Examen du ? ? 2021

Les résultats du cours ou des exercices vus en travaux dirigés peuvent être utilisés en donnant des références précises. Les parties sont indépendantes.

Exercice I

On rappelle qu'un $\mathbb{Z}$-module M est dit de torsion si pour tout $m \in M$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ non nul tel que $a \cdot m = 0$.

1. Montrer que si M est un $\mathbb{Z}$-module de torsion, alors $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$.

2. On suppose que M est un $\mathbb{Z}$-module de type fini tel que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$. Montrer que M est de torsion.

Exercice II

On rappelle que par définition un module simple est non nul.

1. Quels sont les $\mathbb{Z}$-modules simples ?

2. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ n'admet aucun sous-module simple.

3. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ n'admet aucun sous-module simple ni aucun quotient simple.

Exercice III

Soit k un corps et soit $k[T]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficient dans k.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{P \in k[T] \mid P'(0) = 0\}$ est une sous-k-algèbre de $k[T]$.

2. Montrer que le morphisme de k-algèbres

$$\psi : k[X,Y] \to k[T], \quad X \mapsto T^2,\ Y \mapsto T^3$$

a pour image $\mathcal{A}$. En déduire que $\mathcal{A}$ est noethérien.

3. Montrer que $X^3 - Y^2$ est irréductible dans $k[X,Y]$.

4. Montrer que le noyau de ψ est l'idéal $I = (X^3 - Y^2)$. (Pour montrer que $\ker \psi \subset I$, on pourra se placer dans $k(X)[Y]$, où $k(X)$ est le corps des fractions rationnelles en X et utiliser les propriétés de cet anneau de polynômes). En déduire qu'on a un isomorphisme canonique de k-algèbres :

$$k[X,Y]/(X^3 - Y^2) \simeq \mathcal{A}.$$

5. Montrer que T^2 et T^3 sont irréductibles dans $\mathcal{A}$.

6. Donner deux factorisations en irréductibles de T^6 dans $\mathcal{A}$. En déduire que A n'est pas factoriel.

7. Exhiber un idéal non principal de $\mathcal{A}$.

Exercice IV

Soient A un anneau et M un A-module. Posons $\mathscr{E} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, l'algèbre des endomorphismes de groupes abéliens de M, et $\Omega = \mathrm{End}_A(M)$ l'algèbre des endomorphismes de A-modules de M (on a donc $\Omega \subset \mathscr{E}$).

1. Soit $p \in \Omega$ vérifiant $p^2 = p \circ p = p$. Montrer que $M = \ker p \oplus \mathrm{Im}\,(p)$. Réciproquement, montrer que si M est somme directe de deux sous-modules M' et M'', $M = M' \oplus M''$, alors la projection q de M sur M' parallèlement à M'' est un élément de Ω vérifiant $q^2 = q$.

2. On pose $\mathscr{E}'' = \{v \in \mathscr{E} | u \circ v = v \circ u,\ (\forall u \in \Omega)\}$. Supposons que $M = M' \oplus M''$, somme directe de sous-modules. Montrer que M' est stable par tout élément $v \in \mathscr{E}''$.

3. On suppose dans la suite M semi-simple. Montrer que pour tout $m \in M$ et pour tout $v \in \mathscr{E}''$, il existe $a \in A$ tel que $v(m) = a \cdot m$.

$u \circ v = v \circ u$

On note ι_i l'injection de M dans le i-ème facteur de M^n et p_i la projection sur ce facteur. On a donc $\sum_i \iota_i \circ p_i = \mathrm{Id}_{M^n}$. On note aussi :

$u^{(n)}$ $\quad \sum \iota_i \circ v_{ij} \circ p_j$

$$\Omega^{(n)} = \mathrm{End}_A(M^n), \quad \mathscr{E}^{(n)} = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M^n), \quad \mathscr{E}^{(n)''} = \{v \in \mathscr{E}^{(n)} | u \circ v = v \circ u,\ (\forall u \in \Omega^{(n)})\}.$$

Si $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$, on note $u^{(n)}$ l'endomorphisme de M^n défini par $u^{(n)} \circ \iota_i = \iota_i \circ u$, $i = 1, \ldots, n$.

4. Montrer que si $u \in \mathscr{E}''$, alors $u^{(n)} \in \mathscr{E}^{(n)''}$.

$M \to M \to M^n$
$M \to M^n \to M^n$

5. Montrer que pour toute famille finie $(m_1, \ldots, m_n)$ d'éléments de M, et pour tout $v \in \mathscr{E}''$, il existe $a \in A$ tel que $v(m_i) = a \cdot m_i$, $i = 1, \ldots, n$.

6. On suppose que M est de type fini en tant que Ω-module. Montrer que

$$\mathscr{E}'' = \{\ell_a :\ M \to M,\ m \mapsto a \cdot m\}.$$

65472

Exercice V

Soit K un corps (commutatif). On dit qu'un sous-anneau A de K est un anneau de valuation de K si pour tout $x \in K$, soit $x \in A$, soit $x \neq 0$ et $x^{-1} \in A$.

1. Soit A un anneau de valuation de K. Montrer que K est le corps des fractions de A.

2. Soit A un anneau factoriel de corps des fractions K et soit $\mathcal{P}$ un système de représentants des éléments irréductibles de A modulo $A^\times$. On écrit tout élément $x \in K$ non nul sous la forme

$$x = u \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(x)}$$

$A_q = A_{(q)}$

avec $u \in A^\times$ et les $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Pour tout $q \in \mathcal{P}$, on pose $A_q = v_q^{-1}(\mathbb{N}) \subset K$. Montrer que A_q est un anneau de valuation de K.

3. Soit A un anneau de valuation de K. Montrer que l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné pour l'inclusion, c'est-à-dire que si I et J sont deux idéaux de A, alors soit $I \subset J$, soit $J \subset I$. En déduire que A est un anneau local, c'est-à-dire qu'il existe un unique idéal maximal de A que l'on note $\mathfrak{M}_A$.

4. Soit $A \subset B$ des sous-anneaux de K. Montrer que si A est un anneau de valuation de K, alors B aussi et que les idéaux $\mathfrak{M}_A$ et $\mathfrak{M}_B$ introduits dans la question précédente vérifient $\mathfrak{M}_B \subset \mathfrak{M}_A$ avec égalité si et seulement si $A = B$.

Question subsidiaire difficile (seulement si vous avez fini tout le reste) : on reprend la question 2 de l'exercice I, sans supposer M de type fini : montrer que si $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$ alors M est de torsion.

$A < B \Rightarrow M_B \subset M_A \qquad M_B \subset A$

$M_B = M_A \Rightarrow A = B$