# 基于层次分析法的最佳路径选择

一般情况下，从一个地方开车前往另一个地方，我们考虑的不仅仅的是路程最短的问题，也就是我们最终选择的不一定是最短路径，而是综合考虑了道路的路面质量、车道宽度、纵向坡度、交通状况以及道路的服务水平等多个因素，有时心理因素也是要考虑的因素之一[[1](#_ENREF_1)]。

同样地，对视力残疾人来说，当他们在室内行走时，从一个地方到另一个地方的最短路径并不一定是最佳选择，而在综合考虑了路径的长短、路径的方便性等多个因素后选择的路径才是最优路径。而路径的方便性等因素是模糊的，难以定量、准确地描述的，于是，如何综合考虑多种模糊因素的影响并确定每个影响因素的大小就成为了进行最佳路径选择时需要解决的一个关键问题。

本章通过对影响视力残疾人选择路径的各种因素的分析，确定了影响室内路径网络权值的六个因素，并使用层次分析法进一步确定了各个影响要素的权重。最后，在Dijkstra最短路径算法的基础上，提出了一种最佳路径选择方案，并通过仿真实验验证了该方案的正确性。

## 影响视力残疾人室内出行的主要因素

在路径规划算法中，搜寻最优路径的算法往往是以路径的加权和最优为原则的，因此，对路径规划算法来说，确定道路的权值是至关重要的。从前文对最优路径的讨论中，我们不难发现，单处地把路径的长短作为衡量路径优劣的标准是不能满足导航的需求的，我们必须把影响出行的各个主要因素都考虑进来。在一个复杂的大型建筑物内，路径的权值代表了其可选择、方便通行能力的高低，是一个综合了路径长度、路径相关特点（如是否沿墙）、路径方向变化（主要指路径中的转弯数）等多方面因素的综合指标。下文归纳了对视力残疾人来说，影响路径权值的五个主要因素。

### 链接沿墙距离

在上文关于室内地图构建的讨论中，我们采用了二维笛卡尔坐标系，并清楚地记录了每条路段对应的坐标，因此我们可以通过欧式距离公式，即公式（1.1）

|  |  |
| --- | --- |
|  | 公式（1.1） |

计算出每条路段的长度。在路径权重的众多影响因素中，路径长度是非常重要的一个，对明眼人来说，几乎不用考虑其他因素，在这样的情况下，路径的权值就是由路径的长度来决定的。而对视力残疾人来说，这一因素也同样重要，特别地，这一群体偏爱有明显边缘的道路，作为决定路径长短的一部分，链接沿墙距离自然是影响视力残疾人室内出行的主要因素之一。

### 链接自由距离

链接自由距离是决定路径长短的另一个重要部分，可将其对应到普通的道路。视力残疾人在室内行走时不可避免地需要经过这种道路，这里将其作为这一群体影响室内主要因素之一。和链接沿墙距离相同，链接自由距离也可以通过二维欧式距离公式对其进行量化。

### 链接中的直角弯数

对视力残疾人来说，确定转弯的角度是一件比较难的事，而对90度这个特殊的角度，他们则是非常的熟悉，从对几个盲童所画地图的分析及与他们的交谈中，我们不难发现这一点。很多针对盲人做的行走训练中也包括了垂直定位这一项，可见直角对盲人的重要性。

链接中的直角弯数其实是用来衡量路径中方向变化的特点，相对来说比较抽象，一般都是进行定性的描述，而要在路径权值中使用它的话，就需要对其进行量化处理，引入[0, 1]之间的直角弯系数，使之可以在路径取值中表现出来。通过对视力残疾人进行调查，得出链接中的直角弯数目与直角弯系数的对应关系，如表 1.1所示。

表 1.1 直角弯数目与直角弯系数之间的对应关系

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 直角弯数目 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | >4 |
| 直角弯系数 | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |

### 链接中的非直角弯数

和链接中的直角弯数这一影响因素类似，链接中的非直角弯数也反应了导航路径中的方向变化。这里采用与链接中的直角弯数类似的处理方式，引入[0, 1]之间的非直角弯系数，通过对视力残疾人进行调查得出非直角弯和非直角弯系数的对应关系，如表 1.2所示。

表 1.2 非直角弯数与非直角弯系数之间的对应关系

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 非直角弯数目 | 0 | 1 | 2 | 3 | >3 |
| 非直角弯系数 | 0 | 0.3 | 0.6 | 0.9 | 1 |

### 链接中的楼梯数

楼梯是建筑物中作为楼层间垂直交通用的构件。用于楼层之间和高差较大时的交通联系。在设有电梯、自动梯作为主要垂直交通手段的多层和高层建筑中也要设置楼梯。高层建筑尽管采用电梯作为主要垂直交通工具，但仍然要保留楼梯供火灾时逃生之用。可见楼梯在大型建筑中的作用。另外，对于楼梯的设计，《城市道路和建筑物无障碍设计规范》[[2](#_ENREF_2)]中也给出了明确的无障碍要求，这样对于视力残疾人来说，楼梯也成为了他们室内出行的重要选择之一。

相比平地来说，楼梯对视力残疾人的出行形成了一定程度的障碍。这里将其作为影响最优路径选择的一个因素加以考虑。这里说的楼梯数是指用户通过楼梯经过的楼层数，如从一层经楼梯到达二层，则楼梯数为1。同样地，引入[0, 1]之间的楼梯系数，通过对视力残疾人的调查得出链接中的楼梯数与楼梯系数之间的对应关系，如表 1.3所示。

表 1.3 楼梯数与楼梯系数之间的对应关系

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 楼梯数 | 0 | 1 | 2 | 3 | >3 |
| 楼梯系数 | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1 |

### 链接中的电梯数

电梯（这里主要指垂直升降电梯）是大型高层建筑的主要垂直交通工具，国家规定无论是住宅楼还是办公楼，七层及七层以上的建筑必须安装电梯。同样的，《城市道路和建筑物无障碍设计规范》[[2](#_ENREF_2)]对电梯的无障碍设计也提出了明确要求。

尽管对电梯的障碍设计要求被提出，但是现在有盲文的电梯如凤毛麟角，在这种情况下，我们将电梯也作为影响最优路径选择的因素加以考虑。这里的电梯数是指用户通过换乘电梯的次数。同样地，引入[0, 1]之间的电梯系数，通过对视力残疾人的调查并结合建筑中电梯的实际安装情况，得出链接中的电梯数与电梯系数之间的对应关系，如表 1.4所示。

表 1.4 电梯数与电梯系数之间的对应关系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 电梯数 | 0 | 1 | >1 |
| 电梯系数 | 0 | 0.5 | 1 |

## 基于层次分析法的路径权值的确定

最佳路径的选取实际上是一个多目标决策问题，以往的一些研究[[3](#_ENREF_3); [4](#_ENREF_4)]没有做到全面分析问题，只注重在单个因素影响下的最优路径，这使得最后并不能得出最优结果。有些路径权值确定方法则综合了多种影响因素，但在确定影响因素的权重时常用专家评估的方法，这种方法带有很大的主观性和随意性，有时则会偏离客观实际，致使结果缺乏真实性。

本文采用层次分析法，在对影响最优路径的几个重要因素深入分析的基础上，构建路径层次模型，确定各个因素的权系数，最后综合各影响因素的权系数得出路径的综合权值。这种方法将定量分析与定性分析结合，利用严密的数学理论，能够去除主观性和随意性，使影响因素的权值更符合客观实际，并且依据判断矩阵的一致性来检验权值的合理性，使结论更准确可靠。

### 层次分析法

#### 层次分析法的起源

层次分析法（Analytic Hierarchy Process, AHP）产生于19世纪70年代，是由美国匹兹堡大学（University of Pittsburgh）的著名教授Thomas L. Saaty提出的，是一项基于数学和心理学的多准则决策方法。该方法可用于解决定性和定量因素相结合，特别是定性因素占据主导地位的决策问题，它整理并综合了人们的主观判断，是一种实用、灵活而且很简洁的客观方法。

1971年，Satty使用层次分析法为美国国防部研究所制定了所谓“应急计划”。之后的两年，他又使用该方法对电力在工业部门中的分配问题及苏丹运输问题进行了研究。1977年，Satty在第一届数据建模会议上发表了题为《无结构决策问题的建模—层次分析法》的一篇文章，正式将层次分析法带入大众的视野[[5](#_ENREF_5)]。从那时起，层次分析法便引起了人们的注意，得到了广泛的研究，它的理论也因而得到了不断的发展并逐步完善。近年来，学术界在层次分析法的应用方面也做了大量工作，发表了几百篇论文。现在层次分析法已在决策预报、方案排序、资源分配、冲突求解、计划制定及政策分析等众多领域得到应用。

#### 相关定义和定理

为便于下文叙述，先给出几个相关概念和定理的介绍。

**定义1 正互反矩阵**

若矩阵满足：

（1）;

（2）。

则把称为正互反矩阵。

**定义2 一致矩阵**

如果正互反矩阵A中的元素满足式（1.1）

|  |  |
| --- | --- |
|  | 式（1.1） |

则称矩阵A为一致矩阵。

**定理1**

如果矩阵A为正互反矩阵，则它的最大特征值必定为正实数，且对应特征向量的所有分量均是正实数，且其余特征值的模均严格小于。

**定理2**

若矩阵A为一致矩阵，则有：

（1）A必定为正互反矩阵；

（2）A的转置矩阵也为一致矩阵；

（3）A的任意两行、任意两列成比例，且比例因子大于0，所以；

（4）A的最大特征值，其中*n*为矩阵A的阶。A的其他特征值均等于0；

（5）若A的最大特征值对应的特征向量为，则，即有式（1.2）：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 式（1.2） |

**定理3**

*n*阶正互反矩阵*A*为一致矩阵当且仅当其最大特征值，且当正互反矩阵*A*非一致时，必有。

#### 层次分析法的步骤

在日常生活中，人们常常会碰到一些由多个因素构成的复杂系统，而且这些因素之间又相互关联、相互制约，更重要的是这些因素很多是定性的，不具有定量数据。没有定量数据，对这些系统进行分析就显得非常困难。层次分析法的诞生就是为了解决这些问题。

使用层次分析法来分析问题有固定的步骤进行建模、分析。以下对这些步骤进行详细介绍和说明。

**1.建立递阶层次结构**

这一步的关键在于要分解所需分析的问题，进而构建一个层次模型。一般来说，要使用层次分析法解决的问题都是比较复杂的，因此，在分析这些复杂的问题之前，首先要做的是把它们进行分解，得到若干个元素，并使其层次化。也就是说要把分解后的各个元素按它们之间的相互关系分成若干层次。

根据层次分析法的思想，问题的层次结构可分为三层，分别是最高层、中间层和最底层。最高层对中间层、中间层对最底层分别有支配作用。最高层为目标层，在这一层中，只有一个元素，即通过分析问题希望达到的结果或者目标。中间层有时也成为准则层，在这一层中，还可以包含若干个层次以表示分析问题时的准则。可以将中间层看成是为了达到目标所必须经过的中间环节。最底层又称为措施层或方案层，其中包括了为达到目标而使用的各种措施。

在层次分析法中，一个问题可以分成的层数是没有限制的，主要受其复杂程度等因素的影响。通常问题越复杂，分的层数越多，同样地问题需要分析得越详细，分的层数也要越多。不过，为了方便计算，层次分析法通常要求每个元素的影响因素不要超过9个。

**2.构建判断矩阵**

准则层中通常包含多个准则，而且这些准则对所期望达到的目标所起的作用是不同的。怎样对这些准则进行量化不是一件容易的事。除此以外，当多个影响因素进行比较的时候，常常会出现自相矛盾、顾此失彼的情况，原因在于影响因素太多而导致决策者考虑不周全。为进一步说明这一情况，以下给出一个例子。将一条长度为500米的绳子分割成n段，通过对这n段绳子的单独测量，我们很容易知道每一段的精确长度。但是如果在不知道每一段长度的情况下让你估计每一段占原来绳子长度的比例，那么估计你是很难给出这些精确的比值的，而且很可能发生的是你最后给出了一组自相矛盾的比值数据。

假设现有某元素E，它有n个影响因素，记为。现在的问题是怎样估计每个因素对E的影响。层次分析法中使用比较矩阵的方法来表示各个因素产生影响的大小，即对n个影响因素进行两两比较。设任意两个影响因素和，它们对E的影响的比值为，则与对E的影响的比值为。将所有比较结果构成的矩阵记为。相关实验结果表明的值用1~9标度来表示是合适的。表 1.5列出了1~9标度的含义。

表 1.5 层次分析法中1~9标度

|  |  |
| --- | --- |
| 标度 | 含义 |
| 1 | 表示两个因素相比，具有相同的重要性 |
| 3 | 表示两个因素相比，前者比后者稍显重要 |
| 5 | 表示两个因素相比，前者比后者明显重要 |
| 7 | 表示两个因素相比，前者比后者强烈重要 |
| 9 | 表示两个因素相比，前者比后者极端重要 |
| 2,4,6,8 | 表示上述相邻判断的中间值 |
| 倒数 | 若因素*i*与因素*j*的重要之比为，则*j*与*i*重要性之比为。 |

**3.层次单排序及一致性检验**

层次单排序就是对判断矩阵A的特征向量W作归一化处理，其作用在于对因素的重要性进行排序。如果在计算过程中发现矩阵A不一致的话，则说明该矩阵的构造是错误的。在使用层次分析法分析问题时，可以使用上述定理3来判断矩阵A是否为一致矩阵。如果等于*n*的话，则A为一致矩阵，反之则不是。因此，只有对判断矩阵作一致性检验，才能说明判断矩阵的构造是正确的。

可通过下述公式（1.2）和公式（1.3）计算CR的值来判断矩阵A是否通过一致性检验。

|  |  |
| --- | --- |
|  | 公式（1.2） |
|  | 公式（1.3） |

公式（1.2）中的*RI*即随机一致性指标，可通过查表得到，表 1.6列出了对，时的*RI*值。这些数据是使用随机构造500个样本矩阵的方法得到的。

表 1.6 RI值

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *RI* | 0 | 0 | 0.58 | 0.90 | 1.12 | 1.24 | 1.32 | 1.41 | 1.45 |

当时，表示所构造的判断矩阵通过了一致性检验。否则，必须重新构造判断矩阵。

**4.层次总排序及一致性检验**

经过层次单排序可以得出某个元素的诸多影响因素对该元素的影响大小关系。但是要达到最终目标，必须要知道各个元素在目标结果中的权重大小。因此，必须进行层次总排序对单排序得到的结果进行合并。同单排序一样，可使用相同的方法来检验层次总排序的一致性。这次的一致性检验是对各个层次的一致性作最终检验，从而防止其他层次中的非一致性的累积，保证最终分析结果的合理性。

假设问题被分成了两个层次，分别为A层和B层，其中A层为B层的上一层次，A层中共包含m个元素，分别记为，对应的层次总排序权重分别为，B层中共包含n个元素，分别记为，各个元素在关于的层次单排序中的权重分别为，并且当与无关时，。假设对应的层次总排序的权重分别为，则可按公式（1.4）对它们进行计算：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 公式（1.4） |

设B层中与对应的单排序一致性指标为，相应的平均随机一致性指标为，则可通过公式（1.5）得到B层的总排序一致性指标：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 公式（1.5） |

同理，当时，表示层次总排序通过了一致性检验，最终分析结果比较合理，应当予以接受。

### 层次分析法模型的确定

#### 确定指标

上文已详细讨论了影响视力残疾人进行路径选择时的6个影响因素。在实际情况中，路径导航系统的用户通常会要求系统根据设置的起点和终点的位置，综合考虑距离、时间、费用等因素给出一条最优路径。因此，本文针对视力残疾人的特殊需求，综合考虑距离、时间、出行不方便性等因素，即将这三者定为一级指标，把路径权值的六个主要影响因素（链接沿墙距离、链接自由距离、链接中的直角弯数、链接中的非直角弯数、链接中的楼梯数、链接中的电梯数）定为二级指标。

路径权值W为最高层，即目标层，中间层A=（距离，时间，出行无障碍性），最底层B=（链接沿墙距离，链接自由距离，链接中的直角弯数，链接中的非直角弯数，链接中的楼梯数，链接中的电梯数）。

#### 建立加权层次结构模型

根据上文对各种影响路径权值的因素的讨论，构建如图 1.1所示的加权层次结构体系图。



图 1.1 路径权值指标体系图

#### 构建判断矩阵

依据如图 1.1所示的路径权值指标体系图，构建A、B两个层次的判断矩阵。判断矩阵的值是根据对视力残疾人用户的调查结果，通过采用上文提出的两两比较并结合1~9标度的方法而设置的。

首先对路径的总加权目标W构造判断矩阵并计算权重（如表 1.7所示）。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表 1.7 判断矩阵*W-A*及相关权重   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | W |  |  |  | 权重 | |  | 1 | 2 | 1/6 | 0.1435 | |  | 1/2 | 1 | 1/9 | 0.0790 | |  | 6 | 9 | 1 | 0.7775 | |

计算权重的方法有和法、根法、特征根法等，本文选用合法进行计算。如对W-A判断矩阵的权重计算如下：

同理可得，

同理构造判断矩阵（表 1.8）、（表 1.9）、（表 1.10）并计算权值。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表 1.8 判断矩阵及相关权重   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | 权重 | |  | 1 | 1/2 | 6 | 5 | 3 | 8 | 0.2774 | |  | 2 | 1 | 9 | 9 | 6 | 9 | 0.4751 | |  | 1/6 | 1/9 | 1 | 1 | 1/2 | 2 | 0.0543 | |  | 1/5 | 1/9 | 1 | 1 | 1/2 | 3 | 0.0622 | |  | 1/3 | 1/6 | 2 | 2 | 1 | 3 | 0.0976 | |  | 1/8 | 1/9 | 1/2 | 1/3 | 1/3 | 1 | 0.0333 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表 1.9 判断矩阵及相关权重   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | 权重 | |  | 1 | 1/2 | 1/5 | 0.1222 | |  | 2 | 1 | 1/3 | 0.2299 | |  | 5 | 3 | 1 | 0.6479 | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表 1.10 判断矩阵及相关权重   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  |  |  |  | 权重 | |  | 1 | 1/5 | 1 | 1/6 | 1/9 | 1/8 | 0.0334 | |  | 5 | 1 | 5 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0.1625 | |  | 1 | 1/5 | 1 | 1/6 | 1/6 | 1/5 | 0.0398 | |  | 6 | 1 | 6 | 1 | 1/3 | 1/2 | 0.1643 | |  | 9 | 2 | 6 | 3 | 1 | 2 | 0.3528 | |  | 8 | 2 | 5 | 2 | 1/2 | 1 | 0.2472 | |

#### 层次单排序和一致性检验

对*W-A*进行一致性检验：

由，得：

由表 1.6可知，，代入得

所以，判断矩阵*W-A*通过一致性检验。

以下分别对判断矩阵、和进行一致性检验。

对判断矩阵：

对判断矩阵：

对判断矩阵：

所以判断矩阵、和都符合一致性原理。

#### 计算组合权值及一致性检验

上文求得了各个影响因素相对于上层指标因素的权重。以上层元素的权重为权数，计算对应本层各个因素的加权和，得出的结果即为该层因素的组合权重。经计算，各因素的组合权重及层次总排序如表 1.11所示。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 表 1.11 各因素组合权重及总排序   |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | 因素 |  |  |  | 组合权重 | 总排序 | |  | 0.2774 | 0.1222 | 0.0334 | 0.0754 | 5 | |  | 0.4751 | 0.2299 | 0.1625 | 0.2126 | 2 | |  | 0.0543 | 0 | 0.0398 | 0.0388 | 6 | |  | 0.0622 | 0 | 0.1643 | 0.1367 | 4 | |  | 0.0976 | 0.6479 | 0.3528 | 0.3395 | 1 | |  | 0.0333 | 0 | 0.2472 | 0.1970 | 3 | |

做总排序的一致性检验：

所以总排序的一致性检验通过。

#### 路径权值的计算

经过以上的讨论，路径权值的各个影响因素的组合权值及总排序结果均已通过计算得出。假设影响路径权值的各影响因素经无量纲转化后的值分别为，则可按公式（1.6）计算路径的总权值。

|  |  |
| --- | --- |
|  | 公式（1.6） |

## 基于Dijkstra算法的最优路径

## 本章小结

参考文献

[1] 赵春燕, 王国华, 周军. 支持城市多种交通方式的最佳路径分析[J]. 测绘信息与工程, 2009, 34(4): 8-10.

[2] J. 城市道路和建筑物无障碍设计规范 [S][D]. 2001.

[3] 武舫, 王家耀, 熊伟, et al. 基于公路普查数据面向最短时间的最优路径分析研究[J]. 河南理工大学学报: 自然科学版, 2006, 25(3): 218-221.

[4] 段莉琼, 刘立国. 基于车辆导航的路径分析与应用[J]. 地理信息世界, 2005, 4: 44-47.

[5] 张静. 面向路径规划的导航路网数据模型研究[D]. 中国矿业大学 (北京), 2009.