

Università “Ca’Foscari” Venezia

*Dipartimento di Scienze Ambientali,
Informatica e Statistica*

Giovanni Fasano [†]

*Brevi FAQ sul
Metodo del SIMPLESSO*

[†]Università Ca’Foscari Venezia, Dipartimento di Management, S.Giobbe Cannaregio 873, 30121 Venezia, ITALY. E-mail: fasano@unive.it ; URL: <http://venus.unive.it/~fasano> - A.A. 2014-2015.

Le presenti note sintetizzano alcune Frequently Asked Questions (FAQ) inerenti il Metodo del Simplex, per la soluzione di problemi di Programmazione Lineare. Le note si riferiscono al corso di Ricerca Operativa, svolto dal docente Giovanni Fasano nell'A.A. 2014-2015, presso la sede di via Torino. Le lezioni sono state organizzate nell'ambito del Corso di Laurea in *Informatica*.

1 Note sul Metodo del Simplexso

Si ricorda che le fasi salienti del Metodo del Simplexso, per la soluzione del problema di programmazione lineare del tipo

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad b \geq 0, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

nel quale $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $rk(A) = m$, sono le seguenti:

- Adottando le posizioni

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}, \quad A = (B \mid N),$$

in cui x è la Soluzione di Base Ammissibile (SBA) corrente, si pone il problema (1) in forma canonica, ovvero riscrivendolo nella forma

$$\max \quad c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$B^{-1} b + B^{-1} N x_N \geq 0$$

$$x_N \geq 0.$$

Tale operazione è effettuata identificando la matrice di base B mediante la *Fase I* del Metodo del Simplexso, ovvero avendo introdotto il *Problema Ausiliario*. Qualora quest'ultimo non ammetta soluzione ottima nulla, allora deduciamo che il problema (1) ha un insieme ammissibile vuoto (e quindi ci fermiamo).

- Verifica del *Test di Ottimalità*, considerando il vettore dei *guadagni ridotti* $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. Se il test è soddisfatto allora STOP: la SBA corrente è soluzione ottima;
- Verifica del *Test di Illimitatezza*, considerando γ e le colonne della matrice $B^{-1} N$: se (almeno) una colonna, corrispondente ad un coefficiente di guadagno ridotto positivo, è formata solo da elementi negativi o nulli, allora STOP, significa che il problema (1) è illimitato superiormente;
- Ricerca di una nuova SBA applicando l'operazione di *pivot*. Tale passo può essere riassunto nelle seguenti sottofasi
 1. scelta dell'indice della variabile **entrante** (h -ma variabile **fuori** base), tenendo conto del vettore γ^T e ricordando la regola di Bland. Selezione della colonna h -ma (indicata con Π_h) della matrice $B^{-1} N$;

2. scelta dell'indice della variabile **uscente** (k -ma variabile **in** base), calcolando

$$\min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ \Pi_{hi} > 0}} \left\{ \frac{(B^{-1}b)_i}{\Pi_{hi}} \right\},$$

3. operazione vera e propria di pivot: dividere la riga k -ma per l'elemento di pivot, poi sottrarla alle altre righe moltiplicata per opportuni coefficienti. In tal modo la colonna dell'elemento di pivot dovrà contenere solo valori nulli, ed un '1' in corrispondenza dell'elemento di pivot.

FAQ relative al Metodo del Simplexso

1. Come è possibile portare il problema originale di PL alla *forma standard* ?
R: *vedasi paragrafo conclusivo della dispensa relativa alla prima parte del corso*
2. Come faccio ad avere $b \geq 0$ in (1) ?
R: *basta opportunamente moltiplicare ciascuna equazione per $+1/-1$*
3. Come faccio a svolgere un'iterazione del Metodo del Simplexso ?
R: *devo isolare le variabili in base (≥ 0) dalle variabili fuori base ($= 0$). Le prime sono 'm', le seconde sono 'n - m', poi avendo identificato la variabile entrante e quella uscente provvedo ad effettuare l'operazione di pivot*
4. Quante variabili cambio ad ogni iterazione del Metodo del Simplexso ?
R: *ad ogni iterazione avrò sempre e solo una variabile entrante (che al termine dell'iterazione da nulla passerà ad un valore nonnegativo) ed una variabile uscente (che al termine dell'iterazione da un valore nonnegativo passerà al valore nullo)*
5. Le variabili in base, all'iterazione corrente, devono sempre essere tutte strettamente positive ?
R: *no, alcune di esse (eventualmente tutte) possono essere nulle, avendosi così una SBA degenera*
6. Come si svolge l'iterazione i -sima del Metodo del Simplexso ?
R: *possiamo riassumere l'iterazione come segue:*
 - *verifico se la SBA corrente è soluzione ottima (Test di Ottimalità)*
 - *verifico che il problema di partenza non sia illimitato superiormente (Test di Illimitatezza)*
 - *identifico la variabile entrante*
 - *identifico la variabile uscente*
 - *effettuo l'operazione di pivot*
 - *calcolo il vettore dei nuovi coefficienti di guadagno ridotto*
7. In cosa consiste l'operazione di *pivot* all'iterazione corrente ?
R: *consiste nel fare uscire di base una variabile e farne entrare in base un'altra, partendo dalla forma canonica del problema e lasciandolo in forma canonica. Per come è scelta la variabile uscente il vettore dei termini noti viene aggiornato, ma rimane nonnegativo (i.e. ≥ 0)*

8. A cosa corrisponde dal punto di vista geometrico una SBA ?
R: *corrisponde ad un vertice della regione ammissibile del problema originale*
9. Come assicuro il soddisfacimento dell'ipotesi $rk(A) = m$?
R: *grazie alla Fase I del Metodo del Simplexso*
10. Sono sempre certo di poter effettuare all'iterazione corrente l'operazione di pivot ?
R: *sì se entrambi i test di Ottimalità ed Illimitatezza non sono soddisfatti*
11. Come seleziono la variabile *entrante* ?
R: *guardo i coefficienti di guadagno ridotto ed applico la regola di Bland*
12. Cosa succede se al termine della Fase I del Metodo del Simplexso, la funzione obiettivo del problema ausiliario ha valore $\neq 0$?
R: *mi fermo, vuol dire che il problema originale è NON AMMISSIBILE*
13. Cosa succede se al termine della Fase I del Metodo del Simplexso, la funzione obiettivo del problema ausiliario ha valore $= 0$, ma alcune variabili ausiliare sono ancora in base ?
R: *se la variabile ausiliaria y_k è in base, essendo la funzione obiettivo nulla, vuol dire che siamo in presenza di una soluzione degenera (ovvero deve essere $y_k = 0$). Pertanto, se possibile provvedo ad effettuare uno SCAMBIO DEGENERE, altrimenti elimino il vincolo k -simo del problema originale, in quanto è ridondante*
14. Applicando la Fase I del Metodo del Simplexso, ad ogni iterazione devo sempre verificare entrambi i Test di Ottimalità ed Illimitatezza ?
R: *no, basta effettuare solo il Test di Ottimalità, in quanto il problema ausiliario non potrà mai essere illimitato inferiormente.*