

TD5 : groupes résolubles et nilpotents, croissance des groupes

Exercices \star : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.

Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.

Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Certaines questions de cette feuille sont résolues dans le polycopié de cours, mais ces notions ne seront pas traitées en cours. Il est recommandé de chercher ces exercices sans l'aide du polycopié.

Si G est un groupe, on note $C^0(G) := G$ et $C^{n+1}(G) := [G, C^n(G)]$, à savoir le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, avec $g \in G$ et $h \in C^n(G)$. On dit que G est nilpotent s'il existe $N \geq 0$ tel que $C^N(G) = \{e\}$. Dans ce cas, l'entier $N \geq 0$ minimal tel que $C^N(G) = \{e\}$ est appelé classe de nilpotence de G .

Exercice 1 : \star

Soit G un groupe.

- Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble.
- Que dire de la réciproque ?
- Montrer que le centre d'un groupe nilpotent est non trivial.
- Montrer que si G est nilpotent et H est un sous-groupe de G , alors H est nilpotent.
- On suppose désormais dans la suite que H est un sous-groupe distingué de G . Montrer que si G est nilpotent, G/H est nilpotent.
- On suppose H et G/H nilpotents. Le groupe G est-il nilpotent ?
- Les groupes résolubles \mathfrak{S}_3 et \mathfrak{S}_4 sont-ils nilpotents ?
- Soit p un nombre premier. Montrer que tout p -groupe est nilpotent.
- Soient p, q, r trois nombres premiers. Montrer que tout groupe d'ordre pqr est résoluble. Un tel groupe est-il nilpotent ?
- On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si et seulement si tout sous-groupe maximal de G est distingué si et seulement si G est produit direct de ses p -Sylow.

Exercice 2 :

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $T_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices triangulaires supérieures.

- Montrer que si G est connexe, alors $D(G)$ l'est aussi.
- Montrer que si G est abélien, alors G est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$.
- On suppose G résoluble connexe. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de $T_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 : $\star\star$

Soit G un groupe de type fini. On définit le sous-groupe de Frattini de G (noté $\phi(G)$) comme l'intersection des sous-groupes maximaux de G .

- Montrer que \mathbb{Q} ne possède pas de sous-groupe maximal.
- Montrer que G admet au moins un sous-groupe maximal. La preuve est-elle plus simple si G est fini ?
- Montrer que $\phi(G)$ est distingué dans G et même qu'il est stable par tout automorphisme de G (on dit qu'il est caractéristique). On note $\pi : G \rightarrow G/\phi(G)$ la projection canonique.
- Soit $S \subset G$ une partie de G . Montrer que S engendre G si et seulement si $\pi(S)$ engendre $G/\phi(G)$.

- e) Montrer que $\phi(G)$ est exactement l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que pour toute partie $S \subset G$, on a : $\langle S, g \rangle = G \implies \langle S \rangle = G$.
- f) Montrer que si G est fini, alors $\phi(G)$ est nilpotent.
- g) On suppose G fini. Montrer que G est nilpotent si et seulement si $D(G) \subset \phi(G)$.
- h) On suppose que G est un p -groupe.
 - i) Montrer que tout sous-groupe maximal de G contient $D(G)$ et le sous-groupe G^p engendré par les puissances p -ièmes dans G .
 - ii) Montrer que $G/\phi(G)$ est le plus grand quotient abélien de G d'exposant p .
 - iii) Que peut-on en déduire sur le nombre minimal de générateurs de G ?
 - iv) Montrer que $\phi(G) = D(G).G^p$.

Exercice 4 : ★★

Soit G un groupe de type fini. Pour toute partie génératrice finie A de G , pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $B_{G,A}(m)$ l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent comme produits d'au plus m éléments de $A \cup A^{-1}$. On pose $\beta_{G,A}(m) := |B_{G,A}(m)|$. Si β et β' sont deux fonctions $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, on notera $\beta \preceq \beta'$ s'il existe $c > 0$ et $a \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout n , $\beta(n) \leq c\beta'(an)$, et $\beta \sim \beta'$ si $\beta \preceq \beta'$ et $\beta' \preceq \beta$.

- a) Montrer que $B_{G,A}(m)$ est une boule dans l'espace métrique (G, d) , où d est une distance que l'on précisera.
- b) Soient A et A' deux parties génératrices finies de G . Montrer que $\beta_{G,A} \sim \beta_{G,A'}$. On notera donc abusivement $\beta_G = \beta_{G,A}$.
- c) Calculer β_G si G est un groupe fini, si $G = \mathbb{Z}$, si $G = \mathbb{Z}^n$, si G est le groupe libre à n générateurs (i.e. le groupe des mots finis sur un alphabet de n lettres, avec leurs inverses, pour la loi de concaténation des mots).
- d) Montrer que $\beta_G(n) \preceq e^n$.
- e) Si G' est un groupe de type fini, calculer $\beta_{G \times G'}$.
- f) Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe de type fini, alors $\beta_H \preceq \beta_G$, et si H est d'indice fini, alors $\beta_H \sim \beta_G$.
- g) Soit H un quotient de G . Comparer β_H et β_G .
- h) Montrer que si $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors G est de type fini et $\beta_G(n) \sim e^n$.
- i) Montrer que si G est nilpotent de classe 2, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
- j) Montrer que si G est nilpotent, alors il existe $d \geq 0$ tel que $\beta_G(n) \preceq n^d$.
- k) Montrer que le groupe $G = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$, où le produit semi-direct est défini via la matrice $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, est un groupe résoluble tel que $\beta_G(n) \sim e^n$.

Exercice 5 : ★★★

On note Σ^* l'ensemble des mots (finis) sur l'alphabet $\Sigma = \{0; 1\}$, i.e. $\Sigma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$. On note G le groupe $\mathfrak{S}(\Sigma^*)$. On note $a \in G$ l'élément défini par $a(1m) := 0m$ et $a(0m) := 1m$ pour tout $m \in \Sigma^*$.

- a) Montrer que les formules suivantes définissent des éléments b, c et d de G : $b(0m) = 0a(m)$, $c(0m) = 0a(m)$, $d(0m) = 0m$, $b(1m) = 1c(m)$, $c(1m) = 1d(m)$ et $d(1m) = 1b(m)$. On note $\Gamma := \langle a, b, c, d \rangle \subset G$.
- b) Montrer que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = \mathrm{id}$ et que $bc = cb = d$, $cd = dc = b$, $bd = db = c$.
- c) Montrer que tout élément de Γ s'écrit comme produit des éléments a, b, c, d , avec un terme du produit sur deux égal à a .
- d) Pour tout $n \geq 1$, on note $\Gamma_n := \{\gamma \in \Gamma : \gamma|_{\Sigma^n} = \mathrm{id}\}$. Montrer que Γ_n est un sous-groupe distingué strict d'indice fini de Γ .
- e) On définit $\varphi_1 : \Gamma_1 \rightarrow G \times G$ par $\varphi_1(\gamma) := (\gamma_0, \gamma_1)$, où $\gamma_\epsilon(w)$ est le mot tel que $\gamma(\epsilon w) = \epsilon \gamma_\epsilon(w)$. Montrer que φ_1 est un morphisme de groupes injectif.

- f) Montrer que les morphismes $\varphi^\epsilon : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma$ définis par $\gamma \mapsto \gamma_\epsilon$ sont surjectifs. En déduire que Γ est infini.
- g) Montrer que $\varphi_1(\Gamma_1)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma \times \Gamma$.
- h) Montrer que Γ n'est pas à croissance polynomiale, i.e. pour tout $d \geq 0$, $n^d \prec \beta_\Gamma(n)$.
- i) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_1$, $l(\gamma_0) + l(\gamma_1) \leq l(\gamma) + 1$, où $l(g)$ désigne le nombre minimal de symboles a, b, c, d nécessaires pour écrire g .
- j) Pour tout $n \geq 1$, généraliser les constructions précédentes pour obtenir un morphisme injectif $\varphi_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma^{\Sigma_n}$ tel que $\varphi_n(\Gamma_n)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ^{X_n} .
- k) Montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma_3$, si on note $\varphi_3(\gamma) = (\gamma_\epsilon)_{\epsilon \in \Sigma_3}$, alors

$$\sum_{\epsilon \in \Sigma_3} l(\gamma_\epsilon) \leq \frac{5}{6}l(\gamma) + 8.$$

- l) Montrer que Γ n'est pas à croissance exponentielle, i.e. $\beta_\Gamma(n) \prec e^n$. On dit que Γ est à croissance intermédiaire.