GP modellek V.

Fegyverneki Sándor
Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék
matfs@uni-miskolc.hu

2021. március 08.

1 M-becslések

Legyen adott az $(X, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbf{R}^k$ statisztikai tér, a P_ϑ eloszlássereg dominált a μ mértékkel, azaz léteznek a sűrűségfüggvények. Ezenkívül adott a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta, amely elemeiről tudjuk, hogy függetlenek és azonos eloszlásúak, a közös sűrűségfüggvény $f(x, \vartheta)$.

Definíció:

Legyen $\vartheta : \mathbf{F} \to \mathbf{R}^k$. A ϑ becslés hatásfüggvényének (influence function) nevezzük F-nél az

$$IF(x; \vartheta, F) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\vartheta((1-t)F + t\nabla_x) - \vartheta(F)}{t}$$

minden olyan $x \in \mathbf{R}$-re, ahol a határérték létezik. A ∇_x az x pontra koncentrált valószínűségi mérték.

Definíció:

Tegyük fel, hogy $IF(x; \vartheta, F)$ létezik. A

$$\gamma^\star = \sup_x |IF(x; \vartheta, F)|$$

mennyiséget a ϑ becslés érzékenységének (gross-error sensitivity) nevezzük F-nél, ahol a szupremumot minden olyan x-re tekintjük, amikor $IF(x; \vartheta, F)$ létezik.

Jelölése: $\gamma^\star(\vartheta, F)$.

Definíció:

Ha $\gamma^\star(\vartheta, F)$ véges, akkor ϑ-t B-robusztusnak nevezzük F-nél.

Definíció: A T_n maximum-likelihood becslés a ϑ paraméterre, ha

$$\max_{\vartheta} \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i, T_n).$$

Megjegyzés:
Ezzel ekvivalens, hogy

$$\min_{\vartheta} \sum_{i=1}^{n} -ln f(\xi_i, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} -ln f(\xi_i, T_n).$$

Definíció: Legyen $\rho : X \times \Theta \to \mathbf{R}$. M-becslésnek nevezzük azokat a T_n becsléseket, amelyek minimalizálják a

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \vartheta)$$

összeget ϑ-ra nézve adott minta esetén.

Megjegyzés:

1. Nagyon sokszor azonosítják az M-becsléseket a $\rho(x,\vartheta)$ függvény deriváltjai alapján (ha léteznek) felírt egyenletekkel. Tegyük fel, hogy a

$$\psi_m(x,\vartheta) = \frac{\partial\rho(x,\vartheta)}{\partial\vartheta_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, k)$$

parciális deriváltak léteznek, s ekkor az M-becslésekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_m(\xi_i,\vartheta) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, k).$$

A rövidség kedvéért sokszor csak a ψ függvényeket használjuk az M-becslések definiálására.

2. Megfigyelhetjük, hogy egy $r > 0$ konstanssal szorozva a ρ illetve ψ függvényeket a becslés nem változik.

3. Funkcionálként is definiálhatjuk az M-becsléseket, azaz M-becslésnek nevezzük azt a funkcionált, amelyre $T(F) \in \mathbf{R}^k$ minimalizálja az $\int \rho(x,\vartheta)dF(x)$-et ϑ-ban, ahol $\rho : X \times \Theta \to \mathbf{R}^k$ vagy megoldása az

$$\int \psi(x,\vartheta)dF(x) = O$$

vektoregyenletnek, ahol $\psi : X \times \Theta \to \mathbf{R}^k$.

A hatásfüggvény a következő:

$$IF(x;T,F) = M(\psi,F)^{-1}\psi(x,T(F)),$$

ahol M $k \times k$ típusú mátrix és

$$M(\psi,F) = -\int \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\psi(x,\vartheta)\right]_{T(F)} dF(x).$$

Az aszimptotikus kovariancia mátrix pedig

$$V(T,F) = M(\psi,F)^{-1}Q(\psi,F)[M(\psi,F)^{-1}]^T,$$

Full Screen
Search
Close

ahol $Q(\psi, F) = \int \psi(x, T(F))\psi(x, T(F))^T dF(x)$.

Ha a becslés konzisztens, azaz

$$\int \psi(x, \vartheta) dF_\vartheta(x) = O$$

minden $\vartheta \in \Theta$-ra, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(\psi, F) = \int \psi(x, \vartheta) s(x, \vartheta)^T dF_\vartheta(x).$$

Tehát konzisztens esetben F_ϑ-nál az M-becslés hatásfüggvényét a $\psi(\cdot, \vartheta)$ értékei már meghatározzák és nincs szükség a deriváltakra.

Ha $k = 1$, akkor a hatásfüggvény

$$IF(x, \psi, F) = \frac{\psi(x, T(F))}{-\int \frac{\partial}{\partial \vartheta}[\psi(y, \vartheta)]_{T(F)} dF(y)},$$

az aszimptotikus szórásnégyzet pedig

$$V(T,F)=\frac{\int \psi^2(x,T(F))dF(x)}{[\int \frac{\partial}{\partial\vartheta}[\psi(y,\vartheta)]_{T(F)}dF(y)]^2.}$$

2 A helyparaméter becslése

Legyen $X = \mathbf{R}$, $\Theta = \mathbf{R}$, $F_\vartheta(x) = F(x-\vartheta)$, $\vartheta_0 = 0$, s ekkor

$$\psi(x,\vartheta) = \psi(x-\vartheta)$$

típusú ψ-függvényeket használunk, ahol $\int \psi dF = 0$. Ekkor

$$IF(x;\psi,G) = \frac{\psi(x-T(G))}{\int \psi'(y-T(G))dG(y)},$$

ami az F modell eloszlásfüggvény esetén

$$IF(x;\psi,F) = \frac{\psi(x)}{\int \psi' dF}.$$

Hasonlóan az aszimptotikus szórásnégyzet

$$V(\psi,F) = \frac{\int \psi^2 dF}{(\int \psi' dF)^2}.$$

Az aszimptotikus normalitás bizonyítása megtalálható Huber (1981) könyvében.

Full Screen
Search
Close

Ezek után kimondhatjuk azt az általános tételt, amelyik összefoglalja a helyparaméter M-becsléseinek tulajdonságait.

Tétel:

Legyen ψ monoton növekvő függvény, amely negatív és pozitív értékeket is fel vesz. Továbbá legyen $T(F)$ az az érték, amelyre

$$\int \psi(x - T(F))dF(x) = 0.$$

Ekkor T a helyparaméter becslése, B-robusztus és kvalitatív robusztus F_0-nál akkor és csak akkor, ha ψ korlátos és $T(F_0)$ egyértelmű. A katasztrófapont

$$\varepsilon^\star = \frac{\eta}{1+\eta},$$

ahol

$$\eta = \min\left\{-\frac{\psi(-\infty)}{\psi(+\infty)}, -\frac{\psi(+\infty)}{\psi(-\infty)}\right\}.$$

Ha ψ nem korlátos, akkor T se nem B-robusztus, se nem kvalitatív robusztus és $\varepsilon^\star = 0$.

1. Ha $\psi(x) = x$, akkor a megfelelő M-becslés az átlag, amelyik nem B-robusztus és nem kvalitatív robusztus, $\varepsilon^\star = 0$.

2. Ha $\psi(x) = sgn(x)$, akkor az M-becslés a medián, amely B-robusztus, kvalitatív robusztus, $\varepsilon^\star = \frac{1}{2}$.

3. A Huber-féle becslés:

$$\psi_b(x) = x \cdot \min\left\{1, \frac{b}{|x|}\right\},$$

ahol $0 < b < +\infty$, amelyhez tartozó becslés B-robusztus, kvalitatív robusztus és $\varepsilon^\star = \frac{1}{2}$. Az optimális B-robusztus eset az $F(x) = \Phi(x)$ modell eloszlásfüggvényre.

Tulajdonságok:

1. Ha $\psi(-\infty) = -\psi(+\infty)$, akkor $\varepsilon^{\star} = \frac{1}{2}$, ami a lehetséges legnagyobb érték.

2. Szimmetrikus eloszlás esetén a $\psi(-x) = -\psi(x)$ ferdeszimmetrikus (páratlan függvény) a jó választás.

3. Ha ψ korlátos és szigorúan monoton, akkor a megfelelő M-becslés mindenütt folytonos.

4. Sajnos a helyparaméter M-becslései általában nem skálainvariánsak, ezért szükséges a skálaparamétert valamilyen módszerrel megbecsülni. Ez természetesen vonatkozik a többi paraméterre is, de akkor már eloszlástípus keresésről van szó. Ha gyorsan akarjuk a skálaparamétert becsülni, akkor az általánosan alkalmazott a medián abszolút eltérés (MAD) konstansszorosa, azaz

$$s = C \cdot med\{|\xi_i - med\{\xi_j\}|\} = C \cdot MAD\{\xi_i\},$$

ahol $med\{\xi_i\}$ a minta mediánját jelöli, míg C azt biztosítja, hogy a becslés konzisztens legyen.

Például $F(x) = \Phi(x)$ esetén

$$C = (\Phi^{-1}(\frac{3}{4}))^{-1}.$$

5. Általában a helyparaméter meghatározására, a paramétert meghatározó egyenlet megoldására a következő rekurzív algoritmusok javasoltak:

(a) Newton-módszer:

$$T_n^{(m+1)} = T_n^{(m)} + \frac{s \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\xi_i - T_n^{(m)}}{s}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \psi'\left(\frac{\xi_i - T_n^{(m)}}{s}\right)}.$$

(b) H-módszer (módosított Newton-módszer):

$$T_n^{(m+1)} = T_n^{(m)} + \frac{s \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\xi_i - T_n^{(m)}}{s}\right)}{n}.$$

(c) Súlyozott legkisebb négyzetek módszere:

$$T_n{}^{(m+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = T_n{}^{(m)} + \frac{s \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\xi_i - T_n{}^{(m)}}{s}\right)}{\sum_{i=1}^{n} w_i},$$

ahol

$$w_i = \frac{\psi\left(\frac{\xi_i - T_n{}^{(m)}}{s}\right)}{\frac{\xi_i - T_n{}^{(m)}}{s}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az eljárások közül a Newton-módszer a leggyorsabb, viszont használatához a deriváltra is szükség van, s néha numerikus problémák is adódnak. Az általánosan jó a H-módszer, amely szinte mindig alkalmazható, ha létezik megoldás. A súlyozott legkisebb négyzetek módszere azért lényeges, mert jól alkalmazható többváltozós esetekben, illetve a regressziós problémáknál, s általában a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásánál.

A módszerekhez javasolt kiinduló érték:

$$T_n{}^{(0)} = med\{\xi_i\}.$$

3 A skálaparaméter becslése

Legyen $X = \mathbf{R}$, $\Theta = (0, +\infty)$, $\vartheta_0 = 1$, $F_\vartheta(x) = F\left(\frac{x}{\vartheta}\right)$, s ekkor $\psi(x,\vartheta) = \psi\left(\frac{x}{\vartheta}\right)$ alakú a javasolt ψ függvény. Ekkor

$$IF(x;\psi,G) = \frac{\psi\left(\frac{x}{T(G)}\right)T(G)}{\int \psi'\left(\frac{y}{T(G)}\right)\frac{y}{T(G)}dG(y)},$$

ami az F modell eloszlásfüggvény esetén

$$IF(x;\psi,F) = \frac{\psi(x)}{\int y\psi'(y)dF(y)}.$$

A robusztussági tulajdonságok hasonlóak, mint a helyparaméter becslése esetén, azaz ha $\psi(x)$ páros és szigorúan monoton nő az $\{x > 0\}$ értékekre, akkor

(1) ha ψ korlátos, akkor a megfelelő becslés B-robusztus, kvalitatív robusztus és

$$\varepsilon^\star = \frac{-\psi(0)}{\psi(+\infty) - \psi(0)} \leq \frac{1}{2};$$

(2) ha ψ nem korlátos, akkor se nem B-robusztus, se nem kvalitatív robusztus és $\varepsilon^\star = 0$.

1. A maximum-likelihood becslés esetén

$$\psi(x) = -x\frac{f'(x)}{f(x)} - 1.$$

Tudjuk, hogy a regularitási feltételek mellett az ehhez tartozó becslésnek a legkisebb az aszimptotikus szórásnégyzete.

De például $F(x) = \Phi(x)$ esetén $\psi(x) = x^2 - 1$, amely alapján viszont se nem B-robusztus, se nem kvalitatív robusztus és a katasztrófapont $\varepsilon^\star = 0$.

2. A medián abszolút eltérés, amelynél

$$\psi(x) = sgn(|x| - 1),$$

viszont B-robusztus, kvalitatív robusztus és $\varepsilon^\star = \frac{1}{2}$.

3. A Huber-féle becslés a skálaparaméterre a helyparaméterre vonatkozó becslés alapján készült, azaz

$$\psi(x) = {\psi_b}^2(x) - \int {\psi_b}^2(y) d\Phi(y),$$

ahol $\psi_b(x)$ a helyparaméter becsléséhez bevezetett ψ függvény. Ez B-robusztus, kvalitatív robusztus és $\varepsilon^\star > 0$.

Megjegyzés:

1. A modell eloszlásfüggvény alapján egy általánosnak módszert tanultunk, amely minden esetben viszonylag jó robusztus tulajdonságokkal rendelkezik mind a hely-paraméter mind a skálaparaméter becslésére.

2. A skálaparaméter becslésére a paraméter speciális jellege miatt csak egy általánosan jól használható numerikus algoritmust javasol a szakirodalom:

$$[{s_n}^{(m+1)}]^2 = \frac{1}{(n-1)\beta} \sum_{i=1}^{n} {\psi_b}^2 \left(\frac{\xi_i - \vartheta}{{s_n}^{(m)}} \right) [{s_n}^{(m)}]^2,$$

ahol $\beta = \int {\psi_b}^2(x) d\Phi(x)$ és ϑ a helyparaméter becslése. A skálaparaméterre kiinduló értékként javasolt az

$${s_n}^{(0)} = 1.483 \cdot MAD.$$

4 Együttes becslés

Ping-pong algoritmus:

1. A helyparaméter előrebecslése.

2. A kapott helyparaméter segítségével a skálaparaméter becslése.

3. A kapott skálaparaméter segítségével a helyparaméter becslése.

4. Megállás vagy folytatás a 2. lépéssel.

Általánosan a következő egyenletrendszert szokás felírni:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\xi_i - T}{s}\right) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \chi\left(\frac{\xi_i - T}{s}\right) = 0,$$

ahol χ a skálaparaméter meghatározására használt ψ függvény jelölésére szolgál.

Ha az M-becslések eredeti definíciójához akarjuk kapcsolni, akkor a

$$\min_{(\vartheta,\sigma)} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\frac{\xi_i - \vartheta}{\sigma}\right)$$

probléma megoldásából a

$$\psi\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\rho\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma}\rho'\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right),$$

$$\chi\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\rho\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right) =$$

$$= -\frac{x-\vartheta}{\sigma^2}\rho'\left(\frac{x-\vartheta}{\sigma}\right),$$

függvények keletkeznének, amelyből monoton növekvő, korlátos ψ függvény esetén is a χ függvény már nem biztos, hogy robusztus megoldást ad. Tehát gyakorlatilag a második egyenletet a ρ-tól függetlenül kell fölvennünk az esetek többségében. Erre az eddigiek is nagyon jó példát mutatnak.

5 Leggyakoribb érték

Ha a Cauchy-eloszlás esetén meghatározzuk a maximum-likelihood becsléshez tartozó ψ függvényt, ami

$$\psi(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

a robusztus és az újracsökkenő M-becslések családjába tartozik. Ezt az esetet, azért említjük meg, mert egy nagyon jó tulajdonságokkal rendelkező, a hely- és skálaparaméter együttes becslésére vonatkozó, eljárást fejlesztett ki belőle Csernyák (1973), Steiner (1973,1988) a Miskolci Egyetemen.

A javasolt egyenletrendszert a

$$\psi(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad \chi(x) = \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2}$$

Full Screen
Search
Close

függvények definiálják. A kapott paraméterértékeket elnevezték leggyakoribb értéknek és dihéziónak. Gyakorlatilag azt a két értéket határozza meg az eljárás, amelyekhez tartozó Cauchy-eloszlás "legközelebb" van az adott mintához.

A "legközelebb" mérése az I-divergencia segítségével történik, amelyet Kullback-Leibler (1950) vezetett be, s amely a Csiszár-féle f-eltérések egy speciális esete, Csiszár (1967).

Az I-divergencia értelmezése a következő:

$$I(f||g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) log_2 \frac{f(x)}{g(x)} dx,$$

ahol f és g sűrűségfüggvények.

Az I-divergencia nem szimmetrikus, ezért nem távolság. A g-hez tartozó eloszlás tekinthető a viszonyítási alapnak, s ahhoz viszonyítjuk a többit.

Ha az I-divergenciát minimalizáljuk, amikor a hely-paramétert változtatjuk és

$$g(x;\vartheta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\vartheta)^2)},$$

azaz a Cauchy-eloszlás sűrűségfüggvénye ismeretlen hely-paraméterrel, akkor a következőket kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g(x;\vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{f(x)}{g(x;\vartheta)} dx = 0$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial g(x;\vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{1}{g(x;\vartheta)}\right]^2 f(x) dx -$$
$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 g(x;\vartheta)}{\partial \vartheta^2} \frac{f(x)}{g(x;\vartheta)} dx > 0,$$

ekkor kapjuk a minimumot.

Ha feltételezzük, hogy az utóbbi kifejezés második fele 0, akkor az egyenlőtlenség biztosan teljesül. Tehát a kapott megoldás minimalizálja az I-divergenciát és az utóbbi feltételezés megad egy a skálaparaméter meghatározására alkalmas egyenletet, s ezek a Cauchy-eloszlás esetén pontosan a ψ, χ párral megadott esethez vezetnek.

6 Neméletbiztosítás

Egyedi kockázati modell:

$$S = X_1 + X_2 + \ldots X_n.$$

X_i a kár nagyságát jelöli.

Ha n elég nagy és teljesülnek a centrális határeloszlás-tétel feltételei, akkor alkalmazható a normális eloszlás, egyébként valószínűségi változók összegének (konvolúció) eloszlását kell meghatározni, ami általában nem könnyű.

Kollektív kockázati modell:

$$S = X_1 + X_2 + \dots X_N.$$

X_i a kár nagyságát, míg N a gyakoriságot (darabszám) jelöli. Általában feltehető, hogy X_i és N független, ekkor

$$E(S) = E(N)E(X_1),$$

ha az X_i valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$D^2(S) = E^2(X_1)D^2(N) + E(N)D^2(X_1).$$

Gyakorisági (kárszám) modellek:

Poisson-eloszlás, binomiális eloszlás, negatív binomiális eloszlás. Ez utóbbi speciális esete a geometriai (Pascal) eloszlás.

NEGATÍV BINOMIÁLIS ELOSZLÁS:

$$P(N = k) = \binom{\alpha + k - 1}{k} q^k (1 - q)^\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $0 < q < 1$, $\alpha > 0$.

Ha $\alpha = 1$ a geometriai eloszlást kapjuk.

$$P(N = k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha)} q^k (1 - q)^\alpha.$$

Kárnagyság modellek:

lognormális eloszlás, Pareto-eloszlás, Γ-eloszlás, exponenciálisok keveréke.

Irodalom szerint: tűzkár (lognormális, Pareto, exponenciálisok keveréke), gépkocsi töréskár (Γ-eloszlás), betegség időtartama (csonkított lognormális, exponenciálisok keveréke).

LOGNORMÁLIS ELOSZLÁS:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, x > 0.$$

PARETO-ELOSZLÁS:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0, x > \beta > 0.$$

EXPONENCIÁLISOK KEVERÉKE:

$$f(x) = p\alpha e^{-\alpha x} + (1-p)\beta e^{-\beta x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, 0 \le p \le 1, x > 0.$$

Full Screen

Search

Close

Kollektív kockázati modell hosszútávra:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

ahol u a kezdeti többlet (tőke), ct a biztosításidíj befizetés és $S(t)$ az aggregált kárösszeg.

7 Életbiztosítás

T – élettartam (születéskor)

$F(t) = P(T \leq t)$ – eloszlásfüggvény

$$(F(0) = 0, \quad F(\omega) = 1)$$

$\overline{F}(t) = P(T > t)$ – túlélésfüggvény

$f(t) = \dfrac{d}{dt}F(t)$ – sűrűségfüggvény, $F(t) = \int\limits_0^t f(s)ds.$

Feltételes valószínűségek, jelölések, összefüggések:

$$P(T \leq x + t | T > x) = {}_t q_x,$$

$$P(T > x + t | T > x) = {}_t p_x,$$

$${}_t p_x + {}_t q_x = 1,$$

$${}_t p_0 = \overline{F}(t),$$

$${}_t q_0 = F(t).$$

Halálozási intenzitás:

$$\mu(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(T < t + h | T > t)}{h} = -\frac{d}{dt} \ln \overline{F}(t),$$

azaz

$$\overline{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t \mu(s)ds\right),$$

$$_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+s)ds\right).$$

8 Halandósági táblák

A díjkalkuláció egyik legfontosabb eleme a halandósági tábla. Erre azért van szükség, mert azt nem tudjuk előre, hogy egy konkrét ügyfél hány évig fog még élni, de ha egy nagy számú közösséget vizsgálunk, ott már megfigyelhetők bizonyos törvényszerűségek. Megállapítható például, hogy egy x éves férfi esetében mekkora a valószínűsége annak, hogy bizonyos éven belül meghal.

A halandósági tábláknak két csoportja van; az egyik az ún. néphalandósági tábla. Ez népszámlálási adatokon alapul, és a teljes lakosságra vonatkozik. A másik csoportot a szelekciós táblák képezik. Ezt a lakosság bizonyos csoportjainak adatai alapján készítik el, például foglalkozás, lakóhely, családi állapot stb. szerint.

Jelölések:

l_0 – az alap populáció nagysága (általában 100000).

l_x – az x kort túlélők száma (x itt egész).

d_x – az elhalálozások száma x korban.

Ha a táblázat nem determinisztikusnak tekintett, akkor ezek várható értékek. Gyakori, hogy x és $(x+1)$ között az eloszlást egyenletesnek tekintik.

$$_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

$$_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}.$$

$$_1 q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = q_x.$$

Full Screen

Search

Close

Részlet az 1990-es halandósági táblából:

x	l_x	d_x	q_x	e_x
35	94077	381	0.00405	32.60
36	93696	412	0.00440	31.73
37	93284	445	0.00477	30.87
38	92839	479	0.00516	30.02
39	92360	518	0.00561	29.17
40	91842	562	0.00612	28.34

e_x – az adott korban a várható élettartam:

$$e_x = \int_0^{\omega - x} {}_t p_x dt = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x}.$$

9 Halandósági modellek

Szokásos modellek, példák:

1. Exponenciális

$$\mu(t) = \lambda, \quad \overline{F}(t) = e^{-\lambda t}.$$

2. Weibull

$$\mu(t) = \beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}, (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$\overline{F}(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\alpha}^{\beta}\right)\right).$$

3. Gompertz-Makeham

$$\mu(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t}, (\alpha > 0, \beta > 0),$$

$$\overline{F}(t) = \exp\left(-\alpha t - \beta\frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}\right).$$

Példa: Az 1982-es dániai halandósági táblát jól közelíti, ha

$$\begin{aligned}
\alpha =& 5 \cdot 10^{-4} \\
\beta =& 7.5858 \cdot 10^{-5} \\
\gamma =& \ln(1.09144).
\end{aligned}$$

10 Díjszámítási elvek

A biztosítások díja általában három részből tevődik össze: kockázati díjrész, biztonsági pótlék, vállalkozói díjrész.

Az életbiztosítások díja két részből áll: kockázati díjrész, vállalkozói díjrész.

A kockázati díjrészt nettó díjnak szokták nevezni, a kockázati díjrész és a vállalkozói díjrész összegét bruttó díjnak. A kockázati díjrész szolgál a vállalt kockázatok fedezetéül, a biztosító ebből a díjrészből felhalmozott forrásokból fizeti ki biztosítási esemény bekövetkezésekor (halál, elérés) a biztosítási szerződésben vállalt szolgáltatásokat. Mivel azonban az életbiztosítások esetében a káralakulás igen nagy biztonsággal meghatározható, ezért életbiztosítások esetében nem szoktak biztonsági pótlékot kalkulálni. A vállalkozói díjrész a biztosító költségeit kell hogy fedezze, a biztosítót mint vállalkozót illeti meg, aki a pénzét befekteti a gazdaságba.

A biztosítási díj kalkulációját – bizonyos alapadatok felhasználásával és a valószínűségszámítás törvényszerűségeire építve – a biztosításmatematikusok (aktuáriusok) végzik. A díjkalkuláció alapelve az ún. ekvivalencia elv, amely így szól: a bevételek jelenértékének várható értéke egyenlő a kiadások jelenértékének várható értékével, azaz

$$\pi(X) = E(X),$$

ahol X a követelést jelöli és valószínűségi változó.

A fenti képletben a várható érték fogalom azt jelenti, hogy nagy számú, azonos paraméterekkel rendelkező szerződésre érvényes, hogy a bevételek jelenértékének meg kell egyeznie a kiadások jelenértékével. A jelenérték kifejezés a képletben azért fontos, mert az ajánlat felvételekor meghatározott biztosítási összeg kifizetése egy távoli, nem pontosan meghatározott időben következik majd be, az ennek megfelelő díjat pedig már az ajánlatfelvételkor ismerni kell.

Egyszerűbben: az azonos típusú életbiztosítások jelenleg fizetendő biztosítási díját úgy kell meghatározni, hogy a befizetett díjak fedezetet nyújtsanak a jövőben kifizetésre kerülő biztosítási szolgáltatásokra.

Az ekvivalencia elvet kifejező egyenletben a bevételek és a kiadások jelenértékre vetítve szerepelnek, mert a bevételek (a díjak befizetése) különböző időpontokban jelentkeznek és a kiadások sem mind egyidejűleg merülnek fel. A különböző időpontban jelentkező pénzeket így csak akkor lehet összehasonlítani, ha egységesen mérjük őket. Ennek számszerűsítéséhez a jelenérték számítás módszerét kell alkalmazni.

A jelenérték kiszámításához el kell dönteni, hogy a diszkontálást milyen kamatlábon végezzük. Ez a kamatláb az ún. **technikai kamatláb.** Ez egy olyan, a biztosító által választott és rögzített kamatláb, melyet minden biztosító alkalmaz a díjkalkulációnál és a tartalékszámításnál. A technikai kamatláb megválasztásánál azt kell figyelembe venni, hogy csak olyan kamatlábbal kalkulálhat a biztosító, amelyet hosszú távú szerződéseinél is biztosnak tekinthet.

Technikai kamatláb az ügyfél részére ez egyben garantált hozamot is jelent. A biztosító garantálja, hogy a díjtartalék befektetésével legalább ekkora hozamot ér el, s juttat vissza a szerződőnek, még abban az esetben is, ha a biztosító befektetései nem érnék el ezt a hozamszintet.

Az életbiztosítók nagyságát és piaci erejét a díjbevétel mellett elsősorban a díjtartalék nagyságával szokták jellemezni. A díjtartalék az ügyfél által fizetett díjakból a későbbi kifizetésekre (elérés, halál) felhalmozott pénzösszeg. A díjtartalék nem egyenlő az ügyfél által befizetett díjak összegével.

A díjtartalék másképp alakul a tiszta kockázati és a tőkerésszel rendelkező biztosításoknál, ezért külön kell vizsgálni a két esetet.

A biztosító úgy számolja ki a kockázati életbiztosítás díját, hogy (ha az ügyfél nem végez értékkövetést) az ügyfél minden évben ugyanannyi díjat fizessen. Az első években az alacsonyabb kor miatt a kockázat jóval kisebb, mint a tartam vége felé. Ezáltal a tartam elején befizetett díjak nagyobbak lesznek, mint azt a kockázat indokolná, a tartam végén pedig kisebbek. A tartam elején jelentkező relatív díjtöbblet miatt jelentkezik a kockázati biztosítás díjtartaléka. A tényleges és szükséges díj különbsége az első években a díjtartalékba kerül, amiből azután folyamatosan pótolják a későbbi években felmerülő hiányt.

Az elérési életbiztosításoknál a tartam alatt fokozatosan jöjjön létre az a pénzösszeg, amelyet lejáratkor biztosítási összegként a biztosító köteles kifizetni az ügyfélnek. Az elérési biztosítás díjtartaléka a befizetett díjak elérési szolgáltatásra szánt díjrészei révén folyamatosan nő, hasonlóan mint egy kamatozó bankbetét, azzal a különbséggel, hogy a növekedés üteme gyorsabb a díjtartalék esetében (mert a tartam folyamán meghaltak pénze is növeli a még élők számláján lévő díjtartalékot). A tartam elején a díjtartalék értéke 0, tartam végén egyenlő a biztosítási összeggel.

A díjtartalék növekedésének három forrása van: a rendszeresen beérkező díj, a díjtartalék hozama (a technikai kamat mértékéig) és a tartam közben elhunytak díjtartalékának egy része. Azt, hogy egy adott pillanatban mekkora lesz a díjtartalék, kamatos kamatszámítással nem lehet megállapítani.

A vegyes életbiztosítás díjtartaléka felfogható úgy is, mint egy kockázati és egy elérési biztosítás díjtartalékának az összege. A vegyes életbiztosítás díjtartalékának nagyságára az elérési biztosításnál említett tényezőkön túl még az is hatással van, hogy a tartam folyamán történő haláleseti kifizetéseket is a díjtartalékból fedezik.

A díjfüggvénytől megkövetelt tulajdonságok:

1. Nemnegatív terhelés:

$$\pi(X) \geq E(X).$$

2. Maximális veszteség:

$$X \leq m \quad \Rightarrow \pi(X) \leq m.$$

3. Monotonitás:

$$X \leq Y \quad \Rightarrow \pi(X) \leq \pi(Y).$$

4. Szubadditivitás:

$$\pi(X+Y) \leq \pi(X) + \pi(Y).$$

Díjszámítási elvek és tulajdonságaik:

1. Várható érték elv:

$$\pi(X) = (1+a)E(X), \quad (a > 0).$$

Teljesül a nemnegatív terhelés, a monotonitás, a szubadditivitás és nem teljesül a maximális veszteség tulajdonsága.

2. Szórás elv:

$$\pi(X) = E(X) + aD(X), \quad (a > 0),$$

ahol $D(X)$ a szórás. Teljesül a nemnegatív terhelés, a szubadditivitás és nem teljesül a maximális veszteség, a monotonitás tulajdonsága. Jól alkalmazható a centrális határeloszlás-tétel alapján a normális eloszlás.

3. Szórásnégyzet elv:

$$\pi(X) = E(X) + aD^2(X), \quad (a > 0).$$

Teljesül a nemnegatív terhelés és nem teljesül a maximális veszteség, a monotonitás, a szubadditivitás tulajdonsága.

4. Exponenciális elv:

$$\pi(X) = \frac{1}{a}\ln E\left(e^{aX}\right), \quad (a > 0).$$

5. Esscher elv:

$$\pi(X) = \frac{E\left(Xe^{aX}\right)}{E\left(e^{aX}\right)}.$$

6. Kvantilis:

$$\pi(X) = (\min\{m|P(X > m) \leq a\}.$$

Köszönöm

a figyelmet!

References

[1] A. C. Allen: *Probability, Statistics and Queueing Theory, With Computer Applications,* Academic Press, New York, 2003. ISBN-13: 978-0120510504

[2] Deák I.: *Véletlenszámgenerátorok és alkalmazásaik,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[FR11] Fegyverneki Sándor, Raisz Péter: *Sztochasztikus modellezés,*elektronikus jegyzet, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FS11] Fegyverneki Sándor: *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika,* elektronikus jegyzet, Kempelen Farkas elektronikus könyvtár, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FE78] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[HU81] P.J.Huber: *Robust statistics*, Wiley, New York, 1981.

[3] I.M. Szobol: *A Monte-Carlo módszerek alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[AK00] Ágoston K., Kovács E.: *Halandósági modellek*, Aula, Budapest, 2000.

[AM01] Arató M.: *Nem-életbiztosítási matematika*, ELTE jegyzet, Budapest, 2001.

[BJ03] Banyár J.: *Életbiztosítás*, Aula, Budapest, 2003.

[HW88] Heilmanm, W.R.: *Fundamentals of Risk Theory,* Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 1988. (Magyarul megjelent a BOKCS kiadásában.)

[KO05] Komáromi É.: *A neméletbiztosítás matematikai módszerei,* Corvinus jegyzet, Budapest, 2005.

[KE03] Kovács E.: *Biztosítási számítások,* BKÁE Aktuárius Jegyzetek 12. kötet, Budapest, 2003.

[SV00] Szabó L., Viharos L.: *Az életbiztosítás alapjai,* Polygon, Szeged, 2000.