Computabilita'
18 Gennaio 2005

1. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Rice.

2. Sia $K = \{x : P_x \downarrow x\}$. Sia A un insieme semidecidibile. Ridurre A a K se questo e' possibile. E' possibile fare il viceversa?

3. Scrivere un programma funzionale iterativo che definisca la funzione $g(x) = 1$ se $x = 0$; $g(x) = 2^x + 1$ altrimenti. Si supponga che le funzioni segno e segno negato siani gia' definite.

4. Si provi che un insieme $A \subseteq N$ e' ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste un insieme decidibile $R \subseteq N \times N$ tale che

$$x \in A \text{ sse } (\exists y)\ (x, y) \in R.$$

5. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{if } x = 3 \\ f(f(x-1)) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra.

COMPITO DI computabilita' BBB
15-11-2005

1. Sia $I = \{x :$ esistono infiniti y tali che $\phi_x(y) \neq y\}$. Determinare se I e $\overline{I}$ sono decidibili oppure semidecidibili.
2. Si scriva un programma di MdT che, data una stringa $\alpha \in \{0, 1\}^*$, termina la computazione sse α contiene la sottostringa 0110 oppure la sottostringa 0[illegible]111.
3. Sia $I = \{x : \phi_x$ e' iniettiva$\}$. Si verifichi se e' possibile ridurre K ad I. Ed il viceversa?
4. Enunciare e dimostrare il secondo teorema di Rice.
5. Si provi che I e' decidibile sse I e $\overline{I}$ sono semidecidibili.

Compitino di Computabilita' B
Prova del 12 novembre 2003

HINI LUDOVICO - 789246

1. Si dimostri il terzo teorema di Rice.
2. Si dimostri che un insieme A di numeri naturali e' decidibile sse A ed il complementare di A sono semidecidibili.
3. Si scriva un programma funzionale che calcoli la funzione $f(x) = 2 * x$ se $x \neq 0$, 2 altrimenti. (Si supponga che le funzioni 'segno' e 'segno negato' siano gia' definite)
4. Sia $I = \{x : dom(\phi_x)$ ha almeno 2 elementi$\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare la stessa verifica per il complementare di I.
5. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(x, y) = x(y * x + 2)$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$.

Conidelli Efrem

Computabilita' B
21 Dicembre 2004

1. Dimostrare che un insieme infinito e' decidibile se e solo se puo' essere enumerato in maniera strettamente crescente.

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0 \\ f(f(x-1)-2)+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini la soluzione minima fix della precedente definizione ricorsiva applicando il primo teorema di ricorsione. Si verifichi che fix soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione f_3.

3. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} f(x+1)+1 & \text{se } x \in K \\ f(x+2) & \text{altrimenti} \quad x \notin K \end{cases}$$

   Si provi che non e' possibile applicare il primo teorema di ricorsione. Trovare una soluzione della precedente equazione ricorsiva. (Giustificare le risposte).

4. Si provi che un insieme e' ricorsivamente enumerabile se e solo se e' semidecidibile.

COMPITO DI computabilita' AAA

15-11-2005

1. Sia $I = \{x : \text{ esistono infiniti } y \text{ tali che } \phi_x(y) = y\}$. Determinare se I e $\overline{I}$ sono decidibili oppure semidecidibili.
2. Enunciare e dimostrare il primo teorema di Rice.
3. Sia $I = \{x : \phi_x \text{ e' totale}\}$. Si verifichi se e' possibile ridurre K ad I. Ed il viceversa?
4. Si scriva un programma di MdT che, data una stringa $\alpha \in \{a, b\}^*$, termina la computazione sse il numero di occorrenze del carattere a in α e' strettamente minore del numero di occorrenze del carattere b in α.
5. Si provi che un insieme infinito e' decidibile sse e' possibile enumerarlo in maniera crescente.

---

1. Si enunci e si dimostri il terzo teorema di Rice. RICE
2. Si scriva un programma di MdT che data una stringa α non vuota di a e c determini se in α e' presente la sottostringa $aaccaa$. MACCHINA DI TURING
3. Si definisca per ricorsione primitiva la funzione $f(z, x, y) = (x + y)^z + z$. Si trovino poi le funzioni g ed h per cui $f = recprim(g, h)$. RICORSIONE PRIMIT.

QUESTO

4. Si scriva un programma funzionale iterativo che calcoli la funzione $f(x) = 2$ se $x = 1$, $f(x) = 3x$ se $x \neq 1$ utilizzando l'esponenziazione. (Si supponga che le funzioni 'segno', 'segno negato' e 'uguaglianza' siano gia' definite) PROG. FUNZ.
5. Sia $I = \{x : dom(\phi_x) \cap codom(\phi_x) \neq \emptyset\}$. Verificare se I e' semidecidibile e/o decidibile. Fare lo stesso per il complementare di I. DECIDIBILITA' SEMIC.
6. Definire una funzione calcolabile totale $k : N \to N$ tale che (1) $\phi_{k(x)} \neq \phi_{k(y)}$ per ogni $x \neq y$; (2) $\phi_{k(x)} > \phi_{k(y)}$ per ogni $x > y$. FUNZ.

Calcolabilita'
Prova del 7 Febbraio 2003

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = 0 \\ f(f(x-1)-2)+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione f_3.

2. Si enunci e dimostri il secondo teorema di Rice.

3. Si enunci il primo teorema di Rice e lo si provi utilizzando il secondo teorema di ricorsione.

4. Dimostrare che esiste n tale che

$$\phi_n(x) = 2x + n.$$

5. Sia $I = \{x : (\exists y)\ \phi_x(y) \text{ e' indefinito}\}$. Quali teoremi di Rice sono applicabili ad I ed al complementare di I? Giustificare la risposta.

(IT1) Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k a^n : k > n > 0\}$.

(IT2) Enunciare e dimostrare il Pumping Lemma per linguaggi regolari.

(IT3) Si enunci e si dimostri il pumping Lemma per linguaggi liberi.

(IT4) Sia L il linguaggio costituito dalle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che non contengono $aabb$ come sottostringa. Per esempio, la stringa $aabab$ fa parte del linguaggio L, mentre la stringa $baaabbb$ non appartiene ad L. Determinare (1) un automa a stati finiti deterministico che riconosce L; (2) una grammatica lineare a destra che genera L.

COMPITINO DI INFORMATICA TEORICA BBBB
27 Gennaio 1999 (RECUPERO PARTE II)

1. Dimostrare che un insieme A e' ricorsivamente enumerabile sse esiste un insieme decidibile $R \subseteq N \times N$ tale che

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists y)(x, y) \in R.$$

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{if } x = 3 \\ f(f(x+1) - 1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

3. Determinare una grammatica G che genera il linguaggio $L = \{b^k c^k a^n : k, n \geq 0\}$. Provare poi per induzione che L = L(G).

4. **Descrivere il modello di Hopfield discreto. Quali sono i problemi relativi all'uso di [illegible] per la realizzazione di una memoria associativa?**

1. Si provi che la classe dei linguaggi regolari e' chiusa per unione ed iterazione.

2. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = 2 \\ f(x+2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Si determini il minimo punto fisso fix_τ del funzionale τ associato alla precedente definizione ricorsiva. Si verifichi che fix_τ soddisfa effettivamente l'equazione ricorsiva di sopra. Si determini la funzione $\tau^3(f_\emptyset)$.

3. Provare che il linguaggio $L = \{a^i b^k c^{i+k} : i, k \geq 0\}$ non e' regolare.

4. Determinare se il seguente funzionale τ e' ricorsivo

$$\tau(f)(x) = \begin{cases} 9 & \text{if } x \notin K \\ f(x+3) & \text{if } x \notin K \end{cases}$$

5. Qual è la relazione tra la funzione energia del modello di Hopfield continuo e quella del modello discreto? Spiegare.