ECOLE POLYTECHNIQUE

Pyramide des Ages

Zhixing CAO, Yuxiang LI

14 janvier 2015

1 GÉNÉRALITÉ

Dans ce sujet, nous avons étudié l'évolution de la population en faisant intervenir le taux de fécondité (qui influence directement le taux de natalité) et le taux de mortalité. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode de différences finies, nous analyserons théoriquement la stabilité de notre schéma dans ce rapport. Pour visualiser son comportement, consultez le programme que nous avons écrit en Python.

2 PRISE EN MAIN DU MODÈLE

Rappelons d'abord les notations que nous utilisons : a l'âge ; t le temps ; $\rho(a,t)$ la densité de la population ; $P(t)$ la population ; $\mu(a,P)$ le taux de mortalité ; $\beta(a)$ le taux de fécondité et $N(t)$ le nombre de nouveau-nés.

L'évolution de la population peut dorénavant s'interpréter avec les équations suivantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(a,t) + \frac{\partial \rho}{\partial a}(a,t) + \mu(a, P(t))\rho(a,t) = 0 \tag{2.1}$$

$$\rho(0,t) = N(t) \tag{2.2}$$

$$P(t) = \int_0^{+\infty} \rho(a,t)\,da \tag{2.3}$$

$$N(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)\rho(a,t)\,da \tag{2.4}$$

QUESTION 1.

Dans le cas où μ et β sont constantes, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt}(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{dt}(a,t)da \\ &= \int_0^{+\infty} -\frac{\partial\rho}{\partial a}(a,t) - \mu(a,P(t))\rho(a,t)da \\ &= -\mu P(t) - \rho(+\infty,t) + \rho(0,t) \\ &= -\mu P(t) + \beta P(t)\end{aligned}$$

Nous avons obtenu une équation différentielle linéaire constante d'ordre 1 pour $P(t)$:

$$\boxed{\frac{dP}{dt}(t) = (\beta-\mu)P(t)} \tag{2.5}$$

La résolution de cette équation nous donne :

$$\boxed{P(t) = P(0)e^{(\beta-\mu)t}} \tag{2.6}$$

Dans cette situation-là, si $\beta > \mu$, on a plus de naissance que la mort, la population explose ; si $\beta < \mu$, la population disparaîtra ; seule le cas où $\beta = \mu$ permet d'avoir une population stable.

QUESTION 2.

Dans cette question, le taux de mortalité dépend de P, $\mu(P) = kP(t)$. On pourra remplacé μ par cette nouvelle formule dans (2.5), car μ est toujours indépendant de a et n'intervient pas dans l'intégrale. D'où on a une nouvelle équation différentielle :

$$\frac{dP}{dt}(t) = [\beta - \mu(t)]P(t)$$

Ou bien :

$$\boxed{\frac{dP}{dt}(t) = \beta P(t) - kP(t)^2} \tag{2.7}$$

Résolvons maintenant cette équation :

$$\begin{aligned}\frac{d(P-\frac{\beta}{2k})}{(P-\frac{\beta}{2k})^2 - \frac{\beta^2}{4k^2}}(t) &= -kdt \\ \frac{k}{\beta}\left(\frac{1}{P-\frac{\beta}{k}} - \frac{1}{P}\right)d\left(P-\frac{\beta}{2k}\right) &= -kdt \\ ln\left(\frac{P}{P-\frac{\beta}{k}}\right) &= \beta t + ln\left(\frac{P(0)}{P(0)-\frac{\beta}{k}}\right) \\ \frac{P}{P-\frac{\beta}{k}} &= \frac{P(0)}{P(0)-\frac{\beta}{k}}e^{\beta t}\end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons en posant $C = \frac{P(0)}{P(0)-\frac{\beta}{k}}$:

$$\boxed{P(t) = \frac{\frac{\beta}{k}Ce^{\beta t}}{1-Ce^{\beta t}}} \tag{2.8}$$

Ce résultat montre bien que plus la population dépend positivement du taux de fécondité β et négativement du taux de mortalité μ.

QUESTION 3.A.

Supposons que μ dépend de a, on a, puisqu'on confond a et t ici une équation différentielle pour $\phi(t) = \rho(t,t)$:

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt}(t) = \frac{d\rho}{dt}(t) = -\mu(t)\rho(t)} \tag{2.9}$$

QUESTION 3.B.

En résolvant l'équation précédente, on trouve :

$$ln(\rho(t)) - ln(\rho(0)) = -\int_0^t \mu(a)da$$
$$\rho(t) = \rho(0)e^{-\int_0^T \mu(a)da}$$
$$\rho(A) = \rho(0)e^{-\int_0^A \mu(a)da}$$

Utilisons l'hypothèse que $\int_0^A \mu(a)da = +\infty$, nous pouvons dire que $\rho(A) = 0$, ce qui implique que quite à translater les coordonnées en temps, la génération des nouveau-nés à $t = 0$ disparaîtra toujours à l'âge de A ans. Personne ne peut vivre à l'âge A puisse que tout le monde doit être né au moment où il avait 0 ans.

3 DISCRÉTISATION NUMÉRIQUE

Rappelons le schéma de discrétisation :

$$P^n = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i^n \tag{3.1}$$

$$N^n = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} \beta(i\Delta a)\rho_i^n \tag{3.2}$$

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta t} + \mu(i\Delta a, P^n)\rho_{i-1}^n = 0 \quad si\ i = 1,...,N \tag{3.3}$$

$$\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\Delta t} + \frac{\rho_0^n - N^n}{\Delta a} = 0 \tag{3.4}$$

QUESTION 4.A.

Etudions le schéma (3.3) dans le cas de conditions aux limites périodiques en a. Ecrivons le schéma d'une autre manière :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_{i-1}^n\left(\frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(i\Delta a, P^n)\Delta t\right) + \rho_i^n\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) \tag{3.5}$$

Si on suppose que $\mu(a)$ positif et d'intégrale non nulle sur l'intervalle de périodicité, on sait qu'il exite pour Δa petit, un i^* tel que $\mu(i^*\Delta a) > 0$, d'après la formule ci-dessus, $\rho_{i^*}^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, car la somme des coefficients de cette combinaision est strictement inférieure à 1.

QUESTION 4.B.

La condition de stabilité l^∞ vient d'une combinaison convexe. Dans la formule (3.5), nous voyons que pour que la combinaison soit convexe, il faut que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(i\Delta a, P^n)\Delta t\right) + \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}\right) = 1 \\
\frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(i\Delta a, P^n)\Delta t \geq 0 \\
1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} \geq 0
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta t \leq \Delta a \leq \tfrac{1}{Max(\mu)}} \tag{3.6}$$

Cette même condition peut aussi garantir que $\rho_i^{n+1} \in [0, \max_i \rho_i^n]$.

QUESTION 5.

La matrice de transition s'écrit :

$$T_{N+1,N+1} = \begin{pmatrix}
1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} + \beta(0) & \beta(\Delta a) & \beta(2\Delta a) & \cdots & \beta((N-1)\Delta a) & 0 \\
\frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(0, P^n) & 1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} + \beta(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(\Delta a, P^n) & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 1 - \frac{\Delta t}{\Delta a} & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\Delta t}{\Delta a} - \mu(N\Delta a, P^n) & 1 - \frac{\Delta t}{\Delta a}
\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

On remarque que cette matrice est légèrement différente des matrices habituelles, car elle change de valeur d'un étape à l'autre, ce qui nécessite un calcul supplémentaire pour effectuer une simulation.

En faisant une simulation numérique, nous voyons que $\Delta t \leq \Delta a$ correspond à un schéma stable mais ne respecte pas le principe du maximum discret dû au taux de fécondité (on change les conditions limites) et quant au cas où $\Delta t > \Delta a$, nous avons un schéma instable, ce qui est propre au schéma. On constate en même temps que si on prend $\Delta t = \frac{\Delta a}{10}$, le temps de calcul est plus long, mais la convergence se fait plus vite.

Dans le cas où $\Delta t = \Delta a$, le schéma s'écrit :

$$\rho_i^{n+1} - \rho_{i-1}^n + \mu(i\Delta t, P^n)\rho_{i-1}^n = 0 \tag{3.8}$$

Et la matrice de transition aura son diagonale presque nulle, sauf le premier terme qui dépend de β.

QUESTION 6.

Si nous prenons un taux de mortalité de la forme :

$$\mu(a) = \frac{1}{A-a} \tag{3.9}$$

Le schéma devient instable quand on raffine en Δa, parce que dans le schéma précédent, on demande $\mu(N\Delta a)$ qui pourra ne pas être définie. Il faut donc modifier le schéma et faire $\mu((i-1)\Delta a, P^n)\rho_{i-1}^n$.

Mais avec le taux de mortalité et de fécondité ainsi définis, la population explose tout le temps, on pourrait modifier la formule de μ en tenant compte de la population :

$$\mu^*(a) = \frac{P}{A-a} \tag{3.10}$$