

Laboratorium 04 - Efekt Rungego

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

30 marca 2025

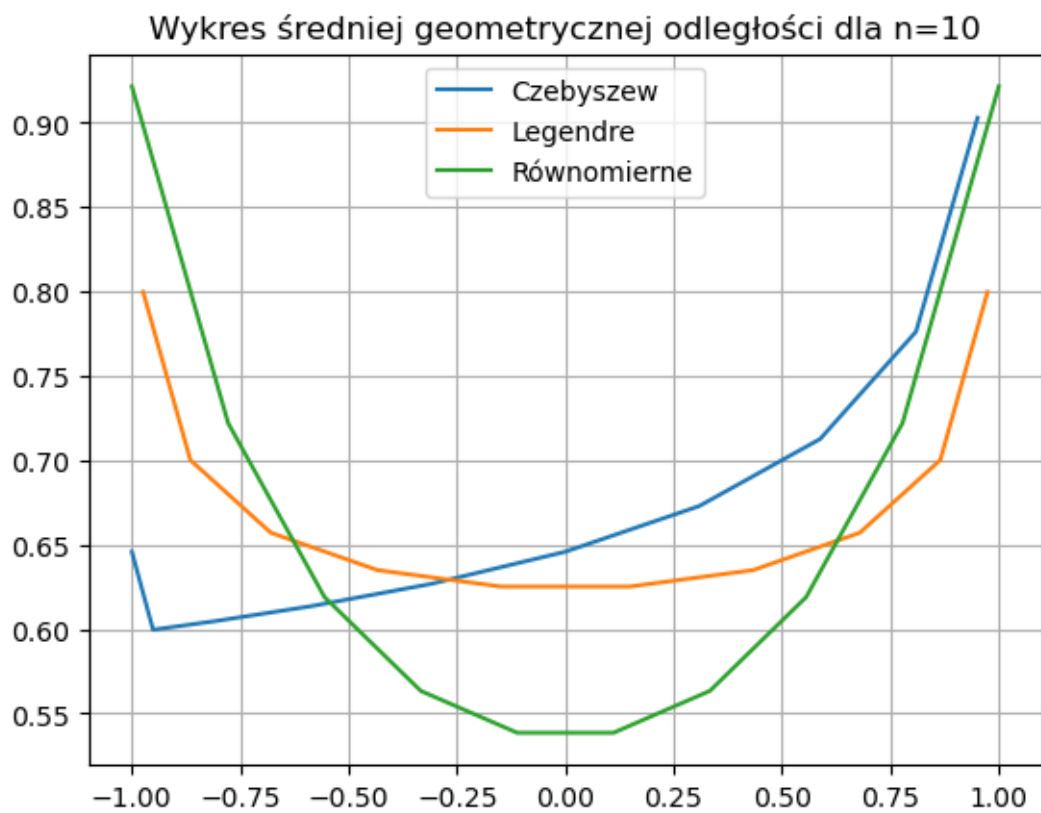
Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z efektem Rungego, czyli pogarszaniu się interpolacji wraz z zwiększaniem liczby węzłów. Aby to zaprezentować, należało zaimplementować interpolację wielomianową w kilku wariantach: wielomianów Lagrange’a z równoodległymi węzłami, kubicznymi funkcjami sklejanymi z równoodległymi węzłami oraz wielomianów Lagrange’a z węzłami Czebyszewa. Dodatkowo dla przedziału $[-1, 1]$ należało wygenerować punkty: Czebyszewa, Legendre’a oraz równomiernie rozłożone dla $n = 10, 20, 50$.

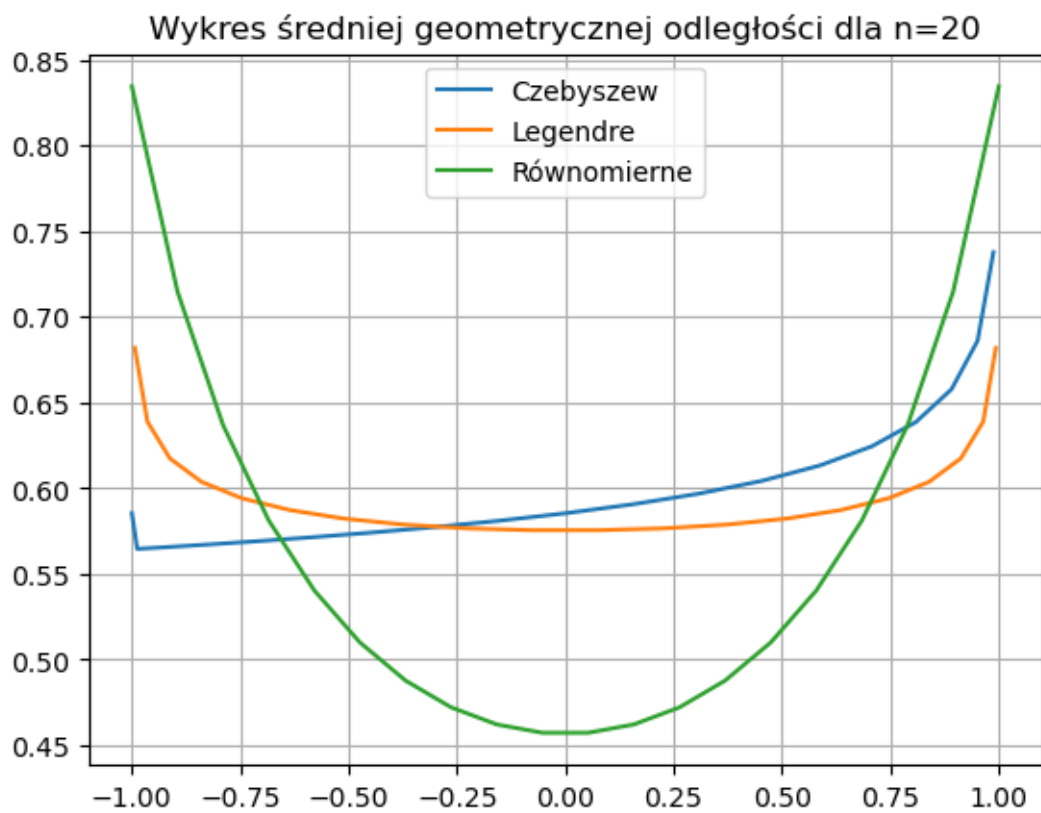
Najpierw używając wzoru na punkty Czebyszewa:

$$t_i = -\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right), \quad i = 0, \dots, n$$

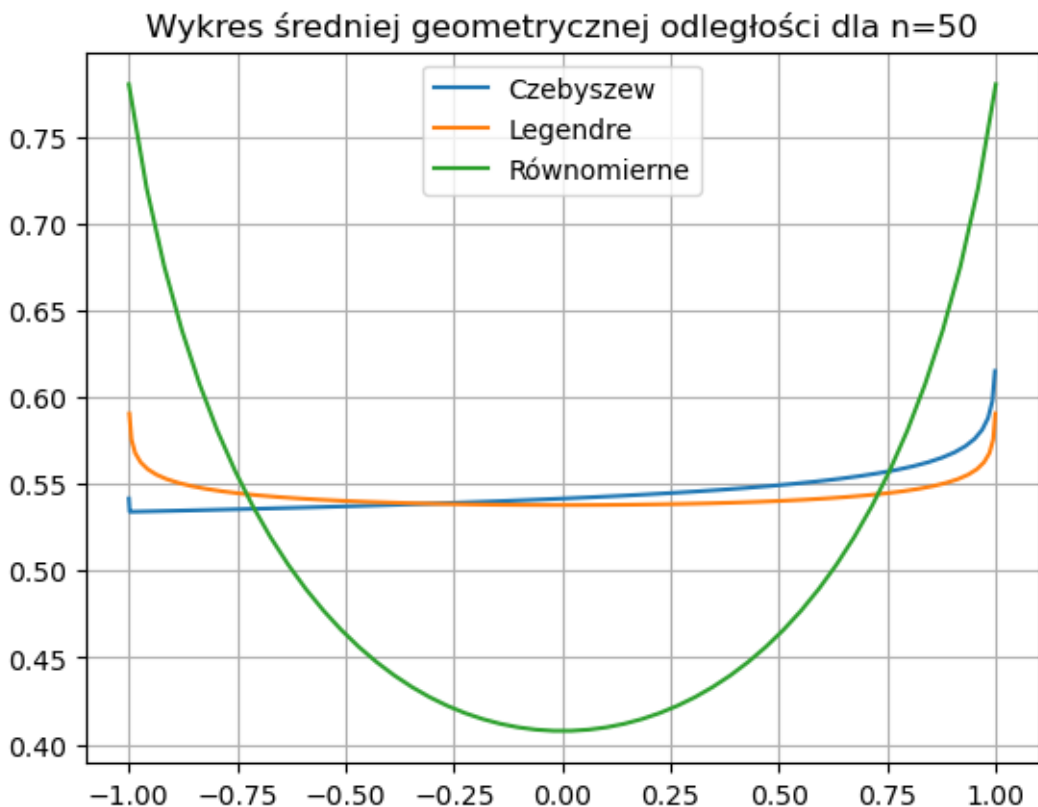
funkcji `np.polynomial.legendre.leggauss(n)` i `np.linspace(-1, 1, n)` wyznaczyliśmy odpowiednio punkty Czebyszewa, Legendre’a i równomiernie rozmieszczone. Następnie dla każdego zbioru punktów i dla $n = 10, 20, 50$ wyznaczyliśmy wykresy średniej geometrycznej odległości od pozostałych punktów.



Wykres 1. Średnia geometryczna odległości dla $n=10$



Wykres 2. Średnia geometryczna odległości dla $n=20$



Wykres 3. Średnia geometryczna odległości dla $n=50$

Jak widać na wykresach 1-3, średnia geometryczna odległości jest bardzo zbliżona dla wszystkich punktów Czebyszewa i Legendre'a, a dla punktów równomiernie rozłożonych rośnie w zależności od odległości punktu od 0. Im większe n tym gładszy wykres i w przypadku punktów Legendre i Czebyszewa mniejsza średnia dla wartości brzegowych.

W następnej części zadania mieliśmy wyznaczyć wielomiany interpolujące funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \text{ na przedziale } [-1, 1],$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0, 2\pi],$$

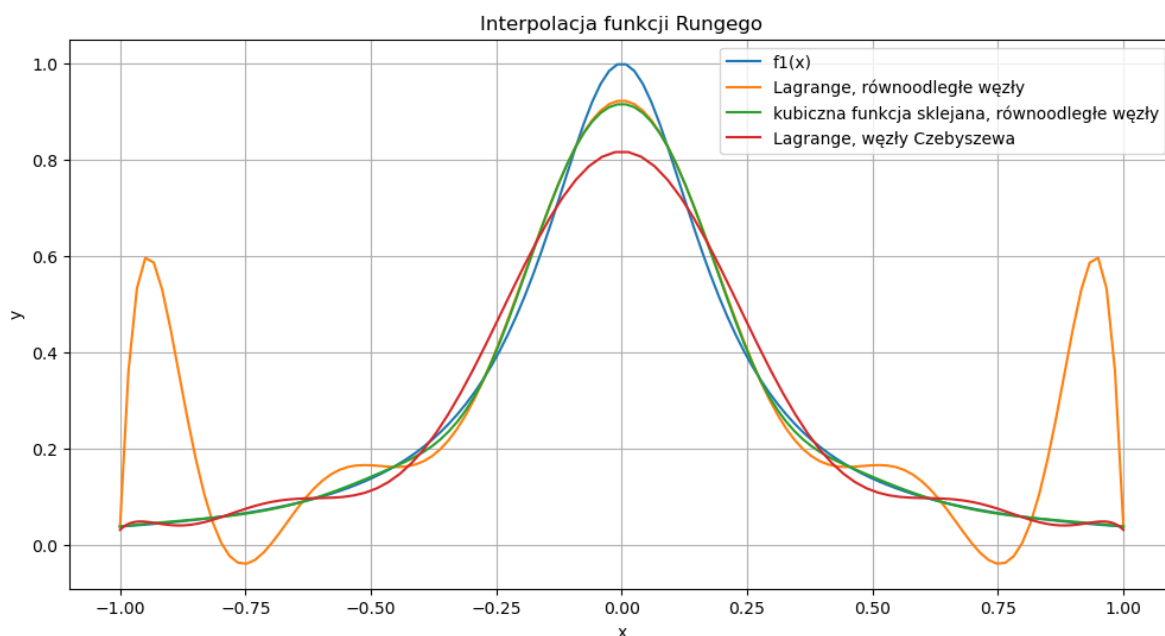
za pomocą

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami
- kubicznych funkcji sklejanых z równoodległymi węzłami
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Używając funkcji `np.linspace(a, b, n)` i wzoru na węzły Czebyszewa:

$$x_j = -\cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi, \quad 1 \leq j \leq n.$$

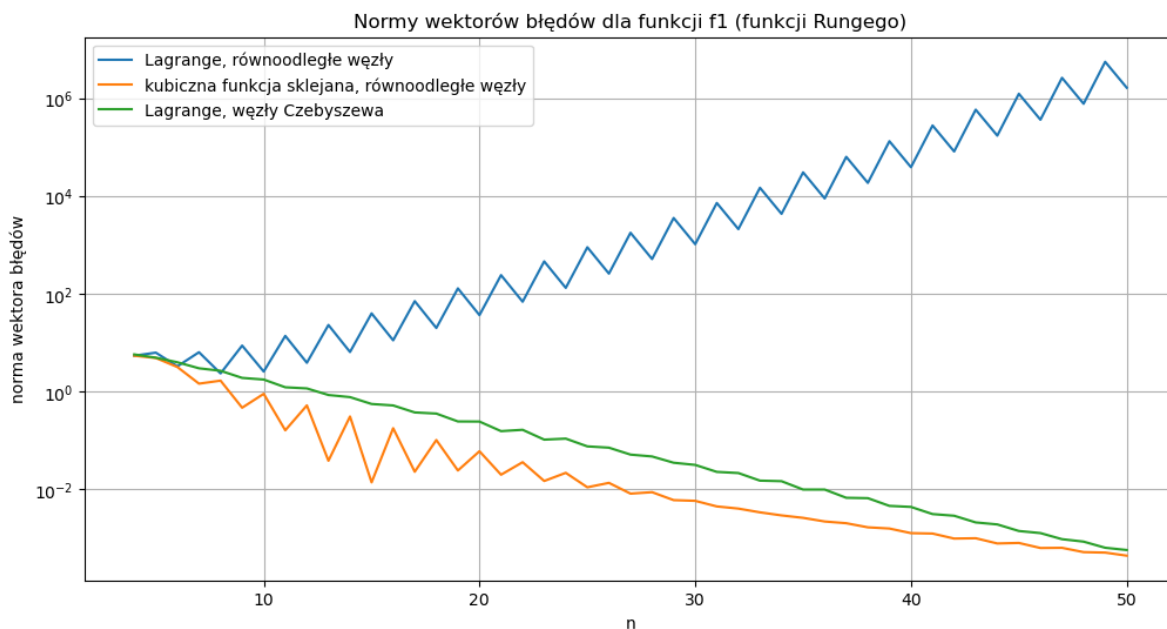
wyznaczyliśmy odpowiednio węzły równoodległe i Czebyszewa dla $n = 12$ oraz zbiór punktów do próbkowania dla $n = 120$ (10 razy gęstszy zbiór). Następnie obliczyliśmy wartości funkcji Rungego dla węzłów. Potem używając funkcji `scipy.interpolate.BarycentricInterpolator(x_vec, y_vec)` i `scipy.interpolate.CubicSpline(x_vec, y_vec)` otrzymaliśmy wielomiany interpolacyjne Lagrange’a z równoodległymi węzłami, kubiczną funkcję sklejaną z równoodległymi węzłami i wielomiany interpolacyjne Lagrange’a z węzłami Czebyszewa.



Wykres 4. Interpolacja funkcji Rungego

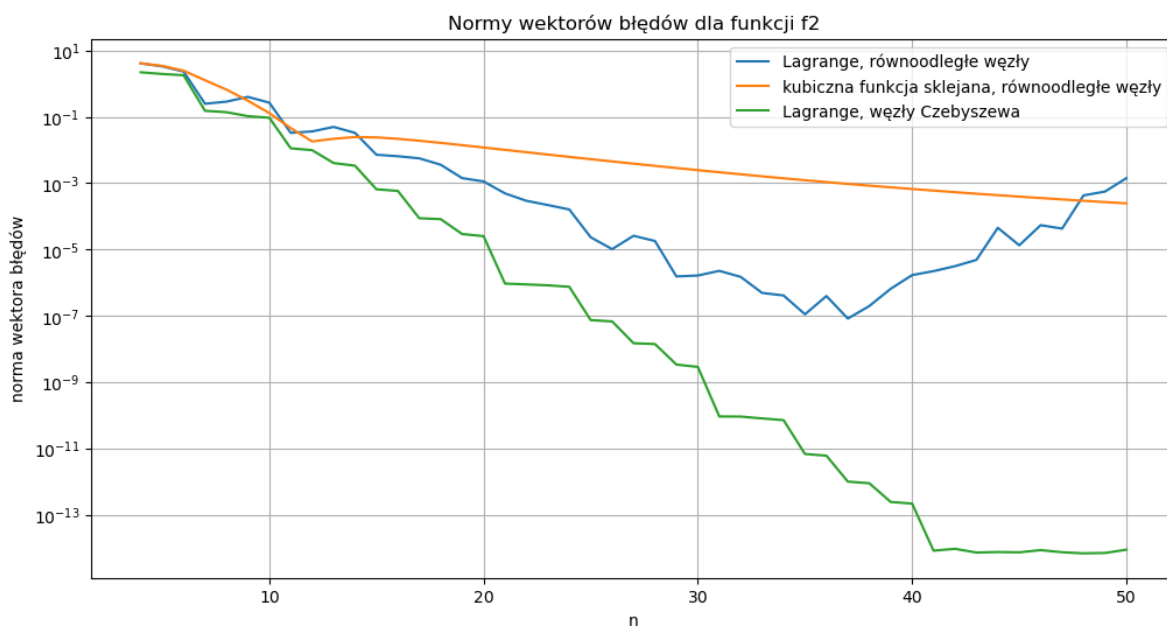
Jak widać funkcje interpolacyjne są w większości punktów bardzo zbliżone do funkcji Rungego. W pobliżu $x = 0$ funkcje interpolacyjne przyjmują trochę za małe wartości, w szczególności wielomian Lagrange’a z węzłami Czebyszewa. Dla wartości coraz bardziej oddalonych od 0 wielomian interpolacyjny Lagrange’a z równoodległymi węzłami odbiega od interpolowanej funkcji. Najlepszym przybliżeniem jest zatem kubiczna funkcja sklejana.

Następnie przeprowadziliśmy interpolację funkcji f_1 i f_2 z $n = 4, 5, \dots, 50$ korzystając z poprzednio użytych 3 metod. Wygenerowaliśmy zbiory 500 losowych punktów na dziedzinach funkcji, po czym obliczyliśmy wartości funkcji interpolacyjnych dla tych punktów. Następnie wyznaczyliśmy normę wektora błędów dla każdego n i poszczególnych metod.



Wykres 5. Normy wektorów błędów dla funkcji f_1

Jak widać na wykresie kubiczna funkcja sklejana i wielomian Lagrange'a z węzłami Czebyszewa mają najmniejsze normy wektora błędów. Dla wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami widać tutaj efekt Rungego - dla dużych n interpolacja jest niedokładna.



Wykres 6. Normy wektorów błędów dla funkcji f_2

Dla funkcji f_2 wszystkie metody interpolacji dobrze się sprawdzają, najlepszy jest wielomian Lagrange’a z węzłami Czebyszewa.

Podsumowując kubiczna funkcja sklejana z węzłami równoodległymi i wielomian Lagrange’a z węzłami Czebyszewa okazały się być lepszymi metodami interpolacji niż wielomian Lagrange’a z równoodległymi węzłami, który jest podatny na efekt Rungego.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab04/lab-intro04.pdf*