GP modellek II.

Fegyverneki Sándor
Miskolci Egyetem
Alkalmazott Matematikai Intézeti Tanszék
matfs@uni-miskolc.hu

2021. február 15.

Full Screen
Search
Close

1 Kamatláb (rate of interest)

P – tőke (principal)

r – kamatláb

$$P + rP = P(1 + r)$$

Kamatos kamat (compound interest)

Megjegyzés:
1. Félévenkénti. 2. Havi 3. P_1 az évvégi tőke.

Full Screen

Search

Close

Effektív kamatláb:

$$r_{eff} = \frac{P_1 - P}{P}$$

Folytonos kamatos kamat:

$$P \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = Pe^r.$$

Megjegyzés:

Duplázási szabály:

$r = 0.01$ $(n \approx 70)$, 0.02 (35), 0.07 (10).

$$n \approx \frac{ln(2)}{r}.$$

LOGRETURN

$$\varrho = \ln\left(\frac{P_1}{P}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P_1}{P}\right) = \ln(1+r) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{r^n}{n!} \approx r$$

Ha $ln(\xi) \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor ξ lognormális eloszlású.

LOGNORMÁLIS ELOSZLÁS:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, x > 0.$$

Full Screen

Search

Close

2 Jelenérték (present value)

Kölcsön felvétel és adás esetén a kamatláb r és a kamatos kamat periódikusan. Mennyi a jelenlegi értéke i periódus (időtartam) után a v kifizetésnek (összeg)?

$$PV = v(1+r)^{-i}.$$

Legyen $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ és $b = (b_0, b_1, \ldots, b_n)$ kifizetési sorozatok. Tegyük fel, hogy

$$PV(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i(1+r)^{-i} \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(1+r)^{-i} = PV(b).$$

Kérdés: Milyenek legyenek a kifizetési sorozatok?

Példa: Adottak a következő kifizetési sorozatok.

A. 12, 14, 16, 18, 20; (80)

B. 16, 16, 15, 15, 15; (77)

C. 20, 16, 14, 12, 10; (72)

JELENÉRTÉK TÁBLÁZAT

r	A	B	C
0.1	59.21	58.60	56.33
0.2	45.70	46.39	45.69
0.3	36.49	37.89	38.12

Jelzálog kölcsön (mortgage loan):

L – az összeg (amount)

n – a hónapok száma

A – havi törlesztés

r – kamatláb

A jelenérték:

$$\frac{A}{1+r}+\frac{A}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}=\frac{A}{r}\left[1-(1+r)^{-n}\right]=L.$$

Megjegyzés:

1. Számítsuk ki a j-edik hónap után maradó jelzálog összeget!

2. Mennyivel csökken a j-edik hónapban a jelzálog?

Legyen $b = (b_1, \ldots, b_n)$ és $c = (c_1, \ldots, c_n)$ pénz kifizetési sorozatok és r a kamatláb. Milyen feltételek mellett teljesül minden pozitív r kamatláb esetén, hogy

$$PV(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i(1+r)^{-i} \geq \sum_{i=1}^{n} c_i(1+r)^{-i} = PV(c)?$$

Elégséges feltételek:

1. $b_i \geq c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Legyen

$$B_i = \sum_{j=1}^{i} b_j \quad \text{és} \quad C_i = \sum_{j=1}^{i} c_j, \quad \text{ha} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ekkor elegendő $B_i \geq C_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Ha $B_n \geq C_n$, akkor elegendő, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} B_i \geq \sum_{i=1}^{k} C_i, \quad \text{ha} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Megjegyzés:

Bizonyítás a Descartes-féle előjelszabály alapján.

Legyen $a_i = b_{i+1} - c_{i+1}$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

1. $a_i \geq 0$, $(i = 0, 1, \dots, n-1)$.
2. $\sum_{i=0}^{k-1} a_i = B_k - C_k \geq 0$, $(k = 1, \dots, n)$.

Legyen

$$a_n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

és

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Ekkor $P(1) = 0$, és a

$$P(x) = [a_0 + (a_0 + a_1)x + \cdots + (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})x^{n-1}](1 - x).$$

Full Screen

Search

Close

Továbbá, a $P(x)$ polinomnak csak egy pozitív zérushelye van, és $P(x)$ előjele megegyezik $(1-x)$ előjelével. Tehát

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1,$$

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1} > \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^n = x^n(B_n-C_n) \geq 0.$$

Legyen $x = \dfrac{1}{1+r}$. Tehát ha $0 < x < 1$, akkor $r > 0$.

3. Felhasználva az előzetes jelöléseket legyen

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = A_{k-1} = B_k - C_k, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

A feltételek szerint $A_{n-1} \geq 0$, és $\sum_{i=0}^{k} A_k \geq 0$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Alkalmazzuk az előző bizonyítást az A_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ esetre. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1} \geq 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

$$(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1})(1 - x) \geq 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \geq A_{n-1} x^n \geq 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1.$$

3 DESCARTES

Tétel:
Ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ véges sorozatnak C jelváltása van és $p_0 > 0$, $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$, akkor a

$$p_0 a_0, p_1 a_1, \ldots, p_n a_n$$

jelváltásainak a száma C.

Tétel:
Ha az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ véges sorozatnak C jelváltása van, akkor a belőle képzett

$$a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n$$

sorozatnak legalább $C + 1$ előjelváltása van $(\exists a_k \neq 0)$.

Tétel:
A $P(x)$ és $P(\alpha x)$ polinomoknak egyenlő számú előjelváltása van, ha α pozitív.

Tétel:
Legyen $\alpha > 0$, Áttérve a $P(x)$ polinomról az

$$(\alpha - x)P(x)$$

polinomra az együttható-jelváltások száma nő, mégpedig páratlan számmal.

Bizonyítás: Helyettesítsük x-et αx-szel és alkalmazzuk a 2. állítást.

Tétel:
(Descartes-féle előjelszabály.) Legyen Z a $P(x)$ pozitív zérushelyeinek a száma, C pedig a jelváltások száma. Ekkor

$$C - Z \geq 0.$$

Megjegyzés:
1. $C - Z$ páros szám.

2. Ha $C = 1$, akkor $Z = 1$.

Full Screen
Search
Close

Tétel:
Legyen C az

$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

véges sorozat jelváltásainak a száma. Tegyük fel, hogy $P(1) = 0$. Ekkor a $P(x)$ polinomnak legfeljebb $C + 1$ pozitív zérushelye van.

Bizonyítás:

$$P(x) = [a_0+(a_0+a_1)x+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})x^{n-1}](1-x)$$

Tétel:
Legyen C az

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

véges sorozat jelváltásainak a száma és legyenek

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n.$$

Továbbá, legyen

$$D(x) = a_1 e^{-\lambda_1 x} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n x},$$

ahol feltesszük, hogy $D(0) = 0$. Ekkor a $D(x)$ függvénynek legfeljebb $C+1$ pozitív zérushelye van.

Bizonyítás:

$$\varphi(\lambda) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \quad \text{ha} \quad \lambda_k \le \lambda_{k+1}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

$D(0) = 0$ miatt

$$x^{-1} D(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_n} \varphi(\lambda) e^{-\lambda x} d\lambda.$$

4 Megtérülési ráta (rate of return)

Legyen a kezdeti befektetés a $(a > 0)$ és b a visszakapott összeg egy periódus után. A megtérülési ráta (hozam) r, ha

$$\frac{b}{1+r} = a \quad \text{vagy} \quad r = \frac{b}{a} - 1.$$

Egy periódusra jutó hozam (belső megtérülési ráta): Legyen $b_i \geq 0$ a kapott összeg az i-edik periódus végén $(i = 1, 2, \ldots, n)$. és $b_n > 0$.

Legyen

$$P(r) = -a + \sum_{i=1}^{n} b_i (1+r)^{-i}.$$

Az egy periódusra jutó hozam $r^\star$, ha $P(r^\star) = 0$ és $r^\star > -1$.

Megjegyzés:

1. $r^\star$ egyértelműen létezik, mert $P(r)$ monoton csökkenő függvény, ha $r > -1$. Továbbá,

$$\lim_{r \to -1} P(r) = \infty, \qquad \lim_{r \to \infty} P(r) = -a < 0.$$

2. $r^\star$ előjele megegyezik $P(0)$ előjelével.

Full Screen
Search
Close

5 Folytonosan változó kamatláb

$r(s)$ – pillanatnyi kamatláb az s időpontban.

$D(t)$ – az összeg a t időpontban, ha a kezdeti betét (deposit) 1 egység a 0 időpontban.

Legyen $0 \le s \le t$, és h kicsi, ekkor feltehetjük, hogy

$$D(s+h) \approx D(s)(1+r(s)h)$$

$$\frac{D(s+h)-D(s)}{h} \approx D(s)r(s)$$

Ha létezik a határérték, amikor $h \to 0$, akkor

$$D'(s) = D(s)r(s).$$

$$\frac{D'(s)}{D(s)} = r(s).$$

Mivel $D(0) = 1$, így

$$D(t) = \exp\left[\int_0^t r(s)ds\right].$$

Legyen $P(t)$ a jelenérték (0 időpontbeli érték), ha 1 egységnyi összeget kapunk a t időpontban. Ekkor

$$P(t) = \frac{1}{D(t)}.$$

Megjegyzés:
Ha $r(s) = r$ $(0 \leq s \leq t)$, akkor

$$P(t) = e^{-rt}.$$

Full Screen
Search
Close

Jelölje $\overline{r}(t)$ az átlagos kamatlábat a t időpontig, azaz

$$\overline{r}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t r(s)ds.$$

Az $\overline{r}(t)$ $(t \geq 0)$ függvényt hozamgörbének (jövedelemgörbe) nevezzük.

Full Screen

Search

Close

Köszönöm

a figyelmet!

Full Screen

Search

Close

References

[1] Deák I.: *Véletlenszámgenerátorok és alkalmazásaik,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986.

[FR11] Fegyverneki Sándor, Raisz Péter: *Sztochasztikus modellezés,*elektronikus jegyzet, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FS11] Fegyverneki Sándor: *Valószínűség-számítás és matematikai statisztika,* elektronikus jegyzet, Kempelen Farkas elktronikus könyvtár, 2011, TÁMOP 4.1.2-08/1/A-2009-0001 project, https://www.uni-miskolc.hu/~ matfs/

[FE78] W. Feller: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[2] I.M. Szobol: *A Monte-Carlo módszerek alapjai,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

Full Screen

Search

Close