Laboratorium 07 - Kwadratury adaptacyjne

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

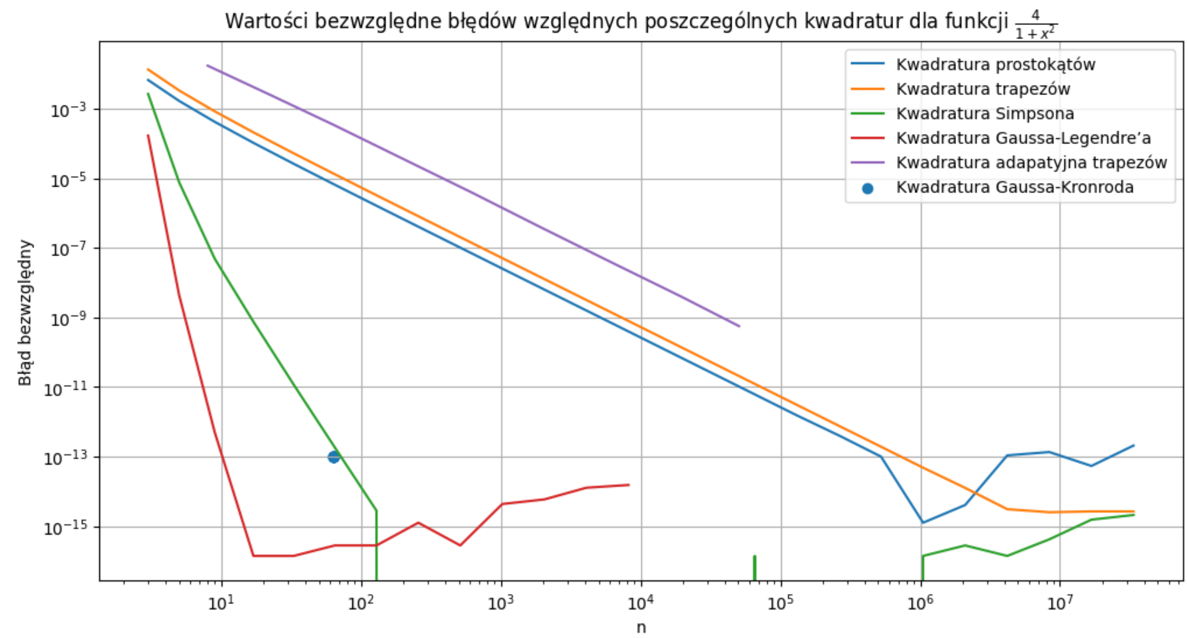
5 maja 2025

Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z dwoma algorytmami kwadratury adapatacyjnej: kwadratury adapatacyjnej trapezów oraz kwadratury adaptacyjnej Gaussa-Kronroda. W tym celu na początku wyliczyliśmy tymi sposobami wartość całki $\int_0^1 \frac{4}{1+x2}dx$ i dla otrzymanych wyników obliczyliśmy bezwzględny błąd względny. Te dane następnie przedstawiliśmy na wykresie i porównaliśmy z błędami kwadratur z poprzedniego laboratorium. W kolejnym zadaniu również wyliczyliśmy wartości bezwzględnych błędów względnych dla całek $\int_0^1 \sqrt{x} \log x dx$ oraz $\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6 \right) dx$ (gdzie $a = 0.001$ i $b = 0.004$) za pomocą zarówno kwadratur adaptacyjnych, jak i kwadratur z poprzedniego laboratorium. Na koniec porównaliśmy wyniki otrzymanych błędów dla każdej z metod.

Zadanie 1

Na początku zdefiniowaliśmy funkcję podcałkową $\frac{4}{1+x^2}$ oraz skopiowaliśmy funkcje liczące kwadratury prostokątów, trapezów, Simpsona i Gaussa-Legendre'a z poprzedniego laboratorium. Następnie zdefiniowaliśmy funkcje liczące kwadratury adaptacyjne trapezów i Gaussa-Kronroda. W tym celu użyliśmy funkcji `scipy.integrate.quad_vec` z argumentami odpowiednio `quadrature='trapezoid'` i `quadrature='gk21'`, oraz z wartościami tolerancji $eps = 10^0 ... 10^{-14}$. Wartość błędu bezwzględnego i liczbę wywołań odczytaliśmy z dodatkowych informacji zawartych w strukturze zwracanej przez funkcję (odpowiednio `result[1]` i `result[-1].neval`). Otrzymane wyniki przedstawiliśmy na poniższym wykresie 1.



Wykres 1. Wartość bezwzględna błędu względnego dla poszczególnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji funkcji $\frac{4}{1+x^2}$.

Jak widać na wykresie 1 kwadratura adaptacyjna trapezów ma nieco większe wartości błędu względnego niż kwadratury trapezów i prostokątów, ale wartości te maleją w tym samym tempie. Kwadratura Gaussa-Kronroda ma stałą liczbę ewaluacji równą 63 i stałą wartość błędu równą 1.0463^{-13}.

Zadanie 2

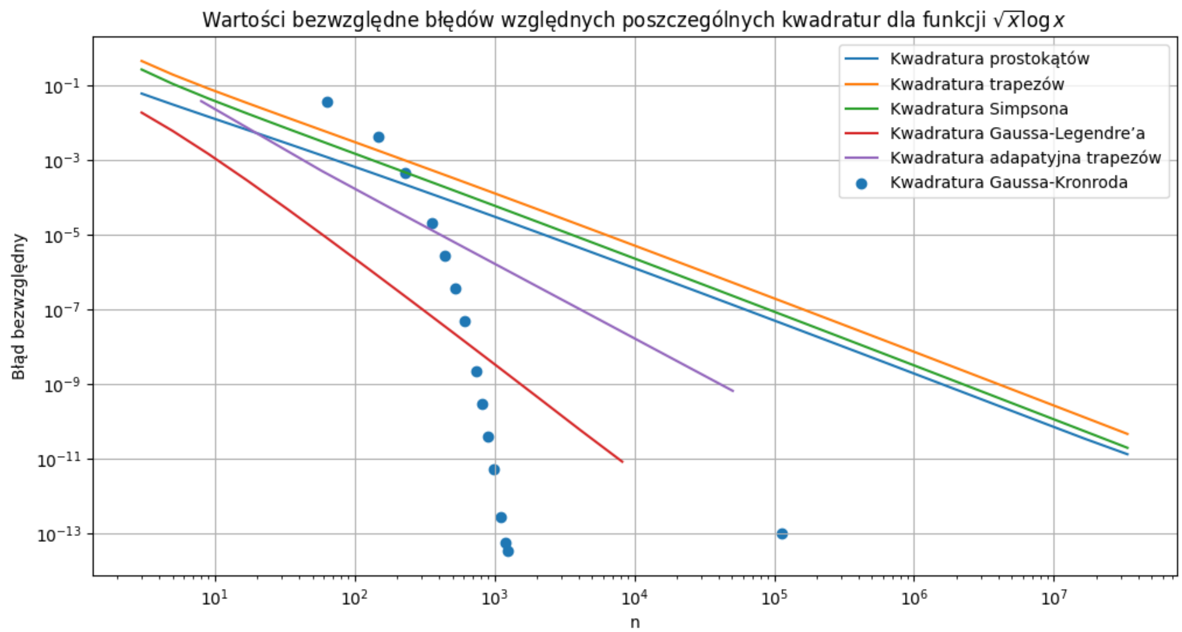
Na początku zdefiniowaliśmy funkcje podcałkowe

$$\sqrt{x}\log x$$

oraz

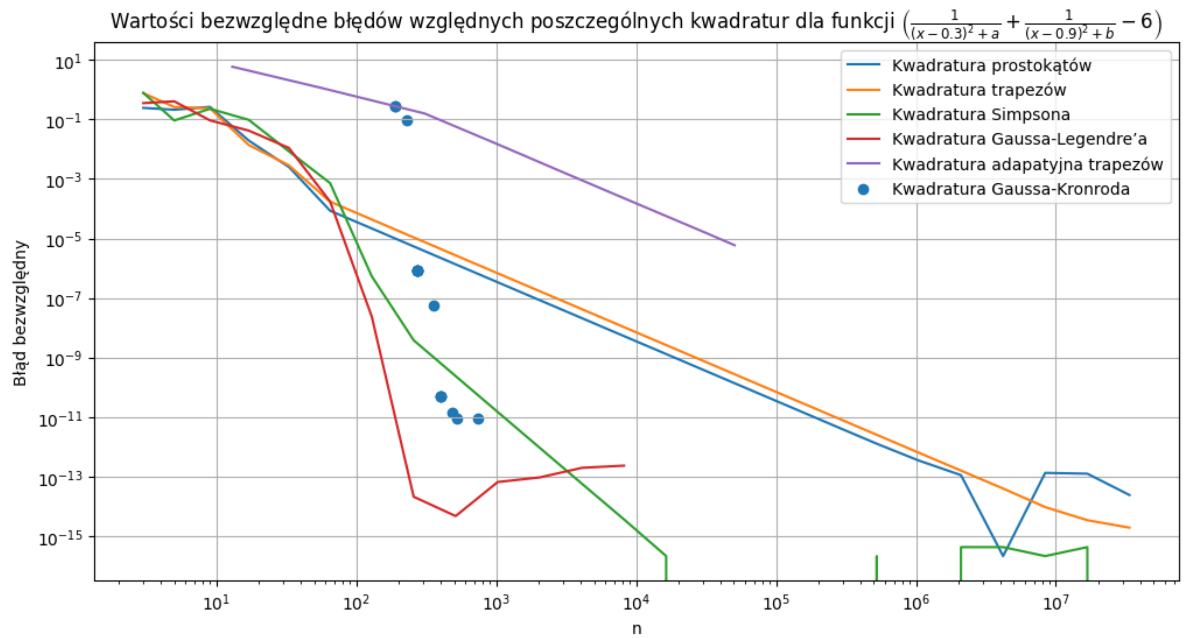
$$\left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a}+\frac{1}{(x-0.9)^2+b}-6\right)$$

dla $a = 0.001$ i $b = 0.004$. Wykorzystaliśmy kod z poprzedniego zadania z podmienionymi funkcjami oraz wartościami całki (odpowiednio $-\frac{4}{9}$ i $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x_0}{\sqrt{a}}+\operatorname{arctg}\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right)$) do wygenerowania wykresów zależności wartości błędów bezwzględnych od liczby ewaluacji funkcji. Ze względu na to, że `0` jest poza dziedziną logarytmu, dodaliśmy epsilon `np.finfo(np.double).eps` do lewej granicy całkowania dla pierwszej funkcji.



Wykres 2. Wartość bezwzględna błędu względnego dla poszczególnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji funkcji $\sqrt{x}\log x$.

Jak widać na wykresie 2 kwadratury prostokątów, trapezów i Simpsona mają prawie identyczne błędy. Kwadratura adaptacyjna trapezów ma mniejszy błąd niż poprzednio wymienione kwadratury, a kwadratura Gaussa-Legendre'a jeszcze mniejszy. Kwadratura Gaussa-Kronroda nie ma stałej wartości błędu w przeciwieństwie do funkcji z zadania 1. Dla małych liczb ewaluacji kwadratura ta ma błąd podobny do kwadratury prostokątów, ale błąd szybko maleje i dla większych liczb ewaluacji jest mniejszy od błędów innych kwadratur.



Wykres 3. Wartość bezwzględna błędu względnego dla poszczególnych kwadratur w zależności od liczby ewaluacji funkcji $\left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a}+\frac{1}{(x-0.9)^2+b}-6\right)$.

Jak widać na wykresie 3 kwadratury prostokątów i trapezówa mają niemal identyczne wartości błędu. Kwadratura adaptacyjna trapezów ma większe wartości błędu niż poprzednio wymienione kwadratury. Kwadratury Simpsona i Gaussa-Legendre'a dla małych liczb ewaluacji mają podobne wartości błędu do kwadratury prostokątów, lecz wartości te szybko maleją wraz ze wzrostem liczby ewaluacji. Kwadratura Gaussa-Kronroda nie ma stałej wartości i szybko maleje podobnie jak na wykresie 2.

Podsumowując, kwadratura adaptacyjna trapezów ma stosunkowo wysokie wartości błędów podobne do kwadratur prostokątów i trapezów. Kwadratura Gaussa-Kronroda daje bardzo małe wartości błędów, dla niektórych funkcji najniższe ze wszystkich testowanych kwadratur. Jak widać kwadratury adaptacyjne nie zawsze są lepsze niż wcześniej poznane kwadratury, w szczególności kwadratura adaptacyjna trapezów nie jest tak dokładna jak można by się spodziewać.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab07/lab7-intro.pdf*