Midterm exam Algebra

Problem 1: The following two questions are independant:

1. Let G be a subgroup of $GL_n(\mathbb{F}_p)$ of cardinality $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Prove that the elements of G are unipotent (i.e. any $g \in G$ satisfies $(g - Id)^n = 0$) and simultaneously trigonalizable.

2. Let $p > 2$ be a prime number and S_p the symmetric group on $\{1, \cdots, p\}$.

i) How many p-cycles are there in S_p?

ii) How many p-Sylow's are there in S_p?

Deduce from this Wilson's theorem: $(p-1)! = -1 \pmod p$.

Recall that the normaliser of a subgroup G of a group H is $N(G) = \{x \in H; xGx^{-1} = G\}$.

iii) Prove that the cardinality of the normalizer of a p-Sylow of S_p is $p(p-1)$.

iv) Let G a subgroup of S_p of order $p(p-1)$. Prove that G is the normaliser of a p-Sylow of S_p. Deduce that all subgroups of order $p(p-1)$ of S_p are conjugated.

Problème 1:

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$ de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Démontrer que les éléments de G sont unipotents (i.e. tout $g \in G$ satisfait à $(g - Id)^n = 0$) et simultanéments trigonalisables.

2. Let $p > 2$ un nombre premier et S_p le groupe symétrique sur $\{1, \cdots, p\}$.

i) Combien de p-cycles y a-t-il dans S_p? Justifier la réponse.

ii) Combien de p-Sylow y a-t-il dans S_p? Justifier la réponse. En déduire le théorème de Wilson: $(p-1)! = -1 \pmod p$.

On rappelle que le normalisateur d'un sous-groupe G d'un groupe H est:

$N(G) = \{x \in H; xGx^{-1} = G\}$.

iii) Démontrer que le cardinal du normalisateur d'un p-Sylow de S_p est $p(p-1)$.

iv) Soit G un sous-groupe de S_p d' ordre $p(p-1)$. Démontrer que G est le normalisateur d'un p-Sylow de S_p.

En déduire que tous les sous-groupes d'ordre $p(p-1)$ de S_p sont conjugués.

Problem 2:

The following two questions are independant:

1. Let $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Check that A is nilpotent. What is the reduced Jordan form of A.

2. Let k be a field and E a finite dimensional k-vector space.

i) Let $P, Q \in k[X]$ be monic polynomials such that P divides Q. Put $p = deg(P), q = deg(Q)$. Let C_P and C_Q the associated compagnon matrices, and f_P and f_Q the corresponding endomorphisms of k^p and k^q respectively. Let $g : k^q \to k^p$ a linear map such that $f_P g = g f_Q$.

Prove that g is completely determined by the vector $g(e_1) \in k^p$, where $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in k^q$.

What is the dimension of the vector space of linear maps $g : k^q \to k^p$ such that $f_P g = g f_Q$.

For $u \in L(E)$, let $Com(u) = \{v \in L(E); vu = uv\}$ and $Bicom(u) = \{w \in L(E); \forall v \in Com(u), wv = vw\}$.

ii) Suppose that $E = E_1 \oplus E_2$ with E_1 and E_2 subspaces which are stable by u: $u(E_i) \subset E_i, i = 1, 2$. Prove that $\forall w \in Bicom(u), w(E_i) \subset E_i, i = 1, 2$.

iii) Prove that $Bicom(u) = k[u]$.

Problème 2: Les deux questions suivantes sont indépendantes:

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est nilpotente. Quelle est la forme réduite de Jordan de A?

2. Soit k un corps et E un k espace vectoriel de dimension finie.

i) Soient $P, Q \in k[X]$ des polynômes unitaires tels que P divise Q. Soient $p = deg(P), q = deg(Q)$. Soient C_P et C_Q les matrices compagnons associées, et f_P et f_Q les endomorphismes correspondants de k^p et k^q respectivement. Soit $g : k^q \to k^p$ une application linéaire telle que:

$f_P g = g f_Q$.

Démontrer que g est complètement déterminée par le vecteur $g(e_1) \in k^p$, où $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in k^q$.

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des applications linéaires $g : k^q \to k^p$ telles que $f_P g = g f_Q$.

Pour $u \in L(E)$, soit $Com(u) = \{v \in L(E); vu = uv\}$ et $Bicom(u) = \{w \in L(E); \forall v \in Com(u), wv = vw\}$.

ii) On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ avec E_1 et E_2 des sous-espaces stables par u:

$u(E_i) \subset E_i, i = 1, 2$. Démontrer que $\forall w \in Bicom(u), w(E_i) \subset E_i, i = 1, 2$.

iii) Démontrer que $Bicom(u) = k[u]$.

Problem 3:

1. Let $Z = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$. Prove that it can be written as $aZ_1 + bZ_2$, where Z_1 and Z_2 are n-tuples of complex numbers of modulus 1 and $a, b \in \mathbb{R}$.

2. i) Prove that $M_n(\mathbb{C})$ is the direct sum of the real sub vector spaces of hermitian matrices and of anti-hermitian matrices.

ii) Prove that any matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ can be written as a linear combination of four unitary matrices.

3. Find all linear forms $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ such that:

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall U \in U_n(\mathbb{C}), f(UAU^*) = f(A)$.

Problème 3:

1. Soit $Z = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il peut être écrit comme $aZ_1 + bZ_2$, où Z_1 et Z_2 sont des n-tuples de nombres complexes de module 1 et $a, b \in \mathbb{R}$.

2. i) Démontrer que $M_n(\mathbb{C})$ est somme directe des sous-espaces vectoriels réels des matrices hermitiennes et des matrices anti-hermitiennes.

ii) Démontrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de quatre matrices unitaires.

3. Trouver toutes les formes linéaires $f : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ telles que:

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \forall U \in U_n(\mathbb{C}), f(UAU^*) = f(A)$.

Problem 4:

1. Let $A \in M_n(\mathbb{C})$. Prove that there is a unitary matrix U such that UAU^* is upper triangular.

2. Let $A \in M_n(\mathbb{C})$, and $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ its eigenvalues (counted with their algebraic multiplicities). Prove that A is normal if and only if $Tr(AA^*) = \sum |\lambda_i|^2$.

Problème 4:

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe une matrice unitaire U such that UAU^* est triangulaire supérieure.

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicités algébriques). Démontrer que A est normale si et seulement si $Tr(AA^*) = \sum |\lambda_i|^2$.