Calcolabilità e Linguaggi Formali
Recupero compitino 1

9 gennaio 2014

Esercizio 1

Sia $A = \{0, 1, 2\}$ un alfabeto finito con $0 < 1 < 2$. Una stringa $c_1c_2 \dots c_{n-1}c_n \in A^*$ è ordinata se $c_1 \leq c_2 \leq \dots c_{n-1} \leq c_n$. Determinare un programma di MdT che termina la computazione su una stringa $\alpha \in A^*$ sse α è ordinata.

Soluzione

Notiamo che la stringa vuota è ordinata. Consideriamo una MdT con quattro stati q_0, q_1 e q_2, q_{fin} e q_{ciclo}. Lo stato iniziale è q_0, mentre il simbolo $\Box$ rappresenta il carattere vuoto. Ecco le istruzioni:
$q_0\Box\Box q_{\text{fin}}D$ (la stringa riconosciuta è una sequenza anche vuota di 0)
$q_0 00 q_0 D$
$q_0 11 q_1 D$
$q_0 22 q_2 D$
$q_1\Box\Box q_{\text{fin}}D$ (la stringa riconosciuta è una sequenza di 0, seguita da una sequenza di 1)
$q_1 00 q_{\text{ciclo}}D$ (la stringa non è riconosciuta: comincia con una sequenza di 0, seguita da una sequenza di 1, ma poi segue uno 0)
$q_1 11 q_1 D$
$q_1 22 q_2 D$
$q_2\Box\Box q_{\text{fin}}D$ (la stringa riconosciuta è una sequenza di 0, seguita da una sequenza di 1 e poi da una sequenza di 2)
$q_2 00 q_{\text{ciclo}}D$ (la stringa non è riconosciuta: comincia con una sequenza di 0, seguita da una sequenza di 1, e poi da una sequenza di 2, ma poi segue uno 0)
$q_2 11 q_{\text{ciclo}}D$ (la stringa non è riconosciuta: comincia con una sequenza di 0, seguita da una sequenza di 1, e poi da una sequenza di 2, ma poi segue un 1)
$q_1 22 q_2 D$
$q_{\text{ciclo}} cc q_{\text{ciclo}} D$, per ogni carattere c.
Per gli studenti di Linguaggi Formali: Il linguaggio $L = \{\alpha \in A^* : \alpha \text{ è ordinata}\}$ delle stringhe ordinate è regolare. Ecco un'espressione regolare che lo genera: $0^*1^*2^*$.

Esercizio 2

Dimostrare che un insieme è semidecidibile sse è ricorsivamente enumerabile.

Esercizio 3

Applicare, se possibile, il primo teorema di Rice all'insieme $I = \{x : \phi_x(3) = 5 \text{ and } x \leq 10^3\}$.

Soluzione

L'insieme I e' finito perché è contenuto nell'insieme $\{0, 1, 2, \dots, 998, 999, 1000\}$. Quindi non può rispettare le funzioni. Infatti, se un insieme non vuoto J rispetta le funzioni e $x \in J$, l'insieme infinito $\{y : \phi_y = \phi_x\}$ è contenuto in J.

Esercizio 4

Sia $J = \{x : (\exists y)(\forall z \leq 10)\ \phi_x(z) = y\}$. Applicare il primo teorema di Rice all'insieme J.

Soluzione

Sia $[0, 10]$ l'insieme dei naturali compresi tra 0 e 10. Allora $J = \{x : (\exists y)(\forall z \in [0, 10])\ \phi_x(z) = y\}$.
$J \neq \emptyset$: i programmi che calcolano la funzione f, definita come segue: $f(x) = 0$ per ogni $x \in N$, appartengono a J.
$J \neq N$: I programmi che la calcolano la funzione vuota appartengono a $\bar{J}$.
J rispetta le funzioni: sia $x \in J$, da cui segue che esiste una valore c tale che $\phi_x(z) = c$ per ogni $z \in [0, 10]$. Se $\phi_x = \phi_y$, allora abbiamo $\phi_y(z) = \phi_x(z) = c$ per ogni $z \in [0, 10]$.
Quindi possiamo applicare il primo teorema di Rice e concludere che $J, \bar{J}$ non sono decidibili. $\bar{J}$ non è semidecidibile perché contiene i programmi della funzione vuota.