# TD2 : Actions de groupes et théorèmes de Sylow

Exercices $\star$ : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$ : seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$ : plus difficiles.

**Exercice 1 :** $\star$
Soit $p$ un nombre premier.

a) Montrer qu'un groupe de cardinal $p^2$ est commutatif.
b) Combien d'éléments d'ordre $p$ y a-t-il dans un groupe de cardinal $p$ ? Et dans un groupe de cardinal $p^2$ ?

**Exercice 2 :** $\star$
Soit $G$ un groupe fini agissant sur un ensemble fini $X$. En considérant l'ensemble

$$E := \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\},$$

calculer le nombre moyen de point fixes d'un élément de $G$.
Que dire en particulier si l'action est transitive ? Que dire de la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire ?

**Exercice 3 : (Lemme de Cauchy)** $\star$
Soit $G$ un groupe fini et soit $p$ un nombre premier divisant le cardinal de $G$. En utilisant une action convenable de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

prouver que $G$ admet un élément d'ordre $p$ (sans utiliser les théorèmes de Sylow !).

**Exercice 4 :** $\star$
Combien y a-t-il de colliers différents formés de 9 perles dont 4 bleues, 3 blanches et 2 rouges ?

**Exercice 5 :** $\star\star$
Soit $G$ un groupe.

a) On suppose que $G$ est fini et on note $p$ le plus petit nombre premier divisant le cardinal de $G$. Montrer que tout sous-groupe de $G$ d'indice $p$ est distingué.
b) On suppose que $G$ est infini et qu'il admet un sous-groupe strict $H$ d'indice fini. Montrer que $G$ n'est pas un groupe simple.

**Exercice 6 :**

a) Montrer que si $G$ est un groupe fini et $H$ un sous-groupe strict de $G$, alors la réunion des conjugués de $H$ n'est pas égale à $G$ tout entier. Que dire si le groupe $G$ est infini et si $H$ est d'indice fini dans $G$ ? Et si on ne suppose plus $H$ d'indice fini ?
b) Soit $G$ un groupe fini agissant transitivement sur un ensemble fini $X$ tel que $|X| \geq 2$. Montrer qu'il existe $g \in G$ ne fixant aucun point de $X$.

**Exercice 7 :**
Soit $G$ un groupe fini non trivial agissant sur un ensemble fini $X$. On suppose que pour tout $g \neq e \in G$, il existe un unique $x \in X$ tel que $g \cdot x = x$. On souhaite montrer que $X$ admet un point fixe sous $G$ (nécessairement unique).

a) On note $Y := \{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$. Montrer que $Y$ est stable par $G$.

b) On note $n = |Y/G|$ et $y_1, \dots, y_n$ un système de représentants de $Y/G$. Pour tout $i$, on note $m_i$ le cardinal de $\mathrm{Stab}_G(y_i)$. En considérant l'ensemble $Z := \{(g,x) \in (G \setminus \{e\}) \times X : g \cdot x = x\}$, montrer que

$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right).$$

c) En déduire que $n = 1$.

d) Conclure.

**Exercice 8 :** ⋆⋆

a) Soit $G$ un $p$-groupe fini agissant sur un ensemble fini $X$. On note $X^G$ l'ensemble des points fixes de $X$ sous $G$. Montrer que
$$|X^G| \equiv |X| \ (\mathrm{mod.}\ p).$$

b) Soit $G$ un $p$-groupe agissant sur un ensemble fini $X$ dont le cardinal n'est pas divisible par $p$. Montrer que $X$ admet un point fixe sous $G$.

c) Soit $G$ un $p$-groupe fini et $H \neq \{e\}$ un sous-groupe distingué de $G$. Montrer que l'intersection de $H$ avec le centre de $G$ n'est pas réduite à l'élément neutre.

d) Montrer qu'un groupe d'ordre $p^n$ admet des sous-groupes d'ordre $p^i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

e) Soit $p$ un nombre premier congru à 1 modulo 4. On souhaite montrer que $p$ est somme de deux carrés d'entiers. On note
$$X := \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}.$$

   i) On définit $i : X \to X$ par les formules suivantes
$$i : (x,y,z) \mapsto \begin{array}{l} (x+2z, z, y-x-z) \text{ si } x < y-z\,, \\ (2y-x, y, x-y+z) \text{ si } y-z < x < 2y\,, \\ (x-2y, x-y+z, y) \text{ si } x > 2y\,. \end{array}$$
   Vérifier que $i$ est bien définie.

   ii) Montrer que $i$ est une involution.

   iii) Montrer que $i$ a un unique point fixe.

   iv) Montrer que $|X|$ est impair.

   v) Montrer que l'application $j : X \to X$ définie par $j(x,y,z) := (x,z,y)$ admet un point fixe.

   vi) Conclure.

**Exercice 9 :**
Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de groupes finis admettant exactement $n$ classes de conjugaison.

**Exercice 10 :** ⋆⋆
On suppose qu'il existe un groupe simple $G$ d'ordre 180.

a) Montrer que $G$ contient trente-six 5-Sylow.

b) Montrer que $G$ contient dix 3-Sylow, puis que deux 3-Sylow distincts ne peuvent pas contenir un même élément $g \neq e_G$. (Indication : on pourra considérer les ordres possibles pour le centralisateur de $g$ ; on observera qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.)

c) Conclure.

**Exercice 11 :** ⋆⋆
Soient $p$ et $q$ deux nombres premiers distincts.

a) Montrer qu'un groupe d'ordre $pq$ n'est pas simple.

b) Montrer que si $p < q$ et $p$ ne divise pas $q-1$, alors tout groupe d'ordre $pq$ est cyclique.

c) Soit $G$ un groupe simple d'ordre $p^\alpha m$, avec $\alpha \geq 1$ et $m$ non divisible par $p$. On note $n_p$ le nombre de $p$-Sylow de $G$. Montrer que $|G|$ divise $n_p!$.

d) Montrer qu'un groupe d'ordre $p^m q^n$, avec $p < q$, $1 \leq m \leq 2$ et $n \geq 1$, n'est pas simple.

e) Montrer qu'un groupe d'ordre $p^2 q$ ou $p^3 q$ n'est pas simple.

**Exercice 12 :** $\star$

Montrer qu'un groupe non commutatif d'ordre $< 60$ n'est pas simple.

**Exercice 13 :** $\star\star$

On cherche à montrer que $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60.

a) Faire la liste des éléments de $\mathfrak{A}_5$ avec leur ordre respectif. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$.

b) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

c) Soit $G$ un groupe simple d'ordre 60. Montrer que le nombre de 2-Sylow de $G$ est égal à 5 ou à 15.

d) En déduire que $G$ contient un sous-groupe d'ordre 12.

e) Conclure.

**Exercice 14 :** $\star\star\star$

Soit $G$ un groupe fini.

a) Soit $H$ un sous-groupe de $G$ d'indice $n$. On note $x_1, \dots, x_n \in G$ un ensemble de représentants de $G$ modulo $H$. L'action de $G$ sur $G/H$ induit une action de $G$ sur $\{1, \dots, n\}$, et pour tout $g \in G$ et $1 \leq i \leq n$, il existe $h_{i,g\cdot i} \in H$ tel que $gx_i = x_{g\cdot i} h_{i,g\cdot i}$. On note enfin $\pi : H \to H/D(H)$ la projection canonique. Montrer que la formule

$$V(g) := \pi\left(\prod_{i=1}^{n} h_{i,g\cdot i}\right)$$

définit un morphisme de groupes $G \to H/D(H)$ indépendant du choix des $x_i$.

b) Avec les notations précédentes, soit $h \in H$. On considère l'action de $\langle h \rangle$ sur $X = G/H$ et on note $g_1, \dots, g_r$ des éléments de $G$ tels que les classes $[g_i]$ des $g_i$ dans $X$ forment un ensemble de représentants pour cette action. Pour tout $i$, on note $n_i$ l'entier minimal non nul tel que $h^{n_i} \cdot [g_i] = [g_i]$. Montrer que

$$V(h) = \pi\left(\prod_{i=1}^{r} g_i^{-1} h^{n_i} g_i\right).$$

c) Soient $S$ un $p$-Sylow de $G$ et $A, B \subset S$ des parties stables par conjugaison dans $S$. Montrer que si $A$ et $B$ sont conjuguées dans $G$, alors elles le sont dans $N_G(S)$ (on pourra considérer deux $p$-Sylow de $N_G(A)$).

d) Soit $S$ un $p$-Sylow de $G$ tel que $S \subset Z(N_G(S))$. Montrer que le morphisme $V : G \to S$ défini à la question a) est surjectif. En déduire qu'il existe un sous-groupe distingué $H$ de $G$ tel que $S$ soit isomorphe à $G/H$.

e) En déduire que si $G$ est simple non cyclique, alors le cardinal de $G$ est divisible par 12 ou son plus petit facteur premier apparaît au moins au cube dans sa décomposition en facteurs premiers.

**Exercice 15 :** $\star\star\star$

a) Montrer qu'un groupe d'ordre $60 < n < 168$ avec $n$ non premier n'est jamais simple.

b) Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ sont d'ordre 168.

c) Montrer que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ est simple.

d) Soit $G$ simple d'ordre 168. Montrer que $G$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.

e) Montrer que l'on a un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$.