2024 年寒假特制试卷：丙卷

一只波兰立陶宛联邦球

2024 年 2 月 9 日

注意事项

本试卷共 15 题，每题 10 分，卷面总分 150 分。考试时间 4 小时。范围：高等数学。

1

函数

$$f\left(x,y\right)=x^2+\left(y-1\right)^2\quad\left(x\neq 0\right)$$

在某个椭圆上有最小值 1。求该椭圆 (假定它的对称中心位于坐标原点、焦点位于横轴上) 的最小面积及其方程。

2

求所有的连续可微函数 $f:[0,1]\to(0,\infty)$，使得：

$$\frac{f\left(1\right)}{f\left(0\right)}=e$$

并且

$$\int_0^1\frac{1}{f^2(x)}\mathrm{d}x+\int_0^1[f'\left(x\right)]^2\mathrm{d}x\leq 2$$

3

设 $f,g:[0,1]\to[0,1]$，f,g 均连续且 $f(x)$ 单调不减。求证：

$$\int_0^1 f\left[g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x\leq\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x$$

4

试求：

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{a}{b}}\int_0^1\frac{f\left(x\right)}{1+n^a x^b}\mathrm{d}x$$

其中，$a>0,b>1$ 且均为实数，$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为连续函数。

5

记

$$J_n\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\left(n\phi-x\sin\phi\right)\mathrm{d}x$$

为 n 阶 Bessel 函数。求证：

$$\int_0^\pi tJ_0\mathrm{d}x=xJ_1\left(x\right)$$

6

设函数 $f(x)>0$ 在实轴上连续。如果对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-|t-x|\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x\le 1$$

求证：对于任意 $a<b$，有：

$$\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\left(b-a+2\right)$$

7

设 $f\left(x,y\right)$ 在单位圆域 $\left(D:=\left\{\left(x,y\right)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}\right)$ 上具有连续的二阶偏导数，且：

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\le M$$

$f\left(0,0\right)=f_x\left(0,0\right)=f_y\left(0,0\right)=0$，证明：

$$\left|\iint_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$

8

设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f\left(x\right)\neq 0$。求证：在 $[0,1]$ 上存在三个不同的零点 $x_1\sim x_3$，使得：

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x_3}{1+x_1^2}\displaystyle\int_0^{x_1}f\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x_1\right)\arctan x_1\\\dfrac{1-x_3}{1+x_2^2}\displaystyle\int_0^{x_2}f\left(t\right)\mathrm{d}t+f\left(x_2\right)\arctan x_2\end{cases}$$

9

若 $f\left(x\right)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求证：

$$\int_0^\pi xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$$

并求：

$$\int_0^\pi\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$$

10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可微，且该函数的二阶导数 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积。记：

$$B_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f\left[a + (2i-1)\frac{b-a}{2n}\right]$$

求证：

$$\lim_{n\to\infty} n^2 B_n = \frac{(b-a)^2}{24}\left[f(b) - f(a)\right]$$

11

考虑二阶偏微分方程：

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

取：

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = xy \end{cases}$$

为自变量，$w = x + y + z$ 为函数。将此方程进行变换。

12

通过将函数

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\exp(\pi) - \exp(-\pi)}$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数，计算：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4n^2}$$

13

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上具有二阶连续偏导数。对于任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$。对于 $g_\alpha(t)$ 的所有驻点，对应二阶导数恒为正。求证：该函数在坐标原点处取得极小值。

14

计算极限或积分：

(1)

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2\left[x + \ln(1-x)\right]}$$

(2)

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1 + x^2}}{\left[\cos x - \exp\left(x^2\right)\right] \sin x^2}$$

(3)

$$L_3 = \lim_{n \to \infty} \left[\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n} \right]$$

(4)

$$I_4 \int \frac{x^2}{\left(x^2 + 2x + 2\right)^2} \mathrm{d}x$$

(5)

$$I_5 = \int \frac{x \mathrm{d}x}{\left(x^2 - 3x + 2\right) \sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

15

在空间直角坐标系中，求以三个坐标轴的正半轴为母线的半圆锥面方程。