

Almacenamiento de memoria en redes de Hopfield

Julián López Carballal, Jorge García Beni, Rubén de San Juan Morales, Fernando García Sánchez y José Luis Miranda Mora

Red de Hopfield

- ▶ Red formada por N neuronas.
- ▶ Estados $\sigma_i(t) = \pm 1$.
- ▶ Evolución temporal discreta con pasos Δt .
- ▶ Interaccionan con pesos J_{ij} .

$$\Phi_i(t) = \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j$$

- ▶ Su fin: almacenamiento y reproducción de patrones.

$$\mathcal{P}_i^\mu = \pm 1, i \in [1, N], \mu \in [1, K] \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_i^\nu = \delta^{\mu\nu}$$

Patrón reproducido si $\sigma_i(t) = \sigma_i(t + \Delta t) = \mathcal{P}_i^\mu$.

Red de Hopfield

Analogía con el modelo de Ising

- ▶ Red de Hopfield \sim Modelo de Ising para sistemas magnéticos.
- ▶ Hamiltoniano \equiv Ising ($\vec{B} = 0$).

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

imponemos $J_{ij} = J_{ji}$.

Red de Hopfield

- ▶ Solapamiento: cuantificación de la coincidencia con el patrón.

$$m^\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_i \mathcal{P}_i^\mu \sigma_i(t)$$

valor máximo $m^\mu = 1$ cuando el patrón es replicado.

- ▶ Elegimos los pesos:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^K \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_j^\mu$$

relacionan espines con el patrón.

Generalización del modelo de Hopfield

- ▶ Hasta ahora hemos tratado un sistema sin ruido.
- ▶ En un sistema con ruido se pueden llegar a estados fuera de la dinámica que tratamos.
- ▶ Introducimos el ruido en forma de una temperatura efectiva T .
- ▶ Adopta la dinámica de espines de Glauber. La distribución se relaja a la de Gibbs:

$$P(\{\sigma\}) \propto e^{-H(\{\sigma\})/T}$$

este es el **modelo de Hopfield generalizado**.

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- ▶ Tomamos unidades $k_B = 1$.
- ▶ Densidad de energía libre:

$$f(T) = -\frac{T}{N} \langle \log Z \rangle_{\mathcal{P}}$$

- ▶ Función de partición:

$$Z = \left(\frac{N}{T}\right)^{\frac{\kappa}{2}} e^{-\frac{\kappa}{2T}} \int \prod_{\mu} \frac{dm^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{N\vec{m}^2}{2T} + \sum_i \log \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{p}_i}{T} \right) \right] \right\}$$

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- ▶ Si K es finito:

$$-\frac{T \ln Z}{N} = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - \frac{T}{N} \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right]$$

- ▶ El parámetro de orden viene dado por la ecuación $\partial \ln Z / \partial m^\mu = 0$:

$$\vec{m} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathcal{P}}_i \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$$

- ▶ En LT: $(1/N) \sum_i \rightarrow$ promedios sobre $\{\vec{\mathcal{P}}_i\}$.

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- Ecuaciones de campo medio:

$$f(T) = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - T \left\langle \log \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right] \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

$$\vec{m} = \left\langle \vec{\mathcal{P}}_i \cdot \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

- Promedio térmico de los espines: $\langle \sigma_i \rangle = \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$.

$$m^\mu = \langle \mathcal{P}_i^\mu \langle \sigma_i \rangle \rangle_{\mathcal{P}}$$

es el solapamiento. Similar a la magnetización del modelo de Ising $\tilde{m} = \langle \sigma_i \rangle$.

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Distribución de los patrones:

$$P(\{\mathcal{P}_i^\mu\}) = \prod_{\mu,i} \frac{1}{2} [\delta(\mathcal{P}_i^\mu + 1) + \delta(\mathcal{P}_i^\mu - 1)]$$

- Desarrollo en potencias de \vec{m} de las ecuaciones de campo medio:

$$f = -T \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$
$$m^\mu = \beta m^\mu + \frac{2}{3}\beta^3(m^\mu)^3 - \beta^3 m^\mu \vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Distribución de los patrones:

$$P(\{\mathcal{P}_i^\mu\}) = \prod_{\mu,i} \frac{1}{2} [\delta(\mathcal{P}_i^\mu + 1) + \delta(\mathcal{P}_i^\mu - 1)]$$

- Desarrollo en potencias de \vec{m} de las ecuaciones de campo medio:

$$f = -T \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$m^\mu = \beta m^\mu + \frac{2}{3}\beta^3(m^\mu)^3 - \beta^3 m^\mu \vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$\beta \equiv 1/T.$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Para $T = 1$, $f = -T \log 2$ y $m^\mu \approx (\beta - \beta^3 \vec{m}^2) m^\mu \Rightarrow \vec{m} = 0$.
- ▶ Se mantiene para $T > 1$.
- ▶ Por debajo de $T_c = 1$: aparecen soluciones $m^\mu \neq 0$. Definimos la dimensionalidad de \vec{m} , n .
- ▶ Alterar el signo o el orden de las n componentes no nulas no altera las soluciones.

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Caso $n = 1$.
- ▶ Suponemos $m^1 = m \neq 0$ y $m^\mu = 0 \forall \mu > 1$.

$$f = \frac{1}{2}m^2 - T \log [2 \cosh(\beta m)]$$

$$m = \tanh(\beta m)$$

- ▶ Se corresponden a un estado dónde:

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathcal{P}_i^1 \tanh(\beta m)$$

Termodinámicamente equivalente al estado ferromagnético del modelo de Ising. Existen $2K$ de estos estados, los estados de Mattis.

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Los estados de Mattis son mínimos globales de la energía libre
 \Rightarrow estados estables.
- ▶ Calculamos en $T = 0$ para $n = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh mx &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log(2 \cosh mx) &= 1\end{aligned}$$

$$m_{(n=1)}(T = 0) = 1$$

$$f_{(n=1)}(T = 0) = \frac{1}{2}$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- En campo medio:

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \log \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right] = \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) = \operatorname{sgn}(\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i)$$

$$\vec{m}_{\text{CM}}(T=0) = \left\langle \vec{\mathcal{P}}_i \operatorname{sgn}(\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i) \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

$$f_{\text{CM}}(T=0) = \frac{1}{2} \vec{m}^2$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Cota $\vec{m}^2 \leq 1$.

$$\vec{m}^2 = \left\langle \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i \right\rangle_{\mathcal{P}} \leq \left\langle \left(\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i \right)^2 \right\rangle_{\mathcal{P}}^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{\mu=1}^n (m^{\mu})^2 \left\langle (\mathcal{P}_i^{\mu})^2 \right\rangle_{\mathcal{P}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{m}^2 \leq (\vec{m}^2)^{1/2} = |\vec{m}| \Rightarrow \vec{m}^2 \leq 1$$

- La igualdad sólo se satisface cuando $n = 1$ (estados de Mattis) $\rightarrow f_{\text{CM}}(T = 0) = f_{(n=1)}(T = 0) = 1/2$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Los estados de Mattis son mínimos globales de f (son estables) para $0 \leq T \leq 1$.
- ▶ Se corresponden a la reproducción de un patrón.
- ▶ Existen estados metaestables, soluciones con $n > 1$, que serán mínimos locales de la energía libre.

Simulación de Montecarlo

Metodología

- ▶ Método aleatorio \longrightarrow Algoritmo de Metrópolis.
- ▶ Configuración inicial de espines (neuronas) aleatoria $\{S_{in}\}$.
- ▶ A cada paso (*step*) se voltea un spin aleatorio de la red, calculando la nueva energía $E(\{S_{new}\})$.

$$\Delta E = E(\{S_{new}\}) - E(\{S_{in}\})$$

- ▶ Se acepta el paso con probabilidad:

$$P_{\text{change}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta E \leq 0 \\ e^{-\Delta E/T} & \text{if } \Delta E > 0 \end{cases}$$

- ▶ Para $T = 0$ sólo se aceptan pasos con $\Delta E \leq 0$

Simulación de Montecarlo

Metodología

- ▶ Se tomarán previamente K estados de memoria $\{\mathcal{P}_i^\mu\}$ de dimensión N (N neuronas).
- ▶ Las constantes de acoplo se construirán como se ha visto anteriormente:

$$J_{ij} = N^{-1} \sum_{\mu=1}^K \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_j^\mu$$

- ▶ La energía vendrá dada por:

$$E(\{S\}) = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

Simulación de Montecarlo

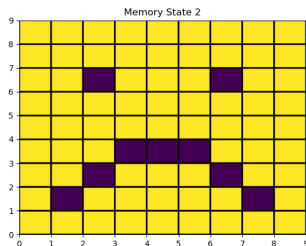
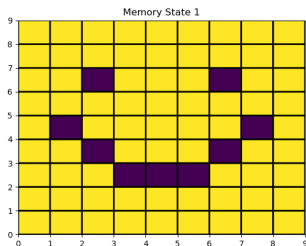
Objetivos

- ▶ Comprobar la existencia de $2K$ estados de memoria (estados de Mattis).
- ▶ Estudiar el comportamiento de la red al aumentar T .
- ▶ Identificar la transición de fase cerca de $T_c = 1$.
- ▶ Intentar encontrar estados metaestables (asimétricos).

Simulación de Montecarlo

Estados de Mattis

- ▶ Sistema sencillo, red cuadrada 9×9 ($N = 81$).
- ▶ Dos estados de memoria: *cara feliz* y *cara triste*.

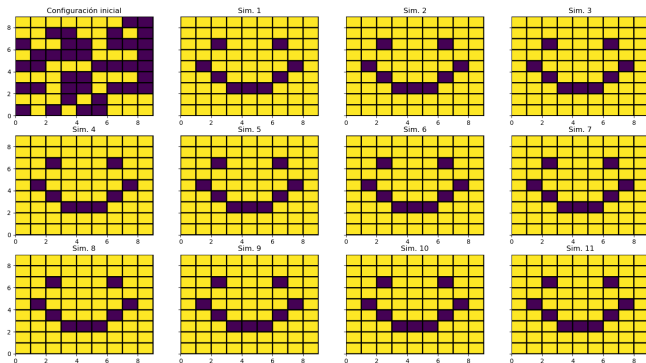


- ▶ Se ejecutarán 11 simulaciones desde el mismo estado inicial aleatorio para distintos valores de T . El número de steps será siempre 100000.

Simulación de Montecarlo

Estados de Mattis

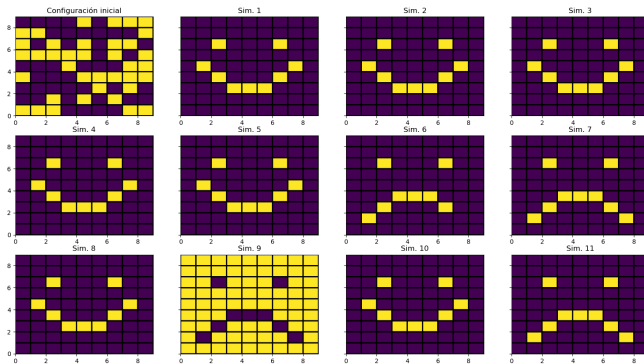
Para $T = 0$



Simulación de Montecarlo

Estados de Mattis

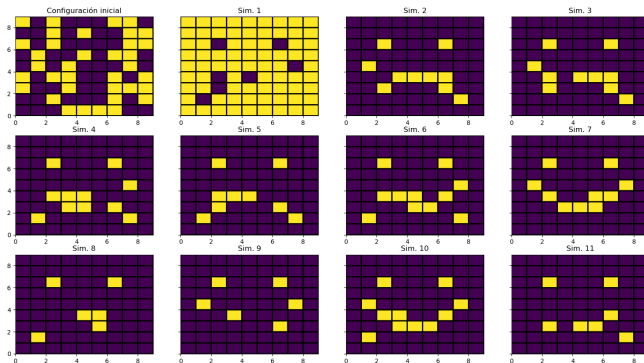
Para $T = 0,2$



Simulación de Montecarlo

Estados de Mattis

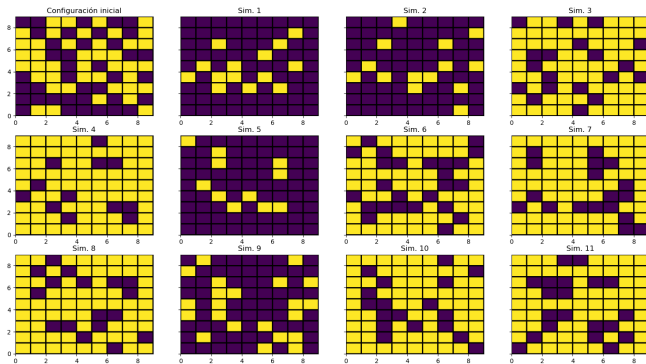
Para $T = 0,5$



Simulación de Montecarlo

Estados de Mattis

Para $T = 1,2$



Simulación de Montecarlo

Transición de fase

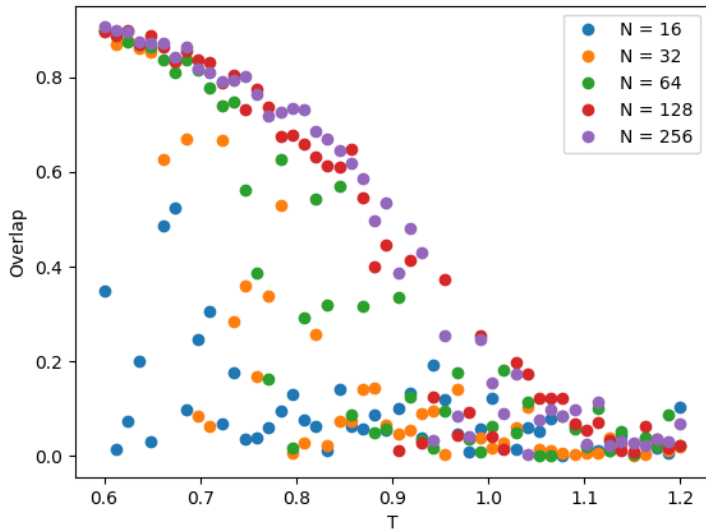
- ▶ Comportamiento cerca de la temperatura crítica $T_c = 1$.
- ▶ Parámetro de orden \longrightarrow *Overlap*

$$m^\mu = N^{-1} \left| \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle \mathcal{P}_i^\mu \right|$$

- ▶ Se utilizará sólo un estado de memoria para distintos tamaños de la red.

Simulación de Montecarlo

Transición de fase



Simulación de Montecarlo

Transición de fase

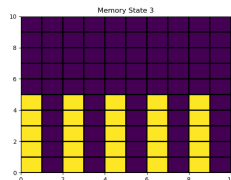
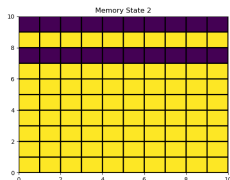
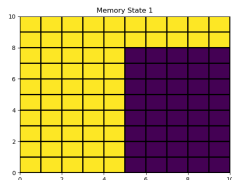
Observaciones:

- ▶ Difícil encontrar puntos donde se haya alcanzado el LT.
- ▶ Cualitativamente \longrightarrow Separación entre dos regiones: ordenada y caótica (no se guarda memoria).
- ▶ Hipótesis \longrightarrow No analiticidad en $T = 1$ en el LT \longrightarrow Transición de segundo orden.

Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

- ▶ Red cuadrada 10×10 ($N = 100$).
- ▶ Tres estados de memoria:



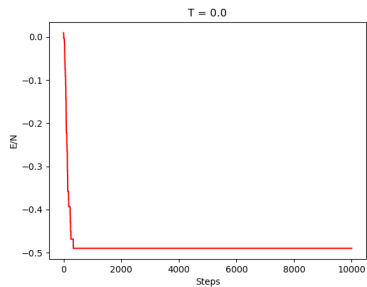
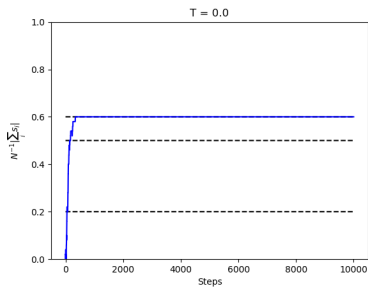
- ▶ Para cada simulación se representa la evolución del módulo de la *magnetización* del sistema, así como su energía.

$$|M|(\{S\}) = N^{-1} \left| \sum_{i=1}^N S_i \right|$$

Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

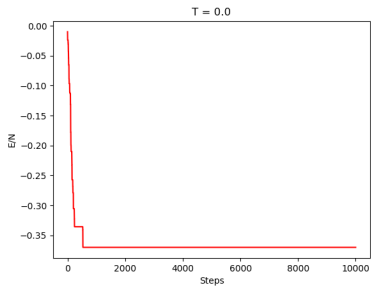
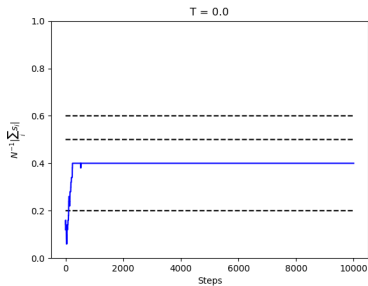
Ejemplo para $T = 0$.



Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

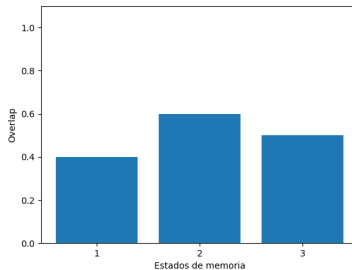
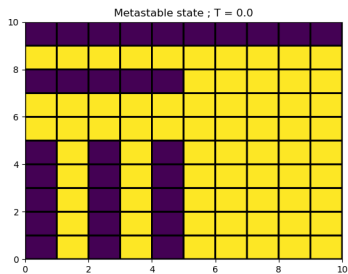
Estado metaestable para $T = 0$.



Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

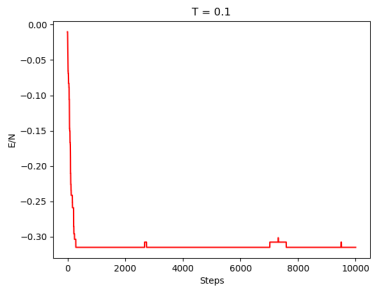
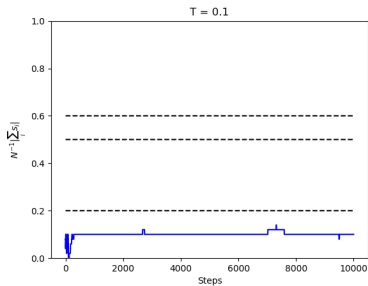
Estado metaestable para $T = 0$.



Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

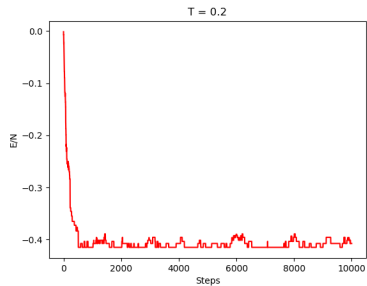
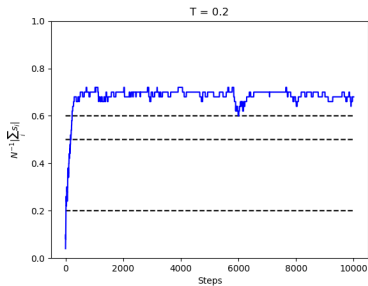
Estado metaestable para $T = 0,1$.



Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

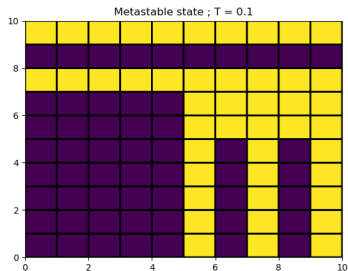
Estado metaestable para $T = 0,2$.



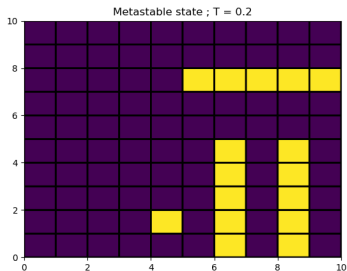
Simulación de Montecarlo

Estados metaestables

Estado metaestable para
 $T = 0,1$.



Estado metaestable para
 $T = 0,2$.



Ecuación de Langevin

Formulación continua

- ▶ Necesitamos que $\sigma_i \rightarrow \pm 1$ conforme $t \rightarrow \infty$
- ▶ Incluimos fluctuaciones térmicas con $\xi_i(t)$
- ▶ Fluctuaciones independientes $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2T \delta(t - t') \delta_{ij}$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = -\lambda(\sigma_i^2 - 1)\sigma_i + \sum_j J_{ij}\sigma_j + h_i\sigma_i + \xi_i(t)$$

Ecuación de Langevin

Formulación discreta

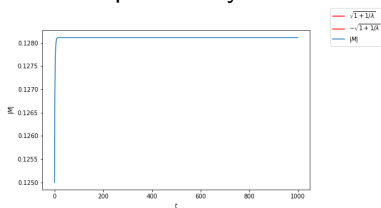
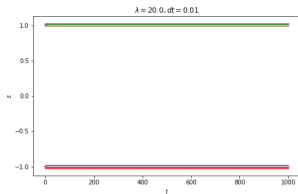
- Diferencial estocástico $\mu(dW_i) = 0, \sigma^2(dW_i) = dt$

$$d\sigma = \left(-\lambda(\sigma_i^2 - 1)\sigma_i + \sum_j J_{ij}\sigma_j + h_i\sigma_i \right) dt + \sqrt{2T}dW_i$$

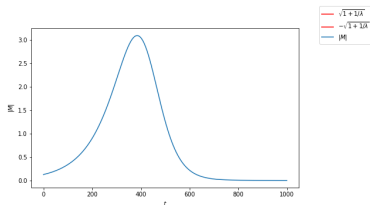
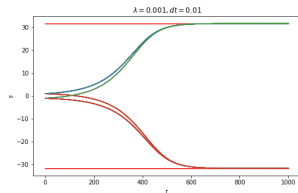
Ecuación de Langevin

Valor de λ

- Valores demasiado grandes de λ hacen que no haya evolución



- Valores demasiado grandes de λ hacen no se acerque a ± 1



Ecuación de Langevin

Valor de λ

- Valores cercanos a 1 dan una evolución razonable

