2024 年寒假特制试卷：戊卷

一只波兰立陶宛联邦球

2024 年 2 月 17 日

注意事项

本试卷共 15 题，每题 10 分，卷面总分 150 分。考试时间 4 小时。范围：高等数学 (1-10 题)、线性代数 (11-13 题)、概率论与数理统计 (14-15 题)。

1

设函数 $f \in C^{[a,b]}$，在 (a,b) 上二次可微。

(1) 对于任何 $a<c<b$，存在 $\xi=\xi(c) \in (a,b)$，使得：

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

(2) 如果设 $f(a)=f(b)=0$，并且存在 $a<c<b$ 满足 $f(c)\neq 0$，那么至少存在一个实数 $\zeta \in (a,b)$，使得 $f(c)f''(\zeta)<0$

2

如果 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$。求证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}-[1+g(x)]^{\frac{1}{g(x)}}}{f(x)-g(x)}=-\frac{e}{2}$$

3

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，求证：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\phi\cos\psi)\cos\psi \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

(2)$|\alpha|<\frac{\pi}{2}$，求积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}{\cos(a\cos\theta\cos\phi)}$$

(3) 求积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\log(2-\sin\theta\cos\phi)}{2-2\sin\theta\cos\phi+\sin^2\theta\cos^2\phi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

4

求两曲面

$$3x^2+2y^2=2z+1$$
$$x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$$

在其交线上的点 $(1,1,2)$ 处法线的夹角，以及交线在该点的切线方程。

5

(1) 计算：

$$I_1=\iiint_{\Omega}\left(x^3+y^3+z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，Ω 表示曲面 $x^2+y^2+z^2-2a\left(x+y+z\right)+2a^2=0\,(a>0)$ 围成的区域。
(2)

$$I_2=\iiint_{V}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，V 是平面图形 $D:=\{(x,y,z)\,|x=0,y\geq 0,z\geq 0,y^2+z^2\leq 1,2y-z\leq 1\}$ 围绕 z 轴旋转一周生成的立体。

6

设 $f\left(x\right)$ 的一阶导数在 $[a,b]$ 上连续。求证：

$$\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t-f\left(t\right)\right)^2\mathrm{d}x\leq\frac{1}{3}\left(b-a\right)^2\int_a^b\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$$

7

求椭球面

$$\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$$

上的点与平面 $3x+4y+12z=228$ 的最近和最远距离，并求出到达最值的点。

8

(1) 设函数 $u\left(x\right)$ 在区间 $I=[0,1]$ 上连续，$u'\left(x\right)$ 在区间 I 上绝对可积。求证：

$$\sup_{x\in I}\left|u\left(x\right)\right|\leq\int_0^1\left|u\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|u'\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$$

(2) 二元函数 $u=u\left(x,y\right)$ 在区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 上连续，且

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

均在 Ω 上绝对可积。求证：

$$\sup_{x\in I}|u(x,y)| \le \iint_\Omega |u(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_\Omega\left|\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

9

证明：方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2\left(y-y^3\right)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z=0$$

在变换 $x=uv, y=1/v$ 下形式不变。

10

(1) 求曲线 $y^2(x-1)(3-x)=x^2$ 与其渐近线围成区域的面积。
(2) 求曲线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 绕直线 $y=x$ 旋转所成的曲面表面积。$(a>0)$
(3) 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(b<a)$ 内的那部分面积。
(4) 求欧拉方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0\,(x>0)$$

的通解。
(5) 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$$

满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1.5$ 的解。

11

已知平面上三条不同直线的方程分别为：

$$\begin{aligned} l_1 &: ax+2by+3c=0\\ l_2 &: bx+2cy+3a=0\\ l_3 &: cx+2ay+3b=0 \end{aligned}$$

请给出这三条直线交于一点的充分必要条件并论证。

12

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ 线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一。请求出 a 的值并将矩阵 A 相似对角化。

13

考虑二次型：

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

(1) 求该二次型的矩阵所有特征值。

(2) 若二次型的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

14

袋子中有一个红球、两个黑球和三个白球。现在有放回地从袋子中取两次，每次取一个求，以 X、Y 和 Z 分别表示两次取球所得到的红球、黑球和白球的个数。试求：(1) $P\left\{X=1|Z=0\right\}$ (2)(X,Y) 的概率分布。

15

已知概率密度函数：

$$f\left(x\right)=\begin{cases}2\exp\left(-2x+2\theta\right),x\geq\theta\\ \hfill 0,x<\theta\end{cases}$$

其中，$\theta>0$ 为未知参数。从总体 X 中抽取简单随机样本构成序列 $\left\{X_n\right\}$，记 $\hat{\theta}=\min\left\{X_n\right\}$。

(1) 求总体 X 的分布函数。

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的分布函数。

(3) 如果使用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论其是否具有无偏性。