2024 年寒假特制试卷：丁卷

一只波兰立陶宛联邦球

2024 年 2 月 17 日

注意事项

本试卷共 15 题，每题 10 分，卷面总分 150 分。考试时间 4 小时。范围：高等数学。

1

设实数 $\alpha > 0$，数列 $\{u_n\}\,(n \geq 1)$ 满足条件：

$$u_1 > 0 \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^{\alpha} u_n}$$

(1) 证明：当且仅当 $\alpha > 1$ 时该数列收敛。
(2) 若 $\alpha > 1$，记

$$\lambda := \lim_{n \to \infty} u_n$$

求证：

$$\lambda - u_n \sim \frac{1}{\lambda\,(\alpha - 1)\,n^{\alpha - 1}} \quad (n \to \infty)$$

(3) 对于充分大的 n，求证：
如果 $\alpha = 1$，有

$$u_n \sim \sqrt{2 \log n} \quad (n \to \infty)$$

如果 $0 < \alpha < 1$，有：

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2}{1 - \alpha} n^{\frac{1-\alpha}{2}}} \quad (n \to \infty)$$

2

设参变量 $\alpha = \alpha\,(x, y)$ 的一阶偏导数存在。函数 $z = z\,(x, y)$ 由下列方程确定：

$$z = \alpha x + 2\left(\alpha^2 + 1\right) y + 2\alpha^2 \quad x + 4\alpha y + 4\alpha = 0$$

求证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

3

设函数 $f \in C^{[0,1]}$，$f(0)=0$。证明：对于任意 $n \in \mathbb{N}$，有：

$$\int_0^1 |f(x)|^n |f'(x)| \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{n+1} \int_0^1 |f'(x)|^{n+1} \,\mathrm{d}x$$

等号成立的充分必要条件为 f 仅为齐次线性函数 $(f(x)=ax)$。

4

设函数 $f \in C^1[0,\infty)$，当 $x \to 0$ 时 $f(x) \to 0$，并且对于某个实数 $a > -1$，积分

$$\int_0^\infty t^{a+1} f'(x) \,\mathrm{d}t$$

绝对收敛。证明：

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{a+1} f(x) = 0$

(2) 积分 $\int_0^\infty t^a f(t) \,\mathrm{d}t$ 收敛，其值为：

$$\frac{1}{a+1} \int_0^\infty t^{a+1} f'(t) \,\mathrm{d}t$$

5

(1) 设 $\alpha, \beta > 0$。证明：

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\alpha \cos^2\theta + \beta \sin^2\theta\right) \mathrm{d}\theta = \pi \log\left(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\right)$$

(2) 设 $\alpha > 1$。证明：

$$J(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\alpha^2 - \sin^2\phi\right) \mathrm{d}\phi = \pi \log\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}\right)$$

(3) 证明以上的两个计算公式是等价的。$(\alpha \neq \beta)$。

6

(1) 设 $\alpha < \beta$。求下列曲面围成的立体体积。

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 2az \\ x^2+y^2 &= z^2 \tan^2\alpha \\ x^2+y^2 &= z^2 \tan^2\beta \end{aligned}$$

(2) 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^n = z^{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}; a,b,c>0)$$

围成的立体体积。

7

(1) 计算：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

(2) 证明：

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\arccos\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\left(1-\cos\alpha\right)\quad\left(0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$$

8

求函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+\left(z-1\right)^2$ 在约束条件 $3x^2-2xy+2y^2-2x-6y+7=0$ 下的最值。

9

(1) 使用 Green 公式计算：

$$I_1=\int_C\frac{e^x\left(x\sin y-y\cos y\right)\mathrm{d}x+e^x\left(x\cos y+y\sin y\right)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

(2) 计算积分：

$$I_2=\iint_\Sigma\left(x-y-z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[2y+\sin\left(z+x\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[3z+\exp\left(x+y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma:|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$

10

(1) 设

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(\pi-1\right)x}{2},0\le x\le1\\ \dfrac{\pi-x}{2},1<x<\pi\end{cases}$$

并且当 $-\pi<x<0$ 时取 $f(x)=-f(x)$。求 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开。
(2) 求无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$$

的和。

11

求曲线 $x^3-3xy+y^3=0$ 自身围成的区域面积，以及它与其渐近线 $x+y+a=0$ 之间的面积。

12

设函数 $u(x,y)$ 在 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上连续，并且有：

$$\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

求证：

$$\int_{0}^{1}|u(x,0)|^{2}\,\mathrm{d}x\leq\sqrt{5}\left(\iint_{\Omega}|u(x,y)|^{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\Omega}|u(x,y)|^{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

13

设函数 $f\in C^{2}(0,\infty)$，$f(x)\to 0\,(x\to\infty)$。对于某个 λ，$f''(x)+\lambda f'(x)$ 有界。求证：$f'(x)\to 0\,(x\to\infty)$

14

设实值函数 $f(x)$ 及其一阶导数在区间 $[a,b]$ 上均连续，且 $f(a)=0$。求证：

(1)

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\sqrt{b-a}\left(\int_{a}^{b}|f'(x)|^{2}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2)

$$\int_{a}^{b}f^{2}(x)\,\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2}(b-a)^{2}\int_{a}^{b}|f'(x)|^{2}\,\mathrm{d}x$$

15

设 $u_0=1$，定义：

$$u_n=\int_{0}^{1}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t\quad(n\geq 1)$$

证明在 $[-1,1]$ 上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n x^n}{n!}$$

收敛，并求其和。