Computabilita'
Prova del 16-09-2004

1. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di Rice.

2. Si scriva un programma per Macchina di Turing che termina la computazione su un input $\alpha \in \{0,1\}^*$ se e solo se α, considerato come numero binario, e' maggiore o uguale a 22_{10}.

3. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, 1 \\ f(f(x+2)) + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

4. Quali teoremi di Rice si possono applicare ad $I = \{x : (\forall y)[P_x \uparrow y \rightarrow (0 \leq y \leq 10)]\}$ (giustificare la risposta).

Compitino di Computabilita' A
Prova del 12 novembre 2003

1. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x * 3^y$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.

2. Sia I un insieme semidecidibile ma non decidibile. E' possibile ridurre I a K ?

3. Si scriva un programma per Macchina di Turing che, data una stringa non vuota $\alpha \in \{a, b\}^*$, determini se in α e' presente la sottostringa $abbba$.

4. Si dimostri il primo teorema di Rice.

5. Sia $I = \{x :$ il dominio di ϕ_x e' finito$\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I ed al complementare di I? Giustificare la risposta.

Compitino di Informatica Teorica AAAAAAA
Prova del 14 aprile 2000

1. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Rice.
2. Si scriva un programma di MdT che data una stringa α non vuota di a e c determini se in α e' presente la sottostringa $aaccaa$.
3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(z,x,y) = (x+y)^z + z$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g,h)$.
4. Si scriva un programma funzionale iterativo che calcoli la funzione $f(x) = 2$ se $x = 1$, $f(x) = 3x$ se $x \neq 1$ utilizzando l'esponenziazione. (Si supponga che le funzioni 'segno', 'segno negato' e 'uguaglianza' siano gia' definite)
5. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) \cap codom(\phi_x) \neq \emptyset\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare lo stesso per il complementare di I.
6. Definire una funzione calcolabile totale $k : N \to N$ tale che (1) $\phi_{k(x)} \neq \phi_{k(y)}$ per ogni $x \neq y$; (2) $\phi_{k(x)} > \phi_{k(y)}$ per ogni $x > y$.

Compitino di Informatica Teorica AAAAAA
Prova del 27 Gennaio 1999 (RECUPERO PARTE I)

1. Si dimostri che un insieme infinito e' decidibile sse e' codominio di una funzione calcolabile totale strettamente crescente.
2. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x(y + 8)$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.
3. Sia I un insieme semidecidibile ma non decidibile. E' possibile ridurre I a K ?
4. Sia $I = \{x : (\exists y)(\forall z)\phi_x(z) = y\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I? Giustificare la risposta.

Computabilita'
Prova del 12-01-2004

1. Si enunci e si dimostri il secondo teorema di Rice.

2. Si scriva un programma per Macchina di Turing che termina la computazione su un input $\alpha \in \{0, 1\}^*$ se e solo se α, considerato come numero binario, e' maggiore o uguale a 33_{10}.

3. Sia I l'insieme costituito dagli indici x tali che, per ogni $y \leq x$, il programma P_x con input y termina la computazione in un numero di passi $\leq x + 1$. Determinare se I e $\overline{I}$ sono decidibili oppure semidecidibili.

4. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0, 1 \\ f(f(x-2)) + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

5. Quali teoremi di Rice si possono applicare ad $I = \{x : (\forall y)[P_x \downarrow y \rightarrow (0 \leq y \leq 10)]\}$ (giustificare la risposta).

COMPITINO DI Computabilita' B
22 Dicembre 2003

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = 0, 1 \\ f(x-2) + 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $f_3 = \tau^3(f_0)$, dove f_0 e' la funzione vuota.

2. Si enunci il primo teorema di ricorsione. Si provi poi che un funzionale τ che soddisfa le ipotesi del primo teorema di ricorsione soddisfa la seguente proprieta':

$$\tau(\phi_x)(y) = z \text{ se e solo se esiste } \theta \leq \phi_x \text{ finita tale che } \tau(\theta)(y) = z.$$

3. Si dimostri il primo teorema di Rice tramite il secondo teorema di ricorsione.

Compitino di Informatica Teorica AAAAAAA
Prova del 14 aprile 2000

1. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Rice.
2. Si scriva un programma di MdT che data una stringa α non vuota di a e c determini se in α e' presente la sottostringa $aaccaa$.
3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(z, x, y) = (x + y)^z + z$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.
4. Si scriva un programma funzionale iterativo che calcoli la funzione $f(x) = 2$ se $x = 1$, $f(x) = 3x$ se $x \neq 1$ utilizzando l'esponenziazione. (Si supponga che le funzioni 'segno', 'segno negato' e 'uguaglianza' siano gia' definite)
5. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) \cap codom(\phi_x) \neq \emptyset\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare lo stesso per il complementare di I.
6. Definire una funzione calcolabile totale $k : N \to N$ tale che (1) $\phi_{k(x)} \neq \phi_{k(y)}$ per ogni $x \neq y$; (2) $\phi_{k(x)} > \phi_{k(y)}$ per ogni $x > y$.

d. badoli @ cineca.it

Compitino di Informatica Teorica BBBBBB
Prova del 14 aprile 2000

1. Si dimostri il primo teorema di Rice.
2. Sia n un fissato numero naturale maggiore di 0. Si definisca una MdT che termina la computazione se e solo se la stringa $\alpha \in \{a, b\}^*$ in input ha lunghezza n.
3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x^2 + y^3$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.
4. Sia $I = \{x : (\exists y)[y \leq x \text{ e } P_x \downarrow y]\}$. Verificare che I e' semidecidibile. Si provi poi che I non e' decidibile riducendo K ad I.
5. Definire una funzione calcolabile totale $k : N \to N$ tale che (1) $\phi_{k(x)} \neq \phi_{k(y)}$ per ogni $x \neq y$; (2) $\phi_{k(x)} < \phi_{k(y)}$ per ogni $x > y$.
6. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) \cap codom(\phi_x) = \emptyset\}$. Verificare quali teoremi di Rice sono applicabili ad I.

II COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA
AAAA
2 Giugno 2000

1. Dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

2. Sia A un insieme semidecidibile ma non decidibile. Si consideri il seguente funzionale τ:

$$\tau(f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A \\ f(f(x+1)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si provi accuratamente che il funzionale τ non e' ricorsivo. Supponendo che $0 \notin A$ si determini il minimo punto fisso di τ. Se $0 \in A$ esiste un minimo punto fisso o almeno un punto fisso di τ? (Giustificare la risposta).

3. Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^n : k \geq n, n > 0\}$. Provare poi per induzione che L = L(G).

4. Provare che il linguaggio dell'esercizio precedente non e' regolare.

II COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA
BBBB
2 Giugno 2000

1. Dimostrare il pumping lemma per linguaggi liberi.

2. Sia A un insieme di naturali. Si consideri il seguente funzionale τ:

$$\tau(f)(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in A \\ f(f(x+2)) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Determinare delle condizioni su A affinche' il funzionale τ sia ricorsivo. In tal caso si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si determinino le funzioni f_0, f_1, f_2, f_3.

3. Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^n : k \geq n, n > 0\}$. Provare poi per induzione che L = L(G).

4. Definire un automa a stati finiti deterministico che riconosce il linguaggio denotato dalla seguente espressione regolare: $(abb)^* + (ca)^*$.

COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA AAAA
27 Gennaio 1999 (RECUPERO PARTE II)

1. Dimostrare che un insieme e' ricorsivamente enumerabile sse e' semidecidibile.

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{if } x = 5 \\ f(f(x+1)-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

3. Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^n : k \geq 0, n > k\}$. Provare poi per induzione che L = L(G).

4. Descrivere il modello di Hopfield discreto. Quali sono i problemi relativi all'uso di tale modello per la realizzazione di una memoria associativa?

COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA BBBB
27 Gennaio 1999 (RECUPERO PARTE II)

1. Dimostrare che un insieme A e' ricorsivamente enumerabile sse esiste un insieme decidibile $R \subseteq N \times N$ tale che
$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y)(x, y) \in R.$$

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:
$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x = 3 \\ f(f(x+1)-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

3. Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^k a^n : k, n \geq 0\}$. Provare poi per induzione che L = L(G).

4. Descrivere il modello di Hopfield discreto. Quali sono i problemi relativi all'uso di tale modello per la realizzazione di una memoria associativa?

Compitino di Informatica Teorica AAAAAA
Prova del 27 Gennaio 1999 (RECUPERO PARTE I)

1. Si dimostri che un insieme infinito e' decidibile sse e' codominio di una funzione calcolabile totale strettamente crescente.
2. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x(y + 8)$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.
3. Sia I un insieme semidecidibile ma non decidibile. E' possibile ridurre I a K ?
4. Sia $I = \{x : (\exists y)(\forall z)\phi_x(z) = y\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I? Giustificare la risposta.

COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA CCCC
22 Gennaio 1999

1. Si provi che la classe dei linguaggi regolari e' chiusa per unione ed iterazione.
2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = 2 \\ f(x+2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.
3. Provare che il linguaggio $L = \{a^i b^k c^{i+k} : i, k \geq 0\}$ non e' regolare.
4. Determinare se il seguente funzionale τ e' ricorsivo

$$\tau(f)(x) = \begin{cases} 9 & \text{if } x \notin K \\ f(x+3) & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

5. Qual è la relazione tra la funzione energia del modello di Hopfield continuo e quella del modello discreto? Spiegare.

Calcolabilita'
Prova del 7 Febbraio 2003

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = 0 \\ f(f(x-1)-2)+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione f_3.

2. Si enunci e dimostri il secondo teorema di Rice.

3. Si enunci il primo teorema di Rice e lo si provi utilizzando il secondo teorema di ricorsione.

4. Dimostrare che esiste n tale che

$$\phi_n(x) = 2x + n.$$

5. Sia $I = \{x : (\exists y)\ \phi_x(y) \text{ e' indefinito}\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I ed al complementare di I? Giustificare la risposta.

(IT1) Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k a^n : k > n > 0\}$.

(IT2) Enunciare e dimostrare il Pumping Lemma per linguaggi regolari.

(IT3) Si enunci e si dimostri il pumping Lemma per linguaggi liberi.

(IT4) Sia L il linguaggio costituito dalle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono $aabb$ come sottostringa. Per esempio, la stringa $aabab$ fa parte del linguaggio L, mentre la stringa $baaabbb$ non appartiene ad L. Determinare (1) un automa a stati finiti deterministico che riconosce L; (2) una grammatica lineare a destra che genera L.

Calcolabilita'
Prova del 15 Gennaio 2002

1. Si dimostri che un insieme infinito e' decidibile sse e' codominio di una funzione calcolabile totale strettamente crescente.
2. Si enunci e dimostri il primo teorema di Rice.
3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x,y) = x^2(y+3)$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g,h)$.
4. Sia I un insieme semidecidibile ma non decidibile. E' possibile ridurre I a $\bar{K}$?
5. Si enunci e dimostri il secondo teorema di ricorsione.
6. Sia $I = \{x : (\forall z \in N)(\exists y \in N)\phi_x(z) = y\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I? Giustificare la risposta.

(IT1) Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^k a^n : k, n \geq 0\}$.

(IT2) Enunciare e dimostrare il Pumping Lemma per linguaggi regolari.

(IT3) Provare che il linguaggio L dell'esercizio (IT1) non e' regolare.

Compitino di Informatica Teorica A
Prova del 28 aprile 1998

1. Si dimostri il primo teorema di Rice.

2. Si scriva un programma per Macchina di Turing che, data una stringa non vuota $\alpha \in \{0,1\}^*$, determini se in α e' presente la sottostringa 1111. (In altri termini, determini se esistono due stringhe $\beta, \gamma \in \{0,1\}^*$ tali che $\alpha = \beta 1111 \gamma$.)

3. Si scriva un programma funzionale iterativo che calcoli la funzione $f(x) = 3^x$ se $x \neq 0$, 5 altrimenti. (Si supponga che le funzioni 'segno' e 'segno negato' siano gia' definite)

4. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) \text{ ha almeno 10 elementi}\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare la stessa verifica per il complementare di I.

5. Sia $K = \{x : P_x \downarrow x\}$. Trovare un insieme $H \neq K$ tale che A e' riducibile ad H per ogni insieme semidecidibile A.

Compitino di Informatica Teorica AAAAAA
Prova del 18 Novembre 1998

1. Si dimostri che un insieme I e' decidibile se e solo se I ed il suo complementare sono semidecidibili.

2. Si scriva un programma per Macchina di Turing che termina la computazione su un input $\alpha \in \{a, b\}^*$ se e solo se in α e' presente la sottostringa *abab*. (Esempio: la stringa *bba*<u>*abab*</u>*bbaa* verifica la condizione, mentre la stringa *abbabbbaabb* no.)

3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = 3^{(x+y)}$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.

4. Sia $I = \{x : (\forall y)[y \leq x \Rightarrow P_x \downarrow y]\}$. Verificare che I e' semidecidibile. Si provi poi che I non e' decidibile riducendo K ad I.

5. Sia $I = \{x : \phi_x \text{ ha dominio finito}\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I?

Compitino di Informatica Teorica A
Prova del 26 aprile 2001

1. Si enunci e si dimostri il primo teorema di Rice.
2. Si scriva un programma per Macchina di Turing che, data una stringa non vuota $\alpha \in \{a,b\}^*$, determini se in α e' presente la sottostringa *abba*. (In altri termini, determini se esistono due stringhe $\beta, \gamma \in \{a,b\}^*$ tali che $\alpha = \beta abba\gamma$.)
3. Si scriva un programma funzionale iterativo che calcoli la funzione $f(x) = 2^x$ se $x \neq 0$, 3 altrimenti. (Si supponga che le funzioni 'segno' e 'segno negato' siano gia' definite)
4. Sia $I = \{x : (\forall y)[P_x \downarrow y \rightarrow (0 \leq y \leq 10)]\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare la stessa verifica per il complementare di I.
5. Sia $I = \{x : P_x \uparrow 0 \text{ in } \leq x+1 \text{ passi}\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile.

COMPITO DI INFORMATICA TEORICA
4 GIUGNO 2001

1. Sia I l'insieme costituito dagli indici x tali che, per ogni y, il programma P_x con input y non termina la computazione in un numero di passi $\leq y+1$. Determinare se I e $\overline{I}$ sono decidibili oppure semidecidibili.

2. Un esponenziale parziale è una funzione parziale f da N in N tale che $f(x) = 2^x$ per ogni $x \in dom(f)$.

   (i) Determinare se esistono moltiplicazioni parziali non calcolabili;

   (ii) Definire una funzione calcolabile totale $k : N \to N$ tale che $\phi_{k(x)}$ è un esponenziale parziale per ogni x, ed inoltre $\phi_{k(x)} \neq \phi_{k(y)}$ per ogni $x \neq y$.

3. Determinare un numero naturale n tale che

$$\phi_n(x) = x + n * n.$$

4.

5. Sia L il linguaggio costituito dalle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono abb come sottostringa. Per esempio, la stringa $aaab$ fa parte del linguaggio L, mentre la stringa $baaabbb$ non appartiene ad L. Determinare un automa a stati finiti che riconosce L.

Compitino di Informatica Teorica BBBBBB
Prova del 27 Gennaio 1999 RECUPERO PARTE I

1. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Rice.
2. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x + y^2$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.
3. Sia I un insieme decidibile. E' possibile ridurre K ad I ?
4. Sia $I = \{x : (\exists y)(\forall z)\phi_x(z) = y\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I? Giustificare la risposta.

COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA BBBB
22 Gennaio 1999

1. Enunciare e dimostrare il pumping lemma per linguaggi regolari.

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x = 0 \\ f(f(x+1)+1)+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

3. Determinare una grammatica che genera il linguaggio $L = \{a^i b^k c^{i+k} : i, k \geq 0\}$.

4. Determinare se il seguente funzionale τ e' ricorsivo

$$\tau(f)(x) = \begin{cases} 3 & \text{if } x \notin K \\ f(x+1) & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

5. Qual è la relazione tra la funzione energia del modello di Hopfield continuo e quella del modello discreto? Spiegare.