分式目标函数非线性规划问题的一种解法

谌一明

（武汉地质干部管理学院）

摘 要 本文讨论了分式目标函数非线性规划问题的一种解法，它把原问题化为一系列无分式目标函数的数学规划问题，并且产生一个点列$\{x_k\}$，$\{x_k\}$收敛于最优解x^*

关键词 非线性规划 分式目标函数 算法收敛

中图分类号 O221.2 O174

非线性规划问题，无论是约束最优化还是无约束最优化问题，其解法都是非常多的。不管哪一种解法，都有其优点，也有其不足之处。针对某些特殊形式的问题而提出的特殊解法，往往比一般较通用的方法更具优越性，有的经过发展成熟后，还可推广到一般的情形。事实上，许多作者都曾就一些特殊的问题提出过许多颇为有效的解法。本文仅就目标函数为分式的无约束最优化问题，做一论述。

无约束数学规划问题：

$$\min_{x\in R^n}\frac{f(x)}{g(x)}$$

这里x是n维向量，R^n是n维向量空间，$f(x)$和$g(x)$是R^n上连续的实函数，设它至少有一个最优解x^*。显然可用一般求无约束最优化的方法来求解，如梯度法、变尺度法等。下面给出一种新的算法，其基本思路是把分式目标函数化为非分式目标函数，逐步缩小寻找最优点x^*的范围，其过程中产生一个点列$\{x_k\}$，$\{x_k\}$收敛到最优解x^*。

首先选定初始点x_0，希望它越靠近最优解越好。设$f(x_0)=S_0$，$g(x_0)=t_0$，则只须解最优化问题：

$$\min_{x\in T_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$T_0=\left\{x\mid x\in R^n\ \frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\frac{S_0}{t_0}\right\}$$

T_0可写为

$T_0=\{x\mid x\in R^n,\quad S_0g(x)-t_0f(x)\geqslant 0,\qquad t_0g(x)>0\}$．选$t_0$，使$t_0g(x)>0$

解最优化问题：

$$\max_{x\in T_0}B_1(x)=S_0g(x)-t_0f(x)$$

收稿日期：1995—06—01

设其最优解为 x_1，$B_1(x_1)=S_0g(x_1)-t_0f(x_1)$ 则显然有 $B_1(x_1)=0$ 或 $B_1(x_1)>0$

若 $B_1(x_1)=0$，则对所有的 $x\in T_0$ 有 $B_1(x)=S_0g(x)-t_0f(x)\leqslant B_1(x_1)=0$

即　$\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant\dfrac{S_0}{t_0}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$　因此 x_0 是原问题(1)的最优解。

若 $B_1(x_1)>0$，则定义：

$$T_1=\{x\mid x\in R^n,S_1g(x)-t_1f(x)\geqslant 0,S_1=f(x_1),t_1=g(x_1),t_1g(x)>0\}$$

然后解最优化问题：

$$\max_{x\in T_1}B_2(x)=S_1g(x)-t_1f(x)$$

……

对任何正整数 k，定义：

$$T_k=\{x\mid x\in R^n,S_kg(x)-t_kf(x)\geqslant 0,S_k=f(x_k),t_k=g(x_k),t_kg(x)>0\}$$

解最优化问题：

$$\max_{x\in T_k}B_{k+1}(x)=S_kg(x)-t_kf(x)$$

设其最优解为 x_{k+1}，$B_{k+1}(x_{k+1})=S_kg(x_{k+1})-t_kf(x_{k+1})$

则有 $B_{k+1}(x_{k+1})=0$ 或 $B_{k+1}(x_{k+1})>0$

若 $B_{k+1}(x_{k+1})=0$，则算法结束，X_k 为最优解。

如果对任何 k，$B_{k+1}(x_{k+1})>0$，则找到一个无穷点列 $\{x_k\}$。下面给出本文的主要结果，即证明点列 $\{x_k\}$ 收敛于最优解。

定理　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 R^n 上连续的实函数，并且上述定义的 T_0 是有界闭集，则数列 $\left\{\dfrac{S_k}{t_k}\right\}$ 收敛于 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}$ 的最小值 $\left\{\dfrac{f(x^*)}{g(x^*)}\right\}$，并且点列 $\{x_k\}$ 算法收敛于最优解。

证明　由 $B_{k+1}(x_{k+1})=S_kg(x_{k+1})-t_kf(x_{k+1})>0$ 知：

$$\frac{S_k}{t_k}>\frac{f(x_{k+1})}{g(x_{k+1})}=\frac{S_{k+1}}{t_{k+1}}\geqslant\frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

即数列 $\left\{\dfrac{S_k}{t_k}\right\}$ 严格单调减少并且有下界，∴它的极限存在。设

$$\lim_{k\to\infty}\frac{S_k}{t_k}=\frac{\bar{S}}{\bar{t}}>\frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

由于 T_0 是有界闭集，并且 $f(x)$、$g(x)$ 都是连续函数，∴可设 $x^*\in T_0$，并且有 $x^*\in T_k(k=1,2,3,\cdots\cdots)$。由

$$\frac{\bar{S}}{\bar{t}}>\frac{f(x^*)}{g(x^*)}，得\ \bar{S}g(x^*)-\bar{t}f(x^*)>0$$

$$\lim_{k\to\infty}[S_kg(x_{k+1})-t_kf(x_{k+1})]=\lim_{k\to\infty}[S_kt_{k+1}-t_kS_{k+1}]=\bar{S}\bar{t}-\bar{t}\bar{S}=0$$

$$\lim_{k\to\infty}S_kg(x^*)-t_kf(x^*)=\bar{S}g(x^*)-\bar{t}f(x^*)>0$$

而这和 $\{x_k\}$ 最优的性质相矛盾。

即和　$S_kg(x_{k+1})-t_kf(x_{k+1})=\max\limits_{x\in T_k}\{S_kg(x)-t_kf(x)\}$ 相矛盾

∴　$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_k)}{g(x_k)}=\dfrac{f(x^*)}{g(x^*)}$

设 $\{x_{ki}\}$ 为 $\{x_k\}$ 的任一收敛子列，即 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{ki}=\bar{x}^*$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{f(x_{k_i})}{g(x_{k_i})}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_k)}{g(x_k)}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

又由 f 和 g 的连续性知

$$\lim_{i\to\infty}\frac{f(x_{k_i})}{g(x_{k_i})}=\frac{f(\bar{x}^*)}{g(\bar{x}^*)}$$

$$\therefore\quad \frac{f(\bar{x}^*)}{g(\bar{x}^*)}=\frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

即 $\bar{x}^*$ 亦为最优解，所以 $\{x_k\}$ 收敛于最优解。

参考文献

1 Bazaraa, M. S., and C. M. shetty. Nonlinear Programming. Theory and Algorithms, Wiley, New York, 1979

2 Gill, P. E. W. Murray, and M. H. Wright. Practical Optimization. Academic Press, 1981

3 Luenberger, D. G. Linear and Nonlinear Programming. Addison—Wesley, 1984

4 俞玉森. 数学规划的原理和方法. 华中工学院出版社, 1985

5 陈宝林. 最优化理论与算法. 清华大学出版社, 1989

AN ALGORITHM TO A NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEM OF FRACTIONAL OBJECTIVE FUNCTION

Chen Yiming

(Wuhan Managing Institute of Geological Cadre)

ABSTRACT One Kind of algorithm to a nonlinear programming problem of fractional objective function is studied in this paper. It reduces the original problem to a sequence without fractional objective function, and produces a sequence $\{x_k\}$, The sequence $\{x_k\}$ is therefore converged to the optimal solution x^*.

KEY WORDS nonlinear program fractional objective function algorithmic convergence