Laboratorium 03 - Interpolacja

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

25 marca 2025

Wstęp

Celem laboratorium było zaimplementowanie interpolacji wielomianowej w trzech wariantach: z wykorzystaniem macierzy Vandermonde'a, metody Newtona oraz Lagrange'a. Następnie należało przetestować wszystkie metody na danych populacji Stanów Zjednoczonych w latach 1900-1980. W przypadku macierzy Vandermonde'a należało dodatkowo wykonać ekstrapolację dla roku 1990 w przypadku, gdy dane są zaokrąglone do pełnych milionów oraz kiedy nie są.

W tym celu wykorzystaliśmy dane przedstawione w tabeli poniżej

Rok	Populacja
1900	76 212 168
1910	92 228 496
1920	106 021 537
1930	123 202 624
1940	132 164 569
1950	151 325 798
1960	179 323 175
1970	203 302 031
1980	226 542 199

Następnie dla podanych czterech funkcji bazowych:

1. $$\phi_j(t) = t^j$$
2. $$\phi_j(t) = (t - 1900)^j$$

3.
$$\phi_j(t) = (t - 1940)^j$$

4.
$$\phi_j(t) = ((t - 1940)/40)^j$$

Wyznaczliśmy współczynniki wielomianu ósmego stopnia wykorzystując właśnie interpolację. W tym celu stworzyliśmy dla każdej funkcji bazowej macierz Vandermonde'a, a następnie wyznaczyliśmy współczynniki uwarunkowania dla każdej z nich.

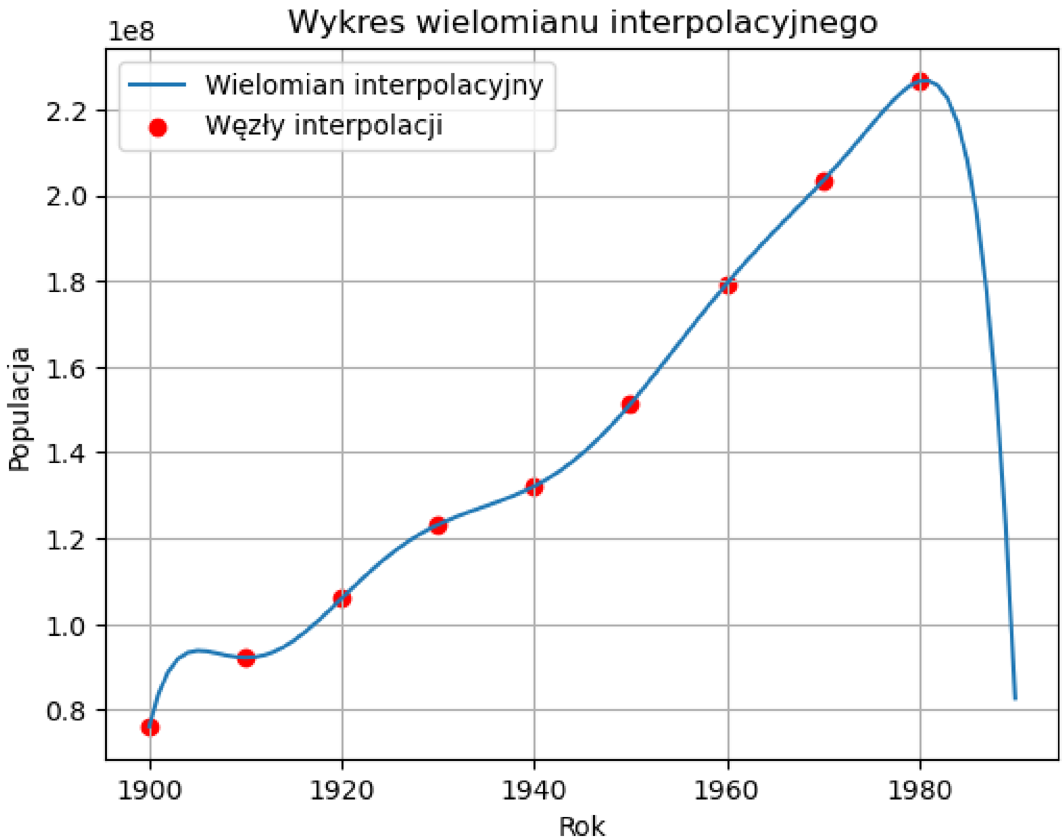
```
Cond1: 2.7565085275005417e+41
Cond2: 5994335190596687
Cond3: 9315536038627.4707
Cond4: 1605.4437
```

Ostatnia baza jest najlepiej uwarunkowana, zatem użyjemy jej do wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego. Za pomocą funkcji `np.linalg.solve(vander, y_vec)` wyznaczyliśmy współczynniki:

```
[-3.15180235e+08  1.89175576e+08  6.06291250e+08 -3.42668456e+08
 -3.74614715e+08  1.82527130e+08  1.02716315e+08  4.61307656e+07
  1.32164569e+08]
```

Następnie użyliśmy schematu Hornera aby wyznaczyć wartości wielomianu dla każdego roku. Zaimplementowaliśmy schemat w nastepujący sposób:

```python
def horner(a_vec, x):
    ret = 0
    for a in a_vec:
        ret = a + x * ret
    return ret
```



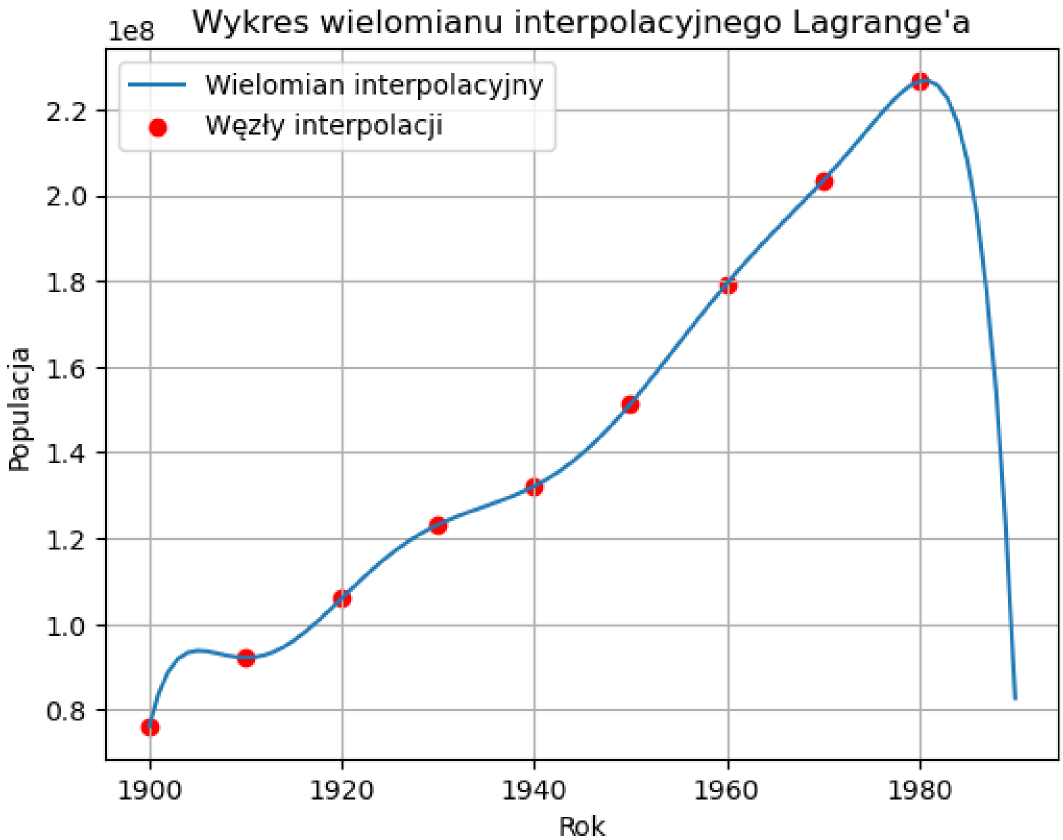

```
Wartość z ekstrapolacji: 82749141
Prawdziwa wartość: 248709873
Błąd względny: 0.67
```

Otrzymana z ekstrapolacji wartość jest znacznie mniejsza niż wartość prawdziwa.

Następnie obliczyliśmy wielomian interpolacyjny Lagrange'a korzystając z nastepujących wzorów.

$$L_j(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{t - t_k}{t_j - t_k} \quad j = 1, \dots, n$$

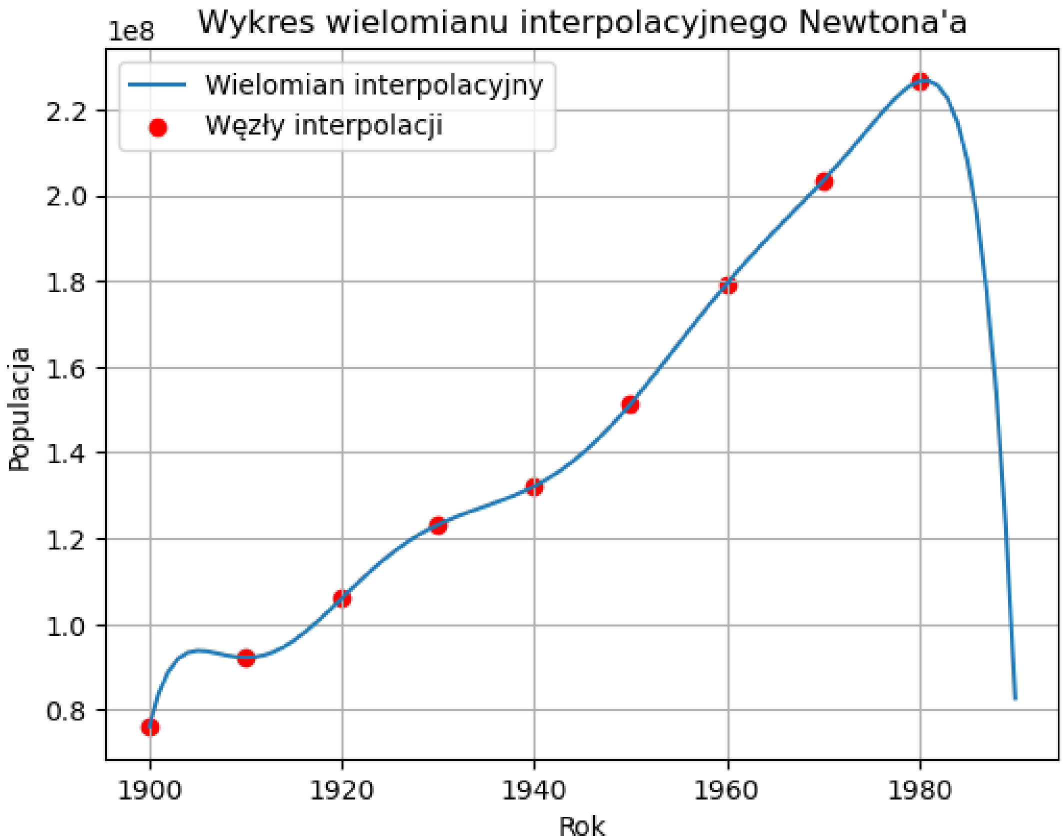
$$p_{n-1}(t) = y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) + \cdots + y_n l_n(t)$$



Wykres jest praktycznie identyczny jak wykres otrzymany w podpunkcie c). Potem obliczyliśmy wielomian interpolacyjny Newtona korzystając z następujących wzorów:

$$\pi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k) \quad j = 1, \dots, n$$

$$p_{n-1}(t) = f[t_1]\pi_1(t) + f[t_1, t_2]\pi_2(t) + \dots + f[t_1, t_2, \dots, t_n]\pi_n(t)$$

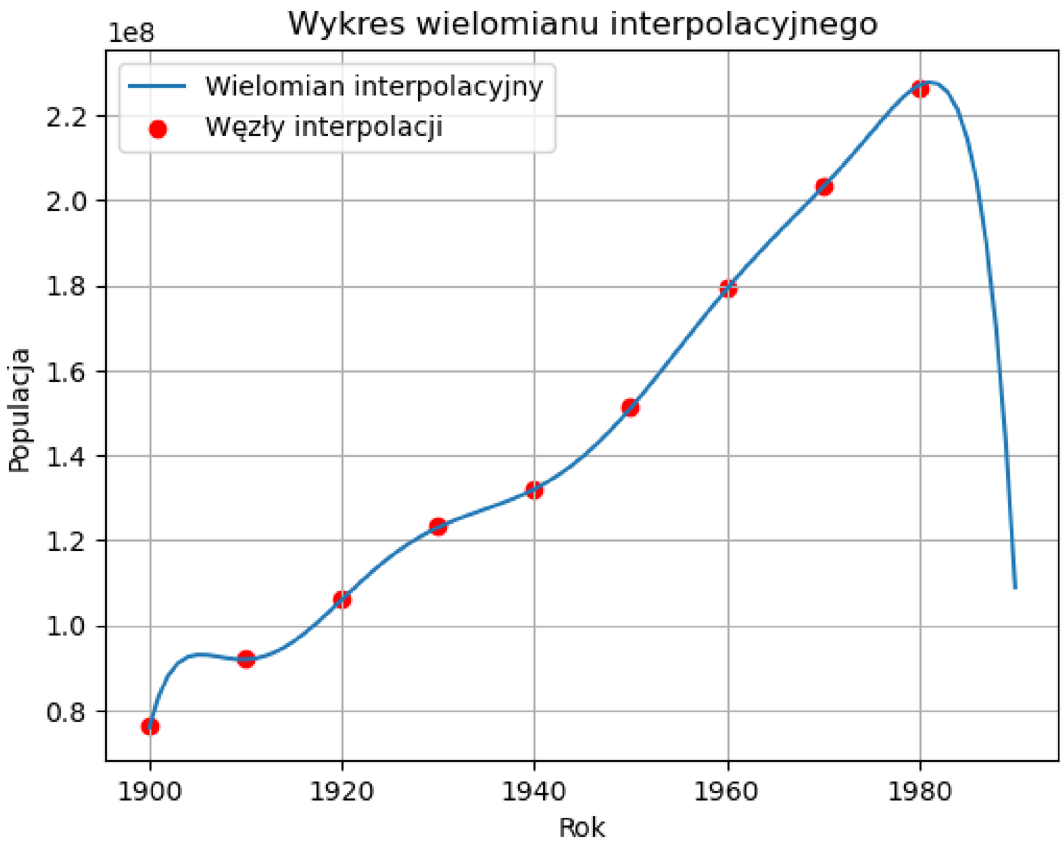


Otrzymany wykres jest praktycznie taki sam jak poprzednio otrzymane wykresy. Jest to spowodowane tym, że dla danego zestawu danych można tylko wygenerować jeden unikalny wielomian interpolacyjny. Mimo, iż meotdy różnią się sposobem obliczania współczynników, to jednak końcowy wykres jest taki sam.

Następnie obliczyliśmy wielomian interpolacyjny korzystając z zaokrąglonych danych. Po zaokrągleniu danych za pomocą funkcji `np.around(y_vec, -6)` otrzymaliśmy następujące współczynniki wielomianu:

```
Współczynniki z zaokrąglonych danych:
[-2.94196825e+08  1.86920635e+08  5.70311111e+08 -3.38488889e+08
 -3.56755556e+08  1.81111111e+08  1.00141270e+08  4.59571429e+07
  1.32000000e+08]
Współczynniki z podpunktu c):
[-3.15180235e+08  1.89175576e+08  6.06291250e+08 -3.42668456e+08
 -3.74614715e+08  1.82527130e+08  1.02716315e+08  4.61307656e+07
  1.32164569e+08]
```

Współczynniki zaokrąglonego wielomianu różnią się od poprzednio wyznaczonych współczynników, różnica ta wynosi maksymalnie 7%.



Wykres jest podobny do poprzednio otrzymanych wykresów, lecz wartości blisko roku 1990 są wyraźnie wyższe.

```
Wartość z ekstrapolacji: 109000000
Prawdziwa wartość: 248709873
Błąd względny: 0.56
```

Otrzymana wartość jest większa od wartości otrzymanej w podpunkcie d). Błąd względny dla ekstrapolacji za pomocą wielomianu wyznaczonego z zaokrąglonych danych jest trochę mniejszy niż dla wcześniej wyznaczonego wielomianu, lecz wciąż duży. Zaokrąglenie do pełnych milionów zmniejszyło wpływ szumów i poprawiło stabilność numeryczną, dzięki czemu ekstrapolacja była bardziej trafna. To pokazuje, że czasem nadmierna precyzja danych nie jest korzystna, zwłaszcza gdy interesuje nas ogólny trend, a nie dokładność do pojedynczych jednostek.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab03/lab-intro03.pdf*