2024 年寒假特制试卷：甲卷

一只波兰立陶宛联邦球

注意事项

本试卷共 25 题，每题 10 分，卷面总分 150 分。考试时间 4 小时。

范围：高等数学、线性代数、概率论与数理统计。

本试卷中，1、2、15 题必做；分别从 3/4/5 题、6/7/8 题、9/10/11 题、12/13/14 题中每组题选两题作答；从 15-20 题、21-25 题中每组选三题作答。若组内选定的题目数量超过限制，则按题号先后顺序评阅赋分。

高等数学部分

1

求以下各极限。

(1)

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^m - \sin^n x}{x^{n+2}}$$

(2)

$$L_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} n^p}{n^{p+1}} \quad (n>0)$$

(3)

$$L_3 = \lim_{x\to 0}(1 - x\sin 2x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$$

(4)

$$L_4 = \lim_{x\to 0}(e^{-x^2} + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}}$$

2

假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=2,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$$

证明以下四个命题：

(1) 存在 $0<\xi<1$ 使得

$$f'(\xi)=f(\xi)-2\xi+2$$

(2) 存在 $0<\eta<1$ 使得 $f''(\eta)=0$

(3) 存在 $0<\zeta<1$ 使得：

$$\int_0^\zeta f(t)\mathrm{d}t+\zeta f(\zeta)=2\zeta$$

(4) 存在 $0<\mu<1$ 使得：

$$\mu f(\mu)=2\int_0^\mu f(t)\mathrm{d}t$$

3

求解以下不定积分：

(1)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$$

(2)

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}}$$

(3)

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\quad(a,b\neq 0)$$

(4)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

(5)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

4

求解以下反常积分：

(1)

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)sin(bx)}{x}\mathrm{d}x \quad a \neq b$$

(2)

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^4(\alpha x) - \sin^4(\beta x)}{x}\mathrm{d}x \quad \alpha, \beta > 0$$

(3)

$$I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \mathrm{d}x \quad (a > 0)$$

(4)

$$I_4 = \int_{+\infty}^{0} x^n e^{-x} \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(5)

$$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad (0 < r < 1)$$

5

(1) 对于任意 $n \geq 2$，证明：

$$\int_{\pi}^{n*\pi} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x > \frac{2}{\pi}\ln\frac{n+1}{2}$$

(2) 假设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，且：

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$$

请说明 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上至少有两个零点。

6

假设 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，满足：

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

请使用合适的线性替换，将方程化为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

其中，$\xi = x + ay, \eta = x + by$。

7

已知函数 $z=z(x,y)$ 由

$$\left(x^2+y^2\right)z+\ln z+2(x+y+1)=0$$

确定。求其极值。

8

求函数 $f(x,y)=x+y+xy$ 在曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$ 上的最大方向导数。

9

假设 $f(x,y)$ 在单位圆域内具有连续的偏导数，且在单位圆圆周上取值为零。
若 $D:=\{(x,y)|\varepsilon^2\leq x^2+y^2\leq 1\}$，求证：

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\frac{1}{2\pi})\iint_D\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

10

Ω 是曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 与坐标平面围成的区域在第一卦限内的部分。试计算：

$$\iiint_\Omega\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

11

假设 $f(x,y)$ 在区域 $D:=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足：

$$f(x,y)|_{x^2+y^2=a^2}=a^2\quad\max_{(x,y\in D)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2\quad(a>0)$$

求证：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\frac{4}{3}\pi a^4$$

12

假设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$。请使用傅里叶级数理论论证该函数为常数。

13

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\times 2^n}$$

的收敛域与和函数，并计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\times 2^n}$ 的值。

14

数列 $\{a_n\}\,(n \geq 0)$ 由初值条件 $a_0 = 1, a_1 = 2$ 与递推公式

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+2} a_{n+1} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

决定。试求出其通项公式。

15

假设 $f\left(x\right)$ 可导，且

$$x = \int_0^x f\left(t\right) \mathrm{d}t + \int_0^x t f\left(t - x\right) \mathrm{d}t$$

试求：

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left|f\left(x\right)\right|^6 \mathrm{d}x$$

线性代数部分

16

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = P^{-1} A^* P$$

E 为三阶单位矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。求 $B + 2E$ 的特征值与特征向量。

17

已知秩为 2 的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)\,x_1^2 + (1-a)\,x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1 x_2$$

请求出正交变换将其化为标准型。

18

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量。且满足：

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3$$

$$A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

(1) 求矩阵 B 满足 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)B$。

(2) 求矩阵 B 的特征值。

(3) 求可逆矩阵 P 满足 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

19

考虑 n 阶方阵 A 和 B 及 n 阶单位矩阵 E，$rank(A) + rank(B) < n$。同时 $AB = A + B$。证明：

(1) $A - E$ 可逆并求出其逆矩阵。

(2) $AB = BA$

(3) A 和 B 的特征向量完全相同。

20

完成以下证明。

(1) 假设 A 是 $m \times n$ 的实矩阵。E 是单位矩阵。$B = \lambda E + A^T A$。证明：当 $\lambda > 0$ 时，B 是正定矩阵。

(2) 假设 A 为 m 阶正定实矩阵，B 为 $m \times n$ 阶实矩阵。证明：$B^T AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $rank(B) = n$。

概率论与数理统计部分

21

假设以下描述的事件 A, B, C 均有意义。完成以下证明。

(1) 如果 $P(A) > 0$，有 $P(AB|A) > P(AB|A \cup B)$。

(2) 若 $P(A|B) = 1$，则 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$。

(3) 若 $P(A|C) \geq P(B|C)$，$P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C})$，则 $P(A) \geq P(B)$。

22

设随机变量 X 服从参数 0.5 的指数分布。求证：$Y = 1 - \exp(-2X)$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布。

23

设随机变量 X_1,X_2,X_3 互相独立,其中 X_1 和 X_2 服从标准正态分布。且 $PX_3 = 0 = PX_3 = 1 = 0.5$。定义 $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)\,X_2$。

(1) 用标准正态分布函数表示二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数。

(2) 求证：Y 服从标准正态分布。

24

某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005 欧姆，在生产的一批产品中取 9 根，测得样本标准差为 0.007 欧姆。假设总体服从参数未知的正态分布。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，能否认为这批导线的电阻标准差显著地比平均值偏大？

25

已知随机变量 Y 的密度函数和给定 $Y = y$ 条件下随机变量 X 的密度函数分别为：

$$p_Y(y) = \begin{cases} 5y^4 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$p(x|y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求概率 $P(X > 0.5)$。