# Esercizi per il corso di Probabilità e Statistica

Foglio 6: Distribuzioni congiunte

1. Si consideri un'urna contenente 3 palline numerate da 1 a 3. L'esperimento consiste nell'estrarre 2 palline senza reinserimento. Sia $X$ la variabile casuale associata al più grande dei numeri estratti e sia $Y$ la variabile casuale somma dei due numeri estratti. Trovare:
   (a) la funzione di probabilità congiunta di $X$ e $Y$;
   (b) la funzione di probabilità condizionata di Y dato $X = 3$ e la funzione di ripartizione condizionata di $Y$ dato $X = 3$;
   (c) la covarianza e la correlazione di $X$ e $Y$;
   (d) valore atteso e varianza della variabile casuale $Z = 2X + 3Y$.
   (e) $X$ e $Y$ sono indipendenti?

2. Sia data la funzione $p_{X,Y}(x, y) = k(2y + x)$, con $x = 2, 4$ e $y = 0, 1, 2$.
   (a) Determinare il valore $k$ affinché $p_{X,Y}(x, y)$ sia una funzione di probabilità congiunta.
   (b) Determinare $P(Y \geq X)$.
   (c) Calcolare i valori della funzione di ripartizione $F_{X,Y}(2, 1)$, $F_{X,Y}(4, 1)$.
   (d) Calcolare $p_{X|Y}(x|1)$.
   (e) Valutare se $X$ e $Y$ sono indipendenti.

3. Le due variabili casuali $X$ e $Y$ hanno funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = 12xy(1 - y)$, con $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$. Trovare le funzioni di densità marginali di $X$ e $Y$ e verificare se le due variabili sono indipendenti.

4. Siano $X$ e $Y$ due variabili casuali con densità congiunta $f_{X,Y}(x, y) = k$, per $0 < x < 1$ e $0 < y < x$.
   (a) Determinare la costante $k$ affinché $f_{X,Y}(x, y)$ sia una funzione di densità.
   (b) Determinare la distribuzione marginale di $X$ e la distribuzione condizionata di $X$ dato $Y = y$.
   (c) Verificare se $X$ e $Y$ sono indipendenti.

5. Siano $X$ e $Y$ due variabili casuali con funzione di densità congiunta $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}(6-x-y)I_{(0,2)}(x)I_{(2,4)}(y)$. Trovare le distribuzioni marginali di $X$ e $Y$ e la funzione di densità condizionata di $X$ dato $Y=y$, $y \in (2,4)$.

6. Uno studio dice che l'investimento in titoli di stato, rappresentato dalla v.a. $X$, e quello in azioni $Y$, hanno una distribuzione congiunta data da:

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} [1-(x+1)e^{-x}][1-(y+1)e^{-y}] & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver verificato che la definizione è ben data, calcolare la densità congiunta. Qual è la probabilità che un generico portafoglio azionario abbia un investimento in titoli di stato almeno doppio rispetto all'investimento azionario? Infine calcolare la densità marginale di $X$ e discutere l'eventuale indipendenza delle due variabili aleatorie.

7. Si consideri la seguente densità bivariata

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

definita a meno di una costante moltiplicativa $k$ che si chiede di determinare. Qual è la probabilità che $X$ sia maggiore di $Y$? Le due v.a. sono indipendenti?

8. Si consideri il vettore aleatorio $(X,Y)$ dell' esercizio precedente. Si determini la densità condizionata di $X$ rispetto a $Y=y$. Si calcoli la corrispondente funzione di ripartizione condizionata.

9. Si consideri il vettore aleatorio bivariato $(X,Y)$ con densità

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato la dipendenza tra i due componenti, si calcoli il valore atteso della v.a. $Z = XY$.

10. Si calcoli la funzione di probabilità della somma di $n$ variabili aleatorie bernoulliane indipendenti di parametro $p$.

11. Si dimostri che la densità di probabilità della somma $S$ di due v.a. aleatorie discrete $X$ e $Y$, indipendenti e con distribuzione di Poisson di parametri $\lambda_X$ e $\lambda_Y$ è ancora di Poisson con parametro $\lambda_X + \lambda_Y$.

12. Siano $X$ e $Y$ due v.a. indipendenti di Poisson con parametri $\lambda_X$ e $\lambda_Y$ . Sia $Z = X+Y$. Calcolare la funzione di probabilità e il valore atteso di $X$ dato $Z=z$. Cosa possiamo dire a riguardo?

13. Siano $X$ e $Y$ due variabili casuali tali che $(X|Y = y) \sim Bin(y, 1/3)$ e $Y$ è una variabile casuale discreta che assume i valori 1 e 2 con probabilità 1/4 e 3/4, rispettivamente.

    (a) Si determini la funzione di probabilità congiunta di $(X, Y)$.

    (b) Si calcolino la distribuzione e il valore atteso di $Y|X = 1$.

    (c) Si calcoli $\Pr(Y > X)$.