GP modellek VI.

Fegyverneki Sándor
Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék
matfs@uni-miskolc.hu

2021. április 12.

1 Portfólió optimalizálás

Adott $n$db befektetés,

a hozam

$$\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

ahol $E(\xi) = \mu$, $Var(\xi) = \Sigma$ és legyenek a portfólió súlyok

$$w^T = (w_1, w_2, \ldots, w_n).$$

$$\xi \sim N(\mu, \Sigma),$$

ekkor a portfólió hozama

$$\xi_p = w^T \xi \sim N(\mu_p, \sigma_p^2),$$

ahol $\mu_p = w^T \mu$, $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$.

Feladat:

Keressük meg a portfólió minimális szórásnégyzetét, ha a hozam várható értékének minimális értéke c, azaz

$$\min_{w} w^T \Sigma w,$$

$$w^T \mu \geq c,$$

$$e^T w = 1,$$

ahol $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$.

Markowitz (1952)

Full Screen
Search
Close

2 Hozamráta

Egy befektetési eszköz hozamrátája vagy megtérülési rátája:

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}$$

Legyen n féle befektetési eszközünk, amelyeknek a hozamrátája valószínűségi változó, jelölje ezeket

$$R_1, R_2, \ldots, R_n.$$

Az egyes befektetési eszközök hozamrátájának várható értékét jelölje

$$r_1 = E(R_1), r_2 = E(R_2), \ldots, r_n = E(R_n).$$

Az egyes befektetési eszközök hozamrátája közötti kovarianciákat jelölje

$$c_{ij} = cov(R_i, R_j).$$

Állítsunk össze egy portfóliót a fenti befektetési eszközökből, legyen az egyes befektetési eszközök súlya

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

A portfólió hozamrátája, mint valószínűségi változó

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i,$$

a portfólió hozamrátájának várható értéke

$$r = E(R) = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i,$$

a portfólió hozamrátájának varianciája

$$\sigma^2 = Var(R) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j.$$

3 MARKOWITZ modell

A súlyok megválasztásával különböző portfóliókat kapunk.

Melyek a hatékony portfóliók?

Ábrázoljuk az egyes portfóliókat a várható ért ék - szórás (r, σ) diagramban, amelyben minden portfó liónak egy pont felel meg.

A hatékony portfóliókat meghatározó két ekvivalens matematikai programozási probléma:

Full Screen
Search
Close

1. modell:

Meghatározandó $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hogy

$$Var(R) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j$$

minimális legyen, feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i r_i &= r_p, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= 1. \end{aligned}$$

2. modell:

Meghatározandó $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hogy

$$r = \sum_{j=1}^{n} x_i r_i$$

maximális legyen, feltéve, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j &= \sigma_p^2,\\ \sum_{i=1}^{n} x_i &= 1.\end{aligned}$$

Full Screen
Search
Close

Hatékony portfóliók görbéje:

$$\frac{\sigma^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{S}}\right)^2} - \frac{\left(r - \frac{Q}{S}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{D}}{S}\right)^2} = 1$$

ahol

$$P = r^T C^{-1} r,\ Q = r^T C^{-1} e,\ S = e^T C^{-1} e,\ D = PS - Q^2$$

4 Hasznossági függvény

Arra keressük a választ, hogy egy befektető a hatékony portfóliók közül melyiket választja.

Gyakran használt hasznossági függvények:

1. Exponenciális

$$U(x) = 1 - e^{-bx}, \quad b > 0$$

2. Logaritmikus

$$U(x) = \ln x$$

3. Hatvány

$$U(x) = x^b, \quad 0 < b < 1$$

4. Kvadratikus

$$U(x) = x - bx^2, \quad b > 0$$

Az Arrow-Pratt féle kockázatelutasítási együttható:

$$a(x) = \frac{U''(x)}{U'(x)}$$

A hasznossági függyvény legyen kétszer deriválható és konkáv.

A portfólió kiválasztási probléma általános formája:

Meghatározandó $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hogy

$$E(U[R])$$

maximális legyen, feltéve, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Egy portfólió kiválasztási probléma:

Feltevések:

- a portfólió hozamrátája (R) normális eloszlású
- a befektető hasznossági függvénye (U) exp.

A célfüggvény meghatározása:

$$E(U[R]) = E(1 - e^{-bR}) = 1 - E(e^{-bR})$$

A $-bR$ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke és varianciája

$$\begin{aligned} E(-bR) &= -bE(R), \\ Var(-bR) &= b^2 Var(R). \end{aligned}$$

Az e^{-bR} valószínűségi változó lognormális eloszlású, várható értéke

$$E(e^{-bR}) = e^{-bE(R) + \frac{1}{2} b^2 Var(R)}$$

A célfüggvény tehát

$$E(U[R]) = 1 - e^{-bE(R)+\frac{1}{2}b^2Var(R)},$$

azaz az

$$E(R) - \frac{1}{2}bVar(R)$$

függvénynek kell a maximumát keresni.

Kockázatos és mentes

A kockázatos eszköz várható hozamrátája, szórása; súlya: $r_p, \sigma_p; x$

A kockázatmentes eszköz hozamrátája, súlya: $r_0, 1-x$

A portfólió várható hozamrátája és varianciája:

$$\begin{aligned} E(R) &= xr_p + (1-x)r_0, \\ Var(R) &= x^2\sigma_p^2. \end{aligned}$$

Az optimalizálási feladat:

$$E[U(R)] = xr_p + (1-x)r_0 - \frac{1}{2}bx^2\sigma_p^2 \to \max!$$

Mentes és n kockázatos

A kockázatos eszközök várható hozamrátája, kovarianciái, súlyai:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n; c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}; x_1, x_2, \ldots, x_n$$

A kockázatmentes eszköz hozamrátája, súlya:

$$r_0; \quad x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Az optimalizálási feladat:

$$E[U(R)] =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) r_0 - \frac{1}{2} b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} x_j \to \max!$$

Legyen az optimális megoldás:

$$x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$$

Most tekintsünk két alfeladatot:

A) feladat:

Csak a kockázatos eszközöket tekintjük. Legyenek a súlyok

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Az optimalizálási feladat: Egységnyi szórásra jutó kockázati prémium maximális, azaz

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i r_i - r_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_i c_{ij} y_j}} \quad \rightarrow \quad \max!$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \quad = \quad 1.$$

Legyen az optimális megoldás:

$$y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*$$

Full Screen

Search

Close

B) feladat:

Most a kockázatos portfóliót egy eszköznek tekintve, amelynek várható hozamrátája és szórása

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} y_i^* r_i,$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* c_{ij} y_j^*}.$$

Egy kockázatos és egy kockázatmentes eszköz optimális arányát $(z, 1-z)$ meghatározó feladat:

$$z r_p + (1-z) r_0 - \frac{1}{2} b z^2 \sigma_p^2 \to \max!$$

Legyen az optimális megoldás:

$$z^*.$$

SZEPARÁCIÓS TÉTEL

$$\begin{aligned} x_0^* &= 1 - z^*, \\ x_i^* &= y_i^* z^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

5 CAPM

Tőkepiaci árfolyamok modellje.

Tőkepiaci egyenes:

$$r = r_0 + \frac{r_M - r_0}{\sigma_M}\sigma$$

A befektetési eszközökre vonatkozó összefüggés (CAPM formula):

$$r_i - r_0 = \beta_i \left(r_M - r_0\right)$$

ahol

$$\beta_i = \frac{cov\left(r_i, r_M\right)}{\sigma_M^2}$$

CAPM alkalmazása

Egy befektetési eszköz hozamrátája:

$$\frac{Q_i - p_i}{p_i}$$

ahol Q_i valószínűségi változó, várható értéke: $q_i = E(Q_i)$, az eszköz hozamrátájának várható értéke: $r_i = \frac{q_i}{p_i}$. A befektetési eszköz ára a CAPM formulából levezetve:

$$p_i = \frac{1}{1 + r_0} \left(q_i - \frac{cov\,(q_i, r_M)}{\sigma_M^2} (r_M - r_0) \right)$$

Full Screen

Search

Close

6 Stacionárius folyamatok

Legyen $\{\xi(t), t \in T\}$ sztochasztikus folyamat, amelyet stacionáriusnak nevezünk, ha

$$(\xi(t_1+h), \xi(t_2+h), \ldots, \xi(t_n+h)), \quad n \in \mathbf{N}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_n,$$

n-dimenziós eloszlása független h-tól. Szokás szigorúan stacionáriusnak is nevezni.

Egy folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezünk, ha

$$E(\xi(t)) = m, \quad m \in \mathbf{R},$$

$$R(t) = cov(\xi(s+t), \xi(s)),$$

azaz a várható érték konstans és a kovariancia függvény csak az eltolástól (késéstől) függ.

A kovarianciafüggvény reprezentálható, mint Fourier transzformált

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} dF(x),$$

ahol az F függvényt spektrál eloszlásfüggvénynek nevezzük.

Jellemző tulajdonságai:

1. Szimmetria: $dF(x) = dF(-x)$.

2. Monotonitás: ha $x < y$, akkor $F(x) \leq F(y)$.

3. Korlátosság: $F(+\infty) - F(-\infty) = R(0) < \infty$.

F egy additív konstanstól eltekintve meghatározott, ezért gyakran $F(-\infty) = 0$.

Ha F abszolút folytonos, akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds,$$

és ekkor a spektrumot abszolút folytonosnak nevezzük és f a spektrál sűrűségfüggvény.

A

$$\lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x)$$

mennyiséget k-adik spektrál momentumnak nevezzük.

Az F szimmetriája miatt minden páratlan momentum 0, míg a párosak lehetnek végesek vagy végtelenek. A spektrál momentumok végessége összekapcsolható a folyamat simaságával. Mivel

$$E((\xi(s+t) - \xi(s))^2) = 2(R(0) - R(t)),$$

ezért a folytonosság kifejezhető a kovariancia függvénnyel. Rögtön adódik, hogy $\xi(t+h) \to \xi(t)$ négyzetes középben, amint $h \to 0$, ha R folytonos a nullánál. A $\xi(t)$ stacionárius sztochasztikus folyamat realizációi folytonosak, ha

$$R(t) = R(0) - \mathcal{O}\left(\frac{|t|}{|\ln |t||^q}\right), \quad t \to 0, \quad q > 3.$$

Tétel:

Legyen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ egy felosztása a $[0, T]$ intervallumnak, ekkor

$$\lim_{\max(t_k - t_{k-1}) \to 0} \sum \left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right]^2 = \sigma_w^2 T$$

(1 valószínűséggel).

Bármely stacionárius kovariancia függvény esetén létezik egy konstans szórásnégyzet, amelyre

$$R(t) = \sigma^2 \varrho(t),$$

ahol $\varrho(t)$ a korreláció függvény, amely általánosan

$$\varrho(s, s+t) = \frac{cov(\xi(s+t), \xi(s))}{\sqrt{cov(\xi(s), \xi(s))cov(\xi(s+t), \xi(s+t))}}.$$

7 A Brown-mozgás

Definíció: A Brown-mozgás olyan

(1) $$\{W(t), t \in [0, \infty)\}$$

véletlen folyamat, ahol

1. $W(0) = 0$.
2. $W(t)$ folytonos.
3. A W folyamat független növekményű.
4. $W(t+s) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$.

$W(t)$ megfigyelt a $[0, T]$ intervallumon és $\sigma^2 = 1$. Tudjuk, hogy a kovariancia függvény

(2) $$R(s, t) = \min(s, t).$$

A sajátfüggvényekre

$$\int_0^T R(s,t)\varphi(t)dt = \lambda\varphi(t), \tag{3}$$

azaz

$$-\varphi(s) = \lambda\varphi''(s), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{4}$$

Tehát megadható a Karhunen-Loeve sorfejtés:

$$W(t) = \xi_0 \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(jt)}{j}\xi_j, \tag{5}$$

ahol $t \in [0,\pi]$, $j \in \mathbf{N}$, $\xi_j \sim N(0,1)$, azaz standard Gauss-eloszlású. Ez alapján készült szimulációkat láthatunk a 1, 2, 3 ábrán.

Figure 1: Brown-mozgás a $[0, 2\pi]$ intervallumon

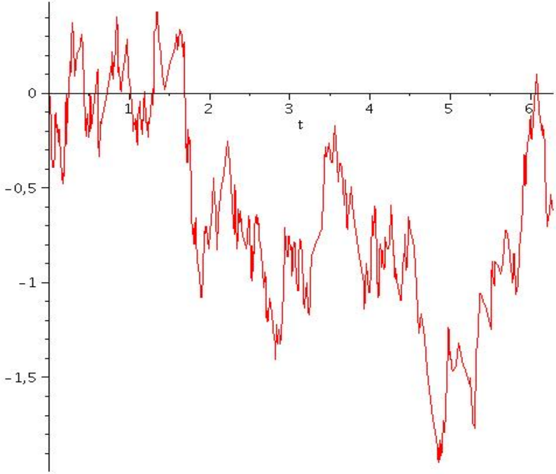


Figure 2: Brown-mozgás a $[0, 2\pi]$ intervallumon

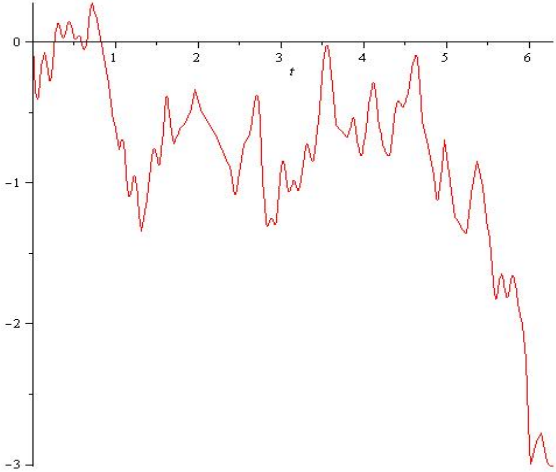
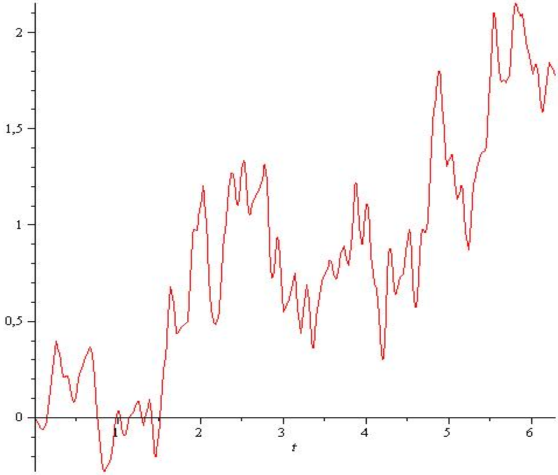


Figure 3: Brown-mozgás a $[0, 2\pi]$ intervallumon



8 Geometriai Brown-mozgás

Legyen $\{\tilde{X}(t) : t \geq 0\}$ Brown-mozgás. A sodródó Brown-mozgás olyan sztochasztikus folyamat, melynek eloszlása megegyezik

$$X(t) = \tilde{X}(t) + \mu t, \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

eloszlásával, ahol μ állandó (sodrási paraméter).

A folyamatot definiálhatnánk a következő módon is.

Definíció: A $\{X(t) : t \geq 0\}$ sodródó Brown-mozgás, ha

(1) $X(t+s) - X(s) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, $0 < s, t$. μ és σ rögzített konstans.

(2) $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, akkor a

(7) $$X(t_2) - X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

valószínűségi változók függetlenek.

(3) $X(0) = 0$, és $X(t)$ folytonos a 0 pontban.

Megjegyzés:

$$P(X(t) < x | X(t_0) = x_0) = P(X(t) - X(t_0) < x - x_0) =$$

$$= \int_{\infty}^{x-x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)\sigma}} \exp\left[-\frac{(y-\mu(t-t_0))^2}{2(t-t_0)\sigma^2}\right] dy =$$

(8) $$= \int_{-\infty}^{x-x_0-\mu\frac{t-t_0}{\sigma}} p(t-t_0, y)dy,$$

ahol

(9) $$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right].$$

Megjegyzés:

Ha $\mu \neq 0$, akkor a folyamat nem szimmetrikus, és a

Full Screen

Search

Close

tükrözési elv nem használható a folyamat maximuma eloszlásának kiszámolására.

Full Screen
Search
Close

Legyen $\{X(t) : t \geq 0\}$ olyan Brown-mozgás, amelynek sodrási paramétere μ, és diffúziós együtthatója pedig σ^2. Az

(10) $$Y(t) = e^{X(t)}, \qquad t \geq 0$$

egyenlőséggel definiált folyamatot geometriai Brown mozgásnak nevezzük.

Mivel $Y(t) = Y(0)e^{X(t)-X(0)}$, ezért a normális eloszlás karakterisztikus függvénye alapján

$$E(Y(t)|Y(0) = y) = yE\left(e^{X(t)-X(0)}\right) =$$

(11) $$= y \exp\left[t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\right],$$

$$E(Y(t)^2|Y(0) = y) = y^2 E\left(e^{2(X(t)-X(0))}\right) =$$

(12)
$$= y^2 \exp\left[t(2\mu + \frac{1}{2}4\sigma^2)\right],$$

(13)
$$D^2(Y(t)|Y(0) = y) = y^2 \exp\left[2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\right] [\exp(t\sigma^2) - 1].$$

Példa: Egy tökéletes piacon árusított részvény árváltozásainak modellezése:

– nem-negatív árak;

– oszcilláló viselkedés (hosszú távon exponenciális csökkenésekkel tarkított exponenciális növekedés);

– ha $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, akkor

$$\frac{Y(t_1)}{Y(t_0)}, \frac{Y(t_2)}{Y(t_1)}, \ldots, \frac{Y(t_n)}{Y(t_{n-1})} \tag{14}$$

független valószínűségi változók.

Alkalmas modell: Ha a jövőbeli ár és a pillanatnyi ár arányáról előre meg lehetne mondani, hogy milyen akkor a résztvevők vétellel illetve eladással korrigálnának. Egyensúlyi helyzetet akkor kapunk, ha az arányról nem lehet előre megjósolni, hogy vajon kedvező lesz-e vagy kedvezőtlen (függetlenség).

Érdemes-e örökös biztosítékot adni a tőzsdén?

Biztosíték: elővételi jog, hogy valaki előre rögzített számú részvényt vásárolhasson valamilyen előre megállapított áron, egy előírt időperiódus bármely időpontjában.

Az elővételi joggal rendelkező profitja az, amennyivel a tőzsdei ár meghaladja az opciós árat.

Feltevés: az opciót fenntartó a megállapított áron vásárolhat és újra eladhat a tőzsdén (profit realizálás). Örök idejű biztosítékot tekintünk – az opciónak nincs lejárati ideje.

"Észszerű" stratégia: az első olyan időpont alkalmával gyakoroljuk az elővételi jogot, amikor a részvény ára valamilyen meghatározott a szintet ér el. Legyen egységnyi a biztosítékban meghatározott ár, ekkor a potenciális profit $a - 1$ $(a > 1)$.

Egy ilyen opció birtokosa, legalábbis részben, lemond a részvény közvetlen birtoklásáról, amelynek értéke (várhatóan) időegységenként $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ arányban növekszik, mivel

$$E(Y(t)|Y(0)=y) = y\exp\left[t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\right]. \tag{15}$$

Az opciótól $\vartheta > \alpha$ hozamot követelünk meg (leszámítolás, jelenérték).

Legyen $T(a)$ az első időpont, amelyre $Y(T(a)) = a$. Ekkor a leszámított potenciális profit

$$e^{-\vartheta T(a)}[Y(T(a)) - 1] = e^{-\vartheta T(a)}(a-1). \tag{16}$$

A várható leszámított profit nagyságát akarjuk kiszámítani, és azután maximalizálni a várható profitot.

A $T(a)$ az első olyan időpont, amikor $X(t) - \ln Y(t)$ eléri az $\ln(a)$ szintet.

Tétel:

Legyen $X(t)$ Brown-mozgás, $\mu \geq 0$. Legyenek $z > X(0) = x$ adott értékek, és legyen T_z az első olyan érték, amelyre $X(T_z) = z$. A $X(0) = x$ feltétel mellett T_z sűrűségfüggvénye

(17)

$$f(t; x, z) = \frac{z - x}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(z - x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right], \quad t > 0.$$

Megjegyzés:
$\mu \geq 0$ esetén T biztosan kisebb, mint végtelen, és a Laplace transzformáltja:

(18) $$E(e^{-\vartheta T}) = \exp\left[-\frac{z}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2\vartheta} - \mu)\right].$$

Legyen $z = \ln a$ és $x = \ln y$, akkor a Laplace transzformált alapján

(19) $$E(e^{-\vartheta T}|Y(0) = y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\varrho},$$

ahol

(20) $$\varrho = \sqrt{\frac{\mu^2}{\sigma^4} + \frac{2\vartheta}{\sigma^2}} - \frac{\mu}{\sigma^2}.$$

A leszámított profit várható értéke
(21)
$$g(y, a) = (a - 1)E(e^{-\vartheta T}|Y(0) = y) = (a - 1)\left(\frac{y}{a}\right)^{\varrho}.$$

Full Screen
Search
Close

Profit maximalizálás:

$$\frac{dg}{da} = -\varrho(a-1)\left(\frac{y}{a}\right)^{\varrho+1}\frac{1}{y} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\varrho} = 0. \tag{22}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$a^\star = \frac{\varrho}{\varrho-1}. \tag{23}$$

Ha $\vartheta > \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$, akkor $0 < a^\star < \infty$. Adott y pllanatnyi részvényár esetén a biztosíték értéke

$$g(y, a^\star) = \frac{1}{\varrho-1}\left(\frac{y(\varrho-1)}{\varrho}\right)^{\varrho}. \tag{24}$$

Köszönöm

a figyelmet!

References

[1] A. C. Allen: *Probability, Statistics and Queueing Theory, With Computer Applications*, Academic Press, New York, 2003. ISBN-13: 978-0120510504

[2] Deák I.: *Véletlenszámgenerátorok és alkalmazásaik*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[FR11] Fegyverneki Sándor, Raisz Péter: *Sztochasztikus modellezés*,elektronikus jegyzet, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/˜ matfs/

[FS11] Fegyverneki Sándor: *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika*, elektronikus jegyzet, Kempelen Farkas elektronikus könyvtár, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FE78] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[HU81] P.J.Huber: *Robust statistics*, Wiley, New York, 1981.

[3] I.M. Szobol: *A Monte-Carlo módszerek alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[AK00] Ágoston K., Kovács E.: *Halandósági modellek*, Aula, Budapest, 2000.

[AM01] Arató M.: *Nem-életbiztosítási matematika*, ELTE jegyzet, Budapest, 2001.

[BJ03] Banyár J.: *Életbiztosítás*, Aula, Budapest, 2003.

[HW88] Heilmanm, W.R.: *Fundamentals of Risk Theory,* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 1988. (Magyarul megjelent a BOKCS kiadásában.)

[KO05] Komáromi É.: *A neméletbiztosítás matematikai módszerei,* Corvinus jegyzet, Budapest, 2005.

[KE03] Kovács E.: *Biztosítási számítások,* BKÁE Aktuárius Jegyzetek 12. kötet, Budapest, 2003.

[SV00] Szabó L., Viharos L.: *Az életbiztosítás alapjai,* Polygon, Szeged, 2000.