Lab 5 – Zmienne losowe i rozkłady

Zmienne dyskretne

Zadanie 1. Gra polega na rzucaniu 2 kostkami. Jeżeli suma oczek jest równa 2 otrzymujemy 10 zł, jeżeli jest równa 3 otrzymujemy 5 zł, a w każdym innym przypadku płacimy 1 zł. Skonstruuj model probabilistyczny gry oraz zmienną losowa zwracającą wypłatę. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej.

Zadanie 2. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbom naturalnym $k = 1,2,3, \ldots$ z prawdopodobieństwem $\Pr(X = k) = \frac{c}{3^k}$. Zbuduj model probabilistyczny zjawiska oraz wyznacz stałą c. Oblicz $\Pr(X \geq 4)$.

Rozkład Bernouliego

Schemat Bernouliego dla skończonej ilości prób $\{\omega_j\}, j = 1, \ldots, n;\ \omega_j \in \Omega = \{w, f\}$ przy czym $\Pr(w) = p, \Pr(f) = 1 - p, p > 0$. Zmienna losowa $X: \{w, f\}^n \to \{0, \ldots, n\}$ zwraca ilość wyników typu *w* w ciągu $\{\omega_j\}, j = 1, \ldots, n$. Prawdopodobieństwo uzyskania *k* wyników *w* jest równe

$$Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ponadto $E(X) = np,\ D^2X = np(1 - p)$.

Uwaga, poniższe zadanie 3, to zadanie na rozkład dwupunktowy a nie na rozkład Bernouliego.

Zadanie 3. (Model Bernouliego) Zmienna losowa przyjmuje 2 wartości $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ **,** przy czym $\Pr(x_1) = 0.4$, oraz $E(X) = 0, D^2(X) = 6$. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa X.

Rozkład Poissone'a

Przyjmując model Bernouliego oraz małe *p*, oraz liczba doświadczeń *n* duża, na tyle, że $np = \lambda$ można uznać za stałe, wtedy zmienna $X: \{w, f\}^\infty \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ zwracająca ilość wyników typu *w* w bardzo długiej (praktycznie nieskończonej) próbie ma rozkład

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,3, \ldots \quad ; E(X) = \lambda, \qquad D^2X = \sqrt{\lambda}$$

Rozkład ten może przybliżać rozkład Bernouliego dla dużych $n \geq 100$ i małego $p \leq 0.2$.

Zadanie 4. Wylosowano 90 studentów i utworzono szereg rozdzielczy ich nieobecności w ciągu semestru

nieobecności x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
studenci n_i	12	20	27	18	7	3	2	1

Zakładając, że rozkład nieobecności na zajęciach jest rozkładem Poissone'a oblicz przybliżoną wartość (estymatę) jego rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty, oraz oblicz prawdopodobieństwo, że student będzie nieobecny w ciągu semestru mniej niż dwa razy. Napisz kod w R rozwiązujący temat w przypadku ogólnym, dowolnych danych podanego typu.

Zadanie 5. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania w 200 losowaniach co najwyżej trzech osób leworęcznych z dużej populacji, w której prawdopodobieństwo leworęczności wynosi 0.05.

Zmienna losowa o rozszerzonym rozkładzie potęgowym G^1 (the augmented geometric distribution)

Rozważmy schemat Bernouliego dla nieskończonej ilości prób $\{\omega_j\}, j \in \mathbb{N};\ \omega_j \in \Omega = \{w, f\}$ przy czym $\Pr(w) = p, \Pr(f) = 1 - p, p > 0$. Niech zmienna losowa $Y: \Omega^\infty \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ zwraca indeks k pierwszej próbki takiej, że $\omega_k = w, \omega_j = f, j < k$. Rozkład zmiennej Y będzie dany wzorem

$$\Pr(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1,2,3, \ldots$$

oraz $EY = \frac{1}{p}$, $D^2Y = \frac{1-p}{p^2}$.

Zadanie 6. Doświadczenie polega na rzutach symetryczną kostką aż do wypadnięcia szóstki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie po raz pierwszy w 4 rzucie.

Zadanie 7. Niech $D \subset \mathbb{R}^N$ ograniczony zbiór zwarty w pełni regularny (z brzegiem Lipschitza), $\mathrm{meas}(D) > 0$ oraz poszukiwany podzbiór pełnej miary $S \subset D \subset \mathbb{R}^N;\ \mathrm{meas}(S) > 0$. Założymy, że S posiada skończoną ilość składowych spójnych pełnej miary.

Zakładając, że znamy względną miarę zbioru S, tj. $p = \frac{\text{meas}(S)}{\text{meas}(D)}$ obliczyć, ile losowań należy wykonać, aby wylosować co najmniej 1 punkt z S z zadaną gwarancją $\delta \in (0,1)$? Jest to inaczej pytanie o FHT dla algorytmu PRS.

Zadanie 8. $D = [0,1]^N \subset \mathbb{R}^N, S = [0, 0.1]^N$. Napisz kod w R obliczający oczekiwany FHT, oraz warunek stopu PRS dla zadanej gwarancji δ oraz N. Przedstaw tabelaryczne wyniki obliczeń dla $\delta = 0.6, 0.95; N = 1,2,5,10,50,100$. Czy przedstawiony warunek stopu uważacie za ekonomiczny? Dla $N > 16$ są problemy z arytmetyką przy obliczaniu p!

Uogólniony model Bernouliego – dyskretna zmienna wielowymiarowa o rozkładzie wielomianowym

Rozważmy schemat Bernouliego dla skończonej ilości prób $\{\omega_j\}, j = 1, \ldots, n;\ \omega_j \in \Omega = \{w_1, \ldots, w_r\}$, inaczej próby są o skończonej długości n, każda próba może mieć r różnych wyników. Niech $X_1, \ldots, X_r: \{w_1, \ldots, w_r\}^n \to \{0, \ldots, n\}$ n-wymiarowa zmienna losowa, która zwraca ilości wyników w_i w ciągu próby $\{\omega_j\}, j = 1, \ldots, n$. Niech $(p_1, \ldots, p_r)$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa wylosowania wyników $w_1, \ldots, w_r$ w pojedynczej próbie.

Niech $A_{n_1,\ldots,n_r} = \{X_1 = n_1, \ldots, X_r = n_r\}$, gdzie $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \sum_{i=1}^{r} n_i = n$ to ilości wyników każdego typu w_i w ciągu próby $\{\omega_j\}, j = 1, \ldots, n$. Wtedy:

$$\Pr(A_{n_1,\ldots,n_r}) = \frac{n!}{n_1!, \ldots, n_r!} (p_1)^{n_1}, \ldots, (p_r)^{n_r}$$

ponadto zmienne losowe X_i maja rozkład Bernouliego z parametrami $(p_i, 1 - p_i)$ oraz $\text{cov}(X_i X_j) = -np_i p_j$ dla $i, j = 1, \ldots, r,\ i \neq j$.

Zadanie 9. Napisz kod w R tablicujący rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej uogólnionego rozkładu Bernouliego dla zbioru wartości $r = 3,\ w_1 = jabłko, w_2 = gruszka, w_3 = śliwka,\ n = 5,\ p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.5$. Wyznacz rozkłady brzegowe oraz kowariancję każdej pary zmiennych.

Zadanie 10. Napisz funkcję zwracająca dystrybuantę wielowymiarowego rozkładu wielomianowego.

Zadanie 11. Asystent prowadzi 4 grupy lab o liczebnościach 28, 23, 22 i 27 studentów. W czasie zajęć przeprowadzono pięć wspólnych kolokwiów. Za każdym razem nauczyciel wybierał losowo jedną pracę, aby dokładnie ją sprawdzić. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych prac znajdują się prace ze wszystkich grup? Oblicz wynik numeryczny stosując odpowiednie funkcje środowiska R.

Zmienne ciągłe

Zadanie 1. Gęstość pewnej jednowymiarowej zmiennej ciągłej X dana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ Cx & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{dla} \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Oblicz stałą C,

b) Narysuj wykres dystrybuanty $F(x)$

c) Oblicz Pr $(1 \leq X \leq 2)$

Rozkład równomierny

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ obszar w pełni regularny. Rozkład równomierny na tym zbiorze ma gęstość stałą

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{meas}(\Omega)}$$

Zadanie 2. Napisz kod w R obliczający całkę oznaczoną z funkcji $g(x) = (x-2)^2 + 1$ po przedziale [0,10] metodą Monte Carlo.

Rozkład normalny (Gaussa-Laplace'a)

Gęstość i dystrybuanta $N(m, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Zmienna standaryzowana $\left(Z = \frac{X-m}{\sigma}\right) N(0,1)$ ma funkcję gęstości i dystrybuantę

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}, \qquad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-t^2}{2}} dt, \qquad z \in \mathbb{R}$$

Uwaga 1. Rozkład normalny może zostać użyty do przybliżania rozkładu dwumianowego Bernoulliego i rozkładu Poissone'a. Musimy stosować wtedy „poprawkę na ciągłość" (correction for continuity adjustment). Poprawka polega na dodaniu lub odjęciu 0.5 od wartości zmiennej np. jeżeli interesuje nas prawdopodobieństwo dokładnie 5 sukcesów w schemacie Bernoulliego, to poszukujemy Pr $(4.5 < X < 5.5)$, jeśli co najmniej 5 to Pr $(X > 4.5)$, jeśli co najwyżej 5 to $\Pr(X < 5.5)$, gdzie X ma rozkład $N(m, \sigma^2)$.

Dla aproksymacji rozkłady Bernoulliego musi być spełnione $np, n(1-p) \geq 5$. Wtedy przyjmujemy $m = np,\ \ \sigma^2 = np(1-p)$.

Dla aproksymacji rozkładu Piossone'a $\lambda \geq 5$. Wtedy przyjmujemy $m = \sigma^2 = \lambda$.

Uwaga 2. Funkcje R służące do obsługi rozkładu normalnego używają odchylenia standardowego `sd` $= \sigma$ zamiast wariancji σ^2 jako parametru determinującego jej rozkład. Dlatego na przykład, dla obliczenia dystrybuanty $N(1,4)$ w punkcie 5 należy użyć funkcji `pnorm(5, mean = 1, sd = 2).`

Zadanie 3. Przy użyciu funkcji bibliotecznej R oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie $N(2,6)$ przyjmuje wartości z przedziału [-1,0].

Zadanie 4. Wylosowano próbę 1600 opon o awaryjności 8%. Oblicz prawdopodobieństwo, że w próbie jest dokładnie 100 opon wadliwych. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie ich co najwyżej 100.

Zadanie 5. Średnia (roczna) liczba dni przestojów w fabryce w fabryce wynosi 12. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tych przestojów będzie co najwyżej 15?

Rozkład chi-kwadrat χ^2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} U_i^2, \qquad E(\chi^2) = k, \qquad D^2(\chi^2) = 2k$$

gdzie U_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $N(0,1)$. Dla dużych k ($k > 30$) χ^2 przybliża się rozkładem normalnym $N(k, \sqrt{2k})$.

Zadanie 6. Narysuj w pojedynczym układzie współrzędnych funkcję gęstości rozkładu chi-kwadrat dla parametrów n = 2, 6, 10 w przedziale [0,20].

Zadanie 7. Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat dla n = 3 przyjmuje wartość z przedziału [5, 10].

Rozkład *t*-Studenta

Zmienną losową t o rozkładzie t-Studenta definiuje się jako

$$t = \frac{X}{Y}\sqrt{n}$$

gdzie X jest zmienną o rozkładzie $N(0,1)$, zmienna Y ma rozkład chi-kwadrat z $k = n$. Zmienne X i Y są niezależne.

Dla $n > 30$ stosuje się przybliżenie rozkładu t-Studenta rozkładem $N(0,1)$.

Zadanie 8. Narysuj w pojedynczym układzie współrzędnych funkcję gęstości rozkładu t-Studenta dla parametrów $n = 2, 6, 10$ oraz rozkładu N(0,1) w przedziale [-5,5].

Zadanie 9. Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta dla $n = 3$ przyjmuje wartość z przedziału [-1, 2].

Rozkład *F*-Snedecora

$$F = \frac{\frac{X}{k_1}}{\frac{Y}{k_2}}$$

gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat i parametrami k_1, k_2 odpowiednio.

Zadanie 10. Narysuj w pojedynczym układzie współrzędnych funkcję gęstości rozkładu F-Snedecora dla parametrów $k_1 = 1{,}3{,}6$; $k_2 = 1{,}3{,}6$ oraz rozkładu N(0,1) w przedziale [0.5,2].

Zadanie 11. Oblicz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie F-Snedecora dla $k_1 = 3$; $k_2 = 1$ przyjmuje wartość z przedziału [1, 1.5].

Zmienne losowe wielowymiarowe, rozkłady i dystrybuanty brzegowe

Zmienne 2 wymiarowe

Niech $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ dwie zmienne losowe. Parę $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ nazwiemy 2-wymiarową zmienna losową. Dystrybuantą tej zmiennej jest funkcja

$$F: \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to F(x, y) = \Pr\{X < x, Y < y\} \in [0,1]$$

posiadająca następujące własności:

1. Jest niemalejąca względem każdej zmiennej,
2. Jest co najmniej lewostronnie ciągła względem każdej zmiennej,
3. $\lim\limits_{x\to\infty, y\to\infty} F(x, y) = 1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x, y) = 0 \quad \forall y,\ \lim\limits_{y\to-\infty} F(x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$
   $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R};\ x_1 < x_2,\ \ y_1 < y_2$.

Warunki 1 – 4 są WKW tego, aby F była dystrybuantą zmiennej losowej (X, Y).

Zadanie 12. Zbadaj, czy funkcja

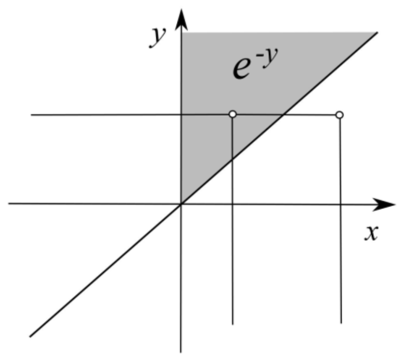
$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x + y > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnej zmiennej dwuwymiarowej.

Zadanie 13. Zbadać, czy funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x} & \text{dla} \quad |y| \leq x \\ 0 & \text{dla} \quad \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

jest gęstością pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej.



Zadanie 14. Funkcja gęstości zmiennej losowej $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla} \quad 0 \le x, \;\; x \le y \\ 0 & \text{dla} \quad \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$

1) Znaleźć dystrybuantę $F(x, y)$ tego rozkładu.

2) Znaleźć gęstości i dystrybuanty brzegowe tego rozkładu.

Zadanie 15. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} Cxy & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \text{ i } 2 \le y \le 4 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$

1. Wyznaczyć stałą C dla której jest to funkcja gęstości pewnej zmiennej losowej $(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$
2. Wyznaczyć rozkłady brzegowe tej zmiennej
3. Wyznaczyć dystrybuantę tej zmiennej
4. Wyznaczyć dystrybuanty brzegowe

Wielowymiarowy rozkład normalny (multivariate normal distribution)

Niech $X_1, \ldots, X_N$ zmienne losowe o wartościach rzeczywistych. Macierz kowariancji układu ma postać:

$$C = \{c_{ij}\} = \left\{E\left(\left(X_i - E(X_i)\right)\left(X_j - E(X_j)\right)\right)\right\}, i,j = 1, \ldots, N$$

Załóżmy, że C^{-1} istnieje oraz $\det(C^{-1}) \neq 0$. Jeżeli oznaczymy $m_i = E(X_i)$ mamy $c_{ij} = E\left((X_i - m_i)(X_j - m_j)\right)$. W zapisie macierzowym $x = (x_1, \ldots, x_N), m = (m_1, \ldots, m_N)$ gęstość omawianego rozkładu dana jest wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{\det(C^{-1})}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^N} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T C^{-1}(x-m)\right)$$

lub rozpisując częściowo na współrzędne

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\sqrt{\det(C^{-1})}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} l_{ij}\,(x_i - m_i)(x_j - m_j)\right)$$

gdzie $C^{-1} = \{l_{ij}\}$.

Zadanie 16. Napisz w R kod implementujący PRS poszukujący maksimum funkcji $g(x_1, x_1) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2 + 200$ w obszarze $[0,10] \times [0,10]$. Dla generowania kolejnego kroku zastosuj rozkład będący produktem rozkładów równomiernych na odcinku [0,10], oraz odpowiednio skonfigurowany dwuwymiarowy rozkład normalny.

Który z rozkładów daje krótszy czas osiągnięcia rozwiązania (liczony ilością iteracji PRS) z dokładnością do 0.01? Jak czas osiągnięcia rozwiązania zależy od sposobu konfiguracji rozkładu normalnego?

Funkcje biblioteczne w R związane z rozkładami

dbinom(k,n,p), pbinom(k,n,p)	rozkład Bernoulliego
dpois(k,lambda), ppopis(k,lambda)	rozkład Poissone'a
dgeom(k,p), pgeom(k,p)	rozkład geometryczny
dmultinom(kvector,n,pvector)	rozkład wielomianowy

Funkcje rozkładu normalnego jednowymiarowego z pakietu `stats`

`dnorm(x, mean = 0, sd = 1, log = FALSE)`

- zwraca gęstość rozkładu normalnego. `x` – argument gęstości, `mean` – średnia (dyfulth 0), `sd` – odchylenie standardowe (dyfulth 1), `log`, `log.p` – jeżeli `TRUE`, zwracany jest logarytm dziesiętny gęstości (dyfulth `FALSE`)

`pnorm(q, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)`

- zwraca funkcję rozkładu (distribution function), coś w rodzaju dystrybuanty, `lower.tail = TRUE` zwracana jest wartość dystrybuanty Pr(X < q), =FALSE – Pr(X > q).

`qnorm(p, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)`

- zwraca kwantyl chyba rzędu p, p może byc również wekrorem prawdopodobieństw

`rnorm(n, mean = 0, sd = 1)`

- generuje `n` wartosci gęstości rozkładu

rnorm(a)	generuje a wartości rozkładu *N*(0,1)
rnorm(a,b,c)	generuje losowoa wartości rozkładu *N*(b,c)
dnorm(a)	gęstość *N*(0,1) w punkcie a.
pnorm(a)	dystrybuanta *N*(0,1) w punkcie a.
pnorm(a, lower.tail=F)	Pr(X > a) dla *N*(0,1)
dmnorm(x,mu,sigma)	gęstość rozkładu normalnego, wielowymiarowego z pakietu *mnormt* version 1.5-5
rmvnorm(n?, mu, sigma)	generuje dane w/g rozkładu wielowymiarowego normalnego, mu – wektor wartości średnich, sigma – macierz kowariancji, pakiet: *mvtnorm* version 1.0-8
dmvnorm(x, mu, sigma)	gęstość
pmvnorm(), qmvnorm()	prawdopodobieństwo oraz kwantyle

Funkcje rozkładu t-Studenta z pakietu `stats` `dt(x, df, ncp, log = FALSE)`

- gęstość rozkładu t-Studenta. `x` – argument, `df` – ilość stopni swobody, `log = TRUE` – zwracany jest logarytm prawdopodobieństwa, ncp – parametr niecentralności, może być pominięty, wtedy przyjmowany jest rozkład centralny.

`pt(q, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)`

- zwraca wartość rozkładu prawdopodobieństwa, `lower.tail=TRUE` liczone jest $\Pr(X < x)$.

`qt(p, df, ncp, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)`

- zwraca kwantyl rzędu `q`

`rt(n, df, ncp)`

- generuje `n` wartości według rozkładu.

Funkcje rozkładu chi kwadrat z pakietu `stats` (opis zmiennych jak dla t-Studenta)

```
dchisq(x, df, ncp = 0, log = FALSE)
pchisq(q, df, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qchisq(p, df, ncp = 0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rchisq(n, df, ncp = 0)
```

Tabela 1. (Fragnenty Tabeli 5.3 „Podstawy Statystyki z przykładami w R”)

Rozkład	Dystrybuanta	Gęstość	Kwantyl	Generator
dwumianowy	`pbinom`	`dbinom`	`qbinom`	`rbinom`
Poissona	`ppois`	`dpois`	`qpois`	`rpois`
geometryczny	`pgeom`	`dgeom`	`qgeom`	`rgeom`
wielomianowy		`dmultinom`		`rmultinom`
jednostajny	`punif`	`dunif`	`qunif`	`runif`
normalny	`pnorm`	`dnorm`	`qnorm`	`rnorm`
chi-kwadrat	`pchisq`	`dchisq`	`qchisq`	`rchisq`
t-Studenta	`pt`	`dt`	`qt`	`rt`
Cauchy’ego	`pcauchy`	`dcauchy`	`qcauchy`	`rcauchy`
F-Snedecora	`pf`	`df`	`qf`	`rf`

W podstawowych pakietach R są również funkcje rozkładów: ujemny dwumianowy, hipergeometryczny, beta, wykładniczy, gamma, logarytmiczno-normalny, Weibulla. Funkcje związane z innymi rozkładami są w pakiecie `SuppDists`.