

# Almacenamiento de memoria en redes de Hopfield

Julián López Carballal, Jorge García Beni, Rubén de San Juan Morales, Fernando García Sánchez y José Luis Miranda Mora

# Red de Hopfield

- ▶ Red formada por  $N$  neuronas.
- ▶ Estados  $\sigma_i(t) = \pm 1$ .
- ▶ Evolución temporal discreta con pasos  $\Delta t$ .
- ▶ Interaccionan con pesos  $J_{ij}$ .

$$\Phi_i(t) = \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j$$

- ▶ Su fin: almacenamiento y reproducción de patrones.

$$\mathcal{P}_i^\mu = \pm 1, i \in [1, N], \mu \in [1, K] \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_i^\nu = \delta^{\mu\nu}$$

Patrón reproducido si  $\sigma_i(t) = \sigma_i(t + \Delta t) = \mathcal{P}_i^\mu$ .

# Red de Hopfield

Analogía con el modelo de Ising

- ▶ Red de Hopfield  $\sim$  Modelo de Ising para sistemas magnéticos.
- ▶ Hamiltoniano  $\equiv$  Ising ( $\vec{B} = 0$ ).

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

imponemos  $J_{ij} = J_{ji}$ .

# Red de Hopfield

- ▶ Solapamiento: cuantificación de la coincidencia con el patrón.

$$m^\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_i \mathcal{P}_i^\mu \sigma_i(t)$$

valor máximo  $m^\mu = 1$  cuando el patrón es replicado.

- ▶ Elegimos los pesos:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^K \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_j^\mu$$

relacionan espines con el patrón.

# Generalización del modelo de Hopfield

- ▶ Hasta ahora hemos tratado un sistema sin ruido.
- ▶ En un sistema con ruido se pueden llegar a estados fuera de la dinámica que tratamos.
- ▶ Introducimos el ruido en forma de una temperatura efectiva  $T$ .
- ▶ Adopta la dinámica de espines de Glauber. La distribución se relaja a la de Gibbs:

$$P(\{\sigma\}) \propto e^{-H(\{\sigma\})/T}$$

este es el **modelo de Hopfield generalizado**.

# Generalización del modelo de Hopfield

## Teoría de campo medio

- ▶ Tomamos unidades  $k_B = 1$ .
- ▶ Densidad de energía libre:

$$f(T) = -\frac{T}{N} \langle \log Z \rangle_{\mathcal{P}}$$

- ▶ Función de partición:

$$Z = \left(\frac{N}{T}\right)^{\frac{K}{2}} e^{-\frac{K}{2T}} \int \prod_{\mu} \frac{dm^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{N\vec{m}^2}{2T} + \sum_i \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{p}_i}{T} \right) \right] \right\}$$

# Generalización del modelo de Hopfield

## Teoría de campo medio

- ▶ Si  $K$  es finito:

$$-\frac{T \ln Z}{N} = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - \frac{T}{N} \sum_i \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right]$$

- ▶ El parámetro de orden viene dado por la ecuación  $\partial \ln Z / \partial m^\mu = 0$ :

$$\vec{m} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathcal{P}}_i \tanh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$$

- ▶ En LT:  $(1/N) \sum_i \rightarrow$  promedios sobre  $\{\vec{\mathcal{P}}_i\}$ .

# Generalización del modelo de Hopfield

## Teoría de campo medio

- Ecuaciones de campo medio:

$$f(T) = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - T \left\langle \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right] \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

$$\vec{m} = \left\langle \vec{\mathcal{P}}_i \cdot \tanh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

- Promedio térmico de los espines:  $\langle \sigma_i \rangle = \tanh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$ .

$$m^\mu = \langle \mathcal{P}_i^\mu \langle \sigma_i \rangle \rangle_{\mathcal{P}}$$

es el solapamiento. Similar a la magnetización del modelo de Ising  $\tilde{m} = \langle \sigma_i \rangle$ .



# Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Distribución de los patrones:

$$P(\{\mathcal{P}_i^\mu\}) = \prod_{\mu,i} \frac{1}{2} [\delta(\mathcal{P}_i^\mu + 1) + \delta(\mathcal{P}_i^\mu - 1)]$$

- Desarrollo en potencias de  $\vec{m}$  de las ecuaciones de campo medio:

$$f = -T \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$m^\mu = \beta m^\mu + \frac{2}{3}\beta^3(m^\mu)^3 - \beta^3 m^\mu \vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$\beta \equiv 1/T.$$

# Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Para  $T = 1$ ,  $f = -T \log 2$  y  $m^\mu \approx (\beta - \beta^3 \vec{m}^2) m^\mu \Rightarrow \vec{m} = 0$ .
- ▶ Se mantiene para  $T > 1$ .
- ▶ Por debajo de  $T_c = 1$ : aparecen soluciones  $m^\mu \neq 0$ . Definimos la dimensionalidad de  $\vec{m}$ ,  $n$ .
- ▶ Alterar el signo o el orden de las  $n$  componentes no nulas no altera las soluciones.

# Generalización del modelo de Hopfield

## Estados de Mattis

- ▶ Caso  $n = 1$ .
- ▶ Suponemos  $m^1 = m \neq 0$  y  $m^\mu = 0 \ \forall \mu > 1$ .

$$f = \frac{1}{2}m^2 - T \log [2 \cosh(\beta m)]$$

$$m = \tanh(\beta m)$$

- ▶ Se corresponden a un estado dónde:

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathcal{P}_i^1 \tanh(\beta m)$$

Termodinámicamente equivalente al estado ferromagnético del modelo de Ising. Existen  $2K$  de estos estados, los estados de Mattis.

# Generalización del modelo de Hopfield

## Estados de Mattis

- ▶ Los estados de Mattis son mínimos globales de la energía libre  $\Rightarrow$  estados estables.
- ▶ Calculamos en  $T = 0$  para  $n = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh ax = \operatorname{sgn} a$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log (2 \cosh ax) = \pm |a|, \operatorname{sgn} a = \pm 1$$

$$m_{(n=1)}(T = 0) = \pm 1$$

$$f_{(n=1)}(T = 0) = \frac{1}{2}$$

# Generalización del modelo de Hopfield

## Estados de Mattis

- En campo medio:

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \log \left[ 2 \cosh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right] = \pm |\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i|, \quad \text{sgn} \left( \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i \right) = \pm 1$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} \tanh \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) = \text{sgn} \left( \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i \right)$$

$$\vec{m}_{\text{CM}}(T = 0) = \left\langle \vec{\mathcal{P}}_i \text{sgn} \left( \vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i \right) \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

$$f_{\text{CM}}(T = 0) = \frac{1}{2} \vec{m}^2$$

# Generalización del modelo de Hopfield

## Estados de Mattis

- ▶ Cota:  $\vec{m}^2 \leq 1$ .
- ▶ La igualdad sólo se satisface cuando  $n = 1$  (estados de Mattis)  $\rightarrow f_{\text{CM}}(T = 0) = f_{(n=1)}(T = 0) = 1/2$

# Generalización del modelo de Hopfield

## Estados de Mattis

- ▶ Los estados de Mattis son mínimos globales de  $f$  (son estables) para  $0 \leq T \leq 1$ .
- ▶ Se corresponden a la reproducción de un patrón.
- ▶ Existen estados metaestables, soluciones con  $n > 1$ , que serán mínimos locales de la energía libre.

# Simulación de Montecarlo

## Metodología

- ▶ Método aleatorio  $\rightarrow$  Algoritmo de Metrópolis.
- ▶ Configuración inicial de espines (neuronas) aleatoria  $\{S_{in}\}$ .
- ▶ A cada paso (*step*) se voltea un spin aleatorio de la red, calculando la nueva energía  $E(\{S_{new}\})$ .

$$\Delta E = E(\{S_{new}\}) - E(\{S_{in}\})$$

- ▶ Se acepta el paso con probabilidad:

$$P_{\text{change}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta E \leq 0 \\ e^{-\Delta E/T} & \text{if } \Delta E > 0 \end{cases}$$

- ▶ Para  $T = 0$  sólo se aceptan pasos con  $\Delta E \leq 0$



# Simulación de Montecarlo

## Metodología

- ▶ Se tomarán previamente  $K$  estados de memoria  $\{\mathcal{P}_i^\mu\}$  de dimensión  $N$  ( $N$  neuronas).
- ▶ Las constantes de acoplo se construirán como se ha visto anteriormente:

$$J_{ij} = N^{-1} \sum_{\mu=1}^K \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_j^\mu$$

- ▶ La energía vendrá dada por:

$$E(\{S\}) = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j$$

# Simulación de Montecarlo

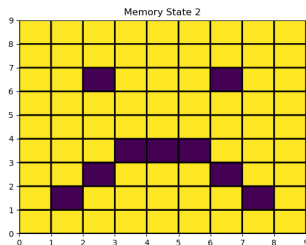
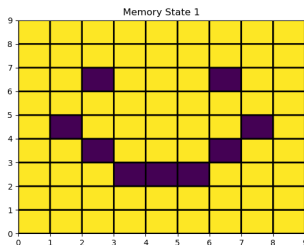
## Objetivos

- ▶ Comprobar la existencia de  $2K$  estados de memoria (estados de Mattis).
- ▶ Estudiar el comportamiento de la red al aumentar  $T$ .
- ▶ Identificar la transición de fase cerca de  $T_c = 1$ .
- ▶ Intentar encontrar estados metaestables (asimétricos).

# Simulación de Montecarlo

## Estados de Mattis

- ▶ Sistema sencillo, red cuadrada  $9 \times 9$  ( $N = 81$ ).
- ▶ Dos estados de memoria: *cara feliz* y *cara triste*.

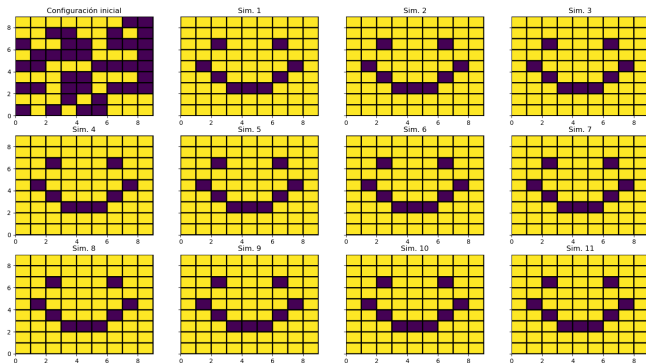


- ▶ Se ejecutarán 11 simulaciones desde el mismo estado inicial aleatorio para distintos valores de  $T$ . El número de steps será siempre 100000.

# Simulación de Montecarlo

## Estados de Mattis

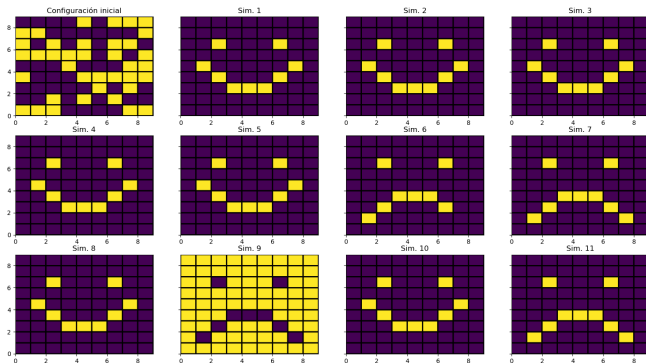
Para  $T = 0$



# Simulación de Montecarlo

## Estados de Mattis

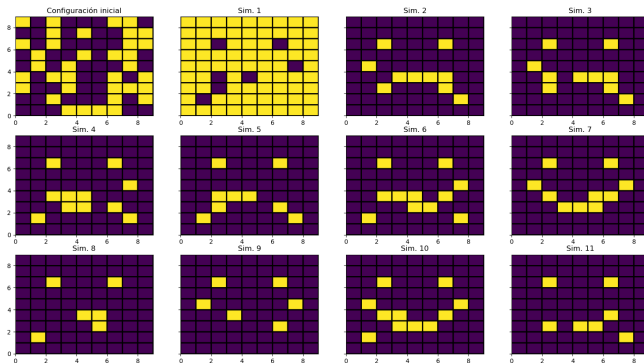
Para  $T = 0.2$



# Simulación de Montecarlo

## Estados de Mattis

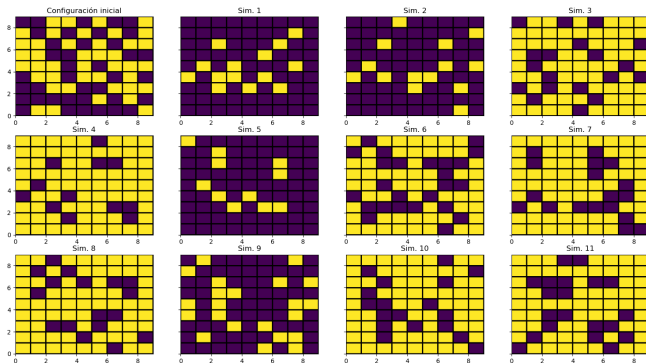
Para  $T = 0.5$



# Simulación de Montecarlo

## Estados de Mattis

Para  $T = 1.2$



# Simulación de Montecarlo

## Transición de fase

- ▶ Comportamiento cerca de la temperatura crítica  $T_c = 1$ .
- ▶ Parámetro de orden  $\rightarrow$  *Overlap*

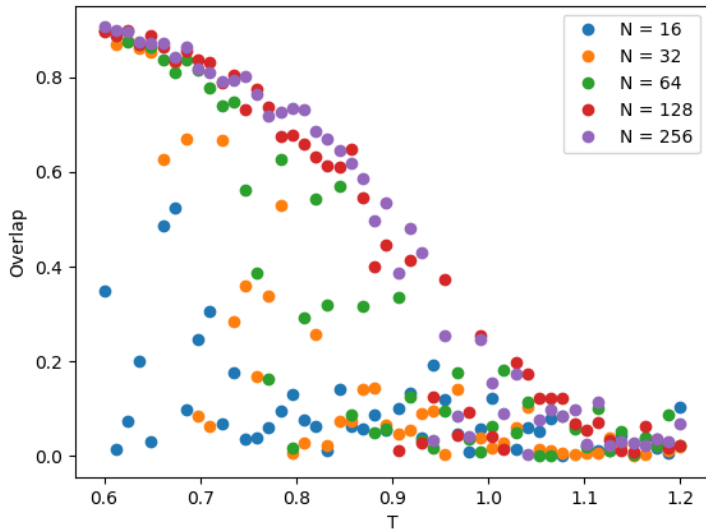
$$m^\mu = N^{-1} \left| \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle \mathcal{P}_i^\mu \right|$$

- ▶ Se utilizará sólo un estado de memoria para distintos tamaños de la red.



# Simulación de Montecarlo

## Transición de fase



# Simulación de Montecarlo

## Transición de fase

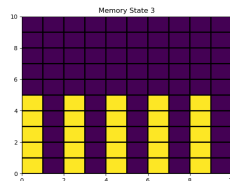
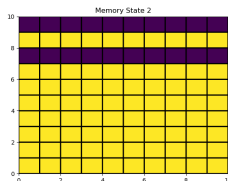
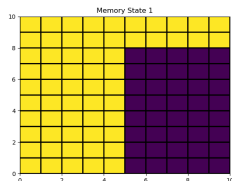
### Observaciones:

- ▶ Difícil encontrar puntos donde se haya alcanzado el LT.
- ▶ Cualitativamente  $\longrightarrow$  Separación entre dos regiones: ordenada y caótica (no se guarda memoria).
- ▶ Hipótesis  $\longrightarrow$  No analiticidad en  $T = 1$  en el LT  $\longrightarrow$  Transición de segundo orden.

# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

- ▶ Red cuadrada  $10 \times 10$  ( $N = 100$ ).
- ▶ Tres estados de memoria:



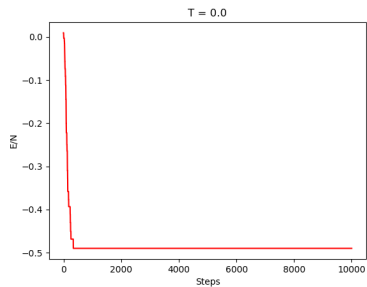
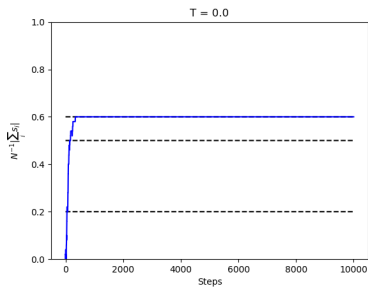
- ▶ Para cada simulación se representa la evolución del módulo de la *magnetización* del sistema, así como su energía.

$$|M|(\{S\}) = N^{-1} \left| \sum_{i=1}^N S_i \right|$$

# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

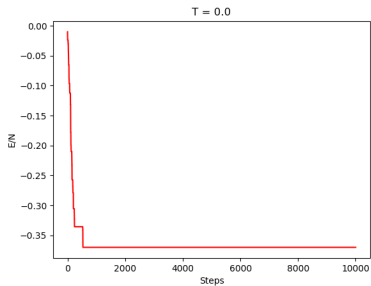
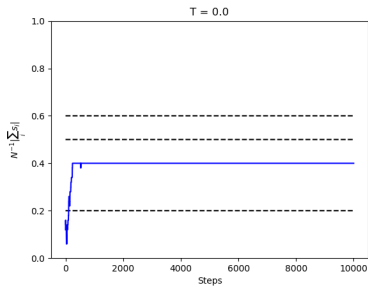
Ejemplo para  $T = 0$ .



# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

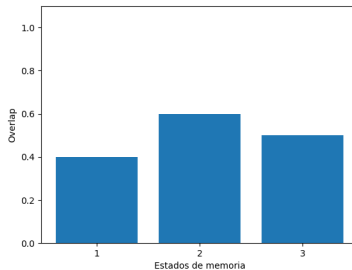
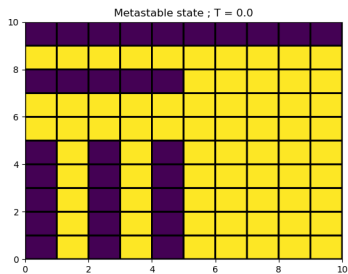
Estado metaestable para  $T = 0$ .



# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

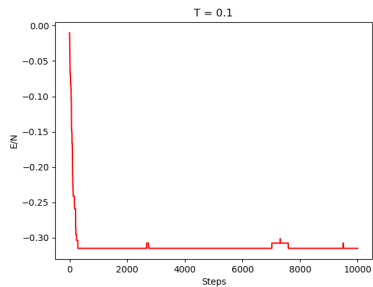
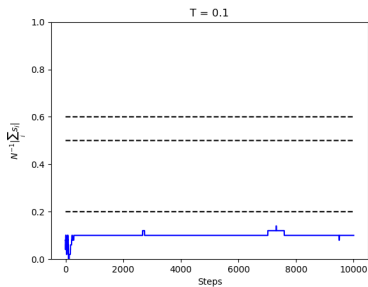
Estado metaestable para  $T = 0$ .



# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

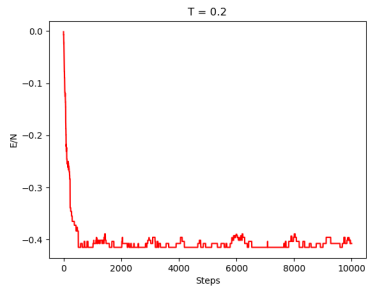
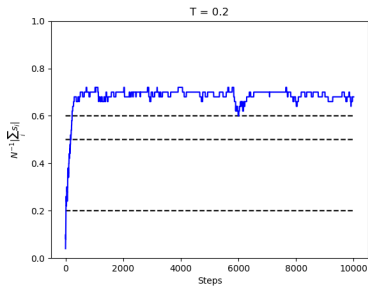
Estado metaestable para  $T = 0.1$ .



# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

Estado metaestable para  $T = 0.2$ .

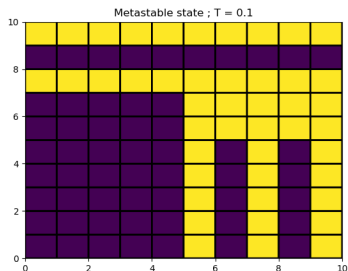




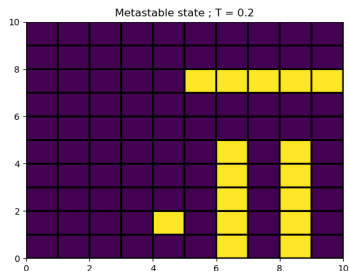
# Simulación de Montecarlo

## Estados metaestables

Estado metaestable para  
 $T = 0.1$ .



Estado metaestable para  
 $T = 0.2$ .



# Ecuación de Langevin

## Formulación continua

- ▶ Necesitamos que  $\sigma_i \rightarrow \pm 1$  conforme  $t \rightarrow \infty$
- ▶ Incluimos fluctuaciones térmicas con  $\xi_i(t)$
- ▶ Fluctuaciones independientes  $\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2T \delta(t - t') \delta_{ij}$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = -\lambda(\sigma_i^2 - 1)\sigma_i + \sum_j J_{ij}\sigma_j + h_i\sigma_i + \xi_i(t)$$

# Ecuación de Langevin

## Formulación discreta

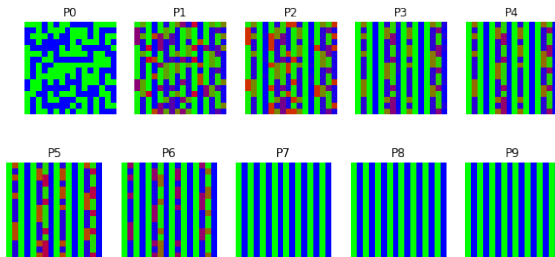
- Diferencial estocástico  $\mu(dW_i) = 0, \sigma^2(dW_i) = dt$

$$d\sigma = \left( -\lambda(\sigma_i^2 - 1)\sigma_i + \sum_j J_{ij}\sigma_j + h_i\sigma_i \right) dt + \sqrt{2T}dW_i$$

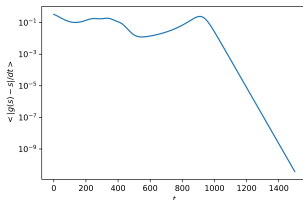
# Ecuación de Langevin

## Resultados

- ▶ Invertimos  $N/m$  espines ( $m \leq 2$ )
- ▶ El sistema evoluciona a los estados “guardados” en  $J_{ij}$

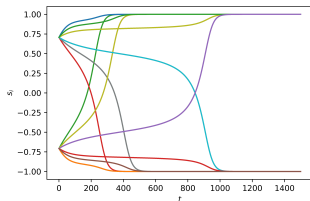


- ▶  $g(\sigma(t)) - \sigma(t) \rightarrow 0$  (condicion estacionaria)



## Ecuación de Langevin

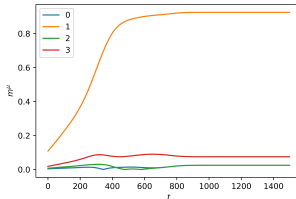
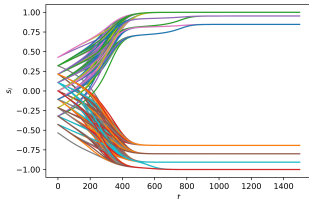
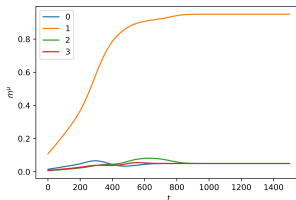
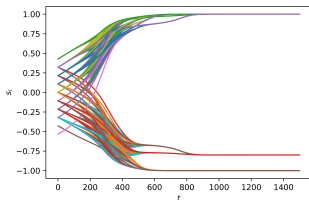
- ▶ Los espines convergen a  $\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}}$  (gráficas normalizadas)
  - ▶ Los solapamientos tienden a 1 para el patrón



# Ecuación de Langevin

¿Estados metaestables?

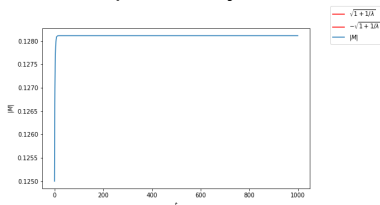
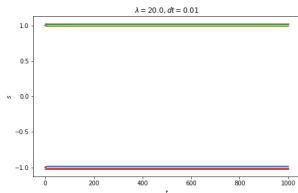
- ▶ Los estados se desvían de  $\pm 1$ . Promedio sobre 10 realizaciones
- ▶ Aparecen múltiples solapamientos



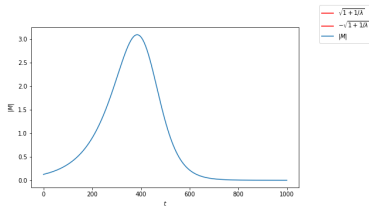
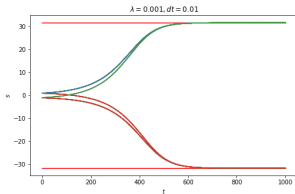
# Ecuación de Langevin

Valor de  $\lambda$

- Valores demasiado grandes de  $\lambda$  hacen que no haya evolución



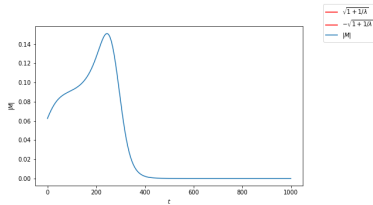
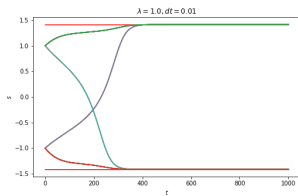
- Valores demasiado grandes de  $\lambda$  hacen no se acerque a  $\pm 1$



# Ecuación de Langevin

Valor de  $\lambda$

- Valores cercanos a 1 dan una evolución razonable

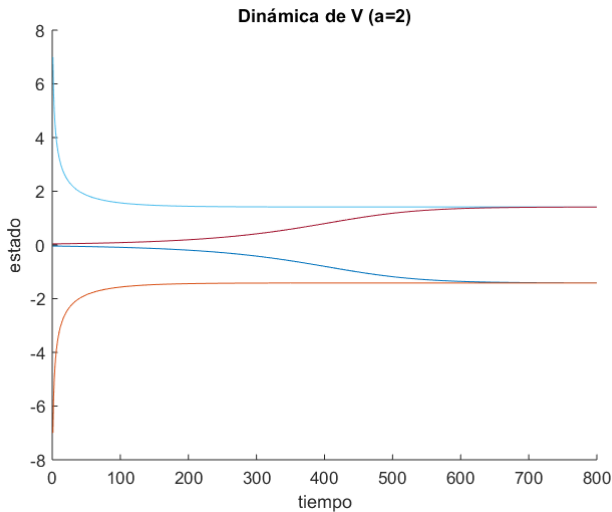




# Ecuación de Langevin

## Elección de $V$

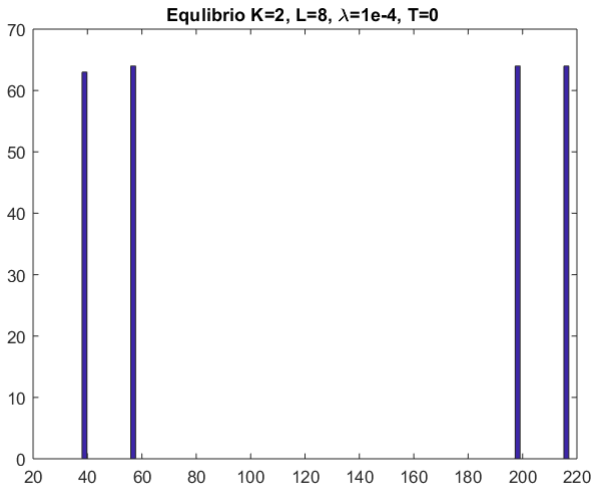
- $V$  se elige por las condiciones de convergencia



# Ecuación de Langevin

## Almacenamiento de patrones

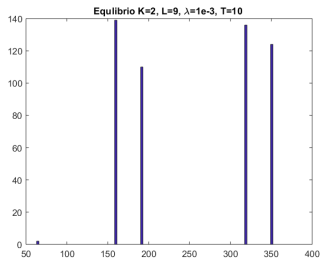
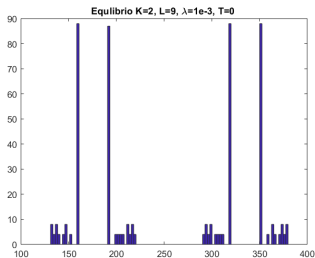
Recorremos todos los estados iniciales



# Ecuación de Langevin

## Almacenamiento de patrones

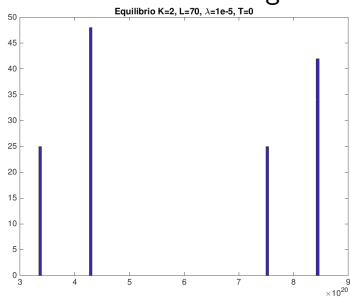
Recorremos todos los estados iniciales



# Ecuación de Langevin

## Almacenamiento de patrones

### Cálculo en redes más grandes



# Ecuación de Langevin

## Almacenamiento de patrones

### Cálculo en redes más grandes

