Matematica Discreta
28 Maggio 2012

Recupero Compitini Modulo 1: Esercizi 1 e 2
Recupero Compitini Modulo 2: Esercizi 4 e 6
Compito Completo 12 crediti (a.a.2012): Esercizi 1,2,4,7
Compito Completo 12 crediti (a.a.2011): Esercizi 1,2,3,4
Matematica Discreta 6 crediti: Esercizi 3,4.

1. Provare che la cardinalità dell'insieme $\mathcal{P}(A)$ delle parti di un insieme A di cardinalità n è 2^n.

2. Si provi per induzione che
$$\sum_{k=0}^{x+1}(2k+1) = (x+1)^2.$$

3. Dato l'insieme $V = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ e due permutazioni σ e τ di V, si considerino i seguenti due grafi:

   - $G = (V, E)$, ove $E = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\} : i \neq j \in V\}$;
   - $G_1 = (V, E_1)$, ove $E_1 = \{\{\tau(i), \tau(j)\} : i \neq j \in V\}$.

   (a) Quanti lati hanno G e G_1?
   (b) Che grado ha il vertice i in G e in G_1 per ogni $i \in V$?
   (c) Si dica se G e G_1 sono isomorfi, costruendo un isomorfismo tra G e G_1 nel caso affermativo o provando che l'isomorfismo non esiste nel caso opposto.

4. Si provi che almeno uno dei due grafi G e $\overline{G}$, il complementare di G, è connesso (Suggerimento: se G non è connesso, esistono almeno 2 componenti connesse. Se x e y sono due vertici, e si vuole costruire un cammino da x a y in $\overline{G}$, si consideri prima il caso in cui x e y siano vertici di due componenti connesse distinte di G, e successivamente il caso in cui x e y siano vertici della medesima componente connessa di G, sfruttando il caso precedente).

5. Sia $V = R^2$ l'usuale spazio vettoriale su R, ove R è il campo dei numeri reali. Si dica, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di V sono o meno sottospazi vettoriali di V e, in caso affermativo, si trovi una base del sottospazio.

   (a) $X = \{r(\pi, \sqrt{5}) : r \in R\}$.
   (b) $Y = \{r(\pi, \sqrt{5}) + r(\sqrt{5}, \pi) : r \in R\}$.

6. (a) Si risolva, utilizzando il metodo di riduzione a scala per righe, il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in R:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b) Sia $\phi : R^3 \rightarrow R^3$ lapplicazione lineare dallo spazio vettoriale R^3 in se, ove R è il campo dei numeri reali, tale che $\phi(a, b, c) = (2a+b+3c, a+2b-3c, 4a+3b+3c)$. Si calcolino $\phi^{-1}(2, 1, 3)$ e $\phi^{-1}(0, 0, 0)$.

   (c) Si calcoli la dimensione di $Ker(\phi)$.

7. Si dica se la seguente matrice A è invertibile e in caso affermativo se ne calcoli l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$