



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA

APPUNTI DALLE LEZIONI DI

# RICERCA OPERATIVA

(MASSIMO FLUSSO)

SEDE DI LATINA

GIOVANNI FASANO

fasano@unive.it

<http://venus.unive.it/~fasano>

ANNO ACCADEMICO 2013-2014



# *Prefazione*

Queste note sono redatte ad uso degli studenti del corso di “*Ricerca Operativa*” da 6 crediti (CFU) della Facoltà di Ingegneria dell’Informazione, Informatica e Statistica della SAPIENZA, Università di Roma, sede di Latina.

I contenuti di queste note sono *integralmente* tratti da:

**R. Bruni *Appunti dalle lezioni di Ricerca Operativa*  
a.a. 2003-2004, SAPIENZA – Università di Roma**

A completamento degli argomenti svolti in queste note, è disponibile sul sito web del docente una raccolta di esercizi e materiale integrativo, reso disponibile durante le lezioni.

## Capitolo 7

# Massimo flusso

In questo capitolo esaminiamo un importante problema di PL su grafi, il problema del *flusso massimo* in un grafo; dopo aver presentato il problema e alcune delle sue caratteristiche fondamentali, studieremo un algoritmo per la sua soluzione e considereremo inoltre alcune sue generalizzazioni ed estensioni.

In maniera molto discorsiva, possiamo immaginare che il grafo sia una rete idrica con il quale si tenta di portare dell'acqua da un nodo sorgente  $s$  ad un utilizzatore rappresentato da un nodo  $t$ . Per far questo si usa una rete di tubature rappresentata dagli archi. Le tubature hanno una certa capacità  $c_{uv}$  (cioè possono trasportare al più  $c_{uv}$  litri di acqua al secondo). Le tubature si intersecano nei nodi, dove può essere deciso, come l'acqua che arriva nel nodo deva essere distribuita ai tubi "in uscita". Si tratta di determinare come incanalare l'acqua in modo da massimizzare il flusso da  $s$  a  $t$ ; da qui il nome del problema di massimo flusso. Ovviamente, l'interpretazione idrica è solo una delle molte possibili. In fatti si potrebbe trattare di una rete di trasporto di energia elettrica (e allora i rami rappresenterebbero cavi elettrici), di persone (e allora i rami rappresenterebbero tratte servite da aerei, treni, macchine etc.), di informazioni etc.

### 7.1 Il problema del massimo flusso.

Sia dato un grafo orientato  $G = (V, E)$  con  $V = \{s, t, 3, \dots, n\}$  ed  $|E| = m$  e sia data una capacità  $c_{uv} \in \mathbb{R}^+$  associata a ciascun arco  $(u, v) \in E$ . Supponiamo che esistano

- un nodo  $s$  detto *sorgente* con solo archi uscenti ( $\omega^-(s) = \{\emptyset\}$ );
- un nodo  $t$  detto *pozzo* con solo archi entranti ( $\omega^+(t) = \{\emptyset\}$ ).

I nodi distinti da  $s$  e da  $t$  sono detti *nodì intermedi*.

Un vettore  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  (notare che  $\bar{x}$  ha un numero di componenti pari alla cardinalità dell'insieme di archi di  $G$ ) viene detto *flusso s-t ammissibile* o, per brevità *flusso ammissibile*, se soddisfa i seguenti vincoli:

$$0 \leq \bar{x}_{uv} \leq c_{uv} \quad \text{per ogni } (u, v) \in E. \quad (7.1)$$

$$\sum_{(u,v) \in \omega^-(v)} \bar{x}_{uv} - \sum_{(v,k) \in \omega^+(v)} \bar{x}_{vk} = 0, \quad \forall v \in V - \{s, t\} \quad (7.2)$$

I vincoli (7.1) indicano che il flusso su ogni arco è sempre non-negativo e non eccede la capacità dell'arco stesso. I vincoli (7.2) indicano che per ogni nodo intermedio il flusso totale entrante nel nodo eguagli il flusso totale uscente dal nodo stesso. Per questo motivo, le  $n - 2$  equazioni (7.2) sono dette *equazioni di conservazione* (del flusso).

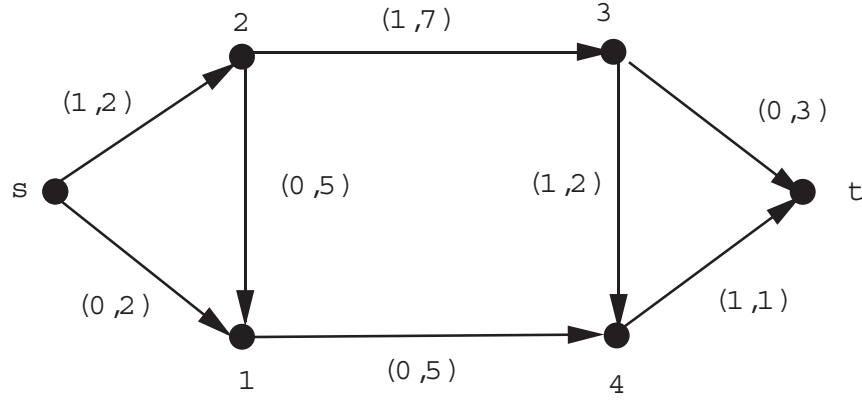


Figura 7.1: Flusso ammissibile

Consideriamo l'esempio di figura 7.1. Nella figura, fra parentesi tonde, si è indicato per ogni arco  $e$  il valore del flusso  $\bar{x}_e$  e la capacità  $c_e$ . Ad esempio, nell'arco  $(s, 1)$ , il flusso vale 0 mentre la capacità 2. Si può facilmente verificare che il flusso indicato è ammissibile.

Dato un flusso  $s$ - $t$ , diremo *valore* del flusso, il flusso uscente dal nodo  $s$ , e cioè la quantità:

$$\bar{f} = \sum_{(s,u) \in \omega^+(s)} \bar{x}_{su} \quad (7.3)$$

Nel grafo di figura 7.1, il valore del flusso  $\bar{f}$  è uguale a 1.

Il problema del **massimo flusso** si può ora enunciare come segue:

*Trovare un flusso ammissibile nel grafo  $G$  in modo che il valore del flusso  $\bar{f}$  sia massimo.*

Questo problema può essere formulato come un problema di PL. Associamo una variabile  $x_{uv}$  ad ogni arco  $(u, v) \in E$ . Tale variabile rappresenta il flusso inviato sull'arco  $(u, v)$ . Inoltre associamo una variabile  $f$  alla quantità totale di flusso inviata da  $s$  a  $t$ . Da quanto sopra detto, il problema  $(MF)$  verrà formulato nel seguente modo:

$$\max f \quad (7.4)$$

$$- \sum_{(s,k) \in \omega^+(s)} x_{sk} + f = 0 \quad (7.5)$$

$$\sum_{(u,v) \in \omega^-(v)} x_{uv} - \sum_{(v,k) \in \omega^+(v)} x_{vk} = 0, \quad \forall v \in V - \{s, t\} \quad (7.6)$$

$$x_{uv} \leq c_{uv} \quad \text{per ogni } (u, v) \in E. \quad (7.7)$$

$$x_{uv} \geq 0 \quad \text{per ogni } (u, v) \in E. \quad (7.8)$$

Il primo vincolo (7.5) indica che la somma dei flussi sugli archi uscenti da  $s$  è uguale al flusso totale  $f$ .

Si ha quindi un vincolo per ogni nodo intermedio (7.6), che rappresenta il fatto che il flusso entrante nel nodo è uguale al flusso uscente (conservazione del flusso). Si può verificare facilmente che i vincoli (7.5) e (7.6) implicano che la somma dei flussi sugli archi entranti in  $t$  è uguale al flusso totale  $f$ .

Quindi abbiamo i vincoli (7.7) che rappresentano il fatto che il flusso su ogni arco non può eccedere la capacità dell'arco stesso.

Infine ci sono i vincoli di non negatività delle variabili (7.8).

Notiamo che la regione ammissibile di questo problema di PL è non vuota (il vettore di flusso  $\bar{x} = 0$  è ovviamente ammissibile) e limitata (per la presenza dei vincoli (7.7) e (7.8)). Quindi, per il teorema fondamentale della programmazione lineare ammette una soluzione ottima e un valore ottimo della funzione obiettivo, che verrà indicato nel seguito con  $f^*$ .

Molte altre considerazioni, sia teoriche sia algoritmiche, potrebbero essere fatte sul problema del massimo flusso a partire dalla sua formulazione come problema di PL. Intanto, per fare un esempio, è evidente che il problema del massimo flusso potrebbe essere risolto con il metodo del Simplex studiato nella prima parte del corso. Questo non è tuttavia l'algoritmo migliore applicabile in questo caso (notiamo che il problema ha una "struttura" particolare che può e deve essere sfruttata).

In questo capitolo, per semplicità e brevità, noi studieremo le proprietà del problema di massimo flusso e un algoritmo per la sua soluzione a partire dalla sua formulazione come problema su grafi. Questo approccio, se da una parte non mette pienamente in luce i rapporti con la teoria della programmazione lineare, ha il vantaggio di essere più semplice e di permettere una più immediata interpretazione intuitiva dei risultati che via via esporremo.

## 7.2 Alcuni risultati preliminari

Nel problema del massimo flusso un ruolo centrale è svolto dal concetto di taglio  $s$ - $t$ .

**Definizione 7.2.1** Dato un grafo orientato  $G = (V, E)$ , con  $s, t \in V$ , e  $s \neq t$ , si definisce taglio  $s$ - $t$  una partizione dei nodi  $(W, \bar{W})$  tale che  $s \in W$  e  $t \in \bar{W}$ .

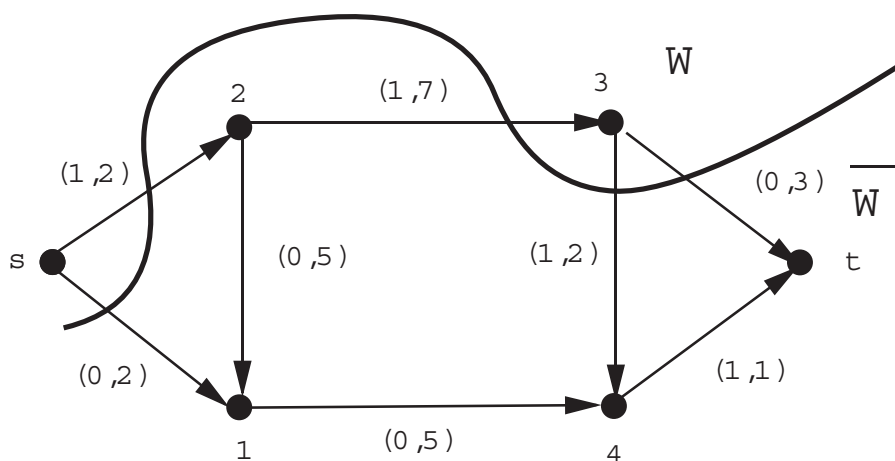


Figura 7.2: Taglio  $s$ - $t$  con  $W = \{s, 3\}$  e  $\bar{W} = \{1, 2, 4, t\}$

Nella figura 7.2 è illustrato un taglio  $s$ - $t$ , con  $W = \{s, 3\}$  e  $\bar{W} = \{1, 2, 4, t\}$ . È importante notare come una qualsiasi partizione dei nodi in due classi, tale che  $s$  e  $t$  appartengano a classi diverse, definisce

un taglio  $s$ - $t$ . Ad ogni taglio  $s$ - $t$   $(W, \bar{W})$  associamo una *capacità del taglio*  $C(W, \bar{W})$  che è pari alla somma delle capacità degli archi che hanno il primo estremo in  $W$  e il secondo estremo in  $\bar{W}$ , e cioè

$$C(W, \bar{W}) = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} c_{uv} \quad (7.9)$$

Notiamo che gli archi che attraversano il taglio in senso opposto, ovvero che abbiano il primo estremo in  $\bar{W}$  e il secondo estremo in  $W$ , non contribuiscono alla capacità del taglio. Ad esempio, dato il taglio di figura 7.2, gli archi che hanno il primo estremo in  $W$  e il secondo estremo in  $\bar{W}$  sono gli archi  $(s, 1)$ ,  $(s, 2)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, t)$ , e dunque la capacità del taglio  $C(W, \bar{W}) = 2 + 2 + 2 + 3 = 9$ . Notiamo inoltre che l'arco  $(2, 3)$  attraversa il taglio in direzione opposta, e cioè va da  $\bar{W}$  a  $W$ , e dunque la sua capacità non contribuisce alla capacità complessiva del taglio.

Dato un flusso  $s$ - $t$   $\bar{x}$ , è possibile associare ad ogni taglio  $s$ - $t$   $(W, \bar{W})$  un *flusso netto* di  $(W, \bar{W})$ , che è pari alla somma dei flussi sugli archi uscenti da  $W$  ed entranti in  $\bar{W}$ , meno la somma dei flussi sugli archi uscenti da  $\bar{W}$  ed entranti in  $W$ :

$$F(W, \bar{W}) = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{uv} - \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{vu}. \quad (7.10)$$

Per il taglio di figura 7.2 è facile verificare che  $F(W, \bar{W}) = 1$ .

Esiste una semplice relazione tra il flusso netto di un taglio e il valore del flusso, tale relazione è data nel seguente teorema.

**Teorema 7.2.2** *Dato un flusso ammissibile  $\bar{x}$ , il flusso netto  $F(W, \bar{W})$  in ogni taglio  $(W, \bar{W})$  è pari al valore del flusso  $\bar{f}$ , cioè*

$$F(W, \bar{W}) = \bar{f}.$$

**Dimostrazione.** Sommando le equazioni (7.2) di conservazione del flusso relative ai soli nodi dell'insieme  $W - \{s\}$  e l'equazione (7.3)  $\bar{f} = \sum_{(s,u) \in \omega^+(s)} \bar{x}_{su}$ , otteniamo:

$$\sum_{v \in W - \{s\}} \left( \sum_{(u,v) \in \omega^-(v)} \bar{x}_{uv} - \sum_{(v,k) \in \omega^+(v)} \bar{x}_{vk} \right) - \sum_{(s,u) \in \omega^+(s)} \bar{x}_{su} = -\bar{f}$$

ovvero, inserendo il termine relativo al nodo  $s$  nella doppia sommatoria:

$$\sum_{v \in W} \left( \sum_{(u,v) \in \omega^-(v)} \bar{x}_{uv} - \sum_{(v,k) \in \omega^+(v)} \bar{x}_{vk} \right) = -\bar{f}.$$

Notiamo il flusso relativo ad un arco  $(u, v)$  con entrambi gli estremi in  $W$  compare nella sommatoria per  $\omega^+(u)$  con segno negativo e in  $\omega^-(v)$  con segno positivo. Pertanto il suo contributo complessivo alla sommatoria è nullo. Dunque gli archi  $(u, v)$  che contribuiscono alla sommatoria avranno necessariamente un estremo in  $W$  e l'altro estremo in  $\bar{W}$ , ovvero saranno tali che  $u \in W$  e  $v \in \bar{W}$ , oppure  $v \in W$  e  $u \in \bar{W}$ . Pertanto

$$\sum_{u \in \bar{W}, v \in W} \bar{x}_{uv} - \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{vu} = -\bar{f},$$

oppure, equivalentemente:

$$F(W, \bar{W}) = \bar{f} \quad \square$$

Se  $W = V - \{t\}$  e  $\bar{W} = \{t\}$  abbiamo:

$$F(W, \bar{W}) = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{uv} = \sum_{(u,t) \in \omega^-(t)} \bar{x}_{ut} = \bar{f}.$$

Quindi il flusso uscente dalla sorgente  $s$  è uguale al flusso netto entrante nel pozzo  $t$ .

Passiamo ora ed esaminare le relazioni tra il valore del flusso e le capacità di un taglio. È estremamente semplice provare i seguenti due risultati.

**Teorema 7.2.3** *Sia dato un flusso ammissibile  $\bar{x}$  in  $G$ . Il flusso netto di un taglio qualunque è minore o uguale alla capacità dello stesso taglio. Cioè, se  $(W, \bar{W})$  è un taglio, risulta*

$$F(W, \bar{W}) \leq C(W, \bar{W}).$$

**Dimostrazione.** Siccome il flusso è ammissibile soddisfa, in particolare, le (7.1). Ma allora il teorema segue immediatamente dal confronto delle definizioni di capacità flusso netto di un taglio, cioè dal confronto delle (7.9) e (7.10).  $\square$

Notiamo, per inciso, che il flusso netto di un taglio dipende dal flusso  $\bar{x}$  che stiamo considerando, mentre la capacità dello stesso taglio è indipendente dal flusso  $\bar{x}$  e dipende invece solamente dalle capacità degli archi.

Il flusso massimo  $f^*$  è ottenuto in corrispondenza ad un particolare flusso ammissibile, che indichiamo con  $\bar{x}^*$ ; quindi, come caso particolare del precedente teorema otteniamo il seguente risultato.

**Teorema 7.2.4** *Il valore del massimo flusso  $f^*$  è minore o uguale alla capacità di un qualunque taglio  $s$ - $t$ , cioè*

$$f^* \leq C(W, \bar{W})$$

per ogni taglio  $(W, \bar{W})$ .

**Dimostrazione.** Per il Teorema 7.2.2 abbiamo, per qualunque taglio  $(W, \bar{W})$

$$f^* = F(W, \bar{W}). \quad (7.11)$$

Ma abbiamo anche, per il teorema precedente

$$F(W, \bar{W}) \leq C(W, \bar{W}) \quad (7.12)$$

Dalle (7.11) e (7.12) segue immediatamente

$$f^* \leq C(W, \bar{W}),$$

che è quanto volevamo dimostrare.  $\square$

### 7.3 Cammini aumentanti

Un secondo elemento che gioca un ruolo fondamentale nello studio di problemi di massimo flusso è il concetto di *cammino aumentante*, che è l'oggetto di questa sezione.

Per introdurre la definizione di cammino aumentante abbiamo bisogno di una definizione preliminare

**Definizione 7.3.1** *Dato un cammino semplice  $P = \{u_0, e_1, u_1, \dots, e_p, u_p\}$ , chiamiamo arco diretto un arco di tipo  $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ , mentre chiamiamo arco inverso un arco di tipo  $e_i = (u_i, u_{i-1})^1$ .*

**Definizione 7.3.2** *Data una soluzione ammissibile  $\bar{x}$  del problema di massimo flusso, definiamo cammino aumentante da  $u_0$  a  $u_p$  un cammino semplice  $P = \{u_0, e_1, \dots, e_p, u_p\}$  tale che:*

- per ogni arco diretto  $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ , si ha  $c_{u_{i-1}, u_i} > \bar{x}_{u_{i-1}, u_i}$
- per ogni arco inverso  $e_i = (u_i, u_{i-1})$ , si ha  $\bar{x}_{u_i, u_{i-1}} > 0$ .



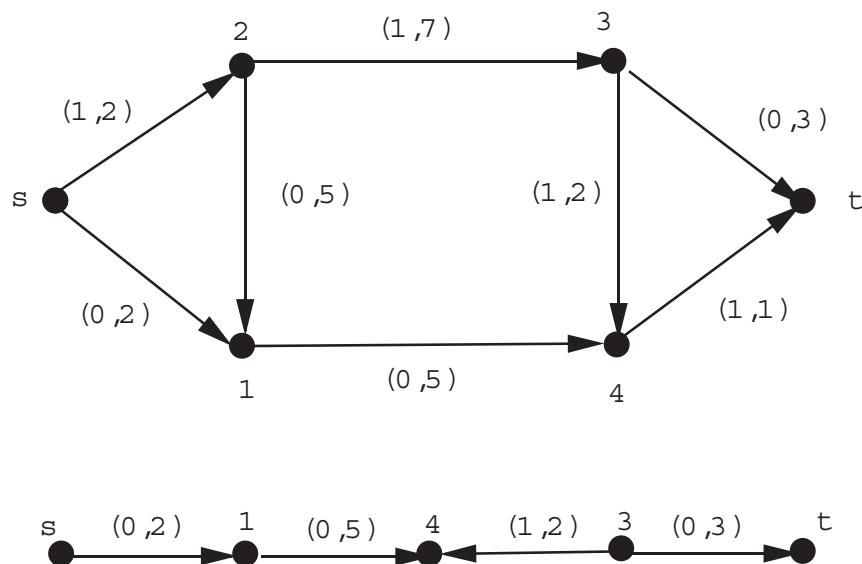


Figura 7.3: Cammino aumentante da  $s$  a  $t$

In un cammino aumentante, dunque, gli archi diretti sono *non saturi*, mentre quelli inversi sono *non vuoti*. Consideriamo l'esempio di figura 7.3. Il cammino aumentante  $\{s, 1, 4, 3, t\}$  è mostrato in basso in figura. Per ogni arco diretto (nell'esempio gli archi  $(s, 1)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(3, t)$ ), si ha che la capacità è strettamente maggiore del flusso. Per ogni arco inverso (nell'esempio l'arco  $(3, 4)$ ) il flusso è strettamente positivo.

La ragione del nome di cammino aumentante deriva dal fatto che, dato un flusso ammissibile  $\bar{x}$ , una volta individuato e un cammino aumentante è facilmente definibile un nuovo flusso ammissibile  $\tilde{x}$  con un valore di flusso maggiore di quello associato ad  $\bar{x}$ . In altre parole, sfruttando un cammino aumentante è possibile aumentare il flusso inviato da  $s$  a  $t$ .

Mostriamo come ciò sia possibile. Supponiamo quindi di avere un flusso ammissibile  $\bar{x}$  e un cammino aumentante  $P$ . Indichiamo con  $P_+$  l'insieme degli archi diretti del cammino  $P$  e con  $P_-$  l'insieme di quelli inversi. In modo formale

$$P_+ = \{e_i : e_i \in P, \text{ con } e_i \text{ arco diretto}\}$$

e

$$P_- = \{e_i : e_i \in P, \text{ con } e_i \text{ arco inverso}\}.$$

Se consideriamo l'esempio di figura 7.3 abbiamo  $P_+ = \{(s1), (12), (3t)\}$  e  $P_- = \{(34)\}$ .

Sia  $\delta_+ = \min_{(u,v) \in P_+} (c_{uv} - \bar{x}_{uv})$ . È facile vedere che  $\delta_+ > 0$ , in quanto per ogni arco diretto si ha  $c_{uv} > \bar{x}_{uv}$ . Sia  $\delta_- = \min_{(u,v) \in P_-} \bar{x}_{uv}$ . Anche in questo caso è facile vedere che  $\delta_- > 0$ , in quanto per ogni arco inverso si ha  $\bar{x}_{uv} > 0$ . Sia  $\delta = \min(\delta_+, \delta_-) > 0$ . Definiamo un flusso modificato  $\tilde{x}$  nel seguente modo.

$$\tilde{x} = \begin{cases} \tilde{x}_{uv} = \bar{x}_{uv} & \text{se } (u, v) \notin P \\ \tilde{x}_{uv} = \bar{x}_{uv} + \delta & \text{se } (u, v) \in P_+ \\ \tilde{x}_{uv} = \bar{x}_{uv} - \delta & \text{se } (u, v) \in P_- \end{cases}$$

<sup>1</sup>Con linguaggio meno preciso possiamo dire che un arco diretto è un arco il cui verso è concorde con quello di percorrenza del cammino  $P$  da  $u_0$  a  $u_p$ , mentre un arco inverso ha direzione opposta.

Notiamo che, rispetto a  $\bar{x}$  vengono modificati solo i flussi degli archi appartenenti al cammino aumentante  $P$ . Vogliamo mostrare che, come preannunciato,  $\tilde{x}$  è ammissibile e ha un valore di flusso  $\tilde{f}$  maggiore di  $\bar{f}$ .

Mostriamo dapprima che  $\tilde{x}$  è una soluzione ammissibile. Le variabili corrispondenti ad archi non appartenenti a  $P$  non vengono modificate rispetto alla soluzione ammissibile  $\bar{x}$  e dunque non violano i vincoli di capacità (7.7) e di non negatività (7.8). Le variabili corrispondenti agli archi di  $P^+$  vengono aumentate di  $\delta$ , quindi i vincoli di non negatività (7.8) non vengono violati. Inoltre, poichè  $\delta \leq \delta^+ \leq \min(c_{uv} - \bar{x}_{uv})$ , i vincoli di capacità (7.7) non sono violati. Le variabili corrispondenti agli archi di  $P^-$  vengono diminuite di  $\delta$ , quindi i vincoli di capacità (7.7) non sono violati. Inoltre, poichè  $\delta \leq \delta^- \leq \min(\bar{x}_{uv})$ , i vincoli di non negatività (7.8) non vengono violati. Dobbiamo ora mostrare che i vincoli di conservazione ai nodi (7.6) non sono violati. Poichè solo le variabili che corrispondono ad archi di  $P$  vengono modificate, i vincoli che potrebbero essere violati sono quelli che corrispondono a nodi di  $P$ . Per ogni nodo  $u_i \in P$ , con  $u_i \neq s, t$  ci sono esattamente due archi incidenti in  $u_i$  appartenenti a  $P$ , l'arco  $e_{i-1}$  e l'arco  $e_i$ . Sono possibili i seguenti quattro casi:

1.  $e_{i-1}$  è diretto ed  $e_i$  è inverso su  $P$ . In questo caso  $\tilde{x}_{e_{i-1}} = \bar{x}_{e_{i-1}} + \delta$ , mentre  $\tilde{x}_{e_i} = \bar{x}_{e_i} - \delta$ . Poichè

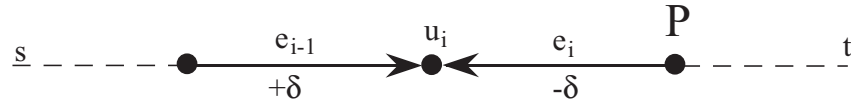


Figura 7.4:  $e_{i-1}$  diretto,  $e_i$  inverso

ambidue gli archi sono entranti in  $u_i$ , il flusso uscente da  $u_i$  resterà invariato, mentre il flusso entrante in  $u_i$  varierà di  $+\delta - \delta = 0$ .

2.  $e_{i-1}$  ed  $e_i$  sono ambedue diretti su  $P$ . In questo caso  $\tilde{x}_{e_{i-1}} = \bar{x}_{e_{i-1}} + \delta$ , mentre  $\tilde{x}_{e_i} = \bar{x}_{e_i} + \delta$ .

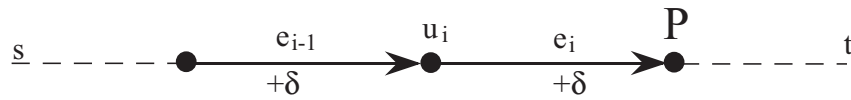


Figura 7.5:  $e_{i-1}$  diretto,  $e_i$  diretto

Poichè  $e_{i-1}$  è entrante in  $u_i$ , mentre  $e_i$  è uscente, il flusso entrante aumenta di  $\delta$  e il flusso uscente aumenta di  $\delta$ : l'uguaglianza fra flusso entrante e flusso uscente è preservata.

3.  $e_{i-1}$  ed  $e_i$  sono ambedue inversi su  $P$ . In questo caso  $\tilde{x}_{e_{i-1}} = \bar{x}_{e_{i-1}} - \delta$ , mentre  $\tilde{x}_{e_i} = \bar{x}_{e_i} - \delta$ .

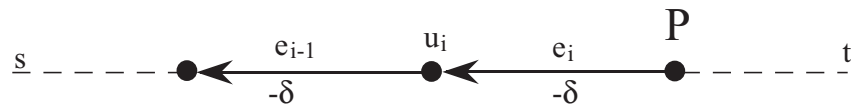


Figura 7.6:  $e_{i-1}$  inverso,  $e_i$  inverso

Poichè  $e_{i-1}$  è uscente da  $u_i$ , mentre  $e_i$  è entrante, il flusso entrante diminuisce di  $\delta$  e il flusso uscente diminuisce di  $\delta$ : l'uguaglianza fra flusso entrante e flusso uscente è preservata.

4.  $e_{i-1}$  è inverso ed  $e_i$  è diretto su  $P$ . In questo caso  $\tilde{x}_{e_{i-1}} = \bar{x}_{e_{i-1}} + \delta$ , mentre  $\tilde{x}_{e_i} = \bar{x}_{e_i} - \delta$ . Poichè

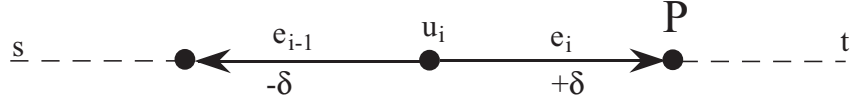


Figura 7.7:  $e_{i-1}$  inverso,  $e_i$  diretto

ambidue gli archi sono uscenti in  $u_i$ , il flusso entrante in  $u_i$  resterà invariato, mentre il flusso uscente da  $u_i$  varierà di  $-\delta + \delta = 0$ .

Dunque  $\tilde{x}$  è ammissibile. Inoltre, poichè il primo arco di  $P$  è sempre diretto ed uscente dal nodo  $s$ , il flusso totale uscente dal nodo  $s$  viene aumentato di  $\delta$  e risulta quindi

$$\tilde{f} = \bar{f} + \delta.$$

## 7.4 Condizioni di ottimalità

In questa sezione ci proponiamo di trovare delle condizioni che, dato un flusso ammissibile  $\bar{x}$ , ci permettano di capire se  $\bar{x}$  sia una soluzione ottima del problema di massimo flusso o meno. La prima condizione che consideriamo è legata all'esistenza di cammini aumentanti ed ha implicazioni algoritmiche immediate. La seconda, equivalente, coinvolge la capacità dei tagli ed è interessante perché mostra come risolvendo un problema di massimo flusso possiamo contemporaneamente risolvere un altro problema apparentemente molto diverso: il "problema del minimo taglio".

Passiamo ora a considerare la prima delle due condizioni preannunciate.

**Teorema 7.4.1** *Un flusso  $s$ - $t$   $\bar{x}$  di valore  $\bar{f}$  è massimo se e solo se non esiste nessun cammino aumentante  $P = \{s = u_0, e_1, \dots, u_p = t\}$  da  $s$  a  $t$  in  $G$  rispetto a  $\bar{x}$ .*

**Dimostrazione.**

**Necessità.** Se  $\bar{x}$  è ottimo non possono esistere cammini aumentanti da  $s$  a  $t$  in  $G$  rispetto a  $\bar{x}$ . Infatti, se ne esistesse uno sappiamo (vedi sezione precedente) che è possibile trovare un nuovo flusso  $\tilde{x}$  con un valore maggiore di  $\bar{f}$ . Ciò è assurdo perché  $\bar{x}$  è ottimo.

**Sufficienza.** Consideriamo il seguente taglio:

$$W = \{u : \text{esiste un cammino aumentante da } s \text{ a } u \text{ rispetto ad } \bar{x}\} \cup \{s\}$$

$$\bar{W} = V - W$$

Notiamo che deve risultare  $t \notin W$ . Infatti, se risultasse  $t \in W$  esisterebbe, per definizione di  $W$ , un cammino aumentante da  $s$  a  $t$ . Ma questo implicherebbe, per quanto visto nella sezione precedente, che sarebbe possibile trovare un nuovo flusso  $\tilde{x}$  con un valore di flusso  $\tilde{f}$  maggiore di  $\bar{f}$ . Siccome questo è assurdo perchià stiamo supponendo che  $\bar{f}$  sia massimo, deve essere, come affermato  $t \notin W$ .

Quindi  $(W, \bar{W})$  è un taglio  $s$ - $t$ . Consideriamo adesso il flusso sugli archi che attraversano il taglio da  $W$  a  $\bar{W}$  e sugli archi che attraversano il taglio da  $\bar{W}$  a  $W$ .

- Per ogni  $(u, v) \in E$  tale che  $u \in W$ , e  $v \in \bar{W}$  si ha che il flusso  $\bar{x}_{uv} = c_{uv}$ . Infatti, supponiamo per assurdo che  $\bar{x}_{uv} < c_{uv}$ . Essendo  $u \in W$  esiste un cammino aumentante  $P'$  da  $s$  ad  $u$ . Se  $\bar{x}_{uv} < c_{uv}$ , allora il cammino  $P = P' \cup (u, v)$  è un cammino aumentante da  $s$  a  $v$ . Infatti lungo l'arco diretto  $(u, v)$  si verifica la condizione  $\bar{x}_{uv} < c_{uv}$ . Ma allora  $v$  dovrebbe appartenere a  $W$  contraddicendo l'ipotesi che  $v \in \bar{W}$ .
- Per ogni  $(v, u) \in E$  tale che  $u \in W$ , e  $v \in \bar{W}$  si ha che il flusso  $\bar{x}_{vu} = 0$ . Infatti, supponiamo per assurdo che  $\bar{x}_{vu} > 0$ . Essendo  $u \in W$  esiste un cammino aumentante  $P'$  da  $s$  ad  $u$ . Se  $\bar{x}_{vu} > 0$ , allora il cammino  $P = P' \cup (u, v)$  è un cammino aumentante da  $s$  a  $v$ . Infatti lungo l'arco inverso  $(v, u)$  si verifica la condizione  $\bar{x}_{vu} > 0$ . Ma allora  $v$  dovrebbe appartenere a  $W$  contraddicendo l'ipotesi che  $v \in \bar{W}$ .

Per il Teorema (7.2.2), il flusso totale  $\bar{f}$  da  $s$  a  $t$  è pari al flusso attraverso il taglio  $(W, \bar{W})$  che vale, per quanto appena visto,

$$\bar{f} = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} \bar{x}_{uv} = \sum_{u \in W, v \in \bar{W}} c_{uv} = C(W, \bar{W}).$$

Possiamo allora scrivere

$$\bar{f} = C(W, \bar{W}).$$

Ma per il Teorema 7.2.4 sappiamo che una qualunque distribuzione di flusso ammissibile non può generare un flusso totale maggiore di  $C(W, \bar{W})$  e quindi il flusso  $\bar{f}$  è massimo.  $\square$

Nel paragrafo successivo vedremo come questo teorema sia alla base di un metodo per il calcolo del massimo flusso. Prima di occuparci di questo, però, vediamo come il teorema appena visto possa essere riformulato in un modo che metta in luce le connessioni tra il problema di trovare il massimo flusso e il problema di trovare il taglio a capacità minima.

Per introdurre questo risultato facciamo delle considerazioni preliminari. Nella seconda sezione di questo capitolo abbiamo associato ad ogni taglio  $(W, \bar{W})$  un ben definito numero: la sua capacità  $C(W, \bar{W})$ . Siccome il numero di tagli possibile è finito (anche se, eventualmente, molto grande) possiamo considerare tra tutti i tagli quello che ha capacità minore di tutti gli altri (ovviamente possono esistere più tagli diversi che forniscono la stessa capacità minima). Indichiamo con  $C_{min}$  il valore di questa capacità minima. Il Teorema 7.2.4 è valido per qualunque taglio, in particolare per il taglio di capacità minima. Quindi possiamo affermare che

$$f^* \leq C_{min}$$

La capacità del taglio minimo costituisce quindi un limite superiore per il valore del flusso massimo, e se troviamo un flusso  $\bar{x}$  per cui  $\bar{f} = C_{min}$ ,  $\bar{x}$  è ovviamente un flusso ottimo<sup>2</sup>.

In generale però, il valore del flusso massimo  $f^*$  potrebbe risultare inferiore o uguale a  $C_{min}$ . Il teorema del Massimo flusso - Minimo taglio (più noto, con terminologia inglese, come Max flow - Min cut theorem) stabilisce invece che un flusso  $\bar{x}$  è ottimo se e solo se il valore del flusso è esattamente  $C_{min}$

**Teorema 7.4.2 (Massimo flusso - Minimo taglio)** *Una distribuzione di flusso è ottima se e solo se risulta*

$$\bar{f} = C_{min}$$

dove  $\bar{f}$  è il valore di flusso di  $\bar{x}$ .

---

<sup>2</sup>Cambiando "punto di vista" possiamo anche dire che il flusso massimo è un limite inferiore per la capacità di un taglio. Quindi, se per qualche taglio  $(W, \bar{W})$  risulta  $C(W, \bar{W}) = f^*$ ,  $(W, \bar{W})$  è un taglio minimo e  $C(W, \bar{W}) = C_{min}$ . Questo fatto verrà usato spesso nel seguito.

**Dimostrazione.**

**Sufficienza.** Mostriamo che se  $\bar{f} = C_{min}$  allora  $\bar{x}$  è ottimo. Procediamo per assurdo. Supponiamo che risulti  $\bar{f} = C_{min}$ , ma  $\bar{x}$  non sia ottimo. Allora esiste un altro flusso,  $\tilde{x}$  il cui valore di flusso è maggiore di  $\bar{f}$ . Possiamo quindi scrivere

$$\tilde{f} > \bar{f} = C_{min}$$

che è ovviamente assurdo perchè contraddice il Teorema 7.2.4.

**Necessità.** Supponiamo che  $\bar{x}$  sia ottimo e mostriamo che deve risultare  $\bar{f} = C_{min}$ . Procediamo per assurdo e supponiamo che sia  $\bar{f} \neq C_{min}$ . Più in particolare, siccome sappiamo che non può essere  $\bar{f} > C_{min}$  per il Teorema 7.2.4, deve risultare

$$\bar{f} < C_{min}. \quad (7.13)$$

Definiamo ora lo stesso taglio considerato nel teorema precedente. Poniamo cioè  $W = \{u : \text{esiste un cammino aumentante da } s \text{ a } u \text{ rispetto ad } \bar{x}\} \cup \{s\}$  e  $\bar{W} = V - W$ .

Ragionando come nella prova del teorema precedente, abbiamo che  $(W, \bar{W})$  è un taglio  $s$ - $t$  che

$$\bar{f} = C(W, \bar{W}). \quad (7.14)$$

Per le (7.13) e (7.14) possiamo allora scrivere

$$C(W, \bar{W}) \geq C_{min} > \bar{f} = C(W, \bar{W})$$

che è ovviamente assurda e così la prova del teorema è completa.  $\square$

Nella dimostrazione della necessità del teorema appena dimostrato, abbiamo anche implicitamente trovato un modo per determinare un taglio di capacità minima. Infatti, se  $x^*$  è un flusso ottimo, il taglio definito da

$$W = \{u : \text{esiste un cammino aumentante da } s \text{ a } u \text{ rispetto ad } x^*\} \cup \{s\}$$

$$\bar{W} = V - W$$

è tale che  $f^* = C(W, \bar{W})$  (equazione (7.14)) ed è quindi minimo per il Teorema (7.2.2). Quindi, se sappiamo risolvere un problema di massimo flusso, sappiamo anche risolvere il problema di trovare un taglio di capacità minima!

Il fatto che il massimo flusso sia minore o uguale alla capacità di ogni taglio e quindi anche alla capacità del taglio minimo è abbastanza ovvio. Meno ovvio è che all'ottimo valga sempre l'uguaglianza. Questa proprietà permette, concettualmente, di verificare se un dato flusso (ammissibile) è ottimo. Infatti per fornire la prova di ottimalità basta esibire un taglio con capacità pari al flusso inviato da  $s$  a  $t$ . Nel caso tale taglio non esista, sappiamo che deve esistere un flusso che permette di inviare un flusso maggiore da  $s$  a  $t$ .

Il teorema del Massimo flusso - Minimo taglio mette quindi in relazione un problema sostanzialmente continuo (trovare il massimo flusso inviabile da  $s$  a  $t$ ) con un problema intrinsecamente combinatorio (trovare il taglio di minima capacità che separa  $s$  a  $t$ ). I due problemi sono di natura diversa. In particolare, il primo cerca una soluzione in un insieme infinito di possibili soluzioni. Il secondo cerca una soluzione in un insieme finito di possibili soluzioni. Questo fatto potrebbe portare all'impressione (errata) che il primo problema sia più difficile del secondo, in quanto nel secondo è sempre possibile enumerare tutte le possibili soluzioni e scegliere la migliore. Questa impressione è, però, come ormai ben sappiamo, errata, in quanto l'insieme di tutte le soluzioni è sì finito, ma talmente grande, anche per grafi di piccole dimensioni, che non è pensabile esaminarlo tutto. Per esempio, un grafo con 300 nodi (piccolo per le applicazioni normalmente affrontate con questa metodologia) porta a  $2^{288}$  possibili tagli separatori di due nodi assegnati. Alcuni ricercatori stimano che il numero di atomi dell'universo osservabile sia inferiore a  $2^{263}$ .

Prima di chiudere questa sezione, vogliamo dare una formulazione equivalente del teorema del Massimo flusso - Minimo taglio che può aiutare a chiarire ulteriormente le relazioni tra i vari concetti introdotti.

## 7.5 L'algoritmo di Ford e Fulkerson.

I precedenti risultati ci permettono di definire un algoritmo per il calcolo del flusso massimo da  $s$  a  $t$  in un grafo orientato. Sia dato un flusso  $\bar{x}$  ammissibile. Per il Teorema 7.4.1, se non esiste in  $G$  un cammino aumentante da  $s$  a  $t$  rispetto a  $\bar{x}$ , allora  $\bar{x}$  è ottimo. Supponiamo invece che esista un cammino aumentante  $P = \{s = u_0, e_1, \dots, u_p = t\}$ . Il flusso  $\bar{x}$  non è ottimo, e quindi può essere "aumentato", nel senso che è possibile modificare  $\bar{x}$  in modo da aumentare il flusso totale inviato da  $s$  a  $t$  come visto nella sezione "Cammini aumentanti".

Viene allora spontaneo definire un algoritmo per il calcolo del massimo flusso nel seguente modo.

### Algoritmo di Ford e Fulkerson

**Inizializzazione** Poni  $x^0 := 0$ ;  $i := 0$ .

**Passo i-esimo** Cerca un cammino aumentante da  $s$  a  $t$  rispetto al flusso  $x^i$ .

Se non esiste: STOP.  $x^i$  è la soluzione ottima.

Altrimenti poni:

$$x^{i+1} = \begin{cases} x_{uv}^{i+1} = x_{uv}^i & \text{se } (u, v) \notin P \\ x_{uv}^{i+1} = x_{uv}^i + \delta & \text{se } (u, v) \in P^+ \\ x_{uv}^{i+1} = x_{uv}^i - \delta & \text{se } (u, v) \in P^- \end{cases}$$

Poni  $i := i + 1$ ; vai al passo  $i$ .

Notiamo subito che in questo algoritmo c'è una parte non completamente specificata. Infatti all'inizio del Passo  $i$  viene detto "Cerca un cammino aumentante...", ma non viene detto né come trovare un tale cammino aumentante né quale scegliere nel caso ne esista più di uno. Queste questioni verranno affrontate nella prossima sezione. Per quel che ci interessa qui, supponiamo di essere in grado di trovare i cammini aumentanti e, nel caso ne esista più di uno, di sceglierne uno a caso.

Per chiarire meglio il procedimento illustriamolo subito con un esempio. Consideriamo di nuovo il grafo di figura 7.2. Al passo 0 avremo  $x_{s1}^0 = 0, x_{s2}^0 = 0, x_{14}^0 = 0, x_{21}^0 = 0, x_{23}^0 = 0, x_{34}^0 = 0, x_{3t}^0 = 0, x_{4t}^0 = 0$ . Un possibile cammino aumentante sarà:  $P = \{s, (s, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, t), t\}$ .  $P_+ = \{(s, 2), (2, 3), (3, 4), (4, t)\}$ , mentre  $P_- = \emptyset$ . Quindi il primo cammino aumentante possiede solo archi diretti.  $\delta = \delta_+ = \min(2 - 0, 7 - 0, 2 - 0, 1 - 0) = 1$ . Quindi tutte le variabili relative agli archi del cammino aumentante vengono aumentate di una unità. Le altre resteranno invariate. Si avrà:  $x_{s1}^1 = 0, x_{s2}^1 = 1, x_{14}^1 = 0, x_{21}^1 = 0, x_{23}^1 = 1, x_{34}^1 = 1, x_{3t}^1 = 0, x_{4t}^1 = 1$ . Il flusso è aumentato da 0 a 1.

Un nuovo cammino aumentante sarà  $P = \{s, (s, 1), 1, (1, 4), 4, (3, 4), 3, (3, t), t\}$ . Risulta quindi  $P_+ = \{(s, 1), (1, 4), (3, 4), (3, t)\}$  e  $P_- = \{(3, 4)\}$ . Quindi  $\delta_+ = \min(2 - 0, 5 - 0, 3 - 0) = 2$ , mentre  $\delta_- = \min(1) = 1$  e  $\delta = \min(\delta_+, \delta_-) = 1$ .

Le variabili corrispondenti ad archi diretti vengono quindi aumentate di una unità, mentre le variabili corrispondenti ad archi inversi (in questo caso la variabile  $x_{34}$ ) vengono diminuite di un'unità.  $x_{s1}^2 = 1, x_{s2}^2 = 1, x_{14}^2 = 1, x_{21}^2 = 0, x_{23}^2 = 1, x_{34}^2 = 0, x_{3t}^2 = 1, x_{4t}^2 = 1$ . Il flusso è aumentato da 1 a 2.

Infine troviamo il cammino aumentante:  $P = \{s, (s, 2), 2, (2, 3), 3, (3, t), t\}$ . Sono tutti archi diretti e per essi vale  $\delta = 1$ . Quindi si avrà:

$x_{s1}^3 = 1, x_{s2}^3 = 2, x_{14}^3 = 1, x_{21}^3 = 0, x_{23}^3 = 2, x_{34}^3 = 0, x_{3t}^3 = 2, x_{4t}^3 = 1$ . Il flusso finale vale 3, cioè la somma dei flussi uscenti da  $s$ . Per il teorema 7.4.2, per dimostrare l'ottimalità del flusso basta mostrare un taglio  $s$ - $t$  la cui capacità è pari al valore del flusso. Bisogna cioè trovare il taglio a capacità minima.

Nell'esempio il taglio a capacità minima sarà  $W = \{s, 1, 4\}$  e  $\bar{W} = \{2, 3, t\}$ , ed è illustrato in figura 7.8. Gli archi che hanno la coda in  $W$  e la testa in  $\bar{W}$  sono gli archi  $(s, 2)$  e  $(4, t)$ , e la somma delle loro capacità vale 3. Per trovare questo taglio basta usare la costruzione suggerita nella dimostrazione della sufficienza del teorema 7.4.1, ovvero basta mettere in  $W$  il nodo  $s$  e tutti i nodi raggiungibili da  $s$  con un cammino aumentante rispetto alla soluzione ottima  $\bar{x}$ . Nell'esempio appena visto l'algoritmo di Ford e Fulkerson

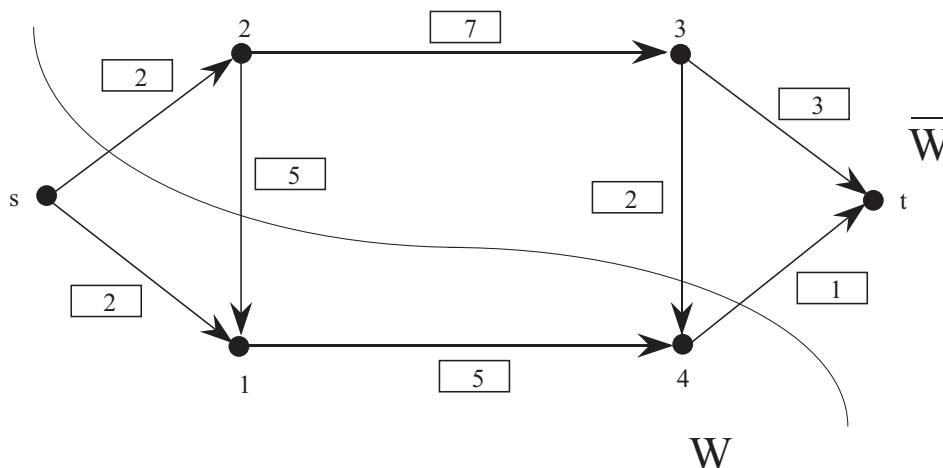


Figura 7.8: Taglio a capacità minima

ha trovato la soluzione ottima in un numero finito di iterazioni. Ma quale garanzia abbiamo che ciò accada sempre? Più in particolare, se non possiamo trovare un cammino aumentante sappiamo di essere all'ottimo, mentre in caso contrario sappiamo che l'algoritmo aumenta il valore del flusso. Ma, per esempio, possiamo pensare di poter trovare cammini aumentanti con i quali è possibile aumentare il valore del flusso di quantità  $\delta$  sempre più piccole cosicché se, poniamo, il flusso ottimo vale 10, i nostri flussi abbiano valori di 9, 9.9, 9.99, 9.999 ... e non si arrivi mai al flusso ottimo.

In proposito vale il seguente risultato.

**Teorema 7.5.1** *Supponiamo che tutte le capacità siano numeri interi. Allora l'algoritmo di Ford e Fulkerson trova l'ottimo in un numero finito di passi.*

**Dimostrazione.** Sappiamo che il flusso ottimo esiste sempre e ha quindi un valore (finito)  $f^*$ . Il flusso da cui parte l'algoritmo è quello nullo, che ha un valore di 0. Siccome le capacità sono tutte intere è facile convincersi che ad ogni passo il flusso viene aumentato di un numero intero ( $\delta$  è un numero intero). Quindi ad ogni iterazione il flusso viene aumentato di almeno un'unità ( $\delta$  è maggiore o uguale a 1, il più piccolo intero positivo). Questo vuol dire che in un numero finito di passi (pari, nel caso peggiore, al più piccolo intero superiore a  $f^*$ ) l'algoritmo trova (= "raggiunge") l'ottimo.  $\square$

Con ragionamenti molto simili si può dimostrare che anche se le capacità sono numeri razionali<sup>3</sup> l'algoritmo termina in un numero finito di passi. Invece se alcune delle capacità sono numeri irrazionali è possibile fornire degli esempi (piuttosto artificiosi in verità) in cui l'algoritmo non riesce a trovare la soluzione ottima in un numero finito di passi.

È importante sapere che esistono delle semplici varianti dell'algoritmo di Ford e Fulkerson che garantiscono la convergenza in un numero finito di passi qualunque siano i valori delle capacità

## 7.6 Calcolo e scelta dei cammini aumentanti

In questa sezione affrontiamo la questione che era stata lasciata in sospeso nella descrizione dell'algoritmo di Ford e Fulkerson: come possiamo, in maniera sistematica, trovare un cammino aumentante o, nel caso

<sup>3</sup>Ricordiamo che i numeri razionali sono quelli esprimibili come rapporto di due numeri interi. Esempi di numeri irrazionali sono invece  $\pi$  e  $\sqrt{2}$ .

non ne esista uno, trovare un taglio minimo? A questo fine introduciamo un semplice algoritmo noto come *algoritmo di etichettatura*. L'algoritmo assegna ad ogni nodo un'etichetta a partire da  $s$  fino a raggiungere, se possibile,  $t$ . Se riesce effettivamente a raggiungere  $t$  è poi possibile ricostruire un cammino aumentante a partire dalle etichette; se invece non riesce a raggiungere  $t$  allora non esistono cammini aumentanti e l'insieme dei nodi etichettati e quello dei nodi non etichettati costituiscono un taglio di capacità minima.

Ogni etichetta è costituita da due numeri; la generica etichetta del nodo  $i$  verrà indicata con  $(E_1(i), E_2(i))$ , dove  $E_1(i)$  è il primo numero dell'etichetta e  $E_2(i)$  il secondo.

Sia allora  $\bar{x}$  un flusso  $s$ - $t$  ammissibile. L'algoritmo procede nel seguente modo.

Assegna alla sorgente l'etichetta  $(0, \infty)$ . Poi seguita ad etichettare i nodi, finché possibile, secondo le seguenti regole.

(a) Se

- $i$  è un nodo etichettato,
  - $j$  è un nodo non etichettato,
  - esiste l'arco  $(i, j)$ ,
  - risulta  $\bar{x}_{ij} < c_{ij}$ ,
- assegna a  $j$  l'etichetta  $(i, \min\{c_{ij} - \bar{x}_{ij}, E_2(i)\})$ .

(b) Se

- $i$  è un nodo etichettato,
  - $j$  è un nodo non etichettato,
  - esiste l'arco  $(j, i)$ ,
  - risulta  $\bar{x}_{ji} > 0$ ,
- assegna a  $j$  l'etichetta  $(i, \min\{x_{ji}, E_2(i)\})$ .

**Commenti.** A un certo stadio dell'algoritmo ci possono essere più modi in cui un nodo non etichettato può essere etichettato seguendo le regole (a) e (b). In questo caso basta scegliere uno qualsiasi dei modi possibili e proseguire. Per esempio consideriamo la parte di un grafo parzialmente etichettato, mostrata in figura 7.9a). Il nodo 9 può essere etichettato indifferentemente a partire dal nodo 5, 7.9b), o dal nodo 11, 7.9c).

È importante tener presente che una volta attribuita un'etichetta a un nodo questa non va più cambiata.

La procedura termina quando o viene etichettato il pozzo  $t$  o non è più possibile etichettare nessun nodo.

**Significato delle etichette** Le etichette indicano un possibile cammino aumentante dalla sorgente  $s$  al nodo etichettato. Per ricostruire il cammino basta usare le  $E_1(i)$  e leggerle all'indietro fino ad arrivare alla sorgente  $s$ . È infatti facile convincersi, tenendo presente le regole (a) e (b) adottate nel processo di etichettatura, che il cammino dal nodo  $s$  al nodo  $i$  costruito in questo modo è in effetti un cammino aumentante e che il flusso aggiuntivo che è possibile inviare da  $s$  a  $i$  è esattamente pari a  $E_2(i)$ .

Quindi se etichettiamo il nodo  $t$  abbiamo trovato un cammino aumentante e possiamo procedere con l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

Consideriamo invece il caso in cui l'algoritmo di etichettatura si fermi, senza aver etichettato il pozzo  $t$ , perché non è più possibile etichettare nessun nodo. Definiamo  $W$  come l'insieme dei nodi che sono stati etichettati e indichiamo con  $\bar{W}$  i rimanenti nodo del grafo. Risulta ovviamente  $s \in W$ , per costruzione, e  $t \in \bar{W}$  perché abbiamo supposto che il pozzo non sia stato etichettato.  $(W, \bar{W})$  costituisce quindi un taglio  $s$ - $t$ .



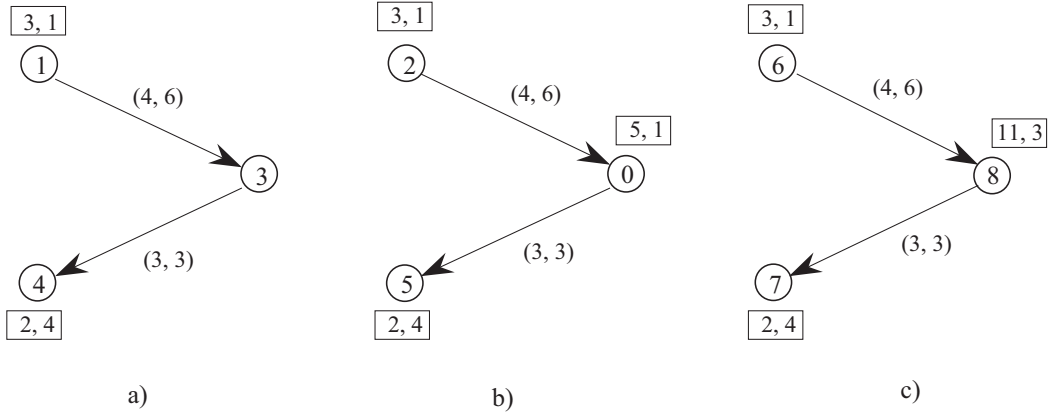


Figura 7.9: Esempio di etichettatura

Calcoliamo la capacità di questo taglio. Poiché l'algoritmo di etichettatura si è fermato senza essere in grado di etichettare nessun nodo in  $\bar{W}$  abbiamo, per le regole (a) e (b), che tutti gli archi  $(i, j)$  che attraversano il taglio sono o saturi ( $x_{ij} = c_{ij}$ ), se  $i \in W$  e  $j \in \bar{W}$ , o vuoti ( $x_{ij} = 0$ ) se  $i \in \bar{W}$  e  $j \in W$ . Ma allora, tenendo presente il Teorema 7.2.2 e le definizioni di capacità e flusso netto di un taglio, abbiamo

$$\bar{f} = F(W, \bar{W}) = C(W, \bar{W}).$$

Quindi  $(W, \bar{W})$  è un taglio minimo e  $\bar{x}$  è ottimo.

Notiamo che l'algoritmo di etichettatura proposto trova, se ne esiste almeno uno, un cammino aumentante qualunque. Ovviamente il comportamento dell'algoritmo di Ford e Fulkerson sarà diverso se si scelgono cammini aumentanti diversi. In particolare la scelta del cammino aumentante da usare ad ogni iterazione può avere una influenza critica sul numero di iterazioni necessario per raggiungere l'ottimo. A questo scopo può essere istruttivo considerare il semplice esempio riportato nella figura 7.10 dove i numeri sugli archi indicano le capacità. Appliciamo l'algoritmo di Ford e Fulkerson. Se scegliamo i cammini

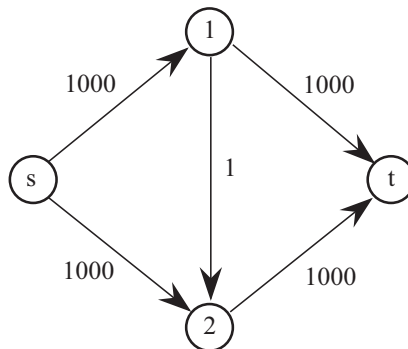


Figura 7.10: Importanza della scelta dei cammini aumentanti

aumentanti  $((s, 1), (1, t))$  e  $((s, 2), (1, t))$  si vede facilmente che l'algoritmo trova l'ottimo in due sole iterazioni. Se invece scegliamo come cammini aumentanti i cammini  $((s, 1), (1, 2), (2, t))$ ,  $((s, 2), (2, 1), (1, t))$ ,

$((s, 1), (1, 2), (2, t)), ((s, 2), (2, 1), (1, t)), \dots$ , si vede che sono necessarie 2000 iterazioni, perchè attraverso ogni cammino aumentato indicato si può aumentare il valore del flusso di una sola unità alla volta.

Esistono dei modi “intelligenti” di scegliere i cammini aumentanti che assicurano che situazione disastrosa come quella evidenziata nell’esempio appena visto non possono accadere. Non abbiamo qui lo spazio per approfondire l’argomento. Diciamo solo che due “buone” scelte sono quelle di scegliere ad ogni passo, tra tutti i cammini aumentanti possibili, un cammino composto dal minore numero possibile di archi o un cammino che assicuri di poter aumentare il valore del flusso della più grande quantità possibile. Notiamo che usando uno qualunque di questi due criteri nell’esempio della figura 7.10 porta alla scelta dei cammini  $((s, 1), (1, t))$  e  $((s, 2), (1, t))$  e fa quindi terminare l’algoritmo di Ford e Fulkerson in 2 sole iterazioni.

Esistono dei modi efficienti e sistematici, diversi dalla procedura di etichettatura illustrata in questa sezione, per calcolare cammini aumentanti che soddisfino uno dei due criteri appena indicati. Qui, per ragioni di spazio, diciamo solo che sono basati sulle tecniche di calcolo dei cammini minimi del tipo illustrato nel capitolo precedente.

## 7.7 Esempi

Dato il grafo di figura 7.11, trovare il valore del massimo flusso inviabile da  $s$  a  $t$  (la capacità associata a ciascun arco è mostrata in figura in prossimità dell’arco stesso).

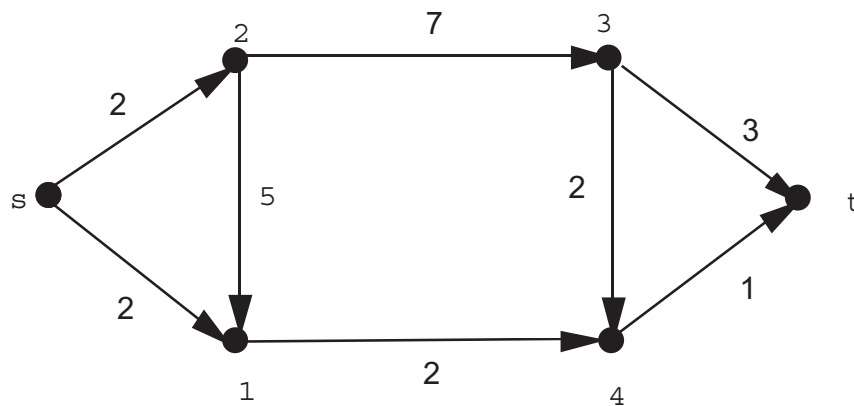


Figura 7.11:

### Soluzione.

Per calcolare il flusso utilizzeremo l’algoritmo di Ford e Fulkerson, con flusso iniziale nullo. Ricordiamo infatti che l’algoritmo di Ford e Fulkerson richiede in ingresso un flusso ammissibile, e che il flusso nullo è un flusso ammissibile per il nostro problema.

- *Iterazione 0.*

Al passo 0 avremo  $x_{s1}^0 = 0, x_{s2}^0 = 0, x_{14}^0 = 0, x_{21}^0 = 0, x_{23}^0 = 0, x_{34}^0 = 0, x_{3t}^0 = 0, x_{4t}^0 = 0$ . Un possibile cammino aumentante da  $s$  a  $t$  sarà:  $P = \{s, (s, 2), 2, (2, 3), 3, (3, 4), 4, (4, t), t\}$ .  $P_+ = \{(s, 2), (2, 3), (3, 4), (4, t)\}$ , mentre  $P_- = \emptyset$ . Ci sono solo archi diretti e dunque  $\delta = \delta_+ = \min(2-0, 7-0, 2-0, 1-0) = 1$ . Quindi tutte le variabili relative agli archi del cammino aumentante vengono aumentate di un'unità. Le altre resteranno invariate. Si avrà:  $x_{s1}^1 = 0, x_{s2}^1 = 1, x_{14}^1 = 0, x_{21}^1 = 0, x_{23}^1 = 1, x_{34}^1 = 1, x_{3t}^1 = 0, x_{4t}^1 = 1$ . Il flusso è aumentato da 0 a 1.

- *Iterazione 1.*

Un nuovo cammino aumentante sarà:  $P = \{s, (s, 1), 1, (1, 4), 4, (3, 4), 3, (3, t), t\}$ .

Risulta  $P_+ = \{(s, 1), (1, 4), (3, t)\}$ , mentre  $P_- = \{(3, 4)\}$ . Inoltre  $\delta_+ = \min(2-0, 2-0, 3-0) = 2$ , mentre  $\delta_- = \min(1) = 1$ . Quindi  $\delta = \min(\delta_+, \delta_-) = 1$ .

Le variabili corrispondenti ad archi diretti vengono quindi aumentate di un'unità, mentre le variabili corrispondenti ad archi inversi (in questo caso la variabile  $x_{34}$ ) vengono diminuite di un'unità. Sarà dunque:  $x_{s1}^2 = 1, x_{s2}^2 = 1, x_{14}^2 = 1, x_{21}^2 = 0, x_{23}^2 = 1, x_{34}^2 = 0, x_{3t}^2 = 1, x_{4t}^2 = 1$ . Il flusso è aumentato da 1 a 2.

- *Iterazione 2.*

Infine troviamo il cammino aumentante:  $P = \{s, (s, 2), 2, (2, 3), 3, (3, t), t\}$ . Sono tutti archi diretti e per essi vale  $\delta = 1$ . Quindi si avrà:

$x_{s1}^3 = 1, x_{s2}^3 = 2, x_{14}^3 = 1, x_{21}^3 = 0, x_{23}^3 = 2, x_{34}^3 = 0, x_{3t}^3 = 2, x_{4t}^3 = 1$ .  
Il flusso finale vale 3.

- *Iterazione 3.*

Non è possibile trovare un cammino aumentante rispetto al flusso  $x^3$ , che è dunque ottimo.  $\square$

Ovviamente, se è noto un flusso iniziale ammissibile, diverso da 0, possiamo tranquillamente applicare l'algoritmo a partire dal flusso dato. Consideriamo anche un'altro esempio.

Dato il grafo e il flusso ammissibile rappresentati in Fig. 7.12, trovare il flusso massimo inviabile da  $s$  a  $t$ , certificando l'ottimalità della soluzione ottenuta con l'esibizione di un taglio di capacità uguale al flusso massimo trovato.

**Soluzione.**

Per trovare il flusso massimo utilizzeremo l'algoritmo di Ford e Fulkerson, con flusso iniziale uguale a quello in figura. Il flusso iniziale vale 10.

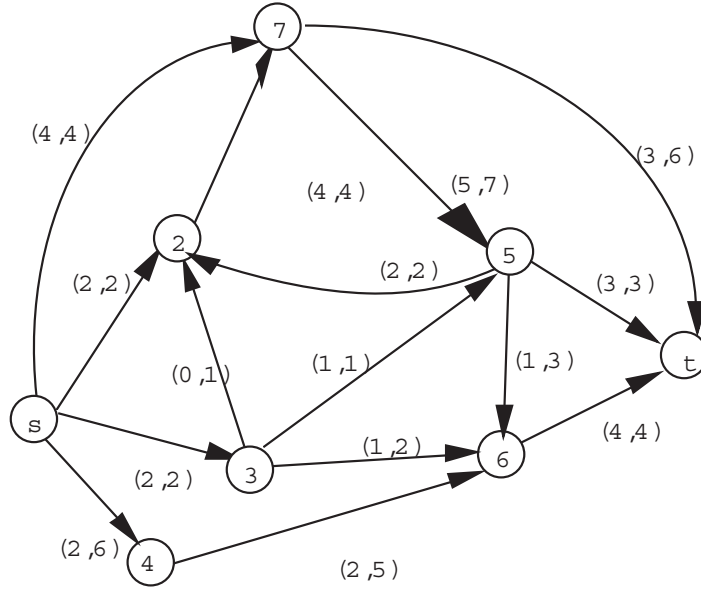


Figura 7.12:

- *Iterazione 0.*

Al passo 0 avremo  $x_{s2}^0 = 2$ ,  $x_{s3}^0 = 2$ ,  $x_{s4}^0 = 2$ ,  $x_{s7}^0 = 4$ ,  $x_{27}^0 = 4$ ,  $x_{32}^0 = 0$ ,  $x_{35}^0 = 1$ ,  $x_{36}^0 = 1$ ,  $x_{46}^0 = 2$ ,  $x_{52}^0 = 2$ ,  $x_{56}^0 = 1$ ,  $x_{5t}^0 = 3$ ,  $x_{6t}^0 = 4$ ,  $x_{75}^0 = 5$ ,  $x_{7t}^0 = 3$ . Un possibile cammino aumentante da  $s$  a  $t$  sarà:  $P = \{s, (s, 4), 4, (4, 6), 6, (5, 6), 5, (7, 5), 7, (7, t), t\}$ .  $P_+ = \{(s, 4), (4, 6), (7, t)\}$ , mentre  $P_- = \{(5, 6), (7, 5)\}$ .  $\delta_+ = \min(4, 3, 3) = 3$ , mentre  $\delta_- = \min(1, 3) = 1$ . Quindi  $\delta = \min(\delta_+, \delta_-) = 1$ . Si avrà quindi (scriviamo solo le variabili da aggiornare):  $x_{s4}^1 = 3$ ,  $x_{46}^1 = 3$ ,  $x_{56}^1 = 0$ ,  $x_{75}^1 = 4$ ,  $x_{7t}^1 = 4$ . Il flusso è aumentato da 10 a 11.

- *Iterazione 1.*

Un nuovo cammino aumentante sarà:  $P = \{s, (s, 4), 4, (4, 6), 6, (3, 6), 3, (3, 2), 2, (5, 2), 5, (7, 5), 7, (7, t), t\}$ .  $P_+ = \{(s, 4), (4, 6), (3, 2), (7, t)\}$ , mentre  $P_- = \{(3, 6), (5, 2), (7, 5)\}$ .  $\delta_+ = \min(3, 2, 1, 2) = 1$ , mentre  $\delta_- = \min(1, 2, 2) = 1$ . Quindi  $\delta = \min(\delta_+, \delta_-) = 1$ . Si avrà:  $x_{s4}^2 = 4$ ,  $x_{46}^2 = 4$ ,  $x_{36}^2 = 0$ ,  $x_{32}^2 = 1$ ,  $x_{52}^2 = 1$ ,  $x_{75}^2 = 5$ ,  $x_{7t}^2 = 5$ . Il flusso è aumentato da 11 a 12.

- *Iterazione 2.*

Non è possibile trovare un cammino aumentante rispetto a  $x^2$ , che è dunque ottimo.

Un modo per rappresentare graficamente le iterazioni dell'algoritmo è illustrato in Figura 7.13. Ogni volta che il valore del flusso su un arco viene aggiornato, si sbarra il precedente valore del flusso sovrapponendogli il nuovo valore.

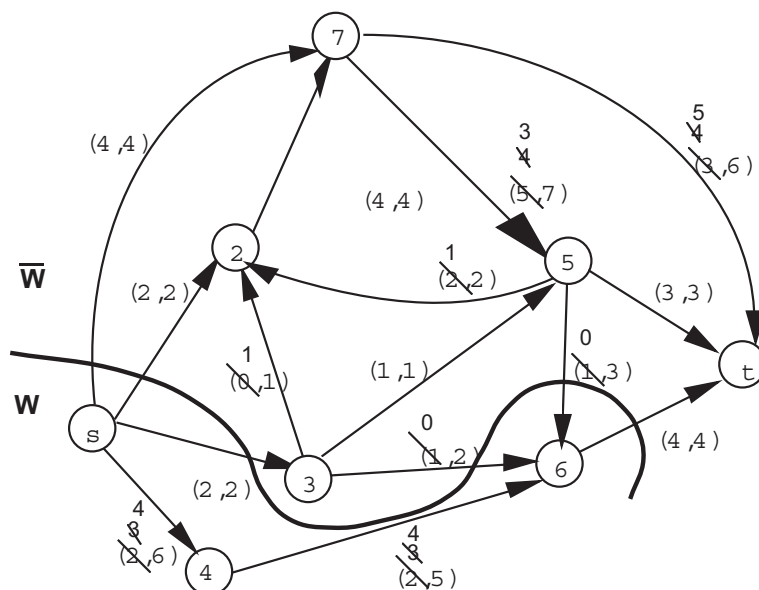


Figura 7.13:

Nell'esempio un taglio a capacità minima sarà  $W = \{s, 4, 6\}$  e  $\bar{W} = \{2, 3, 5, 7, t\}$ , ed è mostrato in figura 7.13 con una linea che separa i due insiemi. Per calcolare la capacità del taglio bisogna sommare le capacità degli archi che hanno la coda in  $W$  e la testa in  $\bar{W}$ , e cioè gli archi  $(s, 2)$ ,  $(s, 3)$ ,  $(s, 7)$ , e  $(6, t)$ , e la somma delle loro capacità vale 12. Per trovare questo taglio si può usare la costruzione suggerita dall'enunciato del Teorema ??, ovvero basta mettere in  $W$  il nodo  $s$  e tutti i nodi raggiungibili da  $s$  con un cammino aumentante rispetto alla soluzione ottima  $x^2$ . In questo esempio, i nodi raggiungibili sono appunto il nodo 4 (cammino aumentante  $\{s, (s, 4), 4\}$  e il nodo 6 (cammino aumentante  $\{s, (s, 4), 4, (4, 6), 6\}$ ).

## 7.8 Accoppiamento bipartito

Sia dato un grafo bipartito  $G(S, D, E)$  (con  $|S| = l, |D| = r, l + r = n, |E| = m$ ) non orientato. Il problema che si vuole affrontare è quello di determinare un sottoinsieme  $A$  di archi di  $G$  di cardinalità massima, tale che due archi di  $A$  non abbiano mai un nodo in comune. In altre parole, si tratta di assegnare il massimo numero di nodi dell'insieme  $S$  a nodi dell'insieme  $D$  (o viceversa), in modo che ogni nodo sia di  $S$  sia di  $D$  sia assegnato al più ad un solo altro nodo, con il vincolo che una assegnazione di un nodo  $i$  a un nodo  $j$  possa avvenire solo se nel grafo  $G$  esiste l'arco  $(i, j)$ .

Questo problema, noto come problema di accoppiamento di cardinalità massima, ha moltissime applicazioni, e si presenta tutte le volte in cui bisogna assegnare in maniera esclusiva i membri di un insieme