GP modellek VI.

Fegyverneki Sándor
Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék
matfs@uni-miskolc.hu

2021. március 22.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

1 Portfólió optimalizálás

Adott $n$db befektetés,

a hozam

$$\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

ahol $E(\xi) = \mu$, $Var(\xi) = \Sigma$ és legyenek a portfólió súlyok

$$w^T = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

$$\xi \sim N(\mu, \Sigma),$$

ekkor a portfólió hozama

$$\xi_p = w^T \xi \sim N(\mu_p, \sigma_p^2),$$

ahol $\mu_p = w^T \mu$, $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

Feladat:

Keressük meg a portfólió minimális szórásnégyzetét, ha a hozam várható értékének minimális értéke c, azaz

$$\min_{w} w^T \Sigma w,$$

$$w^T \mu \geq c,$$

$$e^T w = 1,$$

ahol $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$.

Markowitz (1952)

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

2 Stabilis eloszlás

A tapasztalat alapján a hozam *stabilis* eloszlású.

ξ stabilis eloszlású, ha nem egy pontra koncentrálódik és minden n esetén létezik $a_n > 0$ és b_n úgy, hogy

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{a_n} - b_n$$

eloszlása megegyezik ξ eloszlásával

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \quad iid).$$

Karakterisztikus kitevő:

$a_n = n^{1/\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leq 2.$

$\alpha = 2$ – normális,

$\alpha = 1$ – Cauchy.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Lévy (1919) – a karakterisztikus függvény megadása

$$\phi(t) = \exp\left[i\mu t - \sigma\left|t\right|\left(1 + i\beta \mathsf{sgn}(t)\right)\omega(t,\alpha)\right]$$

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \text{ha } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln\left|t\right|, & \text{ha } \alpha = 1. \end{cases}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

– momentumok $a < \alpha < 2$.

– szimmetrikus eset – $b = 0, \quad 0 < \alpha \leq 2$.

– eloszlásfüggvény megadása $(\alpha = 1,\ \alpha = 2)$

– sűrűségfüggvény

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{t^\alpha}{\alpha})\cos(tx)dt \qquad (x > 0)$$

$$f_\alpha(-x) = f_\alpha(x)$$

$$\xi \sim F_\alpha\left(\frac{\xi - \mu}{\sigma}\right)$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

– becslési és numerikus problémák

– alkalmazások (VAR modellek, portfólió)

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

Jólismert, ha a ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye invertálható, akkor az $F(\xi)$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a [0,1] intervallumon. Ezért

$$E_F\left(\psi\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right)=0$$

$$D_F^2\left(\psi\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)\right)=\frac{1}{12},$$

ahol $\psi(x)=F(x)-0.5.$

Becsléseink a momentumok módszeréből adódnak.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

PIT-BECSLÉSEK ÉS TULAJDONSÁGAIK

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(F\left(\frac{\xi_i - \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right) = 0.$$

–probability integral transformation

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Definíció: Az előző egyenletrendszer létező megoldását (jelölje azt T_n és s_n) a hely-, illetve skálaparaméter modelleloszlás szerinti becslésének (röviden (PIT)-becslés) nevezzük.

(PT)-becslés a Cauchy-eloszlás alapján:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} arctg x dF_\alpha(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} arctg^2 x dF_\alpha(x) = \beta_1(\alpha)$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Full Screen

Search

Close

(PT)-becslés a normális eloszlás alapján:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(x) - 0.5) dF_\alpha(x) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Phi(x) - 0.5)^2 dF_\alpha(x) = \beta_2(\alpha)$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

SZIMMETRIKUSSÁG – a helyparaméter nem változik.

Jelölje $s_1(\alpha)$ és $s_2(\alpha)$ a skálaparaméter becsléseket az a alakparaméter függvényében.

Legyen a keresett alakparaméter α_0.

Ha $\alpha < \alpha_0$, akkor $s_1(\alpha) < s_2(\alpha)$ és ha $\alpha > \alpha_0$, akkor $s_1(\alpha) > s_2(\alpha)$.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

SZIMULÁCIÓ, TÁBLÁZATOK

α	$\beta_1(\alpha)$	$\beta_2(\alpha)$
1.0	0.083333	0.126801
1.1	0.075872	0.118956
1.2	0.069761	0.112279
1.3	0.064708	0.106573
1.4	0.060462	0.101675
1.5	0.056895	0.097452
1.6	0.053884	0.093800
1.7	0.051326	0.090627
1.8	0.049108	0.087864
1.9	0.047215	0.085449
2.0	0.045564	0.083333

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

A racionális törtfüggvény alakja:

$$r_\alpha(x) = \frac{a_5x^5 + \cdots + a_1x + a_0}{x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0}$$

A racionális törtfüggvények együtthatói:

	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$		$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
a_0	-0.3499118	-0.0674428	b_0	-0.1227348	-0.5911032
a_1	0.7592412	-1.0804282	b_1	-3.3647235	-1.4326454
a_2	-0.6191057	0.6097135	b_2	6.9402560	-5.8104444
a_3	0.2493502	-0.1607332	b_3	-4.5916151	2.1160452
a_4	-0.0598511	0.1015905	b_4	1	1
a_5	0.0087090	-0.0009673			

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Zolotarev (1966)

$$S(\alpha) = \frac{\sin(\alpha\xi)}{(\cos\xi)^{\dfrac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\xi)}{\eta} \right)^{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad \alpha \neq 1,$$

ahol η standard exponenciális és ξ egyenletes a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$n = 400,\qquad \alpha$ **ismert**

α	$T_2(\alpha)$	$s_2(\alpha)$	$T_1(\alpha)$	$s_1(\alpha)$
1.0	0.0876	0.9009	0.0935	0.8864
1.2	0.0238	1.0516	-0.0339	1.0549
1.4	0.0204	1.0297	-0.0168	1.0351
1.6	0.1043	1.0209	0.1119	1.0304
1.8	0.0714	1.0344	0.0717	1.0230
2.0	0.0088	0.9740	-0.0072	0.9754

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

$n = 2500$, α **ismert**

α	$T_2(\alpha)$	$s_2(\alpha)$	$T_1(\alpha)$	$s_1(\alpha)$
1.0	-0.0043	1.0069	-0.0048	1.0143
1.2	-0.0171	1.0455	-0.0213	1.0451
1.4	0.0105	1.0128	0.0100	1.0160
1.6	-0.0395	1.0096	-0.0403	1.0078
1.8	-0.0265	0.9745	-0.0264	0.9734
2.0	-0.0162	1.0055	-0.0160	1.0042

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$$n = 2500 \qquad \alpha_0 = 1.30$$

α	$T_2(\alpha)$	$s_2(\alpha)$	$T_1(\alpha)$	$s_1(\alpha)$
1.0	0.0061	0.8144	0.0044	0.7442
1.1	0.0052	0.8979	0.0033	0.8493
1.2	0.0043	0.9757	0.0024	0.9500
1.3	0.0036	1.0479	0.0014	1.0583
1.4	0.0030	1.1147	0.0008	1.1377
1.5	0.0024	1.1765	0.0001	1.2238
1.6	0.0019	1.2335	-0.0005	1.3054
1.7	0.0014	1.2859	-0.0011	1.3803
1.8	0.0010	1.3340	-0.0015	1.4481
1.9	0.0007	1.3781	-0.0020	1.5114
2.0	0.0003	1.4184	-0.0024	1.5695

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

3 Transzformáció

Definíció: Az együttes eloszlásfüggvénye az $(Y_1, \ldots, Y_n)$ véletlen
vektornak, amely az $(X_1, \ldots, X_n)$ véletlen vektorból áll elő úgy, hogy

$$Y_k = g_k(X_1, \ldots, X_n) \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

a következő

$$F_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = P(\{\omega | g_k(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) < y_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n\}).$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor g_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ függvényeknek folytonos az első parciális deriváltjuk minden $(x_1, \dots, x_n)$ pontban úgy, hogy

$$J(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0.$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Ha a $(X_1, \dots, X_n)$ véletlen vektornak létezik az $f_{X_1,\dots,X_n}$ együttes sűrűségfüggvénye és a

$$y_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

egyenletrendszernek minden $(x_1, \dots, x_n)$ pontban pontosan egy megoldása van, akkor a $(Y_1, \dots, Y_n)$ véletlen vektornak az együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1, y_2, \dots, y_n) =$$

$$= f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|J(x_1, x_2, \dots, x_n)|^{-1}.$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

4 Normális eloszlás

Definíció: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, $(\xi_i \sim N(0,1))$, és $U^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$. A $p-$dimenziós U véletlen vektort $p-$dimenziós standard normális eloszlásúnak nevezzük. Ha U $p-$dimenziós standard normális eloszlású és A tetszőleges $n \times p$ méretű mátrix, b pedig tetszőleges $n-$dimenziós vektor, akkor az $n-$dimeziós

$$X = AU + b$$

véletlen vektort normális eloszlásúnak nevezzük.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Full Screen
Search
Close

Megjegyzés:

Az X véletlen vektor várható értéke b, és kovarianciamátrixa AA^T. Ezt jelölje C. A p-dimenziós b várható értékű és C kovarianciájú normális eloszlást $N_p(b, C)$−vel jelöljük. Ha X, Y együttes eloszlása normális, akkor mindig található olyan A és B mátrix és az X−től független U standard normális vektor, hogy

$$Y - E(Y) = A(X - E(X)) + BU.$$

Ebből következik, hogy Y−nak X−re vett feltételes várható értéke:

$$E(Y|X) = A(X - E(X)) + E(Y).$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Belátható, hogy ha X és Y együttes eloszlása normális, akkor abból, hogy a kovarianciamátrixuk $0-$val egyenlő, következik, hogy X és Y függetlenek. A $p-$dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) =$$

$$(2\pi)^{-p/2}(\det(C))^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-b)^T C^{-1}(x-b)\right).$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

Példa: Legyen a (X_1, X_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{(x_1-m)^2 - 2\rho(x_1-m)(x_2-m) + (x_2-m)^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}.$$

Tehát a (X_1, X_2) véletlen vektor normális eloszlású, ahol

$$E(X_1) = E(X_2) = m, \quad D^2(X_1) = D^2(X_2) = \sigma^2$$

$$\text{és} \quad r(X_1, X_2) = \rho.$$

Készítsük el a X_1, X_2 mintaelemekből (nem függetlenek) az átlagot (jelölje Y_1) és a tapasztalati szórásnégyzet kétszeresét (jelölje Y_2), azaz

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \qquad Y_2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}.$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Az (Y_1, Y_2) véletlen vektor sűrűségfüggvényének meghatározásához a megfelelő transzformációk:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}.$$

Ez a transzformáció leképezi az $A = \mathbf{R}^2$ halmazt a $B = \{(y_1, y_2) | y_1 \in \mathbf{R}, y_2 \geq 0\}$ halmazra. De ez a transzformáció nem egyértelmű és a B halmaz minden elemének (kivéve, amikor $y_2 = 0$) két elem felel meg az A halmazban. Így az inverzfüggvények két csoportja tartozik a transzformációhoz:

$$x_1 = y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}},$$

$$x_1 = y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}},$$

$$x_2 = y_1 + \sqrt{\frac{y_2}{2}},$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$$x_2 = y_1 - \sqrt{\frac{y_2}{2}}.)$$

Továbbá az A halmaz nem írható fel két olyan diszjunkt halmaz uniójaként, amelyek mindegyike esetén a transzformációnk a B halmazra képez. A problémát az A halmaznak azok a pontjai okozzák, amelyek az $x_1 = x_2$ egyenletű egyenesen fekszenek. Ekkor ugyanis $y_2 = 0$. Azonban mondhatjuk azt, hogy $f(x_1, x_2) = 0$ minden olyan pontban, ahol $x_1 = x_2$. Ezt megtehetjük anélkül, hogy az eloszlás megváltozna, hiszen ezen pontok valószínűsége 0.

Legyen tehát $A = \mathbf{R}^2 \backslash \{(x_1, x_2) | x_1 = x_2\}$. Ez a mintatér az $A_1 = \{(x_1, x_2) | x_2 < x_1\}$ és $A_2 = \{(x_1, x_2) | x_2 > x_1\}$ diszjunkt halmazok uniója. Ekkor a transzformációnk kölcsönösen egyértelmű az A_i $(i = 1, 2)$ halmazok mindegyikéről az új

$$B = \{(y_1, y_2) | y_1 \in \mathbf{R}, y_2 > 0\}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

halmazra. Az (Y_1, Y_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye most már meghatározható. A transzformációk Jacobi-determinánsaira teljesül, hogy

$$|J_1| = |J_2| = \frac{1}{\sqrt{2y_2}}.$$

Tehát az (Y_1, Y_2) véletlen vektor sűrűségfüggvénye

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{2}{\sqrt{2y_2}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{(2-2\rho)(y_1-m)^2 + (1+\rho)y_2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right\} \frac{1}{\sqrt{2y_2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1+\rho}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{(y_1-m)^2}{\sigma^2(1+\rho)}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{1-\rho}} \frac{1}{\sqrt{y_2}} \times$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$$\exp\left\{-\frac{y_2}{2\sigma^2(1-\rho)}\right\}.$$

Ebből jól látható, hogy Y_1 és Y_2 sztochasztikusan függetlenek (ez ismert független valószínűségi változók esetére). Továbbá, Y_1 eloszlása normális, amelyre

$$E(Y_1) = m \quad \text{és} \quad D^2(Y_1) = \frac{\sigma^2(1+\rho)}{2}.$$

Míg

$$\frac{Y_2}{\sigma^2(1-\rho)}$$

eloszlása 1-szabadságfokú χ^2.

Legyen $Y = aX$ $(a > 0)$, ekkor az eloszlásfüggvényekre illetve a sűrűségfüggvényekre teljesül, hogy

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{a}\right), \quad f_Y(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x}{a}\right),$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

azaz ha

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}},$$

ahol $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, és ha $a = \sigma^2(1-\rho)$, akkor

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-\rho)x}} \exp\{-\frac{x}{2\sigma^2(1-\rho)}\}.$$

Továbbá ez azt jelenti, hogy

$$\frac{Y_2}{2} = \frac{(X_1 - X_2)^2}{4}$$

sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sigma\sqrt{1-\rho}\sqrt{x}} \exp\{-\frac{y_2}{\sigma^2(1-\rho)}\}.$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

A szakasz eredményeit a következőképpen összegezhetjük: Ha adott két korrelált, normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a belőlük képzett számtani átlag és tapasztalati szórásnégyzet független. Továbbá, a tapasztalati szórásnégyzet eloszlása egy olyan 1-szabadságfokú χ^2 eloszlás, melynek a várható értéke

$$\frac{\sigma^2(1-\rho)}{2}.\clubsuit$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

5 Többváltozós normális

A mai elemzők a többváltozós normális eloszlást több nézőpontból is megvizsgálják.

A mai napig nincs olyan egységes definíció, amely alkalmazható lenne a különböző nézetekre.

Egyváltozós esetben a Z véletlen változó - amelynek várható értéke 0 ($E(Z) = 0$) és szórásnégyzete 1 ($D^2(Z) = 1$) - sűrűségfüggvénye

$$(2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2),$$

ahol $-\infty < z < \infty$.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

A többdimenziós kiterjesztés a $Z_1, \ldots, Z_p$ független változókból ($N(0,1)$) áll, amelyek együttes sűrűségfüggvénye az alábbi módon írható fel

$$(2\pi)^{-p/2} \exp(-\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}/2), \qquad \mathbf{z} \in R^p.$$

Jelölésére a $\mathbf{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ kifejezést használjuk.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

Definíció: Az $\mathbf{X}$ p-dimenziós véletlen vektor nemszinguláris *p-dimenziós normális eloszlás*ú, ha $\mathbf{x}$ elemeinek az együttes sűrűségfügvénye a következő:

$$f(x_1, \ldots, x_p) =$$

$$= (2\pi)^{-p/2} \left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{-1/2} \times \exp\{-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})/2\},$$

ahol $\boldsymbol{x} \in R^p$.

Jelölés: $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Itt $\boldsymbol{\mu}$ a várható érték vektor, $\boldsymbol{\Sigma}$ a variancia-kovariancia mátrix.

$|\boldsymbol{\Sigma}|$ a determinánsa $\boldsymbol{\Sigma}$ mátrixnak.

Ha $\boldsymbol{\Sigma}$ rangja kisebb mint p, akkor az **X** vektornak *szinguláris* normális eloszlása van. **X** áttranszformálható az **Y** = **AX** + **b** vektorba, ahol **A** $r \times p$ mátrix és a rangja r. Ekkor **Y** *nemszinguláris* többváltozós normális eloszlású r-dimenzióban.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Definíció: **(Srivastava és Khatri)** Az $\mathbf{X}$ p-dimenziós véletlen vektornak többváltozós normális eloszlása van $(N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}))$, ha **X** eloszlása ugyanolyan, mint az $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{DZ}$ vektornak, ahol **D** $p \times r$ mátrix és a rangja r, $\boldsymbol{\Sigma} = DD^T$ és $\mathbf{Z} \sim N_r(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Megjegyzés:
Ebben az esetben r az **X** eloszlásának rangját jelenti. Következésképpen $\boldsymbol{\Sigma}$ rangja p kell legyen. Az eloszlást tehát az egyik fő jellemző tulajdonsága alapján definiáltuk.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

6 Többváltozós elemzések

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye - az ismert haranggörbe (Gauss-görbe) - több dimenzióra történő általánosítása alapvető szerepet játszik a többváltozós elemzésben. Számos többváltozós technika feltételezi, hogy az adatok többváltozós normális eloszlásból származnak. Bár a valós adatok sosem követik *pontosan* a többváltozós normális eloszlást, a normális sűrűség gyakran egy hasznos közelítést ad a "valódi" sokasági eloszlásra. Tehát a normális eloszlás sokszor megfelelő populáció modellként szolgál. Számos többváltozós statisztika mintavételi eloszlása közelítőleg normális, tekintet nélkül a szülő populációra, a *centrális határeloszlás tétel* miatt.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemz...
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

A p-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének szintvonalai ellipszisek, amelyek egyenlete az **x** függvényében a következő

$$(\mathbf{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)=c^2.$$

Az ellipszisek középppontja $\boldsymbol{\mu}$, tengelyeik $\pm c\sqrt{\lambda_i}\mathbf{e_i}$, ahol

$$\Sigma\mathbf{e_i}=\lambda_i\mathbf{e_i}, i=1,2,\ldots,p.$$

$\lambda_i, \mathbf{e_i}$ a $\Sigma-$hoz tartozó sajátérték(normalizált)-sajátvektor pár.

A következők igazak a többváltozós normális eloszlású **X** véletlen vektorra.

1. **X** elemeinek lineáris kombinációi normális eloszlásúak.
2. **X** elemeinek minden részhalmaza (többváltozós) normális eloszlású.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemz . . .
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

Full Screen
Search
Close

3. A nulla kovariancia arra utal, hogy a megfelelő összetevők független eloszlásúak.

4. A többváltozós összetevők feltételes eloszlásfüggvényei (többváltozós) normálisak.

Ezen tulajdonságok teszik a normális eloszlást könnyen kezelhetővé.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemz...
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

7 Elemi tulajdonságok

A legtöbb alapvető tulajdonság a momentumgeneráló (karakterisztikus) függvényből könnyen levezethető:

$$\exp[\mathbf{t}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{t}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}/2].$$

A továbbiakban

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}, D^2(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\Sigma}.$$

Ha $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitív definit, akkor létezik egy nemszinguláris transzformáció, amely standardizálja $\mathbf{X}$ vektort $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$-be. A momentumgeneráló függvényből láthatjuk, hogy minden harmadik momentum $\boldsymbol{\mu}$ körül nulla. A negyedik momentum

$$E\{(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k)(X_l - \mu_l)\} =$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

$$\sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk},$$

ahol σ_{ij} a kovariancia X_i és X_j között.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

További tulajdonságok:

1. Ha $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$, $\mathbf{A}(r \times p)$, $\mathbf{b}(r \times 1)$ konstans, akkor

$$\mathbf{Y} \sim N_r(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}).$$

2. Ha $\mathbf{X}$-et felosztjuk az $\mathbf{X_1}(q \times 1)$, $\mathbf{X_2}[(p-q) \times 1]$ vektorokra, a részeket $\boldsymbol{\mu}$ és $\boldsymbol{\Sigma}$ szerint definiálva, akkor észrevehetjük, hogy $\mathbf{X_1}$ peremeloszlása $N_q(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$, $\mathbf{X_2}$ peremeloszlása pedig $N_q(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$. Ebből következik, hogy $\mathbf{X}$ minden elemének egyváltozós normális eloszlása van. Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{X}$ elemeinek perem normalitása nem biztosítja az együttes normalitást. Ezt szemléltetve, ha például $p = 2$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x_1, x_2)] + \varphi_2(x_1, x_2),$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

ahol φ_i standard kétváltozós normális sűrűségfüggvény, amelynek korrelációs együtthatója ϱ_i, akkor minden peremnek egyváltozós normális eloszlása van, de $f(x_1, x_2)$ nem kétváltozós normális sűrűségfüggvény.

3. Az $\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}$ véletlen vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha a $\mathbf{\Sigma}_{1,2}$ kovariancia mátrix nulla.

4. Ha az $\mathbf{Y}_i$-k függetlenek, $N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma}_i)$ eloszlással $i = 1, 2$ esetén, akkor $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ eloszlása $N_p(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{\Sigma}_2)$.

5. Az első definícióban szereplő $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})$ kitevőnek χ^2 eloszlása van p szabadságfokkal.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

8 Jellemzők

A többváltozós normális eloszlás bizonyos tulajdonságai az egyváltozós eset jellemzőinek analógiájára épülnek. Tekintsünk meg néhány fontosabb eredményt:

1. A többváltozós normális eloszlás az $\overline{\mathbf{X}}$ mintaátlag és az **S** szórásmátrix függetlenségével jellemezhető.
2. Legyen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ független p-dimenziós vektor. Az összegük többváltozós normális eloszlású akkor és csak akkor, ha mindkét vektor többváltozós normális eloszlású.
3. Ghurye és Olkin általánosította a Darmois-Skitovich tételt: Legyen $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$, n darab független p-dimenziós véletlen vektor, és legyenek $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n$ $p \times p$ dimenziójú nemszinguláris

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

mátrixok. Ha $\mathbf{W}_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{X}_i$, $\mathbf{W}_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i \mathbf{X}_i$ függetlenek, akkor $\mathbf{X}_i$ normális eloszlású. Vegyük észre, hogy ha $\mathbf{A}_i$ (vagy $\mathbf{B}_i$) nulla, akkor $\mathbf{X}_i$ tetszőleges is lehet. Másrészt viszont, ha $\mathbf{A}_i$ szinguláris, akkor a hozzá tartozó $\mathbf{X}_i$ vektor csak részben normális.

4. A legfontosabb tulajdonság, hogy $\mathbf{X}$ akkor és csak akkor többváltozós normális eloszlású, ha az elemeinek bármely lineáris kombinációja egyváltozós normális eloszlású. Egyes szerzők ezt a tulajdonságot használják fel a többváltozós normális eloszlás definiálásához.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

9 A paraméterek becslése

Legyen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_N$ egy N méretű, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ eloszlásból vett véletlen minta, ahol $N > p$. Ekkor a $\boldsymbol{\mu}$ és a $\boldsymbol{\Sigma}$ maximum likelihood becslése a következő:

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{X}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{N}\mathbf{A},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}}\right)\left(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}}\right)^T.$$

A $\boldsymbol{\Sigma}$ becslésének korrigálásával könnyen megkapható az $\mathbf{S} = \mathbf{A}/n$ torzítatlan becslés, ahol $n = N - p$.

A sűrűségfüggvény konstans tagja következmények nélkül elhagyható, így a likelihood függvény:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) =$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

$$= |\boldsymbol{\Sigma}|^{-N/2} \exp tr \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}N\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\right].$$

Tehát

$$L\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\right) \leq |\boldsymbol{\Sigma}|^{-N/2} \exp tr \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right),$$

ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\boldsymbol{\mu} = \overline{\mathbf{X}}$, amelynél felhasználtuk azt tényt, hogy

$$\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right) = 0$$

akkor és csak akkor ha $\boldsymbol{\mu} = \overline{\mathbf{X}}$, ugyanis $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ pozitív definit. Ebből az következik, hogy $\overline{\mathbf{X}}$ a maximum likelihood becslése $\boldsymbol{\mu}$-nek, bármely $\boldsymbol{\Sigma}$ esetén. Ezután már csak

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

a

$$L\left(\overline{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Sigma}\right)=|\boldsymbol{\Sigma}|^{-N/2}\exp tr\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)$$

függvényt kell maximalizálni ($\boldsymbol{\Sigma}$-ra), vagy ami ezzel ekvivalens, maximalizálni kell g-t:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\Sigma}) &= l\ln L\left(\overline{\mathbf{X}},\boldsymbol{\Sigma}\right)=-\frac{1}{2}N\ln|\boldsymbol{\Sigma}|-\frac{1}{2}tr\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)\\ &= \frac{1}{2}N\ln\left|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right|-\frac{1}{2}tr\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}\right)-\frac{1}{2}N\ln|\mathbf{A}|\\ &= \frac{1}{2}N\ln\left|\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{1/2}\right|-\\ &\quad -\frac{1}{2}tr\left(\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{1/2}\right)-\frac{1}{2}N\ln|\mathbf{A}|=\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\left(N\ln\lambda_i-\lambda_i\right)-\frac{1}{2}N\ln|\mathbf{A}| \end{aligned}$$

ahol $\lambda_i,\ldots,\lambda_p$ a $\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}^{1/2}$, azaz $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}$ karakter-

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

isztikus gyökei. Mivel az

$$f(\lambda) = N \ln x - x$$

függvénynek egyetlen maximuma van, mégpedig az $x = N$ helyen, azaz a maximum $N \ln N - N$, amiből az következik, hogy

$$g(\mathbf{\Sigma}) \leq \frac{1}{2} Np \ln N - \frac{1}{2} pN - \frac{1}{2} N \ln |\mathbf{A}|,$$

vagy

$$L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}) \leq N^{pN/2} e^{-pN/2} |\mathbf{A}|^{-N/2},$$

amelynél az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\lambda_i = N, (i = 1, \ldots, p).$$

Ez utóbbi feltétel ekvivalens az

$$\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} = N I_p$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

egyenlőséggel, ezért $\mathbf{\Sigma} = (1/N)\mathbf{A}$. Összefoglalva,

$$L(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}) \leq N^{pN/2} e^{-pN/2} \left|\mathbf{A}\right|^{-N/2}$$

kifejezésben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\boldsymbol{\mu} = \overline{\mathbf{X}}$ és $\mathbf{\Sigma} = (1/N)\mathbf{A}$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Habár ezek a becslések könnyen meghatározhatók, valamint jól megállapított tulajdonságokkal rendelkeznek, döntéselméleti szempontból mégsem optimálisak, ugyanis nem megengedhetőek. A négyzetes veszteségfüggvény összegéből kiindulva

$$L(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{\Sigma}) = (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \hat{\boldsymbol{\mu}}),$$

James és Stein [?] megmutatta, hogy a becslésnek

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \left(1 - c/\overline{\mathbf{X}}^T \mathbf{S}^{-1} \overline{\mathbf{X}}\right) \overline{\mathbf{X}}$$

ahol

$$c = \frac{(p-2)}{[N-(p-2)]}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

kisebb a várható vesztesége, mint az $\overline{\mathbf{X}}$-nek, $p \geq 3$, ezért $\overline{\mathbf{X}}$ nem megengedhető a $p \geq 3$ esetben.

Sajátos becslési problémák merülnek fel, amikor a vizsgálandó többváltozós normális eloszlású adatok között hiányzó értékek is vannak. Nézzünk egy kétváltozós esetet, ahol legyen a hiányos minta $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, a várható érték vektor (μ_1, μ_2), a közös szórásnégyzet σ^2, valamint a korrelációs együttható ϱ. A maximum likelihood becslés megkapható, ha a likelihood függvényt felírjuk az x likelihoodjának és az y, x melletti feltételes likelihood függvényének szorzataként. A becslést tehát a következő négy egyenlet megoldásai adják:

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x}^*, \quad \hat{\mu}_2 = \overline{y} - \hat{\varrho}\left(\overline{x} - \overline{x}^*\right),$$

$$\hat{\varrho} = \frac{S_{12}}{N\hat{\sigma}^2 - (S_1^{*2} - S_1^2)},$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs . . .
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$$\hat{\sigma}^2 = \left(S_1^{*2} - S_1^2 + \frac{S_1^2 + S_2^2 - 2\hat{\varrho} S_{12}}{1 - \hat{\varrho}^2} \right) (N+n)^{-1},$$

ahol

$$\overline{x}^* = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}, \quad \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}, \quad \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n},$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2,$$

$$S_1^{*2} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}^*)^2,$$

$$S_{12} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

A $[-1, 1]$ intervallumon pontosan egy gyöknek egyezik meg az előjele az S_{12}-ével, ami a harmadfokú egyenlet

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

megoldása

$$f(\hat{\varrho}) = n\left(S_1^{*2} - S_1^2\right)\hat{\varrho}^3 - (N-n)\,S_{12}\hat{\varrho}^2 + $$
$$+\left[N\left(S_1^2 + S_2^2\right) - n\left(S_1^{*2} - S_2^{*2}\right)\right]\hat{\varrho} - (N+n)\,S_{12} = 0.$$

Ez a valós gyök az egyetlen maximum likelihood becslése (MLE) ϱ-nak.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becs...
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

10 Hipotézis, konfidencia

Az alábbi állításokat (tulajdonságokat) felhasználjuk a többváltozós normális eloszláshoz kapcsolodó statisztikák minta eloszlásainak származtatásához.

1. Legyen $\mathbf{Z}$ eloszlása $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, ekkor a $\mathbf{Z}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Z}$ kvadratikus alakja χ_p^2 eloszlású.

2. Ha $\mathbf{A}$ egy $p \times p$ dimenziójú pozitív definit mátrix és felírható a
$$\sum_{\alpha=1}^{m} \mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_\alpha^T$$
alakban, ahol $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_{(m)}$ függetlenek és $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ eloszlásúak, akkor az $\mathbf{A}$ elemei *Wishart eloszlásúak*, m szabadságfokkal és $\mathbf{\Sigma}$ kovarianca mátrixal. Ennek a jelölésére az $\boldsymbol{A} \sim W_p(m, \mathbf{\Sigma})$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

kifejezést használják, ahol az index az $\boldsymbol{A}$ dimenzióját mutatja.

3. Legyen $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ és $\mathbf{A} \sim W_p(m, \boldsymbol{\Sigma})$, ahol $\mathbf{Z}$ és $\mathbf{A}$ független eloszlásúak, akkor a

$$\mathbf{Z}^T (\mathbf{A}/m)^{-1} \mathbf{Z}$$

eloszlására azt mondjuk, hogy *Hotelling-féle* T_m^2 *eloszlású*, m szabadságfokkal.

Az egyváltozós normális esetbeli mintaátlag és szórásnégyzet függetlenségének analógiájára alapozva, az $\overline{\mathbf{X}}$ és $\mathbf{S}$ itt is független eloszlású, ahol

$$\overline{\mathbf{X}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/N) \text{ és } \mathbf{S} \sim W_p(n, \boldsymbol{\Sigma}/n).$$

A $\boldsymbol{\Sigma}$ kovariancia mátrix ismeretében felhasználhatjuk az **1.** tulajdonságot, hogy megmutassuk $\sqrt{N}\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}\right)$ eloszlása

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

$N_p\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$; így tehát

$$N\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}\right) \sim \chi^2_p.$$

Ennek következményeként, hipotézisvizsgálatokat és konfidencia intervallumokat készíthetünk $\boldsymbol{\mu}$ paraméterhez.

A $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ vizsgálatára az

$$N\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0\right) \geq \chi^2_{p,\alpha}$$

elfogadási tartományt használjuk, ahol $\chi^2_{p,\alpha}$ a p szabadságfokú χ^2 eloszlás felső $1-\alpha$ pontját jelöli. $\overline{\mathbf{X}}$-ből kiindulva, a $\boldsymbol{\mu}$ $(1-\alpha)$ konfidencia intervalluma

$$N\left(\boldsymbol{\mu} - \overline{\mathbf{X}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - \overline{\mathbf{X}}\right) \leq \chi^2_{p,\alpha},$$

ami egy $\overline{\mathbf{X}}$ középpontú ellipszoid felülete és belseje.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

A **3.** tulajdonságot felhasználva, következésképpen kapjuk, hogy

$$N\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}\mathbf{S}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\sim T_n^2.$$

Ennek eredményeként, ha $\boldsymbol{\Sigma}$ ismeretlen akkor is állíthatunk fel $\boldsymbol{\mu}$-re vonatkozó próbákat a következő egyenlőtlenséget felhasználva

$$N\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{T}\mathbf{S}^{-1}\left(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\geq T_{n,\alpha}^2.$$

A $\boldsymbol{\mu}$-re vonatkozó $(1-\alpha)$ konfidencia intervallum pedig

$$N\left(\boldsymbol{\mu}-\overline{\mathbf{X}}\right)^{T}\mathbf{S}^{-1}\left(\boldsymbol{\mu}-\overline{\mathbf{X}}\right)\leq T_{n,\alpha}^2.$$

A következő összefüggés

$$\frac{(n-p+1)\,\mathbf{T}^2}{(np)}\sim F_{p,n-p+1}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

leegyszerűsíti ezeket a számításokat, ugyanis az F-eloszlás percentilisei azonnal elérhetők. A szóban forgó eredmények kiterjeszthetők két sokaság várható érték vektorát vizsgáló próbákra és konfidencia intervallumokra is.

Egyéb hipotézis vizsgálatok (pl.: diszkriminancia analízis, k várható érték vektorok egyenlőségének vizsgálata, MANOVA, kovariancia mátrixok egyenlősége, kanonikus korreláció) különböző Wishart eloszlásokból származtatott karakterisztikus gyökök együttes eloszlásfüggvényén alapulnak.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

11 Normalitás vizsgálat

Módszer annak vizsgálatára, hogy egy populáció normális eloszlású-e vagy sem. Meglehetősen sokféleképpen térhet el a vizsgált eloszlás a normálistól, és ezek meghatározására irányuló különböző eljárások egyesítése nem lenne hatékony. Mivel nincs egyetlen átfogó, minden esetben jól alkalmazható módszer sem, így a megfelelő kiválasztása történhet a legvalószínűbbnek vélt eltérés alapján, vagy amelyikkel a leghasználhatóbb eredmények kaphatók.

A vizsgálat előtt érdemes az adatokat ábrázolni és a nagyon kiugró pontokat elhagyni, mert ezek miatt hamis eredményeket is kaphatunk a nem normalitásra vonatkozólag.

Amikor egy tesztet sok változón kell végrehajtani, akkor előfordulhat, hogy a legjelentősebb nem normalitást okozó

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

tényezők hatását elrejti a többi változó ún. "hígító" hatása. Ilyen esetben csak azokat kell kiválasztani, amelyek a vizsgálat tárgyát képezik.

Feltéve, hogy diszjunkt részhalmazokat választottunk, amelyek hozzávetőleg függetlenek, és nem okoz gondot a szignifikancia szint meghatározása a teljes tesztet átfogóan, a következő vizsgálatok közül választhatunk:

1. Perem normalitás vizsgálat.
2. Egydimenziós vizsgálat részleges vagy együttes normalitást illetően.
3. Többváltozós módszerek az együttes normalitás vizsgálatára.

Legyen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ egy $\mathbf{X}$ véletlen vektorból vett n hosszúságú megfigyelés sorozat, és legyen az $\mathbf{X}$ p darab

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

komponense $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Legyen $\overline{\mathbf{X}}$ és $\mathbf{S}$ a mintabeli átlag és a szórásmátrix, valamint $\boldsymbol{\mu}$ és $\boldsymbol{\Sigma}$ a megfelelő sokasági paraméterek. A nullhipotézis az, hogy $\mathbf{X}$ többváltozós normális.

Az $\mathbf{x}_i$ *Mahalanobis távolsága* $\overline{\mathbf{X}}$-től a következőképp definiálható

$$r_i^2 = (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{X}}).$$

Az $\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{X}}$ és $\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{X}}$ közti *Mahalanobis szög*

$$r_{ij} = (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{X}}).$$

A *skálázott reziduális*ok

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{S}^{-1/2} (\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{X}}).$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

12 Perem normalitás

Emlékezzünk rá, hogy a határ normalitásból nem következik az együttes normalitás, fordítva viszont igen. A legegyszerűbb lehetőség az, ha megvizsgáljuk a határeloszlások egyváltozós normalitását és megbecsüljük a teljes szignifikancia szintet.

Legyen $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ két $p \times 1$ dimenziójú vektor, melyek a ferdeség és a lapultság értékeit tartalmazzák. Johnson S_U transzformációjának alkalmazásával, kapunk belőlük egy $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ vektort, melyek megközelítőleg standard normális eloszlásúak. Jelölje $\mathbf{w}_1$ és $\mathbf{w}_2$ kovariancia mátrixait $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{U}_2$, melyek főátlóiban egyesek állnak. A nem főátlóbeli elemek aszimptotikusan ϱ_{ij}^3 és ϱ_{ij}^4, ahol ϱ_{ij} a $corr(X_i, X_j)$, mely a mintabeli korrelációk által lett becsülve. A $Q_1 = \mathbf{w}_1^T \mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{w}_1$ és $Q_2 = \mathbf{w}_2^T \mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{w}_2$ próbastatisztikák megközelítőleg függetlenek, és null-eloszlásúak,

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

hozzávetőlegesen χ_p^2.

Mivel megmutatják, hogy egy önmagában álló határeloszlásban fellelhető-e a normálistól való eltérés, ezért az ilyen tesztek elvégzése mindig javasolt.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Full Screen
Search
Close

13 Egydimenziós vizsgálat

Egy egyszerű, de jól alkalmazható módszer a többváltozós normalitás meghatározására, az, hogy ábrázoljuk a rendezett Mahalanobis távolságokat a nekik megfelelő null eloszlások várható statisztikáinak függvényében. A $p = 2$ és a $n \geq 25$ esetben ez az eloszlás a χ_2^2-tel közelíthető. A $p > 2$ esetben a χ_p^2 eloszlással való közelítás már nem alkalmas, ilyenkor a Beta-eloszlás statisztikáinak becslése sokkal célravezetőbb. Mivel az r_i^2 null eloszlása ismert, így egy mennyiségi teszt végezhető azáltal, hogy normál pontokká alakítjuk őket és egyváltozós normalitás vizsgálatot végzünk.

A módszerek egy másik fajtája az, hogy a többváltozós normális eloszlás jellemzőit a változok összes lineáris kombinációján végzett egyváltozós normalitástesztek alapján vizsgálják.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizs...
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

A harmadik módszer két dimenziós adathalmazokon végzendő, de itt a próbastatisztikát a változók egyenkénti lineáris kombinációjával kapott függvény maximuma adja.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizs . . .
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

14 Együttes normalitás

Egy lehetséges geometriai megközelítés, hogy az $\mathbf{y}_i$ skálázott reziduálisokat polár koordinátákká alakítjuk, amivel kapunk p darab $r_i^2 = \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i$ koordinátát, valamint $(p-1)$ független szöget. Az egyik szög egyenletes eloszlású lesz a $[0, 2\pi)$ intervallumon, így ez könnyen ábrázolható. $p > 2$ esetén a fennmaradó szögek eloszlásának sűrűsége

$$\sin^{j-1}\vartheta \qquad (0 \leq \vartheta \leq \pi, j = 2, \ldots, p-1).$$

Mardia statisztikái a ferdeség és a lapultság mérésére:

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^3 \text{ és } b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^4.$$

Aszimptotikusan,

$$\frac{nb_{1,p}}{6}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

eloszlása χ^2,

$$\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$$

szabadsági fokkal, és $b_{2,p}$ eloszlása pedig

$$N(p(p+2), \frac{8p(p+2)}{n}.$$

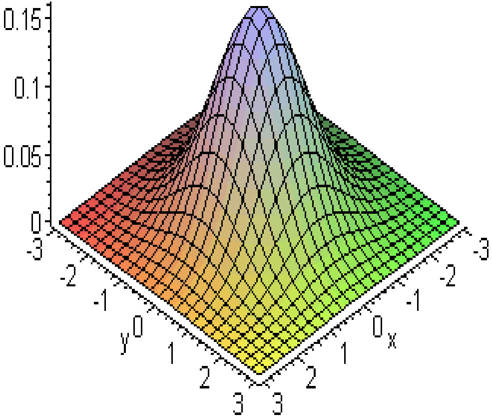
Andrews és mások a Box-Cox-féle egyváltozós normalitásba transzformáló módszert kiterjesztették a többváltozós esetre is, amellyel egy likelihood hányados próba végezhető el a többváltozós normalitás megállapítására.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

15 Kétváltozós normális

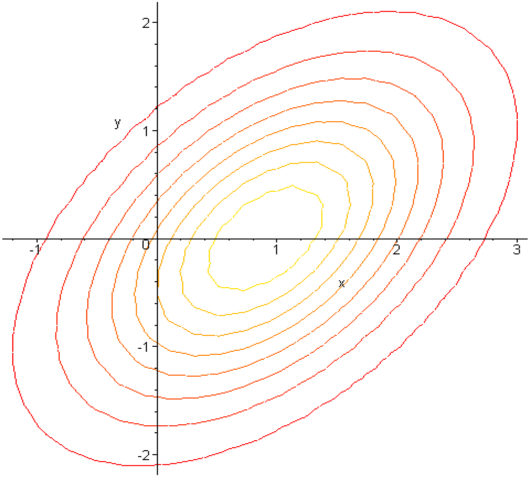
Az ábrán két független standard normális valószínűségi változó együttessűrűségfüggvénye látható.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége



Az ellipszis alakú szintvonalak ábrázolása:

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége



GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

T^2 próba

Vizsgáljuk meg $H_0 : \mu = (9,5)^T$ hipotézist az alábbi adatokon:

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ebből megkapjuk, hogy $\overline{X} = (8,6)^T$ és

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}$$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

és

$$\overline{X} - \mu = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezek után

$$T^2 = \frac{3(3-2)}{(2)(2)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{7}{36}.$$

A 2 és 1 szabadsági fok és 5%-os szignifikancia szint mellett még bőven beleesik a megbízhatósági intervallumba, így elfogadhatjuk a H_0 hipotézist.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

16 Konfidencia intervallum meghatározása

A konfidencia intervallumot alapvetően a H_0 hipotézis által elfogadott összes paramaméter érték határozza meg. Például egy egymintás, két oldalú t-próba esetén

$$-t \leq \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq t,$$

ahol t az eloszlás megfelelő értéke, μ pedig a H_0 hipotézis feltevése.

Alkalmazzuk ugyanezt a gondolatmenetet a T^2 próbára is: határozzuk meg azokat a $\mu = (\mu_1, \mu_2)^T$ értékeket, melyekre igaz, hogy $T^2 \leq F$. Térjünk vissza az előző példához. Legyen $d_1 = \overline{x}_1 - \mu_1 = 8 - \mu_1$, $d_2 = \overline{x}_2 - \mu_2 =$

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia interva...
Vége

$6-\mu_2$, ekkor

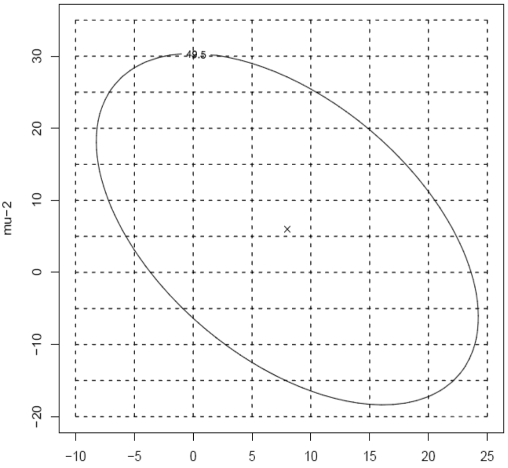
$$T^2=\frac{3}{4}\begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{27} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{36}(9d_1^2+6d_1d_2+4d_2^2).$$

Ahhoz, hogy beleessen a 90%-os konfidencia intervallumba, teljesülnie kell annak, hogy $T^2 \leq 49,5$. Mivel $\mu_1=10, \mu_2=20, d_1=8-10=-2, d_2=6-20=-14$. Tehát $T^2=27,44<49,5$, ezért belesik.

Továbbá, $\mu_1=20, \mu_2=15, d_1=8-20=-12, d_2=6-15=-9$. Tehát $T^2=63>49,5$, azaz kívűlre esik.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia interva...
Vége



GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia interva . . .
Vége

Köszönöm

a figyelmet!

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu . . .
Vége

References

[1] A. C. Allen: *Probability, Statistics and Queueing Theory, With Computer Applications,* Academic Press, New York, 2003. ISBN-13: 978-0120510504

[2] Deák I.: *Véletlenszámgenerátorok és alkalmazásaik,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[FR11] Fegyverneki Sándor, Raisz Péter: *Sztochasztikus modellezés,*elektronikus jegyzet, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FS11] Fegyverneki Sándor: *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika,* elektronikus jegyzet, Kempelen Farkas elektronikus könyvtár, 2011,

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FE78] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[HU81] P.J.Huber: *Robust statistics,* Wiley, New York, 1981.

[3] I.M. Szobol: *A Monte-Carlo módszerek alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[AK00] Ágoston K., Kovács E.: *Halandósági modellek,* Aula, Budapest, 2000.

[AM01] Arató M.: *Nem-életbiztosítási matematika,* ELTE jegyzet, Budapest, 2001.

[BJ03] Banyár J.: *Életbiztosítás,* Aula, Budapest, 2003.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu…
Vége

[HW88] Heilmanm, W.R.: *Fundamentals of Risk Theory,* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 1988. (Magyarul megjelent a BOKCS kiadásában.)

[KO05] Komáromi É.: *A neméletbiztosítás matematikai módszerei,* Corvinus jegyzet, Budapest, 2005.

[KE03] Kovács E.: *Biztosítási számítások,* BKÁE Aktuárius Jegyzetek 12. kötet, Budapest, 2003.

[SV00] Szabó L., Viharos L.: *Az életbiztosítás alapjai,* Polygon, Szeged, 2000.

GP modellek
Portfólió optimalizálás
Stabilis eloszlás
Transzformáció
Normális eloszlás
Többváltozós normális
Többváltozós elemzések
Elemi tulajdonságok
Jellemzők
A paraméterek becslése
Hipotézis, konfidencia
Normalitás vizsgálat
Perem normalitás
Egydimenziós vizsgálat
Együttes normalitás
Kétváltozós normális
Konfidencia intervallu...
Vége

Full Screen
Search
Close