Laboratorium 04 - Efekt Rungego

Błażej Naziemiec i Szymon Żuk

30 marca 2025

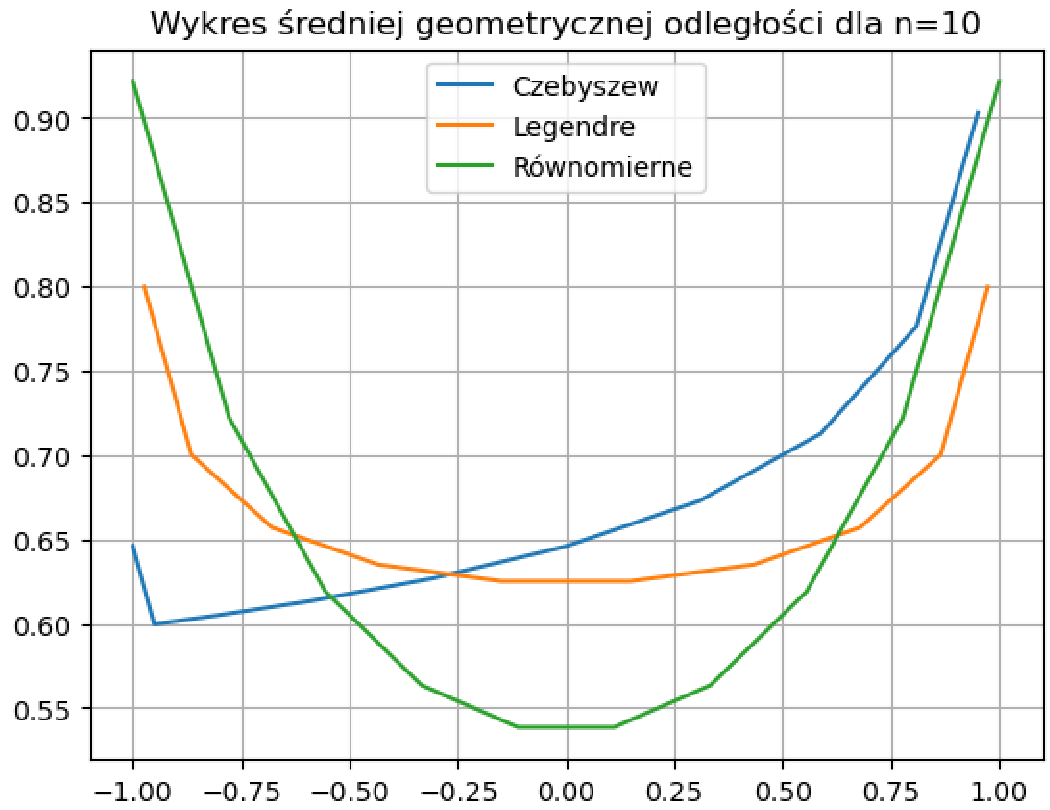
Wstęp

Celem laboratorium było zapoznanie się z efektrm Rungego, czyli pogarszaniu się interpolacji wraz z zwiększaniem liczby węzłów. Aby to zaprezentować, należało zaimplementować interpolację wielomianową w kilku wariantach: wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami, kubicznymi funkcjami sklejanymi z równoodległymi węzłami oraz wielomianów Lagrange'a z węzłąmi Czebyszewa. Dodatkowo dla przedziału $[-1, 1]$ należało wygenerować punkty: Czebyszewa, Legrendre'a oraz równomiernie rozłożone dla $n = 10, 20, 50$.

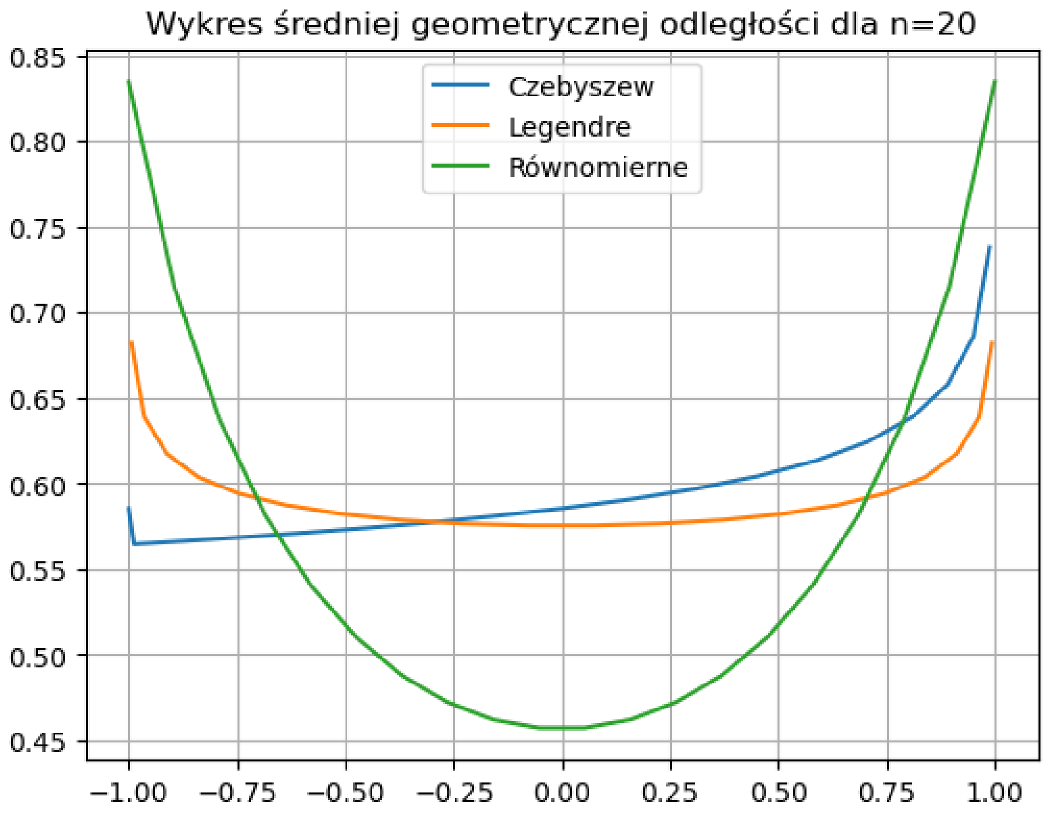
Najpierw używając wzoru na punkty Czebyszewa:

$$t_i = -\cos\left(\frac{i}{n}\pi\right), \quad i = 0, \ldots, n$$

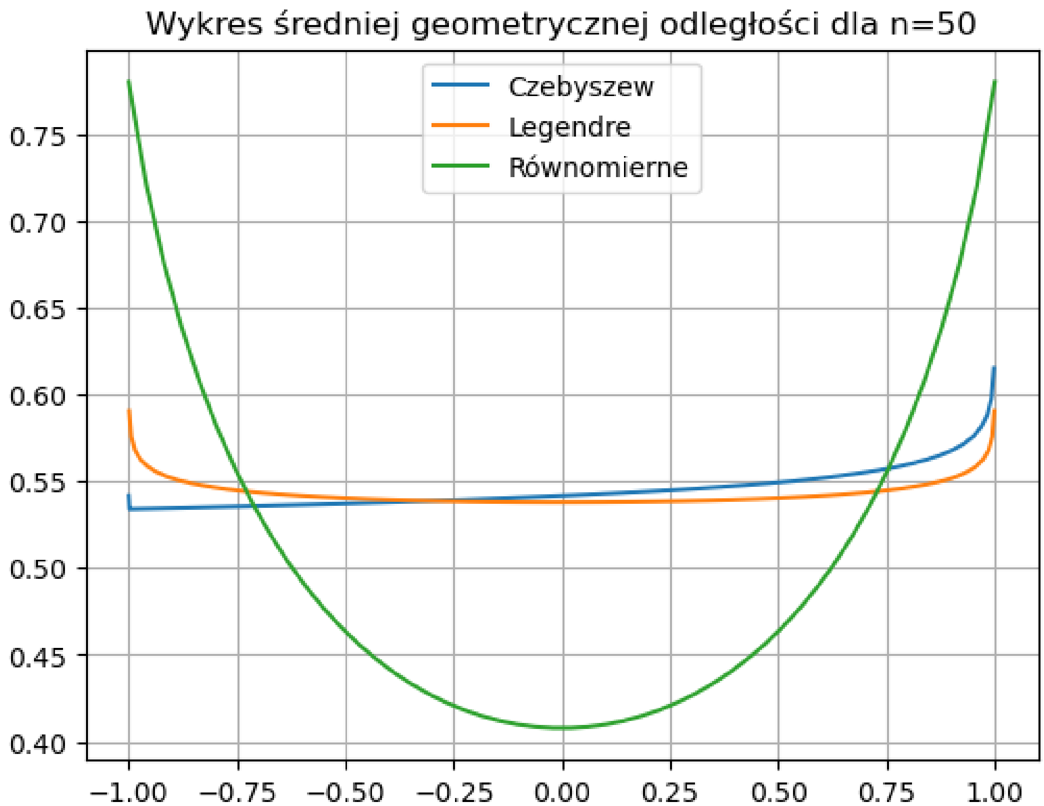
funkcji `np.polynomial.legendre.leggauss(n)` i `np.linspace(-1, 1, n)` wyznaczyliśmy odpowiednio punkty Czybyszewa, Legendre'a i równomiernie rozmieszczone. Następnie dla każdego zbioru punktów i dla $n = 10, 20, 50$ wyznaczyliśmy wykresy średniej geometrycznej odległości od pozostałych punktów.



Wykres 1. Średnia geometryczna odległości dla n=10



Wykres 2. Średnia geometryczna odległości dla n=20



Wykres 3. Średnia geometryczna odległości dla n=50

Jak widać na wykresach 1-3, średnia geometryczna odległości jest bardzo zbliżona dla wszystkich punktów Czebyszewa i Legendre'a, a dla punktów równomiernie rozłożonych rośnie w zależności od odległości punktu od 0. Im większe n tym gładszy wykres i w przypadku punktów Legendre i Czebyszewa mniejsza średnia dla wartości brzegowych.

W następnej części zadania mieliśmy wyznaczyć wielomiany interpolujące funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ na przedziale } [-1,1]\,,$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0,2\pi]\,,$$

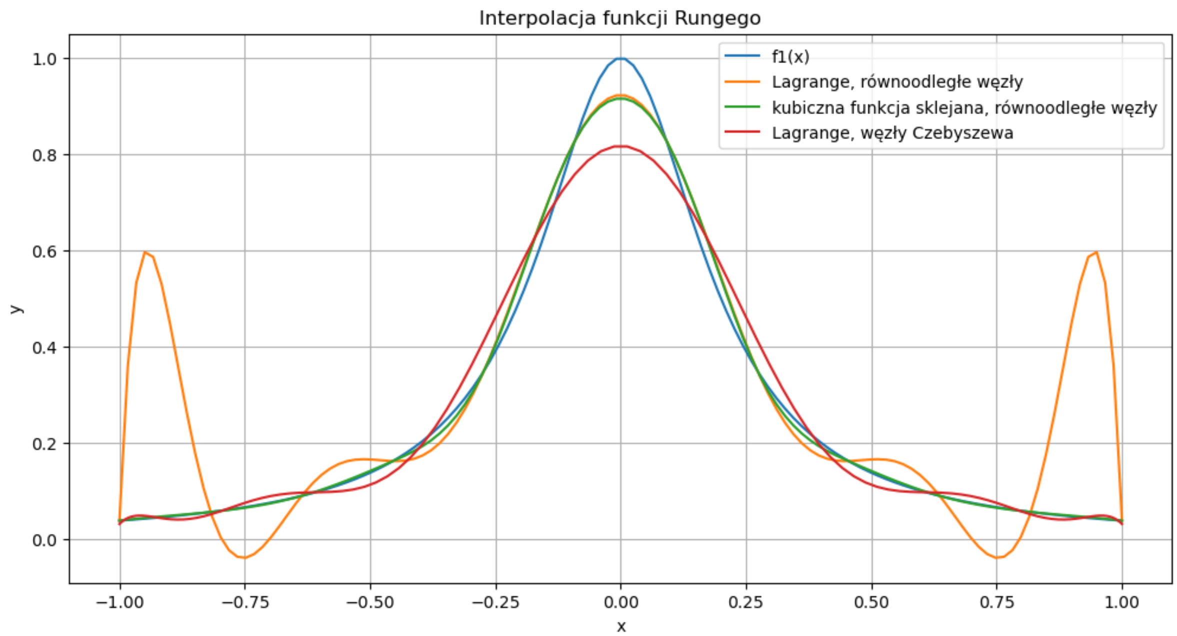
za pomocą

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

Używając funkcji `np.linspace(a, b, n)` i wzoru na węzły Czebyszewa:

$$x_j = -\cos(\theta_j) \quad \theta_j = \frac{2j-1}{2n}\pi,\ 1 \leq j \leq n\,.$$

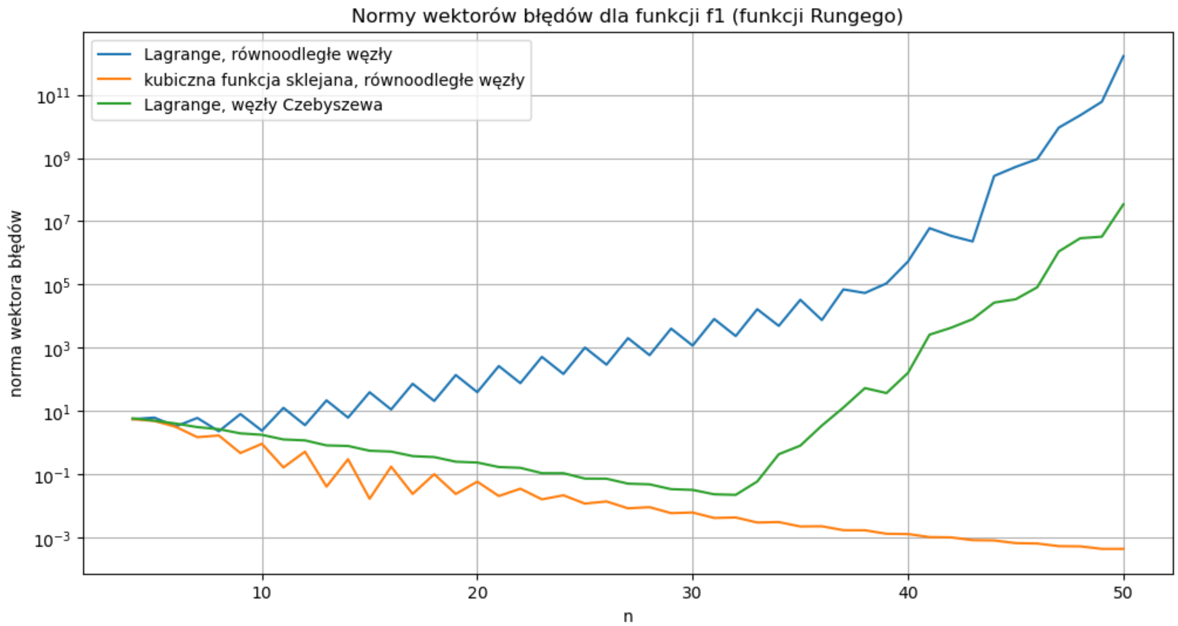
wyznaczyliśmy odpowiednio węzły równoodległe i Czebyszewa dla $n = 12$ oraz zbiór punktów do próbkowania dla $n = 120$ (10 razy gęstszy zbiór). Następnie obliczyliśmy wartości funkcji Rungego dla węzłów. Potem używając funkcji `scipy.interpolate.lagrange(x_vec, y_vec)` i `scipy.interpolate.CubicSpline(x_vec, y_vec)` otrzymaliśmy wielomiany interpolacyjne Lagrange'a z równoogległumi węzłami, kubiczną funkcję sklejaną z równoogległumi węzłami i wielomiany interpolacyjne Lagrange'a z węzłami Czebyszewa.



Wykres 4. Interpolacja funkcji Rungego

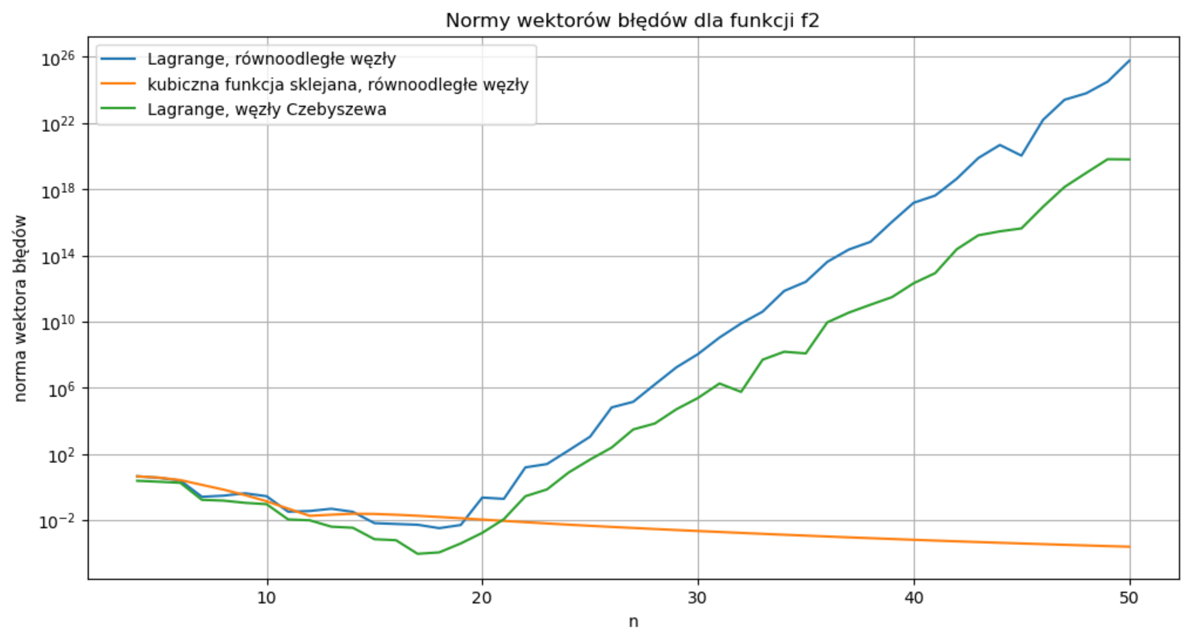
Jak widać funkcje interpolacyjne są w większości punktów bardzo zbliżone do funkcji Rungego. W pobliżu $x = 0$ funkcje interpolacyjne przyjmują trochę za małe wartości, w szczególności wielomian Lagrange'a z węzłami Czebyszewa. Dla $abs(x) > 0.6$ wielomian interpolacyjny Lagrange'a z równoodległymi węzłami ma wartości znacznie odbiegające od interpolowanej funkcji. Najlepszym przybliżeniem jest zatem kubiczna funkcja sklejana.

Następnie przeprowadziliśmy interpolację funkcji f_1 i f_2 z $n = 4, 5, ..., 50$ korzystając z poprzednio użytych 3 metod. Wygenerowaliśmy zbiory 500 losowych punktów na dziedzinach funkcji, po czym obliczyliśmy wartości funkcji interpolacyjnych dla tych punktów. Następnie wyznaczyliśmy normę wektora błędu dla każdego n i poszczególnych metod.



Wykres 5. Normy wektorów błędów dla funkcji f1

Jak widać na wykresie zdecydowanie najlepszą metodą interpolacji jest kubiczna funkcja sklejana z równoodległymi węzłami. Wielomian Lagrange'a z węzłami Czybyszewa zaczyna tracić dokładność około $n = 33$, a z równoodległymi węzłami jest niedokładny nawet dla małych n. Dla wielomianów Lagrange'a widać tutaj efekt Rungego - dla dużych n interpolacja jest niedokładna.



Wykres 6. Normy wektorów błędów dla funkcji f2

Jak widać na wykresie najlepszą metodą interpolacji jest znowu kubiczna funkcja sklejana z równoodległymi węzłami. Tym razem wielomian Lagrange'a zaczyna tracić dokładność około $n = 20$ i traci ją niezależnie od użytych węzłów. Dla wielomianów Lagrange'a znów widać tutaj efekt Rungego - dla dużych n interpolacja jest niedokładna.

Podsumowując w każdym przypadku kubiczna funkcja sklejana z węzłami równoodległymi okazała się być najlepszą metodą interpolacji, a wielomian Lagrange'a z węzłami równoodległymi najgorszą i podatną na efekt Rungego.

Bibliografia

- Materiały zamieszczone na platformie Microsoft Teams w zespole *MOwNiT 2025* w zakładce *Materiały z zajęć/lab04/lab-intro04.pdf*