Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 03 settembre 2014.

# Tema A

## CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐

Codice insegnamento: ☐☐☐☐☐☐ Crediti ☐☐

Intende sostenere: Mod. 1 ☐ Mod. 2 ☐

| Attività | gg/mm/aaaa | esito |
|---|---|---|
| Modulo 1 | ☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐ | ☐☐/30 |
| Modulo 2 | ☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐ | ☐☐/30 |
| Test OFA | ☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐ | superato non sup. |

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

**Test 1** *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} x/\log(x), & x > 0, \\ 0, & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

**Domanda numero 1**: *Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$ (laddove il dominio è illimitato).*

**Domanda numero 2**: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

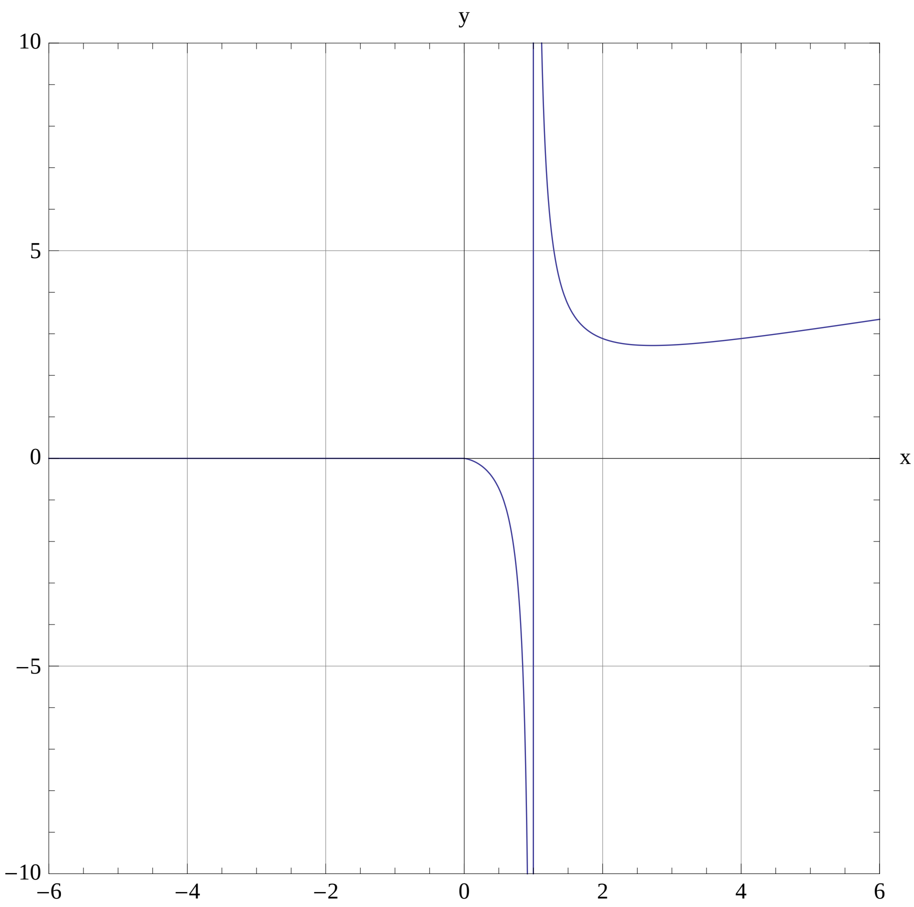
**Domanda numero 3**: *Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

**Domanda numero 4**: *Calcolare*

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad a = -1, b = 1.$$

Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
Non vi sono punti di discontinuità.
Punti di singolarità: $x = 1$.
$$\lim_{x\to1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1-} f(x) = -\infty.$$
- Non vi sono asintoti obliqui.
Asintoto orizzontale per $x \to -\infty$: $y = 0$.
Asintoto verticale: $x = 1$.
- Derivata
$$f'(x) = \begin{cases} 1/\log(x) - 1/\log^2(x) = (\ln x - 1)/\ln^2 x, & x > 0, \\ 0, & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$
Vi sono infiniti punti di stazionarietà, quelli della semiretta $y < 0$, piú il punto $x = e$, che è di minimo.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2-\log(x)}{x\log^3(x)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Abbiamo $y''(e^2) = 0$, quindi $x = e^2$ è un punto di flesso.
- Estremo superiore $= +\infty$. Estremo inferiore $= -\infty$. Massimo assoluto $=$ non esiste. Minimo assoluto $=$ non esiste.
- Grafico della funzione.




- Abbiamo:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} (x/\log(x))dx = -\infty.$$

**Test 2 Domanda numero 5**: *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo $T$. Provare che la funzione $f(2x-3)$ ha periodo $T/2$.*

Risoluzione.
Ricordiamo che una funzione $f$ è periodica di periodo $T$ se e solo se $f(x) = f(x+kT)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Consideriamo la funzione $g(x) = f(2x-3)$.
Abbiamo

$$g(x+kT/2) = f(2(x+kT/2)-3) =$$
$$f(2x+kT-3) = f(2x-3+kT) =$$
$$f(2x-3) = g(x).$$

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

---

**Test 3** *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = \frac{1}{4}\sqrt{7}\left(7\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{2}$$

**Domanda numero 6**: *Determinarne la soluzione generale.*

*Sia* $x_0 = -\pi$.
**Domanda numero 7**: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(x_0) = -\sqrt{7}$, $y'(x_0) = 0$, *e schizzarne un grafico.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (1/2)(-1 \pm \iota\sqrt{7})$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(-x/2)(c_1\cos(\sqrt{7}x/2) + c_2\sin(\sqrt{7}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\sin(\sqrt{7}x/2) + B\cos(\sqrt{7}x/2)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{2A + 7B - 2\sqrt{7} = 0, 7A - 2B - 7\sqrt{7} = 0\},$$

ossia $A = \sqrt{7}$, $B = 0$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = \sqrt{7}\sin(x/2).$$

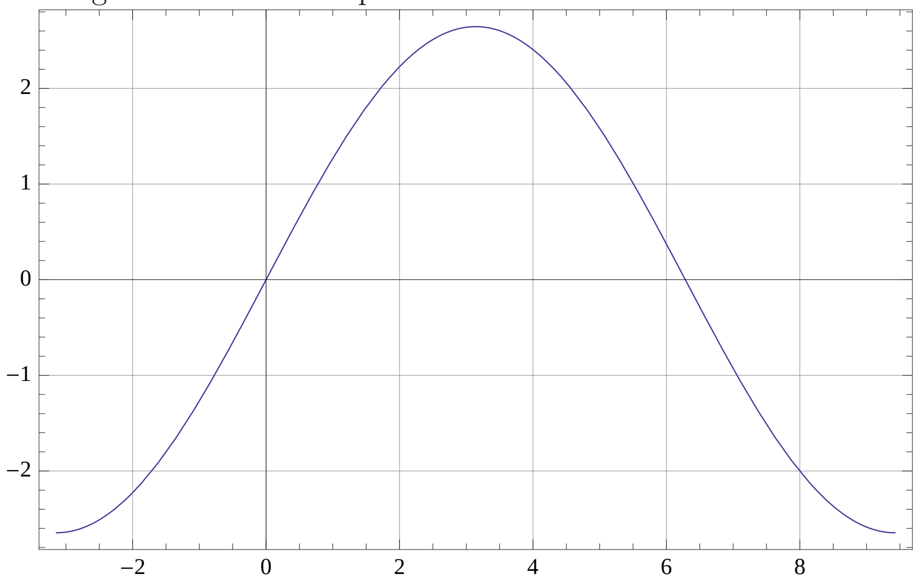
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(x/2)(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)) + \sqrt{7}\sin(x/2). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \sqrt{7}\sin(x/2).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.

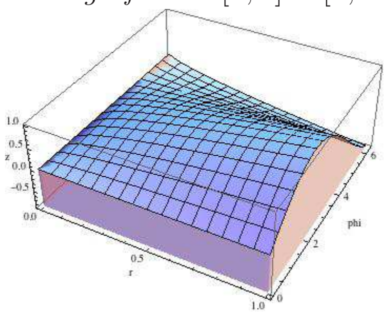


Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

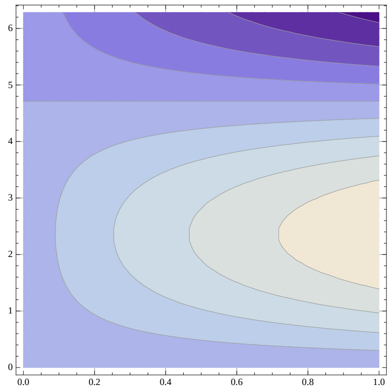
**Test 4** *Consideriamo la funzione*

$$f(r,\phi) = r^{2/3}\sin((2/3)\phi), \quad r \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi.$$

*Per aiutarvi, ecco uno schizzo del suo grafico in* $[0,1] \times [0,2\pi]$*:*




*e di alcune linee di livello:*




**Domanda numero 8***: Determinarne il dominio.*

*Sia*

$$\bar{r} = 1, \quad \bar{\phi} = 2\pi.$$

**Domanda numero 9***: Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(\bar{r},\phi)$*.*

**Domanda numero 10***: Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(r,\bar{\phi})$*.*

**Domanda numero 11**: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(r,\phi) = 0, 4/10, -4/10$.

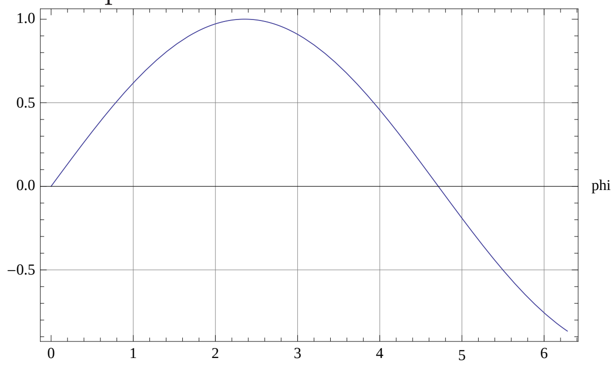
**Domanda numero 12**: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

**Domanda numero 13**: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

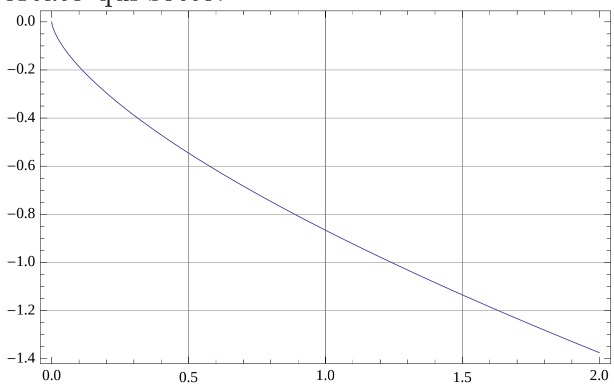
Risoluzione.

- Il dominio è:
$$D = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$
La funzione è differenziabile in $D \backslash \{(0,0)\}$.

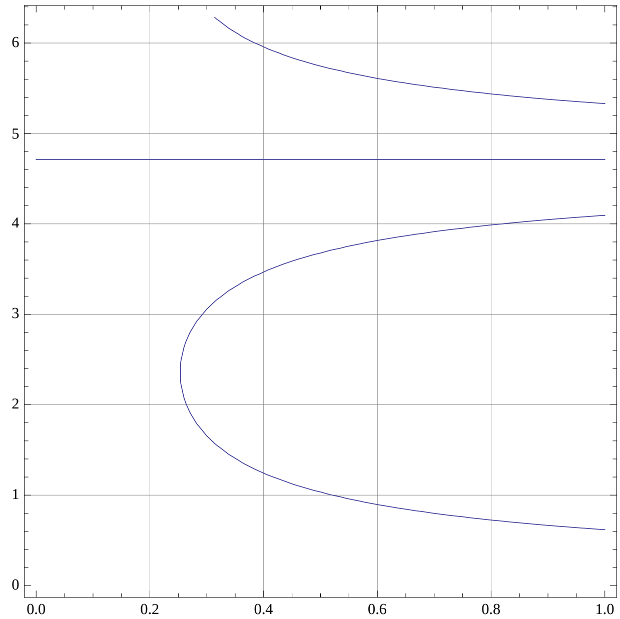
- La funzione lungo la retta $r = \bar{r}$ è
$$z = f(\bar{r}, \phi) = \sin\left(\frac{2\phi}{3}\right).$$
Il suo grafico è riportato qui sotto.




- La funzione ristretta alla retta $\phi = \bar{\phi}$ è
$$z = f(r, \bar{\phi}) = r^{2/3} \sin(4\pi/3) = -\frac{1}{2} r^{2/3} \sqrt{3}.$$
Il suo grafico è riportato qui sotto.




- Le curve di livello, $z = 0, 4/10, -4/10$ sono schizzate qui sotto.



- Gradiente:

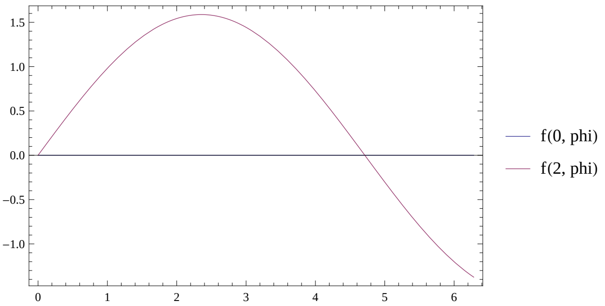
$$\nabla f = \left( \frac{2\sin\left(\frac{2\phi}{3}\right)}{3\sqrt[3]{r}}, \frac{2}{3} r^{2/3} \cos\left(\frac{2\phi}{3}\right) \right).$$

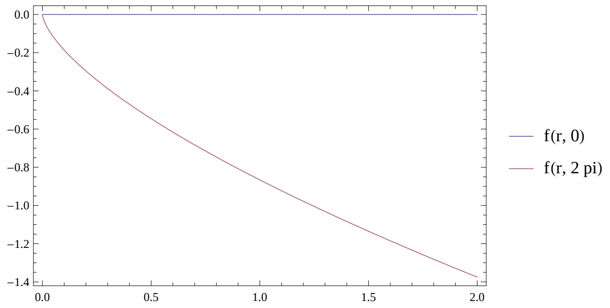
- Matrice Hessiana:

$$M(r,\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sin\left(\frac{2\phi}{3}\right)}{9r^{4/3}} & \frac{4\cos\left(\frac{2\phi}{3}\right)}{9\sqrt[3]{r}} \\ \frac{4\cos\left(\frac{2\phi}{3}\right)}{9\sqrt[3]{r}} & -\frac{4}{9} r^{2/3} \sin\left(\frac{2\phi}{3}\right). \end{pmatrix}$$

  Punti di stazionarietà: non ve ne sono nel dominio $D$.

- Non vi sono punti di stazionarietà interni al dominio. I grafici delle restrizioni di $f$ su $r = 0$, $r = 2$, $\phi = 0$, $\phi = 2\pi$, sono



Lungo le rette $\phi = \bar{\phi} = \text{cost.}$, $f(r, \bar{\phi}) = \cos(2\bar{\phi}/3)r^{2/3}$ e quando $\cos(2\bar{\phi}/3) > 0$, abbiamo

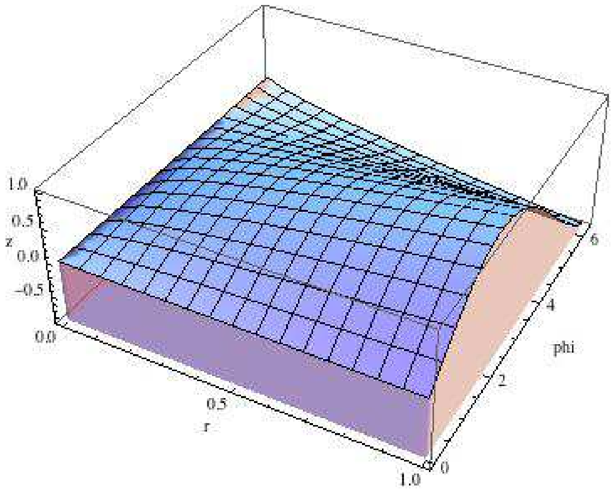
$$\lim_{r \to +\infty} f(r, \bar{\phi}) = +\infty.$$

D' altronde quando $\cos(2\bar{\phi}/3) < 0$, abbiamo

$$\lim_{r \to +\infty} f(r, \bar{\phi}) = -\infty.$$

Quindi non vi è un massimo assoluto, né un minimo assoluto. L' estremo superiore è $+\infty$. L' estremo inferiore è $-\infty$.

- Schizzo della superficie (non richiesto)



**Test 5** *Sia*

$$I = \int\int_R (x+y)dxdy, \quad R = \{(x,y) : -1 \leq y \leq x^2/3, -1 \leq x \leq 3\} \tag{5}$$

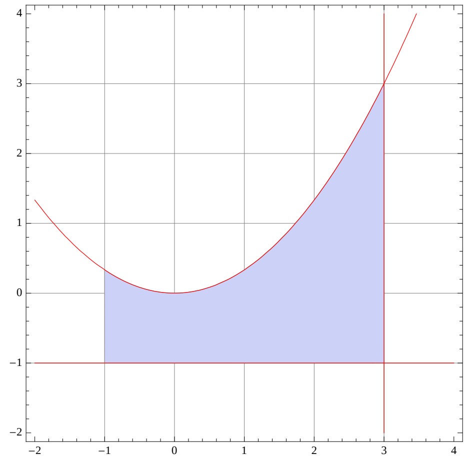
**Domanda numero 14**: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

**Domanda numero 15**: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione in coordinate polari.*

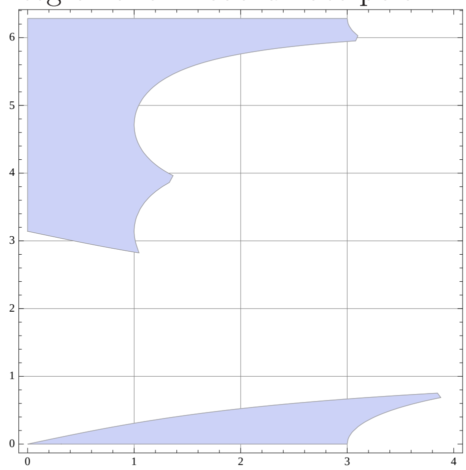
**Domanda numero 16**: *Calcolare il valore dell' integrale.*

Risoluzione.

- Grafico del dominio di integrazione.



- Grafico del dominio di integrazione in coordinate polari.



Notate che in questo caso la rappresentazione del dominio di integrazione in coordinate polari è molto complicata e inadatta al calcolo dell' integrale.

- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int\int_R (x+y)\,dydx = \int_{-1}^{3}\int_{-1}^{x^2/3}(x+y)dydx =$$
$$\int_{-1}^{3}(\frac{x^4}{18}+\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2})dx = 512/45.$$

# Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Modulo 2, *** fine testo ***

Università *Ca' Foscari* Venezia

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 03 settembre 2014.

# Tema B

# CORREZIONE

Nome

Cognome

Matricola Aula Posto

Codice insegnamento: Crediti

Intende sostenere: Mod. 1 Mod. 2

| Attività | gg/mm/aaaa | esito |
|---|---|---|
| Modulo 1 | / / | /30 |
| Modulo 2 | / / | /30 |
| Test OFA | / / | superato non sup. |

Barrare le caselle relative alla situazione. Lasciare in bianco gli eventuali campi privi di valore.

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle.** Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Inizio Modulo 1

**Test 1** *Consideriamo la funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} x/\log(-x), & x < 0, \\ 0, & \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

**Domanda numero 1**: *Determinarne il dominio, i limiti nei punti in cui non è continua o singolare e per $x \to \pm\infty$ (laddove il dominio è illimitato).*

**Domanda numero 2**: *Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

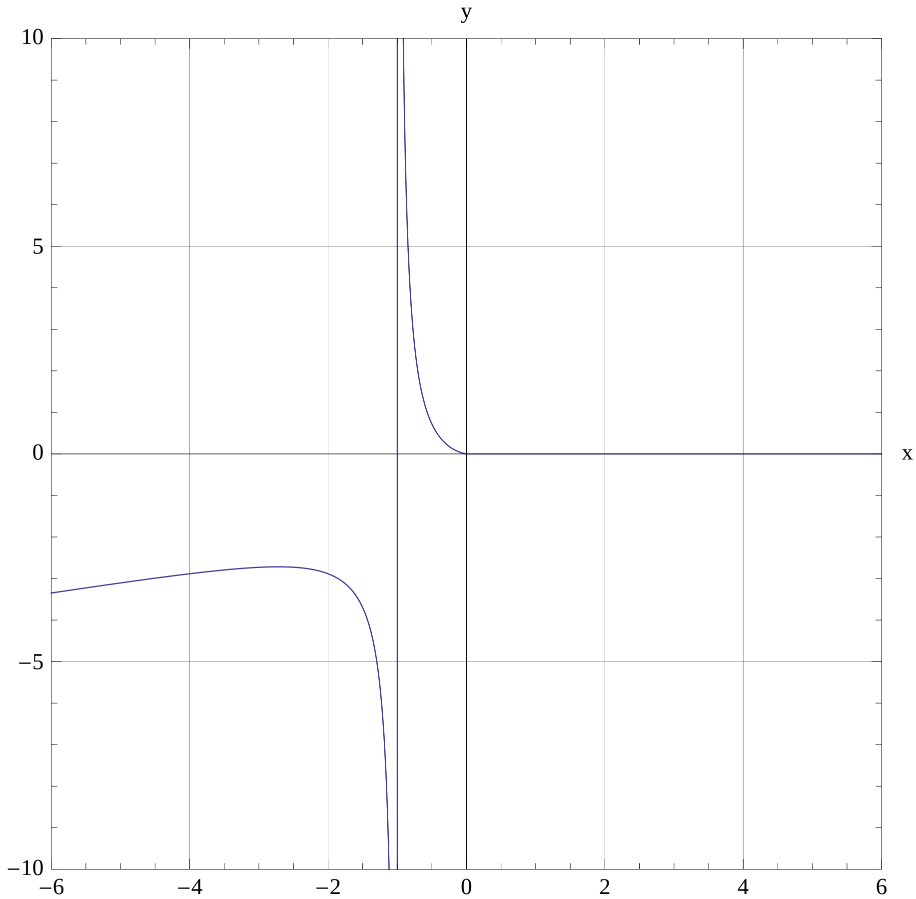
**Domanda numero 3**: *Studiare asintoti, punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

**Domanda numero 4**: *Calcolare*

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad a = -1, b = 1.$$

Risoluzione.

- $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.
- La funzione non è né dispari, né pari.
- Limiti notevoli:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
Non vi sono punti di discontinuità.
Punti di singolarità: $x = -1$.
$$\lim_{x\to-1+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty.$$
- Non vi sono asintoti obliqui.
Asintoto orizzontale per $x \to +\infty$: $y = 0$.
Asintoto verticale: $x = -1$.
- Derivata
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\log(-x)-1}{\log^2(-x)}, & x < 0, \\ 0, & \mathit{altrimenti}. \end{cases}$$
Vi sono infiniti punti di stazionarietà, quelli della semiretta $y > 0$, piú il punto $x = -e$, che è di massimo relativo.
- La derivata seconda è:
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2-\log(-x)}{x\log^3(-x)}, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$
- Estremo superiore $= +\infty$. Estremo inferiore $= -\infty$. Massimo assoluto = non esiste. Minimo assoluto = non esiste.
- Grafico della funzione.




- Abbiamo:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx =$$
$$\int_{-1}^{0} (x/\log(-x))dx = +\infty.$$

**Test 2 Domanda numero 5**: *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo $T$. Provare che la funzione $f(4x-1)$ ha periodo $T/4$.*

Risoluzione.
Ricordiamo che una funzione $f$ è periodica di periodo $T$ se e solo se $f(x) = f(x+kT)$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
Consideriamo la funzione $g(x) = f(4x-1)$.
Abbiamo

$$g(x+kT/4) = f(4(x+kT/4)-1) =$$
$$f(4x+kT-1) = f(4x-1+kT) =$$
$$f(4x-1) = g(x).$$

Fine Modulo 1, inizio Modulo 2

---

**Test 3** *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y''(x) + y'(x) + 2y(x) = 27\sin(2x) - 36\cos(2x). \tag{2}$$

**Domanda numero 6***: Determinarne la soluzione generale.*

*Sia* $x_0 = -\pi$.
**Domanda numero 7***: Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(x_0) = 0$*,* $y'(x_0) = 6$*, e schizzarne un grafico.*

Risoluzione.
L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = (1/2)(-1 \pm \iota\sqrt{7})$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(-x/2)(c_1\cos(\sqrt{7}x/2) + c_2\sin(\sqrt{7}x/2)) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\sin(2x) + B\cos(2x)$ si ottiene risolvendo il sistema

$$\{2(A - B + 18) = 0, -2(A + B) - 27 = 0\},$$

ossia $A = -63/4$, $B = 9/4$. Otteniamo quindi

$$\bar{y} = \frac{9}{4}(\cos(2x) - 7\sin(2x)).$$

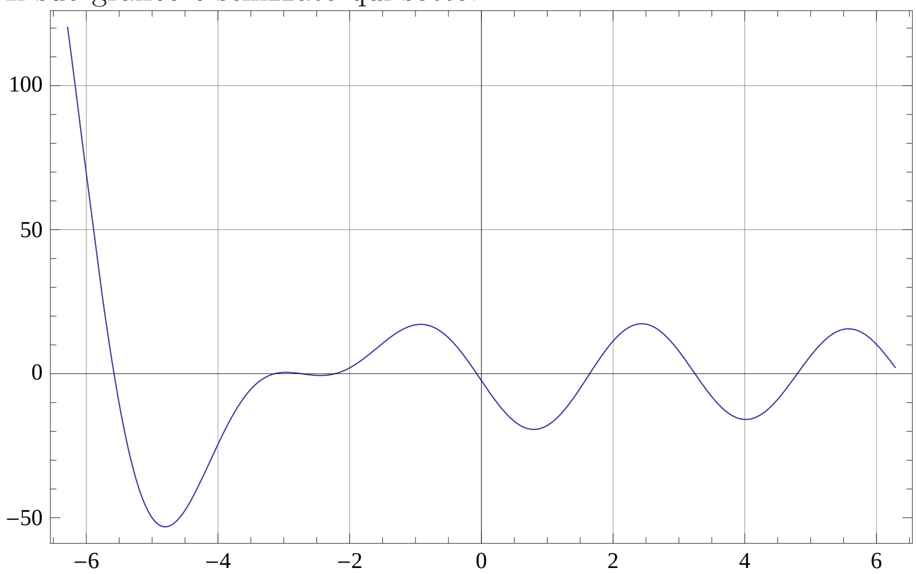
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)\right) + \frac{9}{4}(\cos(2x) - 7\sin(2x)). \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \frac{9}{4}(\cos(2x) - 7\sin(2x)) + \frac{3}{28}e^{-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}}\left(97\sqrt{7}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}(x+\pi)\right) - 21\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}(x+\pi)\right)\right).$$

Il suo grafico è schizzato qui sotto.

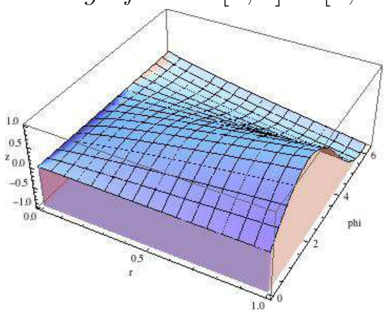


Fine parte per nove crediti, continua il Modulo 2

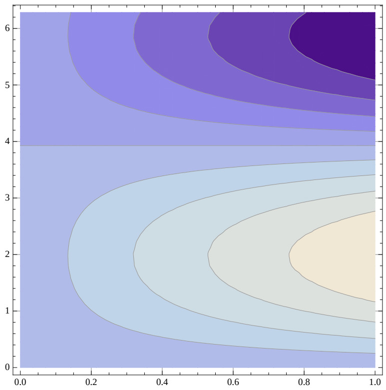
**Test 4** *Consideriamo la funzione*

$$f(r,\phi) = r^{4/5}\,\sin((4/5)\phi), \quad r \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

*Per aiutarvi, ecco uno schizzo del suo grafico in* $[0,1] \times [0,2\pi]$*:*




*e di alcune linee di livello:*



**Domanda numero 8***: Determinarne il dominio.*

*Sia*

$$\bar{r} = 1, \quad \bar{\phi} = 2\pi.$$

**Domanda numero 9***: Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(\bar{r},\phi)$*.*

**Domanda numero 10***: Studiare e schizzare il grafico di* $z = f(r,\bar{\phi})$*.*

**Domanda numero 11**: *Studiare e schizzare le curve di livello* $f(r, \phi) = -2/10, 0, 2/10$.

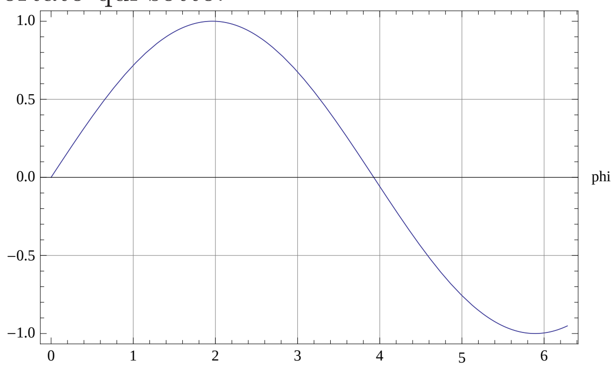
**Domanda numero 12**: *Calcolare il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione.*

**Domanda numero 13**: *Determinarne i punti di stazionarietà e classificarli.*

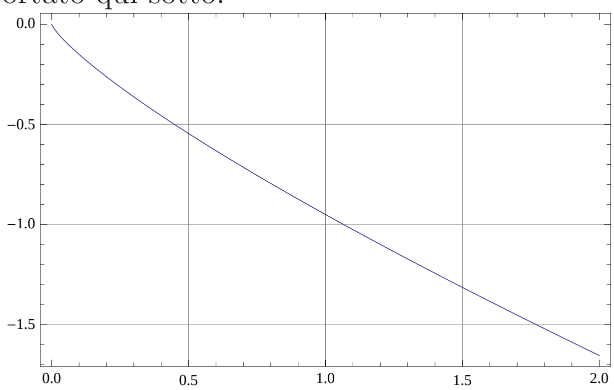
Risoluzione.

- Il dominio è:
$$D = \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$
La funzione è differenziabile in $D \backslash \{(0,0)\}$.

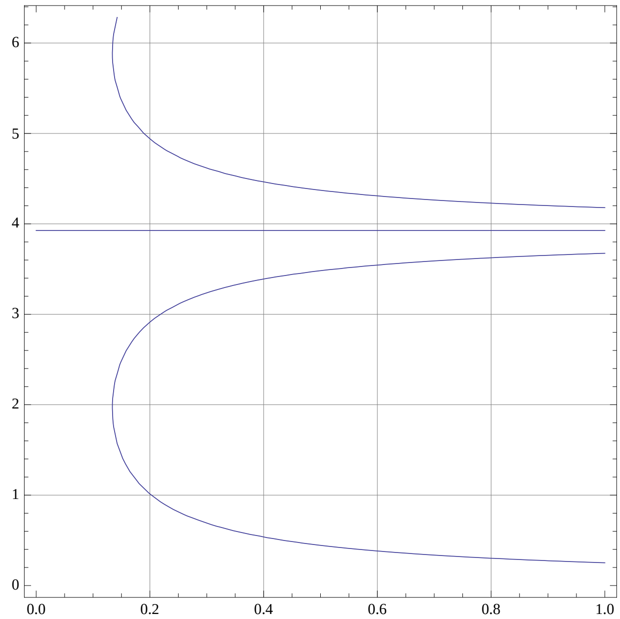
- La funzione lungo la retta $r = \bar{r}$ è
$$z = f(\bar{r}, \phi) = \sin\left(\frac{4\phi}{5}\right).$$
Il suo grafico è riportato qui sotto.




- La funzione ristretta alla retta $\phi = \bar{\phi}$ è
$$z = f(r, \bar{\phi}) = -r^{4/5}\sin(8\pi/5) = -r^{4/5}\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}.$$
Il suo grafico è riportato qui sotto.




- Le curve di livello, $z = -0.2, 0, 0.2$ sono schizzate qui sotto.




- Gradiente:

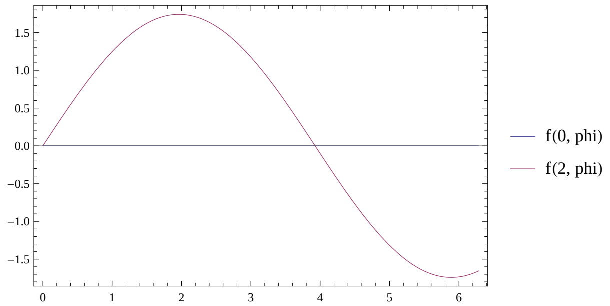
$$\nabla f = \left( \frac{4 \sin\left(\frac{4\phi}{5}\right)}{5\sqrt[5]{r}}, \frac{4}{5} r^{4/5} \cos\left(\frac{4\phi}{5}\right) \right).$$

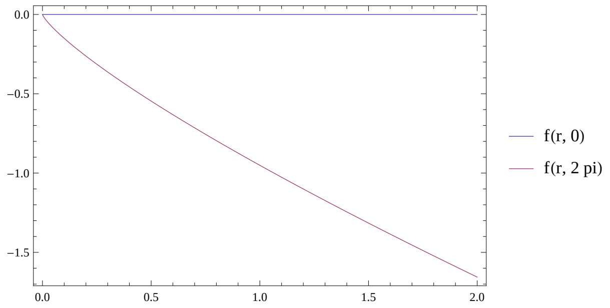
- Matrice Hessiana:

$$M(r, \phi) = \begin{pmatrix} -\frac{4\sin\left(\frac{4\phi}{5}\right)}{25 r^{6/5}} & \frac{16\cos\left(\frac{4\phi}{5}\right)}{25\sqrt[5]{r}} \\ \frac{16\cos\left(\frac{4\phi}{5}\right)}{25\sqrt[5]{r}} & -\frac{16}{25} r^{4/5} \sin\left(\frac{4\phi}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Punti di stazionarietà: non ve ne sono nel dominio $D$.

- Non vi sono punti di stazionarietà interni al dominio. I grafici delle restrizioni di $f$ su $r = 0$, $r = 2$, $\phi = 0$, $\phi = 2\pi$, sono



Lungo le rette $\phi = \bar{\phi} = \text{cost.}$, $f(r, \bar{\phi}) = \cos(4\bar{\phi}/5) r^{4/5}$ e quando $\cos(4\bar{\phi}/5) > 0$, abbiamo

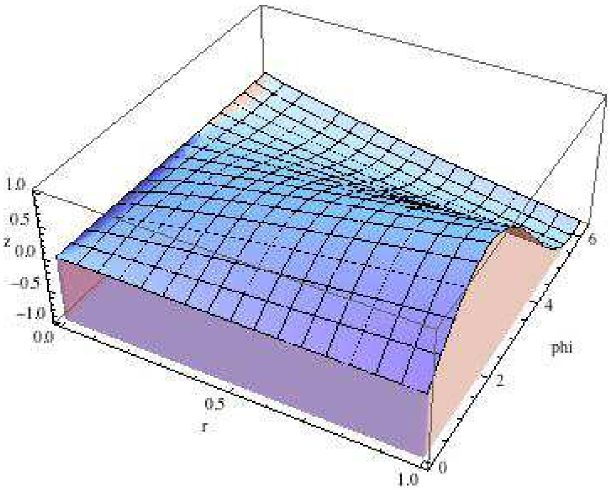
$$\lim_{r \to +\infty} f(r, \bar{\phi}) = +\infty.$$

D' altronde quando $\cos(4\bar{\phi}/5) < 0$, abbiamo

$$\lim_{r \to +\infty} f(r, \bar{\phi}) = -\infty.$$

Non vi è un massimo assoluto, né un minimo assoluto. L' estremo superiore è $+\infty$. L' estremo inferiore è $-\infty$.

- Schizzo della superficie (non richiesto)



**Test 5** *Sia*

$$I = \int\int_R (x+y)dxdy, \quad R = \{(x,y) : x^2/3 \leq y \leq 3, -1 \leq x \leq 3\} \tag{5}$$

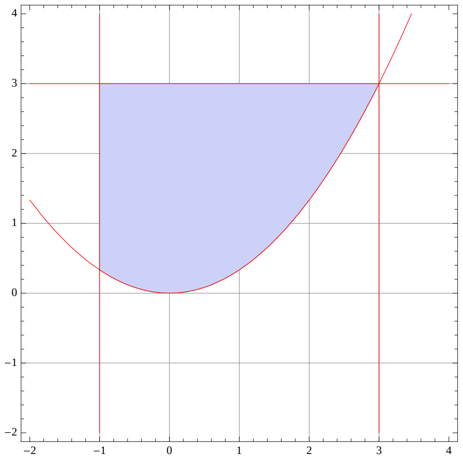
**Domanda numero 14**: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

**Domanda numero 15**: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione in coordinate polari.*

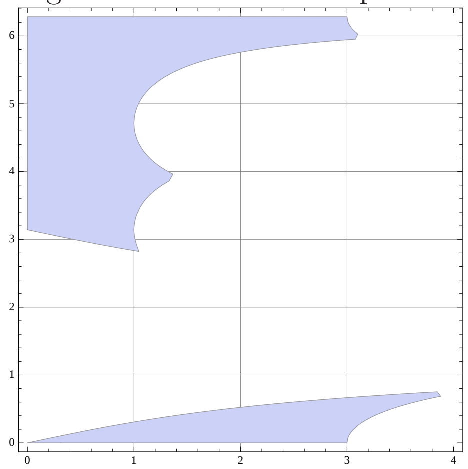
**Domanda numero 16**: *Calcolare il valore dell' integrale.*

Risoluzione.

- Grafico del dominio di integrazione.




- Grafico del dominio di integrazione in coordinate polari.




Notate che in questo caso la rappresentazione del dominio di integrazione in coordinate polari è molto complicata e inadatta al calcolo dell' integrale.

- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int\int_R (x+y)\, dydx = \int_{-1}^{3}\int_{x^2/3}^{3} (x+y)dydx =$$
$$\int_{-1}^{3} (-\frac{x^4}{18} - \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{9}{2})dx = 928/45.$$

# Riferimenti bibliografici

[1] M. Bertsch, R. Dal Passo, e L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw–Hill Italia, Milano, 2011.

[2] G. Naldi, L. Pareschi, e G. Aletti, *Calcolo differenziale e algebra lineare*, McGraw-Hill Italia, Milano, 2012.

Fine Modulo 2, *** fine testo ***