2024 年寒假特制试卷：乙卷

一只波兰立陶宛联邦球

2024 年 2 月 6 日

注意事项

本试卷共 15 题，每题 10 分，卷面总分 150 分。考试时间 4 小时。

范围：高等数学。

1

已知 $0 < x_1 < 1$，$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$，$n = 1, 2, \ldots$。

(1) 证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求其极限。

(2) 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = 1$$

(3) 假设 $0 < p < 1$，$0 < x_1 < \frac{1}{p}$，其中 $0 < p \leq 1$，同时 $x_{n+1} = x_n(1 - p x_n), n \in \mathbb{N}_+$。

求证：

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \frac{1}{p}$$

2

(1) 求

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right)$$

的麦克劳林展式，并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{2n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

的和。

(2) 请将级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数。

3

(1) 计算三重积分：

$$I=\iiint_V x\cdot\exp(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，V 是曲面 $y=x^2$，$y=x$，$x+y+z=2$ 和 $z=0$ 围城的区域。

(2) 设 $f(x)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$。求函数 $f(x^2+y^2)$，使曲线积分：

$$I=\int_L y\left[2-f\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$$

与路径无关。其中 L 是不经过原点的光滑曲线。

4

(1) 已知：

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

试计算

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\sin x\sin\left(x+y\right)}{x\left(x+y\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 试求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$$

(3) 试计算：

$$T:=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\exp\left[\sin\theta\left(\cos\phi-\sin\phi\right)\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

(4) 计算积分：

$$\int_0^{\pi}\ln\left(2+\cos x\right)\mathrm{d}x$$

5

设：

$$u_n\left(x\right)=\exp\left(-nx\right)+\frac{1}{n\left(n+1\right)}x^{n+1},n=1,2,\ldots$$

求函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n\left(x\right)$ 的收敛域与和函数。

6

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导。$1<a<b$，$f'(x)\neq 0$。求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得：

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{1}{1+\ln\eta}\frac{b\ln b-a\ln a}{b-a}$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$0<a<b$。求证：存在 $\gamma\in(a,b)$ 使得：

$$2\gamma\left[f(b)-f(a)\right]=\left(b^2-a^2\right)f(\gamma)$$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导。$f(0)=0$，$f(1)=1$。求证：对于任何正数 a,b，在 $(0,1)$ 内存在不相等的两个数 m 和 n 使得：

$$\frac{a}{f'(m)}+\frac{b}{f'(n)}=a+b$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导。其中，$a>0$。求证：存在 $\alpha,\beta\in(a,b)$，使得：

$$f'(\alpha)=\frac{a+b}{2\beta}f'(\beta)$$

7

计算以下两个积分：

(1)

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

(2)

$$\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x$$

8

(1) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 严格单调递增，同时函数 $g(x)$ 满足 $0<g(x)<1$。证明：

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(2) 讨论

$$F(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{e}\right)\right)+\int_{-1}^{1}|x-t|\exp(-t^2)\mathrm{d}t=0$$

在闭区间 $[-1,1]$ 上实数根的个数。

9

请使用泰勒公式说明函数在某区间上的凹凸性和在该区间上二阶导数之间的关系。已知该函数在定义域中给定任意区间上的二阶导数都存在。

10

设 $f(x)$ 在 $x>1$ 时具有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$。$z=(x^2+y^2)\,f\,(x^2+y^2)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

求 $f(x)$ 在 $x>1$ 时的最值。

11

已知三元函数 $f\,(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上具有连续的二阶偏导数。假设 $\mathbb{R}^3$ 中光滑简单封闭曲面的全体为 Σ，对于 $S\in\Sigma$，用 $\vec{n}$ 表示 S 的外法线单位方向向量，$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ 表示 f 沿 $\vec{n}$ 的方向导数。(1) 证明：f 在 $\mathbb{R}^3$ 上满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

($f(x,y,z)$ 是调和函数) 当且仅当

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}S=0 \quad (\forall S\in\Sigma)$$

(2) 设 $f(x,y,z)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的调和函数，$S\in\Sigma$，且 S 围成的有界区域记做 V。求证：

$$f\,(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(f\frac{\cos<\vec{r}\cdot\vec{n}>}{|\vec{r}|^2}+\frac{1}{|\vec{r}|\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}}\right)\mathrm{d}S$$

(x_0,y_0,z_0) 是 V 内部的一个定点。$\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$。$<\vec{r},\vec{n}>$ 表示两向量之间的夹角，$|\vec{r}|$ 表示向量 $\vec{r}$ 的模长。
(3) 若函数 f 和闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数 g 在单位球 $\Omega=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ 上满足：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=g\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

求证：

$$\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\pi\int_0^1\sqrt{t}\,(1-t)\,g\,(t)\,\mathrm{d}t$$

12

已知周期为 2π 的函数

$$f(x)=\frac{1}{4}x\,(2\pi-x)\qquad 0\leq x\leq 2\pi$$

(1) 通过将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，计算

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(2) 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

13

求椭球体

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$$

被平面 $x + y + z = 0$ 所截得的椭圆面积。

14

设 $f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时具有连续导数，$f(0) \leq 1$，且满足：

$$3\left[3 + f(x)^2\right] f'(x) = 2\left[1 + f^2(x)\right] \exp(-x^2)$$

求证：$f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时有界。

15

$f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时是有界的连续函数。求证：方程

$$y''(x) + 14y'(x) + 13y(x) = f(x)$$

的每个解都在 $x \geq 0$ 时有界。