

# Università “Ca’Foscari” Venezia

*Dipartimento di Scienze Ambientali,  
Informatica e Statistica*

Giovanni Fasano<sup>†</sup>

---

*DISPENSA SEMI-DEFINITIVA* v. 1.4

*Richiami di Ricerca Operativa  
&  
Ottimizzazione Non Lineare*

---

<sup>†</sup>Università Ca’Foscari Venezia, Dipartimento di Management, S.Giobbe Cannaregio 873, 30121 Venezia, ITALY. E-mail: [fasano@unive.it](mailto:fasano@unive.it) ; URL: <http://venus.unive.it/~fasano> - A.A. 2014-2015.

Nelle presenti note si riassumono i contenuti delle prime lezioni, relative al corso di Ricerca Operativa, svolte dal docente Giovanni Fasano nell'A.A. 2014-2015, presso la sede di via Torino. Le lezioni sono state organizzate nell'ambito del Corso di Laurea in *Informatica*.

# Sommario

- *Esempi introduttivi con modelli di Programmazione Matematica*
- *Richiami di Calcolo in  $\mathbb{R}^n$  e Definizioni Generali*
- *Richiami sulle funzioni continuamente differenziabili*
- *Introduzione alla Programmazione Matematica*
- *Proprietà e struttura dei Problemi Convessi*
- *Ulteriori elementi di Programmazione Matematica*
- *Dalla Programmazione Convessa alla Programmazione Lineare*
- *Bibliografia*

# 1 Esempi e modelli di Programmazione Matematica: elementi introduttivi

Iniziamo questa prima parte delle presenti note introducendo tre brevi esempi di problemi di **Programmazione Matematica**. Quest'ultima costituirà l'argomento centrale del corso; di essa daremo una definizione e parleremo più dettagliatamente nelle sezioni successive. I seguenti semplici esempi sono pensati nello spirito di suggerire allo studente la natura dei contenuti del corso. Non intendiamo pertanto rappresentare in questa sezione una descrizione esaustiva, tantomeno completa, dei modelli oggetto di studio della Programmazione Matematica.

## Esempio 1.1 (Problema dell'investitore)

Dato un budget di denaro  $M > 0$ , siano  $a_1, \dots, a_n$  le quantità prefissate di denaro investibili in  $n$  distinte tipologie di investimenti (per esempio, se la tipologia di investimento '1' corrisponde a "titoli di stato", il coefficiente  $a_1 = 1000$  corrisponde a dire che i titoli di stato sono acquistabili a tranche di 1000 Euro). Siano  $x_1, \dots, x_n$  i livelli di attivazione degli  $n$  investimenti, i.e. nell'investimento  $i$ -simo verrà investita la quantità di denaro  $a_i x_i$ . Sia  $U(x)$  una funzione di utilità definita da ciascun investitore, associata al vettore  $x$  (sostanzialmente ciascun investitore mostra una propensione personale verso un investimento piuttosto che un altro, tra gli  $n$  disponibili). Pertanto l'investitore intende trovare (almeno) un vettore che risolve il problema di massimizzazione della propria utilità

$$\begin{aligned} \max_x \quad & U(x) \\ & a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq M \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Il problema precedente contiene sostanzialmente i tre ingredienti fondamentali di un modello di Programmazione Matematica:

- una funzione da massimizzare/minimizzare (**funzione obiettivo**),
- un **insieme ammissibile** (eventualmente coincidente con  $\mathbb{R}^n$ ) definito da vincoli
- un insieme di **variabili**.

Si osservi che nella formulazione precedente gli investimenti sono frazionabili (i.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ ). Qualora l'investitore avesse a disposizione solo investimenti non frazionabili, allora la formulazione diverrebbe (con  $\mathbb{Z}$  indichiamo l'insieme dei numeri interi)

$$\begin{aligned} \max_x \quad & U(x) \\ & a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq M \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Si noti infine che in entrambe le precedenti formulazioni, le variabili compaiono nei vincoli con esponente pari ad uno. Invece la funzione da massimizzare è in generale non lineare nelle variabili  $x_1, \dots, x_n$ . Vedremo nel seguito l'importanza di quest'ultima affermazione.

## Esempio 1.2 (Problema del knapsack (bisaccia))

Sia dato uno zaino (bisaccia), il cui volume massimo risulti pari alla quantità  $b \geq 0$ .

Supponiamo di voler inserire nello zaino  $m$  tipi di oggetti, con volumi rispettivamente pari ad  $a_1, \dots, a_m$ , che però potrebbero non entrare tutti a causa del volume limitato dello zaino. Sia  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , l'utilità di inserire l'oggetto  $i$ -simo nello zaino. Pertanto, volendo ottenere la maggior utilità possibile dal riempimento dello zaino, nel rispetto del vincolo sul volume e ricordando che gli oggetti sono esattamente di  $m$  tipi diversi, vogliamo risolvere il problema

$$\begin{aligned} \max_x \quad & u_1x_1 + \dots + u_nx_n \\ & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned}$$

in cui la variabile  $x_i$  rappresenta ora il numero di oggetti di tipo  $i$  da inserire nello zaino (di nuovo  $\mathbb{Z}$  è l'insieme dei numeri interi). Si noti che a differenza del caso precedente, ora sia la funzione da massimizzare che i vincoli sono costituiti da funzioni lineari nelle variabili  $x_1, \dots, x_n$  (a parte i vincoli di interezza).

### Esempio 1.3 (Problema numerico - lineare)

Un'industria possiede 3 centri di produzione (fabbriche)  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$  e 2 magazzini di stoccaggio  $M1$ ,  $M2$ . Nelle fabbriche durante il mese corrente si producono due tipi di prodotti  $P_1$  e  $P_2$ , che vanno trasportati nei magazzini, in attesa del ritiro da parte dei grossisti (si assuma che la descrizione semplificata appena data, contenga tutti e soli gli elementi caratterizzanti della produzione di  $P_1$  e  $P_2$ ).

Nella seguente tabella riassumiamo i tempi unitari (in ore/unità) ed i costi unitari (in euro/unità) di produzione di  $P_1$  e  $P_2$ , in ciascuna fabbrica:

	$F1$		$F2$		$F3$	
	costi	tempi	costi	tempi	costi	tempi
$P_1$	7.2	0.72	6.3	0.63	5.2	0.5
$P_2$	9.2	0.81	7.3	0.68	6.6	0.67

Inoltre, in ciascuna fabbrica, è possibile far lavorare gli impianti per un numero di ore massimo pari a 2200 ore per  $F1$ , 930 ore per  $F2$  e 1600 ore per  $F3$ . Infine i 2 magazzini richiedono rispettivamente un numero minimo di unità di prodotto pari a:

	$M1$	$M2$
$P_1$	1100	1900
$P_2$	1650	1300

ed i costi di trasporto (euro/unità) dalle fabbriche ai magazzini, sono riassunti nella seguente tabella:

	$F1$	$F2$	$F3$
$M1$	0.90	0.88	1.03
$M2$	0.99	1.10	0.85

Sulla base dei soli dati forniti si fornisca un modello di Programmazione Matematica nel quale si intende minimizzare i costi di produzione e trasporto dei prodotti  $P_1$  e  $P_2$ . Introduciamo i due seguenti insiemi di variabili:

$$x_{ij} = \text{unità di } P_1 \text{ prodotte nella fabbrica } Fi \text{ e trasportati nel magazzino } Mj \\ (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2).$$

$$y_{ij} = \text{unità di } P_2 \text{ prodotte nella fabbrica } Fi \text{ e trasportati nel magazzino } Mj \\ (i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2).$$

In questo caso si tratta di un problema di minimizzazione (di costi di produzione + trasporto) e la quantità da minimizzare (funzione obiettivo) è data da (ciascuna coppia di righe della somma seguente rappresenta uno dei due prodotti):

$$\begin{aligned} \min \quad & 7.2(x_{11} + x_{12}) + 6.3(x_{21} + x_{22}) + 5.2(x_{31} + x_{32}) + \\ & 0.90x_{11} + 0.88x_{21} + 1.03x_{31} + 0.99x_{12} + 1.10x_{22} + 0.85x_{32} + \\ & 9.2(y_{11} + y_{12}) + 7.3(y_{21} + y_{22}) + 6.6(y_{31} + y_{32}) + \\ & 0.90y_{11} + 0.88y_{21} + 1.03y_{31} + 0.99y_{12} + 1.10y_{22} + 0.85y_{32}. \end{aligned}$$

Inoltre sono presenti i seguenti vincoli nel problema, relativi ai tempi di produzione

$$0.72(x_{11} + x_{12}) + 0.81(y_{11} + y_{12}) \leq 2200$$

$$0.63(x_{21} + x_{22}) + 0.68(y_{21} + y_{22}) \leq 930$$

$$0.5(x_{31} + x_{32}) + 0.67(y_{31} + y_{32}) \leq 1600$$

ed alle richieste di unità di prodotto

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1100$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} \geq 1650$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1900$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} \geq 1300.$$

Infine saranno presenti i vincoli di non negatività  $x_{ij} \geq 0$ ,  $y_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ , ed i vincoli di interezza  $x_{ij}$  intera,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ ,  $y_{ij}$  intera,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ . Il modello complessivo sarà quindi il seguente (si invita lo studente a verificare il significato di ciascun vincolo e ciascun addendo della funzione obiettivo):

$$\begin{aligned} \min \quad & 7.2(x_{11} + x_{12}) + 6.3(x_{21} + x_{22}) + 5.2(x_{31} + x_{32}) + \\ & 0.90x_{11} + 0.88x_{21} + 1.03x_{31} + 0.99x_{12} + 1.10x_{22} + 0.85x_{32} + \\ & 9.2(y_{11} + y_{12}) + 7.3(y_{21} + y_{22}) + 6.6(y_{31} + y_{32}) + \\ & 0.90y_{11} + 0.88y_{21} + 1.03y_{31} + 0.99y_{12} + 1.10y_{22} + 0.85y_{32} \end{aligned}$$

$$0.72(x_{11} + x_{12}) + 0.81(y_{11} + y_{12}) \leq 2200$$

$$0.63(x_{21} + x_{22}) + 0.68(y_{21} + y_{22}) \leq 930$$

$$0.5(x_{31} + x_{32}) + 0.67(y_{31} + y_{32}) \leq 1600$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1100$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} \geq 1650$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1900$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} \geq 1300$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{intera}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad \text{intera}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2$$

Anche qui, come nell'esempio precedente, sia la funzione da minimizzare che i vincoli sono costituiti da funzioni lineari (escludendo i vincoli di interezza) nelle variabili  $x_{ij}$  e  $y_{ij}$ .

## 2 Richiami e Definizioni Generali

In questa sezione diamo alcuni richiami e definizioni che verranno utilizzati nel seguito (si veda anche [Ve08, Be95, BaShSh93] per un approfondimento). In particolare, dovendo considerare nel corso l'uso di elementi cui corrisponde sia un'interpretazione algebrica che un'interpretazione geometrica, è opportuno ricordare preliminarmente la seguente definizione di *Spazio Vettoriale*.

**Definizione 2.1** Sia dato un insieme di elementi (vettori) per i quali è definita un'operazione di somma '+'. Si consideri l'insieme numerico (campo)  $K$ , tale che tra i suoi elementi sono definite l'operazione prodotto  $\cdot$  e l'operazione somma  $\oplus$ ; inoltre tra gli elementi di  $K$  ed i vettori di  $V$  è definita l'operazione  $\bullet$ . Definiamo l'insieme di vettori **spazio vettoriale**  $V(K)$  se soddisfa le seguenti proprietà:

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 0) | $x + y \in V(K),$   | $\forall x, y \in V(K)$                           |
| 1) | $(x + y) + z = x + (y + z),$  | $\forall x, y, z \in V(K)$                        |
| 2) | $\exists w \in V(K) : x + w = x,$   | $\forall x \in V(K)$                              |
| 3) | $\forall x \in V(K), \exists \bar{x} \in V(K) : x + \bar{x} = w,$                                     |   |
| 4) | $x + y = y + x,$  | $\forall x, y \in V(K)$                           |
| 5) | $\alpha \bullet x \in V(K), \quad \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \cdot \beta) \bullet x,$ | $\forall x \in V(K), \forall \alpha, \beta \in K$ |
| 6) | $\exists \sigma \in K : \sigma \bullet x = x,$  | $\forall x \in V(K)$                              |
| 7) | $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y,$                                       | $\forall x, y \in V(K), \forall \alpha \in K$     |
| 8) | $(\alpha \oplus \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x,$                               | $\forall x \in V(K), \forall \alpha, \beta \in K$ |

□

Si noti che spesso il vettore  $w$  nella 2) prende il nome di *vettore nullo*, mentre il vettore  $\bar{x}$  nella 3) prende il nome di *opposto di  $x$*  oppure *elemento inverso*. Esempi notevoli di spazi vettoriali sono molto frequenti. Diamo di seguito alcuni di essi (si lascia per esercizio la verifica che siano spazi vettoriali):

- L'insieme  $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ , normalmente indicato come  $\mathbb{R}$ , dei numeri reali con le usuali operazioni di somma tra due numeri reali e prodotto tra due numeri reali.
- L'insieme  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ , normalmente indicato come  $\mathbb{R}^n$ , ovvero l'insieme dei vettori  $x$  del tipo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

per i quali definiamo il prodotto per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , mediante la

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix},$$



e la somma  $x + y$  (con  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ) mediante la

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

- L'insieme  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ , ovvero le matrici rettangolari di dimensioni  $m$  (righe) ed  $n$  (colonne), ad elementi in  $\mathbb{R}$ , per le quali definiamo il prodotto per uno scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$  mediante la (si osservi che è  $x \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ )

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{1,1} & \cdots & \alpha x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha x_{m,1} & \cdots & \alpha x_{m,n} \end{pmatrix},$$

e la somma  $x + y$  (con  $x, y \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ) mediante la

$$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m,1} & \cdots & y_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} + y_{1,1} & \cdots & x_{1,n} + y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} + y_{m,1} & \cdots & x_{m,n} + y_{m,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- L'insieme  $P_n(\mathbb{R})$ , dei polinomi di una variabile reale, a coefficienti reali, di grado al più  $n$ . Ricordiamo che dati i due polinomi  $p(x)$  e  $q(x)$  di grado rispettivamente  $h$  e  $k$  (con coefficienti reali  $p_0, p_1, \dots, p_h$  e  $q_0, q_1, \dots, q_k$ )

$$p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_hx^h$$

$$q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_kx^k,$$

definiamo il prodotto  $\alpha p(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , come

$$\alpha p(x) = (\alpha p_0) + (\alpha p_1)x + (\alpha p_2)x^2 + \cdots + (\alpha p_h)x^h,$$

mentre per quanto riguarda la somma  $p(x) + q(x)$  si ha quanto segue:

$$\text{se } h \geq k \Rightarrow p(x) + q(x) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \cdots + (p_k + q_k)x^k + p_{k+1}x^{k+1} + \cdots + p_hx^h$$

$$\text{se } h < k \Rightarrow p(x) + q(x) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \cdots + (p_h + q_h)x^h + q_{h+1}x^{h+1} + \cdots + q_kx^k.$$

**Esercizio 1** Si dimostri che l'insieme  $Q_n(\mathbb{R})$ , dei polinomi di una variabile reale, a coefficienti reali, di grado esattamente pari ad  $n$ , non è uno spazio vettoriale.

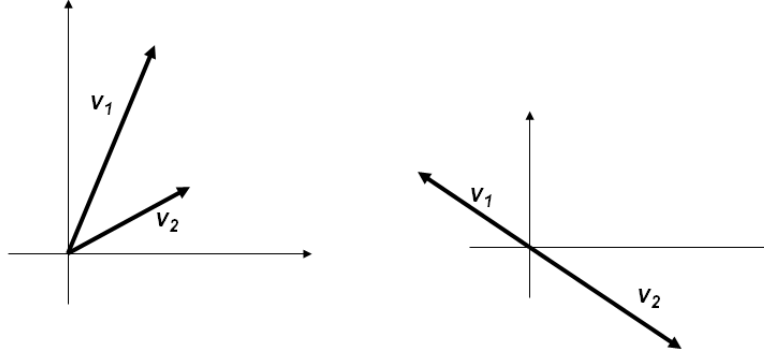


Figura 1: I vettori  $v_1$  e  $v_2$  sono linearmente indipendenti (*sinistra*), e linearmente dipendenti (*destra*).

**Definizione 2.2** Sia dato l'insieme numerico  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$  e l'insieme dei vettori non tutti nulli  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $V(\mathcal{A})$ . I vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  si dicono **linearmente indipendenti** su  $\mathcal{A}$  se la relazione

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0, \quad \alpha_i \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, m$$

è soddisfatta se e solo se  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ . □

Si noti che equivalentemente, si può esprimere la precedente condizione dicendo che se i vettori  $v_1, \dots, v_m$  sono linearmente indipendenti su  $\mathcal{A}$ , allora nessuno di essi può essere espresso come combinazione lineare (a coefficienti in  $\mathcal{A}$ ) dei rimanenti.

**Definizione 2.3** Dato lo spazio vettoriale  $V(K)$ , si dice che  $V(K)$  ha **dimensione**  $n$ , se il massimo numero di vettori di  $V(K)$ , linearmente indipendenti su  $K$ , è esattamente  $n$ . Conseguentemente lo spazio vettoriale  $V(K)$  viene anche indicato come  $V^n(K)$ . □

In Figura 1 troviamo un esempio di vettori  $v_1, v_2$  linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}^2$  (*sinistra*) e linearmente dipendenti su  $\mathbb{R}^2$  (*destra*).

Si noti che è possibile definire anche spazi vettoriali di dimensione *non finita*. Un esempio è fornito dallo spazio vettoriale delle funzioni continue in un intervallo reale  $[a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nel seguito indicheremo con  $\mathbb{R}^n$  lo *spazio reale euclideo* a dimensione (finita)  $n$ , ovvero l'insieme delle  $n$ -ple reali  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ .

Ancora, in modo equivalente, dati i vettori  $v_1, \dots, v_m$ , questi sono linearmente indipendenti su  $\mathcal{A}$ , se l'unica combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_m$  a coefficienti in  $\mathcal{A}$ , che restituisce il vettore nullo, è quella a coefficienti tutti nulli.

**Esercizio 2** Dire se i polinomi  $p_1(x) = x^2 + 1$ ,  $p_2(x) = x - 1$ ,  $p_3(x) = -2x^2 + x - 3$ , definiti nello spazio vettoriale  $P_2(\mathbb{R})$ , sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 3** Date le matrici di  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si trovi il sottoinsieme di  $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$  di cardinalità massima, contenente matrici linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 4** Si dica se presi comunque 5 vettori in  $\mathbb{R}^4$ , questi possono essere linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 5** Dati i tre vettori di  $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si verifichi se sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

**Esercizio 6** Si dimostri che dati i vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  linearmente indipendenti su  $\mathcal{A}$ , allora ogni sottoinsieme di vettori di  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è formato da vettori linearmente indipendenti (suggerimento: per assurdo sia  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}$ , allora ...).

**Definizione 2.4** Sia dato l'insieme dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che il vettore  $w \in \mathbb{R}^n$  è una **combinazione affine** su  $\mathbb{R}$  dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , se

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

□

**Definizione 2.5** Sia dato l'insieme dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che il vettore  $z \in \mathbb{R}^n$  è una **combinazione conica** su  $\mathbb{R}$  dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , se

$$z = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad \text{con} \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

□

**Definizione 2.6** Sia dato l'insieme dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che il vettore  $y \in \mathbb{R}^n$  è una **combinazione convessa** su  $\mathbb{R}$  dei vettori  $\{v_1, \dots, v_m\}$  su  $\mathbb{R}$ , se è al contempo una combinazione affine ed una combinazione conica di  $\{v_1, \dots, v_m\}$ , i.e.,

$$y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

□

**Esempio 2.1** Dati due punti distinti nel piano  $\mathbb{R}^2$ , la combinazione affine su  $\mathbb{R}$  di questi coincide con la retta del piano passante per essi.

Infatti, detti

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix},$$

due qualsiasi punti distinti di  $\mathbb{R}^2$  (lo studente studi a parte i casi particolari in cui  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$  oppure  $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$ ), ed indicando con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

il generico punto lungo la retta passante per  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , si ha (equazione della retta passante per due punti)

$$\frac{x_1 - \bar{y}_1}{x_2 - \bar{y}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{y}_2}. \quad (1)$$

Dalla (1) si ha anche

$$\frac{x_1 - \bar{y}_1}{\bar{x}_1 - \bar{y}_1} = \frac{x_2 - \bar{y}_2}{\bar{x}_2 - \bar{y}_2},$$

ovvero esisterà in generale un valore  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che

$$\frac{x_1 - \bar{y}_1}{\bar{x}_1 - \bar{y}_1} = \alpha, \quad \frac{x_2 - \bar{y}_2}{\bar{x}_2 - \bar{y}_2} = \alpha,$$

da cui rispettivamente seguono le

$$x_1 - \bar{y}_1 = \alpha(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \implies x_1 = \bar{y}_1 + \alpha(\bar{x}_1 - \bar{y}_1) \implies x_1 = \alpha\bar{x}_1 + (1 - \alpha)\bar{y}_1,$$

$$x_2 - \bar{y}_2 = \alpha(\bar{x}_2 - \bar{y}_2) \implies x_2 = \bar{y}_2 + \alpha(\bar{x}_2 - \bar{y}_2) \implies x_2 = \alpha\bar{x}_2 + (1 - \alpha)\bar{y}_2,$$

ovvero

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} = \alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}.$$

Quindi  $x$  risulta la combinazione affine di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Data la generalità di  $x$ , ogni punto della retta passante per  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sarà di conseguenza una combinazione affine di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , corrispondente ad un diverso valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si noti che un analogo risultato si ottiene presi comunque due punti  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  in  $\mathbb{R}^n$  anzichè in  $\mathbb{R}^2$  (si lascia per esercizio - facoltativo, poichè richiede l'uso dei coseni direttori di una retta in  $\mathbb{R}^n$ ).

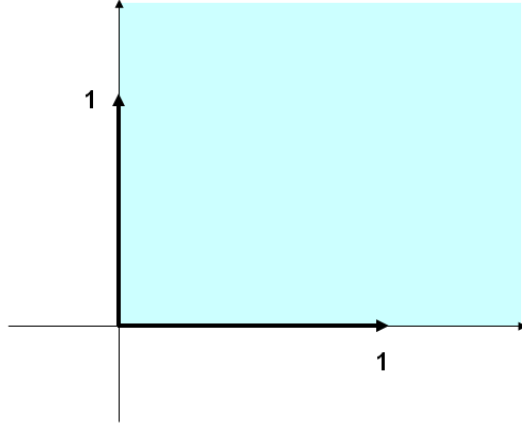


Figura 2: Insieme (area ombreggiata) delle combinazioni coniche dei vettori (2).

**Esempio 2.2** *Dati i vettori di  $\mathbb{R}^2$*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

*allora tutte le combinazioni coniche di  $\{e_1, e_2\}$  sono date dai punti nel primo ortante cartesiano. Infatti, preso un qualsiasi punto*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

*nel primo ortante di  $\mathbb{R}^2$ , sarà  $v_1 \geq 0$  e  $v_2 \geq 0$ , inoltre è anche banalmente*

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2.$$

*Viceversa, presa la combinazione conica  $a_1 e_1 + a_2 e_2$ , sarà*

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0,$$

*che è un vettore del primo ortante. In Figura 2 l'area indica l'insieme delle combinazioni coniche dei vettori (2), mentre la Figura 3 indica l'insieme delle combinazioni coniche dei vettori*

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

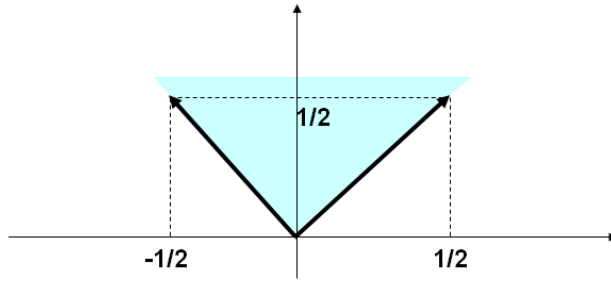


Figura 3: Insieme (area ombreggiata) delle combinazioni coniche dei vettori (3).

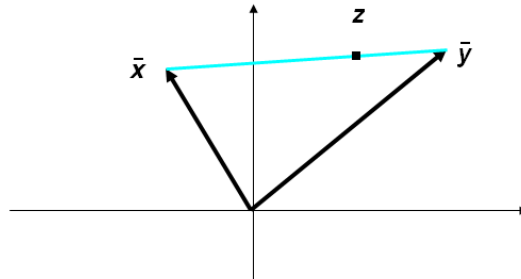


Figura 4: Combinazione convessa  $z$  dei vettori  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Il vettore  $z$  si ottiene mediante la relazione  $z = \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y}$ , dove  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  e  $\alpha_2 \geq 0$ .

**Esempio 2.3** Dati due punti  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  distinti nel piano  $\mathbb{R}^2$ , la combinazione convessa su  $\mathbb{R}$  di questi coincide con il segmento che li congiunge (indicato anche come segmento chiuso  $[\bar{x}, \bar{y}]$ ). Infatti, detti

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix},$$

due qualsiasi punti distinti di  $\mathbb{R}^2$ , indicando con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

il generico punto  $x \in \mathbb{R}^2$  combinazione convessa di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , si ha per definizione

$$x = \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

Equivalentemente possiamo scrivere

$$x = \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} = \alpha_1 \bar{x} + (1 - \alpha_1) \bar{y} = \bar{y} + \alpha_1 (\bar{x} - \bar{y}), \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1,$$

da cui si vede chiaramente che quando  $\alpha_1 = 0$  allora  $x \equiv \bar{y}$  mentre quando  $\alpha_1 = 1$  allora  $x \equiv \bar{x}$ . Infine, per valori  $0 < \alpha_1 < 1$  otteniamo tutti i punti che a partire dal punto  $\bar{y}$  si trovano lungo la direzione  $\bar{y} - \bar{x}$ , fino al punto  $\bar{x}$  (si veda Figura 4).

Un analogo risultato si estende ad  $\mathbb{R}^n$  (si lascia la verifica allo studente).

**Definizione 2.7** Sia dato (per semplicità) lo spazio vettoriale  $V^n(K)$ , definiamo il **prodotto scalare** ' $\langle \bullet, \bullet \rangle$ ' come la funzione definita da  $V^n(K) \times V^n(K)$  in  $\mathbb{R}$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in V^n(K), \quad \text{con} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0,$
2.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in V^n(K),$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in V^n(K).$

□

Nel seguito focalizzeremo maggiormente la nostra attenzione sullo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$ , considerando quindi quasi esclusivamente vettori rappresentati da  $n$ -ple di numeri reali.

**Esempio 2.4** Dato lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^n$  e presi i vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

definiamo il **prodotto scalare standard** mediante la

$$\langle x, y \rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = x^T y.$$

**Esempio 2.5** Dato lo spazio vettoriale  $C^0([a, b])$  delle funzioni di variabile reale, continue nell'intervallo chiuso  $[a, b]$ , è possibile introdurre il seguente prodotto scalare (si lascia la verifica per esercizio)

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in C^0([a, b]).$$

**Definizione 2.8** Sia dato (per semplicità) lo spazio vettoriale  $V^n(\mathbb{R})$ , introduciamo la **norma** di un vettore  $x \in V^n(\mathbb{R})$ , definita come la funzione da  $V^n(\mathbb{R})$  in  $\mathbb{R}^+$ , indicata come  $\|\bullet\|$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

- a)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in V^n(\mathbb{R})$ , con  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- b)  $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ,  $\forall x \in V^n(\mathbb{R})$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in V^n(\mathbb{R})$ .

□

**Esempio 2.6** Sia dato il generico vettore di  $\mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Possiamo definire le seguenti tre norme di uso frequente (si lascia per esercizio la verifica che soddisfino le proprietà della norma):

- $\|x\|_1 \doteq |x_1| + \dots + |x_n|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\|x\|_2 \doteq (x^T x)^{1/2} = [x_1^2 + \dots + x_n^2]^{1/2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .
- $\|x\|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Esempio 2.7** Si osservi che avendo introdotto la definizione di norma, è possibile introdurre attraverso quest'ultima il concetto di **distanza** tra due punti di  $\mathbb{R}^n$ . In particolare, definiamo la distanza  $d(\bar{x}, \bar{y})$  tra i due punti  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ , mediante la

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

Si noti che considerando le proprietà della norma, possiamo direttamente dedurre per la distanza  $d(\bar{x}, \bar{y})$  tra  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  quanto segue:

1.  $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$  con  $d(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ ,
2.  $d(\alpha \bar{x}, \alpha \bar{y}) = |\alpha|d(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,
3.  $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$ .



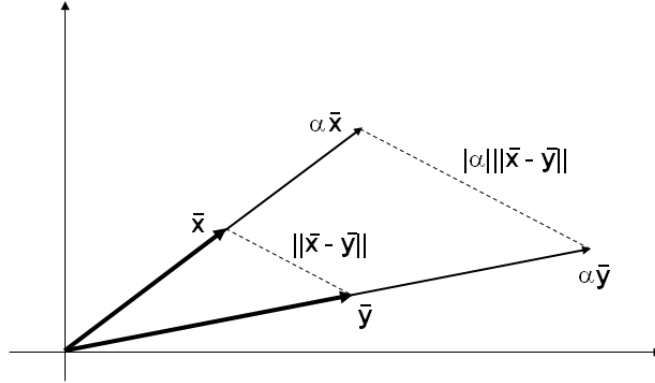


Figura 5: La proprietà 2. della distanza.

La Figura 5 fornisce una rappresentazione grafica della proprietà 2. della funzione **di-**  
**stanza**, meno intuitiva delle proprietà 1. e 3. Si noti che i triangoli di vertice l'origine e  
di basi rispettivamente  $\|\bar{x} - \bar{y}\|$  e  $|\alpha|\|\bar{x} - \bar{y}\|$  sono *simili*, quindi per il Teorema di Talete  
tra triangoli simili si ha

$$\frac{\|\alpha\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \frac{\|\alpha\bar{y}\|}{\|\bar{y}\|} = \frac{\|\alpha(\bar{x} - \bar{y})\|}{\|\bar{x} - \bar{y}\|} = |\alpha|.$$

**Definizione 2.9** Data la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , si dice che  $f(x)$  è **lineare** in  $\mathbb{R}^n$  se  
soddisfa le relazioni

- 1)  $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$
- 2)  $f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Equivalentemente, le condizioni 1) e 2) possono essere compattate nell'unica condizione

$$f[\alpha x + \beta y] = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

□

**Esempio 2.8** La funzione  $f_1(x) = c^T x$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$  risulta essere lineare (lasciato per  
verifica allo studente), mentre la funzione  $f_2(x) = \bar{c} + c^T x$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{c} \in \mathbb{R}$  non è  
lineare, infatti si ha

$$f_2(x + y) = \bar{c} + c^T(x + y) = \bar{c} + c^T x + c^T y = f_2(x) + f_2(y) - \bar{c}.$$

Comunque in letteratura è spesso invalso l'uso improprio di identificare come 'lineare'  
anche la funzione  $f_2(x)$ .

**Definizione 2.10** Data la funzione  $g(x)$ , con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diremo che  $g(x)$  è una funzione **affine** in  $\mathbb{R}^n$  se esiste una funzione  $f(x)$ , lineare in  $\mathbb{R}^n$ , ed una costante  $\bar{c} \in \mathbb{R}$ , tali che

$$g(x) = f(x) + \bar{c}.$$

□

**Esempio 2.9** Pertanto la funzione  $f_2(x) = \bar{c} + c^T x$  nell'Esempio 2.8, con  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{c} \in \mathbb{R}$ , è una funzione affine. Si fa osservare anche che dalle definizioni di funzione lineare e funzione affine, ogni funzione lineare è anche una funzione affine (basta infatti prendere  $\bar{c} = 0$ ), mentre non è vero il viceversa, in quanto vi sono funzioni affini che non sono lineari (per esempio la funzione  $g(x) = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 7$ ).

### 3 Richiami sulle funzioni continuamente differenziabili

In questa sezione consideriamo alcuni rudimenti di calcolo in  $\mathbb{R}^n$ , relativi a funzioni reali di  $n$  variabili. Dal momento che risulta essenziale riportare alcuni risultati che richiedano l'uso di derivate, si ha la seguente definizione.

**Definizione 3.1** *Data la funzione  $f(x)$ , con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diremo che  $f(x)$  è  $p$  volte continuamente differenziabile sull'insieme chiuso  $\mathcal{A}$ , se nell'insieme aperto  $\mathcal{B}$ , con  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , esistono continue le derivate parziali/miste della  $f(x)$  fino all'ordine  $p$ .  $\square$*

Si noti inoltre che nel seguito ci riferiremo al *gradiente*  $\nabla f(x)$  ed all'*Hessiano*  $\nabla^2 f(x)$  della funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiti mediante le

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Si osservi che in particolare nel caso  $n = 1$ , ovvero vi sia una sola variabile, le definizioni del vettore gradiente  $\nabla f(x)$  e della matrice Hessiana  $\nabla^2 f(x)$  si riducono alle note definizioni di derivata prima e seconda della funzione  $f(x)$ . Inoltre è di particolare interesse la direzione del gradiente  $\nabla f(x)$  nel punto  $x$ , ai fini dello studio dei problemi di Programmazione Matematica. Infatti, così come nel caso in cui  $n = 1$  la derivata  $f'(x)$  della funzione nel punto  $x$  rappresenta il *tasso di crescita* della funzione stessa nel punto  $x$  (essendo  $f'(x)$  il coefficiente angolare della retta tangente ad  $f(x)$  nel punto  $x$ ), così per  $n \geq 2$  si ha un'interpretazione suggerita dal seguente lemma.

**Lemma 3.1** *Sia data la funzione  $f(x)$ , con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ed  $f(x)$  continuamente differenziabile in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , allora  $d = \nabla f(\bar{x}) / \|\nabla f(\bar{x})\|_2$  rappresenta la direzione a norma Euclidea unitaria che massimizza lo sviluppo di Taylor  $f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d$  in  $\bar{x}$ , troncato al primo ordine. I.e., la direzione*

$$d = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|_2}$$

*è soluzione del problema*

$$\max_{\|d\|_2=1} \{f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d\}. \quad (4)$$

**Dim.**

Considerato che per  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  la quantità  $f(\bar{x})$  è costante, la funzione obiettivo in (4) assume banalmente il valore massimo, al variare di  $d$ , quando è massima la quantità scalare  $\nabla f(\bar{x})^T d$ . Per la definizione stessa di prodotto scalare, la precedente derivata direzionale è massima se  $d$  è parallelo ed equiverso a  $\nabla f(\bar{x})$ . Inoltre, dovendo essere anche  $\|d\|_2 = 1$ , la funzione obiettivo in (4) è massima se  $d = \nabla f(\bar{x}) / \|\nabla f(\bar{x})\|_2$ .  $\square$

Nel seguito faremo ampio uso dei seguenti due risultati (**Teoremi del Valor Medio**), dei quali però non diamo esplicita dimostrazione (si veda anche [Be95]).

**Teorema 3.1** *Data la funzione  $f(x)$  sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente differenziabile nella sfera aperta  $S(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \rho\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\rho > 0$ . Esiste un valore  $\theta \in [0, 1]$  tale che per ogni  $y \in S(x, \rho)$*

1.  $f(y) = f(x) + \nabla f[x + \theta(y - x)]^T (y - x)$ ,
2.  $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + o(\|y - x\|)$ ,

ove per definizione

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{o(\|y - x\|)}{\|y - x\|} = 0.$$

$\square$

Nel caso in cui  $n = 1$ , il teorema precedente si riduce al classico Teorema di Taylor per funzioni di una sola variabile, in base al quale valgono le due relazioni ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  e  $\theta \in [0, 1]$ )

1.  $f(y) = f(x) + f'[x + \theta(y - x)](y - x)$ ,
2.  $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + o(|y - x|)$ , ove ora  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{o(|y - x|)}{|y - x|} = 0$ .

In Figura 6 viene data in particolare un'interpretazione grafica della 2., nel caso di funzione *nonlineare*. Similmente, in Figura 7 viene data un'interpretazione grafica della 2., nel caso di funzione *lineare*.

**Teorema 3.2** *Data la funzione  $f(x)$  sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  due volte continuamente differenziabile nella sfera aperta  $S(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \rho\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\rho > 0$ . Esiste un valore  $\theta \in [0, 1]$  tale che per ogni  $y \in S(x, \rho)$*

1.  $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f[x + \theta(y - x)](y - x)$ ,
2.  $f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(x)(y - x) + o(\|y - x\|^2)$ ,

ove per definizione

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{o(\|y - x\|^2)}{\|y - x\|^2} = 0.$$

$\square$

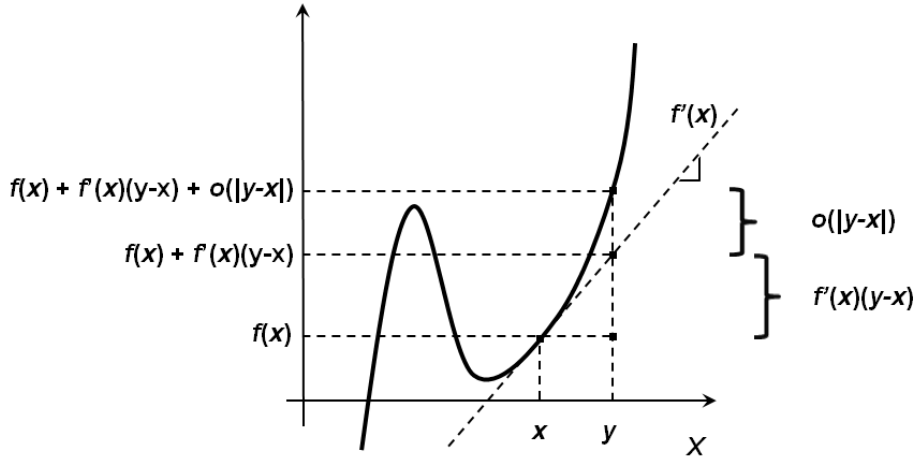


Figura 6: Rappresentazione grafica del Teorema del Valor Medio (Teorema 3.1) per una funzione *nonlineare*.

Nel caso in cui  $n = 1$ , di nuovo il teorema precedente si riduce al classico Teorema di Taylor per funzioni di una sola variabile, ma ora si ha  $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } \theta \in [0, 1])$

1.  $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)[x + \theta(y - x)](y - x)^2$ ,
2.  $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2 + o[(y - x)^2]$ , ove ora  $\lim_{y \rightarrow x} \frac{o[(y - x)^2]}{(y - x)^2} = 0$ .

**Proposizione 3.1** Sia  $f(x)$  (una volta) continuamente differenziabile in  $\mathbb{R}^n$ . Si dice che la funzione  $f(x)$  ammette nel punto  $x \in \mathbb{R}^n$  la **derivata direzionale**  $D(f, d)$ , lungo la direzione  $d \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , se esiste il limite

$$D(f, d) \doteq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha}.$$

Vale il seguente risultato

$$D(f, d) \doteq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \nabla f(x)^T d.$$

### Dim.

Dalla 2. del Teorema 3.1 si avrà per ogni  $y$  appartenente alla sfera aperta  $S(x, \rho)$

$$f(y) - f(x) = \nabla f(x)^T (y - x) + o(\|y - x\|)$$

e scelto  $y = x + \alpha d$ , con  $\alpha > 0$  limitato e  $d \in \mathbb{R}^n$ , si ottiene (lo studente osservi che dati i vettori  $v, w \in \mathbb{R}^n$  e lo scalare  $\alpha \in \mathbb{R}$ , per le proprietà del prodotto scalare si ha

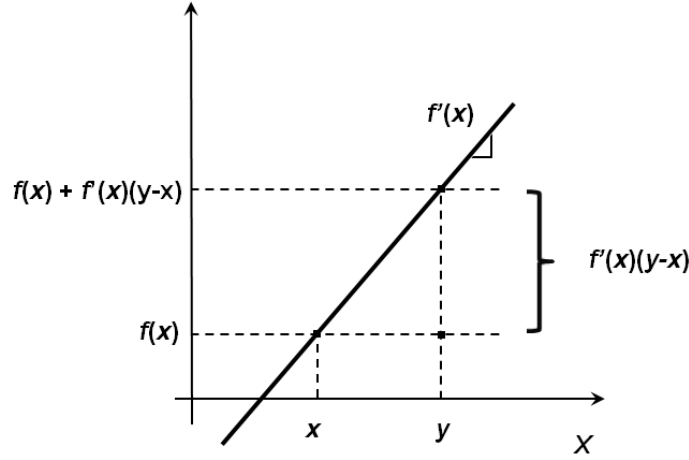


Figura 7: Rappresentazione grafica del Teorema del Valor Medio (Teorema 3.1) per una funzione *lineare*. Si noti che in quest'ultimo caso risulta  $f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) = f(x) + f'(x)(y - x) + o(|y - x|)$ .

$$v^T(\alpha w) = \alpha v^T w)$$

$$f(x + \alpha d) - f(x) = \alpha \nabla f(x)^T d + o(\|\alpha d\|). \quad (5)$$

Infine, poichè  $y \in S(x, \rho)$  risulta  $\|\alpha d\|$  limitata; dividendo la (5) per  $\alpha$  e passando al limite per  $\alpha \rightarrow 0^+$  si ottiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \nabla f(x)^T d + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{o(\|\alpha d\|)}{\alpha \|d\|} \|d\| = \nabla f(x)^T d.$$

□

Si noti che la *derivata parziale*  $i$ -ma della funzione  $f(x)$  coincide con la derivata direzionale della  $f(x)$  lungo la direzione dell'asse coordinato  $i$ -mo, ovvero

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon e_i) - f(x)}{\varepsilon} = \nabla f(x)^T e_i.$$

La derivata direzionale è soggetta ad una duplice interpretazione notevole:

- Ricordiamo che la derivata per una funzione di una sola variabile reale rappresenta la variazione della funzione lungo l'asse delle ascisse. Pertanto la derivata direzionale generalizza tale risultato e rappresenta la variazione della funzione lungo la direzione  $d \in \mathbb{R}^n$ . In particolare se  $d = e_i$ , come si è visto, la derivata direzionale rappresenterà la variazione della funzione lungo l'asse coordinato  $i$ -simo.
- Osservando i Teoremi della Media e la definizione di derivata direzionale, si noti che la derivata direzionale può scriversi anche come

$$D(f, d) = f(x + d) - f(x) - o(\|d\|),$$

ovvero quando  $\|d\|$  è piccola (ovvero *trascurando*  $o(\|d\|)$ ) la derivata direzionale  $D(f, d)$  approssima bene la variazione della funzione  $f(x + d) - f(x)$ , passando da  $x$  ad  $x + d$ . Di conseguenza, qualora fossimo interessati (si vedrà nel seguito) a rendere minima la quantità  $f(x + d) - f(x)$ , dovremmo equivalentemente rendere minima la derivata direzionale  $D(f, d)$ . Si ritornerà su questo punto parlando nello specifico dei problemi di minimizzazione (in particolare per le funzioni lineari).

Si consideri ora la sequenza di punti  $\{x_k\}$ , con  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 1$ . Allora si hanno le seguenti definizioni:

**Definizione 3.2** *La sequenza (o successione)  $\{x_k\}$  si dice convergente al punto  $x^* \in \mathbb{R}^n$  se fissato un qualsiasi valore  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $k_\varepsilon \geq 1$  tale che **per ogni**  $k > k_\varepsilon$ , risulta  $\|x_k - x^*\| < \varepsilon$ , ovvero in formule*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_\varepsilon \geq 1 \quad \text{t.c.} \quad \forall k > k_\varepsilon, \quad \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

□

**Definizione 3.3** *Dato il punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , definiamo **intorno** di  $\bar{x}$  di ampiezza  $\delta$ , indicato come  $I(\bar{x}, \delta)$ , l'insieme*

$$I(\bar{x}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}.$$

*Diremo poi che l'**intorno**  $I(\bar{x}, \delta)$  è **aperto** se è definito mediante la*

$$I(\bar{x}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \delta\}.$$

□

Dalla definizione precedente ricaviamo anche la definizione di *algoritmo (sequenza di istruzioni) iterativo convergente*, data di seguito:

**Definizione 3.4** *Dato l'algoritmo iterativo  $\mathcal{A}$ , sia  $\{x_k\}$  la sequenza di punti da esso generata. Diremo che  $\mathcal{A}$  è convergente se la sequenza  $\{x_k\}$  è convergente.*

□

## 4 Introduzione alla Programmazione Matematica

In questa sezione introduciamo alcuni concetti basilari per definire ed analizzare problemi di Programmazione Matematica. A tale scopo, prima di definire più in dettaglio cosa intendiamo esattamente con il termine di *Programmazione Matematica*, introduciamo alcune definizioni relative ai punti **stazionari** (detti anche **critici**), che risolvono un problema del tipo

$$\min_{x \in C} f(x) \quad \text{oppure} \quad \max_{x \in C} f(x) \quad (6)$$

Nel seguito ci occuperemo in particolare solo di problemi del tipo (6) per i quali  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nella letteratura (si veda anche [HiLi05, Be82, Be95]), i problemi (6) sono detti problemi di **Programmazione Matematica**, per i quali in generale vengono identificati i seguenti tre elementi essenziali:

- l'insieme delle **variabili**  $x$  del problema, appartenenti ad uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ ,
- la **funzione obiettivo**  $f(x)$  da massimizzare oppure minimizzare;
- un insieme dei **vincoli** del problema che devono essere soddisfatti. L'insieme dei valori (vettori di dimensione  $n$ ) che soddisfano i vincoli sono dette **soluzioni ammissibili**.

La soluzione di problemi del tipo (6) consiste nel trovare (se esistono), tra tutte le soluzioni ammissibili del problema, quella/quelle che rende/rendono minima/massima la funzione obiettivo. Pertanto, in generale il problema (6) è costituito dai *due* seguenti problemi distinti, la cui soluzione deve essere cercata simultaneamente:

- trovare il/i punto/punti  $x \in \mathbb{R}^n$  tale/tali che  $x \in C$  (problema di *ammissibilità*);
- trovare il/i punto/punti tale/tali che la funzione  $f(x)$  sia minimizzata/massimizzata (problema di *ottimalità*).

Caratterizziamo ora più in dettaglio le possibili soluzioni dei problemi di programmazione matematica (6).

**Definizione 4.1** Dato l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il punto  $x^* \in C$  è un punto di **minimo locale** della  $f(x)$  su  $C$ , se esiste una sfera aperta  $S(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \rho\}$  di centro  $x^*$  e raggio  $\rho > 0$ , tale che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in S(x^*, \rho) \cap C.$$

Se la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto, per ogni  $x \in C$ ,  $x \neq x^*$ , si dirà che il punto  $x^*$  è un punto di **minimo locale stretto** della  $f(x)$  su  $C$ . □

In maniera del tutto analoga possiamo definire punti di *massimo locale* e *massimo locale stretto*, invertendo il verso delle disuguaglianze nella definizione precedente.



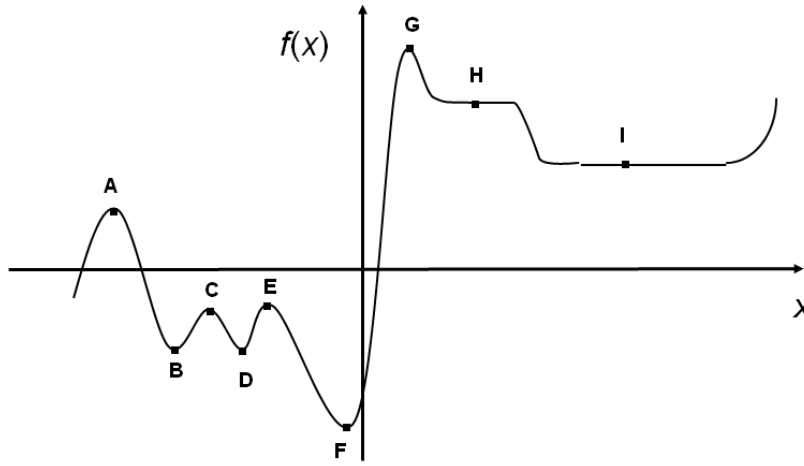


Figura 8: Massimi e minimi locali/globali della funzione  $f(x)$  in  $\mathbb{R}^n$ : i punti  $B$  e  $D$  sono punti di *minimo locale stretto*; il punto  $F$  è un punto di *minimo globale unico* (nell'intervallo mostrato); i punti  $A$ ,  $C$  ed  $E$  sono punti di *massimo locale stretto*; il punto  $G$  è un punto di *massimo globale unico* (nell'intervallo mostrato); i punti  $H$  ed  $I$  sono al contempo punti di *massimo locale* e *minimo locale* (non stretto, in quanto la  $f(x)$  è “piatta” in un loro intorno).

**Definizione 4.2** Dato l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il punto  $x^* \in C$  è un punto di **massimo locale** della  $f(x)$  su  $C$ , se esiste una sfera aperta  $S(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \rho\}$  di centro  $x^*$  e raggio  $\rho > 0$ , tale che

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in S(x^*, \rho) \cap C.$$

Se la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto, per ogni  $x \in C$ ,  $x \neq x^*$ , si dirà che il punto  $x^*$  è un punto di **massimo locale stretto** della  $f(x)$  su  $C$ . □

Sulla falsariga delle precedenti definizioni possiamo introdurre le seguenti, relative a minimi e massimi globali per la funzione  $f(x)$ .

**Definizione 4.3** Dato l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il punto  $x^* \in C$  è un punto di **minimo globale** della  $f(x)$  su  $C$ , se

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in C.$$

Se la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto, per ogni  $x \in C$ ,  $x \neq x^*$ , si ha che il punto  $x^*$  è **minimo globale unico** della  $f(x)$  su  $C$ . □

**Definizione 4.4** Dato l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , il punto  $x^* \in C$  è un punto di **massimo globale** della  $f(x)$  su  $C$ , se

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x \in C.$$

Se la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto, per ogni  $x \in C$ ,  $x \neq x^*$ , si ha che il punto  $x^*$  è **massimo globale unico** della  $f(x)$  su  $C$ . □

È immediato particularizzare le definizioni precedenti al caso  $C = \mathbb{R}^n$ , corrispondente alla ricerca di punti di minimo e/o massimo in problemi *non vincolati*. Nelle presenti note tratteremo nello specifico il caso vincolato, ove in generale è  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . La Figura 8 descrive alcuni esempi di punti di minimo locale/globale e massimo locale/globale.

## 5 Proprietà e struttura dei problemi convessi

In questa sezione vogliamo introdurre espressamente la definizione di *insieme convesso* e di *funzione convessa*. Utilizzeremo poi queste ultime per caratterizzare le proprietà di problemi di programmazione matematica nei quali l'insieme ammissibile risulta convesso e la funzione obiettivo è convessa sull'insieme ammissibile. Si mostrerà nel seguito che molti problemi applicativi ammettono modelli convessi (in cui quindi sia la funzione obiettivo sia le funzioni che definiscono i vincoli sono convesse).

**Definizione 5.1** Dato l'insieme non vuoto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , diremo che  $C$  è un **insieme convesso** se

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C, \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

□

Si noti equivalentemente, che un insieme non vuoto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  è convesso se la combinazione convessa di qualsiasi coppia di suoi punti appartiene ancora a  $C$ . Geometricamente (si veda la Figura 9) si osservi che la quantità  $\alpha x + (1 - \alpha)y$ , al variare di  $\alpha \in [0, 1]$ , rappresenta tutti i punti del segmento che congiunge  $x$  ed  $y$  (spesso indicato anche con  $[x, y]$ ).

**Esempio 5.1** In particolare sono insiemi convessi (si lascia al lettore la verifica)  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^+$ , mentre ovviamente gli insiemi dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  e dei numeri interi  $\mathbb{Z}$  non sono convessi. Inoltre consideriamo convesso anche l'insieme vuoto  $\emptyset$ .

**Esercizio 7** Si dimostri che dato l'insieme convesso e non vuoto  $C \subset \mathbb{R}^n$ , l'insieme  $\bar{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin C\}$  (insieme complemento di  $C$  in  $\mathbb{R}^n$ ) è non convesso.

**Proposizione 5.1** Dati gli insiemi convessi  $C_1, \dots, C_m$ , con  $m \geq 1$ , allora l'insieme intersezione degli  $m$  insiemi

$$C = C_1 \cap \dots \cap C_m$$

è a sua volta un insieme convesso.

**Dim.**

Infatti, se  $C$  è vuoto o contiene un solo elemento, la proposizione è dimostrata immediatamente. In generale invece, presi comunque due punti distinti  $x, y \in C$ , mostriamo che anche  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$ , per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ .

Poichè  $x, y \in C$  allora  $x, y \in C_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e per la convessità di ogni singolo insieme  $C_i$ , sarà anche  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C_i$ , per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ . Di conseguenza, dal momento che il generico punto  $\alpha x + (1 - \alpha)y$ , per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , appartiene a ciascuno degli insiemi  $C_1, \dots, C_m$ , allora apparterrà anche alla loro intersezione  $C$  (si veda anche la Figura 10).

□

**Esempio 5.2** In generale l'unione di due insiemi convessi non è un insieme convesso (si lascia per esercizio allo studente).

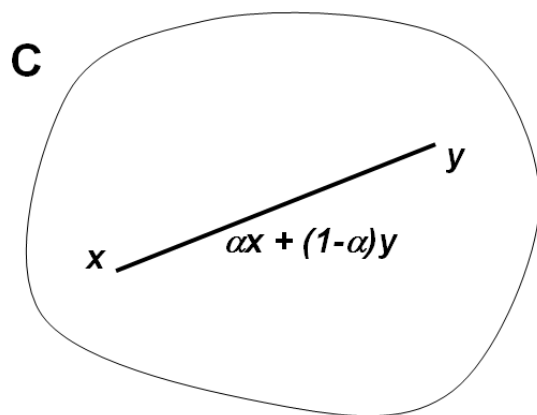


Figura 9: Il segmento congiungente  $x$  ed  $y$  è l'insieme dei punti  $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ , al variare di  $\alpha \in [0, 1]$ .

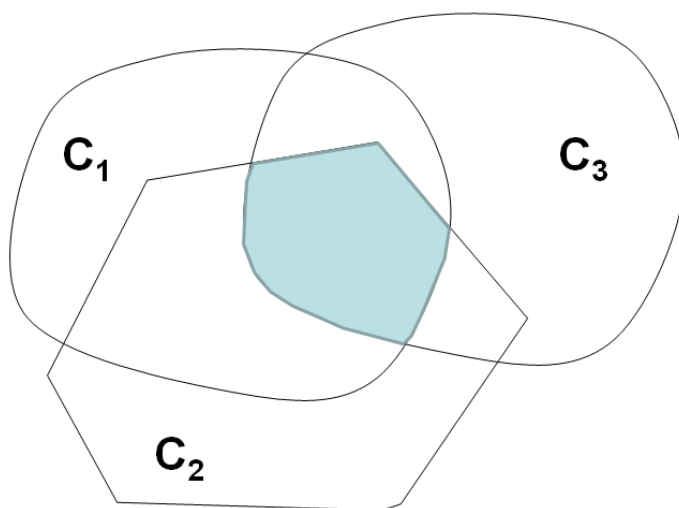


Figura 10: L'intersezione dei tre insiemi convessi  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  (figura ombreggiata) è a sua volta un insieme convesso.

**Esempio 5.3** Un altro esempio di insieme convesso è dato dall'insieme delle funzioni (scalari) reali,  $p$  volte continuamente differenziabili in  $\mathbb{R}^n$  (si lascia anche questo come esercizio da svolgere).

**Esempio 5.4** L'insieme di  $\mathbb{R}^n$  definito mediante la

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : [x_1^2 + \cdots + x_n^2]^{1/2} \leq a, \quad a > 0\}$$

(luogo dei punti di  $\mathbb{R}^n$  interni ad una sfera di centro l'origine e raggio  $a \geq 0$ ) è un insieme convesso. Infatti, presi  $\bar{x}, \bar{y} \in C$  e preso  $\alpha \in [0, 1]$  si ha per la combinazione convessa  $w$  di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  l'espressione

$$w = \alpha \bar{x} + (1 - \alpha) \bar{y}.$$

Inoltre si osservi che  $C$  può equivalentemente essere descritto analiticamente dalla condizione

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq a\}.$$

Pertanto nel nostro caso, volendo verificare se  $w \in C$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , si ha per le proprietà della norma

$$\begin{aligned} \|w\| &= \|\alpha \bar{x} + (1 - \alpha) \bar{y}\| \leq |\alpha| \|\bar{x}\| + |1 - \alpha| \|\bar{y}\| \\ &= \alpha \|\bar{x}\| + (1 - \alpha) \|\bar{y}\| \leq \alpha a + (1 - \alpha) a = a, \end{aligned}$$

quindi  $w \in C$ ,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ . Si noti che geometricamente l'insieme  $C$  di questo esempio rappresenta come si è detto il luogo dei punti racchiusi nella sfera di centro l'origine e raggio  $a$ , descritta dall'equazione

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2,$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T I \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a^2,$$

essendo  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice identità (ovvero la matrice quadrata con tutti elementi nulli, tranne gli elementi lungo la diagonale principale - pari ad 1).

**Definizione 5.2** Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dato l'insieme non vuoto convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che la funzione  $f(x)$  è **convessa sull'insieme  $C$** , se per ogni coppia di punti  $x, y \in C$ , risulta verificata la seguente proprietà

$$f[\alpha x + (1 - \alpha)y] \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

La funzione  $f(x)$  si dice **strettamente convessa** su  $C$  qualora la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto con  $x \neq y$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . □

In maniera del tutto analoga (si vedano le Figure 11 e 12), invertendo il verso della disuguaglianza nella definizione precedente, possiamo introdurre la definizione di funzione

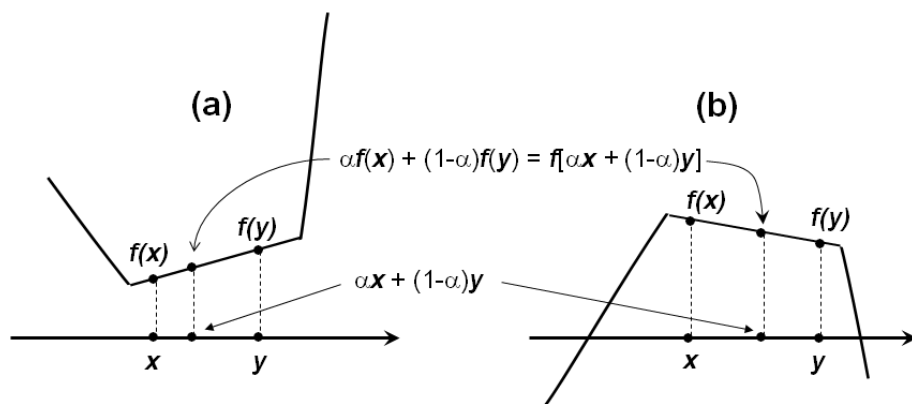


Figura 11: Significato geometrico della definizione di *convessità* (a) e di *concavità* (b) per una funzione continua.

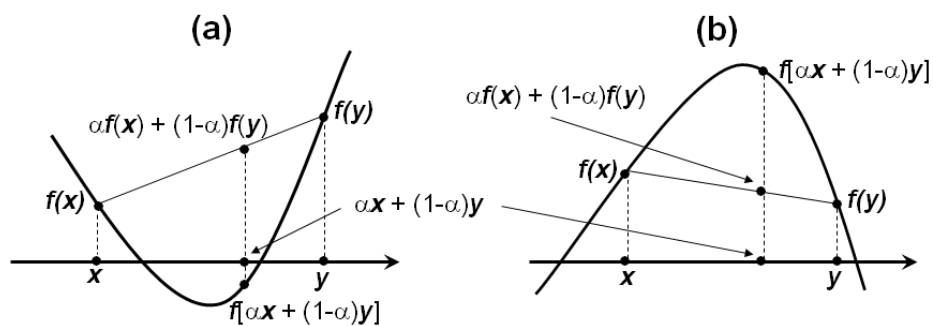


Figura 12: Significato geometrico della definizione di *stretta convessità* (a) e di *stretta concavità* (b) per una funzione continua.

concava e di funzione *strettamente concava* come segue.

**Definizione 5.3** Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dato l'insieme non vuoto convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che la funzione  $f(x)$  è **concava sull'insieme  $C$** , se per ogni coppia di punti  $x, y \in C$ , risulta verificata la seguente proprietà

$$f[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

La funzione  $f(x)$  si dice **strettamente concava** su  $C$  qualora la disuguaglianza precedente è verificata in senso stretto con  $x \neq y$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . □

Dalle definizioni di funzione convessa e funzione concava su un insieme convesso, segue immediatamente il seguente risultato.

**Lemma 5.1** Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; dato l'insieme non vuoto convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , se  $f(x)$  è convessa su  $C$  allora la funzione  $g(x) = -f(x)$  è concava su  $C$ .

**Dim.**

Dalla convessità di  $f(x)$  segue che

$$f[\alpha x + (1 - \alpha)y] \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

da cui moltiplicando per  $-1$  si ottiene

$$-f[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha [-f(x)] + (1 - \alpha)[-f(y)], \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

ovvero la definizione stessa di concavità della funzione  $-f(x)$  sull'insieme  $C$ . □

**Esempio 5.5** La funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = |x|$ , è convessa su  $\mathbb{R}$ . Infatti presi  $x, y \in \mathbb{R}$  e considerato  $\alpha \in [0, 1]$ , sarà

$$\begin{aligned} f[\alpha x + (1 - \alpha)y] &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \leq |\alpha x| + |(1 - \alpha)y| = |\alpha| \cdot |x| + |1 - \alpha| \cdot |y| \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \end{aligned}$$

**Esempio 5.6** La funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = x$  è al contempo concava e convessa. Infatti basta applicare entrambe le definizioni di concavità e convessità e notare che sono verificate con l'uguaglianza.

**Proposizione 5.2** Data la funzione  $g(x)$ , con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ed affine, allora  $g(x)$  è al contempo concava e convessa su  $\mathbb{R}^n$ .

**Dim.**

Dalla definizione di funzione affine risulta  $g(x) = f(x) + \bar{c}$ , con  $f(x)$  lineare e  $\bar{c} \in \mathbb{R}$ .

Pertanto, presa una qualsiasi coppia di punti  $x, y \in \mathbb{R}^n$  ed uno scalare  $\alpha \in [0, 1]$ , si avrà

$$\begin{aligned}
g[\alpha x + (1 - \alpha)y] &= f[\alpha x + (1 - \alpha)y] + \bar{c} = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) + \bar{c} \\
&= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) + \alpha \bar{c} + (1 - \alpha)\bar{c} \\
&= \alpha[f(x) + \bar{c}] + (1 - \alpha)[f(y) + \bar{c}] \\
&= \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).
\end{aligned} \tag{7}$$

Pertanto, dalla (7) per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  la funzione  $g(x)$  soddisfa contemporaneamente le condizioni

$$g[\alpha x + (1 - \alpha)y] \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

$$g[\alpha x + (1 - \alpha)y] \geq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y),$$

ovvero è al contempo convessa e concava su  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Si consideri ora la disuguaglianza generale  $f(x) \leq a$ , essendo  $f(x)$  la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $a \in \mathbb{R}$ . In generale l'insieme delle sue soluzioni

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq 0\}$$

non presenta caratteristiche specifiche, potendo avere natura qualsiasi. Ci chiediamo ora sotto quali condizioni per la funzione  $f(x)$  sia possibile garantire alcune caratteristiche dell'insieme  $I$ . Abbiamo a tal proposito il seguente risultato:

**Proposizione 5.3** *Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $f(x)$  convessa su  $\mathbb{R}^n$ . L'insieme di livello (eventualmente vuoto)  $\mathcal{L}_\gamma$  definito mediante la*

$$\mathcal{L}_\gamma \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \gamma\}$$

*è convesso per ogni  $\gamma \in \mathbb{R}$ .*

**Dim.**

Fissato  $\gamma \in \mathbb{R}$  avremo tre casi possibili:  $\mathcal{L}_\gamma$  è vuoto (quindi convesso),  $\mathcal{L}_\gamma$  contiene un solo elemento (quindi è convesso), infine  $\mathcal{L}_\gamma$  contiene almeno due elementi. In quest'ultimo caso  $\mathcal{L}_\gamma$  non può contenere esattamente due punti distinti  $y$  ed  $z$ , altrimenti dalla convessità di  $f$  ogni punto nel segmento chiuso  $[y, z]$  deve appartenere a  $\mathcal{L}_\gamma$ . Siano allora  $y$  e  $z$  due punti di  $\mathcal{L}_\gamma$ . Si ha pertanto  $f(y) \leq \gamma$  e  $f(z) \leq \gamma$ . Inoltre, considerato al variare di  $\lambda \in [0, 1]$  il punto

$$w = \lambda y + (1 - \lambda)z,$$

si ha per la convessità di  $f(x)$  su  $\mathbb{R}^n$

$$f(w) = f[\lambda y + (1 - \lambda)z] \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) \leq \lambda \gamma + (1 - \lambda)\gamma = \gamma.$$

Quindi si ha anche  $w \in \mathcal{L}_\gamma$ , per ogni scelta di  $y \in \mathcal{L}_\gamma$  e  $z \in \mathcal{L}_\gamma$ , di conseguenza risulta  $\mathcal{L}_\gamma$  convesso.  $\square$



**Definizione 5.4** Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ed il parametro  $\gamma \in \mathbb{R}$ , definiamo **curva di livello**  $c_\gamma(x)$  della  $f(x)$ , l'insieme (eventualmente vuoto)

$$c_\gamma(x) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \gamma\},$$

al variare di  $\gamma$ . □

**Esempio 5.7** Data la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ , allora risulta per  $\gamma = 1$

$$c_1(x) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 2x = 0\} = \{0, 1\},$$

mentre per  $\gamma < 1/2$  risulta  $c_\gamma(x) = \emptyset$  (lasciato per esercizio). Si osservi che nel primo caso (i.e.  $\gamma = 1$ ), pur essendo  $f(x)$  convessa su  $\mathbb{R}$  risulta che la curva di livello  $c_1(x)$  NON è un insieme convesso.

**Teorema 5.1** Dato l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , siano  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , funzioni convesse su  $C$ . Siano dati i coefficienti  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , allora le funzioni

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x),$$

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i(x)\},$$

sono convesse su  $C$ .

### Dim.

L'asserto è banalmente vero se  $C = \emptyset$  oppure  $C$  contiene un solo elemento. Supposto allora  $C$  contenere almeno due punti, proviamo innanzitutto che la  $g(x)$  è convessa. Per ogni  $x, y \in C$  ed  $\alpha \in [0, 1]$ , dalla convessità di  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  ed essendo  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , si avrà

$$\begin{aligned} g[\alpha x + (1 - \alpha)y] &= \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i[\alpha x + (1 - \alpha)y] \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i [\alpha f_i(x) + (1 - \alpha)f_i(y)] \\ &= \alpha \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(y) = \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y), \end{aligned}$$

la qual cosa prova la convessità di  $g(x)$  su  $C$ .

Proviamo ora la convessità di  $f(x)$ . Per ogni fissata coppia di punti  $x, y \in C$  ed  $\alpha \in [0, 1]$  esiste un indice  $i$  tale che

$$\begin{aligned} f[\alpha x + (1 - \alpha)y] &\doteq \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i[\alpha x + (1 - \alpha)y]\} \\ &= \lambda_i f_i[\alpha x + (1 - \alpha)y], \end{aligned}$$

con  $\alpha \in [0, 1]$ . Per la convessità della funzione  $f_i(x)$  su  $C$  si ha inoltre

$$f[\alpha x + (1 - \alpha)y] = \lambda_i f_i[\alpha x + (1 - \alpha)y]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda_i [\alpha f_i(x) + (1 - \alpha) f_i(y)] \\
&= \lambda_i \alpha f_i(x) + \lambda_i (1 - \alpha) f_i(y) \\
&\leq \alpha \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i(x)\} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i f_i(y)\} \\
&= \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y),
\end{aligned}$$

che prova la convessità della funzione  $f(x)$  su  $C$ .  $\square$

**Osservazione 5.1** Dal Teorema 5.1, ponendo  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$ , si ottiene direttamente che la somma di funzioni convesse è ancora una funzione convessa.

**Osservazione 5.2** Si consideri con attenzione l'importanza che nella definizione di convessità della funzione  $f(x)$  assume la convessità dell'insieme  $C$ .

**Proposizione 5.4** Dato l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  funzioni convesse su  $C$ . Sia inoltre

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0, \quad \forall x \in C, \\
\text{(b)} \quad & [f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \geq 0, \quad \forall x, y \in C,
\end{aligned} \tag{8}$$

allora la funzione

$$h(x) = f(x)g(x)$$

è convessa su  $C$ .

**Dim.**

Per la convessità di  $f(x)$  e  $g(x)$  su  $C$  risulterà, per ogni  $x, y \in C$  e per  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned}
f[\lambda x + (1 - \lambda)y] &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \\
g[\lambda x + (1 - \lambda)y] &\leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).
\end{aligned}$$

Quindi, essendo  $g(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in C$ , si avrà

$$\begin{aligned}
f[\lambda x + (1 - \lambda)y] g[\lambda x + (1 - \lambda)y] &\leq [\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)] g[\lambda x + (1 - \lambda)y] \\
&\leq \lambda f(x) g[\lambda x + (1 - \lambda)y] \\
&\quad + (1 - \lambda) f(y) g[\lambda x + (1 - \lambda)y].
\end{aligned} \tag{9}$$

Inoltre essendo  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in C$ , dalla convessità di  $g(x)$  su  $C$  risulterà per ogni  $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda f(x) g[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda^2 f(x) g(x) + \lambda(1 - \lambda) f(x) g(y) \tag{10}$$

$$(1 - \lambda) f(y) g[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda(1 - \lambda) f(y) g(x) + (1 - \lambda)^2 f(y) g(y).$$

Dalle (9) e (10) si avrà per ogni  $\lambda \in [0, 1]$  e per ogni  $x, y \in C$

$$h[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda^2 h(x) + \lambda(1 - \lambda) [f(x)g(y) + f(y)g(x)] + (1 - \lambda)^2 h(y), \tag{11}$$

mentre dalle condizioni (a) e (b) risulterà

$$[f(x) - f(y)] [g(x) - g(y)] \geq 0 \iff$$

$$f(x)g(x) - [f(x)g(y) + f(y)g(x)] + f(y)g(y) \geq 0 \iff$$

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y) = h(x) + h(y). \quad (12)$$

Dalle (11) e (12) si avrà infine, per ogni  $x, y \in C$  e  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h[\lambda x + (1 - \lambda)y] &\leq \lambda^2 h(x) + \lambda(1 - \lambda)[h(x) + h(y)] + (1 - \lambda)^2 h(y) \\ &= \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y), \end{aligned}$$

che prova la convessità di  $h(x)$  su  $C$ . □

È possibile dimostrare anche il seguente risultato, relativamente alla convessità, per funzioni continuamente differenziabili.

**Proposizione 5.5** *Sia dato l'insieme convesso non vuoto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  due volte continuamente differenziabile su un aperto contenente  $C$ . Allora  $f(x)$  è **convessa** su  $C$  se e solo se  $\forall x, y \in C$  è soddisfatta una qualsiasi delle seguenti condizioni:*

1.  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$
2.  $[\nabla f(y) - \nabla f(x)]^T(y - x) \geq 0$
3.  $(y - x)^T \nabla^2 f(x)(y - x) \geq 0$ .

*Inoltre la funzione  $f(x)$  è **strettamente convessa** su  $C$  se e solo se le disuguaglianze nelle prime due relazioni sono verificate in senso stretto, per ogni punto  $y \in C$ ,  $y \neq x$ .* □

Si osservi anche che con facili passaggi, data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x)$  due volte continuamente differenziabile su un aperto  $S$  contenente l'insieme  $C$ , allora risulta  $f(x)$  convessa su  $C$  se e solo se

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \quad \forall x \in C.$$

Infatti, se  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ ,  $\forall x \in C$ , Dal Teorema della Media esiste un valore  $\theta \in [0, 1]$  tale che, per ogni  $x, y \in C$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f[x + \theta(y - x)](y - x) \\ &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x), \end{aligned}$$

ovvero la 1. di Proposizione 5.5 è soddisfatta. Viceversa, dal punto 3. della Proposizione 5.5 risulta direttamente  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ ,  $\forall x \in C$ .

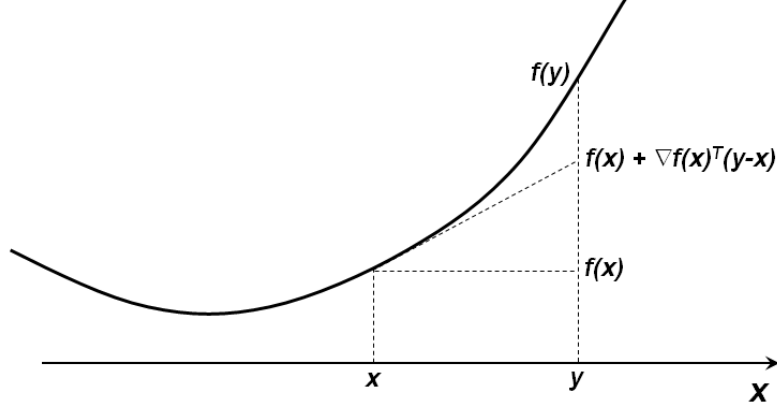


Figura 13: Significato geometrico della definizione di convessità, per funzioni continuamente differenziabili.

Si osservi invece che per la stretta convessità di  $f(x)$ , la condizione  $\nabla^2 f(x) \succ 0, \forall x \in C$ , è solo una condizione sufficiente ma non necessaria (infatti per es. la funzione  $f(x) = x^6$  è strettamente convessa nell'origine, pur essendo nell'origine nulla la sua derivata seconda).

La definizione di convessità di una funzione considerata finora, può essere indebolita in maniera consistente. Esempi di generalizzazioni del concetto di convessità, che spesso ricorrono nell'ambito dei problemi legati all'economia, sono la *pseudoconvessità* e la *quasi-convessità* (di cui per brevità omettiamo le definizioni).

**Osservazione importante 1** Si consideri nuovamente l'Esempio 1.3. Si noti che sia la funzione da minimizzare che i vincoli (relazioni matematiche che le variabili devono soddisfare), contengono le medesime variabili. Inoltre, esclusi i soli vincoli di interezza sulle variabili, il generico vincolo  $i$ -simo del problema è in una delle due forme (ricducibili l'una all'altra moltiplicando semplicemente per  $-1$ )

$$v_i(x) \leq a_i, \quad v_i(x) \geq a_i,$$

in cui  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $v_i(x)$  è una funzione lineare. Pertanto, considerando senza scapito di generalità il vincolo  $v_i(x) \leq a_i$  (analogamente per  $v_i(x) \geq a_i$ ) e riconsiderando la Proposizione 5.3, i valori di  $x \in \mathbb{R}^n$  che soddisfano il vincolo  $i$ -simo sono esattamente i punti dell'insieme di livello

$$\mathcal{L}_{a_i} = \{x \in \mathbb{R}^n : v_i(x) \leq a_i\}. \quad (13)$$

Essendo  $v_i(x)$  lineare (quindi convessa), per la Proposizione 5.3 l'insieme di livello (13) risulterà convesso. Allora, in sintesi, i punti che soddisfano ciascun vincolo dell'Esempio 1.3 formano un insieme convesso. Ricordando che noi chiediamo il soddisfacimento di tutti i vincoli contemporaneamente, ciò equivale ad effettuare l'intersezione degli insiemi

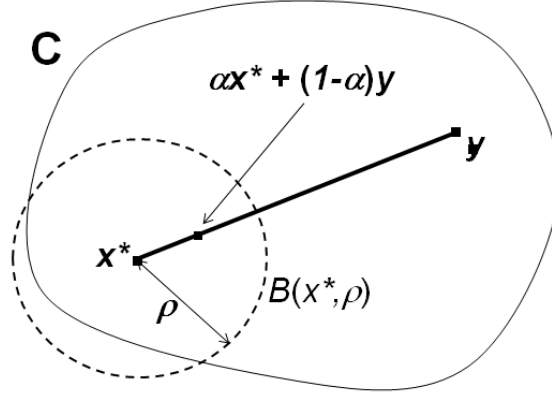


Figura 14: La geometria che sottende la dimostrazione del Teorema 5.6.

convessi  $\mathcal{L}_{a_1}, \mathcal{L}_{a_2}, \dots$ , ottenendo per la Proposizione 5.1, un insieme convesso. Terminiamo questo paragrafo mostrando che nei problemi per i quali

- la funzione da minimizzare è convessa,
- l'insieme dei punti che soddisfano i vincoli (ovvero l'insieme ammissibile) è convesso,

allora valgono importanti proprietà per le soluzioni. Questo giustifica in larga misura la necessità di aver introdotto la convessità quando vengono trattati problemi di ottimizzazione.

Diamo di seguito due risultati di grande importanza, per problemi che includono funzioni ed insiemi convessi. Tali risultati possono essere considerati la risultante di quanto introdotto in questa sezione. Dall'Osservazione precedente e dalle seguenti proposizioni dedurremo proprietà fondamentali dei problemi di Programmazione Matematica, di cui ci occuperemo più diffusamente nel seguito.

**Proposizione 5.6** Data la funzione  $f(x)$ , con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $f(x)$  convessa su  $C$ . Allora, ogni punto di minimo locale  $x^* \in C$ , per il problema di programmazione matematica

$$\min_{x \in C} f(x)$$

è anche un punto di minimo globale per lo stesso problema.

**Dim.**

Se l'insieme  $C$  è vuoto o contiene un solo punto, l'asserto è banalmente soddisfatto. Se invece  $C$  contiene almeno due punti distinti, sia  $x^*$  un punto di minimo locale della  $f(x)$  su  $C$  (si veda la Figura 14). Sia ora  $y \in C$  un qualsiasi altro punto ammissibile e consideriamo il segmento chiuso  $[x^*, y]$  (contenuto in  $C$  per via della convessità di  $C$ ).

Essendo  $x^*$  un minimo locale, esisterà una ‘sfera’

$$B(x^*, \rho) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \rho\},$$

di centro  $x^*$  e raggio  $\rho > 0$ , tale che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^*, \rho) \cap [x^*, y]. \quad (14)$$

Inoltre, poichè  $x \in [x^*, y]$  esiste un valore  $\alpha \in [0, 1)$  tale che

$$x = \alpha x^* + (1 - \alpha)y$$

e per la convessità di  $f(x)$  su  $C$ , si ha

$$f(x) = f[\alpha x^* + (1 - \alpha)y] \leq \alpha f(x^*) + (1 - \alpha)f(y). \quad (15)$$

Unendo le (14) e (15) si ottiene

$$f(x^*) \leq \alpha f(x^*) + (1 - \alpha)f(y) \implies (1 - \alpha)f(x^*) \leq (1 - \alpha)f(y), \quad \forall y \in C,$$

ed essendo  $0 \leq \alpha \leq 1$  si ha

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \forall y \in C,$$

ovvero  $x^*$  è anche un minimo globale della  $f(x)$  su  $C$ . □

**Proposizione 5.7** *Data la funzione  $f(x)$ , con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , e l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sia  $f(x)$  convessa su  $C$ . Allora, l'insieme delle soluzioni del problema di programmazione matematica*

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in C, \end{aligned}$$

*formano un insieme convesso.*

### Dim.

Se  $C = \emptyset$  (insieme vuoto) oppure  $C$  contiene un solo elemento, l'asserto è banalmente soddisfatto. Se invece  $C$  contiene almeno due punti, siano  $x^*$  e  $y^*$  due punti (qualsiasi) di minimo locale della  $f(x)$  su  $C$ . Per la Proposizione 5.6 allora  $x^*$  e  $y^*$  sono anche punti di minimo globale della  $f(x)$  su  $C$ , pertanto dovrà risultare

$$f(x^*) = f(y^*) = f_{\min} \in \mathbb{R}.$$

Inoltre, preso il punto  $x$  appartenente alla combinazione convessa di  $x^*$  e  $y^*$ , esisterà un valore  $\alpha \in [0, 1]$  tale che  $x = \alpha x^* + (1 - \alpha)y^*$ . Dalla convessità di  $f(x)$  si ha anche

$$\begin{aligned} f(x) &= f[\alpha x^* + (1 - \alpha)y^*] \leq \alpha f(x^*) + (1 - \alpha)f(y^*) \\ &= \alpha f_{\min} + (1 - \alpha)f_{\min} = f_{\min}, \end{aligned}$$

pertanto ogni punto  $x \in [x^*, y^*]$  è un punto di minimo globale della  $f(x)$ . Essendo  $x^*$  e  $y^*$  due qualsiasi punti di minimo locale (globale) della  $f(x)$  su  $C$ , ciò prova che l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in C \end{aligned}$$

forma un insieme convesso.

□

I due ultimi risultati saranno di grande interesse e verranno ampiamente usati quando tratteremo problemi di Programmazione Matematica *lineari*, i quali costituiscono una sottoclasse importante dei problemi di Programmazione Matematica *convessi*.

## 6 Ulteriori elementi di Programmazione Matematica

Lo studio e la determinazione di punti di minimo (massimo) per la funzione  $f(x)$  sull'insieme ammissibile  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ , è oggetto di interesse della Programmazione Matematica, ovvero dell'Ottimizzazione (si veda anche [Ve08, BaShSh93, Be82, NoWr99]). Risolvere un problema di ottimizzazione significa quindi trovare i punti di minimo (o equivalentemente di massimo) locale (globale) del problema

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x). \quad (16)$$

Si è appena affermato che risolvere i problemi di minimizzazione è 'equivalente' a risolvere problemi di massimizzazione. Vogliamo ora giustificare questa affermazione più in dettaglio. Si osservi che (si consiglia di visualizzare graficamente la cosa, come riportato in Figura 15) vale il seguente risultato

**Teorema 6.1** *Dato il problema (16), con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dato lo scalare  $\lambda > 0$ , allora*

- a) *ogni minimo locale (o globale)  $x^*$  di (16) è anche un massimo locale (o globale) della funzione  $-f(x)$  sull'insieme  $\mathcal{A}$ ;*
- b) *ogni minimo locale (o globale)  $x^*$  di (16) è anche un minimo locale (o globale) della funzione  $\lambda f(x)$  sull'insieme  $\mathcal{A}$ .*

### Dim.

Per la a), dalla definizione di minimo locale (un ragionamento del tutto analogo vale anche per il minimo globale)  $x^*$  di  $f(x)$  sull'insieme  $\mathcal{A}$  si ha

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A} \cap B(x^*, \rho),$$

da cui moltiplicando per  $-1$  si ottiene

$$-f(x^*) \geq -f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A} \cap B(x^*, \rho),$$

ovvero  $x^*$  è punto di massimo locale della funzione  $-f(x)$  su  $\mathcal{A}$ .

Similmente, per la b), dalla definizione di minimo locale (un ragionamento del tutto analogo vale anche per il minimo globale)  $x^*$  del problema (16) si ha

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A} \cap B(x^*, \rho),$$

da cui moltiplicando per  $\lambda > 0$  si ottiene

$$\lambda f(x^*) \leq \lambda f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A} \cap B(x^*, \rho),$$

ovvero  $x^*$  è anche punto di minimo locale della funzione  $\lambda f(x)$  su  $\mathcal{A}$ . □

Pertanto il risultato precedente ci autorizza a scrivere la relazione

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x) = - \max_{x \in \mathcal{A}} [-f(x)] \quad (17)$$



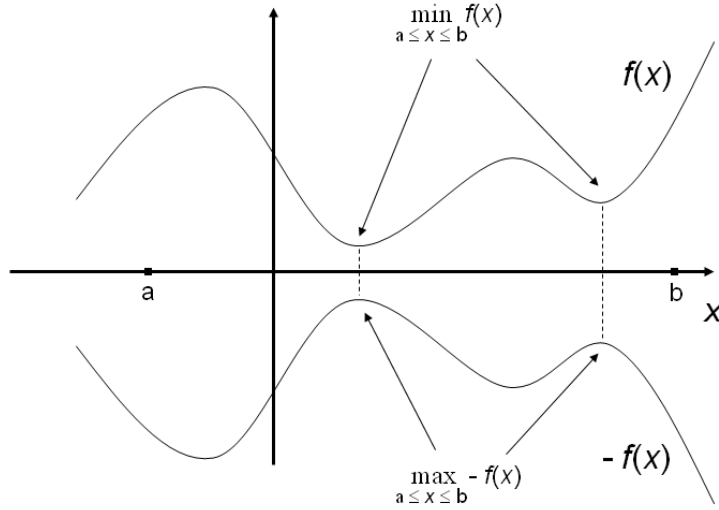


Figura 15: La massimizzazione di  $-f(x)$  è equivalente alla minimizzazione di  $f(x)$  sull'insieme  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$ .

ove se 'min' rappresenta un minimo "locale", allora 'max' rappresenta un massimo "locale"; se invece 'min' rappresenta un minimo "globale", allora 'max' rappresenta un massimo "globale". In conclusione quindi, qualora avessimo un problema di massimizzazione, la (17) consentirebbe di trasformarlo in uno 'equivalente' di minimizzazione. Ciò giustifica il fatto che nel seguito considereremo *senza scapito di generalità* essenzialmente problemi di minimizzazione.

È ora opportuno studiare innanzitutto le condizioni le quali assicurino l'esistenza di punti soluzione per (16). Un risultato di esistenza di punti di minimo e di massimo globale per la funzione  $f(x)$  è fornito dal seguente **Teorema di Weierstrass** di cui omettiamo la dimostrazione.

**Teorema 6.2** *Data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $f(x)$  continua sull'insieme  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ , chiuso e limitato. Allora la  $f(x)$  ammette minimo e massimo globale su  $\mathcal{A}$ .*

□

Ricordiamo per completezza che un insieme  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$  è *chiuso* se contiene la propria frontiera. Equivalentemente, si dice chiuso un insieme  $\mathcal{A}$  se presa comunque la successione  $\{x_k\}$ , con  $x_k \in \mathcal{A}$ , e supposto esistere il limite\*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}, \quad (18)$$

---

\*Più correttamente la relazione (18) dovrebbe essere scritta come

$$\lim_{k \rightarrow \infty, k \in \mathcal{K}} x_k = \bar{x},$$

essendo  $\mathcal{K}$  una qualsiasi sottosequenza della sequenza  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

allora deve essere  $\bar{x} \in \mathcal{A}$ .

Si parla invece di insieme  $\mathcal{A}$  limitato se esiste una costante finita  $M > 0$  tale che

$$\|x\| \leq M, \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Per un problema di ottimizzazione vincolata del tipo (16) si possono avere in generale diverse formulazioni, per alcune delle quali esistono algoritmi risolutivi più efficienti rispetto ad altri. In generale quindi, può accadere che un problema di ottimizzazione ammetta più formulazioni ed in taluni casi sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni di una formulazione (se esistono) e quelle di un'altra. Senza entrare nel dettaglio, potremmo introdurre un concetto (debole) di *equivalenza* tra le formulazioni (P) e (Q) del problema (16)

$$(P) \quad \min_{x \in \mathcal{P}} f(x) \qquad (Q) \quad \min_{y \in \mathcal{Q}} g(y),$$

nel seguente modo. Diremo che le formulazioni (P) e (Q) del problema (16) sono equivalenti se:

- esiste una relazione  $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ ;
- per ogni soluzione  $\bar{x}$  di (P) esiste una soluzione  $\hat{y}$  di (Q) tale che  $\hat{y} = h(\bar{x})$ .

In taluni casi tale equivalenza non è disponibile e riformulare pertanto un problema di ottimizzazione, al fine di risolvere una sua formulazione più semplice, può non essere facile. Esempi di problemi di ottimizzazione vincolata che possono presentare difficoltà ad essere riformulati (e dei quali non ci occuperemo nel seguito), sono:

- formulazioni *bilivello*:

$$\begin{aligned} & \min_x f(x, y) \\ & (x, y) \in X \\ & \min_y g(x, y) \\ & (x, y) \in Y \end{aligned}$$

in cui l'insieme ammissibile del problema di ottimizzazione al livello superiore (*master*), dove la minimizzazione è rispetto al vettore delle variabili  $x$ , contiene a sua volta un problema di ottimizzazione annidato (in cui la minimizzazione è rispetto al vettore  $y$ ).

- *programmazione semi-infinita*:

$$\begin{aligned} & \min_x f(x, v) \\ & h(x, v) \leq 0 \\ & v \in V \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

in cui il numero di variabili o di vincoli può non essere finito. Nell'esempio, il numero dei vincoli risulta non finito se l'insieme  $V$  non contiene un numero finito di valori.

Ricordiamo che alcune classi di problemi reali come quelli di *Controllo Ottimo* o di *Ottimizzazione Multidisciplinare* possono anche presentare difficoltà nel formulare il problema stesso [NoWr99].

Il problema di cui invece ci occupiamo nella presente sezione è il seguente:

$$\min_{x \in \mathcal{A}} f(x), \quad (19)$$

dove l'insieme  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$  è definito attraverso un numero finito di vincoli di uguaglianza e disuguaglianza, i.e.

$$\mathcal{A} : \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0, g_i(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m\}. \quad (20)$$

Si osservi che (19)-(20) ha una struttura molto generale. In particolare, per il momento non vengono fatte assunzioni relativamente alla convessità/concavità della  $f(x)$ , oppure relativamente all'insieme ammissibile  $\mathcal{A}$ . A tal proposito, ribadiamo che un caso di grande interesse in letteratura è quello in cui le  $h_j(x)$  sono *lineari* per  $j = 1, \dots, p$ , e le  $g_i(x)$  sono *convesse* su  $\mathcal{A}$ . In quest'ultimo caso, per la Proposizione 5.3 risulta  $\mathcal{A}$  *convesso*. Pertanto varranno per esso tutti i risultati descritti nella sezione precedente.

La soluzione di (19)-(20) richiede in linea di principio la soluzione di due problemi distinti:

- la minimizzazione di  $f(x)$ ;
- l'ammissibilità della soluzione trovata (se esiste).

Una possibile classificazione sintetica dei modelli di Programmazione Matematica del tipo (19)-(20), corrisponde alla scelta dei seguenti criteri di classificazione:

- natura dell'obiettivo (se la minimizzazione si riferisce alla ricerca di minimi *locali* si parlerà di *Ottimizzazione locale*, altrimenti -minimi globali- ci si riferisce a (19)-(20) come ad un problema di *Ottimizzazione globale*);
- natura dei vincoli (se  $\mathcal{A} \equiv \mathbb{R}^n$  si parla di *Ottimizzazione non vincolata*, se  $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}^n$  si parla di *Ottimizzazione vincolata*);
- tipologia delle funzioni  $f(x)$ ,  $h_j(x)$ ,  $g_i(x)$  (e.g., il problema (19)-(20) è *lineare* se  $f(x)$ ,  $h_j(x)$ ,  $g_i(x)$  sono lineari per ogni indice  $i$  e  $j$ ; altrimenti il problema (19)-(20) è *non lineare*);
- natura delle variabili (si parla di problema *continuo* se  $x \in \mathbb{R}^n$ , si definisce *problema intero* se  $x \in \mathbb{Z}^n$ , mentre è *misto* il problema in cui vi siano sia variabili continue -a valori reali - che variabili intere).

Inoltre, a seconda della tipologia del problema (19)-(20), si avranno specifiche caratteristiche ad esso legate. In particolare, brevemente puntualizziamo tali caratteristiche relativamente ad alcune classi specifiche in cui si presenta il problema (19)-(20) nelle applicazioni:

- (1) Programmazione Lineare (i.e.  $f(x)$ ,  $h_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sono funzioni lineari della variabile  $x \in \mathbb{R}^n$ ). In tal caso si hanno metodi efficienti per risolvere (19), come il metodo del *simplexso* oppure i *metodi dei punti interni* [NoWr99, HiLi05].
- (2) Programmazione con Vincoli Lineari. Presentano notevoli semplificazioni sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista algoritmico. Sottoclassi notevoli di questa categoria di problemi, analizzate in letteratura, sono

- Programmazione con Vincoli Lineari *generali*;
  - Programmazione con Vincoli Lineari *tipo box* (i.e. non vi sono vincoli di uguaglianza e quelli di disuguaglianza sono del tipo  $l_i \leq x_i \leq u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ).
- (3) Programmazione Quadratica (i.e.  $f(x)$  è un polinomio di secondo grado in  $x \in \mathbb{R}^n$ , mentre  $h_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, p$ , e  $g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sono funzioni lineari della variabile  $x \in \mathbb{R}^n$ ). In tal caso si usano spesso metodi del tipo *Active Set* [NoWr99].
- (4) Programmazione Convessa (i.e.  $\mathcal{A}$  è un insieme convesso ed  $f(x)$  è una funzione convessa su  $\mathcal{A}$ ). I *metodi delle direzioni ammissibili* si dimostrano spesso efficienti per questa categoria di problemi [Be95].

Per le categorie di problemi (1)-(4) vi sono algoritmi specifici, che in genere è consigliabile adottare al fine di ottenere migliori risultati in termini di efficienza ed efficacia nel calcolare la soluzione.

## 7 Dalla Programmazione Convessa alla Programmazione Lineare

In questa sezione descriviamo una rilevante applicazione dei risultati della Sezione 5, mostrandone le potenzialità nel caso della Programmazione Lineare (si veda anche [Ve08, HiLi05]), oggetto del corso. Allo scopo introduciamo alcuni elementi preliminari, considerando il problema generale di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in C, \end{aligned} \tag{21}$$

in cui assumiamo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  *convesso*. Il Teorema di Weierstrass dà una condizione sufficiente che assicura l'*esistenza* di soluzioni del problema (21). In questa sezione intendiamo invece dare condizioni analitiche che ci consentano di *identificare* (ovvero *trovare*) soluzioni di (21), una volta appurato che queste ultime esistono.

**Definizione 7.1** Dato l'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  ed il punto  $\bar{x} \in C$ , si dice che il vettore (direzione)  $d = y - \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , con  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $y \neq \bar{x}$ , è una **direzione ammissibile** per  $C$  in  $\bar{x}$ , se il punto  $x = \bar{x} + \alpha d$  appartiene a  $C$ , per ogni  $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ , con  $\bar{\alpha} > 0$ . □

Si noti che nella Figura 16 la direzione  $d$  è *ammissibile* in base alla Definizione 7.1, con  $\bar{\alpha} < 1$ . Anche il vettore  $\tilde{d}$  nella stessa figura è *ammissibile* ma in questo caso risulta  $\bar{\alpha} = 1$ . Notiamo anche che se  $C$  è un insieme *convesso*, considerato il punto  $\bar{x} \in C$ , il vettore  $d = x - \bar{x}$ , con  $x \in C$ , è *sempre* una direzione ammissibile con  $\bar{\alpha} = 1$ .

**Definizione 7.2** Sia data la funzione  $f(x)$  con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ed il vettore  $d \in \mathbb{R}^n$ , con  $d \neq 0$ . Considerato il punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice che  $d$  è una **direzione di discesa** per  $f(x)$  in  $\bar{x}$  se esiste un  $\bar{\alpha} > 0$  tale che

$$f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x}), \quad \forall \alpha \in (0, \bar{\alpha}].$$

□

Si osservi che sostanzialmente  $d \in \mathbb{R}^n$  è una direzione di discesa per  $f(x)$  in  $\bar{x}$  se in un intorno comunque piccolo di  $\bar{x}$ , lungo la direzione  $d$ , la funzione  $f(x)$  è *strettamente decrescente*.

**Esempio 7.1** Data la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = x^2$ , sia  $C = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 7 \leq x \leq 9\}$ . Considerato il punto  $\bar{x} = 8$  ed il punto  $y = -3$ , la direzione  $d = y - \bar{x} = -3 - 8 = -11$  (si noti che la direzione è uno scalare in questo caso) è al contempo una direzione ammissibile per  $C$  ed una direzione di discesa per  $f(x)$ .

Con la seguente proposizione si intende caratterizzare (ovvero identificare) le direzioni di discesa di una funzione, cosa indispensabile per risolvere il problema di minimizzazione (21).

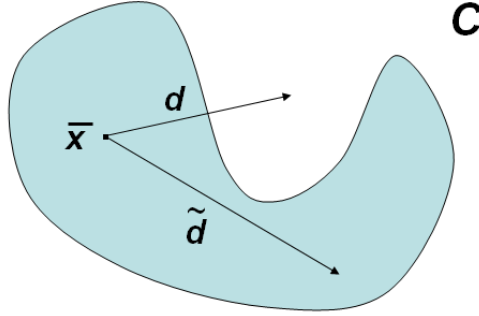


Figura 16: Direzioni ammissibili per l'insieme  $C$  nel punto  $\bar{x}$ .

**Proposizione 7.1** *Data la funzione  $f(x)$ , con  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , sia  $d \in \mathbb{R}^n$ , con  $0 < \|d\| < \infty$ . Allora  $d$  è una direzione di discesa per  $f(x)$  in  $\bar{x}$  se*

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0.$$

**Dim.**

Per dimostrare la condizione supponiamo che  $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ . Dal Teorema del valor Medio (si veda il Teorema 3.1) si ha per  $\alpha \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \alpha d) &= f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (\alpha d) + o(\|\alpha d\|) \\ &= f(\bar{x}) + \alpha \nabla f(\bar{x})^T d + o(\|\alpha d\|) \frac{\|d\|}{\|d\|}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{f(\bar{x} + \alpha d) - f(\bar{x})}{\alpha} = \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(\|\alpha d\|)}{\alpha \|d\|} \|d\|$$

e passando al limite per  $\alpha \rightarrow 0^+$  in ambo i membri della precedente uguaglianza si ottiene (si noti che  $\nabla f(\bar{x})^T d$  non dipende da  $\alpha$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \alpha d) - f(\bar{x})}{\alpha} &= \nabla f(\bar{x})^T d + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{o(\|\alpha d\|)}{\alpha \|d\|} \|d\| \\ &= \nabla f(\bar{x})^T d. \end{aligned} \tag{22}$$

Inoltre, siccome per ipotesi  $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ , il membro di destra della (22) risulta definitivamente negativo. Pertanto, essendo  $\alpha > 0$ , si ha nel membro di sinistra  $f(\bar{x} + \alpha d) - f(\bar{x}) < 0$  per  $\alpha$  sufficientemente piccolo. Ovvero  $d$  è una direzione di discesa in  $\bar{x}$ .  $\square$

**Esempio 7.2** Nel caso in cui la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sia lineare (cioè del tipo  $f(x) = c^T x$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ), ovvero affine (ossia del tipo  $f(x) = c^T x + \bar{c}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{c} \in \mathbb{R}$ , come da Definizione 2.10), risulterà

$$\nabla f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, dal momento che il gradiente è costante, si avrà  $\nabla f(x)^T d < 0$  se e solo se  $\nabla f(x)^T d = c^T d < 0$ .

La seguente proposizione fornisce più esplicitamente una condizione analitica che caratterizza le soluzioni di (21), consentendoci, almeno in via teorica, di poterle determinare.

**Proposizione 7.2** Dato il problema (21) con  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso, condizione necessaria affinché il punto  $\bar{x} \in C$  sia un punto di minimo locale per  $f(x)$  su  $C$  è che

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in C. \quad (23)$$

### Dim.

Dobbiamo dimostrare che se  $\bar{x} \in C$  è punto di minimo locale per  $f(x)$  su  $C$ , allora la condizione (23) è soddisfatta. Infatti se  $\bar{x}$  è minimo locale non possono esistere in  $\bar{x}$  direzioni ammissibili che siano anche di discesa per  $f(x)$ . Pertanto possono esistere in  $\bar{x}$  solo direzioni ammissibili  $d$  tali che  $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$ , ovvero deve valere la condizione

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0, \quad \forall d \text{ ammissibile per } C.$$

Dal momento poi che  $C$  è convesso, preso un qualsiasi punto  $x \in C$ , con  $x \neq \bar{x}$ , sarà  $d = x - \bar{x}$  ammissibile, quindi se in  $\bar{x}$  non devono esistere direzioni  $d$  ammissibili per  $C$  e di discesa per  $f(x)$ , dovrà valere la condizione (23).  $\square$

**Esempio 7.3** Si consideri il problema di minimizzazione

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

con  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , in cui  $C \equiv \mathbb{R}^n$ . Si consideri il punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ . Essendo soddisfatte le ipotesi della Proposizione 7.2, se il punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  è punto di minimo locale per  $f(x)$  si avrà

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (24)$$

Presi allora i due punti di  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\bar{x} \\ x_2 &= 0, \end{aligned}$$

la condizione (24) calcolata in  $x_1$  e  $x_2$  diventa

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_1 - \bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T \bar{x} \geq 0$$

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_2 - \bar{x}) = -\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} \geq 0,$$

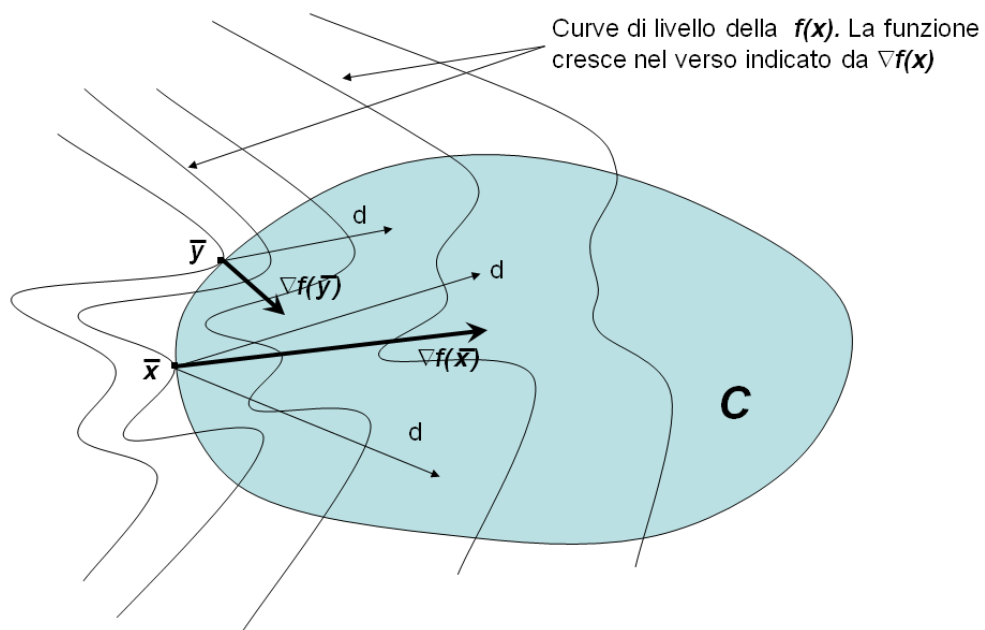


Figura 17: Condizioni Necessarie di minimo locale con  $C$  convesso (la funzione  $f(x)$  non è convessa). La condizione  $\nabla f(\bar{x})^T d \geq 0$  o  $\nabla f(\bar{y})^T d \geq 0$ , per ogni direzione  $d$  ammissibile per  $C$ , è soddisfatta. Si noti che i punti  $\bar{x}$  ed  $\bar{y}$  sono entrambi punti di minimo locale.



ovvero  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} = 0$ . La precedente relazione, dovendo essere vera per ogni punto di minimo locale  $\bar{x}$ , implica la condizione<sup>†</sup>

$$\nabla f(\bar{x}) = 0, \quad (25)$$

ovvero la ben nota condizione necessaria di minimo locale in  $\mathbb{R}^n$ . Osserviamo anche che tale condizione è solo necessaria se  $f(x)$  non è convessa (si pensi infatti alla funzione nè concava nè convessa  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , per la quale la condizione (25) è soddisfatta nel punto di flesso  $\bar{x} = 0$ ). Si ricorda infine che per  $n = 1$  la condizione  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  equivale alla classica condizione di annullamento della derivata prima della  $f(x)$ , ovvero  $f'(\bar{x}) = 0$ .

**Proposizione 7.3** Dato il problema (21) con  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso,  $f(x)$  continuamente differenziabile in un insieme aperto contenente  $C$ , ed  $f(x)$  convessa su  $C$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché il punto  $\bar{x} \in C$  sia un punto di minimo locale per  $f(x)$  su  $C$  è che

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in C. \quad (26)$$

#### Dim.

Per la condizione necessaria vale quanto dimostrato nella Proposizione 7.2. Per la condizione sufficiente dobbiamo mostrare che se vale (26) in  $\bar{x}$ , il punto  $\bar{x}$  è di minimo locale per  $f(x)$  in  $C$ .

A tale scopo, ricordando che per ipotesi  $f(x)$  è convessa, dalla Proposizione 5.5 si ha

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y), \quad \forall x, y \in C. \quad (27)$$

Preso allora  $y = \bar{x}$ , dalla (26) e (27) si ha

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq f(\bar{x}), \quad \forall x \in C,$$

ovvero  $\bar{x}$  è punto di minimo locale (nonchè globale!!!) della  $f(x)$ , su  $C$ . □

**Esempio 7.4** Si consideri il problema (21) con

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, \ i = 1, \dots, n\}, \quad (28)$$

---

<sup>†</sup>La condizione  $\nabla f(\bar{x})^T \bar{x} = 0$  implica l'ortogonalità del gradiente  $\nabla f(y)$  con ogni vettore  $y \in C$  che sia minimo locale. Pertanto l'unico vettore che può soddisfare questa condizione è il vettore nullo. In maniera del tutto equivalente, scegliendo di volta in volta il vettore  $\bar{x}$  mediante la  $\bar{x} = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , la condizione  $\nabla f(\bar{x})^T (\bar{x}) = 0$  implica le  $n$  condizioni

$$\nabla f(\bar{x})^T e_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

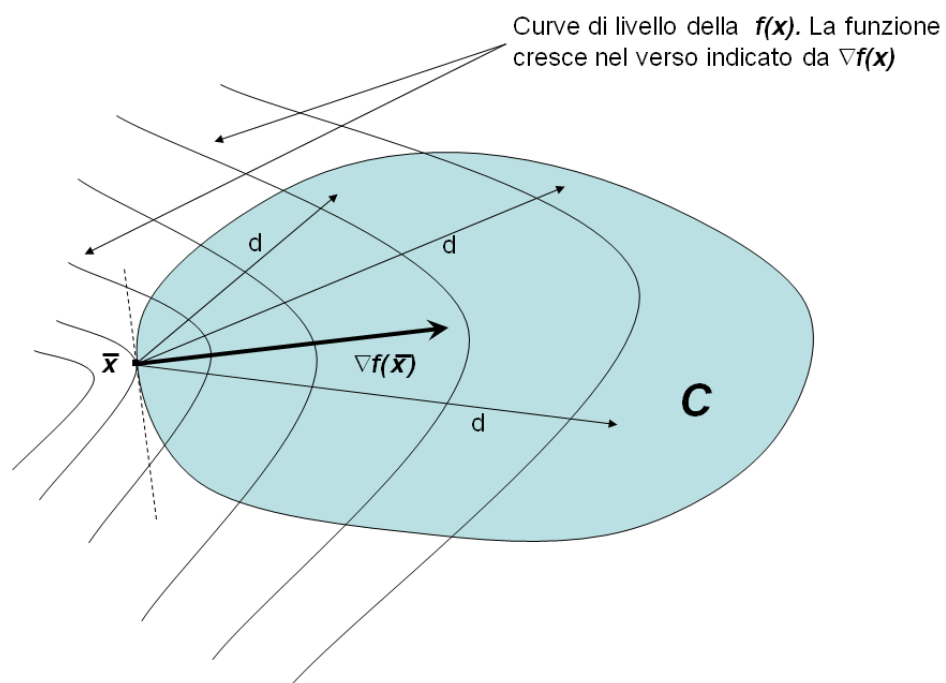


Figura 18: Condizione Necessaria e Sufficiente di minimo locale per  $f(x)$  in  $\bar{x}$ , con  $C$  convesso. La funzione  $f(x)$  è convessa su  $C$ . Il punto  $\bar{x}$  è un minimo locale (e quindi anche globale) della  $f(x)$  su  $C$ .

ove per ogni indice 'i' è  $a_i < b_i$  ed eventualmente  $a_i = -\infty$  e/o  $b_i = +\infty$ . Sia  $\bar{x}$  soluzione di (21) e consideriamo, per ogni indice 'i', tre casi distinti:  $a_i < \bar{x}_i < b_i$ ,  $\bar{x}_i = a_i$  e  $\bar{x}_i = b_i$ . Nel primo caso, ragionando come nell'Esempio 7.3, scegliamo la quantità  $\sigma$  tale che

$$0 < \sigma < \min\{b_i - \bar{x}_i, \bar{x}_i - a_i\}$$

(per esempio basta scegliere  $\sigma = 0.5 \min\{b_i - \bar{x}_i, \bar{x}_i - a_i\}$ ). Inoltre scegliamo i punti ammissibili

$$x_1 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{i-1} \\ \bar{x}_i - \sigma \\ \bar{x}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{i-1} \\ \bar{x}_i + \sigma \\ \bar{x}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad (29)$$

per i quali sarà quindi

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_1 - \bar{x}) \geq 0$$

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_2 - \bar{x}) \geq 0.$$

Per le (29) le precedenti due relazioni danno

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (+\sigma) \geq 0, \quad \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (-\sigma) \geq 0,$$

ovvero  $\partial f(\bar{x})/\partial x_i = 0$ .

Nel secondo caso, scegliamo la quantità  $\sigma$  tale che

$$0 < \sigma < b_i - \bar{x}_i$$

(per esempio basta scegliere  $\sigma = 0.5(b_i - \bar{x}_i)$ ). Inoltre scegliamo il punto ammissibile

$$x_3 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{i-1} \\ \bar{x}_i + \sigma \\ \bar{x}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad (30)$$

per il quale sarà quindi

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_3 - \bar{x}) \geq 0.$$

Per la (30) la precedente relazione è equivalente alla

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} (+\sigma) \geq 0,$$

ovvero  $\partial f(\bar{x})/\partial x_i \geq 0$ .

Infine, nel terzo caso scegliamo la quantità  $\sigma$  tale che

$$0 < \sigma < \bar{x}_i - a_i$$

(per esempio basta scegliere  $\sigma = 0.5(\bar{x}_i - a_i)$ ). Inoltre scegliamo il punto ammissibile

$$x_4 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_{i-1} \\ \bar{x}_i - \sigma \\ \bar{x}_{i+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad (31)$$

per il quale sarà quindi

$$\nabla f(\bar{x})^T (x_4 - \bar{x}) \geq 0.$$

Per la (31) la precedente relazione è equivalente alla

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}(-\sigma) \geq 0,$$

ovvero  $\partial f(\bar{x})/\partial x_i \leq 0$ .

Pertanto, volendo riassumere i risultati dell'esempio, potremmo dire che nel caso di vincoli di box sulle variabili (ovvero  $C$  è definito mediante la (28)), le seguenti condizioni di ottimalità sono equivalenti

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0, & \forall i : a_i < \bar{x}_i < b_i \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \geq 0, & \forall i : \bar{x}_i = a_i \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \leq 0, & \forall i : \bar{x}_i = b_i. \end{cases}$$

Le precedenti condizioni analitiche sono riassunte nella Figura 19.

## 7.1 Il caso di funzioni Lineari/Affini: la Programmazione Lineare

Si consideri l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e si considerino nuovamente le Proposizioni 7.2 e 7.3. Si supponga che la funzione  $f(x)$  sia affine, i.e.

$$f(x) = c^T x + \bar{c}, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Pertanto per la Proposizione 5.2  $f(x)$  è convessa ed il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in C \end{aligned} \quad (33)$$

è un problema convesso.

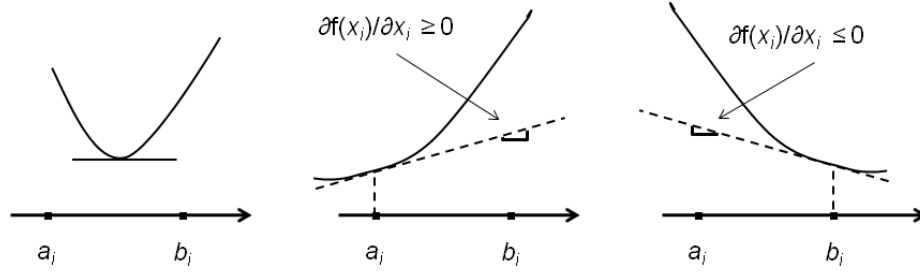


Figura 19: Condizioni necessarie di ottimalità nel caso di *vincoli di box* sulle variabili.

**Esercizio 8** Si dimostri che il problema di programmazione matematica

$$\min f(x)$$

$$x \in C$$

ammette le stesse soluzioni (i.e. gli stessi punti di minimo locale e minimo globale) del problema

$$\min af(x) + b$$

$$x \in C$$

se  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

In base a quanto risulta dall'Esercizio 8, nel seguito di questa sezione possiamo, senza scapito di generalità, risolvere (33) considerando nella (32)

$$f(x) = c^T x.$$

In aggiunta, nella (33) supponiamo che l'insieme  $C$  sia descritto da vincoli di tipo lineare, i.e.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad f_i(x) \text{ lineare}\};$$

quindi in particolare, per la **Osservazione importante 1**,  $C$  risulterà convesso. Cerchiamo ora di caratterizzare più in dettaglio la struttura di  $C$ , quando è descritto da vincoli lineari.

**Definizione 7.3** Data la funzione lineare  $g(x) = a^T x$ , con  $a \in \mathbb{R}^n$ , l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che soddisfa l'equazione

$$a^T x = \bar{a}, \quad \bar{a} \in \mathbb{R},$$

si dice **iperpiano**. □

**Definizione 7.4** Data la funzione lineare  $g(x) = a^T x$ , con  $a \in \mathbb{R}^n$ , l'insieme dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che soddisfa la disequazione (analogamente per la disequazione ' $\leq$ ')

$$a^T x \geq \bar{a}, \quad \bar{a} \in \mathbb{R},$$

si dice **semispazio chiuso**. □

**Definizione 7.5** Si definisce **poliedro** l'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi chiusi. □

Si noti che spesso in letteratura si trova anche la dizione equivalente di *poliedro convesso*, per indicare semplicemente un poliedro. Dalle definizioni precedenti risulta chiaro che un qualsiasi insieme descritto da un numero finito di vincoli lineari è un poliedro. Si osservi anche, dalla definizione di semispazio chiuso, che la disuguaglianza che lo definisce è del tipo ' $\geq$ ' anzichè ' $>$ '. Ciò conferisce a  $C$  la proprietà di chiusura e consente (se  $C$  è anche limitato), di applicare il Teorema di Weierstrass, assicurando l'esistenza della soluzione. Si osservi anche che nelle definizioni di iperpiano e semispazio chiuso alcune componenti del vettore  $a \in \mathbb{R}^n$  possono essere nulle, pertanto anche un semplice vincolo del tipo  $x_1 \geq 0$  è un vincolo lineare, in cui  $a = (1 \ 0 \cdots 0)^T$ .

Naturalmente poi, è sempre possibile trasformare ogni vincolo di uguaglianza in una coppia di vincoli di disuguaglianza e viceversa, essendo per ogni  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{a} \in \mathbb{R}$

$$a^T x = \bar{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^T x \geq \bar{a} \\ a^T x \leq \bar{a}. \end{cases}$$

Inoltre un vincolo del tipo  $a^T x \leq \bar{a}$  può senza difficoltà essere trasformato nel vincolo  $(-a)^T x \geq (-\bar{a})$ .

**Osservazione importante 2** Pertanto, a questo punto è possibile affermare che ogni problema di Programmazione Lineare (i.e. in cui  $C$  è descritto da vincoli lineari ed  $f(x)$  è una funzione lineare), può essere rappresentato senza scapito di generalità nella forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \end{aligned} \tag{34}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

ovvero in forma esplicita, gli  $m$  vincoli saranno

$$a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

ed identificheranno il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ .

**Esercizio 9** Lo studente dimostri esplicitamente, i.e. applicando la definizione di insieme convesso, che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$  è un insieme convesso.

Essendo (34) un problema convesso (ed in particolare il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$  è convesso), le sue soluzioni sono al contempo punti di minimo locale e minimo globale di  $c^T x$  su  $P$ . Inoltre, per la Proposizione 7.3, la condizione di ottimalità nel punto soluzione  $\bar{x} \in P$ , i.e.

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in P, \quad (35)$$

è una condizione necessaria e sufficiente.

**Definizione 7.6** Dato il problema (34) si consideri il vincolo  $i$ -simo del poliedro ammissibile  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ , i.e.  $a_i^T x \geq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Si dice che nel punto  $\bar{x}$  il vincolo  $i$ -simo è un **vincolo attivo** se  $a_i^T \bar{x} = b_i$ . Si indica inoltre con  $I(\bar{x})$  l'insieme di tutti i vincoli di  $P$  attivi in  $\bar{x}$ , i.e.

$$I(\bar{x}) = \{i : a_i^T \bar{x} = b_i\}.$$

□

**Proposizione 7.4** Sia dato il problema (34) ed il poliedro ammissibile  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ . Si consideri il punto  $\bar{x} \in P$ ; la direzione  $d \in \mathbb{R}^n$  è una direzione ammissibile per  $P$  in  $\bar{x}$ , se e solo se

$$a_i^T d \geq 0, \quad \forall i \in I(\bar{x}),$$

essendo  $I(\bar{x})$  l'insieme dei vincoli attivi di  $P$  in  $\bar{x}$ .

**Dim.**

Dato il poliedro  $P$  in (34), con  $\bar{x} \in P$ , si ha per definizione che  $d$  è ammissibile se e solo se

$$a_i^T (\bar{x} + \alpha d) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{con } \alpha \in (0, \bar{\alpha}], \quad \bar{\alpha} > 0.$$

Detto  $I(\bar{x})$  l'insieme dei vincoli attivi in  $\bar{x}$ , distinguiamo allora due casi

1.  $i \notin I(\bar{x}) \implies a_i^T \bar{x} > b_i$ . Pertanto se  $a_i^T d \geq 0$  allora  $\bar{x} + \alpha d$  soddisfa il vincolo  $i$ -simo, per ogni  $\alpha \geq 0$  (quindi  $d$  è una direzione ammissibile rispetto ai vincoli non attivi in  $\bar{x}$ ). Se invece  $a_i^T d < 0$ , allora fissando

$$\bar{\alpha} = \frac{b_i - a_i^T \bar{x}}{a_i^T d} > 0,$$

si ottiene dopo una facile verifica  $a_i^T(x + \alpha d) \geq b_i$ , per ogni  $\alpha \in (0, \bar{\alpha}]$ , quindi  $d$  è ancora una direzione ammissibile rispetto ai vincoli non attivi in  $\bar{x}$ .

2.  $i \in I(\bar{x}) \implies a_i^T \bar{x} = b_i$ . Pertanto, come nel caso precedente, se  $a_i^T d \geq 0$  allora  $\bar{x} + \alpha d$  soddisfa anche il vincolo attivo  $i$ -simo, per ogni  $\alpha \geq 0$ , quindi  $d$  è una direzione ammissibile anche rispetto ai vincoli attivi in  $\bar{x}$ . Se invece  $a_i^T d < 0$  si ha

$$a_i^T(\bar{x} + \alpha d) = a_i^T \bar{x} + \alpha a_i^T d < b_i, \quad \forall \alpha > 0.$$

Quindi non possono esistere valori non nulli di  $\alpha$  che rendono ammissibile il punto  $\bar{x} + \alpha d$ . Pertanto, se  $i \in I(\bar{x})$  la direzione  $d$  non può essere ammissibile se  $a_i^T d < 0$ . Ciò prova l'asserto.  $\square$

La proposizione precedente fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché la direzione  $d \in \mathbb{R}^n$  sia ammissibile per un poliedro  $P$  nel punto  $\bar{x} \in P$ . In sostanza la condizione si limita a considerare il prodotto scalare di  $d$  con i vettori dei coefficienti dei *sol*i vincoli attivi in  $\bar{x}$ . Se tali prodotti scalari sono tutti non negativi allora  $d$  è una direzione ammissibile in  $\bar{x}$ . Naturalmente però, controllare analiticamente questa condizione può essere pesante dal punto di vista pratico (richiede infatti di eseguire nel caso peggiore  $m$  prodotti scalari, essendo  $m$  i vincoli che descrivono  $P$ ).

Vedremo che mentre nel caso  $n \geq 3$  (ovvero quando sono presenti almeno 3 variabili), è indispensabile l'uso di un metodo per la ricerca di direzioni ammissibili (nello specifico tale metodo è il **Metodo del Simplex**), nel caso  $n \leq 2$  il problema (34) può essere risolto graficamente.

Dal punto di vista grafico, si noti che la regione ammissibile del problema (34) può eventualmente coincidere con l'insieme vuoto (e.g. si pensi ad un insieme ammissibile  $P$  definito dai due soli vincoli:  $x_1 \geq 0$  e  $x_1 \leq -3$ ). Inoltre,  $P$  si può presentare in diverse forme, alcune delle quali sono rappresentate nella Figura 20.

**Proposizione 7.5** *Dato il problema (34), il gradiente  $\nabla f(x) = c$  della funzione obiettivo è ortogonale alle curve di livello della  $f(x)$ , ed è orientato nel verso crescente della  $f(x)$ .*

### Dim.

Le curve di livello della  $f(x)$  sono date dagli iperpiani

$$c^T x = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Fissato ora un qualunque  $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$ , siano  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $x_2 \in \mathbb{R}^n$  due punti della curva di livello  $c^T x = \bar{\gamma}$ , i.e.

$$c^T x_1 = \bar{\gamma}, \quad c^T x_2 = \bar{\gamma}. \tag{36}$$

Sottraendo membro a membro le precedenti uguaglianze si ha

$$c^T x_1 - c^T x_2 = c^T (x_1 - x_2) = 0;$$

pertanto il vettore  $c$  è ortogonale ad un qualsiasi vettore con estremi nel piano  $c^T x = \bar{\gamma}$ , ovvero  $c$  è ortogonale al piano  $c^T x = \bar{\gamma}$  (si veda Figura 21).



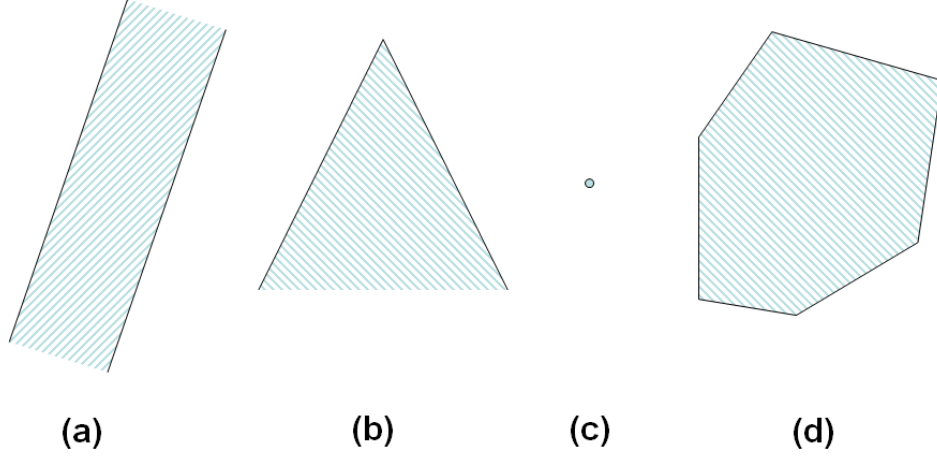


Figura 20: Esempi di possibili forme che può assumere il poliedro ammissibile  $P$  di (34).

Sia ora  $y$  appartenente alla curva di livello  $c^T x = \tilde{\gamma}$ , con  $\tilde{\gamma} > \bar{\gamma}$ . Pertanto sarà

$$c^T y = \tilde{\gamma} > \bar{\gamma},$$

da cui sottraendo la prima delle (36) si ottiene la condizione

$$c^T y - c^T x_1 = c^T (y - x_1) > 0,$$

ovvero (si veda Figura 21), l'angolo  $\phi$  formato dal gradiente  $c$  e dal vettore  $y - x_1$  è minore di  $90^\circ$ , quindi  $c$  è orientato nel verso crescente della funzione obiettivo.  $\square$

La precedente proposizione ci aiuta a trovare la soluzione del problema (34). Supponiamo infatti per semplicità di trattazione (ma senza scapito di generalità)  $n = 2$ ; inoltre assumiamo che il poliedro ammissibile  $P$  del problema (34) sia dato in Figura 21.

Vogliamo cercare la/le soluzione/i  $\bar{x}$  (se esiste/esistono), che soddisfa/ano la condizione necessaria e sufficiente (35). In base alla Proposizione 7.5 basterà allora cercare nella direzione e verso indicati dal vettore  $-c$  (opposto di  $c$ ), a partire da un qualsiasi punto ammissibile di  $P$ . Infatti, il vettore  $-c$  indicherà il verso in cui  $f(x) = c^T x$  *decresce*, quindi basterà trovare il/i punto/i della regione ammissibile che appartiene/appartengono alla curva di livello di  $c^T x$  con valore più basso ( $\bar{\gamma}$  in Figura 21, nella quale  $\bar{x} \equiv x_1$ ).

Si osservi che ogni direzione ammissibile in  $\bar{x}$  soddisfa la condizione

$$c^T d = c^T (x - \bar{x}) \geq 0, \quad \forall x \in P,$$

quindi  $\bar{x}$  è realmente un punto soluzione. Si noti anche che preso un qualsiasi punto  $z \in P \cup B(\bar{x}, \rho)$ , ove  $B(\bar{x}, \rho)$  è la sfera di centro  $\bar{x}$  e raggio  $\rho > 0$ , tale punto appartiene senz'altro ad una curva di livello corrispondente a  $\gamma > \bar{\gamma}$ . Di conseguenza  $\bar{x}$  sarà l'unica soluzione del problema.

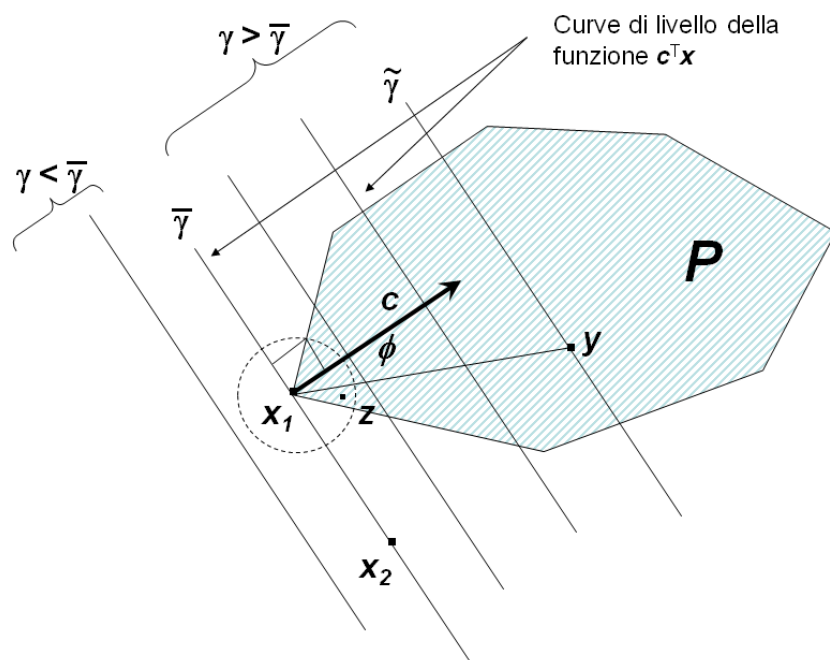


Figura 21: Il vettore  $c$  in (34) risulta ortogonale alle curve di livello di  $f(x) = c^T x$ , ed è orientato nel verso di  $f(x)$  crescente. Ogni direzione ammissibile  $d$  soddisfa la condizione di ottimalità in  $x_1$ , come prescrive la Proposizione 7.3.

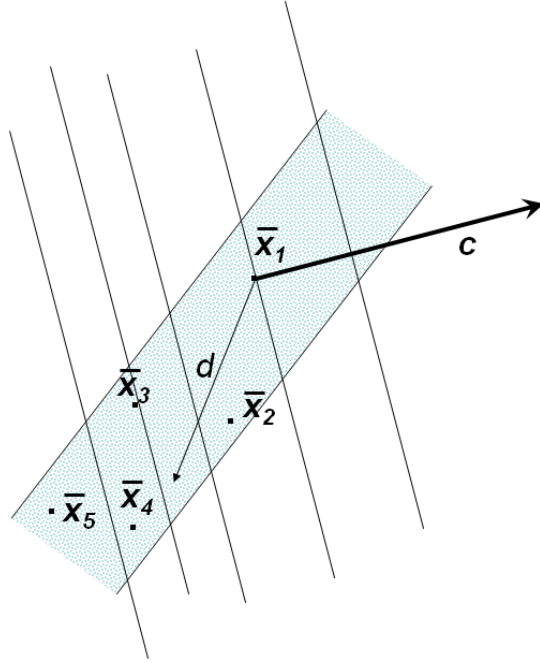


Figura 22: Caso nel quale il problema (34) non ammette soluzione. La condizione di ottimalità non è soddisfatta in nessun punto del poliedro ammissibile  $P$  (la direzione  $d$  in figura è una direzione di discesa in  $\bar{x}_1$ ).

In Figura 22 abbiamo invece un caso nel quale il problema (34) non ammette soluzioni. Infatti la regione ammissibile è costituita da una *striscia illimitata* e sarà sempre possibile trovare punti  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , tali che

$$c^T \bar{x}_1 > c^T \bar{x}_2 > c^T \bar{x}_3 > \dots$$

muovendosi lungo la direzione  $-c$ .

Infine in Figura 23 abbiamo un caso nel quale tutti i punti compresi nel segmento chiuso  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$  sono punti soluzione. In particolare, notiamo che anche nel punto soluzione  $\bar{x}$  vale (come ci aspettavamo) la condizione di ottimalità (35), per ogni direzione ammissibile  $d$ , in  $\bar{x}$ . Nello specifico poi, per le due direzioni ammissibili  $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$  e  $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$  vale la condizione di ortogonalità  $c^T d_1 = c^T d_2 = 0$ .

**Esempio 7.5** Vogliamo risolvere graficamente il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min & x_1 + x_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Essendo  $f(x) = x_1 + x_2$  sarà anche  $\nabla f(x) = c = (1 \ 1)^T \in \mathbb{R}^2$  e ragionando come nelle Figure 21-23 la soluzione è mostrata in Figura 24-(a).

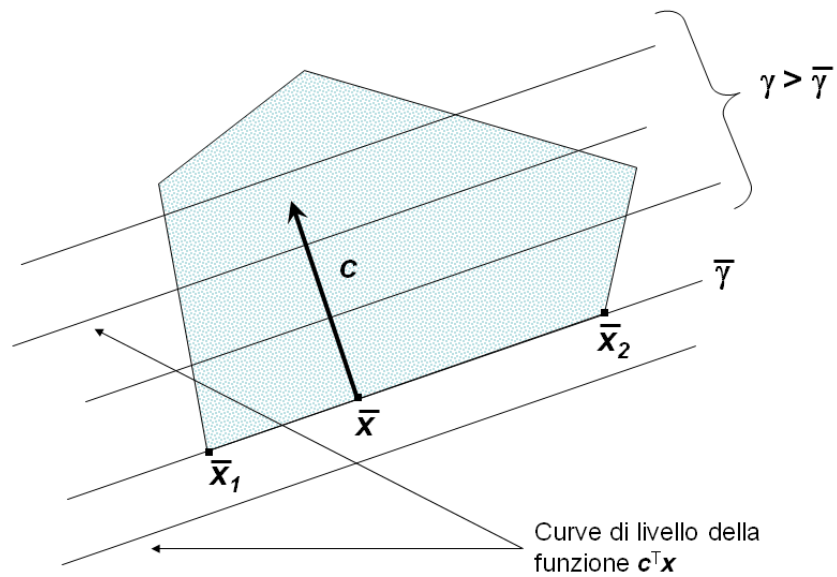


Figura 23: Caso in cui (34) ammette un numero *non finito* di soluzioni (nella figura sono soluzioni tutti i punti nel segmento chiuso  $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ ).

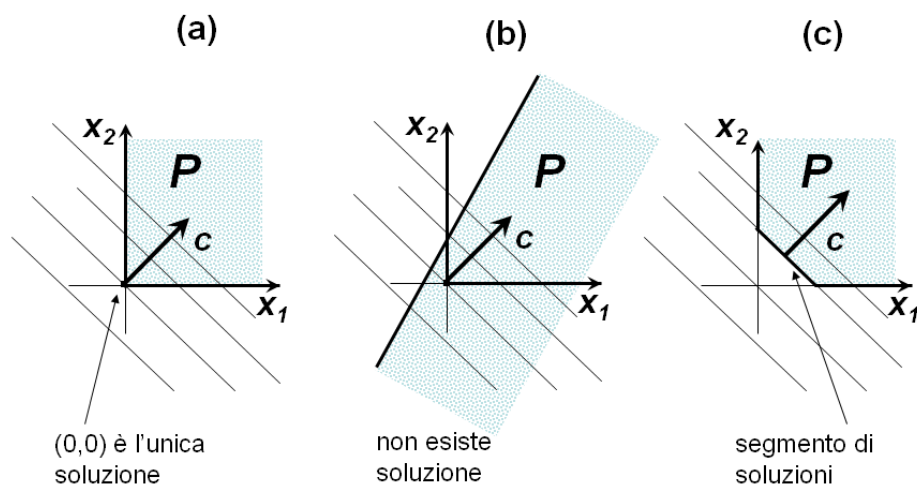


Figura 24: Soluzioni degli Esempi 7.5-7.7.

**Esempio 7.6** Vogliamo risolvere graficamente il problema

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 - 3 \\ & x_2 - 3x_1 - 2 \leq 0 \\ & -2x_2 \geq -6x_1 - 4. \end{aligned} \quad (37)$$

Essendo  $f(x) = 2x_1 + x_2 - 3$  affine ma non lineare, il problema (37) è equivalente al problema di Programmazione Lineare (ovvero i loro punti soluzione coincideranno)

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + x_2 \\ & x_2 - 3x_1 - 2 \leq 0 \\ & -2x_2 \geq -6x_1 - 4. \end{aligned}$$

Inoltre, ragionando ancora come nelle Figure 21-23, è  $\nabla f(x) = c = (2 \ 1)^T \in \mathbb{R}^2$ . Si può osservare che seguendo la direzione ed il verso di  $-c$ , essendo il poliedro ammissibile illimitato, anche la funzione obiettivo risulterà illimitata inferiormente, pertanto non esisterà soluzione al problema (Figura 24-(b)).

**Esempio 7.7** Vogliamo risolvere graficamente il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Qui è  $f(x) = 2x_1 + 2x_2$  da cui sarà anche  $\nabla f(x) = c = (2 \ 2)^T \in \mathbb{R}^2$  e la soluzione (Figura 24-(c)) è data da tutti i punti del segmento che ha per estremi i punti ammissibili  $(0, 1)$  e  $(1, 0)$ .

I risultati dell'Esempio 7.7 sono suscettibili di un'interpretazione notevole, alla luce di quanto dimostrato in Proposizione 5.6 e Proposizione 5.7. In particolare, il problema (38) è convesso (come ogni problema di Programmazione Lineare), pertanto i risultati dimostrati nelle precedenti due proposizioni sono applicabili. A riprova di quanto appena detto, si osservi che

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 2$$

ed in base alla Proposizione 5.6 i due punti  $(0, 1)$  ed  $(1, 0)$  sono al contempo minimi locali e globali di  $f(x)$  sul poliedro ammissibile di (38). Inoltre, per ogni punto  $\bar{x}$  nel segmento di estremi  $(0, 1)$  ed  $(1, 0)$  vale l'espressione

$$\bar{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

e risulta

$$f(\bar{x}) = f(\alpha, 1 - \alpha) = 2\alpha + 2(1 - \alpha) = 2.$$

Quest'ultima relazione prova splicitamente quanto affermato già dalla Proposizione 5.7, ovvero ogni punto del segmento congiungente  $(0, 1)$  ed  $(1, 0)$  è a sua volta un minimo (locale e globale) di  $f(x)$  sul poliedro ammissibile di (38).

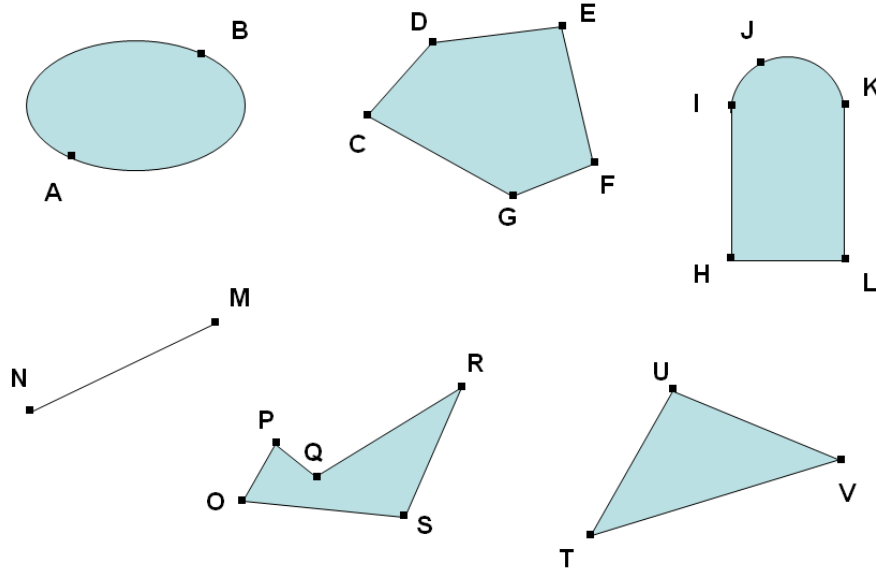


Figura 25: Esempi e controesempi di vertici per insiemi di  $\mathbb{R}^n$ . I punti  $O$ - $S$  non sono vertici in quanto non appartengono ad un insieme convesso.

**Definizione 7.7** Dato l'insieme convesso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $\bar{x}$  è un **punto estremo** o **vertice** di  $C$  se non esistono due punti  $y, z \in C$ , con  $y \neq z$ , distinti da  $\bar{x}$  e tali che  $\bar{x} \in [y, z]$ . □

**Esempio 7.8** Data la Figura 25, i punti  $A$ - $N$  e  $T$ - $V$  sono tutti punti di vertice per i rispettivi insiemi convessi. Invece i punti  $O$ - $S$  non sono vertici in quanto appartengono ad un insieme non convesso, per il quale non abbiamo definito il concetto di vertice.

**Esempio 7.9** L'insieme vuoto naturalmente non contiene vertici, pur essendo un insieme convesso. L'insieme  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  che contiene il solo punto  $\bar{x}$ , ammette tale punto come vertice (basta infatti applicare la definizione di vertice e notare che non esistono altri due punti in  $C$  distinti da  $\bar{x}$ ).

Diamo ora una caratterizzazione dei vertici di un poliedro, che ci consentirà di identificarli con maggior precisione. Della seguente proposizione omettiamo per brevità la dimostrazione

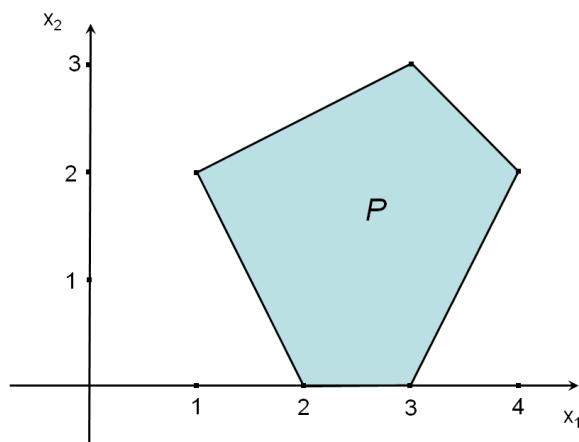


Figura 26: Poliedro  $P$  descritto dalle disuguaglianze nell'Esercizio 10. Essendo il poliedro limitato, risulta anche essere un *politopo*.

**Proposizione 7.6** Dato il poliedro ammissibile  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$  del problema (34), con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , il punto  $\bar{x} \in P$  è un vertice di  $P$  se e solo se

1. esistono almeno  $n$  vincoli di  $P$  attivi in  $\bar{x}$ ;
2. detti  $a_i^T x = b_i$ ,  $i \in I(\bar{x})$ , tutti i vincoli attivi in  $\bar{x}$ , vi sono esattamente  $n$  vettori dell'insieme  $\{a_i\}_{i \in I(\bar{x})}$  che sono linearmente indipendenti (vincoli **linearmente indipendenti**).

□

**Esercizio 10** Si trovino tutti e soli i vertici (se vi sono) del poliedro  $P$  descritto dalle seguenti disequazioni (si veda la Figura 26)

$$P : \begin{cases} (I) & x_1 \geq 0 \\ (II) & x_2 \geq 0 \\ (III) & x_2 + 2x_1 \geq 4 \\ (IV) & 2x_2 - x_1 \leq 3 \\ (V) & x_2 + x_1 \leq 6 \\ (VI) & 2x_1 - 6 \leq x_2 \end{cases}$$

Prima di risolvere l'esercizio calcoliamo il massimo numero possibile di vertici che il poliedro  $P$  può ammettere. Questi corrisponderanno, dalla Proposizione 7.6, al massimo numero di coppie (i.e.  $n$ -ple) diverse di vincoli che è possibile scegliere tra i 6 vincoli che descrivono  $P$ , ovvero<sup>‡</sup>

$$\binom{m}{n} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

<sup>‡</sup>Si osservi che se  $m < n$  non possono esistere vertici nel poliedro.

In particolare, analizziamo ciascuna coppia di vincoli  $(X)-(Y)$ , con  $X, Y \in \{I, II, \dots, VI\}$ :

- (I)-(II): Considerati i vincoli (I) e (II) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ottenendo il punto  $(0,0)$ . Nel precedente punto i vincoli (I) e (II) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in  $(0,0)$  le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Ma il punto  $(0,0)$  non è vertice di  $P$  in quanto  $(0,0) \in P$  (non soddisfa per esempio il vincolo (III)).

- (I)-(III): Considerati i vincoli (I) e (III) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza  $x_1 = 0$  e  $x_2 + 2x_1 = 4$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 4, \end{cases}$$

ottenendo il punto  $(0,4)$ . Nel precedente punto i vincoli (I) e (III) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in  $(0,4)$  le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Ma il punto  $(0,4)$  non è vertice di  $P$ , essendo in esso violato il vincolo (IV)).

- (II)-(III): Considerati i vincoli (II) e (III) mettiamo a sistema i corrispondenti vincoli di uguaglianza  $x_2 = 0$  e  $x_2 + 2x_1 = 4$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_1 = 4, \end{cases}$$

ottenendo il punto  $(2,0)$ . Nel precedente punto i vincoli (II) e (III) risultano attivi e linearmente indipendenti, pertanto in  $(2,0)$  le 1. e 2. della Proposizione 7.6 sono soddisfatte. Inoltre, sostituendo il punto  $(2,0)$  anche nei vincoli (I), (IV), (V) e (VI) notiamo che questi sono banalmente soddisfatti, pertanto  $(2,0)$  è un vertice del poliedro  $P$ .

Analogamente a quanto fatto per i casi (I) – (II), (I) – (III) e (II) – (III), lo studente analizzi per conto proprio i rimanenti 12 casi

$$\begin{array}{lll} (I) - (IV), & (I) - (V), & (I) - (VI), \\ (II) - (IV), & (II) - (V), & (II) - (VI), \\ (III) - (IV), & (III) - (V), & (III) - (VI), \\ (IV) - (V), & (IV) - (VI), & \\ (V) - (VI) & & \end{array}$$

e verifichi che gli unici vertici del poliedro  $P$  risultano essere i punti  $(1,2)$ ,  $(3,3)$ ,  $(4,2)$ ,  $(3,0)$  e  $(2,0)$ .

**Esempio 7.10** Si trovino tutti i vertici (se vi sono) del poliedro  $P$  descritto nell'Esempio 7.6. In particolare, a partire dal poliedro ammissibile  $P$  in (37), descritto dalle disequazioni

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_1 &\geq -2 \\ -2x_2 + 6x_1 &\geq -4, \end{aligned} \tag{39}$$



risolviamo il sistema lineare formato dalle equazioni associate a (39)

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_1 &= -2 \\ -2x_2 + 6x_1 &= -4. \end{aligned} \tag{40}$$

Per la 1. della Proposizione 7.6 ogni vertice deve soddisfare almeno  $n$  (ovvero due) tra le equazioni (40). Per esempio (da una semplice ispezione visiva) il punto ammissibile  $(-1, -1)$  soddisfa entrambe le (40) ma i vettori

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

non sono linearmente indipendenti, pertanto la 2. di Proposizione 7.6 non è soddisfatta nel punto  $(-1, -1)$  (infatti, come si è visto il problema dell'Esempio 7.6 non ha soluzione).

**Esempio 7.11** Si trovino tutti i vertici (se vi sono) del poliedro  $P$  descritto nell'Esempio 7.7. Come per l'esempio precedente, scriviamo le equazioni associate ai vincoli di disuguaglianza che definiscono il poliedro del problema (38):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned} \tag{41}$$

Poichè è  $n = 2$ , i vertici saranno punti ammissibili per  $P$  che devono soddisfare almeno 2 delle uguaglianze (41). Vi saranno allora solo 3 possibili casi.

- caso 1: il punto  $(0, 0)$  soddisfa le prime 2 uguaglianze (41), ma non è un punto ammissibile per il poliedro  $P$  in (38). Pertanto non potrà essere un vertice;
- caso 2: il punto  $(0, 1)$  è ammissibile per il poliedro  $P$  in (38) e soddisfa la prima e la terza equazione in (41). Inoltre i vettori dei coefficienti

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

associati al primo e terzo vincolo in (41), sono linearmente indipendenti. Pertanto il punto  $(0, 1)$  è un vertice per il poliedro ammissibile del problema (38);

- caso 3: il punto  $(1, 0)$  è ammissibile per il poliedro  $P$  in (38) e soddisfa la seconda e la terza equazione in (41). Inoltre i vettori dei coefficienti

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

associati al secondo e terzo vincolo in (41), sono linearmente indipendenti. Pertanto anche il punto  $(0, 1)$  è un vertice per il poliedro ammissibile del problema (38).

**Esempio 7.12** Il poliedro di Figura 28-(a) non ammette vertici (in  $\bar{x}$  vi è un solo vincolo attivo, mentre in  $\tilde{x}$  nessun vincolo è attivo). Invece nel poliedro di Figura 28-(b) vi sono i tre vertici  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

**Esercizio 11** Si trovino tutti i vertici (se esistono) del poliedro  $P$  descritto dalle relazioni

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &\geq 5,\end{aligned}$$

argomentando la risposta alla luce della Proposizione 7.6.

Ribadiamo che dalla Proposizione 7.6, risulterà che in un poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ , dove  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  vi può essere al più un numero di vertici pari a (numero massimo di combinazioni di  $m$  elementi presi a classi di  $n$ )

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}; \quad (42)$$

di conseguenza se  $m < n$  il poliedro  $P$  non può ammettere vertici.

**Definizione 7.8** Sia dato il poliedro ammissibile  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$  del problema (34), con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dato il punto  $\bar{x} \in P$  e la direzione  $d \in \mathbb{R}^n$  ammissibile in  $\bar{x}$ , si dice che  $P$  contiene la retta  $r = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \bar{x} + \alpha d, \alpha \in \mathbb{R}\}$ , se  $x \in P$  per ogni  $x \in r$ . □

Siamo ora in grado di enunciare un risultato di rilevante importanza per la soluzione dei problemi di Programmazione Lineare. Il risultato seguente, che è noto in letteratura come **Teorema fondamentale della Programmazione Lineare**, costituisce la *summa* dei risultati descritti nella presente sezione di queste note. L'enunciato del teorema vale in generale per qualsiasi problema di programmazione lineare, ma per uniformità di trattazione lo riferiamo al problema (34).

**Teorema 7.1 (Teorema Fondamentale della PL)** Dato il problema (34) di Programmazione Lineare, si supponga che il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , non contenga rette. Sono possibili solo i seguenti tre casi:

- 1) il poliedro  $P$  è un insieme vuoto (ovvero (34) non ammette soluzioni ammissibili);
  - 2) la funzione  $f(x) = c^T x$  è illimitata inferiormente sul poliedro ammissibile  $P$ ;
  - 3) il problema (34) ammette almeno una soluzione e questa si trova su uno dei vertici di  $P$ .
- 

Si può dimostrare (ma va oltre lo spirito delle presenti note), che nel Teorema 7.2 l'ipotesi che il poliedro  $P$  non contenga rette, serve solo ad assicurare che il poliedro contenga almeno un vertice. Pertanto è un'ipotesi *inessenziale* se è verificato il caso 1) oppure 2) del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. A titolo di esempio si osservi anche che il caso contemplato al punto 2) del Teorema 7.2 viene riassunto dal seguente

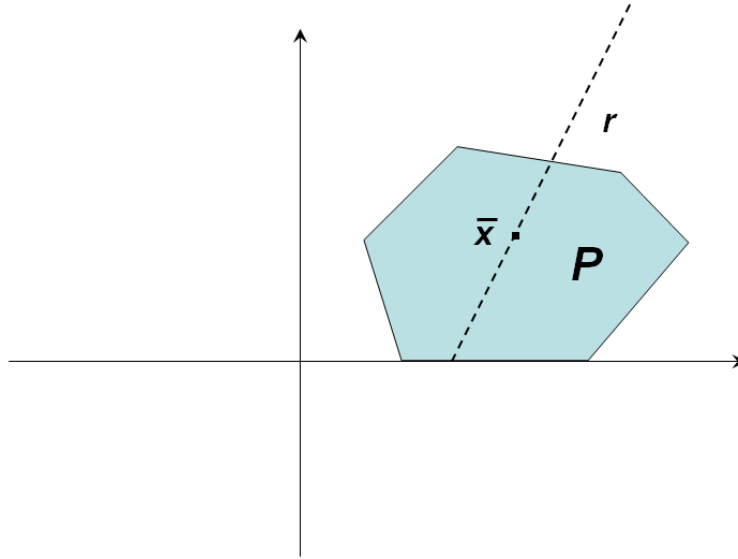


Figura 27: Il poliedro  $P$  in *forma standard* non può contenere la retta  $r$ .

problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \end{aligned}$$

in cui il poliedro ammissibile  $P$  è rappresentato nella Figura 24-(c).

Mostriamo ora come riformulare il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare evitando di introdurre l'ipotesi relativa all'assenza di rette nel poliedro ammissibile.

A tale scopo si consideri il poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ , ove come al solito  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si osservi che gli  $m$  vincoli che definiscono il poliedro sono esplicitamente dati da

$$a_i^T x \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (43)$$

essendo

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, per un'opportuna scelta delle variabili  $y_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  (cosiddette variabili *surplus*), possiamo riscrivere i vincoli (43) come segue:

$$\begin{cases} a_i^T x - y_i = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ y_i \geq 0 & i = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (44)$$

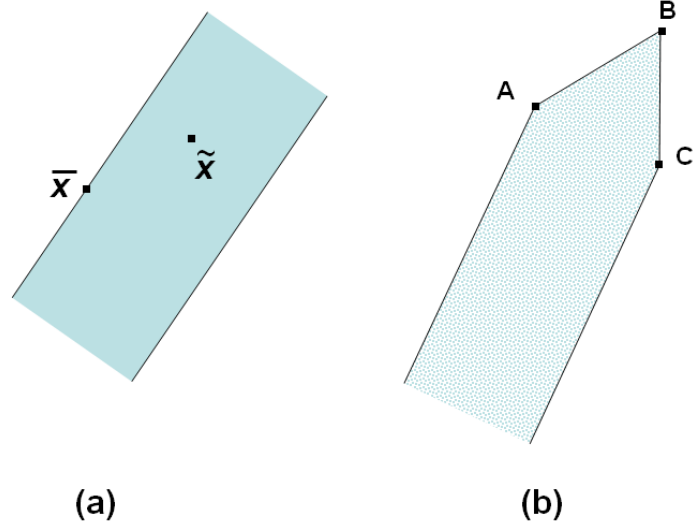


Figura 28: Vertici e vincoli attivi: in  $\bar{x}$  c'è un solo vincolo attivo, in  $\tilde{x}$  non vi sono vincoli attivi, pertanto  $\bar{x}$  e  $\tilde{x}$  non possono essere vertici. Al contrario  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono vertici (in ciascuno di essi vi sono 2 vincoli attivi, con coefficienti dei vincoli linearmente indipendenti).

ovvero avremo il nuovo poliedro (con  $I_m$  indichiamo come al solito la matrice identità con  $m$  righe),

$$\hat{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} : (A \ : \ -I_m) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, \ y \geq 0 \right\}.$$

Si noti che ora il poliedro  $\hat{P}$  contiene  $m + m$  vincoli e  $n + m$  variabili. Inoltre, sostituendo nell'espressione di  $\hat{P}$  la relazione  $x_i = x_i^+ - x_i^-$ , con  $x_i^+ \geq 0$ ,  $x_i^- \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , si ottiene dopo qualche breve passaggio il poliedro

$$\bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n+m} : (A \ -A \ -I_m) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} = b, \quad \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\},$$

ovvero, ridenominando semplicemente le variabili

$$z = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ y \end{pmatrix},$$

otteniamo per  $\bar{P}$  l'espressione  $\bar{P} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+m} : \bar{A}z = \bar{b}, \ z \geq 0\}$ , in cui

$$\bar{A} = (A \ -A \ -I_m) \in \mathbb{R}^{m \times (2n+m)}, \quad \bar{b} = b \in \mathbb{R}^m. \quad (45)$$

Naturalmente, il poliedro  $\bar{P}$  contiene adesso un numero di vincoli pari a  $2m + 2n$  ( $m$  vincoli originali ai quali si aggiungono  $(2n + m)$  vincoli di *non negatività* sulle variabili), a fronte degli  $m$  vincoli ed  $n$  variabili del poliedro  $P$  di partenza. Quindi, il poliedro  $\bar{P}$  presenta una complessità maggiore rispetto a  $P$ .

**Definizione 7.9** Data la matrice  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times \bar{n}}$  ed il vettore  $\bar{b} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}$  in (45), con  $\bar{m} = m$  e  $\bar{n} = 2n + m$ , diremo che il poliedro  $\bar{P} = \{z \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : \bar{A}z = \bar{b}, \ z \geq 0\}$  è in **forma standard**. □

La trasformazione da  $P$  a  $\bar{P}$  è servita ad ottenere un poliedro in cui sono presenti *vincoli di non negatività* su tutte le variabili. Si noti poi che qualsiasi poliedro può sempre essere trasformato in forma standard. Basterà infatti introdurre i vincoli e le variabili aggiuntive come è stato mostrato sopra.

Se un poliedro  $P$  è in forma standard, esso presenta una proprietà estremamente interessante per riformulare il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare in forma più generale. In particolare, ogni poliedro non vuoto in forma standard **non contiene rette**. Infatti (si veda Figura 27), essendo  $P$  confinato nel primo ortante dello spazio Euclideo (per via dei vincoli di non negatività sulle variabili), non è possibile che tutti i punti di una retta appartengano ad un solo ortante.

Come si è già avuto modo di dire, per risolvere il problema (34) vengono adottati metodi specifici in grado di determinarne le soluzioni in modo efficiente. Il Metodo del Simplexso è uno di questi e richiede che il poliedro ammissibile di (34) sia preventivamente posto nella forma standard (la qual cosa come si è detto è sempre possibile, a prezzo di

un aumento del numero delle variabili e dei vincoli che descrivono il poliedro).

Sulla base delle precedenti considerazioni possiamo enunciare allora una nuova versione del Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare, relativo ad un problema di programmazione lineare del tipo (si noti che ora, rispetto a (34), il poliedro ammissibile è in forma standard)

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^T z \\ & \bar{A}z = \bar{b}, \quad \bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times \bar{n}}, \quad \bar{b} \in \mathbb{R}^{\bar{m}}, \\ & z \geq 0, \end{aligned} \tag{46}$$

al quale è sempre possibile ricondursi, a partire da un qualsiasi poliedro e considerando anche l'**Osservazione importante 2**. Si noti che in (46) il vettore  $\bar{c} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  è dato da

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} +c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}.$$

**Teorema 7.2 (Teorema Fondamentale della PL (standard))** *Dato il problema (46) di Programmazione Lineare, dove  $\bar{P} = \{z \in \mathbb{R}^{\bar{n}} : \bar{A}z = \bar{b}, z \geq 0\}$ , con  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{m} \times \bar{n}}$ . Sono possibili solo i seguenti tre casi:*

- 1) *il poliedro  $\bar{P}$  è un insieme vuoto (ovvero (46) non ammette soluzioni ammissibili);*
- 2) *la funzione  $f(z) = \bar{c}^T z$  è illimitata inferiormente sul poliedro ammissibile  $\bar{P}$ ;*
- 3) *il problema (46) ammette almeno una soluzione e questa si trova su uno dei vertici del poliedro ammissibile  $\bar{P}$ .*

□

Corre l'obbligo ribadire che i poliedri  $P$  e  $\bar{P}$  sono in generale diversi tra loro (coincideranno se e solo se  $P$  è già in forma standard), pertanto la proprietà di non contenere rette può non essere soddisfatta da  $P$  in  $\mathbb{R}^n$ , mentre può invece valere per  $\bar{P}$  nello spazio esteso  $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ .

**Esempio 7.13** *Sia dato il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ & -2 \leq 2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 \leq 5. \end{aligned}$$

*Per trasformarlo nella forma standard, in base alla Definizione 7.9, si osservi intanto che il problema ha 4 variabili e 4 vincoli, pertanto poniamo  $n = 4$  ed  $m = 4$ . Dei 4 vincoli solo 3 risultano di disuguaglianza, pertanto basterà aggiungere le 3 nuove variabili (slack)  $y_1$ ,*

$y_2$  ed  $y_3$ , e riscrivere tutti i vincoli in forma di uguaglianze (oltre ad includere i vincoli di non negatività), ottenendo

$$\begin{aligned}x_1 - y_1 &= 0 \\x_1 + x_2 &= -1 \\2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 - y_2 &= -2 \\2x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 + y_3 &= 5, \\y_1, y_2, y_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Dal momento poi che  $x_1, x_2, x_3, x_4$  non risultano vincolate in segno (ovvero non vi sono i vincoli di non negatività su di esse) dovremo anche applicare l'ulteriore sostituzione

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad i = 1, \dots, 4,$$

ottenendo alla fine per l'insieme  $\bar{P}$  nella Definizione 7.9 l'espressione

$$\begin{array}{cccccccccccccccl}x_1^+ & -x_1^- & & & & & & & & & -y_1 & & = & 0 \\x_1^+ & -x_1^- & x_2^+ & -x_2^- & & & & & & & & & = & -1 \\2x_1^+ & -2x_1^- & -x_2^+ & +x_2^- & -x_3^+ & +x_3^- & -6x_4^+ & +6x_4^- & & & -y_2 & & = & -2 \\2x_1^+ & -2x_1^- & -x_2^+ & +x_2^- & -x_3^+ & +x_3^- & -6x_4^+ & +6x_4^- & & & +y_3 & & = & 5 \\x_1^+, x_1^-, x_2^+, x_2^-, x_3^+, x_3^-, x_4^+, x_4^-, y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.\end{array}$$

Infine dovremo trasformare anche la funzione obiettivo, introducendo la minimizzazione al posto della massimizzazione, i.e.

$$\min -3x_1^+ + 3x_1^- + x_2^+ - x_2^-.$$

Pertanto la riformulazione del problema di PL di partenza (in cui il poliedro ammissibile è ora definito in uno spazio Euclideo esteso), in forma standard, risulterà complessivamente la seguente

$$\begin{aligned}\min \quad & \bar{c}^T z \\& \bar{A}z = \bar{b} \\& z \geq 0,\end{aligned}$$

dove

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ +3 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{11}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 11},$$

*essendo anche*

$$z = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4^+ \\ x_4^- \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{11}.$$



## References

- [BaShSh93] M.S.BAZARAA, H.D.SHERALI, C.M.SHETTY (1993) “*Nonlinear Programming - Theory and Algorithms (2nd edition)*”, John Wiley & Sons.
- [Be82] D.P.BERTSEKAS (1982) “*Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*”, Academic Press.
- [Be95] D.P.BERTSEKAS (1995) “*Nonlinear Programming*”, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, USA.
- [HiLi05] F.S.HILLIER, G.J.LIEBERMAN (2005) “*Ricerca Operativa*”, McGraw-Hill, 8<sup>a</sup> edizione.
- [NoWr99] J.NOCEDAL, S.J.WRIGHT (1999) “*Numerical Optimization*”, Springer-Verlag New York, Inc.
- [Ve08] C.VERCELLIS (2008) “*Ottimizzazione - Teoria, metodi, applicazioni*”, McGraw-Hill.