TD9 : Formes sesquilinéaires, groupe unitaire, quaternions

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Montrer que toute forme sesquilinéaire réelle est bilinéaire.

Exercice 2 : $\star$
Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ une involution distincte de id_K. Montrer que $k = K^\sigma := \{x \in K : \sigma(x) = x\}$ est un sous-corps de K, qu'il existe $a \in K \setminus k$ tel que $a^2 \in k$, $\sigma(a) = -a$ et $K = k(a) := \{\lambda a + \mu : (\lambda, \mu) \in k^2\}$.
Que dire si K est de caractéristique 2 ?

Exercice 3 : $\star\star$
Soient K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $K' = K(i) := \{x + iy : (x, y) \in K^2\}$. On munit K' de l'involution induite par la conjugaison complexe. Soient E' un K'-espace vectoriel et E le K-espace vectoriel sous-jacent. Une forme K-bilinéaire f sur $E \times E$ est dite *invariante par i* si l'on a $f(ix, iy) = f(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

a) Montrer que l'application $\phi \mapsto \big((x, y) \mapsto \phi(x, y) + i\phi(x, iy)\big)$ est un isomorphisme de l'espace des formes bilinéaires sur $E \times E$ invariantes par i vers celui des formes sesquilinéaires sur $E' \times E'$.
b) Montrer qu'elle induit un isomorphisme de l'espace des formes symétriques sur $E \times E$ invariantes par i vers l'espace des formes hermitiennes sur $E' \times E'$.
c) Montrer que si ϕ est symétrique invariante par i, alors $(x, y) \mapsto \phi(x, iy)$ est antisymétrique.

Exercice 4 :
Soient K un corps, E un espace vectoriel sur K, ϕ une forme sesquilinéaire sur $E \times E$ et u un endomorphisme de E.
Si $v : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, on définit sa *transposée* comme étant l'application $\begin{array}{cccc} {}^t v : & F^* & \to & E^* \\ & f & \mapsto & f \circ v \end{array}$.

a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   i) il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant $\phi(u(x), y) = \phi(x, u^*(y))$ pour tous $x, y \in E$;
   ii) l'application $d_\phi : E \to E^*$ induite par ϕ est injective et ${}^t u(d_\phi(E)) \subseteq d_\phi(E)$.
b) Donner un exemple où E est de dimension infinie, d_ϕ est injective, mais où ${}^t u(d_\phi(E))$ n'est pas contenu dans $d_\phi(E)$.

Exercice 5 :
Soient K un corps, E_0 et E_1 deux espaces vectoriels sur K et ϕ_0, ϕ_1 des formes sesquilinéaires respectivement sur $E_0 \times E_0$ et $E_1 \times E_1$. On suppose que ϕ_1 est non dégénérée et qu'il existe un élément $\alpha \in K$ et une bijection $v : E_0 \to E_1$ tels que l'on ait $\phi_1(v(x), v(y)) = \phi_0(x, y)\alpha$ pour tous $x, y \in E_0$.

a) Montrer que ϕ_0 est non dégénérée et que v est linéaire.

Soient E_2 un espace vectoriel sur K et ϕ_2 une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $E_2 \times E_2$. On suppose l'existence d'une application linéaire surjective $u : E_1 \to E_2$ qui vérifie

$$\phi_2(u(x), u(y)) = 0 \Rightarrow \phi_1(x, y) = 0 \quad \text{pour tous } x, y \in E_1.$$

b) Montrer que u est un isomorphisme de E_1 sur E_2.

c) Montrer que pour tout $y \in E_1$, il existe un élément $m(y) \in K$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)m(y)$ pour tout $x \in E_1$.

d) En déduire qu'il existe $\beta \in K^*$ tel que l'on ait $\phi_2(u(x), u(y)) = \phi_1(x, y)\beta$ pour tous $x, y \in E_1$.

Exercice 6 :
Déterminer les groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques en dimension 1 et 2.

Exercice 7 : ⋆⋆
Soient p un nombre premier impair et $q = p^r$ une puissance d'un tel nombre premier, avec $r \geq 1$.

a) Montrer qu'il existe une involution non triviale sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si r est pair.

b) Vérifier que $\sigma : x \mapsto x^q$ est l'unique involution non triviale de $\mathbb{F}_{q^2}$ et que son corps des invariants est $\mathbb{F}_q$.

c) On note $E_n := \mathbb{F}_{q^2}^n$. Montrer qu'il y a sur (E_n, σ) une unique classe d'équivalence de formes hermitiennes non dégénérées. Montrer qu'une telle forme admet dans une base convenable la matrice identité.

d) Soit z_n (resp. y_n) le nombre de vecteurs non triviaux de E_n de norme 0 (resp. 1). Par récurrence, montrer que l'on a pour tout entier $n \geq 1$,

$$z_n = (q^n - (-1)^n)(q^{n-1} + (-1)^n) \text{ et } y_n = q^{n-1}(q^n - (-1)^n).$$

e) Calculer l'ordre de $\mathrm{U}_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

f) En déduire l'ordre de $\mathrm{SU}_n(\mathbb{F}_{q^2})$ et de $\mathrm{PSU}_n(\mathbb{F}_{q^2})$.

Exercice 8 : ⋆⋆⋆
Soient p un nombre premier impair, $f \geq 1$ et $q = p^f$. Soit b la forme sur $(\mathbb{F}_{q^2})^3 \times (\mathbb{F}_{q^2})^3$ définie par $b(u, v) = u_1 v_3^q + u_2 v_2^q + u_3 v_1^q$

a) Déterminer l'ensemble Δ des droites isotropes de b. Quel est le cardinal de Δ ?

b) Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$. On définit aussi les éléments $t_{\alpha,\beta}$ et $h_{\gamma,\delta}$ de $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ correspondant respectivement aux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta^q & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-q} \end{pmatrix}$$

avec les conditions $\delta^{1+q} = 1$, $\gamma \neq 0$, $\alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0$. Déterminer le stabilisateur de e_1 dans $\mathrm{PU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ et montrer que $T := \{t_{\alpha,\beta} \mid \alpha + \alpha^q + \beta^{1+q} = 0\}$ en est un sous-groupe distingué.

c) Montrer que l'action de $\mathrm{PSU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ sur Δ est 2-transitive.

d) Calculer le sous-groupe dérivé T_{e_1} de T.

e) On appelle transvection unitaire de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$ toute transvection de $(\mathbb{F}_{q^2})^3$ préservant la forme b. Montrer que $u \in \mathrm{U}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est une transvection unitaire si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$ vérifiant $\alpha + \alpha^q = 0$ et $a \in (\mathbb{F}_{q^2})^3$ isotrope tels que pour tout $x \in (\mathbb{F}_{q^2})^3$, on ait $u(x) = x + \alpha b(a, x)a$ (on dit que u est une transvection unitaire de vecteur a).

f) Pour tout vecteur isotrope a, montrer que l'ensemble T_a des transvections unitaires de vecteur a forme un sous-groupe abélien distingué dans le stabilisateur de a sous $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$.

g) Montrer que toute transvection unitaire est un commutateur dans $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$.

h) Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ engendré par les transvections unitaires agit transitivement sur $\{x \in (\mathbb{F}_{q^2})^3 : b(x, x) = 1\}$.

i) Montrer que $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est engendré par les transvections unitaires.

j) Montrer que $\mathrm{PSU}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ est un groupe simple.

Exercice 9 : ⋆⋆
Soit $\mathbf{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions. Un élément $z \in \mathbf{H}$ est dit *pur* s'il s'écrit sous la forme $z = bi + cj + dk$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $z \in \mathbf{H}$ est pur si et seulement si $z^2 \in \mathbb{R}^-$.

b) Montrer que tout élément de $\mathbf{H}$ est produit de deux quaternions purs.

c) Montrer que tout automorphisme d'anneaux de $\mathbf{H}$ est de la forme $x \mapsto qxq^{-1}$ pour un certain $q \in \mathbf{H}$ de norme 1.

d) Vérifier que la transposée sur $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{H})$ ne conserve pas le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{H})$.

Exercice 10 : ⋆⋆
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soient $\alpha, \beta \in K^*$. On note $(1, i, j, k)$ la base canonique de K^4, et on note $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ l'unique structure de K-algèbre sur K^4 définie par

$$1 \text{ est le neutre pour la multiplication, } i^2 = \alpha\,,\ j^2 = \beta,\ ij = -ji = k\,.$$

a) Définir la norme réduite $N : \mathbf{H}_{\alpha,\beta} \to K$ et la conjugaison $\mathbf{H}_{\alpha,\beta} \to \mathbf{H}_{\alpha,\beta}$.

b) Montrer que si K est algébriquement clos, alors $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est isomorphe à $\mathrm{Mat}_2(K)$.

c) Montrer que $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ est une algèbre à division (i.e. un "corps non commutatif") si et seulement si N est une forme anisotrope sur le K-espace vectoriel $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$.

d) Montrer que si $K = \mathbb{F}_q$, alors $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ n'est pas intègre.

e) Soient $\alpha', \beta' \in K^*$. Montrer que les K-algèbres $\mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ et $\mathbf{H}_{\alpha',\beta'}$ sont isomorphes si et seulement si les normes N et N' associées sont des formes quadratiques isométriques.

Exercice 11 : ⋆⋆⋆
Soient A un anneau commutatif unitaire et $\mathbf{H}(A)$ la A-algèbre des éléments $a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in A$ telle que 1 est neutre pour la multiplication et avec les relations :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

a) Définir la norme réduite $N : \mathbf{H}(A) \to A$ et la conjugaison $\mathbf{H}(A) \to \mathbf{H}(A)$.

b) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{H}(A)$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

c) On définit les *quaternions d'Hurwitz* par

$$\mathrm{H} := \left\{ a + bi + ck + dk \in \mathbf{H}(\mathbb{Q}) \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \cup \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}^4\right) \right\}.$$

Montrer que H est un sous-anneau de $\mathbf{H}(\mathbb{Q})$ contenant $\mathbf{H}(\mathbb{Z})$ et vérifiant $N(z) = 1$ si et seulement si z est inversible dans H.

d) Montrer que tout idéal à droite (respectivement à gauche) de H est principal.

e) Montrer que, pour tout nombre premier p, il existe $z \in \mathrm{H}$ tel que $N(z) = p$.

f) Montrer que tout entier naturel est somme de quatre carrés.

Exercice 12 : ⋆⋆⋆
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, $\alpha, \beta \in K^*$. On note $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{\alpha,\beta}$ (voir l'exercice 10 pour la définition) et $\mathbf{H}^\times := \{x \in \mathbf{H} : N(x) \neq 0\}$.
Pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$ et $x \in \mathbf{H}$, on note $S_q(x) := qxq^{-1}$. On rappelle que l'on dispose de la norme N sur $\mathbf{H}$ qui est une forme quadratique.

a) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$ et tout $x \in \mathbf{H}$, $N(S_q(x)) = N(x)$.

b) Montrer que pour tout $q \in \mathbf{H}^\times$, $S_{q_{|K}} = \mathrm{id}_K$ et $S_q(\mathbf{P}) = \mathbf{P}$, où $\mathbf{P} \subset \mathbf{H}$ désigne l'espace des quaternions purs.

c) En déduire un morphisme de groupes $s : \mathbf{H}^\times \to \mathrm{O}(\mathbf{P}, N)$ et montrer que son noyau est K^*.

d) Montrer que pour tout $p \in \mathbf{P}^\times := \mathbf{P} \cap \mathbf{H}^\times$, $s(p)$ est le renversement d'axe p. En déduire que $s(\mathbf{H}^\times) = \mathrm{SO}(\mathbf{P}, N)$.

e) En déduire un isomorphisme $\mathbf{H}^\times / K^* \cong \mathrm{SO}(\mathbf{P}, N)$.

f) On suppose $\alpha = \beta = 1$. Montrer que N est une forme isométrique à la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto x^2 - y^2 - z^2$ sur K^3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(K) \cong \mathrm{SO}_3(K, N)$ et $\mathrm{PSL}_2(K) \cong \Omega_3(K, N) := D(\mathrm{O}_3(K, N))$.

g) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$, il existe $a, b \in \mathbf{H}^\times$ tels que $u(x) = axb$ pour tout $x \in \mathbf{H}$. Montrer en outre que $N(a)N(b) = 1$.

h) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{O}(\mathbf{H}, N) \setminus \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$, il existe $a, b \in \mathbf{H}^\times$ tels que $u(x) = a\overline{x}b$ pour tout $x \in \mathbf{H}$.

i) Notons $U := \{(a, b) \in \mathbf{H}^\times \times \mathbf{H}^\times : N(a) = N(b)\}$. Construire un morphisme de groupes surjectif $S : U \to \mathrm{SO}(\mathbf{H}, N)$ et calculer son noyau.

j) On suppose $\alpha = \beta = 1$. Montrer que N est une forme hyperbolique sur $\mathrm{Mat}_2(K)$ et que les groupes $\mathrm{P}\Omega_4(K, N) := \mathrm{P}(\mathrm{D}(\mathrm{O}_4(K, N)))$ et $\mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$ sont isomorphes.