Teorema Rice 3

December 5, 2013

Abstract

Dimostrazione e qualche esempio

by MLS

Contents

1 Prerequisiti: Restrizione finita di una funzione a dominio infinito

In R2 abbiamo definito cosa intendiamo per estensione di una funzione. Il concetto di restrizione finita è analogo. Supponiamo che ci sia una funzione f e che il suo dominio sia infinito e supponiamo che esista una funzione g che abbia domini finito e che nei punti in cui è definita dia lo stesso risultato. Secondo la relazione d'ordine tra funzioni, definita in R2, possiamo scrivere: $g < f$. La funzione g viene detta *restrizione finita* di f. Si noti che prima si scriveva $\leq$, ma adesso f ha dominio infinito e una funzione a dominio finito (g) non può eguagliare una a dominio infinito. Per questo si usa solamente $<$.

Ad esempio la funzione $g(x) = \begin{cases} x & se\, x \in \{0 \ldots 10\} \\ \uparrow & altrimenti \end{cases}$ è restrizione finita della funzione *identità* che ha dominio infinito.

2 Teorema di Rice n° 3 (R3)

- Ipotesi
  1. I è un insieme che rispetta le funzioni
  2. f e g siano due funzioni calcolabili
  3. f a dominio infinito, g a dominio finito
  4. $\{x : \Phi_x = f\} \subseteq I$
  5. $(\forall g)\, g < f$ e $\{x : \Phi_x = g\} \subseteq \bar{I}$
- Tesi:

  L'insieme I non è semidecidibile.

In altre parole un insieme I non è semidecidibile se esiste una funzione f a domino infinito che appartiene ad I, e tutte le sue restrizioni finite g appartengono ad $\bar{I}$.

2.1 Dimostrazione

Come per R2 l'obbiettivo è dimostrare che $\bar{K}$ è riducibile ad I: così facendo , poichè $\bar{K}$ non è semidecidibile nol lo è nemmeno I.

Per operare la riduzione consideriamo la seguente funzione: $h(x, y) = \begin{cases} f(y) & se\, P_x \uparrow x\, in\, num.\, passi \leq y \\ \uparrow & altrimenti \end{cases}$. Questa funzione è charamente calcolabile; infatti basta avviare P_x con input x e contare y passi. Se non termina entro questo tempo si lancia il programma che calcola $f(y)$ e sappiamo che terminerà perchè f è calcolabile per l'ipotesi 2. Se non termina si avvia un programma di una qualsiasi funzione vuota. Allora applichiamo ad h il teorema del parametro: esisterà quindi una funzione totale $S(x)$ tale che per ogni valore di x codificherà un programma che calcola la funzione $\Phi_{S(x)}(y) = h(x, y)$. Analizziamo quel che succede:

se $x \in K$ allora $P_x \downarrow x$ in un numero di passi finito C_0. In questo caso la funzione $\Phi_{S(x)}(y)$ restituira $f(y)$ se $C_o > y$ altrimenti divergerà:

$\Phi_{S(x)}(y) = h(x, y) = \begin{cases} f(y) & se\, y < C_0 \\ \uparrow & altrimenti \end{cases}$ questa funzione è chiaramente una restrizione finita di f infatti $\Phi_{S(x)} = f(y)$ solo per tutti i valori di y inferiori a C_0 $(0 \leq y < C_0)$ mentre per $y \geq C_0$ diverge. Quindi per l'ipotesi 5) $S(x) \in \bar{I}$.

se $x \notin K$ allora $P_x \uparrow x$ e quindi $\Phi_{S(x)}(y) = h(x,y) = f(y) \in I$ per l'ipotesi 4).

La funzione $S(x)$ riduce quindi K ad $\bar{I}$ e quindi per le proprietà dell'operatore riduzione I non è semidecidibile.$\square$

3 Considerazioni ed esempi

La dimostrazione copia un schema classico: si costruisce una particolare funzione, si dimostra che è calcolabile, si applica il teorema del parametro e si verifica il comportamento della funzione per $x \in K$ e per $x \notin K$. Chiariamo un punto fondamentale: $S(x)$ è una funzione totale e calcolabile che prende la codifica x di un programma e la trasforma nella codifica di un'altro programma $S(x)$. La funzione calcolata dal programma codificato da $S(x)$ è $\Phi_{S(x)}$ che per il teorema del parametro è uguale ad $h(x,y)$. Il metodo della riduzione tramite il parametro permette di trasformare un programma che sta (o sta nel suo complementare) in un certo insieme (in questo caso K) in un programma che sta in un 'altro insieme. Ciò comporta che certe proprietà (quelle negative) si trasferiscano dal primo insieme al secondo e viceversa per quelle positive. E questo è quello che serve per la dimostrazione.

1. Consideriamo l'insieme delle funzioni suriettive[1] $I = \{x :\} \, cod\,(\Phi_x = \mathbb{N})$. Questo insieme rispetta le funzioni in quanto l'equivalente di una funzione surriettiva è anch'essa surriettiva. Inoltre $I \neq \emptyset$ e $I \neq \mathbb{N}$ poichè esistono funzioni suriettive (ad esempio l'identità) ma non tutte le funzioni sono surriettive: la funzione vupta non lo è per esempio.

   Da quanto sopra possiamo applicare R1 per dedurre che: I non è decidiblie e, poichè ovviamente $f_0 \in \bar{I}$, $\bar{I}$ non è semidecidibile.

   Non possiamo applicare R2 poichè ogni estensione di una funzione suriettiva sarà suriettiva.

   Sono verificate le ipotesi di R3 perchè ogni restrizione finita di una funzione suriettiva (per esempio l'identità) avendo dominio e codominio finiti, non può essere suriettiva. Quindi I non è semidecidibile.

2. Sia $I = \{x : (\exists y)(\forall z) \, P_x(z) = y\}$ Questo insieme rappresenta tutte le funzioni totali costanti. Questo insieme rispetta le funzioni, infatti ogni funzione equivalente ad una funzione costante appartiene ad I. Inoltre $I \neq \emptyset$ e $I \neq \mathbb{N}$ perchè esistono funzioni costanti e perchè la funzione vuota non appartiene ad I.

   Possiamo quindi applicare R1per dedurre che: I non è decidbile e, poichè ovviamente $f_0 \in \bar{I}$, $\bar{I}$ non è semidecidibile.

   R2 non può venir applicato in quanto l'espansione di una funzione totale è ancora totale e quindi ha lo stesso dominio e codominio della funzione originale, di conseguenza sta ancora in I.

   Poichè invece la restrizione finita di una funzione totale non è una funzione totale, questa starà in $\bar{I}$. Quindi applicando R3 I non è semidecidibile

[1] Ricordiamo che si dice suriettiva una funzioni tale per cui se y appartiene al codominio della funzione, esiste almeno un valore x del dominio per cui: $f(x) = y$