

Calcolabilità e linguaggi formali

Compito con soluzione3

Esercizio 1

Un programma si aspetta in input una sequenza non banale di stringhe decimali non banali. Ciascuna è racchiusa tra parentesi quadre e non vi sono spaziature superflue.

Es: $[1052][41][0]$ oppure $[903] \dots$

- (a) dare una grammatica per descrivere l'input del programma.
- (b) classificare la grammatica data.
- (c) classificare il linguaggio in input. Se il linguaggio è tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente. Se il linguaggio è tipo 2, dimostrare tramite il pumping lemma tipo 3 che non è un linguaggio regolare.

Soluzione

- (a) Diamo una grammatica per l'input del programma. Le produzioni sono:
 $S \rightarrow [X][X]S$
 $X \rightarrow 0| \dots |9|0X| \dots |9X$
- (b) La grammatica è tipo 2.
- (c) Il linguaggio in input è tipo 3 (regolare). Infatti possiamo descriverlo con un'espressione regolare: sia $R = (0 + \dots + 9)(0 + \dots + 9)^*$, allora il linguaggio in input è $L = [R]([R])^*$

Esercizio 2

- (a) Dare la definizione formale di automa finito deterministico e di automa finito non deterministico.
- (b) Dare un esempio di automa finito deterministico e di uno non deterministico.

Esercizio 3

Applicare i teoremi di Rice all'insieme $I = \{x : \text{dom}(\phi_x) \text{ è finito}\}$.

Soluzione

L'insieme I rispetta le funzioni perché $\phi_x = \phi_y$ implica $\text{dom}(\phi_x) = \text{dom}(\phi_y)$. Allora i domini sono o entrambi finiti oppure entrambi infiniti. $I \neq \emptyset$ perché i programmi della funzione f_\emptyset stanno in I . $\bar{I} \neq \emptyset$ perché i programmi della funzione identica stanno in \bar{I} . Dal primo teorema di Rice segue che I non è semidecidibile. \bar{I} non è decidibile per Rice1, mentre \bar{I} non è semidecidibile per Rice3.

Esercizio 4

Enunciare e dimostrare il secondo teorema di Rice.

Soluzione

Ricordiamo che, se $f, g : N \rightarrow N$ sono funzioni parziali, allora $f \leq g$ sse $\text{grafico}(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$ è contenuto o uguale a $\text{grafico}(g) = \{(x, y) : y = g(x)\}$.

Teorema. Sia I un insieme che rispetta le funzioni. Se esistono due funzioni calcolabili f e g tali che

1. $\{x : \phi_x = f\} \subseteq I$;
2. $\{x : \phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$;
3. $f \leq g$

allora I non è semidecidibile.

Prova. Come prima cosa osserviamo che $f \neq g$ (altrimenti $I \cap \bar{I} \neq \emptyset$!). Proviamo a ridurre \bar{K} ad I . Definiamo la seguente funzione h .

$$h(x, y) = \begin{cases} g(y), & \text{if } x \in K \text{ oppure } y \in \text{dom}(f) \\ \uparrow, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nota che

(a) Se $x \in K$, allora $f(x, y) = g(y)$ per ogni y .

(b) Se $y \in \text{dom}(f)$, allora $h(x, y) = f(y)$ per ogni x .

La funzione h è calcolabile: Consideriamo tre programmi P_f , P_g e P_K tali che (i) P_f calcola f ; (ii) P_g calcola g ; (iii) P_K semidecide K . Facciamo partire in parallelo l'esecuzione di P_f con input y e l'esecuzione di P_K con input x , per verificare se $x \in K$ oppure $y \in \text{dom}(f)$.

(1) Termina prima P_f , da cui $y \in \text{dom}(f)$ e $f(y) \in N$. Allora interrompiamo l'esecuzione di P_K con input x . Il risultato è $h(x, y) = f(y) = g(y)$ (ricordiamo che $f \leq g$!);

(2) Termina prima P_K . Allora $x \in K$, interrompiamo l'esecuzione di P_f e facciamo partire il programma P_g con input y . Se quest'ultimo termina allora $h(x, y) = g(y)$, altrimenti $h(x, y) = \uparrow$.

(3) Non terminano P_f con input y e P_K con input x . Allora $h(x, y) = \uparrow$.

Applichiamo il teorema del parametro ad h per ottenere una funzione calcolabile totale s tale che

$$\phi_{s(x)}(y) = h(x, y).$$

Proviamo che s riduce \bar{K} ad I .

$$\begin{aligned} x \in \bar{K} &\Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = g(y) \text{ per ogni } y \in \text{dom}(f) \text{ e } \phi_{s(x)}(y) = \uparrow \text{ per ogni } y \notin \text{dom}(f) \\ &\Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = f(y) \text{ per ogni } y \text{ (perché } f(y) = g(y) \text{ per ogni } y \in \text{dom}(f)) \Rightarrow s(x) \in I \end{aligned}$$

Inoltre,

$$x \in K \Rightarrow \phi_{s(x)}(y) = g(y) \text{ per ogni } y \Rightarrow s(x) \in \bar{I}$$

Esercizio 5

Definire per ricorsione primitiva la seguente funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$. Determinare le funzioni g e h associate allo schema di ricorsione primitiva $f = \text{REC}(g, h)$.

Soluzione

$f(x, 0) = x^2$ e $f(x, y + 1) = x^2 + (y + 1)^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 = f(x, y) + 2y + 1$. Allora abbiamo $g(x) = x^2$ e $h(x, y, z) = z + 2y + 1$.