# TD6. Espérance

**Exercice 1.** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

**Exercice 2.** Soit $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la serie $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge.

a) On note $\mathbf{1}_X$ la fonction indicatrice d'un ensemble $X$. Soit $Z = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}$. Montrer que $Z$ est une variable aléatoire à valeurs discrètes.

b) Soit $F = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ appartient à un nombre fini de } A_n\}$. Montrer que $F$ est un événement et que $\mathbb{P}(F) = 1$.

c) Montrer que $Z$ est d'espérance finie.

**Exercice 3.** [Formule du crible] Soit $A_1, ..., A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k})$.

b) En déduire la formule du crible :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right).$$

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir tous les numéros entre 1 et $n$ au moins une fois (et à $\infty$ si on n'obtient jamais les $n$ numéros). Pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $m \in \mathbf{N}$, on note $B_{j,m}$ l'événement : « au bout de $m$ tirages, le numéro $j$ n'est pas encore apparu ».

a) Pour $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$, calculer $\mathbb{P}\left(B_{j_1,m} \cap \ldots \cap B_{j_k,m}\right)$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(X > m) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^m$.

c) Calculer $\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(X > m)$. Interpéter.

d) Montrer que $\mathbb{E}(X) = n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$.

e) Montrer que $\mathbb{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$.

**Exercice 5.** [Inégalité de Le Cam] L'object de l'exercice est d'étudier l'approximation de la loi de Poisson par la loi binomiale. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs dans $\mathbf{N}$.

a) Soit $X$ et $Y$ deux telles variable aléatoires. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On définit la distance entre $X$ et $Y$ par $d(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} |p_k - q_k|$.
   i) Montrer que pour $A \subset \mathbf{N}$, on a $|\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq d(X,Y)$.
   ii) Démontrer la formula $d(X,Y) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k)$.
   iii) En déduire $d(X,Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.

b) Vérifier que pour $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 - (1-x)e^x$ appartient à $[0,1]$.

c) Soit $U_1, \ldots, U_n, Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que pour $1 \leq i \leq n$, $U_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $f(\frac{\lambda}{n})$ et $Y_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Enfin, pour $1 \leq i \leq n$, on considère la variable de Bernoulli $X_i$ telle que $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.
   i) Déterminer pour $1 \leq i \leq n$, la loi de $X_i$. En déduire la loi de $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Quelle est la loi de $Y$.
   ii) Montrer que pour $1 \leq i \leq n$, $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}$.
   iii) En déduire *l'inégalité de Le Cam* :

$$d(X,Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}.$$

**Exercice 6.** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ vérifiant pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geq n) > 0$. On appelle *taux de panne* associé à $X$ la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n).$$

a) Exprimer $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ en fonction des $x_k$.

b) i) Montrer qu'on a $0 \leq x_n < 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et que la série $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge.
   ii) Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $[0,1[$ telle que la série $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge. Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite $x_n$.

c) Montrer que la variable $X$ suit une loi géométrique si et seulement on taux de panne est constant.

**Exercice 7.** On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. À chaque épreuve, la probabilité de succès est $p \in ]0,1[$. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\Pi_n$ la probabilité qu'au cours des $n$ première épreuves, on ait obtenu $r$ succès consécutifs.

a) i) Calculer $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_r$.
   ii) Montrer que pour $n \geq r$, on a $\Pi_{n+1} = \Pi_n + (1 - \Pi_{n-r})p^r(1-p)$.
   iii) Montrer que la suite $(\Pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente. Calculer sa limite.

b) On définit la variable aléatoire $T$ à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ par le temps d'attente de $r$ succès consécutifs.
   i) Montrer que $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$.
   ii) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{1-p^r}{(1-p)p^r}$.