# Laboratorium 09 - Równania różniczkowe zwyczajne - część I

**Błażej Naziemiec i Szymon Żuk**

**20 maja 2025**

## Wstęp

W ramach tego laboratorium będziemy zajmować się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Naszym celem będzie analiza różnych metod ich rozwiązywania na przykładzie kilku równań tego typu. Dodatkowo zbadamy charakterystykę numeryczną tych metod - zwracając szczególnie uwagę na stabilność numeryczną w zależności od warunków początkowych i przyjętego kroku.

## Zadanie 1

W tym zadaniu mieliśmy przedstawić podane równania różniczkowe zwyczajne jako równoważny układ równań pierwszego rzędu. Tymi równaniami były: 1. Równanie Van der Pola:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

2. Równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

3. II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

a) Równanie Van der Pola:

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Niech $u = y'$. Wtedy $u' = y''$. Układ równań pierwszego rzędu to:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = u(1 - y^2) - y \end{cases}$$

b) Równanie Blasiusa:

$$y''' = -yy''$$

Niech $u = y'$, $v = u' = y''$. Wtedy $v' = u'' = y'''$. Układ równań pierwszego rzędu to:

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = -yv \end{cases}$$

c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

$$y_2'' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

Niech $u_1 = y_1'$, $u_2 = y_2'$. Wtedy $u_1' = y_1''$, $u_2' = y_2''$. Układ równań pierwszego rzędu to:

$$\begin{cases} y_1' = u_1 \\ y_2' = u_2 \\ u_1' = -GMy_1/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \\ u_2' = -GMy_2/(y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \end{cases}$$

## Zadanie 2

Otrzymaliśmy dwa równania różniczkowe wraz z warunkami początkowymi:

$$y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t$$

$$y_2' = \frac{t(y_2^2 - 1)}{y_1}$$

$$y_1(1) = 1$$

$$y_2(1) = 0$$

naszym celem było przekształcenie ich do autonomicznego problemu początkowego. W tym celu wprowadziliśmy nową zmienną

$$y_3 = t$$

Jej pochodna po $t$ wynosi:

$$y_3' = \frac{dt}{dt} = 1$$

Do dwóch początkowych równań dokładamy trzecie z $y_3(t)$ i otrzymujemy:

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{t} + y_2 t \\ y_2' = \frac{t(y_2^2 - 1)}{y_1} \\ y_3' = 1 \end{cases}$$

z warunkami początkowymi

$$y_1(1) = 1$$

$$y_2(1) = 0$$

$$y_3(1) = 1$$

Dzięki temu nasz układ stał się autonomiczny. Dodatkowo otrzymaliśmy następujące warunki początkowe:

## Zadanie 3

W zadaniu 3 dostaliśmy problem początkowy:

$$y' = \sqrt{1 - y}$$

$$y(0) = 0$$

Naszym celem było pokazanie, że funkcja $y(t) = \frac{t(4-t)}{4}$ spełnia równanie i warunek początkowy oraz wyznaczyć dziedzinę, dla której $y(t)$ jest rozwiązaniem tego problemu.

Najpierw sprawdziliśmy warunek początkowy:

$$y(0) = \frac{0(4-0)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Z obliczeń wynika, że warunek początkowy $y(0) = 0$ jest spełniony.

Następnie wyznaczyliśmy pochodną funkcji $y(t)$:

$$y(t) = \frac{4t - t^2}{4} = t - \frac{1}{4}t^2$$

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{2}t$$

Naszym następnym celem było obliczenie $y'(t) = \sqrt{1 - y(t)}$. W tym celu za $y$ podstawiliśmy podaną funkcję $y(t)$:

$$\sqrt{1-y(t)} = \sqrt{1 - \frac{4t - t^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-(4t-t^2)}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 4t + t^2}{4}} = \sqrt{\frac{(2-t)^2}{4}} = \frac{|t-2|}{2}$$

Finalnie otrzymaliśmy równanie

$$1 - \frac{1}{2}t = \frac{|t-2|}{2}$$

Rozważyliśmy dwa przypadki:

I. Dla $t \geq 2$:

$$1 - \frac{1}{2}t = \frac{t-2}{2} / * 2$$
$$2 - t = t - 2$$
$$-2t = -4$$
$$t = 2$$

II. Dla $t < 2$:

$$1 - \frac{1}{2}t = \frac{2-t}{2} / * 2$$
$$2 - t = 2 - t$$

Otrzymaliśmy tożsamość, a zatem każdy element $t < 2$ spełnia równanie.

Następnie rozważyliśmy przypadek, gdzie $y \leq 1$, ponieważ pierwiastek z liczby ujemnej nie jest liczbą rzeczywistą. W tym przypadku:

$$\frac{t(4-t)}{4} \leq 1$$
$$4t - t^2 \leq 4$$
$$t^2 - 4t + 4 \geq 0$$
$$(t-2)^2 \geq 0$$

Tą nierówność spełnia nam każda wartośc $t$, zatem $t \in \mathbb{R}$.

Łącząc warunki oraz dziedzinę to $t \in (-\infty, 2]$.

## Zadanie 4

W zadaniu 4 mieliśmy równanie różniczkowe zwyczajne:

$$y' = -5y$$

oraz warunek początkowy $y(0) = 1$. Dodatkowym założeniem była wartość $h = 0.5$ przy rozwiązywaniu równania numerycznie.

W podpunkcie $a$) mieliśmy sprawdzić, czy rozwiązania powyższego równania są stabile. W tym celu najpierw rozwiązaliśmy równanie:

$$\begin{gathered} y' = -5y \\ \frac{dy}{dx} = -5y \\ \frac{dy}{y} = -5dx \\ \int \frac{1}{y} dy = \int -5dx \\ \ln|y| = -5x + C \\ |y| = e^{-5x+C} = e^C e^{-5x} \\ y = \pm e^C e^{-5x} \end{gathered}$$

Niech $A = e^C$, wtedy

$$y = Ae^{-5x}$$

Dodatkowo mamy warunek początkowy $y(0) = 1$, zatem:

$$y(0) = Ae^{-5*0} = Ae^0 = A = 1$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$y = e^{-5x}$$

Aby sprawdzić, czy rozwiązania są stabilne, obliczamy granicę dla $x$ dążącego do $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-5x} = 0$$

Otrzymaliśy wartość 0, co oznacza, że rozwiązania są stabilne.

Podpunkt $b$) polegał na udowodnieniu, że metoda Euler'a jest zbieżna, tzn., że

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty \\ nh = t}} y_n = y(t)$$

Metoda Eulera dla równania $y' = f(t, y)$ ma postać:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

W naszym przypadku $f(t, y) = -5y$, więc:

$$y_{n+1} = y_n - 5hy_n = (1 - 5h)y_n$$

Iterując, otrzymujemy:

$$y_n = (1 - 5h)^n y_0$$

Z warunku początkowego $y_0 = 1$, więc:

$$y_n = (1 - 5h)^n$$

Chcemy pokazać, że

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = y(t) = e^{-5t}$$

Zauważmy, że $(1 - 5h)^n = \left(1 - 5\frac{t}{n}\right)^n$. Wiemy, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Zatem:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t}} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5t}{n}\right)^n = e^{-5t} = y(t)$$

To dowodzi, że metoda Eulera jest zbieżna dla tego problemu.

Podpunkt $c$) polegał na sprawdzeniu, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem $h$.

Metoda Eulera jest numerycznie stabilna, jeśli błędy numeryczne nie rosną nieograniczenie w trakcie obliczeń. Dla równania $y' = \lambda y$, metoda Eulera daje $y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n$. Stabilność wymaga, aby $|1 + h\lambda| \leq 1$.

W naszym przypadku $\lambda = -5$ i $h = 0.5$. Zatem:

$$|1 + (0.5)(-5)| = |1 - 2.5| = |-1.5| = 1.5$$

Ponieważ $1.5 > 1$, metoda Eulera nie jest stabilna dla tego równania z krokiem $h = 0.5$. Błędy numeryczne będą rosły w trakcie obliczeń.

$d$) Oblicz numeryczne wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Eulera.

Zaczynamy od $y_0 = y(0) = 1$. Używamy kroku $h = 0.5$. Chcemy znaleźć przybliżenie $y(0.5)$, co odpowiada $y_1$.

$$y_1 = y_0 + hf(0, y_0) = y_0 + h(-5y_0) = 1 + 0.5(-5 \cdot 1) = 1 - 2.5 = -1.5$$

Zatem przybliżona wartość rozwiązania dla $t = 0.5$ wynosi $y_1 = -1.5$.

$e$) W tym podpukncie sprawdziliśmy, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z krokiem $h = 0.5$.

Niejawna metoda Eulera dla równania $y' = \lambda y$ ma postać:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}$$

$$y_{n+1}(1 - h\lambda) = y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n$$

Stabilność wymaga, aby $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \leq 1$.

W naszym przypadku $\lambda = -5$ i $h = 0.5$. Zatem:

$$\left|\frac{1}{1 - (0.5)(-5)}\right| = \left|\frac{1}{1 + 2.5}\right| = \left|\frac{1}{3.5}\right| = \frac{1}{3.5} = \frac{2}{7}$$

Ponieważ $\left|\frac{2}{7}\right| \leq 1$, niejawna metoda Eulera jest stabilna dla tego równania z krokiem $h = 0.5$.

$f$) W celu obliczenia wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a użyliśmy $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$. Dla naszego równania $y' = -5y$:

$$y_1 = y_0 + h(-5y_1)$$

$$y_1 = 1 + 0.5(-5y_1)$$

$$y_1 = 1 - 2.5y_1$$

$$3.5y_1 = 1$$

$$y_1 = \frac{1}{3.5} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

Zatem przybliżona wartość rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawna metodą Eulera wynosi $y_1 = \frac{2}{7}$.

$g$) W celu wyznaczenia maksymalnej dopuszczalnej wartości kroku $h$ zaimplementowaliśmy jawną metodę Eulera i porównaliśmy błędy otrzymane dla kolejnych wyrazów ciągu $h = 1/n$. Otrzymaliśmy następujące wyniki:

```
Maksymalna dopuszczalna wartość kroku h=0.001938
Liczba kroków, które należy wykonać n=258
```

$h$) Podpunkt ten dotyczył maksymalnej dopuszczajnej wartości kroku $h$, przy której wartość $y_{n+1}$ w niejawnej metodzie Euler'a przy użyciu bezpośredniej iteracji pozostaje zbieżna. Do metod bezpośredniej iteracji użyto:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n$$
$$y_{n+1}^{(k+1)} = \phi(y_{n+1}^{(k)})$$

Dla niejawnej metody Eulera zastosowanej do $y' = -5y$, mamy:

$$y_{n+1} = y_n - 5hy_{n+1}$$

Iteracja bezpośrednia wyglądałaby tak:

$$y^{(i+1)} = y_n - 5hy^{(i)}$$

Aby iteracja była zbieżna, współczynnik przy $y^{(i)}$ musi mieć wartość bezwzględną mniejszą niż 1:

$$|-5h| < 1$$
$$5h < 1$$
$$h < \frac{1}{5} = 0.2$$

Maksymalny dopuszczalny krok dla zbieżności bezpośredniej iteracji wynosi $h < 0.2$.

Czy uzasadnione byłoby użycie metody Newtona? Niejawna metoda Eulera prowadzi do równania nieliniowego (w ogólnym przypadku), które trzeba rozwiązać dla $y_{n+1}$. W naszym konkretnym przypadku równanie jest liniowe:

$$y_{n+1} + 5hy_{n+1} - y_n = 0$$
$$(1 + 5h)y_{n+1} - y_n = 0$$
$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + 5h}$$

Ponieważ w tym przypadku otrzymujemy równanie liniowe dla $y_{n+1}$, metoda Newtona, która jest przeznaczona do rozwiązywania równań nieliniowych, byłaby niepotrzebna i bardziej kosztowna obliczeniowo. Bezpośrednie rozwiązanie algebraiczne jest prostsze i dokładniejsze.

## Zadanie 5

W zadaniu 5 mieliśmy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

i naszym zadaniem było wyznaczenie wartości kroku $h$, dla której metoda Euler'a jest stabilna dla tego układu równań.

Najpierw przekształcamy układ równań do postaci macierzowej:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Kolejnie wyznaczymy równanie charakterystyczne macierzy $A$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)^2 - (1)(-1) = 0$$

$$(2+\lambda)^2 + 1 = 0$$

$$(2+\lambda)^2 = -1$$

$$2 + \lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = -2 + i, \quad \lambda_2 = -2 - i$$

Aby metoda Euler'a była stabila numerycznie, musi ona spełniać warunek $|1 + h\lambda| \leq 1$

$$|1 + h\lambda_1| = |1 + h(-2+i)| = |(1-2h) + ih| \leq 1$$

$$|1 + h\lambda_2| = |1 + h(-2-i)| = |(1-2h) - ih| \leq 1$$

Rozważamy moduł kwadratu

$$|(1-2h) + ih|^2 = (1-2h)^2 + h^2 = 1 - 4h + 4h^2 + h^2 = 1 - 4h + 5h^2 \leq 1$$

$$1 - 4h + 5h^2 \leq 1 \implies 5h^2 - 4h \leq 0 \implies h(5h-4) \leq 0$$

Nierówność $h(5h-4) \leq 0$ jest spełniona dla $0 \leq h \leq \frac{4}{5}$. Zatem wynika z tego, że metoda Eulera jest stabilna dla $h \in (0, \frac{4}{5}]$.

## Zadanie 6

W tym zadaniu mieliśmy za zadanie rozwiązać problem początkowy z równaniem różniczkowym zwyczajnym:

$$y' = \alpha t^{\alpha-1}$$

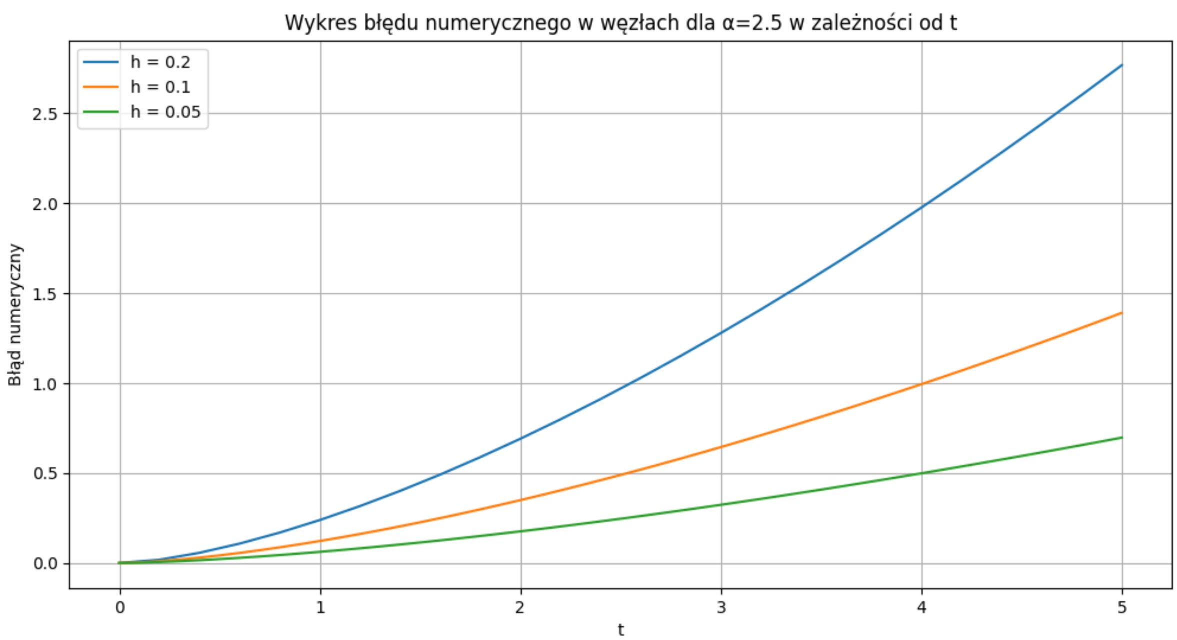
z warunkiem początkowym

$$y(0) = 0$$

Rozwiązaniem analitycznym tego problemu jest funkcja

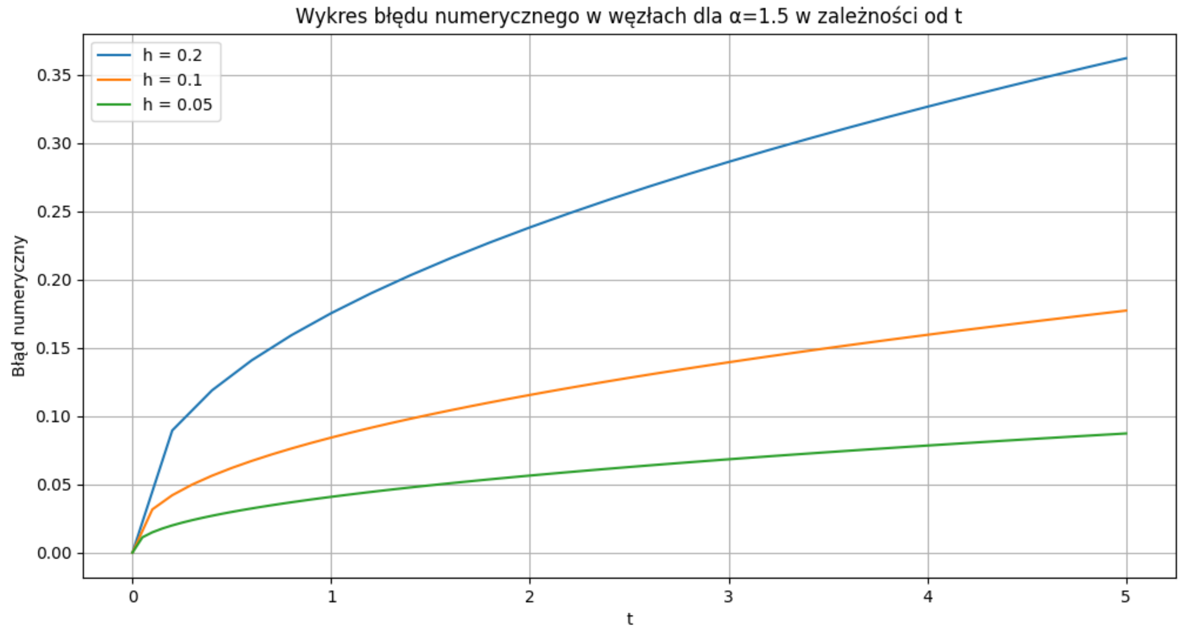
$$y(t) = t^{\alpha}$$

Naszym celem było zastosowanie metody Eulera do numerycznego rozwiązania tego problemu dla trzech różnych wartości parametru $\alpha$: 2.5, 1.5 oraz 1.1. Dla każdej wartości $\alpha$, przeprowadziliśmy obliczenia z użyciem trzech różnych rozmiarów kroku $h$: 0.2, 0.1 oraz 0.05. Po przeprowadzeniu symulacji, obliczyliśmy błąd numeryczny w węzłach rozwiązania, a następnie wyznaczyliśmy empiryczny rząd zbieżności metody Eulera.



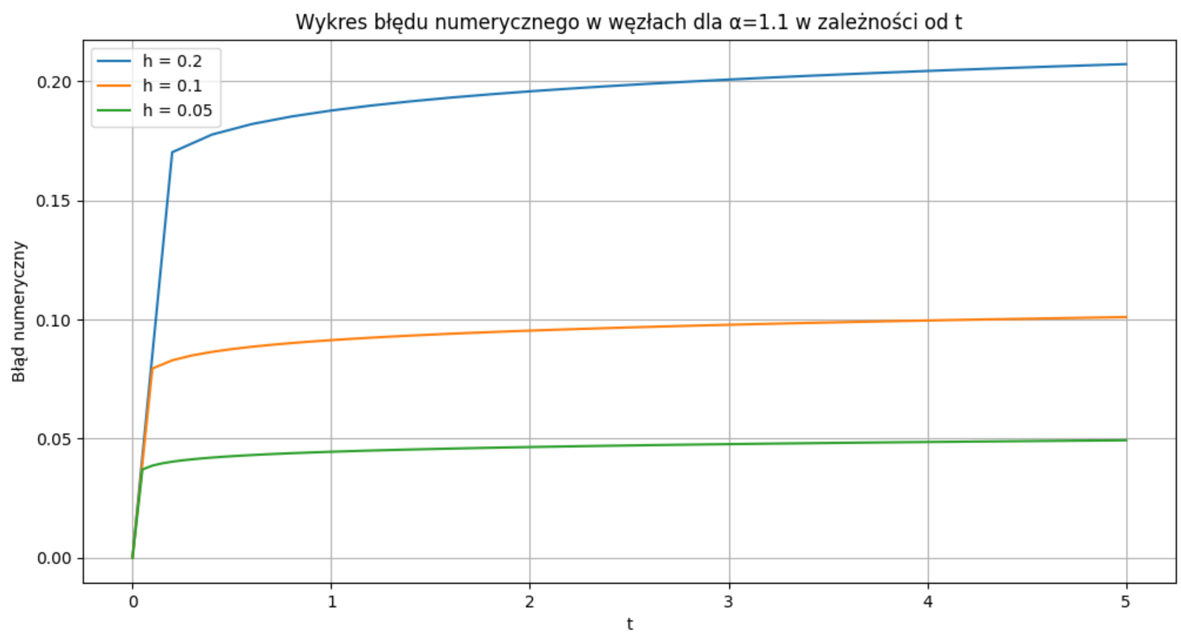

*Wykres 1. Błąd numeryczny dla $\alpha = 2.5$*

Dla różnych wartości $h$ otrzymujemy ten sam kształt wykresu przypominający funkcję kwadratową. Mniejsze wartości $h$ dają bardziej "płaskie" wykresy, co pokazuje, że zmniejszenie kroku wpływa na zmniejszenie błędu.




*Wykres 2. Błąd numeryczny dla $\alpha$ = 1.5*

Dla różnych wartości $h$ otrzymujemy ten sam kształt wykresu, który różni się od poprzednio otrzymanych kształtów. Funkcje gwałtownie rosną na początku, a potem rosną coraz wolniej. Przypominają one funkcję $\sqrt[n]{x}$. Mniejsze wartości $h$ znów dają bardziej "płaskie" wykresy, co pokazuje, że zmniejszenie kroku wpływa na zmniejszenie błędu.



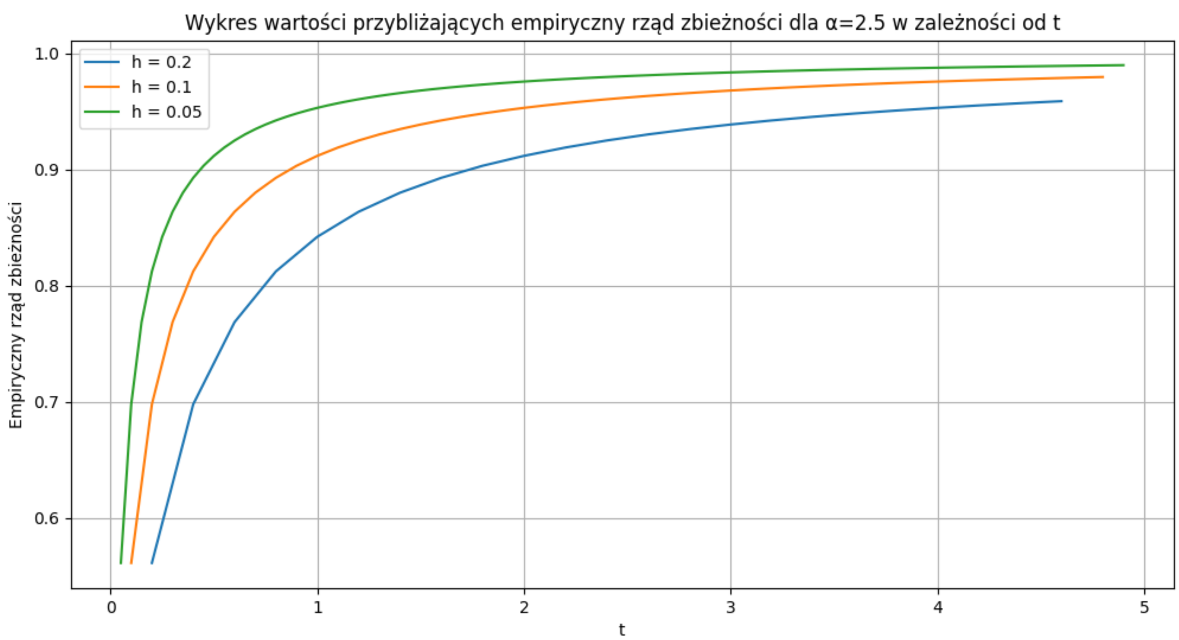
*Wykres 3. Błąd numeryczny dla $\alpha$ = 1.1*

Dla różnych wartości $h$ otrzymujemy ten sam kształt wykresu, który przypomina poprzednio otrzymany kształt, lecz funkcje rosną bardziej gwałtownie na początku, po czym tempo wzrostu gwałownie maleje.

Dla każdej przetestowanej wartości $\alpha$ zmniejszenie kroku powoduje zmniejszenie błędu numerycznego. Wykresy błędu różnią się jednak kształtem. Dla małych wartości $\alpha$ błędy są mniejsze niż dla dużych wartości, co wynika z tego, że wartości funkcji są mniejsze.

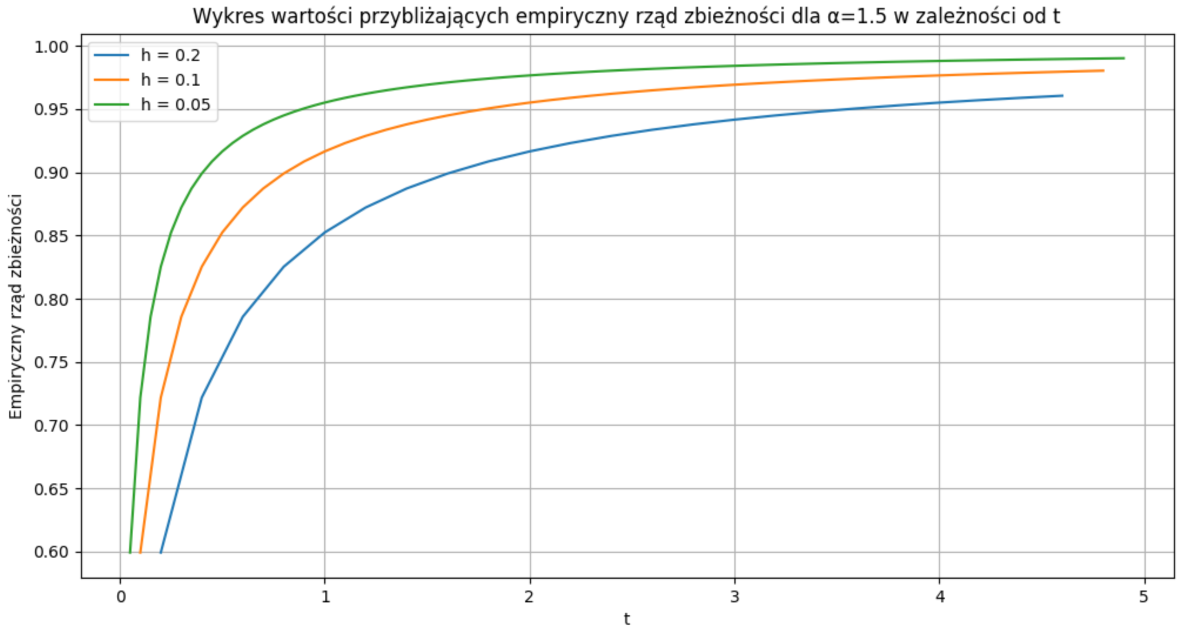
Następnie wyznaczyliśmy eksperymetalnie rząd zbieżności dla każdej wartości $\alpha$ i $h$ ze wzoru

$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}}$$



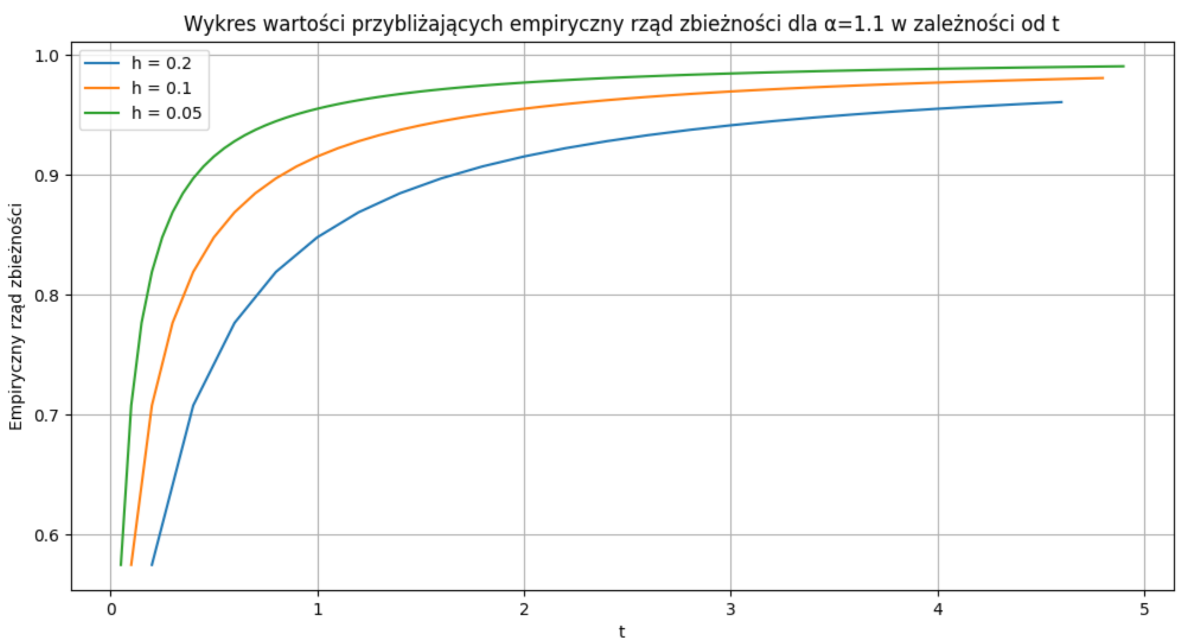

*Wykres 4. Wartości przybliżające empiryczny rząd zbieżności dla $\alpha$ = 2.5*

Wartość empirycznego rzędu zbieżności dąży asymptotycznie do 1 niezależnie od $h$. Dla większych wartości $h$ zbieżność jest szybsza.




*Wykres 5. Wartości przybliżające empiryczny rząd zbieżności dla* $\alpha = 1.5$

Tak samo jak wcześniej, wartość graniczna empirycznego rzędu jest niezależna od $h$, a zbieżność do 1 jest szybsza dla małych wartości $h$.




*Wykres 6. Wartości przybliżające empiryczny rząd zbieżności dla* $\alpha = 1.1$

Wykres wygląda tak samo jak oba poprzednie wykresy.

Jak widać wartość empirycznego rzędu zbieżności jest niezależna od badanej funkcji i przyjętego kroku. Wynosi ona 1, co jest zgodne z oczekiwaniami.

Podsumowując, w laboratorium tym poznaliśmy sposoby przekształcania równań różniczkowych, zbadaliśmy własności metody Eulera oraz zastosowaliśmy ją do rozwiązywania równań. Metoda Eulera z dobranym odpowiednio małym krokiem okazała się skutecznym sposobem rozwiązania zadanych równań.

## Bibliografia


- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab09/lab9-intro.pdf*