Calcolabilità e linguaggi formali
Compito con soluzione1

Esercizio 1

(a) Dare una grammatica per ciascuno dei seguenti linguaggi:
$L_1 = \{0^n 1^m 0^k | n, m, k > 0\}$;
$L_2 = \{0^n 1^m 0^k | n, m, k > 0 \text{ e } m = n + k\}$;
$L_3 = \{0^n 1^m 0^k | n, m, k > 0 \text{ e } k = n\}$.

(b) Classificare le grammatiche date secondo la classificazione di Chomsky.

(c) Dire se é possibile dare un automa finito per qualcuno dei linguaggi dati.

Esercizio 2

Enunciare e dimostrare il teorema del parametro.

Soluzione

Teorema. Sia $f : N^2 \to N$ una funzione calcolabile. Allora esiste una funzione calcolabile totale $g : N \to N$ tale che

$$\phi_{g(x)}(y) = f(x, y).$$

Prova. Definiamo un programma che calcola g. Come prima cosa, scriviamo S^n come una abbreviazione di $S; S; \ldots; S$ (n volte). $g(x)$ è uguale alla codifica del seguente programma

$$0||P^1_{1,1} \ ; \ S^x||P^1_{1,1} \ ; \ f$$

Infatti, se applichiamo il programma $g(x)$ all'input y otteniamo:

$$y \mapsto 0, y \mapsto x, y \mapsto f(x, y)$$

Esercizio 3

Definire un programma iterativo che calcola la seguente funzione $f(x) = 2x$ se $x = 1$ e $f(x) = 0$ se $x \neq 1$.
Si ha a disposizione sg, $\overline{sg}$, eq ed il prodotto.

Soluzione

La funzione $eq : N^2 \to N$ è definita come segue: $eq(x, x) = 1$; $eq(x, y) = 0$ se $x \neq y$. Siano $h_1 = (P^1_{1,1}||2); *$ e $h_2 = P^1_{2,1}; 0$. Quindi, $h_1(x) = 2x$ e $h_2(x) = 0$. Allora

$$f = ((P^1_{1,1} {}^\frown P^1_{1,1})||1) \ ; \ (P^1_{1,1}||(eq^\frown(eq; \overline{sg})) \ ; \ (exp(h_1)^\frown P^1_{1,1}) \ ; \ exp(h_2)$$

$$x \mapsto x, x, 1 \mapsto x, eq(x, 1), \overline{sg}(eq(x, 1))$$

Abbiamo due possibilità: $eq(x, 1) = 1$ oppure $eq(x, 1) = 0$. Nel primo caso, da $x = 1$ si ricava:

$$1, 1, 0 \mapsto 2, 0 \mapsto 2$$

mentre nel secondo caso

$$x, 0, 1 \mapsto x, 1 \mapsto 0.$$

Un altro modo per ottenere lo stesso risultato si ottiene così:

$$f = (P^1_{1,1} {}^\frown P^1_{1,1})||1) \ ; \ h_1||eq \ ; \ *$$

Esercizio 4

Si verifichi se l'insieme $I = \{x : \{2, 3\} \subseteq cod(\phi_x)\}$ e' decidibile oppure semidecidibile.
Lo stesso per il complementare.

Soluzione

Possiamo applicare il primo teorema di Rice per verificare che I ed il suo complementare non sono decidibili. $I \neq \emptyset$ perché i programmi che calcolano la funzione identica appartengono ad I. $I \neq N$ perché i programmi che calcolano la funzione vuota non appartengono ad I. Inoltre, I rispetta le funzioni perché

$$\phi_x = \phi_y \Rightarrow (\{2, 3\} \subseteq cod(\phi_x) \Leftrightarrow \{2, 3\} \subseteq cod(\phi_y)).$$

$\bar{I}$ non è semidecidibile perché i programmi della funzione vuota appartengono a $\bar{I}$.
I è semidecidibile perché $x \in I$ sse $\exists y \exists z \exists t(\phi_x(y) = 2$ in $\leq t$ unità di tempo $\wedge\ \phi_x(z) = 3$ in $\leq t$ unità di tempo), e la relazione "$\phi_x(y) = z$ in $\leq t$ unità di tempo" è decidibile.