Laboratorium 05 - Aproksymacja

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

7 kwietnia 2025

Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z aproksymacją czyli przewidywaniem wartości na podstawie danych lub funkcji. W tym celu na początku wykonaliśmy aproksymację populacji Stanów Zjednoczonych w roku 1990 na podstawie danych z lat 1900-1980. Następnie wykonaliśmy aproksymację wartości funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 2]$. W tym celu, zgodnie z treścią zadania wykorzystaliśmy wielomian Czebyszewa stopnia 2.

Zadanie 1.

a) Najpierw wyznaczyliśmy współczynniki wielomianów dla `m = 0..6` za pomocą wzoru

$$A^T Ac = A^T y$$

Wyznaczyliśmy macierz `A` funkcją `np.vander()`, a potem wektor `c` funkcją `np.linalg.solve()`. Następnie obliczyliśmy wartości wielomianu dla `x=1990` i wyznaczyliśmy błędy ekstrapolacji:

```
Wartości z ekstrapolacji:
143369177, m=0
235808109, m=1
254712944, m=2
261439962, m=3
263612280, m=4
274500666, m=5
240280933, m=6
Błędy względne ekstrapolacji:
```

```
0.4235, m=0
0.0519, m=1
0.0241, m=2
0.0512, m=3
0.0599, m=4
0.1037, m=5
0.0339, m=6
```

Najmniejszy błąd względny otrzymaliśmy dla `m=6` równy `0.0032`. Jest to spowodowane tym, że wielomian stopnia 6 daje możliwość znalezienia funkcji, która poprawnie opisuje tak nieregularne i zmienne dane, jak populacja Stanów Zjednoczonych. Dla wartości różnych od `m=0` błędy są małe co pokazuje skuteczność aproksymacji. Porównując otrzymane wyniki z wynikami intepolacji z poprzednich laboratoriów można łatwo zauważyć, że ten sposób przewidywania wartości jest zancznie bardziej skuteczny.

b) Dla `m=0..6` wyznaczyliśmy kryterium informacyjne Akaikego ze wzoru

$$\mathrm{AIC} = 2k + n \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}(x_i)|^2}{n}\right)$$

Ze względu na mały rozmiar próbki wyznaczyliśmy także kryterium ze składnikiem korygującym

$$\mathrm{AIC}_c = \mathrm{AIC} + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

Otrzymaliśmy następujące wyniki:

```
Wartości AICc:
321.01, m=0
289.06, m=1
279.45, m=2
284.88, m=3
297.93, m=4
326.84, m=5
387.01, m=6
```

Mniejsze wartości kryterium oznaczają lepszy model, zatem według kryterium najlepszym modelem jest wielomian o stopniu `m=2`. Nie zgadza się to z poprzednio wyliczonymi błędami, które były mniejsze dla `m=4` i `m=6`.

Zadanie 2.

Najpierw zdefiniowaliśmy wielomiany Czebyszewa dla aproksyamcji wraz z funkcją wagową:

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$w = (1 - x^2)^{(-\frac{1}{2})}$$

Następnie wyznaczyliśmy współczynniki wielomiany ze wzoru

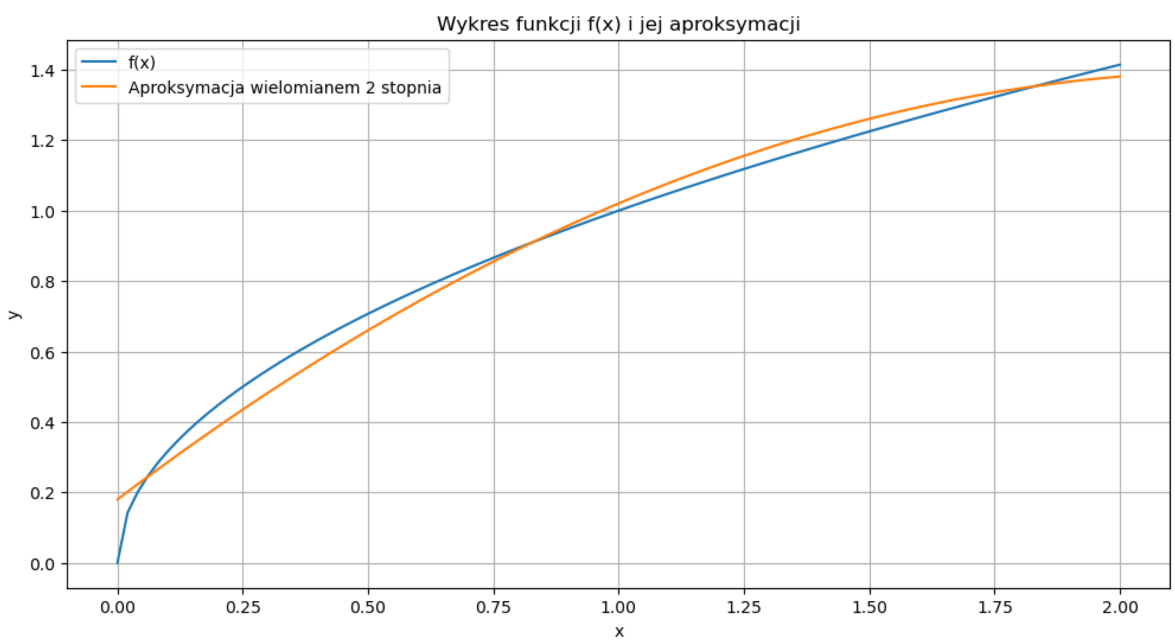
$$c_k = \frac{\langle f, T_k \rangle}{\langle T_k, T_k \rangle}$$

Przy całkowaniu uwzględniliśmy przesunięcie przedziału `[0, 2]` względem `[-1, 1]`, a sam wzór który całkowaliśmy wygląda następująco:

$$\langle f, T_k \rangle = \int_0^2 w(x-1) f(x) T_k(x-1)\, dx$$

Na koniec wyznaczyliśmy wielomian aproksymacyjny ze wzoru

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$



Wykres 1 - wartość funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wielomianu aproksymacyjnego Czebyszewa stopnia 2 na przedziale $[0, 2]$

Jak widać na wykresie wielomian aproksymacyjny 2 stopnia jest bardzo zbliżony do funkcji `f(x)` co pokazuje skuteczność aproksymacji. Z wykresu 1 oraz zadania 1 można łatwo zauważyć, że wielomian aproksymacyjny Czebyszewa jest znacznie bardziej skuteczny w aproksymacji funkcji niż wielomian interpolacyjny. Mimo niewielkich różnic występujących na wykresie między dwoma funkcjami, rezultaty są na tyle zadowalające, że można je uznać za poprawne. Podsumowując, wielomian aproksymacyjny Czebyszewa jest dobrą metodą aproksymacji wartości funkcji w przeciwieństwie do interpolacji, która w tym przypadku nie sprawdziła się.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab05/lab-intro05.pdf*