

Almacenamiento de memoria en redes de Hopfield

Julián López Carballal, Jorge García Beni, Rubén de San Juan Morales, Fernando García Sánchez y José Luis Miranda Mora

Red de Hopfield

- ▶ Red formada por N neuronas.
- ▶ Estados $\sigma_i(t) = \pm 1$.
- ▶ Evolución temporal discreta con pasos Δt .
- ▶ Interaccionan con pesos J_{ij} .

$$\Phi_i(t) = \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j$$

- ▶ Su fin: almacenamiento y reproducción de patrones.

$$\mathcal{P}_i^\mu = \pm 1, i \in [1, N], \mu \in [1, K] \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_i^\nu = \delta^{\mu\nu}$$

Patrón reproducido si $\sigma_i(t) = \sigma_i(t + \Delta t) = \mathcal{P}_i^\mu$.

Red de Hopfield

Analogía con el modelo de Ising

- ▶ Red de Hopfield \sim Modelo de Ising para sistemas magnéticos.
- ▶ Hamiltoniano \equiv Ising ($\vec{B} = 0$).

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

imponemos $J_{ij} = J_{ji}$.

Red de Hopfield

- ▶ Solapamiento: cuantificación de la coincidencia con el patrón.

$$m^\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_i \mathcal{P}_i^\mu \sigma_i(t)$$

valor máximo $m^\mu = 1$ cuando el patrón es replicado.

- ▶ Elegimos los pesos:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^K \mathcal{P}_i^\mu \mathcal{P}_j^\mu$$

relacionan espines con el patrón.

Generalización del modelo de Hopfield

- ▶ Hasta ahora hemos tratado un sistema sin ruido.
- ▶ En un sistema con ruido se pueden llegar a estados fuera de la dinámica que tratamos.
- ▶ Introducimos el ruido en forma de una temperatura efectiva T .
- ▶ Adopta la dinámica de espines de Glauber. La distribución se relaja a la de Gibbs:

$$P(\{\sigma\}) \propto e^{-H(\{\sigma\})/T}$$

este es el **modelo de Hopfield generalizado**.

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- ▶ Tomamos unidades $k_B = 1$.
- ▶ Densidad de energía libre:

$$f(T) = -\frac{T}{N} \langle \log Z \rangle_{\mathcal{P}}$$

- ▶ Función de partición:

$$Z = \left(\frac{N}{T}\right)^{\frac{\kappa}{2}} e^{-\frac{\kappa}{2T}} \int \prod_{\mu} \frac{dm^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{N\vec{m}^2}{2T} + \sum_i \log \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{p}_i}{T} \right) \right] \right\}$$

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- ▶ Si K es finito:

$$-\frac{T \ln Z}{N} = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - \frac{T}{N} \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right]$$

- ▶ El parámetro de orden viene dado por la ecuación $\partial \ln Z / \partial m^\mu = 0$:

$$\vec{m} = \frac{1}{N} \sum_i \vec{\mathcal{P}}_i \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$$

- ▶ En LT: $(1/N) \sum_i \rightarrow$ promedios sobre $\{\vec{\mathcal{P}}_i\}$.

Generalización del modelo de Hopfield

Teoría de campo medio

- Ecuaciones de campo medio:

$$f(T) = \frac{1}{2} \vec{m}^2 - T \left\langle \log \left[2 \cosh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right] \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

$$\vec{m} = \left\langle \vec{\mathcal{P}}_i \cdot \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right) \right\rangle_{\mathcal{P}}$$

- Promedio térmico de los espines: $\langle \sigma_i \rangle = \tanh \left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{\mathcal{P}}_i}{T} \right)$.

$$m^\mu = \langle \mathcal{P}_i^\mu \langle \sigma_i \rangle \rangle_{\mathcal{P}}$$

es el solapamiento. Similar a la magnetización del modelo de Ising $\tilde{m} = \langle \sigma_i \rangle$.

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Distribución de los patrones:

$$P(\{\mathcal{P}_i^\mu\}) = \prod_{\mu,i} \frac{1}{2} [\delta(\mathcal{P}_i^\mu + 1) + \delta(\mathcal{P}_i^\mu - 1)]$$

- Desarrollo en potencias de \vec{m} de las ecuaciones de campo medio:

$$f = -T \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$
$$m^\mu = \beta m^\mu + \frac{2}{3}\beta^3(m^\mu)^3 - \beta^3 m^\mu \vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- Distribución de los patrones:

$$P(\{\mathcal{P}_i^\mu\}) = \prod_{\mu,i} \frac{1}{2} [\delta(\mathcal{P}_i^\mu + 1) + \delta(\mathcal{P}_i^\mu - 1)]$$

- Desarrollo en potencias de \vec{m} de las ecuaciones de campo medio:

$$f = -T \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \beta)\vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$m^\mu = \beta m^\mu + \frac{2}{3}\beta^3(m^\mu)^3 - \beta^3 m^\mu \vec{m}^2 + o(\vec{m}^4)$$

$$\beta \equiv 1/T.$$

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Para $T = 1$, $f = -T \log 2$ y $m^\mu \approx (\beta - \beta^3 \vec{m}^2) m^\mu \Rightarrow \vec{m} = 0$.
- ▶ Se mantiene para $T > 1$.
- ▶ Por debajo de $T_c = 1$: aparecen soluciones $m^\mu \neq 0$. Definimos la dimensionalidad de \vec{m} , n .
- ▶ Alterar el signo o el orden de las n componentes no nulas no altera las soluciones.

Generalización del modelo de Hopfield

Estados de Mattis

- ▶ Caso $n = 1$.
- ▶ Suponemos $m^1 = m \neq 0$ y $m^\mu = 0 \forall \mu > 1$.

$$f = \frac{1}{2}m^2 - T \log [2 \cosh(\beta m)]$$

$$m = \tanh(\beta m)$$

- ▶ Se corresponden a un estado dónde:

$$\langle \sigma_i \rangle = \mathcal{P}_i^1 \tanh(\beta m)$$

Termodinámicamente equivalente al estado ferromagnético del modelo de Ising. Existen $2K$ de estos estados, los estados de Mattis.