Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 26 giugno 2002.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi “Ritirato”. La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.
Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=☐ . ☐☐☐☐☐ e virgola mobile=☐☐ . ☐☐☐☐ E ☐☐ , la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.
La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.
La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.
Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Prima parte.

Test 1 *Studiare la funzione*

$$f(x) = e^{|\lambda|x} g(x), \quad g(x) = (\cos(\theta x) + \sin(\theta x)), \tag{1}$$

dove $\lambda = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$. *Questa funzione è la soluzione di un'equazione differenziale del tipo* $au_{xx} + bu_x + cu = 0$ *e rappresenta l'andamento di un sistema soggetto ad oscillazioni armoniche [1].*
Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
$\mathbb{R} \backslash \{1A$: ☐, $1B$: ☐$\}$
Valore: 7.
Domanda numero 2: *Qual è la periodicità* p *della funzione* $g(x)$*?* $p =$
2A : ☐ Valore: 5.
Domanda numero 3: *Quanto vale il limite per* $x \to +\infty$*?*
3A : ☐ Valore: 5.

Domanda numero 4: *Quanto vale il limite per $x \to -\infty$?*
4A : [ ] *Valore: 5*.
Studiare i limiti nei punti x_i in cui la funzione non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 5: *Punti x_i: x_1=* *5A* : [ ]
L_1^+= *5B* : [ ], L_1^-=
5C : [ ],
x_2= *5D* : [ ], L_2^+=
5E : [ ], L_2^-= *5F* : [ ].
Valore: 21.
Domanda numero 6: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 20.
Domanda numero 7: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: x_1=* *7A* : [ ] $f(x_1)$=
7B : [ ] x_2= *7C* : [ ] $f(x_2)$=
7D : [ ] *Valore: 8*.
Domanda numero 8: *I punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, nell'intervallo* $[0, 2]$ *sono compresi nell'intervallo:* 1 : $(0, 0.5)$; *2* :*(0.5,1);* 3 : $(1, 1.5)$; *4* :*(1.5,2);* 5 : *Non ve ne sono.;* *Valore: 10*.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_iy + b_ix + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).
Domanda numero 9: *Asintoti: x_1=* *9A* : [ ]
a_1= *9B* : [ ] b_1= *9C* : [ ]
c_1= *9D* : [ ] x_2= *9E* : [ ]
a_2= *9F* : [ ] b_2= *9G* : [ ]
c_2= *9H* : [ ] x_3= *9I* : [ ]
a_3= *9J* : [ ] b_3= *9K* : [ ]
c_3= *9L* : [ ] *Valore: 42*.

Domanda numero 10: *In quale dei seguenti intervalli la funzione è crescente?* $\boxed{1}$ *: [0,1];* $\boxed{2}$ *: [1,2];* $\boxed{3}$ *: Nessuno dei precedenti;* $\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 11: *Schizzare un grafico della funzione, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 12: *Quanto vale q tale che* $g(x) = O(x^q)$, *per* $x \to +\infty$? $\boxed{1}$ *: -1;* $\boxed{2}$ *: 0;* $\boxed{3}$ *: 1;* $\boxed{4}$ *: 2;* $\boxed{5}$ *: 3;* $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 13: *Qual è l'integrale indefinito di* $e^{-|\lambda|x} f(x)$?

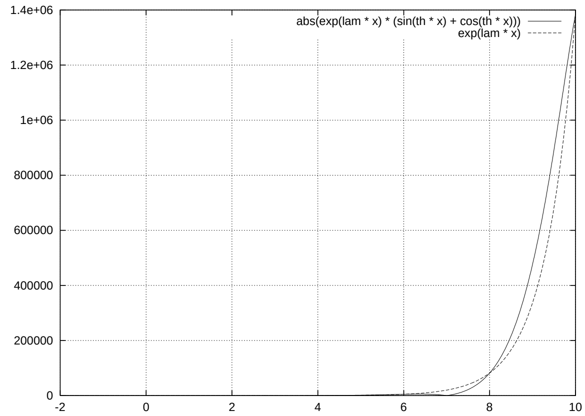
$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Domanda numero 14: *Sia* $I(a,b) = \int_a^b e^{-|\lambda|x} f(x)dx$. $I(0,1)=$ *14A :* $\boxed{}$ $I(1,2)=$ *14B :* $\boxed{}$ $I(-1,0)=$ *14C :* $\boxed{}$ $I(-2,-1)=$ *14D :* $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 32}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.
- Il periodo di $g(x)$ è $p = 8$.

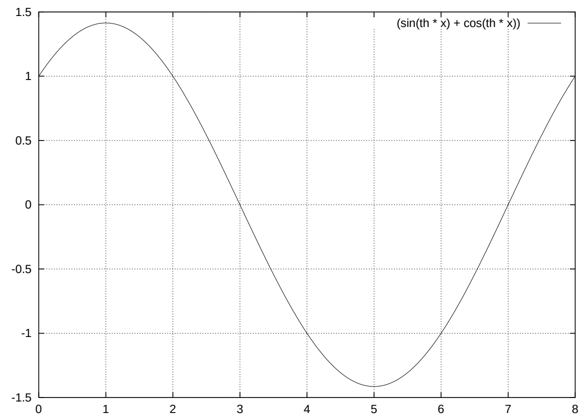
- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{non esiste}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
- Non vi sono punti in cui la funzione non è derivabile.
- La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non vi sono altri asintoti.
- $$y'(x) = \exp(\sqrt{(}2)x)((\pi/4 + \sqrt{(}2))\cos(\pi x/4) + (\sqrt{(}2) - \pi/4)\sin(\pi x/4));$$
- Non vi sono punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile.
- Nell'intervallo [0,2] la derivata non ha punti di stazionarietà.
- La funzione è crescente nell'intervallo [0,1].
- $g(x) = O(1)$ per $x \to \infty$.
- Grafico della funzione.



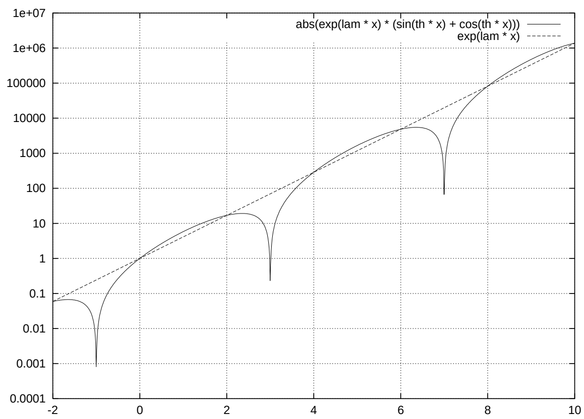
Non è molto comprensibile. Ricordando che la funzione

$$\cos(\theta t) + \sin(\theta t)$$

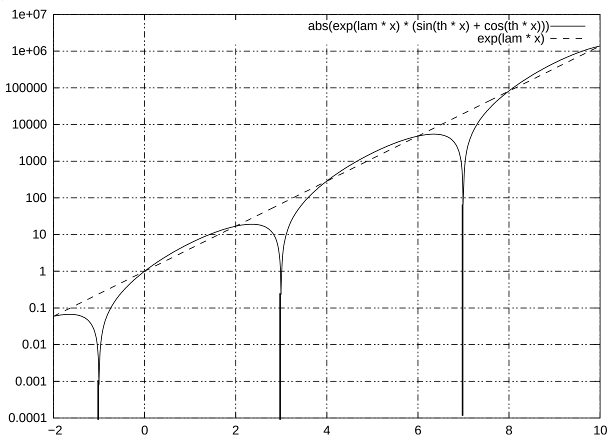
è periodica di periodo $p = 8$, e il suo grafico è il seguente:



ci conviene plottare in scala semilogaritmica il valore assoluto della funzione; otteniamo il grafico:



Si noti che nei punti in cui $g(x) = 0$, la funzione è nulla, anche se nel grafico non si vede! Correggendo “a mano” si può ottenere una figura piú fedele:



- $$\int g(x)dx = 4\sin(\pi x/4)/\pi - 4\cos(\pi x/4)/\pi.$$

  $I(0,1) = 4/\pi \simeq 1.2732,$
  $I(1,2) = 4/\pi \simeq 1.2732,$
  $I(-1,0) = (4\sqrt(2) - 4)/\pi \simeq 0.52739,$
  $I(-2,-1) = (4 - 4\sqrt(2))/\pi \simeq -0.52739.$

Test 2 Domanda numero 15: *Usando la definizione di derivata, dimostrare che se f e g sono derivabili in I, allora per ogni $x \in I$:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che per ogni $x \in I$

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \quad (3)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x)).
\end{aligned}$$

Perciò, visto che f e g sono derivabili (e quindi continue) in I, risulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&f'(x)g(x) + g'(x)f(x).
\end{aligned}$$

QED

Test 3 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$u_{tt} + 4u_t + 5u = 0, \quad t \in [0, T], T = 100, \tag{4}$$

Essa governa l'andamento di un sistema soggetto ad oscillazioni smorzate [1].
Domanda numero 16: *Qual è la soluzione generale, $u^*(t)$, dell'equazione (4)?*

Valore: 20.
Consideriamo le condizioni iniziali

$$u(0) = u_0 = 1, u'(0) = u'_0 = -2. \tag{5}$$

Domanda numero 17: *Qual è la soluzione, $u(t)$, del problema risultante?*

Valore: 20.
Domanda numero 18: *Quanto vale $u(1)$?*
18A : ____ *Valore: 5*.
Domanda numero 19: *Quanto vale $u(2)$?*
19A : ____ *Valore: 5*.
Domanda numero 20: *Quanto vale $u(3)$?*
20A : ____ *Valore: 5*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$u^*(t) = \exp(-2t)(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Imponendo le condizioni iniziali, otteniamo:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

$$u(t) = \exp(-2t)\cos t.$$

$u(1) = \exp(-2)\cos 1 \simeq 0.073122$, $u(2) = \exp(-4)\cos 2 \simeq$ -0.007622,
$u(3) = \exp(-6)\cos 3 \simeq$ -0.00245395.

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2},$$

detta comunemente funzione "sombrero".
Calcolare il gradiente $\nabla f(x_1, x_2) = (f_{x_1}, f_{x_2}) = (J_1, J_2)$.
Domanda numero 21: *Quanto vale* J_1*?*

$J_1 =$

$\boxed{\text{Valore: 8}}$.
Domanda numero 22: *Quanto vale* J_2*?*

$J_2 =$

$\boxed{\text{Valore: 8}}$.
Domanda numero 23: *Dimostrare che* $f(x, y) =$*cost. se e solo se* $x^2 + y^2 =$*cost.*

$\boxed{\text{Valore: 8}}$.
Sia $\mathbf{a} = (1, 2)$.
Domanda numero 24: *Quanto vale* $J_1(\mathbf{a})$*?*
24A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 8}}$.
Domanda numero 25: *Quanto vale* $J_2(\mathbf{a})$*?*
25A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 8}}$.
Domanda numero 26: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*
26A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 5}}$.
Domanda numero 27: *Quanto vale il minimo di* $f(x_1, x_2)$*?*
27A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 5}}$.

Domanda numero 28: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*
28A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 29: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*
29A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 30: *Schizzare un grafico delle curve di livello $f(\mathbf{x}) = c$, per $c = 0.8, 0.4, 0.2$, $-2\pi < x < 2\pi$, $-2\pi < y < 2\pi$, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

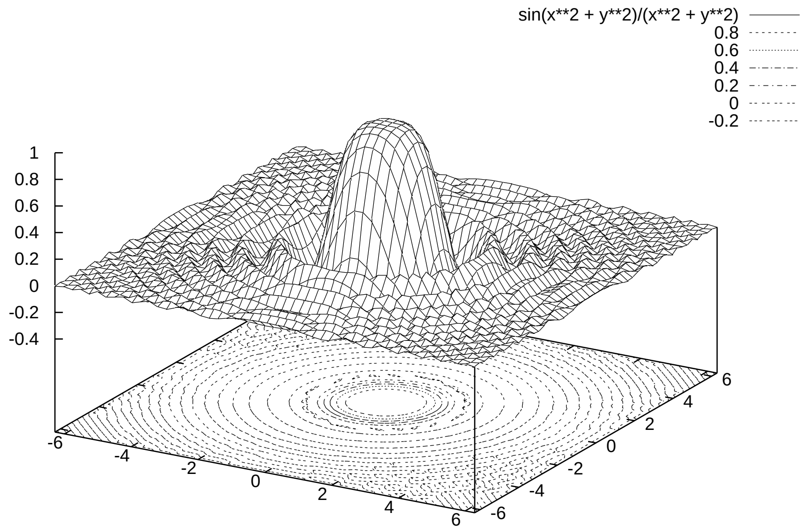
Abbiamo:
Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Sia $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$.

$$J(\mathbf{x}) = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) =$$
$$\{\frac{2\,x_1\,\cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2\,x_1\,\sin(x_1^2 + x_2^2)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2},$$
$$\frac{2\,x_2\,\cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2\,x_2\,\sin(x_1^2 + x_2^2)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}\}$$

$f(x, y)$ è costante sse $\cos(g(x, y))/g(x, y)$ =cost., ossia $g(x, y) = x^2 + y^2$ =cost.

$$J(\mathbf{a}) =$$
$$\{\frac{2\,\cos(5)}{5} - \frac{2\,\sin(5)}{25}, \frac{4\,\cos(5)}{5} - \frac{4\,\sin(5)}{25}\}$$
$$(0.190179, 0.380358)$$

$\max_{x \in D} f = 1$, $\min_{x \in D} f = -1$, $\sup_{x \in D} f = 1$, $\inf_{x \in D} f = -1$.
Grafico della funzione e delle sue curve di livello:



Riferimenti bibliografici

[1] R. Haberman, *Mathematical Models*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998. Unabridged republication of Prentice-Hall book, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 3 febbraio 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Per rappresentare l' andamento del* raggio idraulico della capillarità*, si può usare la cosiddetta funzione* J-Leverett *[Bea72]*

$$J(S_w) = (p_c(S_w)/\sigma)\sqrt{k/n}, \tag{1}$$

dove S_w è il grado di saturazione del mezzo poroso, $p_c = p_c(S_w)$ la pressione capillare, σ la tensione di interfaccia, k la permeabilità del mezzo, n la porosità. Supponiamo che

$$p_c(S_w) = -\tan(\pi S_w/120 - \pi/2) + 4/10 = 2/5 + \cot(\pi\, S_w/120).$$

Ricordare che:

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad \tan(x - \pi/2) = -\cot(x), \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Sia $k = \sigma = n = 1$,

$$f(x) \equiv J(x).$$

Il dominio della funzione si può indicare come:

$$a < x < b, \quad x \notin S,$$

dove S *è un opprtuno insieme di punti da escludere.*
Domanda numero 1: *Quanto vale* a*?* *1A :* [ ]
Domanda numero 2: *Quanto vale* b*?* *2A :* [ ]
Domanda numero 3: *Qual è l' insieme* S*?*

Valore: 4.
Domanda numero 4: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to -\infty$*?*
4A : [ ] *Valore: 5.*
Domanda numero 5: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to +\infty$*?*
5A : [ ] *Valore: 5.*
La funzione è periodica.
Domanda numero 6: *Qual è il suo periodo* p*?*
$p =$ *6A :* [ ] *Valore: 5.*
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione nell' intervallo $[0, p]$, **al quale ci limitiamo in tutta la rimanente parte del test**.
Studiare i limiti di $f(x)$ *nei punti* x_i *in cui non è definita. N.B.:*

$$\lim_{x \to x_i +} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i -} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 7: *Punti* x_i*:* $x_1 =$ *7A :* [ ],
$L_1^- =$ *7B :* [ ], $L_1^+ =$
7C : [ ];
$x_2 =$ *7D :* [ ], $L_2^- =$
7E : [ ], $L_2^+ =$ *7F :* [ ].
Valore: 21.
Domanda numero 8: *Qual è la derivata di* $f(x)$*?*

Valore: 8.

Domanda numero 9: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile:* $x_1=$ *9A :* [ ], $f(x_1)=$
9B : [ ]; $x_2=$ *9C :* [ ], $f(x_2)=$
9D : [ ]. *Valore: 8.*

Domanda numero 10: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo, "2" se è un flesso.* $x_1=$
10A : [ ]; $f(x_1)=$ *10B :* [ ];
Massimo o minimo?= *10C :* [ ]; $x_2=$
10D : [ ]; $f(x_2)=$ *10E :* [ ];
Massimo o minimo?= *10F :* [ ]; *Valore: 20.*

Domanda numero 11: *Punti di flesso x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$.* $x_1=$
11A : [ ]; $f(x_1)=$ *11B :* [ ];
$x_2=$ *11C :* [ ]; $f(x_2)=$
11D : [ ]. *Valore: 16.*

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 12: *Asintoti:* $x_1=$ *12A :* [ ];
$a_1=$ *12B :* [ ]; $b_1=$
12C : [ ]; $c_1=$ *12D :* [ ]; $x_2=$
12E : [ ]; $a_2=$ *12F :* [ ]; $b_2=$
12G : [ ]; $c_2=$ *12H :* [ ].
Valore: 28.

Domanda numero 13: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 160.

Sia $q(x) = f(x)\, f'(x)$.
Domanda numero 14: *Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

Valore: 20.
Sia $a = 0$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 60$.
Sia $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.
Domanda numero 15: *Quanto vale* $V(a, b)$*?* $V(a, b)=$
15A : $\boxed{}$; *Valore: 4.*
Domanda numero 16: *Quanto vale* $V(b, c)$*?* $V(b, c)=$
16A : $\boxed{}$; *Valore: 4.*
Domanda numero 17: *Quanto vale* $V(c, d)$*?* $V(c, d)=$
17A : $\boxed{}$. *Valore: 4.*

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

La funzione da studiare è:

$$f(x) = -\tan(\pi x/120 - \pi/2) + 4/10.$$

- Il dominio della funzione è $-\infty < x < +\infty$, $x \notin S$, $S = \{z : z = k \cdot 120, k \in \mathbb{Z}\}$.
- I limiti valgono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{non esiste}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{non esiste}.$$

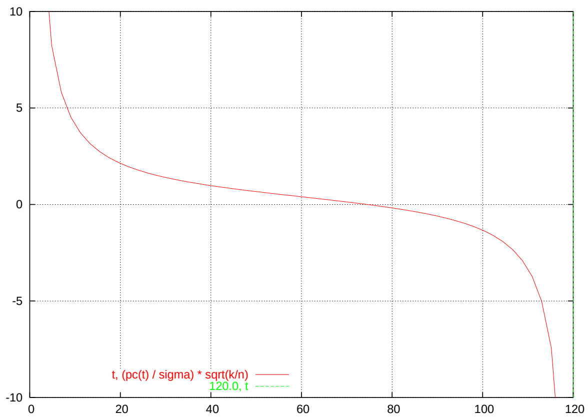
- La periodicità della funzione è $p = 120$. Nel seguito ci limitiamo all' intervallo $[0, p]$.
- La funzione non è definita nei punti $x_1 = 0$ e $x_2 = p$, e risulta

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to p-} f(x) = -\infty.$$

- La derivata è:

$$y'(x) = \frac{-\pi}{120} \csc^2(\frac{\pi\, x}{120}).$$

- La funzione è derivabile in tutti i punti in cui è continua.
- Non vi sono punti estremali.
- Vi è un unico punto di flesso $x = 60$, $f(60) = 4/10$.
- Gli asintoti sono le rette $x = 0$ e $x = 120$.
- Grafico della funzione:



- L' integrale indefinito di

$$q(x) = f(x)\,f'(x) = \frac{-\pi}{120}\left(\frac{2}{5} + \cot(\frac{\pi\,x}{120})\right)\,\csc^2(\frac{\pi\,x}{120})$$

è

$$\int q(x)\mathrm{d}x = \{Q(x) + C,\; C \in \mathbb{R}\},$$

$$Q(x) = f(x)^2/2 = \frac{1}{10}\csc^2(\frac{\pi\,x}{120})\,\left(5 + 2\,\sin(\frac{\pi\,x}{60})\right).$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = -\infty;$$

$$V(b,c) = \frac{-4\,\left(606 + 379\,\sqrt{3}\right)}{555 + 145\,\sqrt{3}} \simeq -6.2641;$$

$$V(c,d) = \frac{90 + 83\,\sqrt{3}}{-20 - 50\,\sqrt{3}} \simeq -2.1928.$$

Test 2 *Consideriamo*

$$I = \int f(x)dx, \quad f(x) = |x| + 1.$$

Domanda numero 18*: In base a quale teorema possiamo dire che la funzione $f(x)$ è integrabile nell' intervallo $[-10, 10]$? Enunciare il teorema.*

Valore: 4.
Sia

$$F_1(x) = \begin{cases} x^2/2 + x + 1, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2/2 + x - 1, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Domanda numero 19*: La funzione $F_1(x)$ è una primitiva di $f(x)$? 1: Si; 2: No; Valore: 2.*
Domanda numero 20*: Giustificare la risposta precedente.*

Valore: 4.
Domanda numero 21*: Scrivere una primitiva $F_2(x)$ di $f(x)$.*

Valore: 8.
Domanda numero 22*: Scrivere una rappresentazione di I.*

Valore: 8.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- La funzione $f(x)$ è integrabile, perché continua. E' integrabile nell' intervallo $[-10, 10]$ in base al teorema che afferma:

Teorema 1.1 *Se una funzione è continua nell' intervallo $[a, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$.*

- La funzione $F_1(x)$ non è una primitiva di $f(x)$ perché non è derivabile nel punto $x = 0$.
- Una primitiva di $f(x)$ è la funzione

$$F_2(x) = \begin{cases} x^2/2 + x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2/2 + x, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- L' integrale indefinito è:

$$I = \{F_2(x) + C, \, C \in \mathbb{R}\}.$$

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione di due variabili*

$$z(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & se\ x \in T, \\ 0, & altrimenti \end{cases}, \tag{3}$$

dove T è il triangolo chiuso, ossia contenente i lati, nella figura 1,
$g(x, y) = 1 - x - y$.
Sia $f(x, y) = z(x, y)$.
Domanda numero 23: *Qual è il dominio della funzione?*
23A : $\boxed{}$ $< x <$ *23B :* $\boxed{}$,
23C : $\boxed{}$ $< y <$ *23D :* $\boxed{}$.
Valore: 8.
Domanda numero 24: *E' una funzione continua? 1: Si; 2: No;*
Valore: 2.
Domanda numero 25: *E' una funzione derivabile? 1: Si; 2: No; Valore: 2.*
Domanda numero 26: *Qual è l' insieme dei punti M in cui non è continua?*

$M =$

Valore: 4.
Domanda numero 27: *Qual è l' insieme dei punti N in cui non è derivabile?*

$N =$

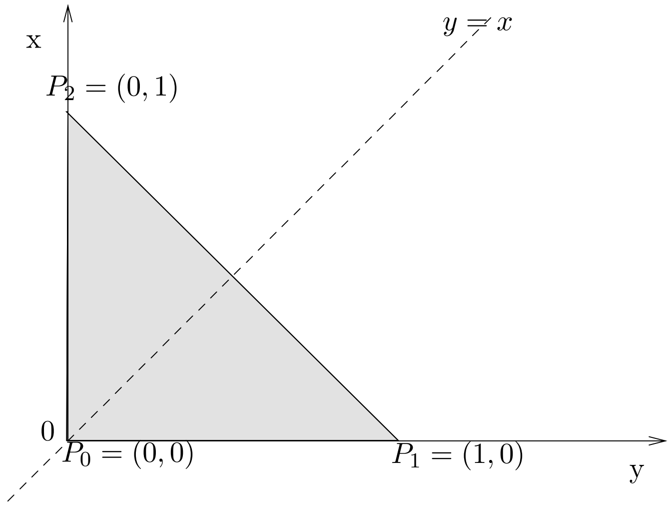


Figura 1: Triangolo T.

Valore: 4.

Domanda numero 28: *Schizzare un grafico della curva di livello* $z = 1/2$ *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia $x_1 := x$, $x_2 := y$.

Domanda numero 29: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$*?*

$\frac{\partial f}{\partial x_1} =$

Valore: 8.

Domanda numero 30: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_2}$*?*

$\frac{\partial f}{\partial x_2} =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}.$$

Domanda numero 31: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

Valore: 4.

Domanda numero 32: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

Valore: 4.

Domanda numero 33: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

Valore: 4.

Domanda numero 34: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Sia $\mathbf{a} = (1, 2)$.

Domanda numero 35: *Quanto vale* $H_{11}(\mathbf{a})$*?*

35A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 36: *Quanto vale* $H_{12}(\mathbf{a})$*?*

36A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 37: *Quanto vale* $H_{21}(\mathbf{a})$*?*

37A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 38: *Quanto vale* $H_{22}(\mathbf{a})$*?*

38A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 39: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

39A : $\boxed{}$ *Valore: 2.*

Domanda numero 40: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$?*
40A : $\boxed{}$ *Valore: 2.*
Domanda numero 41: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*
41A : $\boxed{}$ *Valore: 2.*
Domanda numero 42: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*
42A : $\boxed{}$ *Valore: 2.*
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 1. \tag{4}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 43: *Qual è la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione in (4)?*

$y(x) =$

Valore: 48.
Domanda numero 44: *Qual è la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ del problema (4)?*

$\bar{y}(x) =$

Valore: 12.
Domanda numero 45: *Quanto vale*

$$L = \lim_{x \to 1} \bar{y}(x)?$$

L= *45A :* $\boxed{}$ *Valore: 8.*
Domanda numero 46: *Quanto vale*

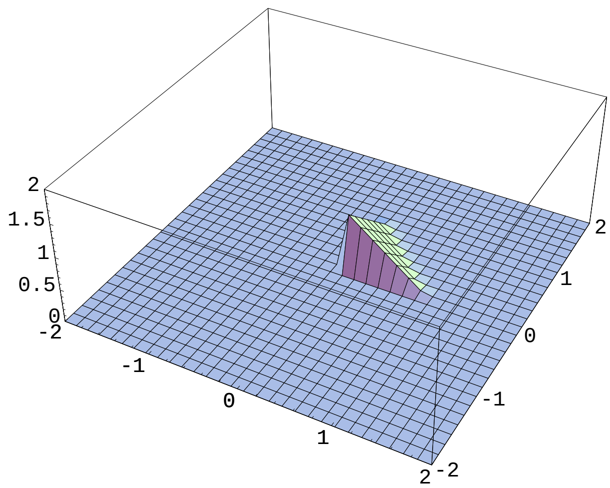
$$L = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

L= *46A :* $\boxed{}$ *Valore: 8.*

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Ecco un grafico della funzione[1], nel quadrato $[-2, 2]^2$.

[1] Il grafico non è corretto ai bordi di T, perché il piano $z = 1 - x - y$ non è raccordato con il piano $z = 0$. Purtroppo non sono riuscito a togliere la togliere la parte spuria. Se qualcuno mi suggerisce un modo semplice per disegnare un grafico accurato, ne terrò conto



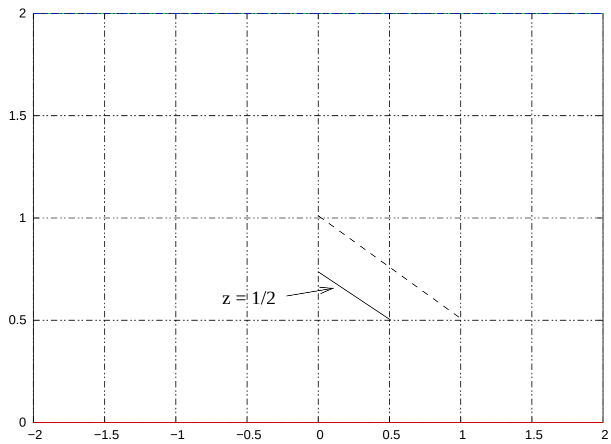
- Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}^2$.
- La funzione non è continua in alcuni punti del dominio.
- La funzione non è derivabile in alcuni punti del dominio.
- L' insieme dei punti in cui non è continua è:

$$M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ x = 0\}.$$

- L' insieme dei punti in cui non è derivabile è:

$$N = M \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = -x + 1\}.$$

- La curva di livello $z = 1/2$ è il segmento costituito dai punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 1$, $1/2 = 1 - x - y$, ossia $y = 1/2 - x$.



- Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{cases} -1, & \text{se } (x,y) \in \overset{\circ}{T}, \\ \text{indefinita}, & \text{se } (x,y) \in \partial T, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} .$$

  Notare che $\overset{\circ}{T}$ indica l' *interno* di T, ossia T privato del bordo, ossia ancora $\{(x, y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$.

- L' Hessiano è nullo in tutti i punti in cui la funzione è differenziabile.

- Il massimo della funzione è $m = 1$, il minimo $n = 0$.

- L'estremo superiore coincide con il massimo, quello inferiore con il minimo.

- L'equazione differenziale da risolvere è:

$$y' = -y + 1 - x.$$

- La soluzione generale dell' equazione differenziale è:

$$\bar{y}(x) = 2 - x + C \exp(-x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- La soluzione particolare del problema è:

$$\bar{y}(x) = 2 - x.$$

- I limiti valgono

$$L = \lim_{x\to 1} \bar{y}(x) = 1, \quad L = \lim_{x\to +\infty} \bar{y}(x) = -\infty.$$

Riferimenti bibliografici

[Bea72] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* Elsevier, New York, 1972.

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 24 febbraio 2004.

CORREZIONE

Nome	
Cognome	
Matricola	Aula Posto
Calcolo I	Calcolo II

Schema di disegno di legge delega
RIORDINO DELLO STATO GIURIDICO E DEL RECLUTAMENTO DEI PROFESSORI UNIVERSITARI

Ministro Letizia Moratti

Art. 1

Norme di delega per il riordino dello stato giuridico dei professori universitari

1. Allo scopo di procedere alla riforma dello stato giuridico dei professori universitari garantendo una selezione adeguata alla qualità delle funzioni da svolgere, unitamente a forme di flessibilità del rapporto di lavoro il Governo è delegato ad emanare, entro 12 mesi dalla data di entrata in vigore della presente legge, nel rispetto dell'autonomia delle istituzioni universitarie, uno o più decreti legislativi attenendosi ai seguenti principi e criteri direttivi:

a) Il Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca, bandisce, con proprio decreto, per settori scientifico-disciplinari, procedure finalizzate al conseguimento della idoneità scientifica nazionale, annualmente e distintamente per le fasce dei professori ordinari e dei professori associati, stabilendo in particolare:

1) le modalità per definire il numero massimo di soggetti che possono conseguire l'idoneità scientifica per ciascuna fascia e per settori disciplinari, pari al

fabbisogno, indicato dalle università, per cui è garantita la relativa copertura finanziaria, incrementato di una quota ulteriore non superiore al 20%; nonché le procedure e i termini per l'indizione, lo svolgimento e la conclusione dei giudizi idoneativi;

2) le modalità e le procedure per la formazione delle commissioni giudicatrici, che assicurino obiettività e imparzialità, ivi compresa la partecipazione di docenti designati da atenei dell'Unione Europea, nonché le cause di ineleggibilità e di incompatibilità dei componenti le commissioni;

3) la durata dell'idoneità scientifica, non superiore a cinque anni, e il limite di ammissibilità ai giudizi per coloro che, avendovi partecipato, non conseguono l'idoneità;

b) i settori scientifico-disciplinari di cui alla lettera a) sono suscettibili di ridefinizione per riduzione e accorpamento;

c) le università procedono alla copertura dei posti di professore di prima e seconda fascia e al conferimento dei relativi incarichi a conclusione di procedure, disciplinate con propri regolamenti, che assicurino la valutazione comparativa dei candidati e la pubblicità degli atti, riservate ai possessori della idoneità di cui alla lettera a); il primo incarico è di durata temporanea non superiore ai tre anni. La delibera di chiamata definisce le fondamentali condizioni del rapporto, tenuto conto dei criteri enunciati alla lettera n), prevedendo, per la parte di retribuzione fissa, il trattamento economico iniziale attribuito ai professori di ruolo a tempo pieno della corrispondente fascia;

d) gli incarichi a tempo determinato, di cui alla lettera c), possono essere rinnovati. La loro durata complessiva non può comunque eccedere i sei anni. Entro tale periodo le università, sulla base di una valutazione di merito secondo modalità e criteri definiti dall'università stessa, possono nominare in ruolo il medesimo docente; ovvero docenti titolari di incarico presso altro ateneo, nei limiti della disponibilità di bilancio;

e) le università inoltre possono procedere alla copertura di una percentuale non superiore al 6 per cento dei posti di prima e seconda fascia mediante nomina in ruolo di studiosi stranieri, o italiani impegnati all'estero, di chiara fama. A tal fine le università formulano specifiche proposte al Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca che, previo parere del Consiglio universitario nazionale, concede o rifiuta il nulla osta alla nomina;

f) sulla base delle proprie esigenze didattiche e scientifiche e nell'ambito delle disponibilità di bilancio le università, previo espletamento di procedure disciplinate con propri regolamenti, che assicurino la valutazione comparativa dei candidati e la pubblicità degli atti, possono stipulare, nel rispetto della normativa comunitaria in materia, contratti di diritto privato a tempo determinato, rinnovabili per non più di 3 anni continuativi, per l'insegnamento nei corsi di studio con soggetti in possesso di qualificazione scientifica adeguata alle funzioni da svolgere; ovvero possono stipulare contratti a tempo determinato di durata non superiore a tre anni con studiosi stranieri o italiani impegnati all'estero in attività didattiche e di ricerca da almeno un triennio con rapporto di lavoro continuativo, che abbiano acquisito una elevata qualificazione scientifica e professionale riconosciuta in ambito internazionale; nelle Università statali i contratti di diritto privato a tempo determinato di cui alla presente lettera possono essere stipulati entro il limite del 50% del numero di docenti di ruolo della stessa Università nel rispetto dei requisiti minimi necessari per l'istituzione e l'attivazione dei corsi di studio determinati con decreto del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca; il trattamento economico dei predetti contratti è determinato da ciascuna Università nei limiti delle compatibilità di bilancio e tenuto conto dei criteri generali definiti con decreto del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca di concerto con il Ministro dell'economia e delle finanze, sentito il Ministro per la Funzione Pubblica;

g) le università possono realizzare specifici programmi di ricerca sulla base di convenzioni con imprese o fondazioni, o con altri soggetti pubblici o privati, che prevedano anche l'istituzione temporanea con oneri finanziari a carico dei medesimi, di posti di professore di prima fascia da coprire mediante conferimento di incarichi della durata massima di tre anni, rinnovabili sulla base di una nuova convenzione, a coloro che hanno conseguito l'idoneità per la fascia dei professori ordinari, ovvero a soggetti in possesso di elevata qualificazione scientifica e professionale; ai titolari degli incarichi è riconosciuto, per il periodo di durata del rapporto, il trattamento giuridico ed economico dei professori di prima fascia con eventuali integrazioni economiche, ove previste dalla convenzione; le convenzioni definiscono il programma di ricerca, le relative risorse e la destinazione degli eventuali utili netti anche a titolo di compenso dei soggetti che hanno partecipato al programma;

h) le università possono stipulare convenzioni con imprese o fondazioni, o con altri soggetti pubblici o privati, con oneri finanziari posti a carico dei medesimi, per realizzare programmi di ricerca affidati a professori universitari, con definizione del loro compenso aggiuntivo a valere sulle medesime risorse finanziarie e senza pregiudizio per il loro status giuridico ed economico, nel rispetto degli impegni di istituto;

i) per svolgere attività di ricerca e di didattica integrativa le università, previo espletamento di procedure disciplinate con propri regolamenti che assicurino la valutazione comparativa dei candidati e la pubblicità degli atti, possono stipulare contratti di collaborazione coordinata e continuativa con possessori di laurea specialistica, ovvero con studiosi in possesso di qualificazione scientifica adeguata alle funzioni da svolgere. I contratti hanno durata massima quinquennale e possono essere rinnovati fino ad un massimo complessivo di dieci anni; il trattamento economico di tali contratti è determinato da ciascuna Università nei limiti delle compatibilità di bilancio e tenuto conto dei criteri generali definiti con decreto del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca di concerto con il Ministro dell'economia e delle finanze, sentito il Ministro per la Funzione Pubblica. Il possesso del titolo di dottore di ricerca o del diploma di specializzazione o del master universitario di secondo livello costituisce titolo preferenziale;

l) il conseguimento dell'idoneità scientifica di cui alla lettera a) costituisce titolo legittimante la partecipazione ai concorsi per l'accesso alla dirigenza pubblica secondo i criteri e le modalità, stabiliti con decreto del Ministro della funzione pubblica, sentito il Ministro per l'istruzione, l'università e la ricerca, ed è titolo valutabile nei concorsi pubblici che prevedano la valutazione dei titoli. L'attività svolta dai soggetti di cui alla lettera i) costituisce titolo valutabile nei concorsi pubblici che prevedano la valutazione dei titoli;

m) ferme restando le incompatibilità di cui all'articolo 13 del decreto legislativo 11 luglio 1980, n. 382, il rapporto di lavoro dei professori è compatibile con lo svolgimento di attività professionali e di consulenza esterna, con l'esercizio di incarichi retribuiti e di direzione di strutture di ricerca anche private, da comunicare all'università che ne accerta, entro 30 giorni dalla comunicazione, la compatibilità con il rispetto dell'obbligo di non concorrenza nonché l'assenza di ulteriori profili di nocumento per l'Università medesima. Per il personale medico universitario restano fermi gli obblighi derivanti dallo svolgimento di attività assistenziali per conto del Servizio sanitario nazionale (S.S.N.);

n) il trattamento economico dei professori universitari è costituito da una parte fissa e una eventuale parte variabile. La parte di retribuzione fissa corrisponde al trattamento economico del professore a tempo pieno, ferma restando l'attuale struttura retributiva, ed è correlata all'espletamento delle attività scientifiche e all'impegno per le altre attività, fissato in 350 ore annue, di cui 120 di didattica frontale. La parte di retribuzione variabile è attribuita, nei limiti delle disponibilità di bilancio, in relazione agli impegni ulteriori di attività di ricerca, didattica e gestionale, oggetto di specifico incarico, nonché in relazione ai risultati conseguiti, secondo i criteri e le modalità definiti con decreto del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca, sentiti il Ministro dell'economia e delle finanze ed il Ministro per la funzione pubblica; per il personale medico universitario resta fermo lo speciale trattamento aggiuntivo previsto per lo svolgimento delle attività assistenziali per conto del S.S.N.;

o) il ruolo dei ricercatori, a decorrere dalla data di entrata in vigore della presente legge, è trasformato in ruolo ad esaurimento e non sono bandite nuove procedure di valutazione comparativa per posti di professore ordinario, associato e di ricercatore. La copertura dei posti di professore ordinario e di associato è disciplinata secondo le disposizioni del presente articolo. Sono fatte salve le procedure già concluse con l'approvazione degli atti, avviate in data anteriore a quella di entrata in vigore della presente legge. I candidati giudicati idonei, e non chiamati a seguito di procedure già espletate, ovvero i cui atti sono approvati, conservano l'idoneità per un periodo di cinque anni dal suo conseguimento;

p) per i professori di prima e seconda fascia nominati secondo le disposizioni del presente articolo il limite massimo di età per il collocamento a riposo è determinato al termine dell'anno accademico nel quale si è compiuto il settantesimo anno di età, ivi compreso il biennio di cui all'articolo 16 del decreto legislativo 30 dicembre 1992, n. 503, ed è abolito il collocamento fuori ruolo per limiti di età;

q) i professori e i ricercatori universitari in servizio alla data di entrata in vigore della presente legge conservano lo stato giuridico e il trattamento economico in godimento, ivi compreso l'assegno aggiuntivo di tempo pieno, con possibilità di opzione per il regime di cui alle lettere m) e n) della nuova disciplina e con salvaguardia dell'anzianità acquisita; l'esercizio dell'opzione è consentito nei limiti delle risorse finanziarie disponibili e sulla base di una adeguata programmazione delle attività didattiche definita da ciascuna università nel triennio 2004-2006;

r) sono stabiliti i criteri e le modalità per riservare, nei giudizi di idoneità per la fascia dei professori ordinari, una quota pari al 15% del contingente di cui alla lettera a), numero 1, ai professori associati con un'anzianità di servizio non inferiore a 15 anni, compreso il periodo di straordinariato, maturata nell'insegnamento di materie ricomprese nel settore scientifico-disciplinare oggetto del bando di concorso o in settori affini;

s) sono stabiliti i criteri e modalità per riservare, nei giudizi di idoneità per la fascia dei professori associati, una quota del contingente di cui alla lettera a), numero 1, non superiore al 15%, ai ricercatori confermati che abbiano svolto almeno cinque anni di insegnamento nei corsi di studio di cui all'articolo 1 della legge 19 novembre 1990, n. 341 e all'articolo 3 del decreto del Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca 3 novembre 1991, n. 509;

t) per tutto il periodo di durata dei contratti di diritto privato di cui al presente articolo, i dipendenti delle amministrazioni statali sono collocati in aspettativa senza assegni né contribuzioni previdenziali, ovvero in posizione di fuori ruolo nei casi in cui tale posizione è prevista dagli ordinamenti di appartenenza, parimenti senza assegni né contributi previdenziali;

u) sono individuate e abrogate le norme incompatibili con le disposizioni emanate in attuazione della presente legge.

Art. 2

Norme procedurali

1. I decreti legislativi di cui all'articolo 1, comma 1, sono emanati su proposta del Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca, di concerto con il Ministro dell'economia e delle finanze e con il Ministro della funzione pubblica, previo parere delle competenti commissioni, da rendere entro trenta giorni dalla data di trasmissione dei relativi schemi; decorso tale termine, i decreti legislativi possono essere comunque emanati.

2. Ulteriori disposizioni correttive ed interpretative dei decreti legislativi di cui al presente articolo possono essere adottate, con il rispetto degli stessi criteri e principi direttivi e con le stesse procedure, entro 18 mesi dalla data della loro entrata in vigore.

Art. 3

Copertura finanziaria

1. All'onere derivante dall'abolizione dell'impegno a tempo definito previsto dalle presente legge pari a 5,57 milioni di euro per l'anno 2004, a 27,85 milioni di euro per l'anno 2005 e a 55,70 milioni di euro a decorrere dall'anno 2006, si provvede con le economie derivanti dalla contestuale riduzione delle supplenze e degli affidamenti rispetto a quelli conferiti negli anni precedenti. Tali economie dovranno risultare dal conto consuntivo di ciascuna università.

2. Con periodicità annuale , il Ministro dell'istruzione, dell'università e della ricerca procede alla verifica delle occorrenti risorse finanziarie in relazione alla graduale attuazione dell'abolizione dell'impegno a tempo definito, dandone immediata comunicazione al Ministero dell'economia e delle finanze. Le eventuali maggiori spese trovano copertura nell'ulteriore riduzione delle supplenze e degli affidamenti.

1 Calcolo I

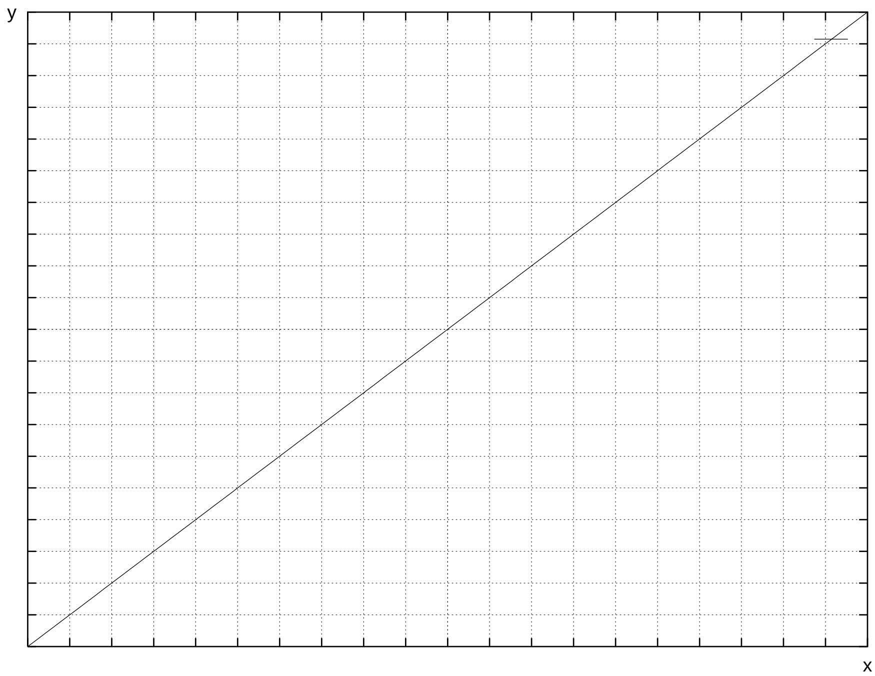
Test 1 *Dopo aver attentamente letto la proposta di Legge Delega, rispondete alle seguenti domande e segnate le risposte nel foglio allegato. Laddove non espressamente dichiarato, la risposta va formulata assumendo che la domanda sia preceduta dall' affermazione* "la proposta di Legge Delega afferma che".

Quali stanziamenti prevede la proposta per far fronte All'onere derivante dall'abolizione dell'impegno a tempo definito *(i valori proposti sono in MEuro = Mega Euro = 1 milione di Euro)* **Domanda numero 1***: nel 2004?* $\boxed{1}$ *: 1.07;* $\boxed{2}$ *: 2.45;* $\boxed{3}$ *: 5.57;* $\boxed{4}$ *: 8.93;* $\boxed{5}$ *: Nessuno;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 2*: nel 2005?* $\boxed{1}$ *: 10.07;* $\boxed{2}$ *: 20.45;* $\boxed{3}$ *: 25.57;* $\boxed{4}$ *: 27.85;* $\boxed{5}$ *: Nessuno;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3*: a partire dal 2006?* $\boxed{1}$ *: 10.07;* $\boxed{2}$ *: 20.45;* $\boxed{3}$ *: 25.57;* $\boxed{4}$ *: 55.70;* $\boxed{5}$ *: Nessuno;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 4*: Schizzare il grafico degli stanziamenti nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*



Valore: 6.

Domanda numero 5: *Questi stanziamenti saranno coperti da:* 1 *: tassa all' origine sul costo dei presídi anticoncezionali meccanici;* 2 *: economie derivanti dalla contestuale riduzione delle supplenze e degli affidamenti;* 3 *: onere aggiuntivo dello 0.3% sulle Lotterie Nazionali;* 4 *: economie derivanti dalla riduzione del personale universitario, prevista in seguito alla promulgazione della Legge stessa;* 5 *: sarà il Minsitro del Tesoro, con proprio Decreto, a individuare strumenti per la copertura;* Valore: 2.

Domanda numero 6: *Il rapporto di lavoro dei professori è incompatibile con* 1 *: lo svolgimento di attività professionali e di consulenza esterna, con l'esercizio di incarichi retribuiti e di direzione di strutture di ricerca anche private;* 2 *: lo svolgimento di attività professionali e di consulenza esterna, ma non con l'esercizio di incarichi retribuiti e di direzione di strutture di ricerca anche private;* 3 *: con l'esercizio di incarichi retribuiti e di direzione di strutture di ricerca anche private, ma non con lo svolgimento di attività professionali e di consulenza esterna;* 4 *: nessun altro rapporto di lavoro pubblico o privato, tranne incompatibilità previste dalla legge;* 5 *: l' esercizio dell' attività di Mago e Cartomante, anche se iscritto nei ruoli della locale C.C.I.A.;* Valore: 4.

Assumiamo per semplicità che un Docente lavori 48 settimane all' an-

no, delle quali 24 utilizzabili per la didattica, ciascuna composta da 5 giorni lavorativi.

Domanda numero 7: *Un Docente che voglia essere presente tutti i giorni lavorativi in Università è tenuto all' impegno* **minimo** *di* $\boxed{1}$ *: 75 minuti per giorno lavorativo. Almeno 1 ora di didattica frontale nei giorni utilizzabili.;* $\boxed{2}$ *: 2 ore per giorno lavorativo. Circa 80 minuti di didattica frontale nei giorni utilizzabili;* $\boxed{3}$ *: 320 minuti per giorno lavorativo. Almeno 12 minuti di didattica frontale nei giorni utilizzabili;* $\boxed{4}$ *: 8 ore per giorno lavorativo, di cui circa 4 ore di didattica frontale nei giorni utilizzabili;* $\boxed{5}$ *: 16 ore per giorno lavorativo, di cui circa 8 ore di didattica frontale nei giorni utilizzabili;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 8: *Un Docente che voglia ridurre al minimo il numero di giorni di presenza in Università, quale dei seguenti orari sceglierà?* $\boxed{1}$ *: presenza in Università al lunedí, dalle 9:00 alle 13:00, includendo due ore di lezione nei lunedí utilizzabili;* $\boxed{2}$ *: presenza in Università al lunedí, dalle 9:00 alle 16:00, includendo tre ore di lezione nei lunedí utilizzabili;* $\boxed{3}$ *: presenza in Università al lunedí e martedí, dalle 9:00 alle 15:00, includendo tre ore di lezione nei giorni utilizzabili;* $\boxed{4}$ *: presenza in Università al lunedí e martedí, dalle 9:00 alle 16:00, includendo due ore di lezione nei giorni utilizzabili;* $\boxed{5}$ *: presenza in Università al lunedí, martedí e mercoledí, dalle 9:00 alle 14:00, includendo due ore di lezione nei giorni utilizzabili;* $\boxed{6}$ *: presenza in Università al lunedí, martedí e mercoledí, dalle 9:00 alle 15:00, includendo due ore di lezione nei giorni utilizzabili;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 9: *Il ruolo dei ricercatori, a decorrere dalla data di entrata in vigore della legge, è trasformato in* $\boxed{1}$ *: ruolo subalterno, di cui al comma 3), DPR 56/2000;* $\boxed{2}$ *: ruolino di marcia del contingente di stanza in zone a rischio;* $\boxed{3}$ *: ruolo ad esaurimento;* $\boxed{4}$ *: rollino AIA con rosmarino e salvia;* $\boxed{5}$ *: ruolo sfigato, di cui al comma 6), Regio Decreto n. 02/1928;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 10: *Per tutto il periodo di durata dei contratti di diritto privato, i dipendenti delle amministrazioni statali sono collocati* $\boxed{1}$ *: in aspettativa senza assegni né contribuzioni previdenziali;* $\boxed{2}$ *: in aspettativa con assegni, ma senza contribuzioni previdenziali;* $\boxed{3}$ *: in aspettativa senza assegni, ma con contribuzioni previdenziali;* $\boxed{4}$ *: in riparto mobile aggiuntivo, per servizi di manovalanza;* $\boxed{5}$ *: nel ruolo di* *assegnatari privilegiati di contratto pubblico appetibile e come tali esonerati dal pagamento delle tasse di successione;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 11: *I posti di profesore di prima fascia potranno essere coperti, oltre che in seguito a conseguimento dell' idoneità scientifica,* $\boxed{1}$ *: in nessun altro modo;* $\boxed{2}$ *: per chiara fama;* $\boxed{3}$ *: mediante conferimento di incarico della durata massima di 6 anni;* $\boxed{4}$ *: mediante conferimento di incarico della durata massima di 3 anni;* $\boxed{5}$ *: mediante chiamata nominale del Presidente del Consiglio dei Ministri;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 12: *Per svolgere attività di ricerca e di didattica integrativa le università possono stipulare contratti di collaborazione coordinata e continuativa con:* $\boxed{1}$ *: professori in possesso dell' idoneità scientifica;* $\boxed{2}$ *: studiosi residenti all' estero;* $\boxed{3}$ *: discendenti del ramo cadetto di famiglie che abbiano annoverato tra i loro antenati studiosi di chiara fama;* $\boxed{4}$ *: possessori di laurea specialistica, ovvero con studiosi in possesso di qualificazione scientifica adeguata alle funzioni da svolgere;* $\boxed{5}$ *: nessun soggetto pubblico o privato;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 13: *La proposta prevede che il Governo sia delegato ad emanare decreti legislativi in materia di riordino dello stato giuridico dei professori universitari, in tempi* $\boxed{1}$ *: non definiti;* $\boxed{2}$ *: entro 6 mesi;* $\boxed{3}$ *: entro 9 mesi, per non piú di 4 anni;* $\boxed{4}$ *: entro 2 anni, per non piú di 4 anni;* $\boxed{5}$ *: entro 2 anni;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 14: *La durata dell' idoneità scientifica è* $\boxed{1}$ *: illmitata;* $\boxed{2}$ *: 15 anni;* $\boxed{3}$ *: 10 anni;* $\boxed{4}$ *: 5 anni;* $\boxed{5}$ *: 2 anni;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 15: *Gli incarichi a tempo determinato, di cui alla lettera c), possono essere rinnovati* $\boxed{1}$ *: illmitatamente;* $\boxed{2}$ *: per non piú di 12 anni;* $\boxed{3}$ *: per non piú di 6 anni;* $\boxed{4}$ *: per non piú di 3 anni;* $\boxed{5}$ *: per non piú di 2 anni;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Le risposte sono riportate qui sotto. Alcune domande ammettevano piú di una risposta.

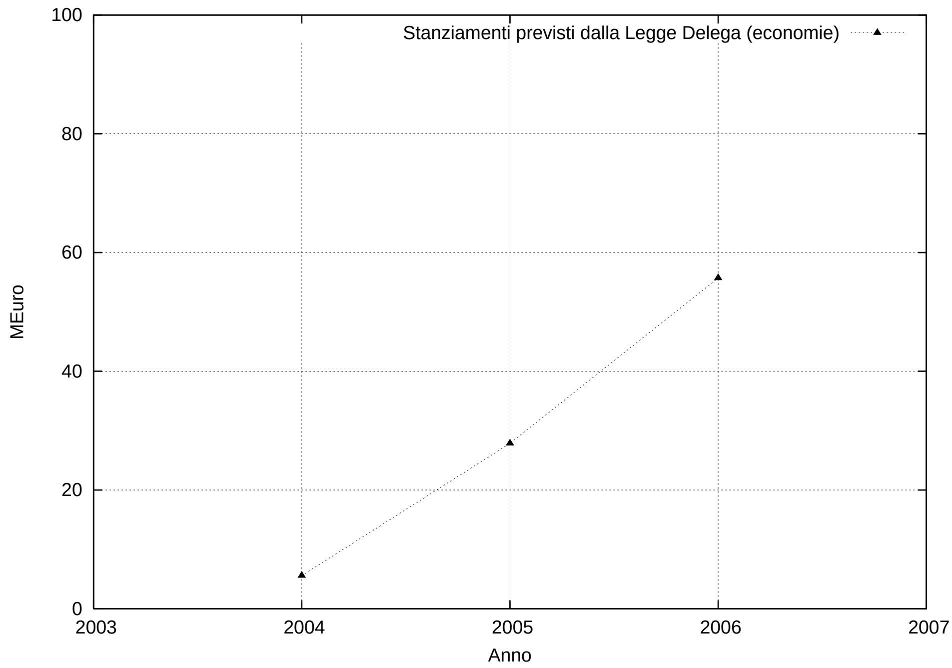


Figura 1: Stanziamenti previsti.

```
num.;nome~risp.;risposta~corretta,Tema~A
   1;         1;                       3
   2;         2;                       3
   3;         3;                       4
   4;         4;                       vedi grafico
   5;         5;                       3
   6;         6;                       4
   7;         7;                       1
   8;         8;                       2
   9;         9;                       3
  10;        10;                       1
  11;        11;                       4
  12;        12;                       1,2,3,4
  13;        13;                       5
  14;        14;                       4
  15;        15;                       3
```

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 7 giugno 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ e virgola mobile=$\boxed{}\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{\text{E}}$ $\boxed{}\boxed{}$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *La figura 1 mostra la crescita di temperatura della terra in gradi centrigradi, dal 1860 al 1900. I valori sono tratti da Applying Mathematics di D.N. Burghes, I. Huntley, e J. McDonald, Ellis Horwood, 1982, pag. 175. Una funzione che approssima questo andamento è:*

$$f(x) = (1/4)\sin(ax + b) \cdot g(x), \tag{1}$$

dove $a = 2/100$, $b = -38/100$,

$$g(x) = \frac{(x - t_0)^3}{|t_0|^3}, \tag{2}$$

$t_0 = -2 \times 10^5$.
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x)$ *in tutto il suo dominio.*

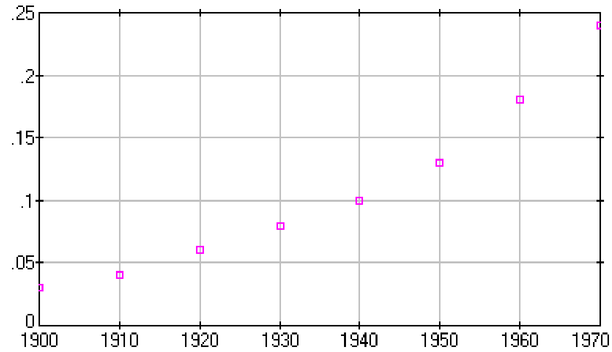


Figura 1: Crescita della temperatura mondiale.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
1A : [ ] $< x <$ *1B :* [ ].
Valore: 7.
Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : [ ] Valore: 5.
Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : [ ] Valore: 5.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{3}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1 =$* *4A :* [ ],
$L_1^+ =$ *4B :* [ ], $L_1^- =$
4C : [ ];
$x_2 =$ *4D :* [ ], $L_2^+ =$
4E : [ ], $L_2^- =$ *4F :* [ ].
Valore: 6.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: $x_1 =$* *6A :* [ ], $f(x_1) =$

6B : [ ]; x_2= *6C :* [ ], $f(x_2)$=
6D : [ ]. Valore: 4.

Domanda numero 7: *Quanti punti estremali ha la funzione?* 1 : *Nessuno;* 2 : *10;* 3 : *100;* 4 : *1000;* 5 : *Infiniti;*
Valore: 2.

Lo sviluppo di Taylor di ordine 1 della derivata intorno al punto $x = 1950$ *è*

$$t(x) = 0.00311797 - 0.0000818728\,(-1950 + x)\,.$$

Domanda numero 8: *Qual è il punto estremale piú vicino a* $x = 1950$ *che si può stimare con questa informazione? Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo, "-1" se di flesso.* x_1=
8A : [ ]; $f(x_1)$= *8B :* [ ];
Massimo o minimo?= *8C :* [ ]. Valore: 14.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$*, siano le rette* $a_i y + b_i x + c_i = 0$*,* $i = 1, \ldots, n$*,* x_i *le ascisse dei punti di tangenza (porre* $b_i = 1$ *se l' asintoto è verticale,* $a_i = 1$ *se l' asintoto non è verticale,* $x_i = \pm\infty$*, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).*

Domanda numero 9: *Asintoti:* x_1= *9A :* [ ];
a_1= *9B :* [ ]; b_1= *9C :* [ ];
c_1= *9D :* [ ]; x_2= *9E :* [ ];
a_2= *9F :* [ ]; b_2= *9G :* [ ];
c_2= *9H :* [ ]. Valore: 8.

Domanda numero 10: *Schizzare il grafico della funzione e dei dati nell' intervallo* $[1600, 2000]$*, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Domanda numero 11: *Schizzare il grafico della funzione nell' intervallo* $[1600, 2000]$, *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia $q(x) = f(x)/g(x)$

Domanda numero 12: *Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

Valore: 20.

Sia $a = 1700$, $b = 1800$, $c = 1900$, $d = 2000$.

Domanda numero 13: *Sia* $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$. $V(a, b) =$

13A : $\boxed{}$; $V(b,c)=$ *13B :* $\boxed{}$; $V(c,d)=$ *13C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

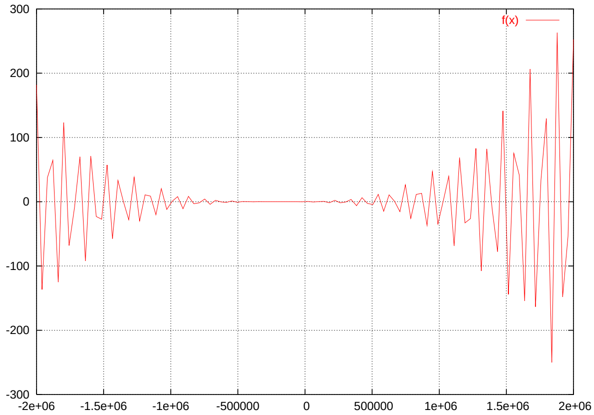
- Il dominio è $D = \mathbb{R}$
- Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{non esiste}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{non esiste}.$$

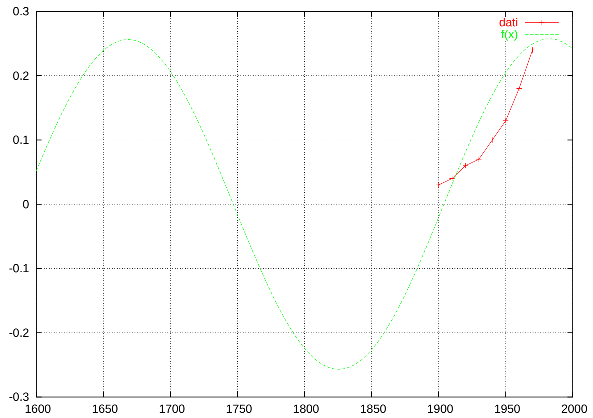
- Non vi sono punti di accumulazione del dominio in cui $f(x)$ non è definita.
- Risulta:

$$f'(x) = \frac{2.5\ \times\ 10^{-1}\, a\,(x-t_0)^3\ \cos(b+a\,x)}{|t_0|^3} +$$
$$\frac{7.5\ \times\ 10^{-1}\,(x-t_0)^2\ \sin(b+a\,x)}{|t_0|^3} =$$
$$1/|t_0|^3(0.005\,(-t_0+x)^3\ \cos(0.02\ (-19+x)) +$$
$$0.75\,(-t_0+x)^2\ \sin(0.02\ (-19+x))) =$$
$$6.25\,10^{-19}\,(200000+x)^3\ \cos(0.02\ (-19+x)) +$$
$$9.375\,10^{-17}\,(200000+x)^2\ \sin(0.02\ (-19+x)).$$

- Punti in cui $f(x)$ è continua ma non derivabile, non ve ne sono.
- Vi sono infiniti punti estremali. Noto il polinomio di Taylor $t(x)$ per $f'(x)$ nel punto $x = 1950$, la stima del punto di stazionarietà si ottiene risolvendo l' equazione $t(x) = 0$. Si ottiene $x_1 \simeq 1988.08$, $f(x_1) \simeq 0.255923$. Dato che la derivata è positiva per $[1988, 2000]$ e negativa in $[1900, 1950]$, il punto x_1 è un punto di massimo relativo.
- Non vi sono asintoti.
- Grafico della funzione



- Grafico della funzione e dei dati osservati, nell' intervallo [1600,2000].



- Funzione

$$q(x) = 0.25 \sin(0.02(x - 19)).$$

- Integrale indefinito:

$$Q(x) = -25 \cos(x/50-19/50)/2 = -11.608 \cos(0.02x)-4.6365 \sin(0.02x).$$

$$I = \{Q(x) + C\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Integrali definiti:

$$V(a, b) = -1.31354;$$

$$V(b, c) = -18.5447;$$

$$V(c, d) = 16.7482.$$

Test 2 Domanda numero 14: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 1} \ln x = 0.$$

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x-1| < \delta \Rightarrow |\ln x| < \epsilon). \tag{4}$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\ln x| < \epsilon,$$

ossia

$$-\epsilon < \ln x < \epsilon;$$

la soluzione è:

$$\exp(-\epsilon) < x < \exp(\epsilon),$$

ossia

$$\exp(-\epsilon) - 1 < x - 1 < \exp(\epsilon) - 1.$$

Perciò ponendo ad esempio

$$\delta = min(|\exp(-\epsilon) - 1|, |\exp(\epsilon) - 1|),$$

la (4) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione di due variabili*

$$z(x, y) = f(x, y) = x^2 + y^2. \tag{5}$$

Domanda numero 15: *Qual è il dominio della funzione?* $\boxed{1}$ *:* $(-\infty, +\infty) \times [-y_m, y_m]$*;* $\boxed{2}$ *:* $[-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty)$*;* $\boxed{3}$ *:*

$(-\infty,+\infty)\times[-\infty,+\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\textit{Valore: 6}}$.

Domanda numero 16: *Schizzare un grafico della curva di livello* $z=2$. *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 17: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 18: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_2}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_2}$ =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Si vuole approssimare ∇f *nel triangolo di vertici* $P_1=(0,0)$, $P_2=(0,2)$, $P_3=(2,0)$, *calcolando le derivate parziali della funzione* $z=2x+2y$, *il cui grafico è il piano passante per i punti* $(P_i, f(P_i))$, $i=1,2,3$.

Domanda numero 19: *Quanto vale* $z_x=\partial z/\partial x$?

z_x =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 20: *Quanto vale* $z_y=\partial z/\partial y$?

z_y =

Valore: 8.
Sia $R = (1, 1)$.
Domanda numero 21: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial x - z_x$*?*
21A : ______ *Valore: 4*.
Domanda numero 22: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial y - z_y$*?*
22A : ______ *Valore: 4*.
Sia $S = (0, 1)$.
Domanda numero 23: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial x - z_x$*?*
23A : ______ *Valore: 4*.
Domanda numero 24: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial y - z_y$*?*
24A : ______ *Valore: 4*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y) - x^2 = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 2. \tag{6}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 25: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (6)?*

$y(x)$ =

Valore: 48.
Domanda numero 26: *Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (6)?*

$\bar{y}(x)$ =

Valore: 24.
Domanda numero 27: *Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

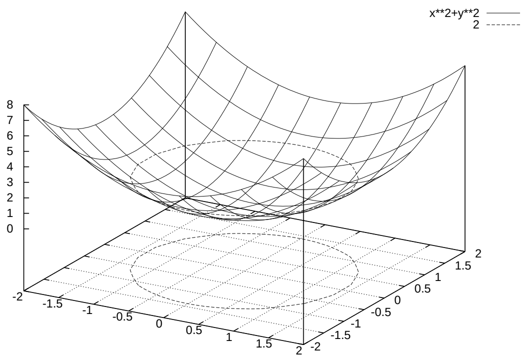
L_1 = *27A :* ______ *Valore: 8*.
Domanda numero 28: *Quanto vale*

$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x)?$$

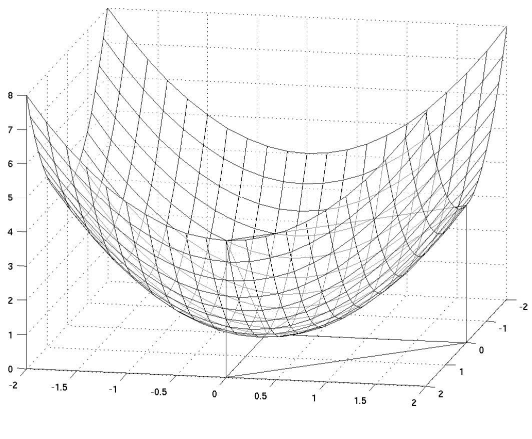
L_2 = *28A :* ______ *Valore: 8*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione e della curva di livello $z = 2$, che è la curva implicita $x^2 + y^2 = 2$, ossia il cerchio di centro l' origine e raggio $\sqrt{2}$.



- Il gradiente è $\nabla f = (2x, 2y)$.
- Le derivate parziali della funzione che rappresenta il piano sono $\partial z/\partial x = 2$, $\partial z/\partial y = 2$.
- Grafico della funzione e del prisma triangolare tramite il quale si approssima il gradiente.



- Risulta: $\partial f(R)/\partial x - z_x = 0$, $\partial f(R)/\partial y - z_y = 0$.
- Risulta: $\partial f(S)/\partial x - z_x = -2$, $\partial f(S)/\partial y - z_y = 0$.
- Le soluzioni dell' equazione $y' = g(x,y)$ sono $y_C(x) = -1/(x+C)$ e $y(x) = 0$.
- La soluzione del problema differenziale è $\bar{y} = -1/(x - 3/2)$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = 0-\,.$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x) = \bar{y}(1) = 2.$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 7 giugno 2004.

Tema B

CORREZIONE

Nome	
Cognome	
Matricola	Aula □ Posto
Calcolo I □	Calcolo II □

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa= $\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ e virgola mobile= $\boxed{}\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{\mathrm{E}}$ $\boxed{}\boxed{}$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *La figura 1 mostra la crescita di temperatura della terra in gradi centrigradi, dal 1860 al 1900. I valori sono tratti da Applying Mathematics di D.N. Burghes, I. Huntley, e J. McDonald, Ellis Horwood, 1982, pag. 175. Una funzione che approssima questo andamento è:*

$$f(x) = (1/4)\cos(ax+b)\cdot g(x), \tag{1}$$

dove $a = 1/50$, $b = -(50\pi + 38))/100$,

$$g(x) = \frac{(x-t_0)^3}{|t_0|^3}, \tag{2}$$

$t_0 = -2 \times 10^5$.
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x)$ *in tutto il suo dominio.*

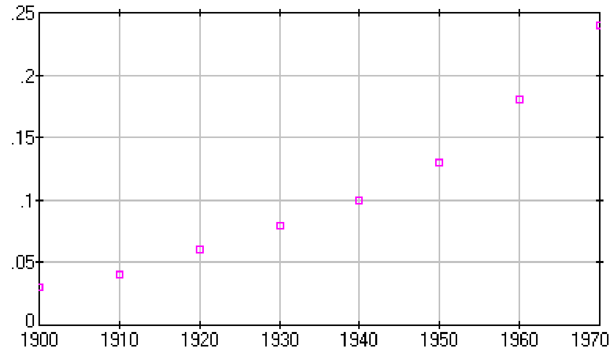


Figura 1: Crescita della temperatura mondiale.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
1A : [ ] $< x <$ *1B* : [ ].
Valore: 7.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : [ ] Valore: 5.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : [ ] Valore: 5.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{3}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1 =$* *4A* : [ ],
$L_1^+ =$ *4B* : [ ], $L_1^- =$
4C : [ ];
$x_2 =$ *4D* : [ ], $L_2^+ =$
4E : [ ], $L_2^- =$ *4F* : [ ].
Valore: 6.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: $x_1 =$* *6A* : [ ], $f(x_1) =$

6B : $\boxed{}$; x_2= *6C :* $\boxed{}$, $f(x_2)$=
6D : $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 7: *Quanti punti estremali ha la funzione?* $\boxed{1}$ *: Nessuno;* $\boxed{2}$ *: 10;* $\boxed{3}$ *: 100;* $\boxed{4}$ *: 1000;* $\boxed{5}$ *: Infiniti;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Lo sviluppo di Taylor di ordine 1 della derivata intorno al punto $x = 1950$ *è*

$$t(x) = 0.00311797 - 0.0000818728\,(-1950 + x)\,.$$

Domanda numero 8: *Qual è il punto estremale piú vicino a* $x = 1950$ *che si può stimare con questa informazione? Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo, "-1" se di flesso.* x_1=
8A : $\boxed{}$; $f(x_1)$= *8B :* $\boxed{}$;
Massimo o minimo?= *8C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 14}}$.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$*, siano le rette* $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i *le ascisse dei punti di tangenza (porre* $b_i = 1$ *se l' asintoto è verticale,* $a_i = 1$ *se l' asintoto non è verticale,* $x_i = \pm\infty$*, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).*

Domanda numero 9: *Asintoti:* x_1= *9A :* $\boxed{}$;
a_1= *9B :* $\boxed{}$; b_1= *9C :* $\boxed{}$;
c_1= *9D :* $\boxed{}$; x_2= *9E :* $\boxed{}$;
a_2= *9F :* $\boxed{}$; b_2= *9G :* $\boxed{}$;
c_2= *9H :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 10: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.
Domanda numero 11: *Schizzare il grafico della funzione nell' intervallo* $[1600, 2000]$, *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.
Sia $q(x) = f(x)/g(x)$
Domanda numero 12: *Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Sia $a = 1700$, $b = 1800$, $c = 1900$, $d = 2000$.
Domanda numero 13: *Sia* $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$. $V(a, b) =$

13A : $\boxed{}$; $V(b,c)=$ *13B :* $\boxed{}$; $V(c,d)=$ *13C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

La funzione da studiare è:

$$y = f(x) = (1/4)\cos(\tilde{a}x + \tilde{b}) \cdot \tilde{g}(x) = (1/4)\sin(ax + b) \cdot g(x),$$

dove $a = 2/100$, $b = -38/100$,

$$g(x) = \frac{(x - t_0)^3}{|t_0|^3}, \tag{4}$$

$t_0 = -2 \times 10^5$.

- Il dominio è $D = \mathbb{R}$
- Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{non esiste}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{non esiste}.$$

- Non vi sono punti di accumulazione del dominio in cui $f(x)$ non è definita.
- Risulta:

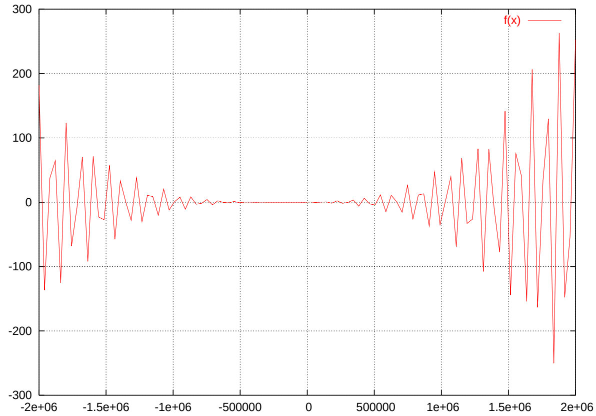
$$\begin{aligned}
f'(x) = {} & \frac{2.5\ \times\ 10^{-1}\, a\,(x - t_0)^3\ \cos(b + a\,x)}{|t_0|^3} + \\
& \frac{7.5\ \times\ 10^{-1}\,(x - t_0)^2\ \sin(b + a\,x)}{|t_0|^3} = \\
& 1/|t_0|^3 (0.005\,(-t_0 + x)^3\ \cos(0.02\ (-19 + x)) + \\
& 0.75\,(-t_0 + x)^2\ \sin(0.02\ (-19 + x))) = \\
& 6.25\,10^{-19}\,(200000 + x)^3\ \cos(0.02\ (-19 + x)) + \\
& 9.375\,10^{-17}\,(200000 + x)^2\ \sin(0.02\ (-19 + x)).
\end{aligned}$$

- Punti in cui $f(x)$ è continua ma non derivabile, non ve ne sono.

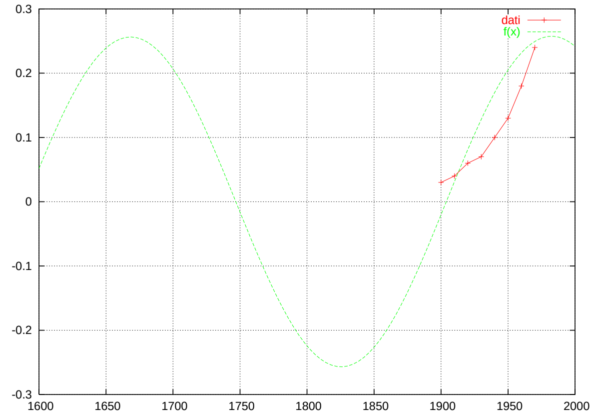
- Vi sono infiniti punti estremali. Noto il polinomio di Taylor $t(x)$ per $f'(x)$ nel punto $x = 1950$, la stima del punto di stazionarietà si ottiene risolvendo l' equazione $t(x) = 0$. Si ottiene $x_1 \simeq 1988.08$, $f(x_1) \simeq 0.255923$. Dato che la derivata è positiva per $[1988, 2000]$ e negativa in $[1900, 1950]$, il punto x_1 è un punto di massimo relativo.

- Non vi sono asintoti.

- Grafico della funzione



- Grafico della funzione e dei dati osservati, nell' intervallo [1600,2000].



- Funzione

$$q(x) = 0.25 \sin(0.02(x - 19)).$$

- Integrale indefinito:

$$Q(x) = -25 \cos(x/50 - 19/50)/2 = -11.608 \cos(0.02x) - 4.6365 \sin(0.02x).$$

$$I = \{Q(x) + C\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Integrali definiti:

$$V(a,b) = -1.31354;$$

$$V(b,c) = -18.5447;$$

$$V(c,d) = 16.7482.$$

Test 2 Domanda numero 14: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 1}(\ln x - 1) = -1.$$

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x-1| < \delta \Rightarrow |\ln x - 1 + 1| < \epsilon). \tag{5}$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\ln x| < \epsilon,$$

ossia

$$-\epsilon < \ln x < \epsilon;$$

la soluzione è:

$$\exp(-\epsilon) < x < \exp(\epsilon),$$

ossia

$$\exp(-\epsilon) - 1 < x - 1 < \exp(\epsilon) - 1.$$

Perciò ponendo ad esempio

$$\delta = min(|\exp(-\epsilon) - 1|, |\exp(\epsilon) - 1|),$$

la (5) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione di due variabili*

$$z(x,y) = f(x,y) = x^2 + y^2 + 1. \tag{6}$$

Domanda numero 15: *Qual è il dominio della funzione?* $\boxed{1}$: $(-\infty,+\infty) \times [-y_m, y_m]$; $\boxed{2}$: $[-\infty,+\infty] \times (-\infty,+\infty)$; $\boxed{3}$: $(-\infty,+\infty) \times [-\infty,+\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty,+\infty) \times (-\infty,+\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\textit{Valore: 6}}$.

Domanda numero 16: *Schizzare un grafico della curva di livello* $z = 2$. *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 17: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_1} =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 18: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_2}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_2} =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Si vuole approssimare ∇f *nel triangolo di vertici* $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (2,0)$, *calcolando le derivate parziali della funzione* $z = 2x + 2y$, *il cui grafico è il piano passante per i punti* $(P_i, f(P_i))$, $i = 1, 2, 3$.

Domanda numero 19: *Quanto vale* $z_x = \partial z/\partial x$?

---

z_x =

Valore: 8.

Domanda numero 20: *Quanto vale* $z_y = \partial z/\partial y$*?*

---

z_y =

Valore: 8.

Sia $R = (1, 1)$.

Domanda numero 21: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial x - z_x$*?*

21A : ☐ Valore: 4.

Domanda numero 22: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial y - z_y$*?*

22A : ☐ Valore: 4.

Sia $S = (0, 1)$.

Domanda numero 23: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial x - z_x$*?*

23A : ☐ Valore: 4.

Domanda numero 24: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial y - z_y$*?*

24A : ☐ Valore: 4.

Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y) - x^2 - 1 = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 2. \tag{7}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.

Domanda numero 25: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (7)?*

$y(x)$ =

Valore: 48.

Domanda numero 26: *Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (7)?*

$\bar{y}(x)$ =

Valore: 24.

Domanda numero 27: *Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

$L_1 =$ *27A :* [ ] *Valore: 8*.

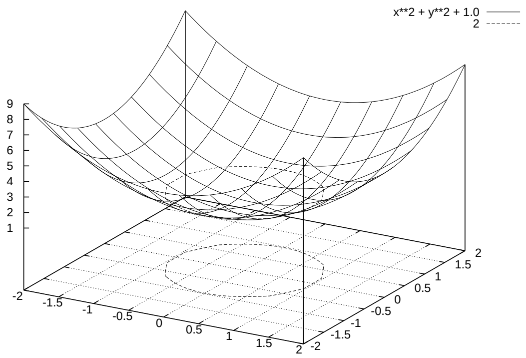
Domanda numero 28: *Quanto vale*

$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x)?$$

$L_2 =$ *28A :* [ ] *Valore: 8*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione e della curva di livello $z = 2$, che è la curva implicita $x^2 + y^2 + 1 = 2$, ossia il cerchio di centro l' origine e raggio 1.



- Il gradiente è $\nabla f = (2x, 2y)$.
- Le derivate parziali della funzione che rappresenta il piano sono $\partial z/\partial x = 2$, $\partial z/\partial y = 2$.
- Risulta: $\partial f(R)/\partial x - z_x = 0$, $\partial f(R)/\partial y - z_y = 0$.
- Risulta: $\partial f(S)/\partial x - z_x = -2$, $\partial f(S)/\partial y - z_y = 0$.
- Le soluzioni dell' equazione $y' = g(x, y)$ sono $y_C(x) = -1/(x + C)$ e $y(x) = 0$.
- La soluzione del problema differenziale è $\bar{y} = -1/(x - 3/2)$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = 0- .$$

- Infine
$$L_2 = \lim_{x\to 1+} \bar{y}(x) = \bar{y}(1) = 2.$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 28 giugno 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome	
Cognome	
Matricola	
Aula	
Posto	
Calcolo I	
Calcolo II	

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ e virgola mobile=$\boxed{}\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{\text{E}}$ $\boxed{}\boxed{}$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *La soluzione dell' equazione (2.2.4) in [1, pag. 69] è:*

$$y = h(x) = \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)}\,(1-\exp(-x/\epsilon)) + s\,x.$$

Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x) = |h(x+3)|$ in tutto il suo dominio, quando $s = 1/2$, $\epsilon = 10^{-3}$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*

1A : $\boxed{}$ $< x <$ *1B :* $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: 7}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*

2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x\to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x\to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{1}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1=$ 4A : [ ], $L_1^+=$ 4B : [ ], $L_1^-=$ 4C : [ ]; $x_2=$ 4D : [ ], $L_2^+=$ 4E : [ ], $L_2^-=$ 4F : [ ].*

[*Valore: 6*].

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

[*Valore: 8*].

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: $x_1=$ 6A : [ ], $f(x_1)=$ 6B : [ ]; $f'_+(x_1)=$ 6C : [ ]; $f'_-(x_1)=$ 6D : [ ]; $x_2=$ 6E : [ ], $f(x_2)=$ 6F : [ ]. $f'_+(x_2)=$ 6G : [ ]; $f'_-(x_2)=$ 6H : [ ];* [*Valore: 8*].

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1=$ 7A : [ ]; $f(x_1)=$ 7B : [ ]; Massimo o minimo?= 7C : [ ]; $x_2=$ 7D : [ ]; $f(x_2)=$ 7E : [ ]; Massimo o minimo?= 7F : [ ];* [*Valore: 20*].

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1=$ 8A : [ ]; $a_1=$ 8B : [ ]; $b_1=$ 8C : [ ]; $c_1=$ 8D : [ ]; $x_2=$ 8E : [ ];*

a_2= *8F :* [ ]; b_2= *8G :* [ ];
c_2= *8H :* [ ]. *Valore: 12*.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = \left| h(x+3) - \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)} \left(1 - \exp(-x/\epsilon)\right) \right|.$$

Domanda numero 10: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

Valore: 20.

Sia $a = -6,\ b = -3,\ c = 3,\ d = 6$.

Domanda numero 11: *Sia $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$. $V(a,b)$=*
11A : [ ]; $V(b,c)$= *11B :* [ ];
$V(c,d)$= *11C :* [ ]. *Valore: 24*.

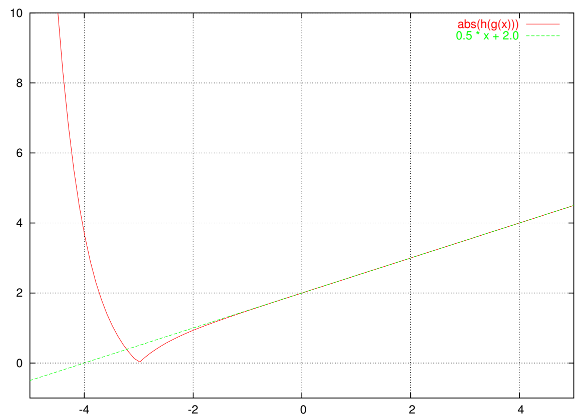
Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Risulta
$$f(x) = |h(x+3)| = \begin{cases} f_1(x), & se \quad x \geq -3, \\ -f_1(x), & altrimenti, \end{cases}$$

dove

$$f_1(x) = \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)}\,(1-\exp(-(x+3)/\epsilon)) + s\,(x+3).$$

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
- La funzione è definita ovunque.
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} y_1(x), & se \quad x > -3, \\ -y_1(x), & altrimenti, \end{cases}$$
essendo
$$y_1(x) = \frac{1-s}{e^{3+x/\epsilon}\,(1-e^{-1/\epsilon})\,\epsilon} + s.$$
- La funzione è continua ma non derivabile in $x = -3$, dove $y(x) = 0$. Abbiamo $f'_+(-3) = 500.5$, $f'_-(-3) = -500.5$.
- L' unico punto estremale è $x = -3$, dove $y = 0$.
- Asintoti: vi è un asintoto obliquo, $y = sx + 3s + \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)} \simeq 0.5x + 2$.
- Grafico della funzione.



- Risulta
$$q(x) = s|x+3|.$$

L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + C\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} s\,(x^2/2 + 3x), & se \quad x \geq -3, \\ -s\,(x^2/2 + 3x + 9), & altrimenti. \end{cases}$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = 2.25;$$

$$V(b,c) = 9;$$

$$V(c,d) = 11.25.$$

Test 2 *Il teorema di esistenza locale della soluzione dell' equazione $y' = f(x,y)$, afferma che se esistono delle costanti ϵ, δ_0, $K > 0$ t.c.:*

- *(a)* $(\forall y \in [A-\epsilon, A+\epsilon])$ *f è continua rispetto a x nell' intervallo $I = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$;*
- *(b)*

$$(\forall x \in I)(y, z \in [A-\epsilon, A+\epsilon]) \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq K\,|y - z|,$$

allora esiste un $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che il problema

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in D, \\ y(x_0) = A, & \end{cases} \tag{2}$$

ha un' unica soluzione $y(x)$.
Domanda numero 12*: Questo teorema vale per l' equazione $y' = xy$, quando $x_0 = 1$, $A = 2$?*
$\boxed{\textit{Valore: } 50}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Nel nostro problema, la condizione (a) si traduce nell' affermazione: *per ogni* $y \in [2-\epsilon, 2+\epsilon]$, *la funzione* $xy+1$ *è continua rispetto a* x *in* $I = (1-\delta_0, 1+\delta_0)$, per un opportuno valore δ_0. L' affermazione è vera per ogni $\epsilon > 0$, $\delta_0 > 0$, in quanto la funzione $g(x) = c\,x + 1$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ fissato.
Per fissare le idee, supponiamo ad esempio che sia $\delta_0 = 1$, per cui $I = (0, 1)$.
La condizione (b) afferma che esiste una costante $K > 0$ t.c.:

$$(\forall x \in I)(y, z \in [2-\epsilon, 2+\epsilon]) \quad |xy - (xz)| \le |x(y-z)| \le K\,|y-z|.$$

La condizione (b) è vera perché per ogni $c \in I$ fissato,

$$|c(y-z)| = c\,|y-z| < |y-z|.$$

Da questo risultato vediamo che qualsiasi $\delta_0 > 0$ rende vera la condizione (b), non solo il valore $\delta_0 = 1$.
Quindi il teorema vale per l' equazione considerata.

QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Dato il potenziale*

$$u(x,y) = f(x,y) = x \cdot y + 1, \tag{3}$$

vogliamo calcolare il flusso

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{\partial_T} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\, ds = \qquad (4)\\ & \int_{l_1} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds + \int_{l_2} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds + \int_{l_3} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds = \qquad (5)\\ & \phi_1 + \phi_2 + \phi_3. \qquad (6) \end{aligned}$$

attraverso la frontiera, ∂T*, del triangolo* T *in figura 1, dove* l_1*,* l_2*,* l_3 *sono i lati di* T*,* $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ *è la normale* unitaria esterna *alla frontiera di* T*,* $\partial T = l_1 \cup l_2 \cup l_3$.
Ricordo che

$$(\nabla u) \circ \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y.$$

Domanda numero 13: *Qual è il dominio della funzione* f*?* $\boxed{1}$ *:* $(-\infty, +\infty) \times [-y_m, y_m]$*;* $\boxed{2}$ *:* $[-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty)$*;* $\boxed{3}$ *:*

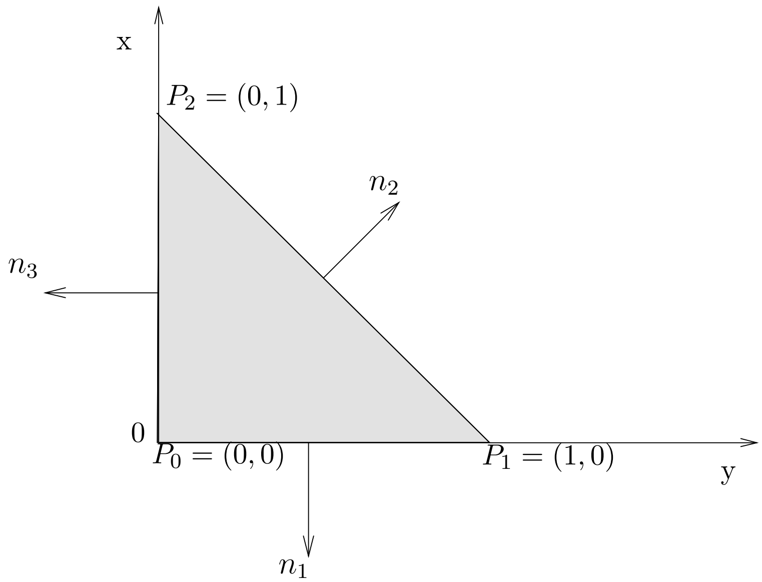


Figura 1: Triangolo T.

$(-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\textit{Valore: 6}}$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva di livello $f = 2$. nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 15: *Quanto vale $f_x = \partial f / \partial x$?*

$f_x =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 16: *Quanto vale $f_y = \partial f / \partial y$?*

$f_y =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Ricordiamo che,

- *se l è una curva definita parametricamente dalle equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \le t \le 1$ e $h(x, y)$ è una funzione integrabile sulla curva l , allora*
$$\int_l h(x,y)\, ds = \int_0^1 h(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$
dove $x' = x'(t) = dx/\, dt$, $y' = y'(t) = dy/\, dt$.

- *Facendo riferimento alla figura 1:*
$$\mathbf{n}_1 = (0, -1), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \mathbf{n}_3 = (-1, 0).$$

Il segmento l_1 è definito dalle equazioni $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $0 \le t \le 1$.
Domanda numero 17: *Che funzione è $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ su l_1?*

$l(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Il segmento l_2 è definito dalle equazioni $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$, $0 \le t \le 1$.
Domanda numero 18: *Che funzione è $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ su l_2?*

$l(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Il segmento l_3 è definito dalle equazioni $x(t) = 0$, $y(t) = t$, $0 \le t \le 1$.
Domanda numero 19: *Che funzione è $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ su l_3?*

$l(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 20: *Che funzione è $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_1$?*

$v(t) =$

Valore: 8.
Domanda numero 21: *Che funzione è* $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_2$*?*

$v(t) =$

Valore: 8.
Domanda numero 22: *Che funzione è* $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_3$*?*

$v(t) =$

Valore: 8.
Domanda numero 23: *Quanto vale* ϕ_1*?* $\phi_1 =$
23A : ☐ *Valore: 8*.
Domanda numero 24: *Quanto vale* ϕ_2*?* $\phi_2 =$
24A : ☐ *Valore: 8*.
Domanda numero 25: *Quanto vale* ϕ_3*?* $\phi_3 =$
25A : ☐ *Valore: 8*.
Domanda numero 26: *Quanto vale* ϕ*?* $\phi =$
26A : ☐ *Valore: 8*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x,y) - 1 + y = g(x,y), \quad y(1) = y_0 = 2. \tag{7}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 27: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (7)?*

$y(x) =$

Valore: 48.
Domanda numero 28: *Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (7)?*

$\bar{y}(x) =$

Valore: 24.
Domanda numero 29: *Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

$L_1 =$ *29A :* $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

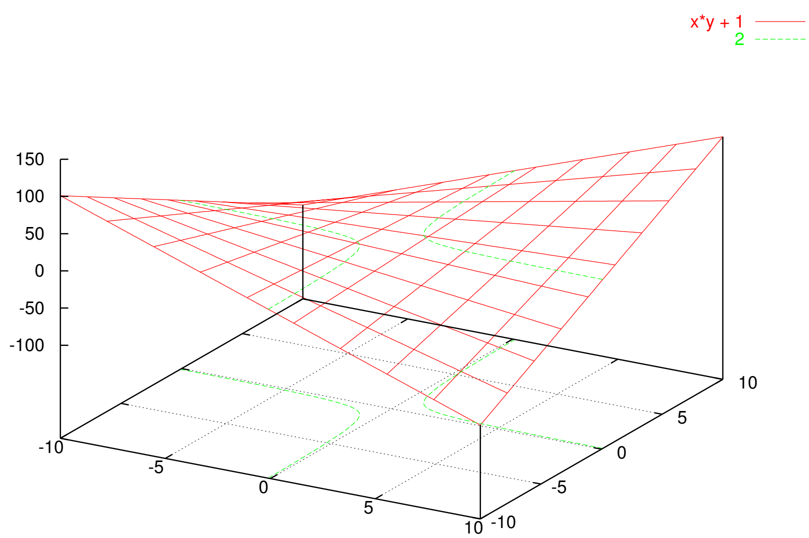
Domanda numero 30: *Quanto vale il limite* da sinistra

$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x)?$$

$L_2 =$ *30A :* $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione e della curva di livello $u = 2$, che è la curva implicita $xy + 1 = 2$, ossia i due archi di iperbole di equazione $y = 1/x$.



- Il gradiente è $\nabla f = (y, x)$.
- Su l_1 abbiamo $x' = 1$, $y' = 0$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(0, t) \circ (0, -1)$,

$$\phi_1 = \int_{l_1} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \int_0^1 -(0, t) \circ (0, -1)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 t\, \mathrm{d}t = 1/2;$$

su l_2, $x' = 1$, $y' = -11$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(1-t,t) \circ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$,

$$\phi_2 = \int_{l_2} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 -(1-t,t) \circ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)\, \mathrm{d}t = -1;$$

infine su l_3 abbiamo $x' = 0$, $y' = 1$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(t,0) \circ (-1,0)$,

$$\phi_3 = \int_{l_3} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ \mathrm{d}s = \int_0^1 -(t,0) \circ (-1,0) \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 t\ \mathrm{d}t = 1/2;$$

Quindi: $\phi = 1/2 - 1 + 1/2 = 0$.

Nota: dato che

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 + 0 = 0,$$

il risultato precedente è immediata conseguenza del teorema di Gauss che sotto ipotesi opportune, verificate in questo caso, afferma

$$\int_{\partial_T} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ \mathrm{d}s = \int \int_T (\Delta u)\, \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

- Le soluzioni dell' equazione $y' = u(x,y) - 1 + y = xy + y$ sono $y(x) = C \exp(x^2/2 + x)$.
- La soluzione del problema differenziale è $\bar{y}(x) = 2\exp(-3/2)\exp(x^2/2 + x)$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = +\infty.$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x) = \bar{y}(1) = 2.$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1990. Prima edizione nel 1979, Springer, New York.

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 8 settembre 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\boxed{\ }$. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ e virgola mobile=$\boxed{\ }\boxed{\ }$. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ $\boxed{E}$ $\boxed{\ }\boxed{\ }$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Una prima approssimazione della velocità di un fluido viscoso dentro un tubo infinito di raggio a, parallelo all' asse z è [2, pag. 45]:*

$$y = v_z(r) = -\frac{C}{4\mu}r^2 + A\log r + B,$$

dove A e B sono costanti.
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x) = v_z(x)$ in tutto il suo dominio, quando $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ $\mu = 4$.
Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
1A : $\boxed{\qquad\qquad}$ $< x <$ *1B :* $\boxed{\qquad\qquad}$.
$\boxed{\textit{Valore: 7}}$.
Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : $\boxed{\qquad\qquad}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : ☐ *Valore: 5*.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{1}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: x_1=* *4A :* ☐,
L_1^+= *4B :* ☐, L_1^-=
4C : ☐;
x_2= *4D :* ☐, L_2^+=
4E : ☐, L_2^-= *4F :* ☐.
Valore: 6.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: x_1=*
6A : ☐, $f(x_1)$= *6B :* ☐;
$f'_+(x_1)$= *6C :* ☐; $f'_-(x_1)$=
6D : ☐; x_2= *6E :* ☐, $f(x_2)$=
6F : ☐. $f'_+(x_2)$= *6G :* ☐;
$f'_-(x_2)$= *6H :* ☐; *Valore: 8*.
Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. x_1=*
7A : ☐; $f(x_1)$= *7B :* ☐;
Massimo o minimo?= *7C :* ☐; x_2=
7D : ☐; $f(x_2)$= *7E :* ☐;
Massimo o minimo?= *7F :* ☐; *Valore: 20*.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).
Domanda numero 8: *Asintoti: x_1=* *8A :* ☐;
a_1= *8B :* ☐; b_1= *8C :* ☐;

$c_1 =$ *8D :* $\boxed{}$; $x_2 =$ *8E :* $\boxed{}$;
$a_2 =$ *8F :* $\boxed{}$; $b_2 =$ *8G :* $\boxed{}$;
$c_2 =$ *8H :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 12}}$.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Sia

$$q(x) = f(x).$$

Domanda numero 10: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3,\ V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx.$

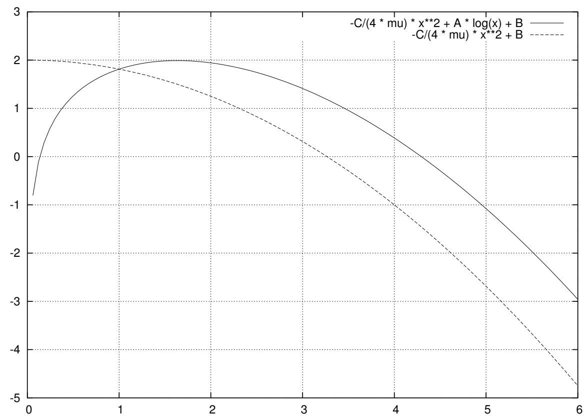
Domanda numero 11: *Calcolare i valori:* $V(a, b) =$
11A : $\boxed{}$; $V(b, c) =$ *11B :* $\boxed{}$;
$V(c, d) =$ *11C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R} =]0, +\infty[$.
- Risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{non esiste}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

- La funzione non è definita nel punto 0.
- La derivata è:
$$y'(x) = A/x - (Cx)/(2\mu).$$
- In nessun punto la funzione è continua, ma non derivabile.
- L' unico punto estremale è $\bar{x} = 2\sqrt{2/3} \simeq 1.63299$, dove $f(\bar{x}) = 3/2 + \log(2\sqrt{2/3}) \simeq 1.99041$.
- Asintoti: il solo asintoto è l' asintoto verticale $x = 0$.
- Grafico della funzione.



- L' integrale indefinito di $q(x)$ è
$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$
dove
$$Q(x) = (-A + B)\ x - \frac{C\,x^3}{12\,\mu} + A\,x\ \log(x).$$
- Gli integrali definiti valgono:
$$V(a,b) = \frac{15}{16} \simeq 0.9375;$$
$$V(b,c) = \frac{9}{16} + \log(4) \simeq 1.9488;$$
$$V(c,d) = -\left(\frac{3}{16}\right) + \log(\frac{27}{4}) \simeq 1.7220.$$

Test 2 Domanda numero 12: *Usando la sola definizione di derivata, dimostrare che se f e g sono derivabili nel punto x, allora*

$$j(x) = h'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$\boxed{\text{Valore: } 16}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{s\to 0} \frac{(f+g)(x+s) - (f+g)(x)}{s} = \\ & \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} + \lim_{s\to 0} \frac{g(x+s) - g(x)}{s} = f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

L' uguaglianza è banalmente vera, in quanto per ogni x in cui f e g sono definite e ogni $s \neq 0$, risulta

$$\frac{h(x+s) - h(x)}{s} = \frac{f(x+s) - f(x)}{s} + \frac{g(x+s) - g(x)}{s}.$$

QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *E' dato il potenziale*

$$\phi(x, y) = f(x, y) = (xy)^2, \tag{2}$$

Domanda numero 13: *Qual è il dominio della funzione f?* $\boxed{1}$: $(-\infty, +\infty) \times [-y_m, y_m]$; $\boxed{2}$: $[-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty)$; $\boxed{3}$: $(-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\text{Valore: } 6}$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva di livello $f = 2$. nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.
Domanda numero 15: *Quanto vale* $f_x = \partial f/\partial x$?

$f_x =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 16: *Quanto vale* $f_y = \partial f/\partial y$?

$f_y =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Vogliamo calcolare la vorticità *[2] di* f*, ossia il* rotore della velocità *[1]*

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = -\nabla\phi.$$

Notare che

$$\mathbf{u} = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0).$$

Siano

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T,$$

i tre vettori coordinati. Ricordiamo che dati due vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$*, il loro* prodotto vettore *è:*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} =$$
$$\mathbf{e}_1((v_2w_3) - (v_3w_2)) - \mathbf{e}_2((v_1w_3) - (v_3w_1)) + \mathbf{e}_3((v_1w_2) - (v_2w_1)),$$

Perciò se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$*:*

$$\nabla \times \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} =$$

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) =$$

$$\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3.$$

Domanda numero 17*: Quanto vale* A_1*?* $A_1 =$
17A : ☐ *Valore: 16*.
Domanda numero 18*: Quanto vale* A_2*?* $A_2 =$
18A : ☐ *Valore: 16*.
Domanda numero 19*: Quanto vale* A_3*?* $A_3 =$
19A : ☐ *Valore: 16*.
Domanda numero 20*: Quanto vale* ξ*?* $\xi =$
20A : ☐ *Valore: 32*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y)/(x^2 y) + 1 = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = -1. \tag{3}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$*.*
Domanda numero 21*: Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (3)?*

$y(x) =$

Valore: 48.
Domanda numero 22*: Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (3)?*

$\bar{y}(x) =$

Valore: 24.
Domanda numero 23*: Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

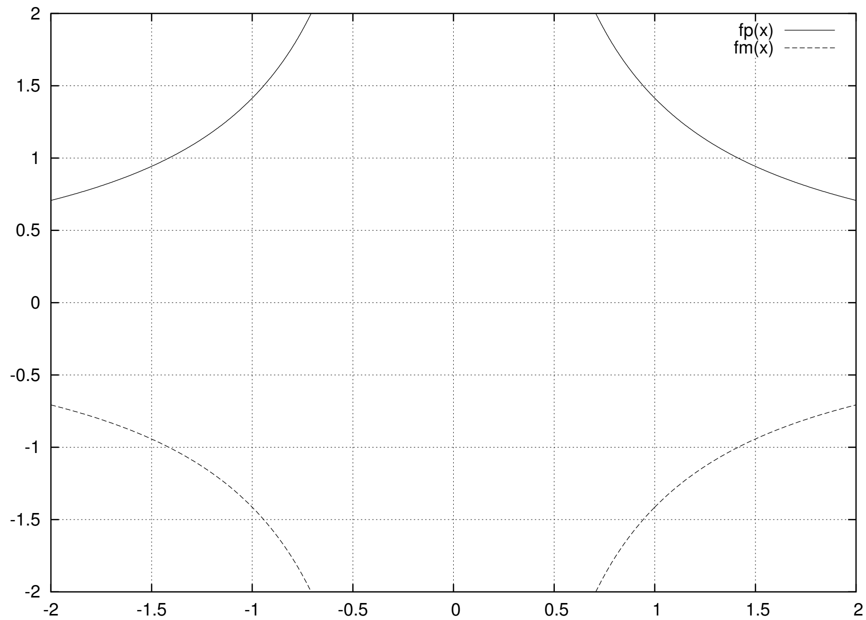
$L_1 =$ *23A :* ☐ *Valore: 4*.
Domanda numero 24*: Quanto vale il limite* da sinistra

$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x)?$$

$L_2 =$ *24A* : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione. La curva di livello $u = 2$, che è la curva implicita $(xy)^2 = 2$ è l' unione delle due curve $y = \sqrt{(}2/x^2)$, $y = -\sqrt{(}2/x^2)$, schizzate nella figura sottostante



- Il gradiente è $\nabla\phi = 2(xy^2, yx^2)$, la velocità è $\mathbf{u} = -\nabla\phi = -2(xy^2, yx^2, 0)$.
- Dato che $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0) = -(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, 0), -\nabla\phi = -2(xy^2, xy^2, 0)$, si ottiene
$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad A_2 = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,$$
$$A_3 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} = -4xy + 4xy = 0.$$
e quindi
$$\nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{e}_3(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}) = -\mathbf{e}_3(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}) = 0.$$

Questo risultato vale per tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ che non dipendono da z (esse hanno derivate miste uguali).

- Le soluzioni dell' equazione $y' = y + 1$ sono $y(x) = C \exp x - 1$.
- La soluzione del problema differenziale è $y(x) = -1$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = -1.$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x) = -1.$$

Riferimenti bibliografici

[1] T. M. Apostol, *Calcolo*, vol. 3 - Analisi 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1978.

[2] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1990. Prima edizione nel 1979, Springer, New York.

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2005.

Tema A

CORREZIONE

Nome

Cognome

Matricola Aula Posto

Calcolo I Calcolo II

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ e virgola mobile=$\boxed{}\boxed{}$. $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ $\boxed{\text{E}}$ $\boxed{}\boxed{}$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & 0 \leq x \leq \ln(2\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f_1(x) = -1/(2\tan(1))$, $f_2(x) = -1/(2\tan(\exp x))$, $f_3(x) = -1/(2\tan(2\pi - 1/10))$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?* $\mathbb{R} \setminus \{$

1A : $\boxed{}$, *1B :* $\boxed{}$,

1C : $\boxed{}$ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 15}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to -\infty$*?*

2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to +\infty$*?*

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei primi punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1=$ 4A : [ ], $L_1^-=$ 4B : [ ], $L_1^+=$ 4C : [ ]; $x_2=$ 4D : [ ], $L_2^-=$ 4E : [ ], $L_2^+=$ 4F : [ ].* *Valore: 6*.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 16.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: $x_1=$ 6A : [ ], $f(x_1)=$ 6B : [ ]; $f'_+(x_1)=$ 6C : [ ]; $f'_-(x_1)=$ 6D : [ ]; $x_2=$ 6E : [ ], $f(x_2)=$ 6F : [ ]. $f'_+(x_2)=$ 6G : [ ]; $f'_-(x_2)=$ 6H : [ ];* *Valore: 8*.

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1=$ 7A : [ ]; $f(x_1)=$ 7B : [ ]; Massimo o minimo?= 7C : [ ]; $x_2=$ 7D : [ ]; $f(x_2)=$ 7E : [ ]; Massimo o minimo?= 7F : [ ];* *Valore: 20*.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1=$ 8A : [ ]; $a_1=$ 8B : [ ]; $b_1=$ 8C : [ ]; $c_1=$ 8D : [ ]; $x_2=$*

8E : $\boxed{}$; a_2= *8F :* $\boxed{}$; b_2=
8G : $\boxed{}$; c_2= *8H :* $\boxed{}$; x_3=
8I : $\boxed{}$; a_3= *8J :* $\boxed{}$; b_3=
8K : $\boxed{}$; c_3= *8L :* $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \ln(2\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* $\boxed{1}$ *: No, perché è discontinua.;* $\boxed{2}$ *: Si, perché è discontinua.;* $\boxed{3}$ *: No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{4}$ *: Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{5}$ *: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a,b)$=
12A : $\boxed{}$; $V(b,c)$= *12B :* $\boxed{}$;
$V(c,d)$= *12C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

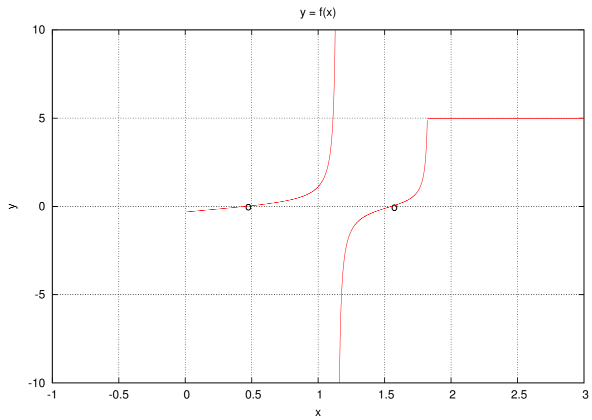
Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Poniamo $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \ln\pi \simeq 1.1447$, $\bar{x}_3 = \ln(2\pi - 1/10) \simeq 1.8218$, $\bar{x}_4 = \ln(\pi/2) \simeq 0.45158$, $\bar{x}_5 = \ln(3\pi/2) \simeq 1.5502$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq$ -0.32105, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq 4.9833$.

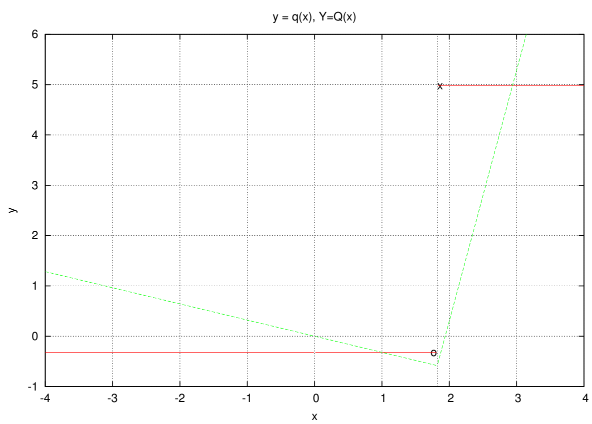
- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\ln(\pi/2), \ln\pi, \ln(3\pi/2)\}$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \bar{y}_1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione non è definita nei punti:

  $\bar{x}_4$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_4-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\bar{x}_4+} f(x) = 0.$$
  $\bar{x}_2$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_2-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\bar{x}_2+} f(x) = -\infty.$$
  $\bar{x}_5$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_5-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\bar{x}_5+} f(x) = 0.$$
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}\left(1+\cot^2(x)\right), & \text{se } 0 < x < \log(2\pi - 1/10),\ x \neq \bar{x}_4, \bar{x}_2, \bar{x}_5, \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, nei punti: $x_1 = 0$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 7.0614 \times 10^{-1}$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f'_-(x_2) = 3.1019 \times 10^2$. $f'_+(x_2) = 0$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < 0$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \ln(2\pi - 1/10)$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f(x_2) = \bar{y}_3$.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = -1/(2\tan(1))$; $x_2 = \ln\pi$, asintoto $x = \ln\pi$; $x_3 = +\infty$, $y = -1/(2\tan(2\pi - 1/10))$.

- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1 \cdot x, & se \quad x \leq \log(2\pi - 1/10), \\ \bar{y}_3 \cdot x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_3 & altrove. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = \frac{-\cot(1)}{2} \simeq -3.2105 \times 10^{-1}.$$

$$V(b,c) = \frac{-\cot(\frac{1}{10})\ (-2+\alpha) - \cot(1)\ (-1+\alpha)}{2} \simeq 6.2401\ \times\ 10^{-1},$$

dove $\alpha = \log(-\left(\frac{1}{10}\right) + 2\,\pi)$,

$$V(c,d) = \frac{\cot(\frac{1}{10})}{2} \simeq 4.9833.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 1/9} \sin(x) = \sin(1/9).$$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(|x - 1/9| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(1/9)| < \epsilon). \tag{3}$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\sin(x) - \sin(1/9)| < \epsilon;$$

ossia

$$-\epsilon < \sin(x) - \sin(1/9) < \epsilon;$$

per semplicità supponiamo $\epsilon < 1/1000$. Le soluzioni sono:

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) < x < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon).$$

Quindi

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9 < x - 1/9 < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9.$$

Se $\epsilon < 1/9 - \sin(1/9)$, essendo

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9 < 0 < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9,$$

$$|\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9| < |\arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9|,$$

ponendo

$$\mu = min(1/9 - \sin(1/9), \epsilon), \quad \delta = |\arcsin(\sin(1/9) - \mu) - 1/9|,$$

la (3) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0, 4]^2$.

Domanda numero 14: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_1$*?*

$\partial f/\partial x_1 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 15: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 17: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 18: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 19: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Domanda numero 20: *I punti di stazionarietà di* $f(x,y)$ *sono* $\mathbf{x}_i$, $i = 1,\dots,n$, *di z.* $\mathbf{x}_1$=(*20A :* [ ], *20B :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= *20C :* [ ];

$\mathbf{x}_2$=(*20D :* [ ], *20E :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= *20F :* [ ];

$\mathbf{x}_3$=(*20G :* [ ], *20H :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= *20I :* [ ];

Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1,x_2)$ *sul bordo del dominio?* *21A :* [ ] Valore: 10.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1,x_2)$*?*
22A : [ ] Valore: 2.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di* $f(x_1,x_2)$*?*
23A : [ ] Valore: 2.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di* $f(x_1,x_2)$*?*
24A : [ ] Valore: 2.

Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di* $f(x_1,x_2)$*?*
25A : [ ] Valore: 2.

Si vuole risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{f(x,y) + 4x + 12y - 5}{x^2}; \tag{4}$$

N.B.: $f(x,y) = f(\mathbf{x})$, *posto* $\mathbf{x} = (x,y)$.

Domanda numero 26: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione (4)?*

$y_1(x)\ =$

$y_2(x)\ =$

Valore: 80.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (8x_1 - 4, 18x_2 - 12)^T.$$

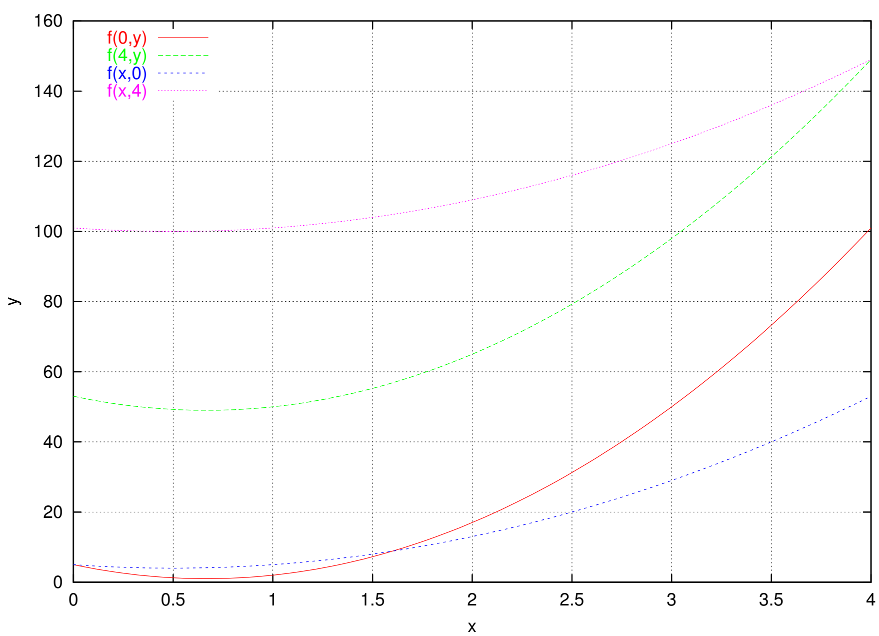
- Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà è $x_1 = (1/2, 2/3)$, $f(x_1) = 0$, che è minimo relativo della funzione, dato che $\det(H) > 0$, $H_{11} > 0$ (nonché minimo assoluto).

- Il bordo del dominio è l' insieme
  $B = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 4, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, y = 4\}$.

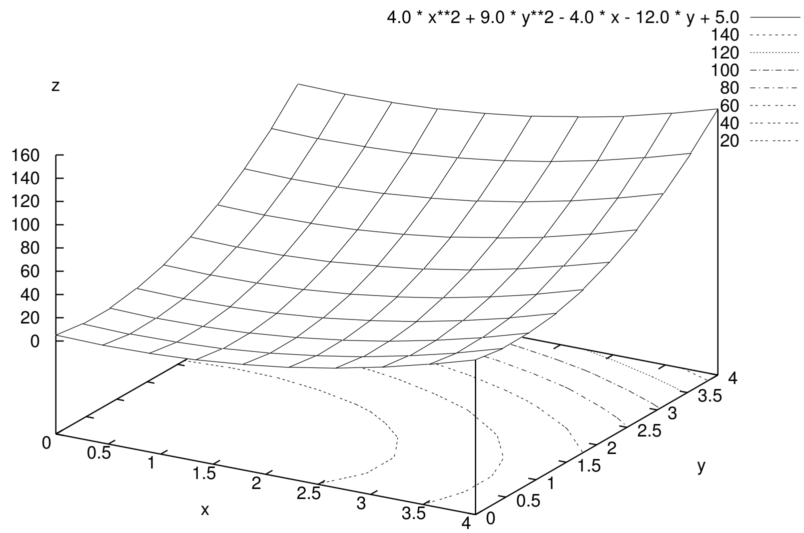
  I grafici di $f(x, y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.



  Il massimo di $f(x, y)$ su B è 149, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali assoluti sono: $\min_{x \in D} f = 0$, $\max_{x \in D} f = 149$, $\inf_{x \in D} f = 0$, $\sup_{x \in D} f = 149$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (4) da risolvere è:

$$y' = \frac{4x^2 + 9y^2}{x^2} = 4 + \frac{9y^2}{x^2}. \tag{5}$$

Ponendo $z = y/x$, otteniamo $y' = xz' + z$, ossia nel nostro caso:

$$xz' + z = 4 + 9z^2,$$

da cui

$$z' = \frac{9z^2 - z + 4}{x},$$

e ancora

$$\frac{\mathrm{d}z}{9z^2 - z + 4} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Otteniamo

$$\frac{2}{\sqrt{143}} \arctan \frac{18z - 1}{\sqrt{143}} = \ln|x| + C.$$

Infine abbiamo

$$y = (x/18)(1 + \sqrt{143}\tan((\sqrt{143}/2)(\ln|x| + C)))$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2005.

Tema B

CORREZIONE

Nome	☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome	☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola	☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐	Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{E}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & 0 \leq x \leq \ln(\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f_1(x) = -1/(\tan(2))$, $f_2(x) = -1/(\tan(2\exp(x)))$, $f_3(x) = -1/(\tan(2\pi - 1/5))$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?* $\mathbb{R}\setminus\{$

1A : $\boxed{}$, *1B :* $\boxed{}$,

1C : $\boxed{}$ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 15}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*

2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: x_1=* *4A :* [ ], L_1^-= *4B :* [ ], L_1^+= *4C :* [ ]; x_2= *4D :* [ ], L_2^-= *4E :* [ ], L_2^+= *4F :* [ ].

Valore: 6.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 16.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: x_1=* *6A :* [ ], $f(x_1)$= *6B :* [ ]; $f'_-(x_1)$= *6C :* [ ]; $f'_+(x_1)$= *6D :* [ ]; x_2= *6E :* [ ], $f(x_2)$= *6F :* [ ]. $f'_+(x_2)$= *6G :* [ ]; $f'_-(x_2)$= *6H :* [ ]; *Valore: 8*.

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. x_1=* *7A :* [ ]; $f(x_1)$= *7B :* [ ]; *Massimo o minimo?=* *7C :* [ ]; x_2= *7D :* [ ]; $f(x_2)$= *7E :* [ ]; *Massimo o minimo?=* *7F :* [ ]; *Valore: 20*.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: x_1=* *8A :* [ ]; a_1= *8B :* [ ]; b_1= *8C :* [ ]; c_1= *8D :* [ ]; x_2=

8E : $\boxed{}$; a_2= *8F :* $\boxed{}$; b_2=
8G : $\boxed{}$; c_2= *8H :* $\boxed{}$; x_3=
8I : $\boxed{}$; a_3= *8J :* $\boxed{}$; b_3=
8K : $\boxed{}$; c_3= *8L :* $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \ln(\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* $\boxed{1}$ *: No, perché è discontinua.;* $\boxed{2}$ *: Si, perché è discontinua.;* $\boxed{3}$ *: No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{4}$ *: Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{5}$ *: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

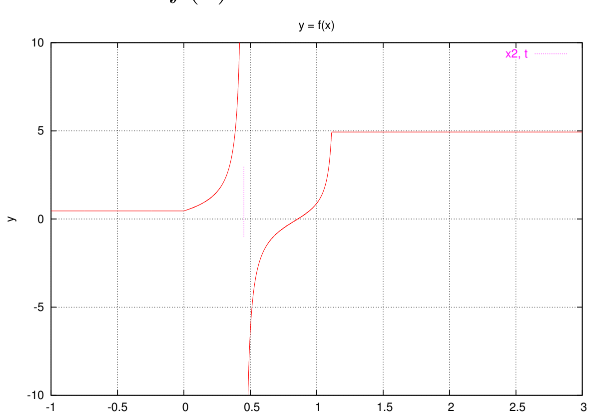
Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a, b)$=
12A : $\boxed{}$; $V(b, c)$= *12B :* $\boxed{}$;
$V(c, d)$= *12C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

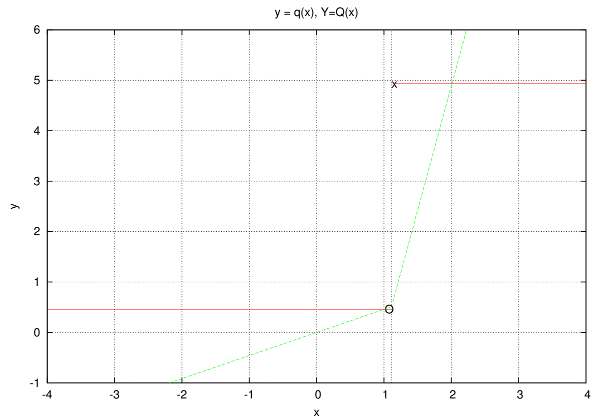
Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Poniamo $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \ln(\pi/2) \simeq 4.5158 \times 10^{-1}$, $\bar{x}_3 = \ln(\pi - 1/10) \simeq 1.124$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq 4.5766 \times 10^{-1}$, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq 4.9332$.

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\ln(\pi/2)\}$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \bar{y}_1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione non è definita nel punto $x_1 = \bar{x}_2$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_2-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\bar{x}_2+} f(x) = -\infty.$$
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} 2\,e^x \csc(2\,e^x)^2, & \text{se } 0 < x < \log(2\pi - 1/10),\ x \neq \ln(\pi/2), \\ 0 & \textit{altrove}. \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, nei punti: $x_1 = 0$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 2.4189$ $x_2 = \ln(\pi - 1/10)$, $f'_-(x_2) = 8.0228 \times 10^1$, $f'_+(x_2) = 0$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < 0$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \ln(\pi - 1/10)$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f(x_2) = \bar{y}_3$.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = -1/(2\tan(1))$; $x_2 = \bar{x}_2$, asintoto $x = \bar{x}_2$; $x_3 = +\infty$, $y = -1/(2\tan(2\pi - 1/5))$.
- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1\, x, & se \quad x \le \log(\pi - 1/10), \\ \bar{y}_3\, x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_3 & altrove. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = -\cot(2) \simeq 0.45766;$$

$$V(b,c) = -\cot(\frac{1}{5})\ (-2+\alpha)) - \cot(2)\ (-1+\alpha) \simeq 4.4302;$$

dove $\alpha = \log(-\left(\frac{1}{10}\right) + \pi)$,

$$V(c,d) = \cot(\frac{1}{5}) \simeq 4.9332.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x \to 1/9} \cos(x) = \cos(1/9).$$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 1/9| < \delta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(1/9)| < \epsilon). \qquad (3)$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\cos(x) - \cos(1/9)| < \epsilon;$$

ossia

$$-\epsilon < \cos(x) - \cos(1/9) < \epsilon;$$

per semplicità supponiamo $\epsilon < 1/1000$. Le soluzioni sono:

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) < x < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon).$$

Quindi

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9 < x - 1/9 < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9.$$

Se $\epsilon < 1/9 - \cos(1/9)$, essendo

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9 < 0 < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9,$$

$$|\arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9| < |\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9|,$$

ponendo

$$\mu = min(1/9 - \cos(1/9), \epsilon), \quad \delta = |\arccos(\cos(1/9) - \mu) - 1/9|,$$

la (3) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0, 4]^2$.
Domanda numero 14: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_1$*?*

$\partial f/\partial x_1 =$

Valore: 8.

Domanda numero 15: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

Valore: 4.

Domanda numero 17: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

Valore: 4.

Domanda numero 18: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

Valore: 4.

Domanda numero 19: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Domanda numero 20: *I punti di stazionarietà di* $f(x, y)$ *sono* $\mathbf{x}_i$*,* $i = 1, \ldots, n$*, di z.* $\mathbf{x}_1$=(*20A :* ____,
20B : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= *20C :* ____;
$\mathbf{x}_2$=(*20D :* ____,
20E : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= *20F :* ____;
$\mathbf{x}_3$=(*20G :* ____,
20H : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= *20I :* ____;

Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$ sul bordo del dominio?* *21A :* $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 10}}$.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$?*

22A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 2}}$.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$?*

23A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 2}}$.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*

24A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 2}}$.

Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*

25A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: 2}}$.

Si vuole risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{f(x, y) + 4x + 6y - 5}{x^2}; \tag{4}$$

N.B.: $f(x, y) = f(\mathbf{x})$, posto $\mathbf{x} = (x, y)$.

Domanda numero 26: *Quali sono le soluzioni $y(x)$ dell'equazione (4)?*

$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

$\boxed{\text{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (10x_1 - 4, 18x_2 - 6)^T.$$

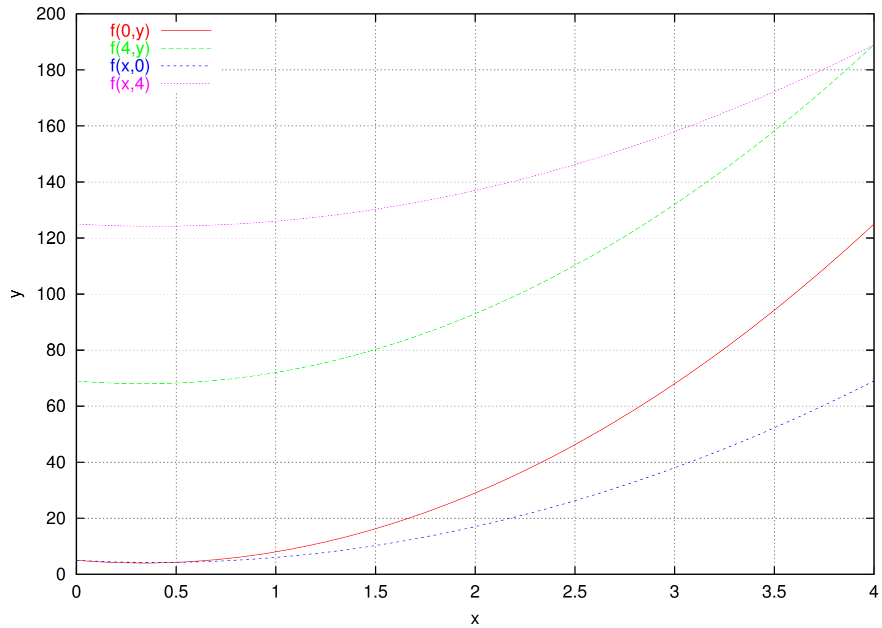
- Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà è $x_1 = (2/5, 1/3)$, $f(x_1) = 0$, che è minimo relativo della funzione, dato che $\det(H) > 0$, $H_{11} > 0$, (nonché minimo assoluto).

- Il bordo del dominio è l' insieme
  $B = \{(x,y) : x = 0, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : x = 4, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 0\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 4\}$.

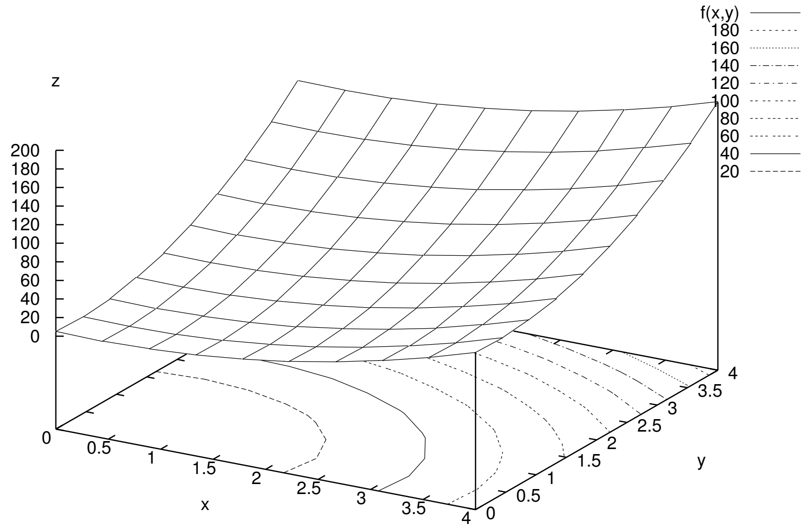
  I grafici di $f(x,y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.



  Il massimo di $f(x,y)$ su B è 189, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali assoluti sono: $\min_{x\in D} f = 3.2$, $\max_{x\in D} f = 189$, $\inf_{x\in D} f = 3.2$, $\sup_{x\in D} f = 189$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (4) da risolvere è:

$$y' = \frac{5x^2 + 9y^2}{x^2} = 5 + \frac{9y^2}{x^2}. \tag{5}$$

Ponendo $z = y/x$, otteniamo $y' = xz' + z$, ossia nel nostro caso:

$$xz' + z = 5 + 9z^2,$$

da cui

$$z' = \frac{9z^2 - z + 5}{x},$$

e ancora

$$\frac{\mathrm{d}z}{9z^2 - z + 5} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Otteniamo

$$z = \frac{1}{18}(1 + \sqrt{179}\,\tan(\sqrt{179}(C + \log(x))/2)).$$

Infine abbiamo

$$y = \frac{x}{18}(1 + \sqrt{179}\,\tan(\sqrt{179}(C + \log(x))/2)).$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 9 febbraio 2005.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=☐ . ☐☐☐☐☐ e virgola mobile=☐☐ . ☐☐☐☐ E ☐☐ , la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

Attenzione: chi non affronta l' equazione differenziale, difficilmente passerà l' esame...

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \gamma_1, \\ f_2(x), & \gamma_1 \leq x \leq \gamma_2, \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\gamma_1 = 2.0$, $\gamma_2 = \exp(\pi - 0.1)$, $f_1(x) = -1/\sin(\log 2.0))$,
$f_2(x) = -1/\sin(\log x)$, $f_3(x) = -1/\sin\log((\gamma_1 + \gamma_2)/2)$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?* $\mathbb{R}\setminus\{$
1A : ☐, *1B :* ☐,
1C : ☐ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 9}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : [ ] Valore: 2.
Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : [ ] Valore: 5.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui è discontinua. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1 =$* *4A* : [ ], $L_1^- =$ *4B* : [ ], $L_1^+ =$
4C : [ ];
$x_2 =$ *4D* : [ ], $L_2^- =$
4E : [ ], $L_2^+ =$ *4F* : [ ].
Valore: 6.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: $x_1 =$*
6A : [ ], $f'_-(x_1) =$ *6B* : [ ];
$f'_+(x_1) =$ *6C* : [ ]; $x_2 =$
6D : [ ], $f'_-(x_2) =$ *6E* : [ ];
$f'_+(x_2) =$ *6F* : [ ]; Valore: 12.
Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1 =$*
7A : [ ]; $f(x_1) =$ *7B* : [ ];
Massimo o minimo?= *7C* : [ ]; $x_2 =$
7D : [ ]; $f(x_2) =$ *7E* : [ ];
Massimo o minimo?= *7F* : [ ]; $x_3 =$
7G : [ ]; $f(x_3) =$ *7H* : [ ];
Massimo o minimo?= *7I* : [ ]; Valore: 42.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è

verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1 =$ 8A : ☐; $a_1 =$ 8B : ☐; $b_1 =$ 8C : ☐; $c_1 =$ 8D : ☐; $x_2 =$ 8E : ☐; $a_2 =$ 8F : ☐; $b_2 =$ 8G : ☐; $c_2 =$ 8H : ☐; $x_3 =$ 8I : ☐; $a_3 =$ 8J : ☐; $b_3 =$ 8K : ☐; $c_3 =$ 8L : ☐.*

Valore: 24.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \le \gamma_2, \\ f_3(x), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* 1 : *No, perché è discontinua.*; 2 : *Si, perché è discontinua.*; 3 : *No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.*; 4 : *Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.*; 5 : *Nessuna delle precedenti risposte è valida.*; *Valore: 2*.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = \gamma_2 + 1$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a, b)$=

12A : $\boxed{}$; $V(b, c)$= *12B :* $\boxed{}$;

$V(c, d)$= *12C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

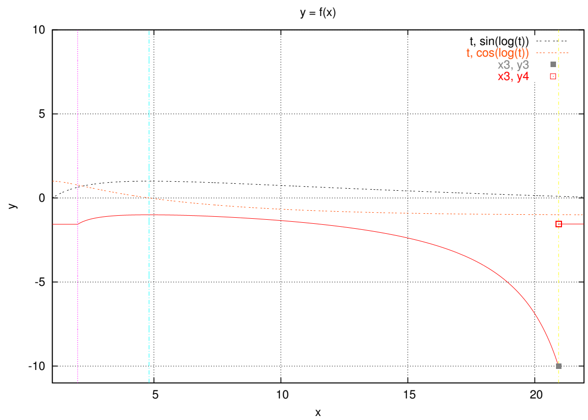
Poniamo $\bar{x}_1 = 2.0$, $\bar{x}_2 = \exp(\pi - 0.1) \simeq 20.939$, $\bar{x}_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2 \simeq 11.469$, $\bar{x}_4 = \exp(\pi/2) \simeq 4.8104$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq$ -1.5650, $\bar{y}_2 = f(\bar{x}_2) \simeq$ -10.0167, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq$ -1.5487, $\bar{y}_4 = f(\bar{x}_4) \simeq$ -1.0000.

Nota:

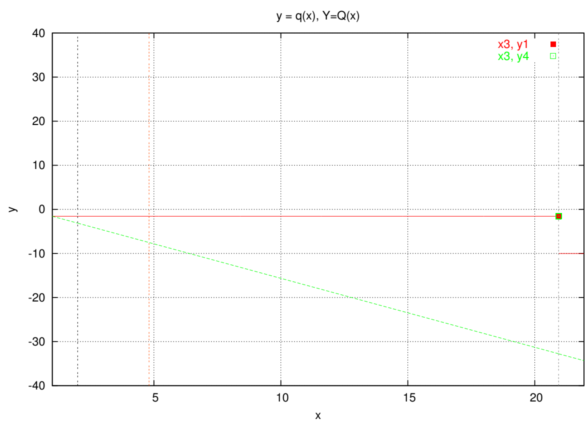
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R}$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \bar{y}_1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione è definita in ogni punto.
- La funzione non è continua in $x_1 = \bar{x}_2$, $f'_-(x_1) = \bar{y}_2$, $f'_+(x_1) = \bar{y}_3$.
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} (\cot(\log(x))\ \csc(\log(x)))/x, & \text{se } \bar{x}_1 < x < \bar{x}_2, \\ 0 & \textit{altrove}. \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, in $x_1 = \bar{x}_1$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 0.94206$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < \bar{x}_1$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \bar{x}_2$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, minimo relativo; $x_2 = 4.8104$, $f(x_2) = \bar{y}_4$, massimo relativo; $x_3 = \bar{x}_3$, $f(x_3) = \bar{y}_3$, minimo relativo.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = \bar{y}_1$; $x_2 = +\infty$, $y = \bar{y}_2$.

- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1 \cdot x, & se \quad x \leq \bar{x}_2, \\ \bar{y}_3 \cdot x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_2 & altrove. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a, b) = -\csc(\log(2)) \simeq -1.5650;$$

$$V(b, c) = V(a, b);$$

$$V(c,d) = -\csc(\frac{1}{10}) - \left(-2 + e^{-\left(\frac{1}{10}\right)+\pi}\right) \csc(\log(2)) \simeq -39.656.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Sia* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successione reale.*
Dimostrare che se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = x_0,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b.$$

$\boxed{\textit{Valore: 32}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Dobbiamo dimostrare che $\forall\delta > 0$ esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $|f(a_n) - b| < \delta$, $\forall n > M$.
Poiché

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b,$$

fissato δ, esiste ϵ_1 t.c. $(\forall x)(|x - x_0| < \epsilon_1)$ si ha $|f(x) - b| < \delta$.
Sia N_1 tale che $\forall n > N_1$ $|a_n - x_0| < \epsilon_1$. Allora, se $M = N_1$, abbiamo la tesi.
QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0,4]^2$.
Domanda numero 14: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_1$*?*

$\partial f/\partial x_1 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 15: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale H_{11}?*

H_{11} =

Valore: 4.

Domanda numero 17: *Quanto vale H_{12}?*

H_{12} =

Valore: 4.

Domanda numero 18: *Quanto vale H_{21}?*

H_{21} =

Valore: 4.

Domanda numero 19: *Quanto vale H_{22}?*

H_{22} =

Valore: 4.

Domanda numero 20: *Quali sono i punti di stazionarietà di $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, di z?* $\mathbf{x}_1$=(*20A :* ____,
20B : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= *20C :* ____;
$\mathbf{x}_2$=(*20D :* ____,
20E : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= *20F :* ____;
$\mathbf{x}_3$=(*20G :* ____,
20H : ____ $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= *20I :* ____;
Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$ sul bordo del dominio?* *21A :* ____ *Valore: 10*.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$ in D?*
22A : ____ *Valore: 4*.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$ in D?*
23A : ____ *Valore: 4*.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$ in D?*
24A : [ ] *Valore: 4*.
Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$ in D?*
25A : [ ] *Valore: 4*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$g(x, y) = 5x^2 - 9y'' - 4x - 6y' + 5 = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 2. \tag{3}$$

che si ottiene da $f(x, y)$, interpretando formalmente gli esponenti della base y come ordini di derivazione. N.B.: $f(x, y) = f(\mathbf{x})$, posto $\mathbf{x} = (x, y)$.
Domanda numero 26: *Qual è la forma canonica dell'equazione differenziale (3)?*

---

eq =

Valore: 10.
Domanda numero 27: *Quali sono le soluzioni generali $y(x)$ dell'equazione (3)?*

$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

Valore: 80.
Domanda numero 28: *Qual è la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ del problema (3)?*

$\bar{y}(x) =$

Valore: 24.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

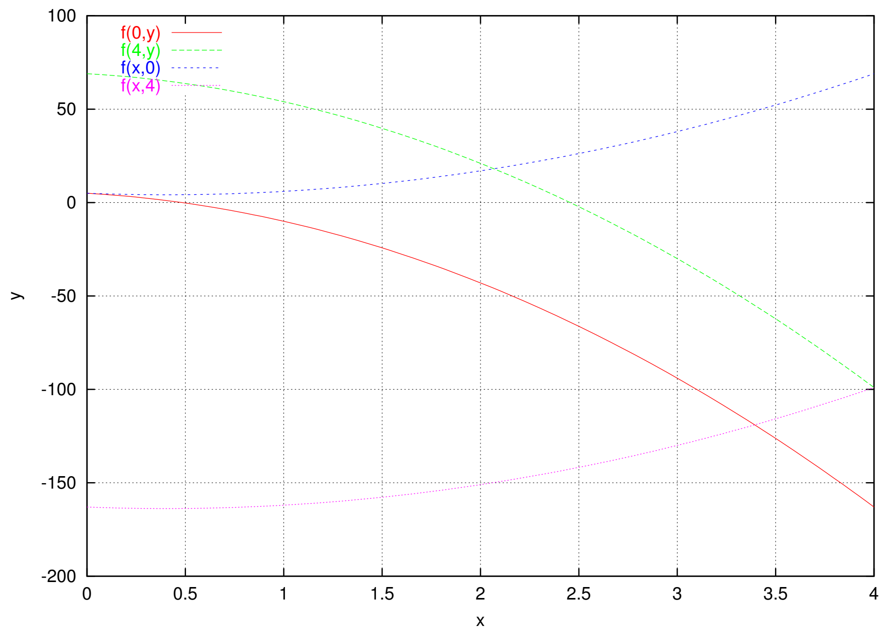
$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (10x_1 - 4, -18x_2 - 6)^T.$$

- Hessiano:
$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà in $\mathbb{R}^2$ è $x_1 = (2/5, -1/3)$, $f(x_1) = 5.2$, che è punto di sella della funzione, dato che $\det(H) < 0$, $H_{11} > 0$.

- Il bordo del dominio è l' insieme
$B = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : x = 4, 0 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, y = 4\}$.

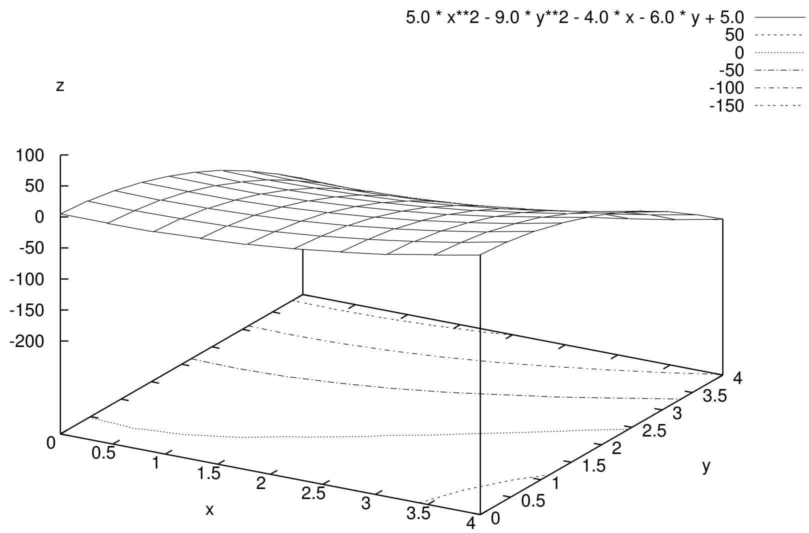
  I grafici di $f(x, y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.



  Il massimo di $f(x, y)$ su B è 69, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali sono: $\min_{x \in D} f$ = -163.80, $\max_{x \in D} f = 69$, $\inf_{x \in D} f$ = -163.80, $\sup_{x \in D} f = 69$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (3) da risolvere è:

$$-5y'' - 6y' + 4x^2 - 4x + 5 = 0, \tag{4}$$

La soluzione generale è:

$$y(x) = \frac{25\,x}{24} - \frac{5\,x^2}{12} + \frac{x^3}{9} - C_1\frac{3}{4}\,e^{-4\,x/3} + C_2.$$

- La soluzione del problema è:

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{288}(495 - 207e^{-4\,x/3} + 300\,x - 120\,x^2 + 32\,x^3)$$

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 13 giugno 2005.

Tema A

CORREZIONE

Nome □□□□□□□□□□□□
Cognome □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
Matricola □□□□□□□□ Aula □ Posto □□□□
Calcolo I □ Calcolo II □

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, anche se non sono stati consultati.**

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Attenzione: chi non affronta l' equazione differenziale, difficilmente passerà l' esame...

1 Calcolo I

Test 1 ***Consideriamo la densità di probabilità normale [1]***

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2).$$

Vogliamo analizzare il comportamento della densità di probabilità Gaussiana con media μ ***e varianza*** σ^2

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma}\mathcal{N}((x-\mu)/\sigma). \tag{1}$$

Domanda numero 1***: Scrivere esplicitamente*** $f(x)$***.***

f(x)=

$\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 2***: Qual è il dominio della funzione?***

D=

$\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 3***: Quanto vale il limite di*** $f(x)$ ***per*** $x \to -\infty$***?***

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 4***: Quanto vale il limite di*** $f(x)$ ***per*** $x \to +\infty$***?***

4A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ ***nei punti*** x_i ***in cui è discontinua. N.B.:***

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 5***: Punti*** x_i***:*** x_1***=***

5A : $\boxed{}$, L_1^-= ***5B :*** $\boxed{}$,

L_1^+= ***5C :*** $\boxed{}$;

x_2= ***5D :*** $\boxed{}$, L_2^-=

5E : $\boxed{}$, L_2^+= ***5F :*** $\boxed{}$.

Valore: 1.

Domanda numero 6*: Qual è la derivata di* $f(x)$*?*

f'(x) =

Valore: 8.

Domanda numero 7*: Qual è la derivata seconda di* $f(x)$*?*

f''(x) =

Valore: 16.

Domanda numero 8*: Punti* x_i*,* $i = 1, \dots, n$ *in cui* $f(x)$ *è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile:* x_1=

8A : [ ], $f'_-(x_1)$=

8B : [ ]; $f'_+(x_1)$=

8C : [ ]; x_2= ***8D :*** [ ],

$f'_+(x_2)$= ***8E :*** [ ]; $f'_-(x_2)$=

8F : [ ]; **Valore: 2**.

Domanda numero 9*: Punti estremali* x_i*,* $i = 1, \dots, n$*, di* $f(x)$*. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo.* x_1=

9A : [ ]; $f(x_1)$=

9B : [ ]; *Massimo o minimo?*=

9C : [ ]; x_2= ***9D :*** [ ];

$f(x_2)$= ***9E :*** [ ]; *Massimo o minimo?*=

9F : [ ]; x_3= ***9G :*** [ ];

$f(x_3)$= ***9H :*** [ ]; *Massimo o minimo?*=

9I : [ ]; **Valore: 4**.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$***, siano le rette*** $a_i y + b_i x + c_i = 0$*,* $i = 1, \dots, n$*,* x_i ***le ascisse dei punti di tangenza (porre*** $b_i = 1$ ***se l' asintoto è verticale,*** $a_i = 1$ ***se l' asintoto non è verticale,*** $x_i = \pm\infty$***, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).***

Domanda numero 10*: Asintoti:* x_1=

10A : [ ]; a_1= ***10B :*** [ ];

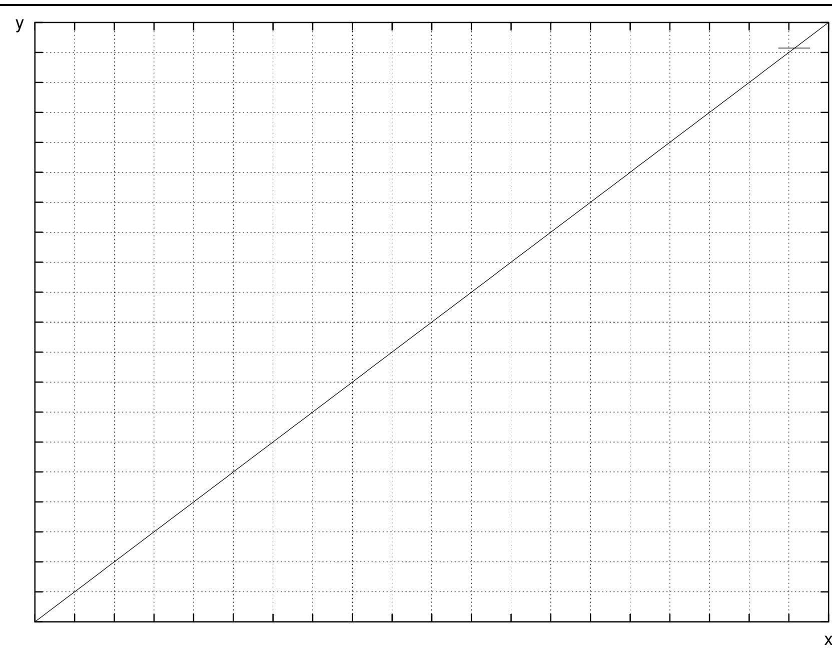
b_1= ***10C :*** [ ]; c_1=

10D : $\boxed{}$; $x_2=$ ***10E :*** $\boxed{}$;
$a_2=$ ***10F :*** $\boxed{}$; $b_2=$
10G : $\boxed{}$; $c_2=$
10H : $\boxed{}$. $x_3=$ ***10I :*** $\boxed{}$;
$a_3=$ ***10J :*** $\boxed{}$; $b_3=$
10K : $\boxed{}$; $c_3=$ ***10L :*** $\boxed{}$.

Valore: 2.

Porre $\mu = 1$, $\sigma = 1$.

Domanda numero 11***: Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.***



Valore: 80.

Domanda numero 12***: Qual è il polinomio di Taylor di grado 2,*** $p_2(x)$***, che approssima*** $f(x)$ ***in un intorno di*** $x = \mu$***?***

$p_2(x)=$

Valore: 16.

Sia

$$q(x) = p_2(x).$$

Domanda numero 13*: La funzione* $q(x)$ *è integrabile?* $\boxed{1}$ ***: No, perché è discontinua.;*** $\boxed{2}$ ***: Si, perché è discontinua.;*** $\boxed{3}$ ***: No, perché è limitata e continua.;*** $\boxed{4}$ ***: Si, perché è limitata e continua.;*** $\boxed{5}$ ***: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;*** $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 14*: Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = \mu$, $b = \mu + \sigma$, $c = \mu + 2\sigma$, $d = \mu + 3\sigma$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 15*: Calcolare i valori:* $V(a, b)=$

15A : $\boxed{}$; $V(b, c)=$

15B : $\boxed{}$; $V(c, d)=$

15C : $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Otteniamo:

- **La funzione è:**

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)).$$

- **Il dominio è** $D(f) = \mathbb{R}$**.**

- **Risulta**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- **La funzione è definita in ogni punto.**

- **La funzione è discontinua in nessun punto.**

- **La derivata è:**

$$y'(x) = -\left(\frac{-\mu + x}{e^{\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\right) = -\left(\frac{-\mu + x}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\right)\cdot e^{-\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}.$$

- **La derivata seconda è:**

$$y''(x) = \frac{-1 + (-\mu + x)^2}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}.$$

- **La funzione è continua, ma non derivabile, in nessun punto.**

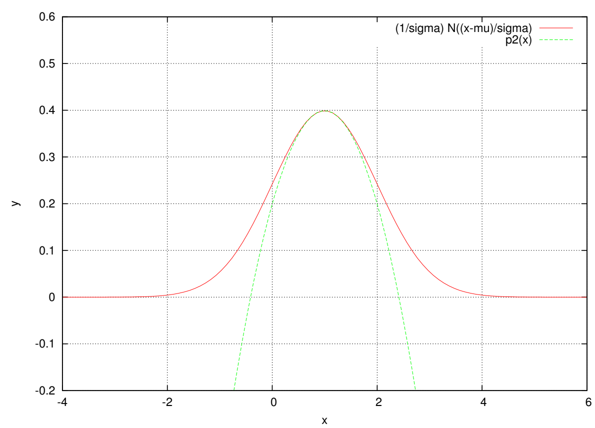
- **Unico punto di stazionarietà:** $x_1 = \mu$, **che corrisponde al Massimo assoluto** $y = 1/(\sigma\,\sqrt{2\pi})$.

- **Asintoti:** $x_1 = -\infty$, $y = 0$; $x_2 = +\infty$, $y = 0$.

- **Il polinomio di Taylor è:**

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} - \frac{(-1 + x)^2}{2\,\sqrt{2\,\pi}}.$$

- **Grafico delle funzioni** $f(x)$ **e** $p_2(x)$.



La funzione $q(x)$ **è integrabile perché è continua.**

- **L' integrale indefinito di** $q(x)$ **è:**

$$\int q(x)\,\mathbf{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = x/(2\sqrt{2\pi}) + x^2/(2\sqrt{2\pi}) - x^3/(6\sqrt{2\pi}).$$

- **Gli integrali definiti valgono:**

$$V(a,b) = \frac{5}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq 3.3245 \times 10^{-1};$$

$$V(b,c) = \frac{-1}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq -6.649 \times 10^{-2};$$

$$V(c,d) = \frac{-13}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq -8.6437 \times 10^{-1}.$$

Test 2 Domanda numero 16*: Sia*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}.$$

Usando i soli teoremi sui limiti, dimostrare che
$df(3)/dx = f'(3) = -1/4$***.***
$\boxed{\textbf{\textit{Valore: 8}}}$***.***

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Innanzitutto, visto che in ogni intorno di $x = 3$ che non contiene 1 la funzione è definita, possiamo considerare ad esempio la funzione ristretta all' intervallo $I = [2,3]$,

$$f_I = f|_I = \frac{1}{x-1}.$$

Dobbiamo provare che

$$f_I'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f_I(3+h) - f_I(3)}{h} = -1/4.$$

Infatti

$$f_I'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f_I(3+h) - f_I(3)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1/(3+h-1) - 1/(3-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(h+2)} = -1/4.$$

QED

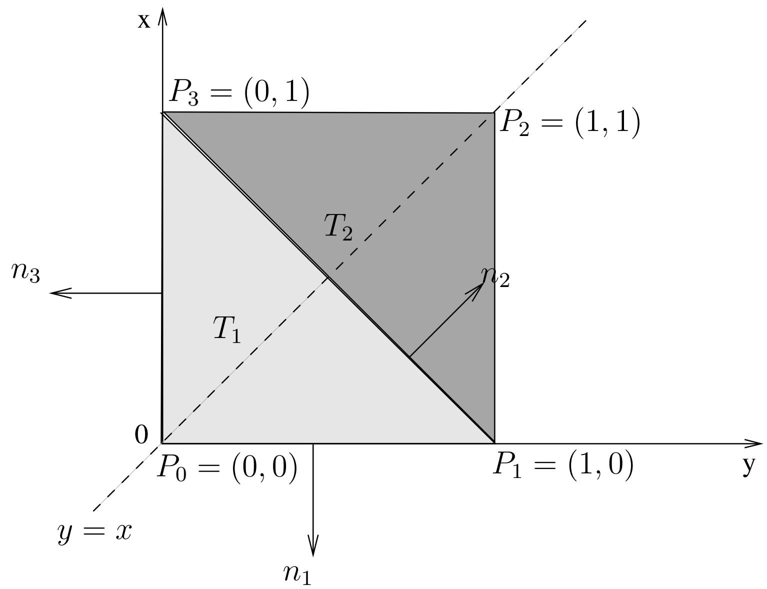


Figura 1: I triangoli T_1 e T_2.

2 Calcolo II

Test 3 ***Consideriamo la funzione di due variabili***

$$z(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & se\,(x, y) \in T_1, \\ f_2(x, y), & se\,(x, y) \in T_2, \end{cases} \tag{3}$$

dove T_1 ***e*** T_2 ***sono i triangoli (bordi compresi) mostrati nella figura 1,*** $f_1(x, y) = x + y$***,*** $f_2(x, y) = -x - y + 2$***.***

Domanda numero 17***: Qual è il dominio della funzione?***

$D =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 18***: E' una funzione continua?*** $\boxed{1}$ ***: Si;*** $\boxed{2}$ ***: No;*** $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 19***: E' una funzione derivabile?*** $\boxed{1}$ ***: Si;*** $\boxed{2}$ ***: No;*** $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 20***: Quanto vale*** $\partial f/\partial x_1$***?***

$\partial f/\partial x_1 =$

Valore: 8.

Domanda numero 21*: Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2\ =$

Valore: 8.

Domanda numero 22*: Qual è l' Hessiano di* f*?*

$H\ =$

Valore: 8.

Domanda numero 23*: Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

23A : [ ] **Valore: 2**.

Domanda numero 24*: Quanto vale il minimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

24A : [ ] **Valore: 2**.

Domanda numero 25*: Quanto vale l'estremo superiore di* $f(x_1, x_2)$*?* ***25A :*** [ ] **Valore: 2**.

Domanda numero 26*: Quanto vale l'estremo inferiore di* $f(x_1, x_2)$*?* ***26A :*** [ ] **Valore: 2**.

Vogliamo calcolare il salto, S***, della derivata di*** f ***nella direzione della normale esterna a*** T_1 ***lungo il lato*** $L = P_1 - P_3$***, piú precisamente il valore***

$$S = \left|\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2}\right]\right| = \left|\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{n}_2}\right|.$$

dove $\mathbf{n}_2 = (1,1)^T/\sqrt{2} = (\cos\widehat{\mathbf{n}_2 x}, \sin\widehat{\mathbf{n}_2 x})$***. Ricordare che se*** u ***è una funzione differenziabile e*** $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ ***un vettore unitario in*** $\mathbb{R}^2$***, si ha***

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x}\, v_x + \frac{\partial u}{\partial y}\, v_y.$$

Domanda numero 27*: Quanto vale* $\partial f_1/\partial \mathbf{n}_2$*?*

27A : [ ] **Valore: 10**.

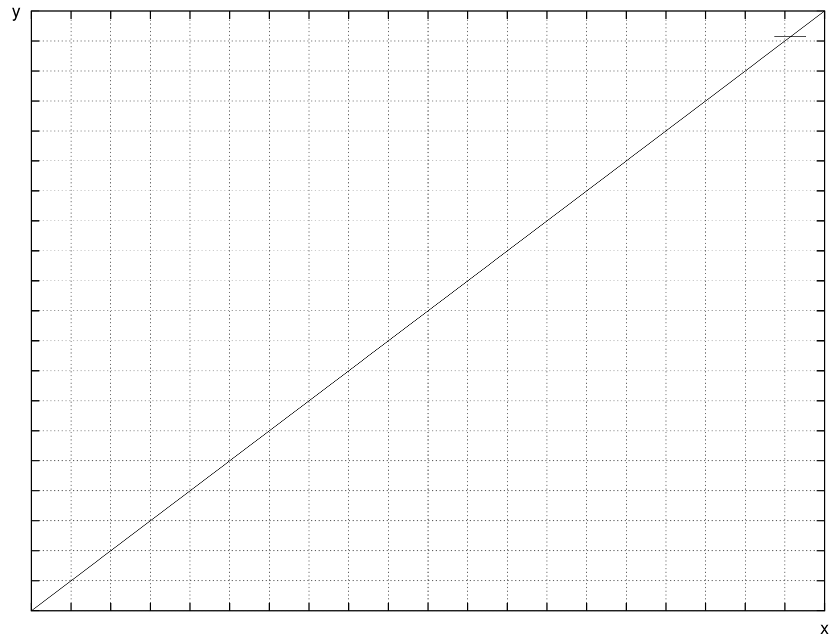
Domanda numero 28*: Quanto vale* $\partial f_2/\partial \mathbf{n}_2$*?*

28A : [ ] **Valore: 10**.

Domanda numero 29*: Quanto vale* S*?*

29A : [ ] **Valore: 20**.

Domanda numero 30*: Nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale, schizzare il grafico della funzione* $z = f(x, y)$ *e della sua derivata, lungo la retta* $y = x$*.*



$\boxed{\textit{Valore: 40}}$.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f_2(x, y), \quad y(1) = y_0 = 1. \tag{4}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$***.***
Domanda numero 31***: Qual è la soluzione generale*** $y(x)$ ***dell'equazione in (4)?***

$y(x) =$

$\boxed{\textit{Valore: 48}}$.
Domanda numero 32***: Qual è la soluzione particolare*** $\bar{y}(x)$ ***del problema (4)?***

$\bar{y}(x) =$

$\boxed{\textit{Valore: 12}}$.
Domanda numero 33***: Quanto vale***

$$L_1 = \lim_{x \to -\infty} \bar{y}(x)?$$

$L_1 =$ ***33A :*** $\boxed{}$ **$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.**

Domanda numero 34*: Quanto vale*

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x)?$$

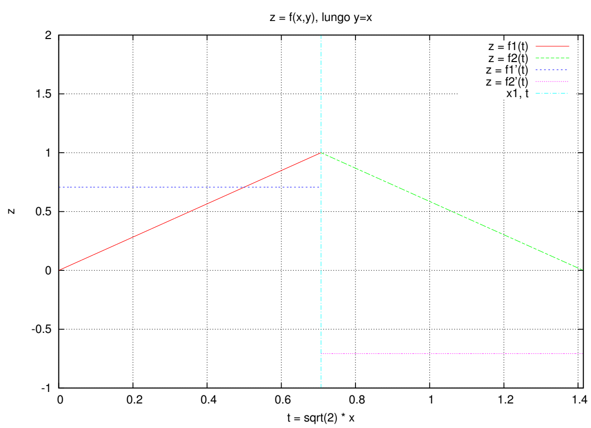
$L_2=$ ***34A :*** $\boxed{}$ $\boxed{\textit{\textbf{Valore: 8}}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- **Il dominio della funzione è** $T_1 \cup T_2 = [0,1]^2$**.**
- **La funzione è continua nel suo dominio.**
- **L' insieme dei punti in cui non è derivabile è:**

$$N = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = 1-x\}.$$

- **Il grafico della funzione, lungo la retta** $y = x$ **è il seguente:**



- **Sia** $\overset{\circ}{T_i}$ **l'** ***interno*** **di** T_i**, ossia** T_i **privato del bordo. Abbiamo**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1, & se\,(x,y) \in \overset{\circ}{T_1}, \\ -1, & se\,(x,y) \in \overset{\circ}{T_2}. \end{cases}$$

- **L' Hessiano è nullo in tutti i punti in cui la funzione è differenziabile.**
- **Il massimo della funzione è** $m = 1$**, il minimo** $n = 0$**.**

- **L'estremo superiore coincide con il massimo, quello inferiore con il minimo.**

- **Abbiamo**

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\pi/4) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\pi/4) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2} = \begin{cases} \sqrt{2}, & se\,(x,y) \in \mathring{T}_1, \\ -\sqrt{2}, & se\,(x,y) \in \mathring{T}_2. \end{cases}$$

- **Risulta quindi**

$$S = 2\sqrt{2}.$$

- **L'equazione differenziale da risolvere è:**

$$y' = -x - y + 2.$$

- **La soluzione generale dell' equazione differenziale è:**

$$y(x) = 3 - x + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- **La soluzione particolare del problema è:**

$$\bar{y}(x) = -\left(\frac{e - 3\,e^x + e^x\,x}{e^x}\right) = -e^{1-x} + 3 - x.$$

- **I limiti valgono**

$$L_1 = \lim_{x \to -\infty} \bar{y}(x) = -\infty, \quad L_2 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = -\infty.$$

Riferimenti bibliografici

[1] W. Feller, ***An Introduction to Probability Theory and its Applications***, **vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1966.**

*** fine testo ***