# GP modellek II.

Fegyverneki Sándor Miskolci Egyetem Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék <sub>matfs</sub>@uni-miskolc.hu

2021. február 15.



# 1 Kamatláb (rate of interest)

P – tőke (principal)

r – kamatláb

$$P + rP = P(1+r)$$

Kamatos kamat (compound interest)

## Megjegyzés:

 $\overline{\text{1. Félévenkénti.}}$  2. Havi 3.  $P_1$  az évvégi tőke.



## Effektív kamatláb:

$$r_{eff} = \frac{P_1 - P}{P}$$

Folytonos kamatos kamat:

$$P\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = Pe^r.$$

# Megjegyzés:

Duplázási szabály:

$$r = 0.01 \ (n \approx 70), \ 0.02 \ (35), \ 0.07 \ (10).$$

$$n \approx \frac{\ln(2)}{r}.$$

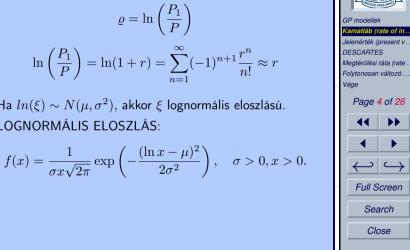


#### LOGRETURN

$$\varrho = \ln\left(\frac{P_1}{P}\right)$$

 $\ln\left(\frac{P_1}{P}\right) = \ln(1+r) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n}{n!} \approx r$ 

Ha  $ln(\xi) \sim N(\mu, \sigma^2)$ , akkor  $\xi$  lognormális eloszlású. LOGNORMÁLIS FLOSZLÁS:



# 2 Jelenérték (present value)

Kölcsön felvétel és adás esetén a kamatláb r és a kamatos kamat periódikusan. Mennyi a jelenlegi értéke i periódus (időtartam) után a v kifizetésnek (összeg)?

$$PV = v(1+r)^{-i}.$$



Legyen  $a=(a_0,a_1,\dots,a_n)$  és  $b=(b_0,b_1,\dots,b_n)$  kifizetési sorozatok. Tegyük fel, hogy

$$PV(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i (1+r)^{-i} \ge \sum_{i=0}^{n} b_i (1+r)^{-i} = PV(b).$$

Kérdés: Milyenek legyenek a kifizetési sorozatok?



Példa: Adottak a következő kifizetési sorozatok.

**A.** 12, 14, 16, 18, 20; (80)

**B.** 16, 16, 15, 15, 15; (77) **C.** 20, 16, 14, 12, 10; (72)

**C.** 20, 16, 14, 12, 10; (72)



# JELENÉRTÉK TÁBLÁZAT

r	Α	В	С
0.1	59.21	58.60	56.33
0.2	45.70	46.39	45.69
0.3	36.49	37.89	38.12



# Jelzálog kölcsön (mortgage loan):

$$L$$
 – az összeg (amount)

$$n$$
 – a hónapok száma

$$r$$
 – kamatláb

A jelenérték:

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{r} \left[ 1 - (1+r)^{-n} \right] = L.$$

**A** 

# Megjegyzés:

- 1. Számítsuk ki a j-edik hónap után maradó jelzálog összeget!
- 2. Mennyivel csökken a j-edik hónapban a jelzálog?



Legyen  $b=(b_1,\ldots,b_n)$  és  $c=(c_1,\ldots,c_n)$  pénz kifizetési sorozatok és r a kamatláb. Milyen feltételek mellett teljesül minden pozitív r kamatláb esetén, hogy

$$PV(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i (1+r)^{-i} \ge \sum_{i=1}^{n} c_i (1+r)^{-i} = PV(c)$$
?



# Elégséges feltételek:

- 1.  $b_i \geq c_i, (i = 1, 2, \dots, n).$
- 2. Legyen

$$B_i = \sum_{j=1}^r b_j$$
 és  $C_i = \sum_{j=1}^r c_j$ , ha  $(i=1,2,\ldots,n)$ .

Ekkor elegendő  $B_i \geq C_i$ , (i = 1, 2, ..., n).

3. Ha  $B_n \ge C_n$ , akkor elegendő, hogy

$$\sum_{i=1}^k B_i \geq \sum_{i=1}^k C_i, \quad \mathsf{ha} \quad (k=1,2,\dots,n).$$



## Megiegyzés:

Bizonyítás a Descartes-féle előjelszabály alapján.

Legyen  $a_i = b_{i+1} - c_{i+1}, (i = 0, 1, \dots, n-1).$ 

1. 
$$a_i \geq 0, (i = 0, 1, \dots, n - 1).$$

2.  $\sum a_i = B_k - C_k \ge 0, (k = 1, \dots, n).$ 

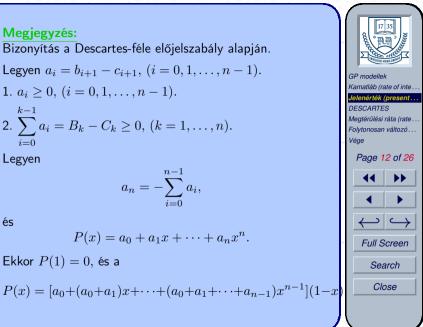
Legyen

 $a_n = -\sum_i a_i,$ 

 $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ .

Ekkor P(1) = 0, és a

Ekkor 
$$P(1) = 0$$
, és a



Továbbá, a P(x) polinomnak csak egy pozitív zérushelye van, és P(x) előjele megegyezik (1-x) előjelével. Tehát

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n > 0$$
, ha  $0 < x < 1$ ,

 $a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} > \sum_{i=1}^{n} a_i x^n = x^n (B_n - C_n) \ge 0.$ 

Legyen  $x = \frac{1}{1+r}$ . Tehát ha 0 < x < 1, akkor r > 0.

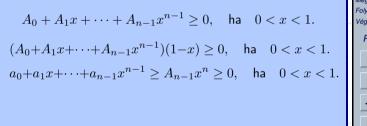
3. Felhasználva az előzetes jelöléseket legyen

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i = A_{k-1} = B_k - C_k, \qquad (k = 1, \dots, n).$$



A feltételek szerint 
$$A_{n-1} \geq 0$$
, és  $\sum_{i=0} A_k \geq 0$ ,  $(k=0,1,\ldots,n-1)$ .

Alkalmazzuk az előző bizonyítást az  $A_k$   $(k=0,1,\ldots,n-1)$  esetre. Ekkor azt kapjuk, hogy





# 3 DESCARTES

#### Tétel:

Ha az  $a_0,\,a_1,\ldots,\,a_n$  véges sorozatnak C jelváltása van és  $p_0>0,\,p_1>0,\ldots,\,p_n>0,$  akkor a

$$p_0a_0, p_1a_1, \ldots, p_na_n$$

jelváltásainak a száma C.

#### Tétel:

Ha az  $a_0, a_1, \ldots, a_n$  véges sorozatnak C jelváltása van, akkor a belőle képzett

$$a_0, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_{n-1}, -a_n$$

sorozatnak legalább C+1 előjelváltása van  $(\exists a_k \neq 0)$ .

#### Tétel:

A P(x) és  $P(\alpha x)$  polinomoknak egyenlő számú előjelváltása van. ha  $\alpha$  pozitív.



#### Tétel:

Legyen  $\alpha > 0$ , Áttérve a P(x) polinomról az

$$(\alpha - x)P(x)$$

polinomra az együttható-jelváltások száma nő, mégpedig páratlan számmal.

Bizonyítás: Helyettesítsük x-et  $\alpha x$ -szel és alkalmazzuk a 2. állítást.

#### Tétel:

(Descartes-féle előjelszabály.) Legyen Z a P(x) pozitív zérushelyeinek a száma, C pedig a jelváltások száma. Ekkor

$$C-Z \ge 0$$
.

# Megjegyzés:

- $\overline{1. C-Z}$  páros szám.
- 2. Ha C=1, akkor Z=1.



#### Tétel:

Legyen C az

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

véges sorozat jelváltásainak a száma. Tegyük fel, hogy P(1)=0. Ekkor a P(x) polinomnak legfeljebb C+1 pozitív zérushelye van.

## Bizonyítás:

$$P(x) = [a_0 + (a_0 + a_1)x + \dots + (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})x^{n-1}](1 - x)$$

#### Tétel:

Legyen  ${\cal C}$  az

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

véges sorozat jelváltásainak a száma és legyenek

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$$



# Továbbá, legyen

$$D(x) = a_1 e^{-\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{-\lambda_n x},$$

ahol feltesszük, hogy D(0)=0. Ekkor a D(x) függvénynek legfeljebb C+1 pozitív zérushelye van.

# Bizonyítás:

$$\varphi(\lambda) = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$
, ha  $\lambda_k \le \lambda_{k+1}$ ,  $(k = 1, 2, \dots, p_k)$ 

D(0) = 0 miatt

$$x^{-1}D(x) = \int_{-\infty}^{\lambda_n} \varphi(\lambda)e^{-\lambda x}d\lambda.$$



# 4 Megtérülési ráta (rate of return)

Legyen a kezdeti befektetés  $a\ (a>0)$  és b a visszakapott összeg egy periódus után. A megtérülési ráta (hozam) r,

$$\frac{b}{1+r} = a \quad \text{vagy} \quad r = \frac{b}{a} - 1.$$

Egy periódusra jutó hozam (belső megtérülési ráta): Legyen  $b_i \geq 0$  a kapott összeg az i-edik periódus végén  $(i=1,2,\ldots,n)$ . és  $b_n>0$ .

Legven

ha

$$P(r) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i (1+r)^{-i}.$$

Az egy periódusra jutó hozam  $r^\star,$  ha  $P(r^\star)=0$  és  $r^\star>-1.$ 



## Megjegyzés:

1.  $r^{\star}$  egyértelműen létezik, mert P(r) monoton csökkenő függvény, ha r>-1. Továbbá,

$$\lim_{r \to -1} P(r) = \infty, \qquad \lim_{r \to \infty} P(r) = -a < 0.$$

2.  $r^{\star}$  előjele megegyezik P(0) előjelével.



# 5 Folytonosan változó kamatláb

r(s) – pillanatnyi kamatláb az s időpontban.

D(t) – az összeg a t időpontban, ha a kezdeti betét (deposit) 1 egység a 0 időpontban.

Legyen  $0 \leq s \leq t,$  és h kicsi, ekkor feltehetjük, hogy

$$D(s+h) \approx D(s)(1+r(s)h)$$
  
$$\frac{D(s+h) - D(s)}{r} \approx D(s)r(s)$$

Ha létezik a határérték, amikor  $h \to 0$ , akkor

$$D'(s) = D(s)r(s).$$

$$\frac{D'(s)}{D(s)} = r(s).$$



Mivel D(0) = 1, így

$$D(t) = \exp\left[\int_{0}^{t} r(s)ds\right].$$

Legyen P(t) a jelenérték (0 időpontbeli érték), ha 1 egységnyi összeget kapunk a t időpontban. Ekkor

$$P(t) = \frac{1}{D(t)}.$$

Megjegyzés:

 $\overline{\operatorname{Ha}\ r(s) = r\ (0 \le s \le t)},\ \operatorname{akkor}$ 

 $P(t) = e^{-rt}$ .



Jelölje  $\overline{r}(t)$  az átlagos kamatlábat a t időpontig, azaz

$$\overline{r}(t) = \frac{1}{t} \int_{0}^{t} r(s)ds.$$

Az  $\overline{r}(t)$   $(t \geq 0)$  függvényt hozamgörbének (jövedelemgörbe) nevezzük.



Köszönöm a figyelmet!



# References

[1] Deák I.: Véletlenszámgenerátorok és alkalmazásaik, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[FR11] Fegyverneki Sándor, Raisz Péter: Sztochasztikus modellezés, elektronikus jegyzet, 2011, TÁ-MOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FS11] Fegyverneki Sándor: Valószínűség-számítás és matematikai statisztika, elektronikus jegyzet, Kempelen Farkas elktronikus könyvtár, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FE78] W. Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.



[2] I.M. Szobol: A Monte-Carlo módszerek alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

