

Laboratorium 10 - Równania różniczkowe część II

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

4 czerwca 2025

Wstęp

W ramach tego laboratorium będziemy kontynuować równania różniczkowe, ale tym razem skupimy się na ich zastosowaniu numerycznym. W tym celu wykorzystując model Lotki-Vollery oraz różne metody rozwiązywania równań różniczkowych przeprowadzimy symulację układu oraz sprawdzimy dodatkowe rzeczy, takie jak niezmiennik i portret fazowy. Potem na podstawie przykładowych danych oszacujemy wartości parametrów modelu.

Zadanie 1

a) Na początku otrzymaliśmy wzór z modelu Lotki-Vollery, który wygląda następująco:

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y)$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x)$$

Następnie przekształciliśmy równania do postaci, w których można było użyć poszczególnych wariantów metody Eulera. Dla jawnej metody Eulera otrzymaliśmy

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot x_k(\alpha_1 - \beta_1 y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y_k(-\alpha_2 + \beta_2 x_k)$$

Dla niejawnej metody Eulera użyliśmy funkcji `scipy.optimize.fsolve`

Dla półjawnej metody Eulera

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + h \cdot (-\alpha_1 + \beta_1 y_k)}$$

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y_k(-\alpha_2 + \beta_2 x_{k+1})$$

Następnie, używając wyznaczonych wzorów, zaimplementowaliśmy te metody w Pythonie. Potem zaimplementowaliśmy metodę Rungego-Kutty 4-go rzędu

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_k, y_k)$$

$$k_2 = f(t_k + h_k k_1/2, y_k + h_k k_1/2)$$

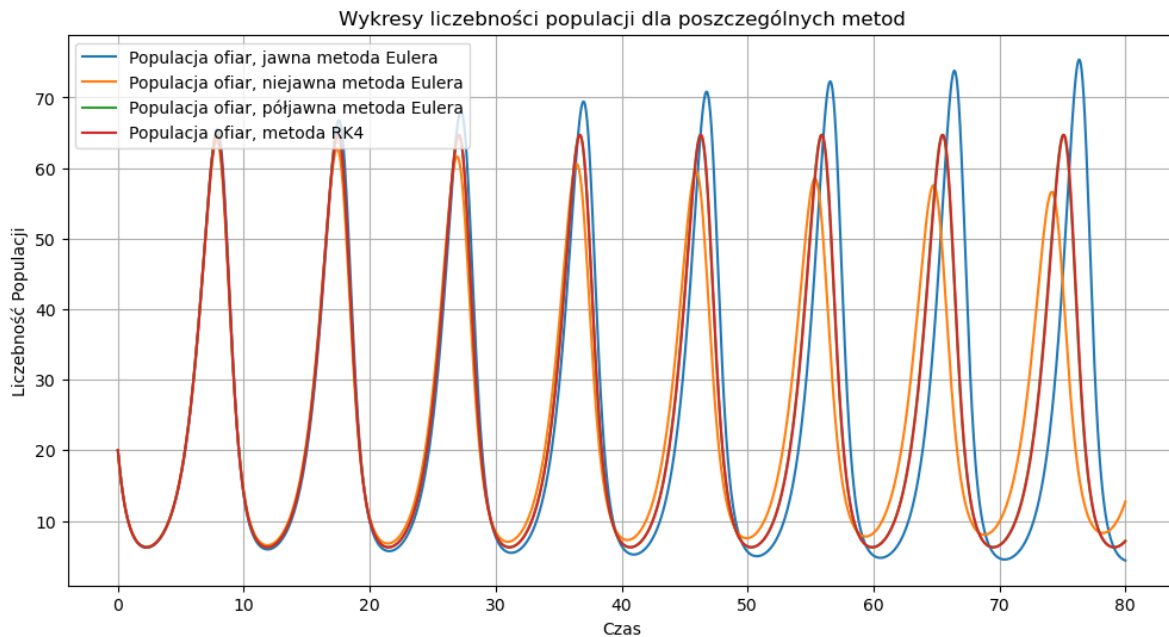
$$k_3 = f(t_k + h_k k_2/2, y_k + h_k k_2/2)$$

$$k_4 = f(t_k + h_k k_3, y_k + h_k k_3)$$

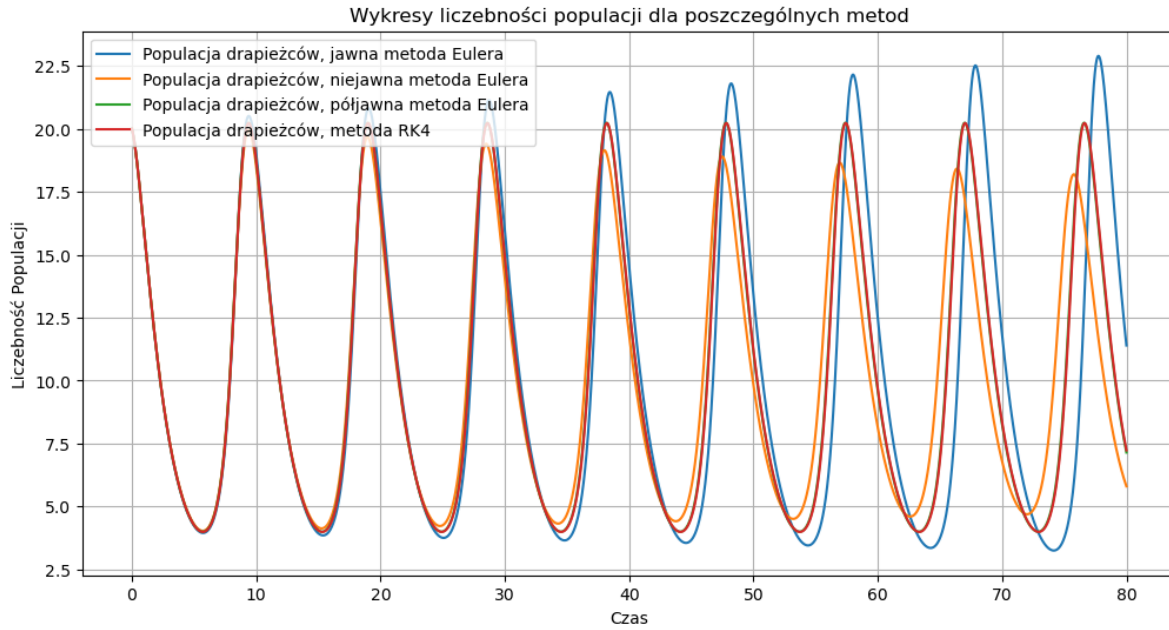
Przyjęliśmy $f = x'$ dla x-ów i $f = y'$ dla y-ów.

Otrzymane rozwiązania układu równań uzyskane różnymi metodami nanieśliśmy na wspólny wykres.

[20. 19.8019802 19.60632461 ... 7.14123016 7.16132684
7.18166491]



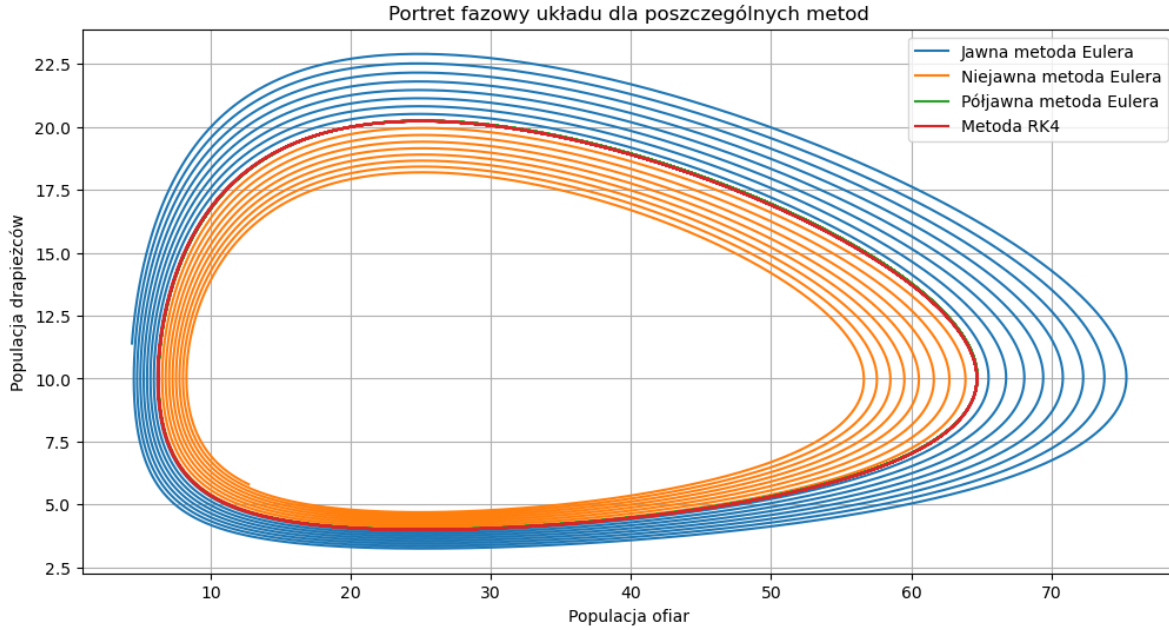
Wykres 1. Liczebności populacji ofiar dla poszczególnych metod rozwiązywania równań w zależności od czasu



Wykres 2. Liczebności populacji drapieżców dla poszczególnych metod rozwiązywania równań w zależności od czasu

Widoczne są cykliczne naprzemienne wahania obu populacji. Populacja ofiar dochodzi do wyższych liczebności niż populacja drapieżników. Widać różnice między poszczególnymi liniami wskazując na wpływ wybranej metody numerycznej na dokładność symulacji. Różnice w dokładności zwiększają się z czasem.

Następnie stworzyliśmy wspólny wykres portretów fazowych układów dla poszczególnych metod.



Wykres 3. Portret fazowy układu dla poszczególnych metod rozwiązywania równań

Widoczne są pętle, co oznacza, że układ jest cykliczny. Fizyczna interpretacja jest taka, że populacje ofiar i drapieżników współistnieją w dynamicznej równowadze: wzrost populacji ofiar prowadzi do wzrostu populacji drapieżników, co z kolei powoduje spadek populacji ofiar, a następnie spadek populacji drapieżników, cykl ten się powtarza. Dla metod RK4 i półjawnej cykle mają bardzo małe różnice. Dla metody jawnej cykle coraz bardziej odbiegają na zewnątrz, a dla niejawnej do wewnątrz.

b) Następnym naszym zadaniem było wyznaczenie warunków początkowych liczebności, dla których populacja nie ulegnie zmianie. W tym celu ręcznie rozwiązaliśmy układ równań

$$x' = x(\alpha_1 - \beta_1 y) = 0$$

$$y' = y(-\alpha_2 + \beta_2 x) = 0$$

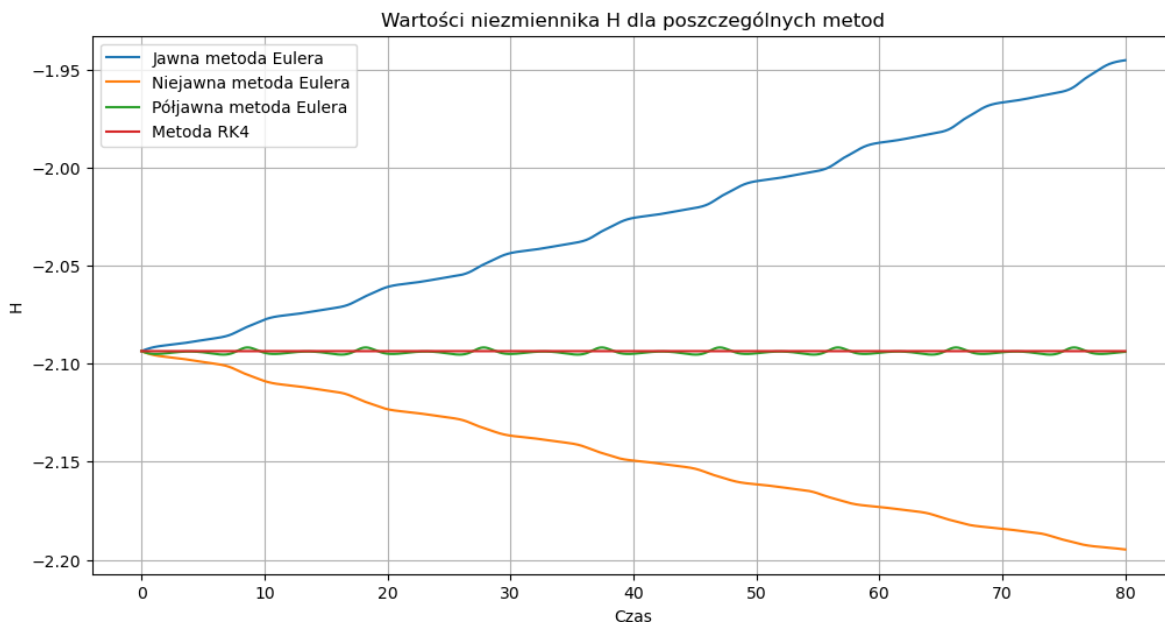
Układ ten ma cztery przypadki do rozważenia: 1. $x = 0$ i $y = 0$ - wtedy to układ ma rozwiązanie $(0, 0)$ 2. $x = 0$ i $-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$ - wtedy z racji, że $x = 0$ otrzymujemy, że $\alpha_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\alpha_2 > 0$ 3. $-\alpha_1 + \beta_1 y = 0$ i $y = 0$ - wtedy z racji, że $y = 0$ otrzymujemy, że $\alpha_1 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $\alpha_1 > 0$ 4. $-\alpha_1 + \beta_1 y = 0$ i $-\alpha_2 + \beta_2 x = 0$ - wtedy otrzymujemy, że rozwiązaniem układu jest $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$

Zatem finalnie wynika, że liczebność populacji nie ulegnie zmianie, gdy wartości początkowe będą wynosiły $(0, 0)$ lub $(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$.

Podpunkt c) polegał na wyznaczeniu wartości niezmiennika dla poszczególnych metod. Wzór na jego wartość to

$$H(x, y) = \beta_2 x + \beta_1 y - \alpha_2 \ln(x) - \alpha_1 \ln(y)$$

Otrzymane wartości nanieśliśmy na poniższy wykres



Wykres 4. Wartości niezmiennika H dla poszczególnych metod rozwiązywania równań w zależności od czasu

Niezmiennik jest zachowany dla metod RK4 i półjawnej metody Eulera, dla metody jawnej rośnie, a niejawnej maleje. Pokazuje to dokładność metody RK4 i półjawnej.

d) W ostatnim podpunkcie załadowaliśmy dane z załączonego pliku `LynxHare.txt`. Do szacowania współczynników $\theta = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]$ użyliśmy półjawnej metody Eulera. Zaimplementowaliśmy obie podane funkcje kosztu

$$L_1(\theta) = \sum_{i=0}^T ((l_i - \hat{l}_i)^2 + (h_i - \hat{h}_i)^2),$$

$$L_2(\theta) = -\sum_{i=0}^T l_i \ln \hat{l}_i - \sum_{i=0}^T h_i \ln \hat{h}_i + \sum_{i=0}^T \hat{l}_i + \sum_{i=0}^T \hat{h}_i.$$

Następnie oszacowaliśmy współczynniki używając funkcji `scipy.optimize.minimize`, z parametrem `method='Nelder-Mead'` i argumentami początkowymi takimi jak w poprzednim zadaniu $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = [1, 0.5, 0.1, 0.02]$

Optimization terminated successfully.

Current function value: 161999.460040

Iterations: 842

Function evaluations: 1411

[2.85357928e-13 5.15984032e+01 4.25899443e-03 1.84599446e+00]

Optimization terminated successfully.

Current function value: -17511.956554

Iterations: 396

Function evaluations: 679

[1.43146198e-11 5.01665882e+01 3.96088255e-03 1.79383283e+00]

Otrzymaliśmy wyniki $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = [2.85357928^{-13}, 51.5984032, 0.00425899443, 1.84599446]$ dla L_1 i $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2] = [1.43146198^{-11}, 50.1665882, 0.00396088255, 1.79383283]$ dla L_2 . Wszystkie parametry oprócz α_1 są bardzo zbliżone w obu przypadkach. α_1 w obu przypadkach jest bardzo małe.

Podsumowanie

W ramach laboratorium przeprowadziliśmy analizę numeryczną modelu drapieżnik-ofiara (Lotki-Volterra). Najpierw zaimplementowano rozwiązania równań różniczkowych metodą Eulera (jawną, niejawną i półjawną) oraz metodą RK4, a następnie przeprowadzono symulacje układu dla podanych parametrów i warunków początkowych. Sporządzono wykresy liczby drapieżników oraz portret fazowy. Sprawdzono również zachowanie niezmiennika układu. Następnie wyestymowano parametry modelu na podstawie rzeczywistych danych populacyjnych, wykorzystując metody optymalizacji numerycznej. Otrzymane wyniki potwierdziły poprawność modelu i dobrane parametry.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab09/lab9-intro.pdf*