Principio d'induzione

Sia dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n \geq n_0$ un'affermazione $A(n)$, se $A(n_0)$ vera, $\forall K \in \mathbb{N}$ $K \geq n_0$ $A(K)$ vero, allora $A(K+1)$ è vera $\Rightarrow A(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$

- **Passo Base / Base dell'induzione:**
  dimostro che $A(n_0)$ è vera
- **Passo Induttivo:**
  preso $K \in \mathbb{N}$, $K \geq n_0$, se $A(K)$ è vera (ipotesi induttiva) allora $A(K+1)$ è vera per il principio di induzione, ne concludo che $A(n)$ è vera $\forall n$

Esempio:

⌜ la somma degli interi dispari compresi tra 1 e $2n-1$ è uguale a n^2 $\forall n \geq 1$ ⌟

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = (2\cdot 1-1) + (2\cdot 2-1) + \dots + (2\cdot n-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2 \qquad A(n): \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2 \text{ con } n \geq 1$$

Passo Base: $A(n_0)$ é vera?

pongo $n_0 = 1$

$$A(n_0) = A(1): \sum_{j=1}^{n_0} (2j-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$1 = 1^2$ quindi $A(n_0)$ é vera

Passo Induttivo: supponiamo che $A(K)$ sia vera (ipotesi induttiva)

$$\sum_{j=1}^{K} (2j-1) = K^2$$

$A(K+1)$ é vera?

$$A(K+1): \sum_{j=1}^{K+1} (2j-1) = \underline{(K+1)^2} \text{ é vera?}$$

$$\sum_{j=1}^{K+1} (2j-1) = \sum_{j=1}^{K} (2j-1) + (2(K+1)-1)$$

poiché per ipotesi induttiva:

$$\sum_{j=1}^{K} (2j-1) = K^2$$

posso dire che

$$\sum_{j=1}^{K+1} (2j-1) = K^2 + (2(K+1)-1)$$

$$\stackrel{!}{=} K^2 + 2K + 1 = \underline{(K+1)^2}$$

Quindi, per il principio di induzione, $A(n)$ é vera $\forall\, n \geq n_0$.