Superiormente / Inferiormente limitato

Definizione: Sia $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, con $(X, \leq)$ insieme parzialmente ordinato. A si dice superiormente limitato se $\exists$ almeno un maggiorante di A. A si dice inferiormente limitato se $\exists$ almeno un minorante di A.
A è limitato se $\exists$ almeno un minorante ed un maggiorante di A.

Massimo / Minimo

Posto: $(X, \leq)$ insieme ordinato, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $x \in X$ maggiorante di A ($a \leq x \ \forall a \in A$), $y \in X$ minorante di A ($y \leq a \ \forall a \in A$)

A ha massimo se $\exists \lambda \in A \mid a \leq \lambda \ \forall a \in A$

$$\lambda = \max A$$

A ha minimo se $\exists \mu \in A \mid \mu \leq a \ \forall a \in A$

$$\mu = \min A$$

Teorema:

Se max A / min A $\exists$, essi sono unici.

$\exists$ estremi inferiori e superiori

A ha estremo superiore in $(X, \leq)$ se l'insieme dei maggioranti di A è $\neq \emptyset$ ed ha minimo. Tale elemento, se $\exists$, si indica con sup A.
Analogamente, se l'insieme dei minoranti di A in $(X, \leq)$ $\neq 0$ ed ha massimo, allora esso è chiamato estremo inferiore di A e si indica con inf A.

Proprietà di Sup ed Inf

Posto $(X, \leq)$ insieme ordinato ed $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

SUP: $\lambda = \sup A \iff$ 1) $a \leq \lambda \ \forall a \in A$
2) $\lambda_1 \in X$, $a \leq \lambda_1 \ \forall a \in A \Rightarrow \lambda \leq \lambda_1$

INF: $\mu = \inf A \iff$ 1) $\mu \leq a \ \forall a \in A$
2) $\mu_1 \in X$, $\mu_1 \leq a \ \forall a \in A \Rightarrow \mu_1 \leq \mu$

Completezza

Definizione: un insieme ordinato $(X, \leq)$ è completo se ogni suo sottoinsieme $A \neq \emptyset$ che sia superiormente limitato ha estremo superiore

Teorema

$(X, \leq)$ ordinato e completo, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$.
Se A è inferiormente limitato, allora ha inf.

Intervalli

$a, b \in \mathbb{R}$

$]a, b[\overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ aperto

$[a, b[\overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a, b] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $\Big\}$ → semiaperto

$[a, b] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ chiuso

Intervalli illimitati

$]a, +\infty[\stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$]-\infty, a[\stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$[a, +\infty[\stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$]-\infty, a] \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$]-\infty, +\infty[\stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

Intorni aperti

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$

$B(x_0, \rho) \stackrel{def}{=}]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$

si chiama intorno aperto di x_0 di raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$
La famiglia degli intorni aperti di x_0 si denota con

$$\mathcal{U}_{x_0} \stackrel{def}{=} \{]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\mid \rho > 0 \}$$

Funzione

Definizione: una funzione da A a B è una relazione da A a B tale che

1) $\forall x \in A \; \exists y \in B \mid (x, y) \in f$
2) se $(x, y) \in f$, $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$ (univocità)

Quindi $f: A \to B$ è una relazione da A a B tale che $\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \mid (x, y) \in f$

A = dominio, B = codominio, $y = f(x)$, $f \subseteq A \times B$

$\forall x \in A \; \exists! \, y \in B \mid y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f$

Modulo o Valore Assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$. Si pone

$$|x| \stackrel{def}{=} \max\{x, -x\}$$

Si ha:
1) $x \leq |x|$ e $-x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4) $|x + y| = |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare)
5) $|-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
6) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
7) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
8) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

Principio di induzione

Sia dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n \geq n_0$ un'affermazione $A(n)$, se $A(n_0)$ vera, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$, $A(k)$ vero, allora $A(k+1)$ è vera $\Rightarrow A(n)$ vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

- **passo base**: dimostro che $A(n_0)$ è vera
- **passo induttivo**: preso $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$, se $A(k)$ è vera (ipotesi induttiva) allora $A(k+1)$ è vera per il principio di induzione, ne concludo che $A(n)$ è vera $\forall n$.

Serie geometrica

La serie geometrica è una serie del tipo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

E' il limite della successione delle somme parziali

$$\{ s_n : n \in \mathbb{N} \}$$

in cui:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots x^n$$

(somma per K da 0 a n di x^k)

notare che:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R} \iff |x| < 1$$