitrarie per le quali il prodotto AB è definito. Dimostrare che rango $(AB) \leq$ rango (B), e che rango $(AB) \leq$ rango (A).

Per il problema 4.33 di pag. 80 lo spazio riga di AB è contenuto nello spazio riga di B; quindi rango $(AB) \leq$ rango (B). Inoltre per il problema 4.71 di pag. 84 lo spazio colonna di AB è contenuto nello spazio colonna di (A); quindi rango $(AB) \leq$ rango (A).

5.42. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Dimostrare che A è invertibile solo ed esclusivamente se rango $(A) = n$.

Notiamo che le righe della matrice identità I_n, quadrata di ordine n, sono linearmente indipendenti, poiché I_n è nella forma a gradini; quindi rango $(I_n) = n$. Se adesso A è invertibile, per il problema 3.36 di pag. 57 essa è equivalente per righe ad I_n; quindi rango $(A) = n$. Ma se A è non invertibile, essa è equivalente per righe ad una matrice con una riga zero; quindi rango $(A) < n$. Ovvero, A è invertibile solo ed unicamente se il rango è uguale ad n.

5.43. Siano $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ le variabili libere di un sistema omogeneo di equazioni lineari ad n incognite. Sia v_j la soluzione per cui $x_{i_j} = 1$, e per cui tutte le altre variabili libere diventano zero. Si dimostri che le soluzioni $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Sia A la matrice avente per righe rispettivamente i v_i. Scambiamo a due a due colonna 1 e colonna i_1, colonna 2 e colonna $i_2, \ldots$, colonna k e colonna i_k; otterremo la matrice $k \times n$

$$B = (I, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{1,k+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{2,k+1} & \ldots & c_{2n} \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & c_{k,k+1} & \ldots & c_{kn} \end{pmatrix}$$

Detta matrice B è in forma a gradini, perciò le sue righe sono indipendenti; quindi rango $(B) = k$. Dato che A, B sono equivalenti per colonne, esse hanno lo stesso rango, ovvero rango $(A) = k$. Ma A ha k righe, quindi dette righe, cioè i v_i, sono linearmente indipendenti come si era affermato.

PROBLEMI DIVERSI

5.44. Il concetto di dipendenza lineare viene esteso a ciascun insieme di vettori, finito o infinito, nel modo che segue: l'insieme di vettori $A = \{v_i\}$ è linearmente dipendente solo ed esclusivamente se esistono dei vettori $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in A$ e degli scalari $a_1, \ldots, a_n \in K$, non tutti zero, tali che

$$a_1 v_{i_1} + a_2 v_{i_2} + \cdots + a_n v_{i_n} = 0$$

Altrimenti A si dice linearmente indipendente. Supponiamo che $A_1, A_2, \ldots$ siano degli insiemi di vettori linearmente indipendenti, e che $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Dimostrare che l'unione $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ è anche linearmente indipendente.

Supponiamo che A sia linearmente dipendente. Esistono allora dei vettori $v_1, \ldots, v_n \in A$ e degli scalari $a_1, \ldots, a_n \in K$, non tutti zero tali che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \qquad (1)$$

Dal momento che $A = \cup A_i$ ed i $v_i \in A$, esistono degli insiemi $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ tali che

$$v_1 \in A_{i_1}, \quad v_2 \in A_{i_2}, \quad \ldots, \quad v_n \in A_{i_n}$$

Sia k l'indice massimo degli insiemi A_{i_j}: $k = \max(i_1, \ldots, i_n)$. Ne deriva allora, dato che $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, che ogni A_{i_j} è contenuto in A_k. Quindi $v_1, v_2, \ldots, v_n \in A_k$ e così, per la (1), A_k è linearmente dipendente: e ciò contraddice la nostra ipotesi. Così A è linearmente indipendente.