Università “Ca’Foscari” Venezia

Dipartimento di Scienze Ambientali,

Informatica e Statistica

Giovanni Fasano †

Prototipi di Esercizi Svolti:

Vertici di un poliedro,

Branch & Bound, Flusso su reti

†Università Ca’Foscari Venezia, Dipartimento di Management, S.Giobbe Cannaregio 873, 30121 Venezia, ITALY. E-mail:`fasano@unive.it` ; URL: `http://venus.unive.it/~fasano` - A.A. 2014-2015.

1 Esercizio 1: Calcolo vertici di un poliedro

Si determinino, se esistono, tutti e soli i vertici del poliedro (P) descritto dai seguenti vincoli, dopo aver determinato il numero massimo di tali vertici.

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ \text{(II)} & 2x_3 + 6x_4 \leq 5 \\ \text{(III)} & x_1 + x_3 \leq 4 \\ \text{(IV)} & x_1 \geq 0 \\ \text{(V)} & x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \text{(P)}$$

Dal momento che il poliedro (P) è definito da 5 vincoli (ovvero è $m = 5$) ed è contenuto in $I\!R^4$ (ovvero è $n = 4$), il numero massimo di vertici di (P) è limitato da

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5}{1} = 5.$$

Poichè un punto $v \in P$ è un suo vertice *se e solo se* rende attivi almeno n vincoli di (P), e di questi esattamente n devono essere linearmente indipendenti, analizziamo tutte le n-ple di vincoli del poliedro:

Vincoli (I)-(II)-(III)-(IV):

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad v : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -1/2 \end{array} \right.$$

ma il vettore v NON soddisfa (V), quindi NON può essere un vertice di (P).

Vincoli (I)-(II)-(III)-(V):

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad v : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3/2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5/2 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

che soddisfa tutti i vincoli di (P). Inoltre, verifichiamo se i 4 vincoli selezionati siano linearmente indipendenti, calcolando il seguente determinante

$$\left| \begin{array}{cccc} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right| = (-1)^5 6(3+1) = -24 \neq 0,$$

pertanto il punto $(3/2, 0, 5/2, 0)$ è vertice di (P).

Vincoli (I)-(II)-(IV)-(V):

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad v : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = 3/2 \end{array} \right.$$

che soddisfa tutti i vincoli di (P). Inoltre, verifichiamo se i 4 vincoli selezionati siano linearmente indipendenti, calcolando il seguente determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

pertanto il punto $(0, 0, -2, 3/2)$ è vertice di (P).

<u>**Vincoli (I)-(III)-(IV)-(V):**</u>

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

che risulta un sottoinsieme di vincoli *incompatibili*, pertanto in questo caso non è possibile trovare un candidato a vertice di (P).

<u>**Vincoli (II)-(III)-(IV)-(V):**</u>

$$\begin{cases} 2x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -1/2 \end{cases}$$

ma il vettore v NON soddisfa (I), quindi NON può essere un vertice di (P).

In definitiva quindi il poliedro (P) ammette complessivamente i seguenti punti di vertice: $(3/2, 0, 5/2, 0)$ e $(0, 0, -2, 3/2)$.

2 Esercizio 2: Branch & Bound

Si vuole risolvere con il metodo del Branch & Bound il seguente esercizio (P_0) di programmazione lineare intera:

$$\begin{aligned} \max \ & 7x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 \leq 10.5 \\ & 11x_2 - x_4 \leq 8 \\ & x \geq 0 \\ & x \ \text{ intero.} \end{aligned} \qquad (P_0)$$

Partendo dalla soluzione approssimata intera (ottenuta per ispezione visiva) $\tilde{x} = 0$, $\tilde{z} = 0$, creando la lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{P_0\}$, si estrae da quest'ultima il solo problema che contiene e se ne risolve il problema *rilassato* (ottenuto cioè ignorando i vincoli di interezza) associato a (P_0), ottenendo il punto

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10.5 \\ 0 \\ 107.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che non risulta a coordinate intere. Pertanto, P_0 si chiude ed a partire da esso si determinano due sottoproblemi (*branching* rispetto alla variabile non intera x_2)

$$\begin{array}{ll} \max\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ \quad 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 \leq 10.5 & \\ \quad 11x_2 - x_4 \leq 8 & \qquad\qquad (P_1) \\ \quad x \geq 0 & \\ \quad x \ \text{ intero} & \\ \quad x_2 \leq \lfloor 10.5 \rfloor = 10 & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ll} \max\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ \quad 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 \leq 10.5 & \\ \quad 11x_2 - x_4 \leq 8 & \qquad\qquad (P_2) \\ \quad x \geq 0 & \\ \quad x \ \text{ intero} & \\ \quad x_2 \geq \lfloor 10.5 \rfloor + 1 = 11, & \end{array}$$

che andranno inseriti nella nuova lista dei problemi aperti $\mathcal{L} = \{P_1, P_2\}$. Estraendo da questa il problema P_1 e risoltone il rilassamento lineare, si ottiene il punto

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 10 \\ 0 \\ 102 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $z^1 = 20.875$. Essendo $z^1 > z^0$ provvediamo a chiudere il problema P_1 ed a suddividerlo (*branching*) nei due seguenti sottoproblemi che inseriremo nella lista $\mathcal{L}$ dei problemi aperti:

$$\begin{array}{ll} \max\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ \quad 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 \leq 10.5 & \\ \quad 11x_2 - x_4 \leq 8 & \qquad\qquad (P_3) \\ \quad x \geq 0 & \\ \quad x \ \text{ intero} & \\ \quad x_2 \leq 10 & \\ \quad x_1 \leq \lfloor 0.125 \rfloor = 0 & \end{array}$$

e

$$
\begin{array}{ll}
\max\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 & \\
\quad 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_5 \leq 10.5 & \\
\quad 11x_2 - x_4 \leq 8 & \qquad\qquad\qquad\qquad (P_4) \\
\quad x \geq 0 & \\
\quad x \ \text{intero} & \\
\quad x_2 \leq \lfloor 10.5 \rfloor = 10 & \\
\quad x_1 \geq \lfloor 0.125 \rfloor + 1 = 1. &
\end{array}
$$

Si osservi che finora non è stato ancora aggiornato il valore del punto di ottimo corrente intero $\tilde{x}$. Poichè ora è $\mathcal{L} = \{P_2, P_3, P_4\}$, estraiamo da $\mathcal{L}$ il problema P_2 e ne risolviamo il rilassamento: quest'ultimo risulta inammissibile, pertanto il suo insieme ammissibile è vuoto, determinando la chiusura di P_2 senza aggiornare l'ottimo corrente intero $\tilde{x}$.
Estraiamo ora dalla lista dei problemi aperti P_3 e risolvendone il rilassamento lineare troviamo che gli corrisponde la soluzione

$$
x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 102 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

con valore della funzione obiettivo $z = 20$. Essendo x^3 intera provvediamo a chiudere il problema P_3 ma ora *aggiorniamo anche l'ottimo corrente intero* che diventa $\tilde{x} = (0, 10, 0, 102, 0)^T$, con $\tilde{z} = 20$.
Estraiamo infine P_4 dalla lista dei problemi aperti e ne risolviamo il rilassamento lineare, ottenendo il punto

$$
x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6.5 \\ 0 \\ 63.5 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

cui corrisponde nuovamente il valore della funzione obiettivo $z = 20$. Pertanto, essendo il valore della funzioe obiettivo nell'ottimo corrente intero $\tilde{z} = 20$, provvediamo a chiudere P_4 *senza aggiornare* il valore di $\tilde{z}$. Dal momento che risulta ora $\mathcal{L} = \emptyset$, il metodo ha termine e la soluzione finale sarà pertanto

$$
x^* = x^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 102 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

cui corrisponde il valore della funzione obiettivo $z^* = 20$.

3 Esercizio 3: Problema di Flusso su reti

Sia dato il grafo in Figura 1. Dopo aver verificato se il *vettore di flusso* è ammissibile (fare verifica esplicita), calcolare il massimo valore del flusso per il nodo 's', ed indicare un taglio

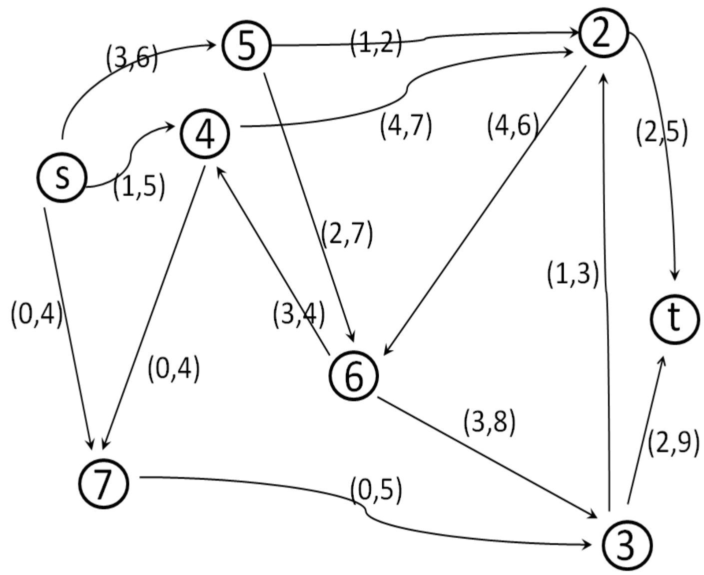

Figura 1: Grafo iniziale.

a capacità minima del grafo. Si noti intanto che nelle etichette (coppie ordinate di numeri) associate agli archi, ciascuna componente del flusso (primo numero della coppia ordinata) è sempre non negativa, inoltre risulta non superiore alla capacità dell'arco (secondo numero della coppia ordinata). Pertanto il vettore di flusso soddisfa i **vincoli di capacità**. Inoltre, per ogni nodo tranne la sorgente s ed il pozzo t, risulta che il flusso entrante è equivalente al flusso uscente dallo stesso nodo (e.g., nel nodo 6 entra il flusso $4+2=6$ ed esce il flusso $3+3=6$). Pertanto, il vettore di flusso assegnato soddisfa anche i **vincoli di equilibrio** nei nodi intermedi.
Il valore del flusso $\bar{f}$ associato al vettore di flusso dato in Figura 1 è semplicemente

$$\bar{f} = 3 + 1 + 0 = 4.$$

Iterazione 1:

Cerchiamo un possibile *cammino aumentante* da s a t. A tal fine identifichiamo il cammino

$$P_1 = \{(s,7),(7,3),(3,t)\}$$

nel quale tutti gli archi compresi risultano essere *diretti* (ovvero concordi con il verso di percorrenza del cammino dal nodo s al nodo t). Pertanto la variazione di flusso δ consentita dal cammino aumentante P_1 è pari a

$$\delta = \delta^+ = \min\{4-0, 5-0, 9-2\} = 4.$$

Aggiornando le etichette dei nodi del grafo inclusi nel cammino aumentante P_1 si ottiene il grafo in Figura 2, cui corrisponde il nuovo valore di flusso f_1 dato da

$$f_1 = \bar{f} + \delta = 4 + 4 = 8.$$

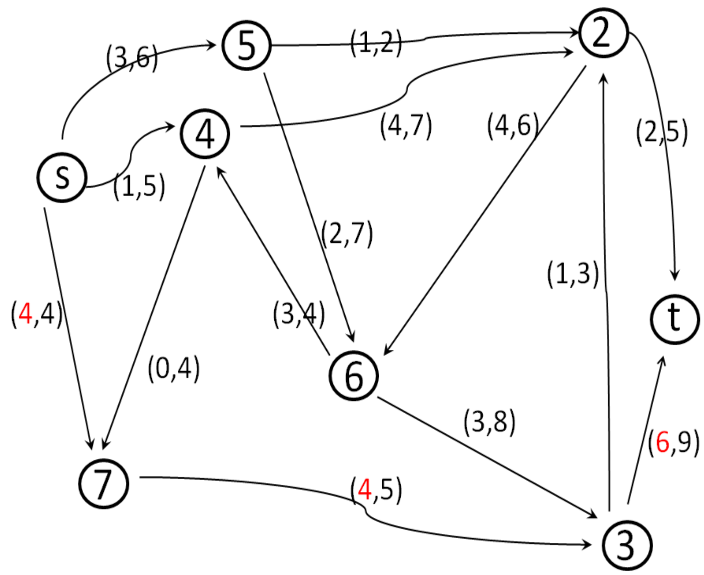

Figura 2: Grafo al termine della prima iterazione.

Iterazione 2:

Cerchiamo un nuovo possibile *cammino aumentante* da s a t. A tal fine identifichiamo il cammino

$$P_2 = \{(s,5),(5,6),(6,2),(2,t)\}$$

che contiene 3 archi diretti (non *saturi*) ed un arco inverso (non *vuoto*). Pertanto la variazione di flusso δ consentita dal cammino aumentante P_2 è pari a

$$\begin{aligned}
&\delta^+ = \min\{6-3, 5-2, 7-2\} = 3,\\
&\delta^- = \min\{4\} = 4,\\
&\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3.
\end{aligned}$$

Aggiornando le etichette dei nodi del grafo inclusi nel cammino aumentante P_2 si ottiene il grafo in Figura 3, cui corrisponde il nuovo valore di flusso f_2 dato da

$$f_2 = f_1 + \delta = 8 + 3 = 11.$$

Iterazione 3:

Cerchiamo un nuovo possibile *cammino aumentante* da s a t. A tal fine identifichiamo il cammino

$$P_3 = \{(s,4),(4,6),(6,3),(3,t)\}$$

che contiene 3 archi diretti (non *saturi*) ed un arco inverso (non *vuoto*). Pertanto la variazione di flusso δ consentita dal cammino aumentante P_3 è pari a

$$\begin{aligned}
&\delta^+ = \min\{5-1, 8-3, 9-6\} = 3,\\
&\delta^- = \min\{3\} = 3,\\
&\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\} = 3.
\end{aligned}$$

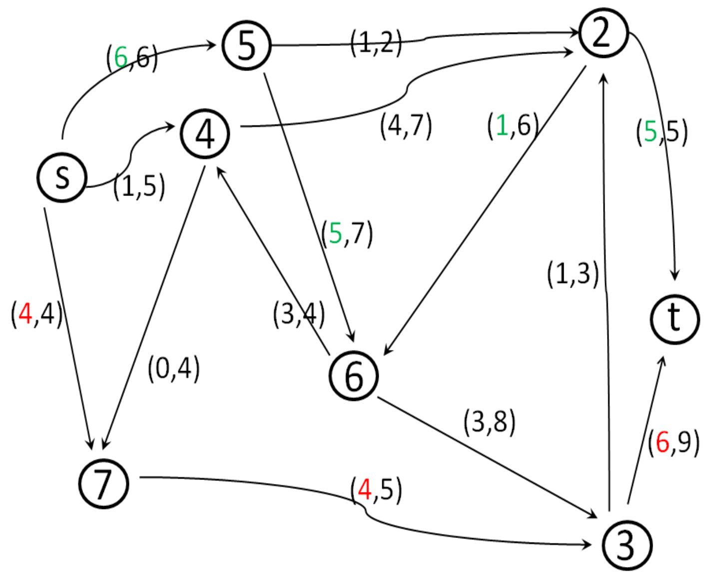

Figura 3: Grafo al termine della seconda iterazione.

Aggiornando le etichette dei nodi del grafo inclusi nel cammino aumentante P_3 si ottiene il grafo in Figura 4, cui corrisponde il nuovo valore di flusso f_3 dato da

$$f_3 = f_2 + \delta = 11 + 3 = 14.$$

Inoltre, si nota che il *taglio* $(W, \bar{W})$, in cui

$$W = \{s, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$\bar{W} = \{t\},$$

risulta a *capacità minima*, in quanto $F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}) = 14$. Pertanto, dal Teorema del *Max Flow - Min Cut* la procedura termina con il valore del flusso finale pari a $f_3 = 14$.

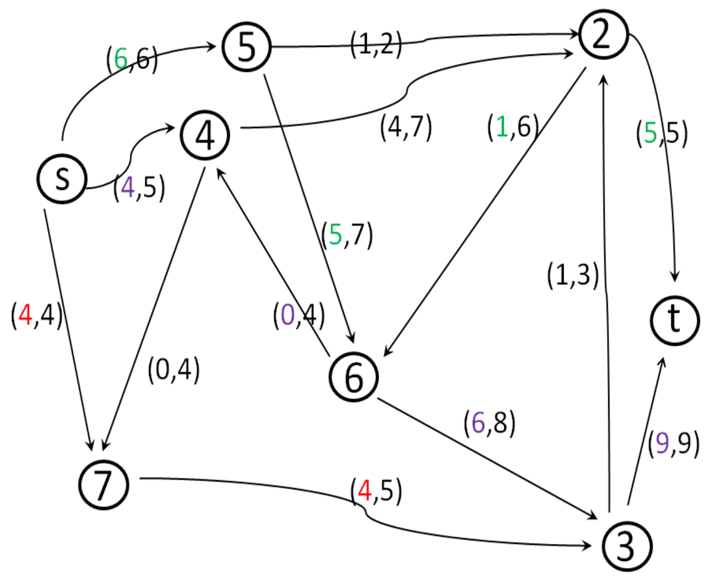

Figura 4: Grafo al termine della terza iterazione.