Sapienza Università di Roma

Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica

Appunti dalle lezioni di

Ricerca Operativa

(Cenni sui Grafi)

sede di Latina

Giovanni Fasano

fasano@unive.it

http://venus.unive.it/~fasano

anno accademico 2013-2014

1

Problemi strutturati

1.1 INTRODUZIONE

Nei precedenti capitoli sono stati esaminati problemi di Programmazione Lineare e problemi di Programmazione Lineare Intera che abbiamo visto essere di fondamentale importanza all'interno della Ricerca Operativa in quanto un elevatissimo numero di problemi reali può essere formulato in termini di problemi di Programmazione Lineare o di Programmazione Lineare Intera. Nelle varie analisi effettuate non si è fino ad ora mai tenuto conto dell'eventualità che alcuni problemi applicativi presentino una loro *struttura intrinseca*, cioè delle caratteristiche particolari che possono consentire di formulare il problema in modi alternativi tali da evidenziare informazioni ulteriori sul problema derivanti da questa sua forma strutturata.

Nel caso in cui un problema applicativo o, piú in generale, una classe di problemi presenti una struttura particolare, è naturale pensare che sia possibile sviluppare tecniche specifiche di soluzione che sfruttando la particolare struttura diano luogo ad algoritmi "ad hoc" che risultano molto efficienti.

Lo scopo di questo capitolo è quello di descrivere brevemente alcune classi modelli strutturati, facendo uso di uno strumento fondamentale rappresentato dai *grafi*. Riportiamo perciò di seguito alcune definizioni fondamentali della teoria dei grafi che permetteranno di formulare i cosiddetti problemi di *ottimizzazione su reti*. In particolare accenneremo brevemente ai *modelli di flusso a costo minimo* ed evidenzieremo come alcuni problemi già formulati in termini di problemi di Programmazione Lineare possono essere formulati in modo alternativo come problemi di ottimizzazione su reti. Forniremo poi la formulazione di due importanti classi di problemi (*il problema del massimo flusso* e *il problema del cammino minimo*) e, a titolo di esempio, mostreremo come sia possibile definire un algoritmo specifico nel caso del problema del cammino minimo su grafi aciclici. Concluderemo il capitolo accennando ad un esempio di applicazione di quanto visto, nella programmazione delle attività in progetti di grandi dimensioni (*tecniche reticolari di programmazione delle attività - Critical Path Method*).

1.2 DUE ESEMPI "STORICI" DI MODELLI STRUTTURATI

In questo paragrafo verranno forniti due esempi che sono storicamente molto importanti e che dovrebbero fornire primi esempi di problemi strutturati che possono essere efficientemente modellati utilizzando una struttura particolare che, come vedremo, prenderà il nome di grafo.

Un primo esempio si riconduce alle origini storiche della teoria dei grafi. Infatti, esso è dovuto ad Eulero, grande matematico vissuto nel 1700, al quale viene attribuita l'introduzione del concetto di grafo. Egli viveva nella città tedesca di Könisberg la quale si trova alla confluenza di due fiumi e comprende un isolotto. La città risultava cosìdivisa in quattro parti corrispondenti alle quattro regioni di terra che si venivano a formare (Figura 1.2.1): le due sponde (indicate con **A** e **B**), l'isolotto (indicato con **C**) e la parte di terra che si trova tra i due fiumi prima della confluenza (indicata con **D**). Queste varie parti della città erano collegate da sette ponti come rappresentato nella Figura 1.2.1. Il problema che Eulero si

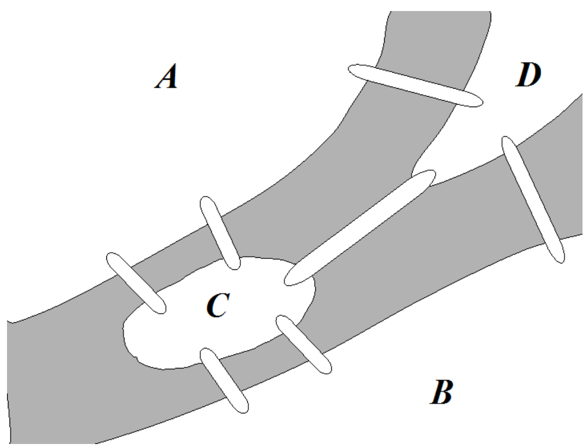

Fig. 1.2.1 I ponti della città di Könisberg

poneva era quello di tracciare un percorso che, partendo da una qualsiasi delle quattro zone della città, attraversi tutti i sette ponti una ed una sola volta tutti i ponti ritornando alla fine al punto di partenza. Per risolvere questo problema, Eulero creò quello che oggi chiameremo un "modello matematico" del problema in esame facendo in modo che tutte le informazioni inerenti al problema fossero incluse nel modello stesso, e tralasciando al tempo stesso quelle informazioni che non avevano rilevanza ai fini della risoluzione del problema. A tale scopo, Eulero associò al problema una rappresentazione schematica come rappresentato nella Figura 1.2.2: ciascuna delle quattro zone della città è rappresentata da

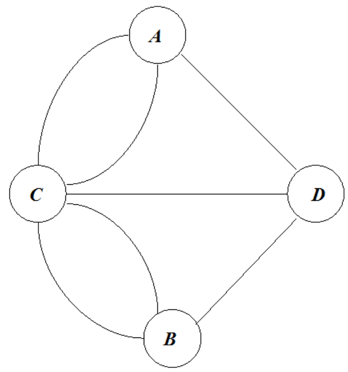

Fig. 1.2.2 Rappresentazione del problema ponti della città di Könisberg

un cerchio, e ciascun ponte da una linea. Questa rappresentazione è sufficiente a studiare il problema considerato; infatti essa contiene tutti gli elementi che caratterizzano il problema. È importante osservare che questa rappresentazione riflette perfettamente quanto osservato nel Capitolo 1 sulla costruzione di un modello matematico: infatti in questa rappresentazione sono incluse solo le informazioni inerenti al problema in esame mentre vengono volutamente trascurate informazioni, come la lunghezza dei ponti, la loro esatta posizione, la largezza dei fiumi, etc., che risulterebbero del tutto inessenziali ai fini della risoluzione del problema sopra enunciato. Come abbiamo avuto piú volte modo di osservare, un modello matematico che rappresenti in maniera efficace una situazione reale deve avere questa capacità di estrarre dalla realtà le caratteristiche essenziali di un problema evidenziando cosìsolo quelle di interesse. Questa rappresentazione del problema riportata nella Figura 1.2.2 è una struttura matematica ben definita e, come vedremo nel prossimo paragrafo, prenderà il nome di grafo. Senza entrare nei dettagli, ricordiamo che Eulero dimostrò che il problema dei ponti di Könisberg non ammette soluzione e quindi non era possibile effettuare una passeggiata che attraversando tutti i ponti una sola volta tornasse al punto di partenza. Eulero inoltre fornìuna caratterizzazione dei grafi per i quali è possibile tracciare questo circuito (grafi euleriani).

Prima di introdurre formalmente i grafi, esaminiamo un altro esempio "storico"; si tratta di un problema ben noto con il nome di *problema dei quattro colori*. L'enunciato del problema è molto semplice: si tratta di determinare il numero minimo di colori necessari per colorare le regioni di una qualsiasi carta geografica in modo tale che due ragioni adiacenti abbiano sempre colori diversi. Un esempio di colorazione di questo tipo fatta con quattro colori è riportato nella

Figura 1.2.3. Anche in questo caso, siamo interessati a costruire un modello

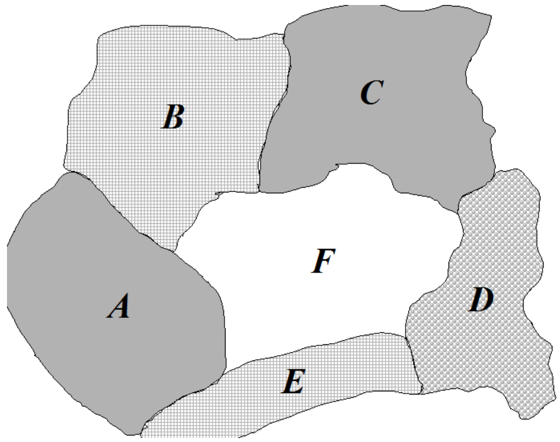

Fig. 1.2.3 Esempio di colorazione con quattro colori

matematico che permetta di studiare il problema considerato. È necessario, cioè rappresentare il problema con strumenti matematici adatti ad evidenziare le caratteristiche peculiari del problema stesso. Analogamente all'esempio precedente, una semplice rappresentazione può essere fornita associando un cerchio ad ogni regione della mappa e collegando con una linea due cerchi corrispondenti a due regioni adiacenti, come rappresentato nella Figura 1.2.4. Anche questa

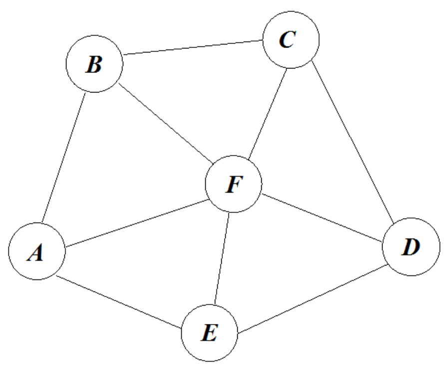

Fig. 1.2.4 Rappresentazione del problema dei quattro colori

rappresentazione trascura elementi non essenziali a studiare il problema come, ad esempio, l'estensione delle regioni, la forma dei loro confini, etc., e mette in evidenza esclusivamente gli aspetti necessari ad analizzare il problema. La struttura utilizzata in questa rappresentazione è la medesima dell'esempio precedente e, come vedremo del prossimo paragrafo, prende nome di grafo.

Per dare qualche informazione storica ricordiamo solo che una prima formulazione di questo problema risale alla metà del 1800 e per molti anni è stato ipotizzato che fosse possibile colorare una mappa in modo da non avere regioni adiacenti con lo stesso colore, utilizzando solamente *quattro colori*, ma non era stata data una dimostrazione matematica di ciò; questo è il motivo per cui, per molti decenni, questa possibilità era diffusa come la cosiddetta *"congettura dei quattro colori"*. Senza entrare nei dettagli storici dei vari tentativi di dimostrazione, ricordiamo solamente che si è dovuto aspettare il 1976 per avere una dimostrazione di quella che per decenni non poteva essere considerata niente di piú di una congettura.

Questi due esempi "storici" ora brevemente riassunti, mettono in evidenza come due problemi anche molto diversi fra di loro possono essere "modellati" mediante una stessa struttura che come vedremo rappresenta uno strumento essenziale e molto flessibile per la rappresentazione e la soluzione di moltissimi problemi provenienti da applicazioni reali: si tratta dei *grafi*.

1.3 GRAFI: DEFINIZIONI FONDAMENTALI E ALCUNE PROPRIETÀ ELEMENTARI

I *grafi* sono delle strutture matematiche che permettono di rappresentare una relazione binaria tra gli elementi di un insieme; se la relazione non prevede un ordine tra i due elementi dell'insieme si ha un *grafo non orientato*, se invece prevede un ordine si ha un *grafo orientato*. Riportiamo ora alcuni elementi di base della teoria dei grafi ed in particolare le definizioni fondamentali che verranno utilizzate nel seguito.

1.3.1 Grafi non orientati

Definizione 1.3.1 GRAFO (NON ORIENTATO)
Si definisce grafo non orientato G *una coppia ordinata* (V, E) *dove* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *è un insieme finito di elementi detti* nodi *o* vertici *ed* $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ *un insieme di* coppie non ordinate *di nodi dette* archi *o* spigoli*.*

In un grafo non orientato ogni arco $e \in E$ è completamente definito da una coppia di nodi u, v e quindi si usa la notazione $e = (u, v)$ per identificare tale arco.

Per rappresentare graficamente un grafo non orientato, di solito, si utilizzano dei punti o dei cerchi per i nodi mentre ogni arco viene rappresentato da una linea che congiunge i nodi estremi dell'arco (Figura 1.3.1).

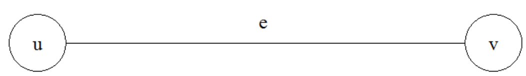

Fig. 1.3.1 Rappresentazione dei nodi u e v e dell'arco $e = (u, v)$ in un grafo non orientato

Si osservi che nel caso di grafo non orientato un arco è definito da una coppia non ordinata di nodi e quindi risulta $(u, v) = (v, u)$.

Un esempio di rappresentazione di grafo non orientato formato da 6 nodi e 8 archi (ovvero con $|V| = 6$, $|E| = 8$)[1] è riportato nella Figura 1.3.2. In tale grafo l'insieme dei nodi è costituito da

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

l'insieme degli archi è

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\ &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_2), (v_6, v_3)\}. \end{aligned}$$

[1] Dato un insieme I, si denota con $|I|$ la sua cardinalità

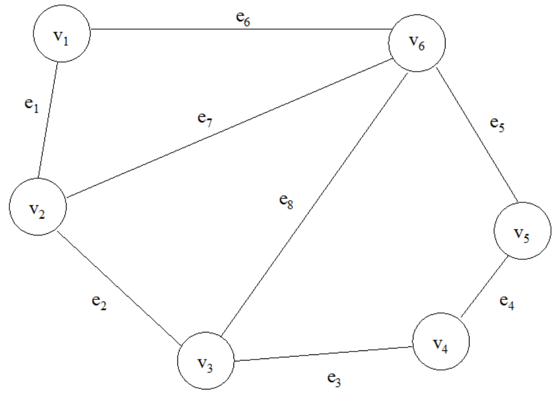

Fig. 1.3.2 Esempio di grafo non orientato

Definizione 1.3.2 Estremi di un arco. Arco incidente. Nodi adiacenti. Archi adiacenti.
Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, se $e = (u, v) \in E$ è un arco, allora i nodi u e v sono detti estremi *dell'arco e, inoltre si dice che l'arco e* incide *in u e v e i due nodi $u, v \in G$ si dicono* adiacenti*. Due archi si dicono* adiacenti *se hanno un estremo in comune.*

Definizione 1.3.3 Intorno e stella di un nodo. Nodo isolato. Grado di un nodo.
Sia dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ e un nodo $v \in V$. Si definisce intorno *del nodo v l'insieme $N(v)$ dei nodi adiacenti a v. Si definisce* stella *del nodo v l'insieme $\delta(v)$ degli archi incidenti in v. Un nodo v si dice* isolato *se $N(v) = \emptyset$. Si definisce* grado *del nodo v la cardinalità dell'insieme $\delta(v)$.*

Nella Figura 1.3.2 sono adiacenti, ad esempio, i nodi v_4 e v_5, i nodi v_6 e v_2, i nodi v_4 e v_3. Come esempio di archi adiacenti si hanno gli archi e_1 ed e_2, gli archi e_1 ed e_6, gli archi e_8 ed e_3. L'intorno del nodo v_6 è $N(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ e la stella del nodo v_2, $\delta(v_2) = \{e_1, e_7, e_2\}$.

Definizione 1.3.4 Sottografo. Sottografo indotto.
Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, si definisce sottografo *di G un grafo $H = (W, F)$ tale che $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$. Un sottografo $H = (W, F)$ di G si dice* sottografo indotto *da W se è tale che l'arco (u, v) appartiene a F se e solo se $u, v \in W$ e $(u, v) \in E$.*

Si può dire che il sottografo H di G indotto da W eredita tutti gli archi di G i cui estremi sono entrambi contenuti nel sottoinsieme W.

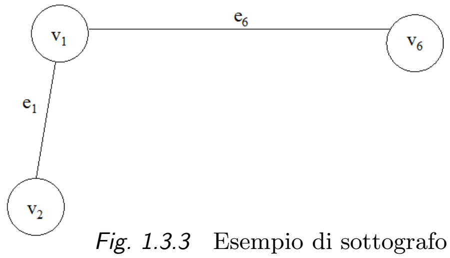

Fig. 1.3.3 Esempio di sottografo

Nella Figura 1.3.3 è rappresentato un sottografo del grafo di Figura 1.3.2 con $W = \{v_1, v_2, v_6\}$; non è un sottografo indotto in quanto non comprende l'arco e_7. Un sottografo del grafo di Figura 1.3.2 indotto da W è riportato nella Figura 1.3.4.

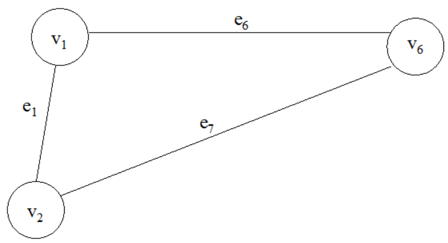

Fig. 1.3.4 Esempio di sottografo indotto

Definizione 1.3.5 GRAFO BIPARTITO.
Un grafo non orientato $G = (V, E)$ si dice bipartito *se è possibile partizionare l'insieme V dei suoi nodi in due sottoinsiemi X, Y in modo tale che ogni arco di G abbia un estremo appartenente a X e l'altro a Y* [2].

Un esempio di grafo bipartito è riportato in Figura 1.3.5 dove l'insieme dei nodi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ è stato partizionato negli insiemi $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $Y = \{v_5, v_6, v_7\}$ e ogni arco del grafo congiunge esattamente un nodo appartenente ad X con un nodo appartenente ad Y.

[2] Si ricorda che affiché gli insiemi X e Y rappresentino una partizione dell'insieme V deve risultare $X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$.

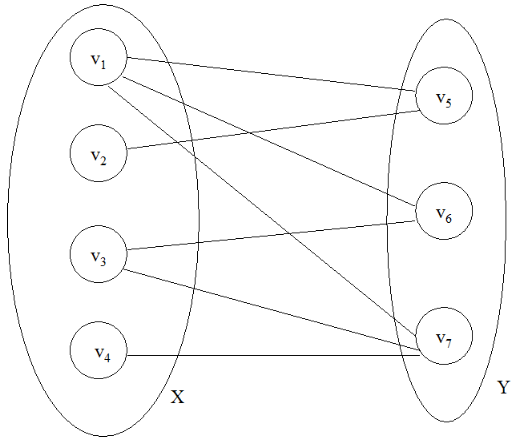

Fig. 1.3.5 Esempio di grafo bipartito

1.3.2 Grafi orientati

Definizione 1.3.6 GRAFO ORIENTATO
Si definisce grafo orientato *o* diretto G *una coppia ordinata* (V, E) *dove* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *è un insieme finito di elementi detti* nodi *o* vertici *e da un insieme* $E = \{e_1, \ldots, e_m\} \subseteq V \times V$ *di coppie* ordinate *di nodi dette* archi *o* spigoli.

Quindi in un grafo orientato, a differenza del caso di un grafo non orientato, le coppie di nodi che definiscono gli archi sono coppie *ordinate*; la notazione utilizzata per indicare un arco in un grafo orientato continuerà ad essere la stessa, ma in questo caso l'arco (u, v) indica che c'è un collegamento dal nodo u al nodo v, ma non il viceversa. Quindi l'arco (u, v) è diverso dall'arco (v, u). Ogni arco risulta "orientato" e per rappresentare graficamente un arco orientato $e = (u, v)$ in un grafo orientato risulta pertanto necessario inserire una freccia ad identificare l'orientamento dell'arco, ovvero qual è il primo nodo e qual è il secondo dell'arco stesso. Una rappresentazione grafica di un arco $e = (u, v)$ in un grafo orientato è fornita nella Figura 1.3.6.

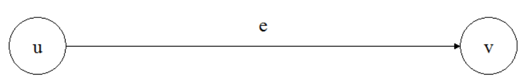

Fig. 1.3.6 Rappresentazione dei nodi u e v e dell'arco orientato $e = (u, v)$ in un grafo orientato

Dato l'arco $e = (u, v)$, il primo nodo u viene detto *coda*, il secondo nodo v viene detto *testa*. Il nodo u si dice anche *predecessore* del nodo v e il nodo v *successore* del nodo u. L'arco $e = (u, v) \in E$ si dice *uscente* da u ed *entrante* in v.

Anche nel caso di grafi orientati, dato un arco $e = (u, v) \in E$, i nodi u e v sono detti *estremi* dell'arco e, e si dice che l'arco e *incide* in u e v e i nodi u e v si dicono *adiacenti*.
Un esempio di rappresentazione di un grafo orientato è riportato nella Figura 1.3.7. Ribadiamo che l'unica differenza con il caso dei grafi non orientati è nella presenza sull'arco di una freccia che indica l'orientamento dell'arco stesso. In tale

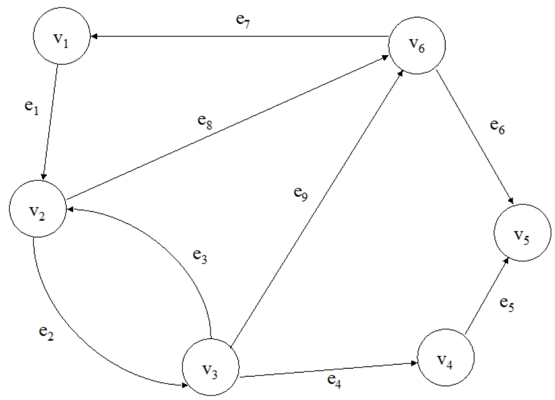

Fig. 1.3.7 Esempio di grafo orientato

grafo l'insieme dei nodi è costituito da

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

l'insieme degli archi è

$$\begin{aligned} E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\} \\ &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_6, v_5), (v_6, v_1), (v_2, v_6), (v_3, v_6)\}. \end{aligned}$$

Si osservi che risulta

$$e_2 = (v_2, v_3) \neq (v_3, v_2) = e_3$$

cioè l'arco $e_2 = (v_2, v_3)$ è diverso dall'arco $(v_3, v_2) = e_3$.

Anche nel caso dei grafi orientati si possono dare le definizioni di intorno di un nodo e di stella di un nodo analogamente al caso di grafi non orientati. Inoltre un intorno di un nodo è partizionato in *intorno positivo* e *intorno negativo* e analogamente la stella di un nodo (che nel caso orientato è indicata con ω) è partizionata in *stella entrante* e *stella uscente*. Formalmente si hanno le seguenti definizioni.

Definizione 1.3.7 INTORNO POSITIVO, INTORNO NEGATIVO. STELLA ENTRANTE, STELLA USCENTE.
Sia dato un grafo orientato $G = (V, E)$ e un nodo $v \in V$. Si definisce intorno positivo *del nodo v l'insieme $N^+(v)$ dei nodi successori del nodo v e* intorno negativo *del nodo v l'insieme $N^-(v)$ dei nodi predecessori del nodo v. Si definisce* stella entrante *del nodo v l'insieme $\omega^-(v)$ degli archi incidenti in v e stella uscente $\omega^+(v)$, l'insieme degli archi uscenti da v*

Quindi $N^+(v)$ è l'insieme dei nodi estremi della stella uscente di v, escluso v stesso, mentre $N^-(v)$ è l'insieme dei nodi estremi della stella entrante di v, escluso v stesso.

Nell'esempio di grafo orientato rappresentato nella Figura 1.3.7 si ha, ad esempio, $N^+(v_3) = \{v_2, v_6, v_4\}$ e $N^-(v_3) = \{v_2\}$ mentre $\omega^+(v_2) = \{e_2, e_8\}$ e $\omega^-(v_2) = \{e_1, e_3\}$.

Definizione 1.3.8 NODO SORGENTE. NODO POZZO.
In un grafo orientato, un nodo con soli archi uscenti è detto sorgente*; un nodo con soli archi entranti è detto* pozzo.

Per quanto riguarda la definizione di sottografo e sottografo indotto nel caso di grafi orientati, essa è la medesima già data nel caso di grafi non orientati (Definizione 1.3.4). Anche la definizione di grafo orientato bipartito è la medesima già data nel caso di grafi non orientati (Definizione 1.3.5).

1.3.3 Cammini, cicli, alberi

Definizione 1.3.9 CAMMINO.
Sia dato un grafo $G = (V, E)$ (orientato o non orientato), dove $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Si definisce cammino *in G, un insieme ordinato e finito di nodi e archi di G,*

$$P = \{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, \ldots, v_{j_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_p}\}$$

tale che ogni arco e_{h_i} è incidente nei nodi $v_{j_{i-1}}$ e v_{j_i}.

Si osservi che nel caso in cui G è un grafo orientato, il cammino come definito nella definzione precedente non tiene conto dell'orientamento degli archi in quanto è richiesto che l'arco e_{h_i} incida sui nodi $v_{j_{i-1}}$ e v_{j_i}, senza specificare quale dei due nodi sia la testa e quale la coda di e_{h_i}.

I nodi v_{j_0} e v_{j_p} sono detti *estremi* del cammino P. Il nodo v_{j_0} è anche detto *origine* del cammino.

Definizione 1.3.10 CAMMINO ORIENTATO.
Sia dato un grafo orientato $G = (V, E)$ dove $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Si definisce cammino orientato *in G, un insieme ordinato e finito di nodi e archi di G,*

$$P = \{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, \dots, v_{j_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_p}\}$$

tale che risulti $e_{h_i} = (v_{j_{i-1}}, v_{j_i})$, ovvero $v_{j_{i-1}}$ e v_{j_i} sono rispettivamente la coda e la testa dell'arco e_{h_i}.

Naturalmente l'esistenza di un cammino orientato da un nodo u ad un nodo v non implica esistenza di un cammino orientato dal nodo v al nodo u.

Definizione 1.3.11 LUNGHEZZA DI UN CAMMINO. DISTANZA TRA DUE NODI.
Dato un cammino P in un grafo G, si definisce lunghezza *di P il numero degli archi che costituiscono il cammino. Inoltre, dati due nodi u e v, se esiste almeno un cammino tra u e v, si definisce* distanza *dei due nodi la lunghezza minima tra le lunghezze di tutti i cammini tra u e v.*

Nel grafo riportato nella Figura 1.3.7 esempi di cammini sono

$$P_1 = \{v_3, e_4, v_4, e_5, v_5, e_6, v_6, e_7, v_1\},$$

$$P_2 = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4\}.$$

Il cammino P_1 ha come estremi i nodi v_3 e v_1, è di lunghezza 4 e non è un cammino orientato in quanto l'arco e_6 (appartenente al cammino) è incidente nei nodi v_5 e v_6 ma e_6 ha la coda in v_6 e la testa in v_5. Il cammino P_2 è invece un cammino orientato da v_1 a v_4 di lunghezza 3.

Definizione 1.3.12 CAMMINO SEMPLICE.
Un cammino [orientato] è detto cammino [orientato] semplice *se gli archi e i nodi che lo costituiscono sono tutti distinti.*

Nel grafo riportato nella Figura 1.3.7 i cammini P_1 e P_2 già considerati sono cammini semplici; un esempio di cammino non semplice è il cammino $\{v_2, e_8, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3\}$.

Definizione 1.3.13 CAMMINO CHIUSO. CICLO. CICLO ORIENTATO
Dato un grafo (orientato o non orientato) $G = (V, E)$, un cammino in G è detto

cammino chiuso *se i suoi estremi coincidono. Inoltre, si definisce* ciclo *o* circuito *un cammino chiuso*

$$C = \{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, \ldots, v_{h_{p-1}}, v_{h_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_0}\}$$

tale che $\{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, \ldots, e_{h_{p-1}}, v_{h_{p-1}}\}$ *è un cammino semplice.*
Dato un grafo orientato, si definisce ciclo orientato *un cammino orientato chiuso*

$$C = \{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, \ldots, v_{h_{p-1}}, v_{h_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_0}\}$$

tale che $\{v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, \ldots, e_{h_{p-1}}, v_{h_{p-1}}\}$ *è un cammino orientato semplice.*

Quindi un ciclo è un cammino chiuso in cui gli archi e i nodi sono distinti ad eccezione del primo nodo che coincide con l'ultimo. Nel grafo riportato nella Figura 1.3.7 il cammino $\{v_1, e_1, v_2, e_8, v_6, e_7, v_1\}$ è un cammino chiuso ed è anche un ciclo orientato, mentre il cammino $\{v_3, e_3, v_2, e_8, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3\}$ è un cammino chiuso ma non un ciclo perché il cammino $\{v_3, e_3, v_2, e_8, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2\}$ non è semplice.

Definizione 1.3.14 Grafo connesso.
Un grafo (orientato o non orientato) si dice connesso *se per ogni coppia di nodi del grafo u, v, esiste un cammino (non necessariamente orientato) che congiunge u e v.*

Definizione 1.3.15 Grafo aciclico non orientato. Albero non orientato.
Un grafo non orientato è detto aciclico *se non contiene cicli come sottografi. Inoltre si definisce* albero non orientato *o semplicemente* albero *un grafo aciclico e connesso.*

Definizione 1.3.16 Grafo aciclico orientato. Alberi orientati.
Un grafo orientato è detto aciclico *se non contiene cicli orientati come sottografi. Inoltre si definisce* albero orientato *un grafo orientato connesso $G = (V, E)$ aciclico in cui si distingue un nodo particolare r detto* radice *che verifica una delle seguenti condizioni:*

i) *per ogni nodo $v \in G$ diverso da r esiste un cammino orientato da r a v;*

ii) *per ogni nodo $v \in G$ diverso da r esiste un cammino orientato da v a r;*

Nel caso i) *si parla di* albero sorgente, *nel caso* ii) *si parla di* albero pozzo.

Si osservi che nel caso di un albero sorgente il nodo r non ha archi entranti (è un nodo sorgente) e ogni nodo $v \neq r$ ha esattamente un arco entrante; quindi un

albero sorgente è completamente determinato specificando per ogni nodo il suo predecessore.
Analogamente nel caso di un albero pozzo il nodo r non ha archi uscenti (è un nodo pozzo) e ogni nodo $v \neq r$ ha esattamente un arco uscente; quindi un albero sorgente è completamente determinato specificando per ogni nodo il suo successore.

Un esempio di albero sorgente è rappresentato nella Figura 1.3.8 e un esempio di albero pozzo è rappresentato nella Figura 1.3.9.

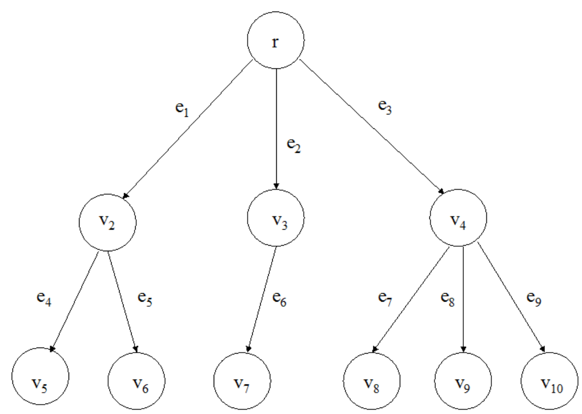

Fig. 1.3.8 Esempio di albero sorgente

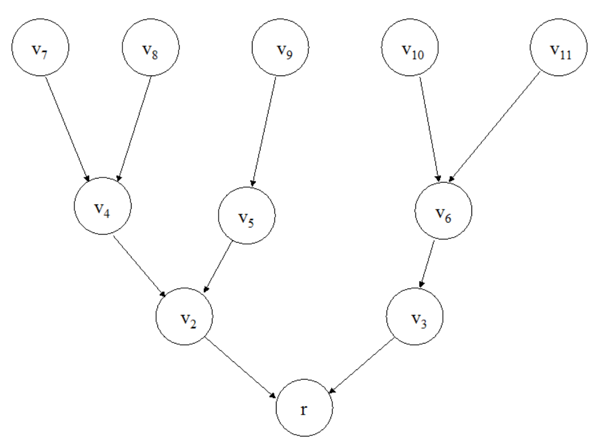

Fig. 1.3.9 Esempio di albero pozzo

1.3.4 Grafi pesati

Un ulteriore ampliamento del concetto di grafo consiste nell'associare ad ogni arco un numero reale che chiameremo *peso*. Questo dà luogo ai cosiddetti *grafi pesati* che possono essere cosìformalmente definiti.

Definizione 1.3.17 Grafo pesato.
Un grafo pesato *è una tripla ordinata* $G = (V, E, L)$ *tale che* $\bar{G} = (V, E)$ *è un grafo ed* L *è una funzione* $L : E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *che associa ad ogni arco* (u, v) *un peso* ℓ_{uv}.

Per rappresentare un grafo pesato è sufficiente inserire accanto a ciascun arco (u, v) il peso corrispondente ℓ_{uv}. Un esempio di rappresentazione di grafo pesato è riportato nella Figura 1.3.10.

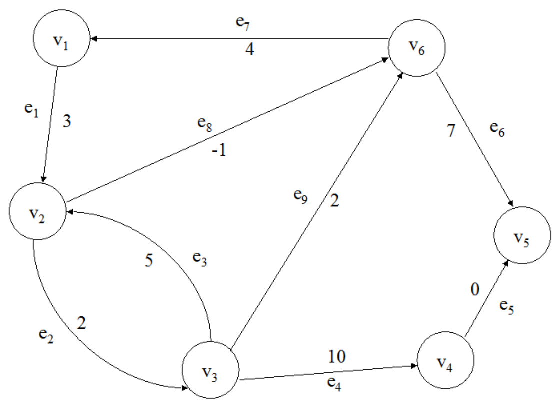

Fig. 1.3.10 Esempio di grafo pesato

In questo esempio è stato assegnato il peso 3 all'arco (v_1, v_2) (ovvero $\ell_{v_1,v_2} = 3$); il peso 2 all'arco (v_2, v_3) (ovvero $\ell_{v_2,v_3} = 2$), etc.

Dato un grafo orientato pesato $G = (V, E, L)$ è possibile assegnare ad ogni cammino orientato in G un peso che verrà chiamato *peso del cammino*; formalmente si ha la seguente definizione.

Definizione 1.3.18 Peso di un cammino.
Dato un grafo orientato pesato $G = (V, E, L)$ *e dato un cammino orientato* P *in* G*, si definisce* $\ell(P)$ peso del cammmino P *la somma dei pesi degli archi che costituiscono il cammino.*

Ad esempio, il cammino orientato $P = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_9, v_6\}$ nel grafo della Figura 1.3.10 ha un peso pari a $\ell_{v_1,v_2} + \ell_{v_2,v_3} + \ell_{v_3,v_6} = 3 + 2 + 2 = 7$, ovvero $\ell(P) = 7$.

Sommario