

# Zadanie 1

Celem tego zadania jest znalezienie miejsc zerowych opisanych poniżej funkcji nie wykorzystując metody Newtona.

Na początku zdefiniowaliśmy funkcje oraz estymację, gdzie przewidujemy, że funkcja ma jedno ze swoich miejsc zerowych:

$$f_a(x) = x^3 - 5x, x_0 = 1$$

$$f_b(x) = x^3 - 3x + 1, x_0 = 1$$

$$f_c(x) = 2 - x^5, x_0 = 0.01$$

$$f_d(x) = x^4 - 4.28x^2 - 5.29, x_0 = 0.8$$

oraz ich pochodne pierwszego stopnia:

$$f'_a(x) = 3x^2 - 5$$

$$f'_b(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'_c(x) = -5x^4$$

$$f'_d(x) = 4x^3 - 8.56x$$

Wyznaczyliśmy je, ponieważ sądziliśmy, że pozwolą one na wyznaczenie miejsc zerowych tych funkcji metodą Newtona. Jednakże, w przypadku każdej z tych funkcji otrzymaliśmy błędy, które zostały wypisane dla każdej z funkcji.

Metoda Newtona dla  $f_a(x)$ :

Failed to converge after 50 iterations, value is 1.0.

Metoda Newtona dla  $f_b(x)$ :

Derivative was zero. Failed to converge after 1 iterations, value is 1.0.

Metoda Newtona dla  $f_c(x)$ :

Failed to converge after 50 iterations, value is 713.6238464957056.

Metoda Newtona dla  $f_d(x)$ :

Failed to converge after 50 iterations, value is 0.7876130494100906.

Analizując otrzymane wyniki, dla każdej z funkcji przypisaliśmy ich charakterystykę na podstawie funkcji charakterystycznych wymienionych we wstępie do tego laboratorium. Poniżej znajdują się przypisania poszczególnych funkcji:

$f_a$  – > flat spot

$f_b$  – > flat spot

$f_c$  – > flat spot

$f_d$  – > cycle

Aby znaleźć miejsca zerowe tych funkcji, wykorzystaliśmy metodę bisekcji. W tym celu użyliśmy funkcję `bisect` z biblioteki `scipy.optimize`. W tym celu wyznaczyliśmy dla każdej funkcji przedziały, w których dana funkcja posiada miejsca zerowe. Następnie, otrzymane wyniki przedstawiliśmy w poniższej tabeli:

	f	a	b	bisect(f, a, b)
a	$x^3 - 5x$	-1.00	1	0.000000
b	$x^3 - 3x + 1$	0.00	1	0.347296
c	$2 - x^5$	0.01	100	1.148698
d	$x^4 - 4.29x^2 - 5.29$	0.80	100	2.300000

W celu sprawdzenia poprawności otrzymanych wyników, porównaliśmy je z wykresami funkcji narysowanych w programie **Geogebra**.

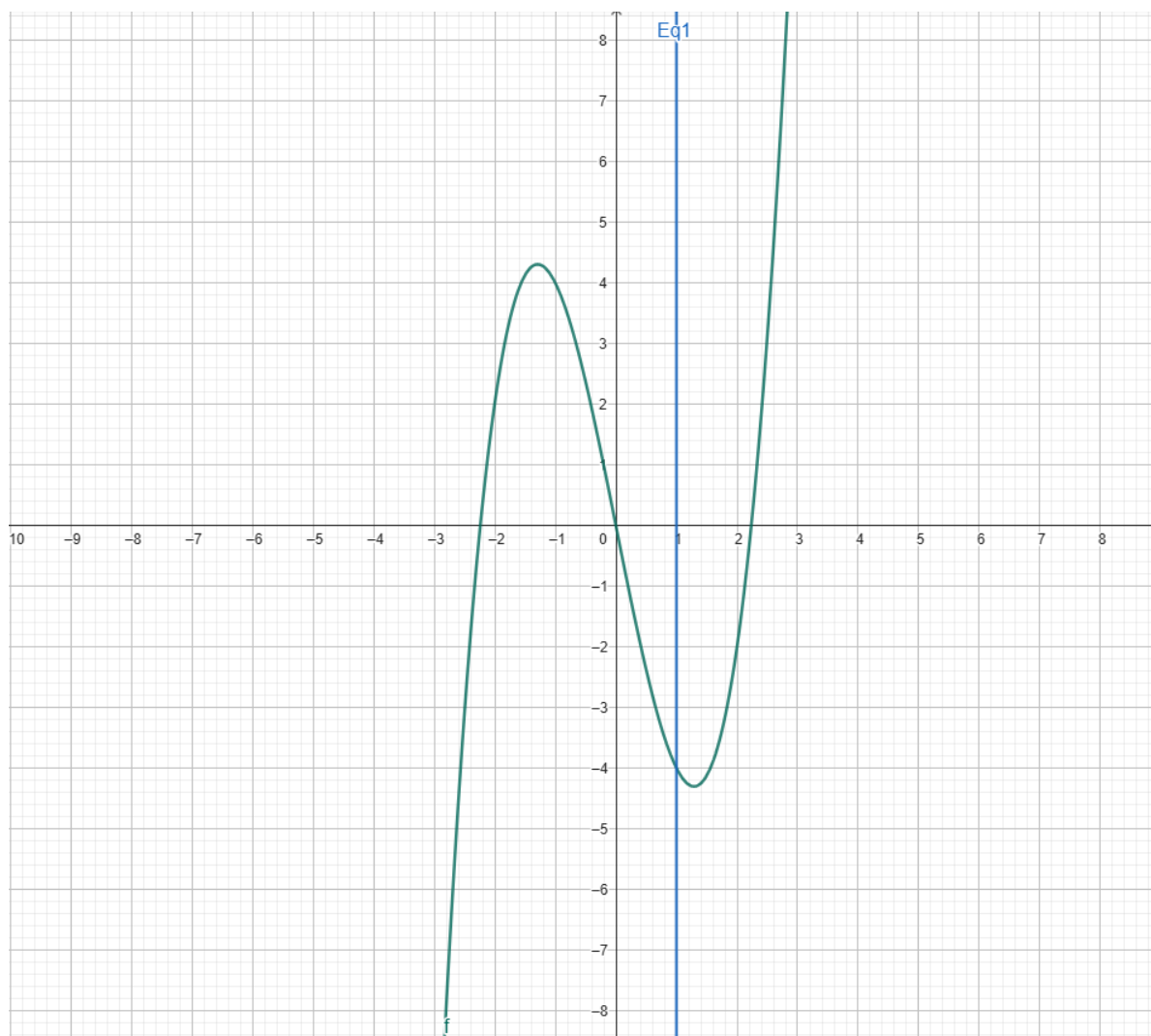


Figure 1: image.png

Wykres 1. Wykres funkcji  $f_a(x)$

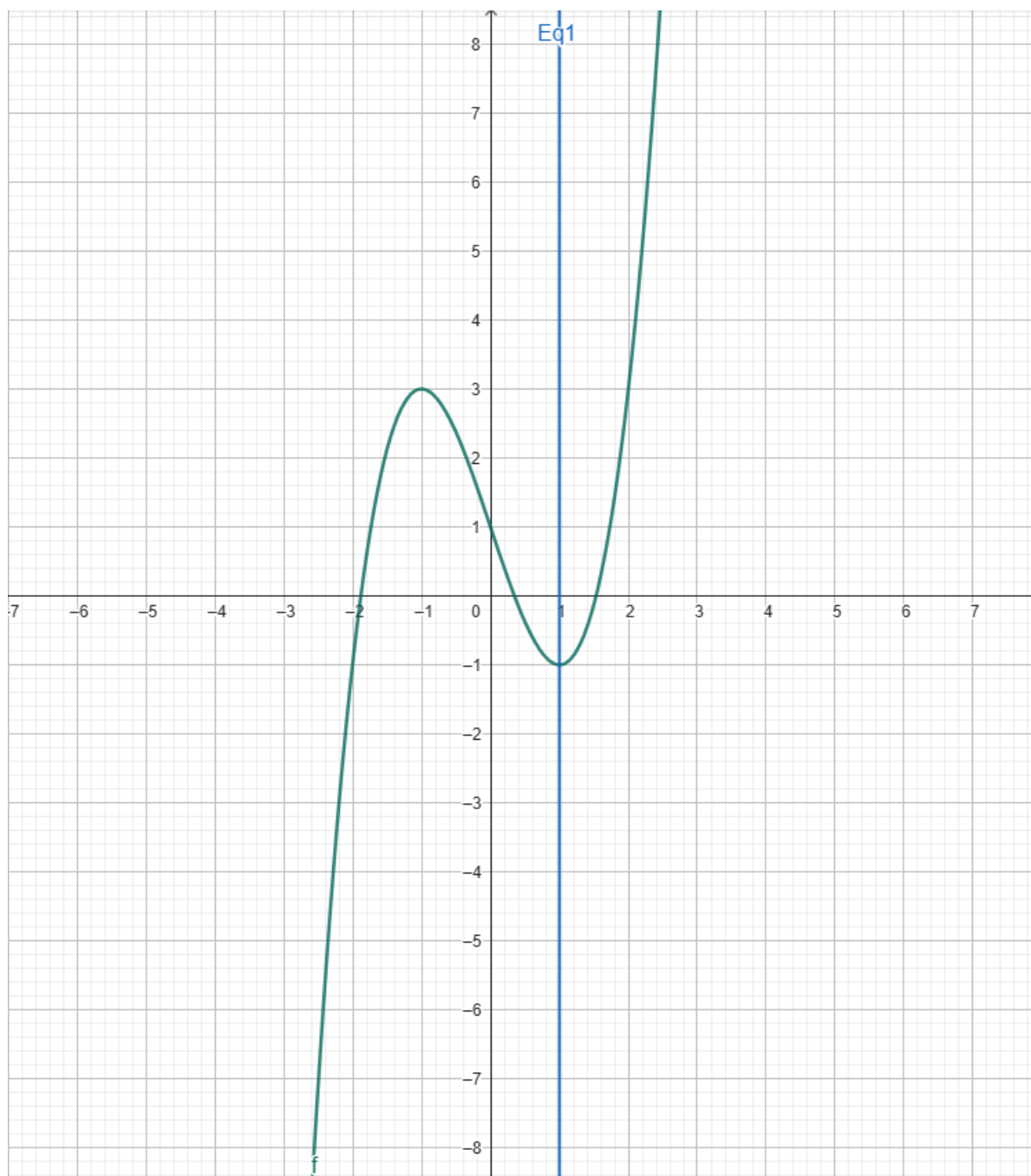


Figure 2: image-2.png

Wykres 2. Wykres funkcji  $f_b(x)$

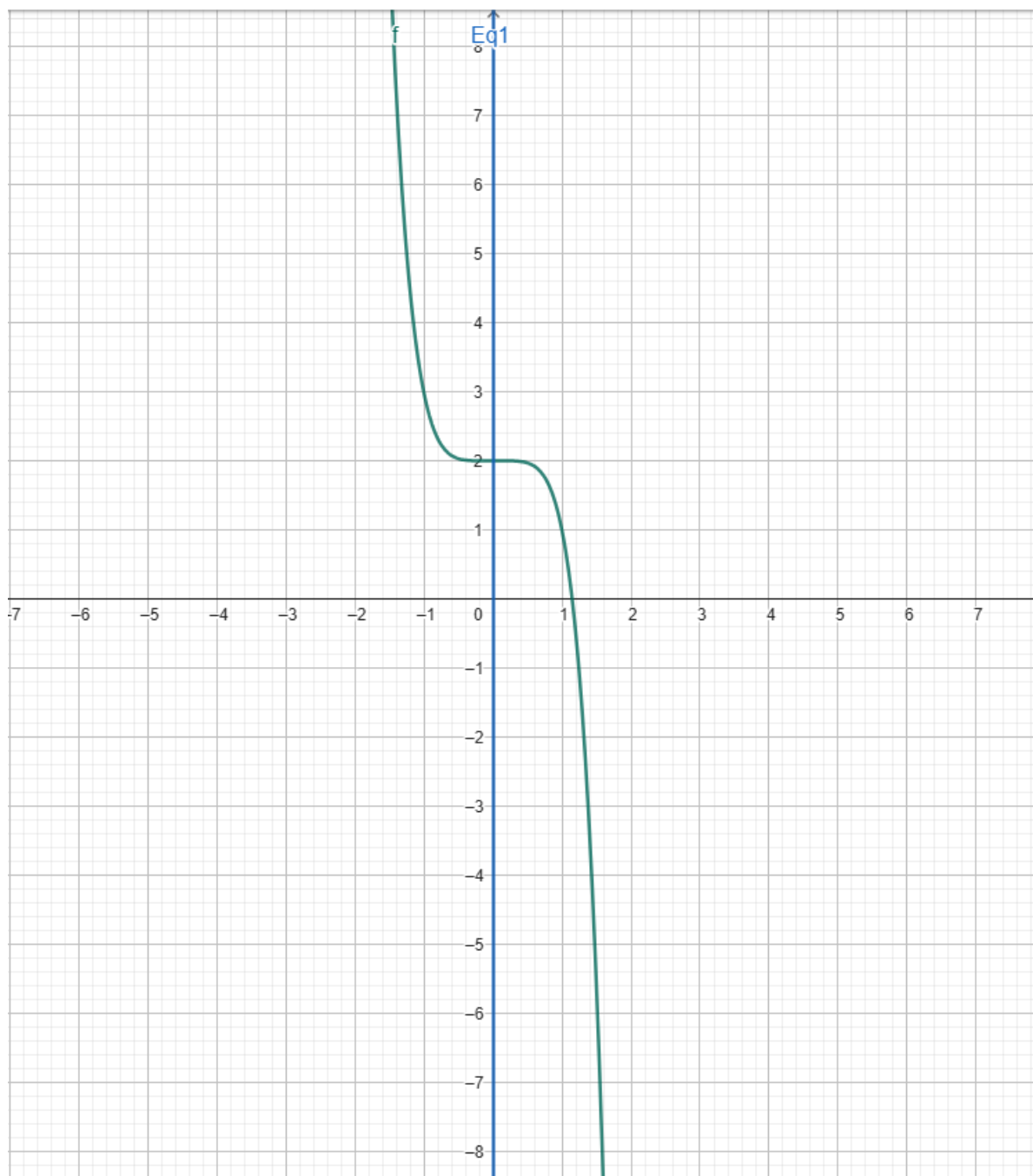


Figure 3: image-3.png

Wykres 3. Wykres funkcji  $f_c(x)$

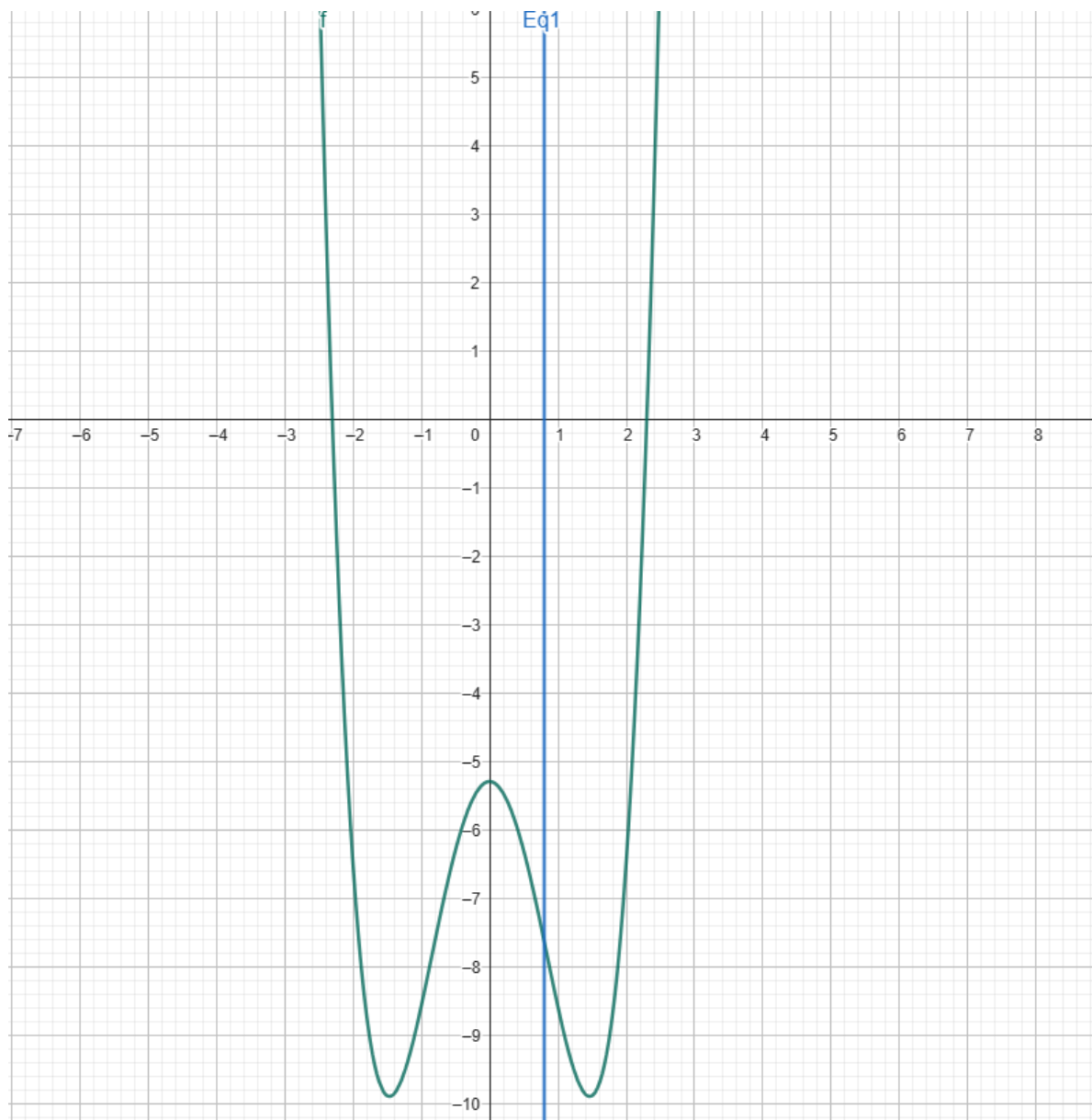


Figure 4: image-4.png

Wykres 4. Wykres funkcji  $f_d(x)$

Analizując wykresy, zauważamy, że otrzymane metodą bisekcji miejsca zerowe są zgodne z miejscami zerowymi funkcji wyznaczonymi w programie **Geogebra**. W związku z tym, możemy stwierdzić, że otrzymane wyniki są poprawne.

Podsumowując, metoda Newtona nie była w stanie znaleźć miejsc zerowych zgodnie z przewidywaniami. Metoda bisekcji bez problemów znalazła miejsca zerowe, które są poprawne.

## Zadanie 2

Na początku zdefiniowaliśmy funkcję

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$$

oraz funkcje definiujące równoważny schemat iteracyjny

$$\phi_1(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$\phi_3(x) = 3 - \frac{2}{x}$$

$$\phi_4(x) = \frac{x^2 - 2}{2x - 3}$$

Następnie przeanalizowaliśmy zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom  $\phi_i(x)$  dla pierwiastka  $\alpha = 2$  badając wartości  $|\phi_i'(2)|$ . Otrzymane wyniki przedstawiliśmy w tabeli poniżej.

	0
0	1.333333
1	0.750000
2	0.500000
3	0.000000

Można zauważyć, że tylko dla funkcji  $\phi_1(x)$  mamy  $|\phi_i'(2)| > 1$ , co oznacza, że funkcja ta nie jest zbieżna w punkcie. Dla wszystkich pozostałych, funkcje te są zbieżne. Następnie, potwierdziliśmy to obliczając wartość miejsca zerowego funkcji  $f(x)$  dla każdej z funkcji  $\phi_i(x)$ . W tym celu wykonaliśmy 10 iteracji w celu jak najlepszego przybliżenia wartości miejsca zerowego. Otrzymane wyniki przedstawiliśmy w tabeli poniżej.

	1	2	3	4
0	3.000000e+00	3.000000	3.000000	3.000000
1	3.666667e+00	2.645751	2.333333	2.333333
2	5.148148e+00	2.436648	2.142857	2.066667
3	9.501143e+00	2.304332	2.066667	2.003922

	1	2	3	4
4	3.075724e+01	2.216528	2.032258	2.000015
5	3.160026e+02	2.156289	2.015873	2.000000
6	3.328655e+04	2.113970	2.007874	2.000000
7	3.693315e+08	2.083725	2.003922	2.000000
8	4.546858e+16	2.061838	2.001957	2.000000
9	6.891304e+32	2.045853	2.000978	2.000000
10	1.583003e+65	2.034099	2.000489	2.000000

Jak widać na powyższej tabeli, wartości miejsc zeorwych są zgodne dla wszystkich funkcji  $\phi$  poza  $\phi_1(x)$ , która nie jest zbieżna. Potwierdza to nasze wcześniejsze obliczenia odnośnie zbieżności poszczególnych funkcji  $\phi_i(x)$ . Następnie wyznaczyliśmy eksperymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

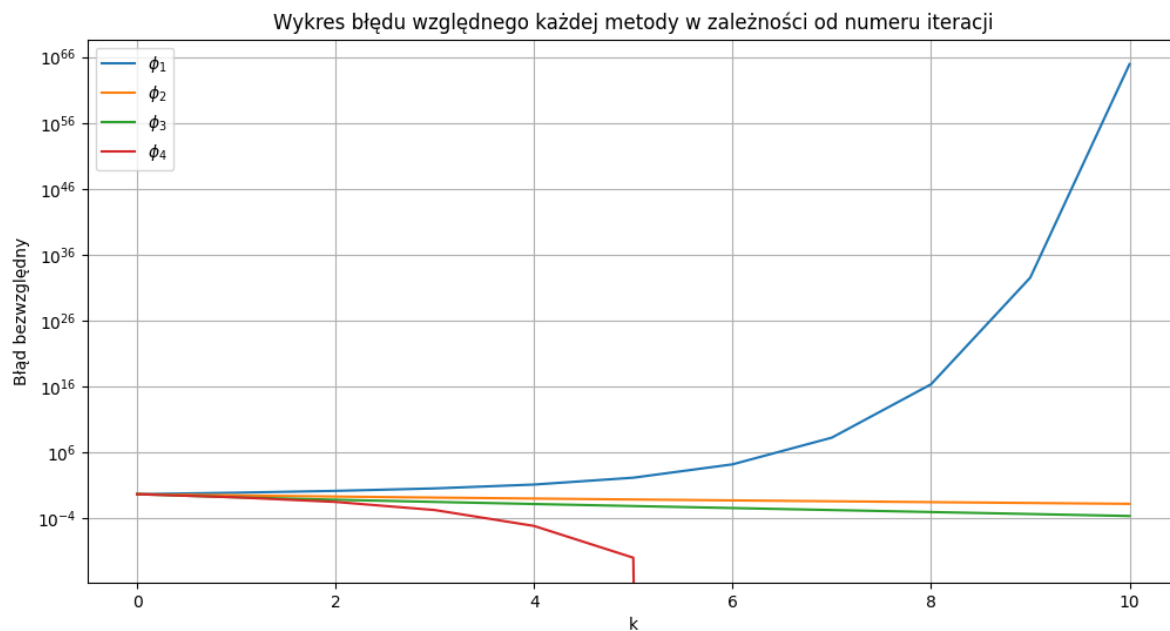
$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}}$$

Otrzymane wyniki przedstawiliśmy w tabeli poniżej.

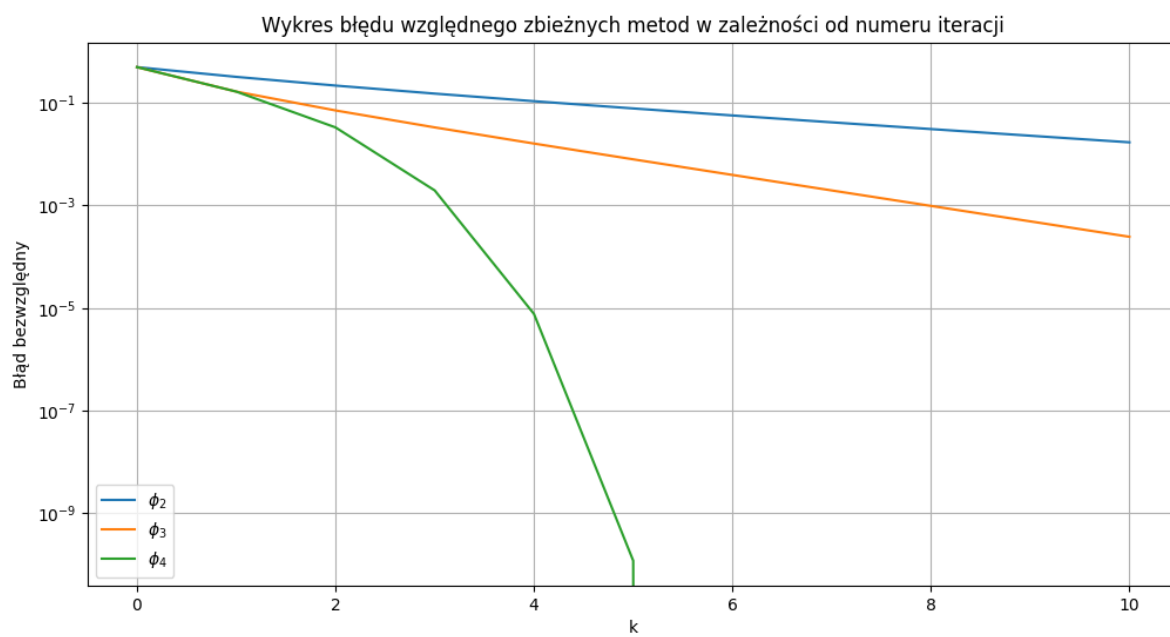
	1	2	3	4
0	1.245021	0.894696	0.771244	1.464974
1	1.365183	0.922621	0.899495	1.760374
2	1.547766	0.942910	0.952498	1.958580
3	1.778874	0.957728	0.976872	1.998598
4	1.950815	0.968608	0.988585	NaN
5	1.997311	0.976632	0.994329	NaN
6	1.999987	0.982574	0.997173	NaN
7	2.000000	0.986987	0.998589	NaN
8	2.000000	0.990272	0.999295	NaN

Następnie dla każdej z funkcji  $\phi_i(x)$  obliczyliśmy wartość błędu bezwzględnego. Otrzymane wyniki przedstawiliśmy w postaci wykresu z użyciem skali logarytmicznej na osi y.





Następnie wykonaliśmy wykres również dla błędu bezwzględnego, ale tylko dla funkcji zbieżnych. Wynik przedstawiliśmy poniżej.



### Zadanie 3

W tym zadaniu mieliśmy napisać schematy iteracji wg metody Newtona dla równań nieliniowych:

$$(a) \quad x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$(b) \quad e^{-x} = x$$

$$(c) \quad x \sin(x) = 1.$$

Następnie trzeba było ustalić ile iteracji należy wykonać, aby osiągnąć 24 i 53-bitową dokładność wyniku, jeśli początkowe przybliżenie pierwiastka  $x_0$  ma dokładność 4 bitów.

Na początku zdefiniowaliśmy funkcje  $f_1(x) = x^3 - 2x - 5$ ,  $f_2(x) = e^{-x} - x$ ,  $f_3(x) = x \sin(x) - 1$  oraz ich pochodne. Następnie stworzyliśmy schematy iteracyjne metody Newtona dla każdej z funkcji, zgodnie ze wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Za pomocą tych schematów wyznaczyliśmy najpierw pierwiastki z dokładnością 4 bitów. W celu ustalenia dokładności porównywaliśmy różnicę wartości  $x$  w kolejnych iteracjach z  $\epsilon = 2^{-4}$ .

	x0 4bit
f1	2.094568
f2	0.567143
f3	1.114157

Następnie wyznaczyliśmy przybliżenia z 24-bitową dokładnością:

	x0 24bit	Liczba iteracji
f1	2.094551	2
f2	0.567143	2
f3	1.114157	1

Jak widać w zamieszczonej powyżej tabelce, schematy iteracyjne Newtona bardzo szybko otrzymują wynik z wymaganą dokładnością, co pokazuje skuteczność tej metody.

Potem wyznaczyliśmy przybliżenia z 53-bitową dokładnością:

	x0 53bit	Liczba iteracji
f1	2.094551	3
f2	0.567143	3

	x0 53bit	Liczba iteracji
f3	1.114157	1000

W tym przypadku liczba iteracji jest wciąż bardzo niska dla funkcji  $f_1$  i  $f_2$ , ale w przypadku  $f_3$  nie udało się uzyskać wymaganej dokładności. Funkcja ta prawdopodobnie nie spełnia warunków zbieżności dla metody Newtona.

#### Zadanie 4

W tym zadaniu mieliśmy napisać schemat iteracji wg metody Newtona dla układu równań nieliniowych:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 - x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Korzystając z podanych wzorów na rozwiązania tego układu równań:

$$\begin{aligned}x_1 &= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \\ x_2 &= \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

oraz obliczyć błąd względny rozwiązania znalezionego metodą Newtona.

Najpierw zdefiniowaliśmy funkcje  $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ ,  $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$  oraz obliczyliśmy wartości rozwiązań podanych w treści zadania. Następnie skorzystaliśmy z Wikipedii, aby znaleźć wzór na wielowymiarowy schemat iteracyjny Newtona:

$$J_F(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -F(x_n)$$

gdzie  $x_k$  jest wektorem przybliżającym rozwiązanie  $(x_1, x_2)$  w  $k$ -tej iteracji,  $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ ,  $J_F$  to jacobian funkcji  $F$ . Do wyznaczenia jacobianu wykorzystaliśmy funkcję `scipy.differentiate.jacobian`. Otrzymaliśmy następujące wyniki:

Dokładne rozwiązanie: x1 = 0.78615138, x2 = 0.61803399

Rozwiązanie znalezione metodą Newtona: x1 = 0.78615138, x2 = 0.61803399

Błąd względny dla x1: 0.00000000e+00

Błąd względny dla x2: 1.79637859e-16

Rozwiązanie znalezione metodą Newtona dało dokładny wynik dla  $x_1$  i bardzo zbliżony wynik dla  $x_2$ . Metoda Newtona jest więc skuteczna w przypadku problemów wielowymiarowych.