Calcolabilità e linguaggi formali BBBBBB

20 Dicembre 2013

Esercizio 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{0^n 0^m 1^k : n, m, k \geq 1\}$;
$L_2 = \{1^n 0^m b^m a^k : n, m, k \geq 1\}$.

(b) Determinare il tipo della grammatica data.

(c) Determinare il tipo del linguaggio. Se il linguaggio è di tipo 3, dare un'espressione regolare o un automa finito corrispondente.

Soluzione

Il linguaggio $L_1 = \{0^n 1^k : k \geq 1, n \geq 2\}$ e' regolare perche' generato dalla seguente grammatica regolare:
S::= 0S | 0A
A:::= 0B
B::= 1B | 1

Il linguaggio L_1 corrisponde alla seguente espressione regolare: 000^*11^*.
Il linguaggio L_2 e' libero perche' generato dalla seguente grammatica libera dal contesto:
S::= ABC
A:::= 1A | 1
B::= 0Bb | 0b
C::= aC | a

Il linguaggio L_2 non e' regolare. Supponiamo per assurdo che esista un automa a stati finiti con n stati che riconosca L_2. Allora la stringa $10^{n+1}b^{n+1}a \in L_2$ e' accettata dall'automa. Il numero di 0 consecutivi nella stringa supera il numero di stati. Quindi esiste una decomposizione della stringa $10^{n+1}b^{n+1}a = 10^k 0^r 0^s b^{n+1}a$ (con $k + r + s = n + 1$ e $r \geq 1$) tale che (i) l'automa dopo aver letto la stringa 10^k si trova nello stato q; (ii) l'automa dopo aver letto la stringa $10^k 0^r$ si trova nel medesimo stato q. Ne segue che la stringa $10^k 0^s b^{n+1} a \notin L_2$ $(k + s < n + 1)$ e' anche riconosciuta dall'automa. Assurdo.

Esercizio 2

Siano R, S e U espressioni regolari. Semplificare la seguente espressione regolare, mostrando tutti i passaggi di semplificazione:

$$((RS + \emptyset)^* + U + (U + \epsilon + S)^*)^*$$

Soluzione

Ricordiamo che

$$(RS)^* = \bigcup_{n\geq 0} (RS)^n = \{\epsilon\} \cup RS \cup RSRS \cup RSRSRS \cup \dots$$

dove $(RS)^n = RSRS \dots RS$ (n-volte) e' la concatenazione del linguaggio RS con se stesso n volte, ed $(RS)^0 = \{\epsilon\}$. Ricordiamo che ϵ e' la stringa vuota (talvolta denotata anche con λ).

$$\begin{aligned}
((RS + \emptyset)^* + U + (U + \epsilon + S)^*)^* &= ((RS)^* + U + (U + \epsilon + S)^*)^* && \text{da } RS + \emptyset = RS \\
&= ((RS)^* + U + (U + S)^*)^* && \text{da } \epsilon \in (U + S)^*,\ \epsilon \text{ stringa vuota} \\
&= ((RS)^* + (U + S)^*)^* && \text{da } U \subseteq (U + S)^* \\
&= (RS + U + S)^* && \text{da } (A^* + B^*)^* = (A + B)^*
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Enunciare il secondo teorema di ricorsione e provare Rice1 con il secondo teorema di ricorsione.

Esercizio 4

Sia P l'insieme dei numeri primi e sia $I = \{x : P \subseteq dom(\phi_x)\}$. Applicare, se possibile, Rice 2 e Rice 3 ad I.

Soluzione

Rice2 non e' applicabile ad I: se $f < g$ e $\{x : \phi_x = f\} \subseteq I$, allora $P \subseteq dom(f) \subseteq dom(g)$, da cui segue $\{x : \phi_x = g\} \subseteq I$. Rice3 e' applicabile ad I: Sia f la funzione identica. Allora $P \subseteq dom(f) = N$. Quindi $\{x : \phi_x = f\} \subseteq I$. Sia θ un'arbitraria funzione finita che approssima propriamente f, i.e., $\theta < f$. Dal fatto che $dom(\theta)$ e' finito e che P e' infinito, si ha che $P \not\subseteq dom(\theta)$. Ne segue che $\{x : \phi_x = \theta\} \subseteq \bar{I}$. Quindi I non e' semidecidibile.