习题–2021春

1. 平面旋转

1，我们考虑平面的直角坐标系 (x, y) (右手系就行), 然后我们把这个坐标系逆时针旋转 θ 度得到新的直角坐标系 (x_1, y_1)。 请写出两个坐标系之间的转换公式。

2，假设某个质点的运动轨迹是 $(x(t), y(t))$, 其中 $x(t), y(t)$ 为时间 t 的光滑函数。 再假设直角坐标系 (x_1, y_1) 为原坐标系逆时针旋转 $\theta \cdot t$ 度得到新的直角坐标系, 其中 θ 为匀速旋转的角速度。 请用 $(x(t), y(t))$ 及其导数表达出 这一质点在坐标系 (x_1, y_1) 里的加速度。

3，假设坐标系 (x, y) 为惯性系，把上述表达里面的离心力和另外一个惯性力（科里奥利力）表达出来。

4，考虑北纬45度附近受地球自转影响质点运动，请近似的表达出这个质点沿地球表面方向的惯性力的表达。

解答:

1，可以验证 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

2, 设

$$A(t) = \begin{pmatrix} cos(\theta t) & sin(\theta t) \\ -sin(\theta t) & cos(\theta t) \end{pmatrix}$$

可以验证 $A''(t) = -\theta^2 A(t)$ 和 $A'(t) = \theta \begin{pmatrix} -sin(\theta t) & cos(\theta t) \\ -cos(\theta t) & -sin(\theta t) \end{pmatrix} = \theta B_0 A(t)$, 其中 $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为顺时针旋转90度对应的旋转矩阵。 则

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A'(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \theta B_0 A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \end{pmatrix} = A''(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2A'(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = -\theta^2 A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\theta B_0 A(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

3, 由2可得 $2\theta B_0 \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = -2\theta^2 A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\theta B_0 A(t) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 所以

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \end{pmatrix} = \theta^2 A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\theta B_0 \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

而这等号后面第一项是离心力，第三项为惯性系的加速度的坐标变换，即为力。这里的第二项就是科里奥利力，它的大小和速度 (x_1', y_1') 成正比, 方向为速度方向顺时针旋转90度。

2. 多项式环的自同态的表达

设 K 是个域，考虑多项式环 $K[x]$ 以及 次数小于等于 n 的多项式全体 $K[x]_n$.

1, 考虑 $K[x]_n$ 的线性自同态 $\psi : f(x) \mapsto f(x+1)$. 请证明 ψ 是同构并写出 ψ 和它的逆的矩阵表达。

2, 考虑 首一不可约多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 和相应的商域 $M := K[x]/(p(x))$. 请给出 M 里面 乘以 x 所诱导的线形映射的矩阵表达

3，求出题目2中的映射的逆映射的矩阵表达。

3. 有限图

在空间中我们给出 n 个点 $\{P_i\}_{i=1}^{n}$。对于 i, j, 我们给出 $a_{i,j}$ 条连接 P_i, P_j 的长度为 1 的线。 这样 $a_{i,j} = a_{j,i}$。设矩阵 $A := (a_{i,j})$, 并记矩阵 $A^m = (a_{i,j}^{(m)})$.

求证：$a_{i,j}^{(m)}$ 为连接P_i, P_j 的长度恰为 m 的线的个数。

4. 扩域的加法特征

设 K, E, F 为域，满足 $K \subset E \subset F$。 记 $\mathcal{L}_K(F, K)$ 为K-线性型全体，而 $\mathcal{L}_E(F, E)$ 为 E-线性型全体 且 $\mathcal{L}_E(F)$ 为 E-线性自同态全体。

1，对于任何一个 K-线性映射 $\psi : F \to K$, 我们可以定义映射:

$$\Psi_{F/K} : F \to \mathcal{L}(F, K) : \ f \mapsto \Psi(f)$$

满足, 对任何 $f, x \in F$, 有 $\Psi(f)(x) = \psi(f \cdot x)$。 求证：$\Psi_{F/K}$ 是 K-线性同构。

2, 设 $\psi_1 \in \mathcal{L}_E(F, E)$ 且定义 $\psi_1^* : \mathcal{L}_K(E, K) \to \mathcal{L}_K(F, K) : \phi \mapsto \phi \circ \psi_1$. 设 $\psi_0 \in \mathcal{L}_K(E, K)$ 且 $\Psi_{E/K}$ 为由题目 1 中把 F 换成 E (ψ 换成 ψ_0) 得到的映射。求证：如果 $\psi = \psi_0 \circ \psi_1$, 则对于任何 $y \in E$, 我们由 $\Psi_{F/K}(y) = \Psi_{E/K}(y) \circ \psi_1$, 并且 $\Psi_{F/K}(E) = Im(\psi_1^*)$.

3，任何 $f \in F$诱导F-线性映射（所以也是E-线性） $\phi_f : F \to F : x \mapsto f \cdot x$。求证: 映射 $m : F \to \mathcal{L}_E(F) : f \mapsto \phi_f$ 是 E-线性映射。

4， 对于任何 $\phi \in \mathcal{L}_E(F)$, 我们可以定义它的迹 $tr(\phi) \in E$： 取定E-向量空间 F 的一组基，然后把ϕ 在这组基下用矩阵表达出来， 然后$tr(\phi)$ 为这个矩阵的迹。 求证：上述定义与基的选取无关，并且$tr : \mathcal{L}_E(F) \to F : \phi \mapsto tr(\phi)$ 是 E-线性映射。

综上， $tr \circ m : F \to E$ 是 E-线性映射, 并且应用题目2于 $\psi_1 := tr \circ m$ 是我上课补充的题目。

5. 上三角矩阵

设 K 是一个域，我们考虑 $M_n(K)$。 取一个 $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$（则 A 诱导线性映射 $A : K^n \to K^n$） 。 设 $\lambda_i \in K$ 为两两不同的n 个元素，其中 $i = 1, \cdots, n$. 记 $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为满足 $a_{i,i} = \lambda_i$ 的对角矩阵。

1，设 σ 为一个 n-置换， 求证 $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 和 $D(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)})$ 相似。

2，假设，对于任何$i = 1, \cdots, n$， 都存在非零向量$v_i \in K^n$ 使得 $Av_i = \lambda_i v_i$。求证 A 相似于对角矩阵 $D(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。

3，若 A 为上三角矩阵，满足 $a_{i,i}=\lambda_i$ 且 $\prod_i \lambda_i \neq 0$, 求证 A 满足上题的条件。

6. 2阶矩阵

(发现之前作业弄的太简单了，做个一般情况) 取 $M_2(\mathbb{C})$ 中矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$，其中 $a,b,c\in\mathbb{C}$ 且 $a\neq b$, $ab\neq 0$。

1，求出列向量 $v_1,v_2\in\mathbb{C}^2$ 使得 $Av_1=av_1$, $Av_2=bv_2$。

2，写出基 v_1,v_2 与原来的基的过度矩阵 以及在这个新的基下矩阵 A 的样子。

3，请求出 A^{200} （即200个 A 相乘）。

7. 矩阵上的乘性函数

我们考虑 $M_n(K)$. 设 $f:M_n(K)\to K$ 为一个不恒为0也不恒为1 的映射。假设 f是乘性函数，即 $f(AB)=f(A)f(B)$.

1，求出 $f(0)$ 和 $f(I_n)$, 其中 $0,I_n$ 为 0 矩阵和单位矩阵。

2, 求证：若 $A\in M_n(K)$ 为可逆矩阵，则 $f(A)\neq 0$。

3，求证，对任何非平凡子空间 $V_1,V_2\subset K^n$, 都存在 K^n 的线性自同构 $\psi: K^n\to K^n$ 使得 $\psi(V_1)\cap V_2\neq 0$.

4, 求证：对于任何不可逆矩阵 $A\in M_n(K)$, 我们有 $f(A)=0$。

5，求证：存在一个乘性函数 $f_0:K\to K$ (即满足 $f(ab)=f(a)f(b)$) 使得：对于任何对角矩阵 $A:=D(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，我们有 $f(A)=f_0(\prod_{i=1}^n \lambda_i)$.

6，求证：一个上三角矩阵 $A=(a_{i,j})$，若某个 a_{i_0,i_0} 是0， 则 A 不可逆 （所以 $f(A)=0$）。

7，求证：在上题中，对于任何上三角矩阵 $A=(a_{i,j})$, 我们有 $f(A)=f_0(\prod_{i=1}^n a_{i,i})$. (提示：可以先证 $a_{i,i}$ 两两不同的情况)。

（注：一般情况应该满足 $f(A)=f_0(det(A))$）。

8. 2阶相似矩阵

设 K 是一个域，特征不为2。 我们考虑2阶方阵全体构成的矩阵环 $M_2(K)$，其中2阶可逆方阵全体构成的乘法群记作 $GL_2(K)$。 记 $tr(B)$ 为矩阵的迹，$det(B)$ 为矩阵的行列式 （据说2阶你们已经会了）。

回顾我们作业里讨论的关于相似矩阵的内容。 特别的，对于一个方阵 $B\in M_2(K)$, 定义 $Z(B)$ 为 B 交换的可逆2阶方阵全体。

1, 对于一个方阵 $B\in M_2(K)$, 求证 $B^2+tr(B)B+det(B)I_2=0$. （注：事实上， n 阶矩阵 B 满足多项式 $det(xI_n-B)$，称为特征多项式）

考虑映射 $\psi: M_2(K)\to K^2 : B\to (tr(B),det(B))$.

2, 求证： ψ 是满射 （提示：事实上可以猜出一类原像），并且把相似的矩阵映成同一个元素。

3, 求证：$\begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ 不相似，即 $\psi^{-1}(2c,c^2)$ 里面的元素并不两两相似。

下面我们假设 $K=\mathbb{F}_p$ **为 p 个元素的有限域。** 我们分类

4，给出 $M_2(\mathbb{F}_p)$ 和 $GL_2(\mathbb{F}_p)$ 中的元素个数 (能给出 $GL_n(\mathbb{F}_p)$ 更好)。

5，讨论 $\psi^{-1}(a,b)$ 中的元素个数 （提示：按 $x^2+ax+b=0$ 在 $\mathbb{F}_p$ 中解的情况分类）。

6， 对题目 3 中两个矩阵，分别求出和它交换的可逆矩阵的个数 （即 $Z(B)$）和与它相似的矩阵个数。

7，对于对角线两元素不相等的对角矩阵 B，求出 $Z(B)$ 的个数及与它相似的矩阵个数。

8，对于矩阵 $B=\begin{pmatrix}0 & -b\\ 1 & a\end{pmatrix}$, 求出 $Z(B)$ 的个数及与它相似的矩阵个数。

9, 尝试分类 $M_2(\mathbb{F}_p)$ 中的所有相似类（即相似关系下的等价类）。

9. Grassmann 空间

设 K 是一个域，V 为一个 m-维 K-向量空间。我们讨论 V 的所有 n 维子空间 $(n\le m)$ 构成的集合 $Gr(n,m)$。

我们考虑 n 行 m 列 的矩阵全体 $M_{n\times m}$，记 $N_{n\times m}$ 为其中秩为 n 的矩阵全体。这时 $GL_n(K)$ 左乘作用在 $M_{n\times m}(K)$ 并产生轨道：换句话说，我们称两个元素 $A_1,A_2\in M_{n\times m}$ 在同一个轨道中，如果存在 $B\in GL_n(K)$ 使得 $BA_1=A_2$。

1，求证：“在同一个轨道中” 是 $M_{n\times m}$ 上的等价关系，也是 $N_{n\times m}$ 上的等价关系。

记 $\mathcal{N}$ 为 $N_{n\times m}$ 对上述关系的等价类（称为轨道类），$\mathcal{M}$ 为 $M_{n\times m}$ 对上述关系的等价类。

2，求证：“取 n 维子空间的一组基并考虑由它们生成的矩阵” 这一操作诱导了一个 $Gr(n,m)$ 到 $\mathcal{N}$ 的双射。

我们考虑 $M_{n\times m}$ 中一类特殊的矩阵：$A=(a_{i,j})$ 满足 存在 n 个整数 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_n\le m$ 使得 $a_{i,j_i}=1$；对于任何 $j<j_i$, 有 $a_{i,j}=0$；对于任何 $i'\ne i$, 有 $a_{i',j_i}=0$。

3，求证：$N_{n\times m}$ 中任何一个轨道类中唯一存在一个上述矩阵。

4，问：$\mathcal{M}$ 是否和所有 维数 $\le n$ 的子空间 一一对应。

5，当 $K=\mathbb{F}_p$ 为 p 个元素的有限域时，请求出 $Gr(1,m)$, $Gr(m-1,m)$ 中的元素个数。

6， 当 $K=\mathbb{F}_p$ 时，请求出 $Gr(2,m)$ 中的元素个数。

10. 对称群和奇偶性

我们考虑n个元素对应的的对称群 $\mathfrak{S}_n$。

1，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中任何元素可以写成形如 $(i,i+1)$ 的元素的乘积。

2，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中任何元素可以写成 n-轮换 $\sigma:=(1,2,\cdots,n)$ 和对换 $\tau:=(1,2)$ 的有限乘积。

3，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中符号为1 的元素全体构成 $\mathfrak{S}_n$ 的正规子群。

4，在 $\mathfrak{S}_4$ 中， 请把 $(1,2)(3,4)$ 写成一些 3-轮换的乘积。

5，求证：$n \geq 3$ 时，$\mathfrak{S}_n$ 中任何符号为1 的元素都可以写成一些 3-轮换的乘积。

6，在九宫格的拼图游戏中，请证明图形 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & \end{bmatrix}$ 永远无法变成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \end{bmatrix}$，其中空格表示那里没数字（需要我解释什么是拼图吗？）。

11. 对称群和奇偶性

我们考虑n个元素对应的的对称群 $\mathfrak{S}_n$。

1，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中任何元素可以写成形如 $(i, i+1)$ 的元素的乘积。

2，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中任何元素可以写成 n-轮换 $\sigma := (1, 2, \cdots, n)$ 和对换 $\tau := (1, 2)$ 的有限乘积。

3，求证：$\mathfrak{S}_n$ 中符号为1 的元素全体构成 $\mathfrak{S}_n$ 的正规子群。

4，在 $\mathfrak{S}_4$ 中， 请把 $(1, 2)(3, 4)$ 写成一些 3-轮换的乘积。

5，求证：$n \geq 3$ 时，$\mathfrak{S}_n$ 中任何符号为1 的元素都可以写成一些 3-轮换的乘积。

6，在九宫格的拼图游戏中，请证明图形 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & \end{bmatrix}$ 永远无法变成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \end{bmatrix}$，其中空格表示那里没数字（需要我解释什么是拼图吗？）。

12. 行列式的连续性

下面我们证明行列式以及带参量的行列式在两种常见拓扑下是连续的。

0, (补充) 求证： $\mathbb{R}$ 上有限维向量空间的拓扑与基的选取无关。

1, 求证： $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto det(A)$ 是一个连续函数。

2, （带参数的行列式）我们考虑n阶方阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$。 如果我们把 x 当成变量，这时我们可以同样的定义 $det(xI_n - A)$，其中 I_n 为单位方阵。 求证：$M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$: 把矩阵 A 映成 $det(xI_n - A)$ 的n个系数 这一映射是连续的。

3, 求证：可逆矩阵在所有矩阵里构成开集。

4，考虑 $M_2(\mathbb{R})$，我们之前证明过，任何方阵 $A \in M_2(\mathbb{R})$ 满足方程 $x^2 - tr(A)x + det(A) = 0$. 求证：上述方程在 $\mathbb{C}$ 上有两个不同根的矩阵 构成 $M_2(\mathbb{R})$ 里面的开集。

事实上： $det(xI_n - A) = 0$ 在$\mathbb{C}$ 上有两两不同的n个根的矩阵构成 $M_n(\mathbb{R})$ 里面的开集。

5，当 $n = 3$时，求证上述结论成立。

注：CayleyHamilton定理说：任何域 K 上的n阶方阵$A \in M_n(K)$ 满足方程 $det(xI_n - A) = 0$. 下次再尝试证这个定理。

13. 特征多项式

设 K 是一个域。我们考虑n阶方阵 $A \in M_n(K)$。它的特征多项式定义为 $det(xI_n - A)$, 是一个关于变元x的多项式，其中 I_n 为单位方阵（和上次一样）。

1， 求证：$\lambda \in K$ 是 $det(xI_n - A) = 0$ 的一个根 当且仅当 存在非零列向量 $X \in K^n$ 使得 $AX = \lambda X$ （λ 被称为特征值，X 被称为特征向量）.

2，当题目1成立时，求证：λ^l 是 $det(xI_n - A^l) = 0$ 的一个根, 其中 l 是一个正整数， A^l 是 l 个矩阵 A 相乘。

3，对于一个多项式 $f(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, 记矩阵 $B_f := (b_{i,j})$ 满足 $b_{i,i-1} = 1$, $b_{i,n} = -a_{n-i+1}$. 求证：B_f 的特征多项式是 $f(x)$.

4，对于题目3，求证：若 $x_1, \cdots, x_n$ 为 $f(x) = 0$ 的全部根（记重数），则 $x_1^l, \cdots, x_n^l$ 为 $det(xI_n - B_f^l) = 0$ 的全部根（记重数） 并且 $\sum_i x_i^l$ 可以表达为 $a_1, \cdots, a_n$ 的某个整系数多项式。

注：事实上我们可以考虑n元多项式环 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 和它的分式域 $K(x_1, \cdots, x_n)$, 然后 a_i 均为 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式，上面3、4题就将得到$K(x_1, \cdots, x_n)$上的一系列恒等式，可以验证它们也是$K[x_1, \cdots, x_n]$上的恒等式，然后再对 $x_1, \cdots, x_n$ 赋值即可。

14. 范得蒙行列式与判别式

设 K 是一个域，设 $f(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in K[x]$。 我们期待证明：存在一个关于 $a_1, \cdots, a_n$ 的多项式 $D(a_1, \cdots, a_n)$ 使得 $D(a_1, \cdots, a_n) = 0$ 当且仅当 $f(x) = 0$ 有重根。 我们将给出两种证明：本题的范得蒙行列式方法和下一题的对称多项式方法。

设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 $f(x) = 0$ 的全部根（记重数），考虑范得蒙矩阵

$$M := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1, 计算出 $det(M)$.

2，求证：矩阵 ${}^tMM$ 的每一项都可以表达为 $a_1, \cdots, a_n$ 的某个多项式（提示：使用上一大题的最后一问）。

3，证明我们期待的结论。

15. 对称多项式与判别式

我们考虑n元多项式环 $K[x_1, \cdots, x_n]$. 上面有n元对称群 $\mathfrak{S}$ 的作用：对任何 $\sigma \in \mathfrak{S}$, 任何 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 有 $\sigma(f)(x_1, \cdots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \cdots x_{\sigma(n)})$. 多项式 f 被称为对称多项式，如果 $\sigma(f) = f$ 对任何 $\sigma \in \mathfrak{S}$ 成立。

1，对任何多项式 f, 定义 $S(f) := \{\sigma \in \mathfrak{S} : \sigma(f) = f\}$, 则 $S(f)$ 是 $\mathfrak{S}$ 的子群且 $\Phi(f) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}/S(f)} \sigma(f)$ 为对称多项式。

2，验证 $a_i := \Phi(x_1 \cdots x_i)$ 为维达定理中的各项。

定义 $\chi(x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}) := N^n l_1 + N^{n-1} l_2 + \cdots + 1 \cdot n$, 其中$N = \sum_i l_i$. 对于多项式 f, 定义 $\chi(f)$ 为 f 的所有单项中 χ 最大的那个。

3， 对于一个齐次对称多项式 f (即各单项次数都相等)， 设 f 的所有单项中 χ 最大的那个为 $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ （齐次保证这个单项唯一且对称保证 $l_1 \geq \cdots \geq l_n$）. 求

证：$g := f - \prod_i a_i^{l_i - l_{i+1}}$ (其中$l_{n+1} = 0$) 也是齐次对称多项式且 $deg(f) = deg(g)$, $\chi(g) < \chi(f)$ （或者$g = 0$）.

4， 求证：任何对称多项式 都 可以表达为 $a_1, \cdots, a_n$ 的某个多项式。

5，证明上一个大题中我们期待的结论。

16. 零散的例子

1，考虑 $\mathbb{R}$ 上形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的矩阵全体。求证：这些元素全体构成 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个子环，且同构于 $\mathbb{C}$.

2, (四元数) 考虑 $\mathbb{C}$ 上形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$的矩阵全体（即作 D ）, 其中 $\bar{a}$ 为 a 的复共轭。 求证：D 是$M_2(\mathbb{C})$ 的一个子环。

3， 求证题目2里面，D 是非交换的，且任何非0元素都可逆。

设 K 是一个域，特殊线性群 $SL_n(K)$ 定义为：

$$SL_n(K) := \{A \in GL_n(K) : det(A) = 1\}.$$

显然，$SL_n(K)$是$GL_n(K)$的子群。 当$K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$时，我们研究$SL_n(K)$ 的换位子群。

下面先定义换位子群，并回顾拓扑群的性质（若已经讲过就直接跳过）。

17. 群的换位子群

设G是一个群。G 的换位子群$[G, G]$是由所有 $aba^{-1}b^{-1}$ 生成的子群，其中$a, b \in G$。 注意：生成的子群指 $[G, G]$ 里面的元素都能写成有限个形如$aba^{-1}b^{-1}$的元素的乘积。

1， 求证： $[G, G]$ 是G 的正规子群且商群$G/[G, G]$是交换群。

2，求证：对于任何正规子群$H \subset G$，如果G/H是交换群，那么$[G, G] \subset H$.

18. 拓扑群的子群

设 G 是一个拓扑群，$H \subset G$ 是一个子群。我们讨论H的拓扑性质。 求证：

1, H在G中的闭包也是G的子群。

2, 如果H是G的开集（成为开子群），那么H也是G的闭集（称为闭子群）。

3, 如果H包含G的一个开集, 那么H是G的开集。

19. $SL_n(\mathbb{C})$和$SL_n(\mathbb{R})$的换位子群

1, 证明：$SL_n(\mathbb{C})$和$SL_n(\mathbb{R})$ 中的元素都可以通过 "把一行加入另一行的倍数"这一类初等变换变成单位矩阵。

2, 证明：$SL_n(\mathbb{C})$ 和 $SL_n(\mathbb{R})$是连通的，也是道路连通的。

3，计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

4，求证：$SL_n(\mathbb{C})$中的所有可对角化的矩阵都属于$[SL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})]$。

回顾，我们之前证明了：存在一个整系数n-元多项式$P(y_1,\cdots,y_n)$, 使得一个多项式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 有重根当且仅当$P(a_1,\cdots,a_n)=0$.

5，求证：$[SL_n(\mathbb{C}),SL_n(\mathbb{C})]=SL_n(\mathbb{C})$ (提示：用拓扑性质).

注：一般代数闭域上 上述性质也成立，可用Zariski拓扑去证。

6, 求证：$[SL_n(\mathbb{R}),SL_n(\mathbb{R})]$ 包含$SL_n(\mathbb{R})$的一个开集。并由此证明$[SL_n(\mathbb{R}),SL_n(\mathbb{R})]=SL_n(\mathbb{R})$

20. 多项式的结式

对于$K[x]$中的多项式$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m$ 和 $g(x)=b_0x^n+\cdots+b_n$. 定义 f 和 g 的结式为下面 $m+n$阶方阵的行列式:

$$R(f,g):=det\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_m\\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}.$$

下证 f和g 互素当且仅当 $R(f,g)\neq 0$.

1, 求证：$f(x)$ 和 $g(x)$ 有次数大于等于1的公因式 当且仅当 存在次数小于n的非零多项式 $u(x)$ 和次数小于m的非零多项式$v(x)$ 使得

$$f(x)u(x)=g(x)v(x). \tag{20.0.1}$$

2, 设 $u(x)=y_1x^{n-1}+\cdots+y_n$, $v(x)=z_1x^{m-1}+\cdots+z_m$. 我们期待用待定系数的方法求出 y_i,z_j。求证：(23.0.1) 中 $u(x),v(x)$ 存在 当且仅当 $R(f,g)=0$。

3，当域 K 是代数闭域时，求证：f 和 g 有公共根当且仅当 $R(f,g)=0$; 多项式 f 有重根当且仅当 $R(f,f')=0$, 其中f' 是 f 的导数。

21. 回顾之前证过的

1，设G是一个群。G 的换位子群$[G,G]$是由所有 $aba^{-1}b^{-1}$ 生成的子群，其中$a,b\in G$。 注意：生成的子群指 $[G,G]$ 里面的元素都能写成有限个形如$aba^{-1}b^{-1}$的元素的乘积。 我们上次证明了:

1），$[G,G]$ 是G 的正规子群且商群$G/[G,G]$是交换群。

2），对于任何正规子群$H\subset G$，如果G/H是交换群，那么$[G,G]\subset H$.

2，设 G 是一个拓扑群，$H\subset G$ 是一个子群。我们讨论H的拓扑性质。 我们证明了

1），H在G中的闭包也是G的子群。

2），如果H是G的开集（成为开子群），那么H也是G的闭集（称为闭子群）。

3）, 如果H包含G的一个开集, 那么H是G的开集。

3，设 K 是一个域，特殊线性群 $SL_n(K)$ 定义为： $SL_n(K) := \{A \in GL_n(K) : det(A) = 1\}$. 关于 $SL_n(\mathbb{C})$和$SL_n(\mathbb{R})$，我们上次证明了：

1），证明：$SL_n(\mathbb{C})$和$SL_n(\mathbb{R})$ 中的元素都可以通过 "把一行加入另一行的倍数"这一类初等变换变成单位矩阵。

2）, 证明：$SL_n(\mathbb{C})$ 和 $SL_n(\mathbb{R})$是连通的，也是道路连通的。

4，我们有映射：$\chi: \ M_n(K) \to K^n$ 把矩阵A映到它的特征多项式 $\chi_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的系数 $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$.

1），当K是 $\mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$ 时，χ 是连续的满射。

2），当K 是代数闭域时，存在一个整系数n-元多项式$P(y_1, \cdots, y_n)$, 使得一个多项式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 有重根当且仅当$P(a_1, \cdots, a_n) = 0$. (这个我们给过对称多项式的证明、范德蒙行列式的证明和结式的证明 三种证明)。

22. $SL_n(\mathbb{C})$和$SL_n(\mathbb{R})$的换位子群

1，（已做完）验证 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

2，求证：$SL_n(\mathbb{C})$中的所有可对角化的矩阵都属于$[SL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})]$。

3，求证：$[SL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})] = SL_n(\mathbb{C})$ (提示：用拓扑性质).

注：一般代数闭域上 上述性质也成立，可用Zariski拓扑去证。

4，求证：实数域$\mathbb{R}$上的多项式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$有n个两两不同的实根的全体 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 构成 $\mathbb{R}^n$里面的开集。

5, 求证：$[SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R})]$ 包含$SL_n(\mathbb{R})$的一个开集。并由此证明$[SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R})] = SL_n(\mathbb{R})$

作为推论，任何$SL_n(\mathbb{R})$ 和 $SL_n(\mathbb{C})$ 到交换群的群同态都是0映射。

6，$GL_n(\mathbb{R})$ 和 $GL_n(\mathbb{C})$ 的换位子群是谁?

23. Hamilton-Cayley 定理的其他证明：多项式系数比较

设 R 是一个含幺交换环，我们考虑 R 上的n阶方阵全体 $M_n(R)$，即 $A \in M_n(R)$ 为 n^2 个元素 $a_{i,j}$ 满足 $a_{i,j} \in R$, 其中 $1 \le i, j \le n$。 记 I_n 为n阶单位矩阵。

1，请（模仿 R 是域的情况）在 $M_n(R)$ 上定义加法、乘法，并证明这时 $M_n(R)$ 是一个环。

2，请对任何 $A \in M_n(R)$ 上定义取值于 R 的行列式 $det(A)$ 和余矩阵 A^*, 并证明 $A^* \cdot A = det(A)I_n$。

3，设 K 是一个域。取 $R := K[x]$。这时候 $M_n(K) \subset M_n(R)$ 恰为各项均在 K 里面的矩阵全体构成的子环（这个太简单就不让你们写了）。 求证：任何 $A \in M_n(R)$ 可以唯一的写成有限和 $A = \sum_l x^l A_l$, 其中 $A_l \in M_n(K)$ 且 x^l 相当于 $x^l I_n$， 即对角线为x^l的对角矩阵（你也可以看成数乘）。

4，在上题中，对于任何矩阵 $B \in M_n(K)$, 求证：存在矩阵 $C = \sum_{l=0}^{n-1} x^l C_l \in M_n(R)$ 满足 $C_l \in M_n(K)$, 使得

$$C \cdot (xI_n - B) = \chi_B(x) I_n, \tag{23.0.1}$$

其中 $\chi_B(x) := det(xI_n - B) \in K[X]$ 为矩阵 B 的特征多项式 。

5，（方法一）请通过比较公式 (23.0.1) 两边关于 x^l 的各项系数证明 $\chi_B(B) = 0$, 即把矩阵 B 代入到它的特征多项式 $\chi_B(x)$ 后等于0.

24. 模的定义

一个含幺环S 的(左)模是一个阿贝尔群M和一个映射 $\rho : S \times M \to M$ （称为S在M上的作用） 满足 （i）$\rho(0, m) = 0, \rho(1, m) = m$； （ii）$\rho$是双线性，即 $\rho(s_1 + s_2, m_1 + m_2) = \rho(s_1, m_1) + \rho(s_2, m_1) + \rho(s_1, m_2) + \rho(s_2, m_2)$； （iii）结合性 $\rho(s_2, \rho(s_1, m)) = \rho(s_2 s_1, m)$.

我们不妨直接记 $s \cdot m := \rho(s, m)$, 以及 $x : M \to M : m \mapsto x \cdot m$.

6，设 K 是一个域。取 V 一个m维K-向量空间，$A \in M_m(K)$。验证: V和数乘构成一个K 模；V和 $f(x) \cdot v := f(A) \cdot v$ 构成一个$K[x]$-模。

这时候 $x : V \to V$ 是一个线性映射。

下面我们通过3种等价的表达方法构造 $M_n(K[x])$ 在 V^n 上的作用，使得 V^n 是一个 $M_n(K[x])$-模。然后分别用这三种方法给出Hamilton-Cayley 定理的证明。注意，下面三个表达事实上完全等价。

25. 矩阵表达法

在题目6的条件下，我们考虑向量空间 $V^n = K^{mn}$。 作为 mn-维向量空间，我们可以把 V^n 和 $M_{m\times n}(K)$ 等同起来，其中 $M_{m\times n}(K)$ 是全部的m 行 n 列矩阵全体。上述等同就是一个K-向量空间同构: $V^n \to M_{m\times n}(K) : (v_1, \cdots v_n) \to [v_1|v_2 \cdots v_n]$, 即把n个向量（看作列向量）映到他们生成的矩阵。 下面就直接定义$M_n(K[x])$在 $M_{m\times n}(K)$ 上的作用。

7， 定义$M_n(K[x])$ 在 $M_{m\times n}(K)$ 上的作用为 ：$(\sum_l x^l B_l) \cdot M := \sum_l (AMB_l^t)$, 其中 B_l^t是B_l 的转置。验证上述作用满足模的定义，即使得 $M_{m\times n}(K)$ 成为$M_n(K[x])$-模。 （注意：据题目3，本题中我们对$M_n(K[x])$中的元素都用 $\sum_l x^l B_l$ 这种表达）。

8，当 $m = n$时，验证 $(xI_n - A^t) \cdot I_{n\times n} = 0$, 其中$I_{n\times n}$ 是 $M_{n\times n}(K)$ 中的单位矩阵，为了和$M_n(K[x])$中的单位区别，所以改了一下符号。

9，由由 (23.0.1) 验证：$(\chi_A(x) I_n) \cdot I_{n\times n} = (C(xI_n - A)) \cdot I_{n\times n} = 0$, 从而根据定义验证 $\chi_A(A) = 0$. (注意 $\chi_{A^t} = \chi_A$)。

26. 直和表达法

在题目6的条件下，用直和表达$M_n(K[x])$ 在 V^n上的作用。

V^n 中的元素都写成列向量 $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$，且$M_n(K[x])$中元素写成 $\begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{pmatrix}$.

7’，定义$M_n(K[x])$ 在 V^n 上的下述作用并验证这时 V^n 是一个 $M_n(K[x])$-模：

$$\begin{pmatrix} f_{1,1}(x) & \cdots & f_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1}(x) & \cdots & f_{n,n}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_j f_{1,j}(x) \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_j f_{n,j}(x) \cdot v_j \end{pmatrix},$$

其中：$f_{i,j}(x) \cdot v_j$ 由 题目6中定义。

取 V 的一组基 $e_1, \cdots, e_m$ 使得线性映射 $x : V \to V$ 在这组基下的表达为矩阵 A。 定义V^m中的元素 $e_i \otimes g_j$ 为 满足 $v_j = e_i$ 且对于$l \neq j$ 有 $v_l = 0$ 的元素 $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$。 如果 $m = n$, 这时 $\sum_i e_i \otimes g_i$ 为 $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$. 注意，这里 $e_i \otimes g_j$ 看成一个整体即可，它在后续的张量积里面才有具体的含义。

8’，假设 $m = n$, 验证：$(xI_n - A) \cdot (\sum_i e_i \otimes g_i) = 0$ （可能A要换成A^t, 我没验证）。

9’，由 (23.0.1) 验证：$(\chi_A(x)I_n) \cdot (\sum_i e_i \otimes g_i) = (C(xI_n - A)) \cdot (\sum_i e_i \otimes g_i) = 0$, 从而根据定义验证 $(\chi_A(x)I_n) \cdot (e_i \otimes g_i)$, 从而在$V$ 里面 $\chi_A(x) \cdot e_i = 0$ 对任何 i 都成了。作为推论，$\chi_A(A) = 0$。

27. 张量表达法

在题目6的条件下，用张量积表达$M_n(K[x])$ 在 V^n上的作用（下面会把V^n看作$V \otimes K^n$，见后面的定义）。 一般环上的模的张量积的定义比较复杂，但域上的向量空间有特别的性质：有一组基。所以我们可以简单的定义向量空间的张量积。

一个m维向量空间 $V = K^m$ 和一个n维向量空间$W = K^n$, 我们可以直接定义 $W \otimes V := K^{mn}$（模的张量积不能这么定义）。 设$\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ 为 V 的一组基，$\{g_j\}_{1 \leq j \leq n}$ 为 W 的一组基。这样二元组(e_i, g_j) 恰好有mn个，我们不妨直接把$V \otimes W = K^{mn}$的一组基标记为$e_i \otimes g_j$（这里元素$e_i \otimes g_j$ 暂时没有任何特殊含义，反正标记有限维向量空间的基只需要元素个数一样就行）。 这样$V \times W$ 里面的元素都可以写成 $\sum_{i,j} a_{i,j}(e_i \otimes g_j)$。

现在对于向量 $v \in V$，$w \in W$, 如果 $v = \sum_i a_i e_i, w = \sum_j b_j g_j$ （由基的定义，a_i, b_j唯一），我们定义 $v \otimes w := \sum_i \sum_j a_i b_j (e_i \otimes g_j)$ （由a_i, b_j的唯一性，这里是良定义的）。 根据这个定义，可以验证 $V \times W \to V \otimes W : (v, w) \mapsto v \otimes w$ 是双线性映射。

对于线性映射$\phi : V \to V, \psi : W \to W$, 我们定义映射$\phi \otimes \psi : V \otimes W \to V \otimes W : e_i \otimes g_j \mapsto \phi(e_i) \otimes \psi(g_j)$ (反正向量空间的线性映射由基的像唯一决定)。

上述定义有下面两个好的性质：首先，对于任何 $v = \sum_i a_i e_i$ 和 $w = \sum_j b_j g_j$, 可以验证

$$(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \sum_i \sum_j a_i b_j (\phi(e_i) \otimes \psi(g_j)) = \phi(\sum_i a_i e_i) \otimes \psi(\sum_j b_j g_j) = \phi(v) \otimes \psi(w),$$

其中，第一个和第三个等号是定义，而第二个等号是根据上述双线性验证的。 另一个性质是：若ϕ对应的矩阵是A, ψ 对应的矩阵是 B, 那么在基 $(e_1 \otimes g_1, e_1 \otimes_2, \cdots, e_1 \otimes g_n, e_2 \otimes g_1, \cdots, e_m \otimes g_n)$ 下 $\phi \otimes \psi$ 的矩阵是 $A \otimes B$。

有一个好玩的例子：$V^* := L(V, K)$, $W^* := L(W, K)$, 那么$V^* \otimes W^*$ 正好是 $V \times W$ 上的双线性函数全体，这时 $f \in V^*, g \in W^*$ 时, $f \otimes g : (v, w) \mapsto f(v) \cdot g(w)$ (乘积是域K中的乘积)。

7"，定义 $M_n(K[x])$ 在 $V^n = V \otimes K^n$ 上的作用：把$x^l B_l$ 在$V \otimes K^n$ 上的作用定义成 $x^l \otimes \psi_{B_l}$, 其中ψ_{B_l} 是B_l 对应的线性映射$K^n \to K^n$, $x : V \to V$为题目6里面的映射。 那么$\sum_l x^l B_l$ 就定义为$\sum_i (x^l \otimes \psi_{B_l})$。 验证这个作用使得$V^n$是一个$M_n(K[x])$-模。

取V的基 $\{e_i\}_{1 \le i \le m}$ 和 K^n的基 $\{g_j\}_{1 \le j \le n}$.

8" 当$m = n$ 时，验证: $(xI_n - A^t) \cdot (\sum_{i=1}^n e_i \otimes g_i) = 0$（我没验证$A^t$是否应该是$A$）。

9" 由(23.0.1), 验证：$(\chi_A(x) I_n) \cdot (\sum_i e_i \otimes g_i) = (C(xI_n - A)) \cdot (\sum_i e_i \otimes g_i) = 0$。根据定义 $\sum_i ((\chi_A(x)(e_i)) \otimes g_i) = 0$。又因 $V \otimes K^n = V^n$, 从而 $\chi_A(x)(e_i) = 0$ 对任何i成立。于是$\chi_A(x) : V \to V$ 是零映射，即$\chi_A(A) = 0$。 并由此证明Hamilton-Cayley 定理。

28. Bruhat分解

设 K 是一个域，我们考虑 $GL_n(K)$ 和 对称群 $\mathfrak{S}_n$。 设$B(K)$ 是 $GL_n(K)$ 中的上三角矩阵全体。 对于 $\sigma \in \mathfrak{S}$, 定义 I_σ 为 $a_{i,\sigma(i)} = 1$ 其他全为零的矩阵。

1， 验证$B(K)$ 是 $GL_n(K)$ 的子群，上述 I_σ 全体构成了同构于$\mathfrak{S}_n$ 的 $GL_n(K)$ 的子群。

2，对任何 $A \in GL_n(K)$, 存在 $B_1, B_2 \in B(K)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $B_1 A B_2 = I_\sigma$.

3, 求证：上述 σ 由A 唯一决定，即 $GL_n(K) = \sqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B(K) I_\sigma B(K)$, 其中 $\sqcup$ 指无交并。

29. 回顾：同时对角化

我们考虑域K上的一族方阵 $A_i \in M_n(K)$， $i \in I$。 假设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 两两可交换。

1， 固定一个 $i \in I$, 对于A_i 的一个特征子空间 $V \subset K^n$, 求证: $A_j \cdot V \subset V$（即V在A_j作用下不变）, 对任何$j \in I$。

2，假设所有的A_i都可以对角化，求证：存在可逆矩阵$P \in M_n(K)$ 使得所有的PA_iP^{-1} 都是对角矩阵。提示：利用某个A_i的特征空间分解 $K^n = \oplus_r V_r$，把问题约化到 V_r上。

3, 求证：在题目2的条件下， $A_i + A_j$ 和 $A_i A_j$ 也都可以对角化 (别忘了A_i, A_j交换)。

30. Jordan分解（一个更加抽象的证明）

我们考虑复系数矩阵。 回顾：一个方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是幂零的（nilpotent），如果存在整数n使得 $A^n = 0$。 一个方阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 是unipotent，如果$I_n - A$ 是幂零的。

1，假设$A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 满足$AB = BA$, 求证：(i) 如果A, B 是幂零的，那么$A+B$, AB也是幂零的。(ii)，如果A, B 是unipotent, 那么AB也是unipotent.

2, 求证：(i) unipotent的方阵是可逆的；(ii) 可对角化的幂零方阵是0。

3，对于矩阵$A \in M_n(\mathbb{C})$和多项式$f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 求证：如果λ 是A 的特征值，那么$f(\lambda)$ 是$f(A)$的特征值。

固定矩阵$A \in M_n(\mathbb{C})$, 考虑它的特征多项式$\chi_A(x) = \prod_i (x-\lambda_i)^{n_i}$, 其中$\lambda_i$两两不同。取一个多项式$P(x) \in \mathbb{C}[x]$ 满足：$P(x) \equiv 0 (mod\ x)$, $P(x) \equiv \lambda_i (mod\ (x-\lambda_i)^{n_i})$（中国剩余定理保证能取到）。

4，求证: $A_s := P(A)$ 满足：(i), $Ker((A-\lambda_i I_n)^{n_i}) = Ker(A_s - \lambda_i I_n)$; (ii)，$A_s$ 可以对角化；(iii), $A_n := A - A_s$ 是幂零的。

定义：A 的加性*Jordan*分解为分解 $A = A_s + A_n$ 且满足 (i) A_s 是可对角化的；(ii) A_n 是幂零的；(iii), A_s, A_n 可交换。

5，利用题目1、2 、4 和上一大题的3证明加性Jordan分解的存在唯一性。

定义：一个可逆方阵$A \in GL_n(\mathbb{C})$ 的乘性*Jordan*分解是指分解 $A = A_s A_u$ 满足 (i) A_s 是可对角化的；(ii) A_u 是unipotent；(iii), A_s, A_u 可交换。

6，求证：如果A可逆，那么 A_s可逆 且 $A_u := I_n + A_s^{-1} A_n$ 和A_s 给出了 A 的乘性Jordan分解。

7，证明A 的乘性Jordan分解唯一。

31. Bruhat分解

设 K 是一个域，我们考虑 $GL_n(K)$ 和 对称群 $\mathfrak{S}_n$。设$B(K)$ 是 $GL_n(K)$ 中的上三角矩阵全体（称为GL_n的Borel子群）。对于 $\sigma \in \mathfrak{S}$, 定义 I_σ 为 $a_{i,\sigma(i)} = 1$ 其他全为零的矩阵。

1， 验证$B(K)$ 是 $GL_n(K)$ 的子群，上述 I_σ 全体构成了同构于$\mathfrak{S}_n$ 的 $GL_n(K)$ 的子群。

2，对任何 $A \in GL_n(K)$, 存在 $B_1, B_2 \in B(K)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 使得 $B_1 A B_2 = I_\sigma$.

3，（Bruhat分解）求证：上述σ 由A 唯一决定，即 $GL_n(K) = \sqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B(K) I_\sigma B(K)$, 其中 $\sqcup$ 指无交并。

记$W_\sigma := B(K) I_\sigma B(K)$.

4，求证：当$K = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$时，W_σ的拓扑闭包是一些 $W_{\sigma'}$ 的并，即存在一个子集 $S_\sigma \subset \mathfrak{S}_n$ 使得 $\overline{W_\sigma} = \sqcup_{\sigma' \in S_\sigma} W_{\sigma'}$

当$K = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$时，事实上 W_σ 在$GL_n(K)$ 里面是局部闭子集，即 W_σ 在 闭包 $\overline{W_\sigma}$ 里面是开集（我还没想到一个简单证明，我的证明要用到多元函数的隐函数定理或者多元代数函数的性质）。这样上述分解给出一个拓扑上看起来很漂亮的分解。

5，当$K = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$时，并且 $n = 2$ 时，写出上述Bruhat分解的具体长相。

当$K = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$时，Borel子群有一个性质：陪集类 $GL_n(K)/B(K)$ 是紧集（作为$GL_n(K)$的商空间）。

6，当$K = \mathbb{R}, n = 2$时, 证明上述结论。

32. 特征多项式的性质

设K 是域，$A, B \in M_n(K)$. 考虑 χ_{AB} 和 χ_{BA}
1，求证：若A 可逆，则 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$。
2，求证：若 $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $1 \leq r \leq n$, 那么 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$。
3，结合1、2，求证：$\chi_{AB} = \chi_{BA}$ 成立。

33. 有限阶元

1， 对于$A \in GL_n(\mathbb{C})$，假设存在正整数m 使得 $A^m = I_n$, 求证：A一定可以对角化。
2，对于正整数m，求证集合 $\{A \in GL_n(\mathbb{C}) |\ A^m = I_n\}$ 里面的相似关系下的等价类有限。
3，对于特征p的代数闭域上的矩阵，结论1是否成立?

34. 特征多项式的性质

设K 是域，$A, B \in M_n(K)$. 考虑 χ_{AB} 和 χ_{BA}
1，求证：若A 可逆，则 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$。
2，求证：若 $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $1 \leq r \leq n$, 那么 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$。
3，结合1、2，求证：$\chi_{AB} = \chi_{BA}$ 成立。

35. 有限阶元

1， 对于$A \in GL_n(\mathbb{C})$，假设存在正整数m 使得 $A^m = I_n$, 求证：A一定可以对角化。
2，对于正整数m，求证集合 $\{A \in GL_n(\mathbb{C}) |\ A^m = I_n\}$ 里面的相似关系下的等价类有限。
3，对于特征p的代数闭域上的矩阵，结论1是否成立?

36. 数量积的例子：矩阵的迹

我们考虑空间 $E = M_n(\mathbb{R})$. 求证 $\psi : (A, B) \mapsto tr({}^t AB)$ 是 E 上的数量积，并给出 E 的一族规范正交基。

37. 数量积的例子：多项式的积分

取 $E = \mathbb{R}[x]$ 为实数域上的多项式,
1, 求证： $\psi : (f(x), g(x)) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$ 是 E 上的数量积。
取 $E_n := \mathbb{R}[x]_n$ 为次数小于等于n的多项式。
2，当$n = 1, 2, 3$ 时，给出 E_n 的一族规范正交基。
3，写出 $E_2 \to E_1$ 的正交投影， 和 E_1 在 E_2 里面的正交补
4，求出 x^2 到 E_1 的距离。

38. 正交补和（反）对称变换

设 V 是一个$\mathbb{R}$上的预希尔伯特空间, 内积记作 $(-|-)$。

1，对于两个子空间 $V_1, V_2 \subset V$，（i）求证：$V_1^\perp \cap V_2^\perp = (V_1+V_2)^\perp$；（ii）在 V_1, V_2 维数有限时，求证$V_1^\perp + V_2^\perp = (V_1 \cap V_2)^\perp$；（iii）一般情况下给出 (ii) 的反例。

一个线性变换 $\psi \in \mathcal{L}(V)$ 是对称的，如果 $(\psi(a)|b) = (a|\psi(b))$ 对任何$a, b \in V$ 成立。一个线性变换 $\psi \in \mathcal{L}(V)$ 是反对称的，如果 $(\psi(a)|b) = -(a|\psi(b))$ 对任何$a, b \in V$ 成立。

2，如果 ψ 是对称的（或者 反对称的）且 V_1 是 ψ-不变子空间 (即 $\psi(V_1) \subset V_1$), 求证: $V_1^\perp$ 也是 ψ-不变子空间。

3，如果 ψ 是对称的，ϕ 是反对称的，且 ψ, ϕ 交换， 求证：$(\psi(a)|\phi(a)) = 0$ 对任何 $a \in V$。

4, 当V 是Euclide空间时，求证：ψ 是对称的（或者 反对称的），当且仅当在某一组标准正交基下的矩阵是对称的（或者 反对称的）。当然，作为推论，这时在任何一组标准正交基下的矩阵都有同样的性质。

39. 实规范方阵

我们考虑 $M_n(\mathbb{R})$。 矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 被称为实规范方阵，如果 $AA^t = A^tA$.

1, (回顾) 求证：对任何 $A \in M_n(\mathbb{R})$， 有 $A = 0$ 当且仅当 $tr(AA^t) = 0$.

2，应用1，求证：对于实规范方阵 A, 如果 $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & K \end{pmatrix}$, 则 $N = 0$ 且 M, K 为实规范方阵。

3，验证：实对称矩阵、实反对称矩阵、正交矩阵 （即满足$AA^t = I_n$的矩阵）均为实规范方阵。

4，求证：矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 为实规范方阵 当且仅当存在对称矩阵B、反对称矩阵 C 满足 $A = B + C$ 且 B, C 可交换。

40. 有限群的不变内积

设 G 是一个有限群，V 是一个有限维$\mathbb{R}$-向量空间，$\rho : G \to GL(V)$ 为一个群同态。这时称(V, ρ) 为 G 的一个有限维表示。 空间 V 上的一个 G 不变的内积是指一个内积 $(-|-)$ 使得 $(x|y) = (\rho(g) \cdot x \mid \rho(g) \cdot y)$ 对任何$g \in G$, $x, y \in V$ 都成立。

1, 求证：G 不变的内积一定存在。

2，设 V_1 是一个 G-不变子空间 (即 $\rho(g)V_1 \subset V_1$ 对任何 $g \in G$ 成立), 求证：对于一个G不变的内积, 有 $V_1^\perp$ 也是G-不变的。

如果 V 上不存在非平凡的G-不变子空间，则称 V 是不可约的G-表示。

3，猜测两个G-表示的直和的定义 :-）。

4，证明：任何一个G 的有限维表示都是不可约的G-表示的直和。

41. $l^2(\mathbb{R})$

集合 $l^2(\mathbb{R})$ 为满足 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ 收敛 的实数序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体。

1，求证：$l^2(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的子向量空间。

2, 求证：对于 $(a_n),(b_n)\in l^2(\mathbb{R})$，求和 $\sum_{i=0}^{+\infty} a_nb_n$ 收敛。

3，求证： $((a_n)\mid(b_n)) := \sum_{i=0}^{+\infty} a_nb_n$ 是 $l^2(\mathbb{R})$ 上一个数量内积。

4，取 $e_k\in l^2(\mathbb{R})$ 为第k项是1，其余是0的元素。那么 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是否是规范正交的？否构成 $l^2(\mathbb{R})$ 的一组基？是否是规范正交完全序列？

42. $l^2(\mathbb{R})$

集合 $l^2(\mathbb{R})$ 为满足 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ 收敛 的实数序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 全体。

1，求证：$l^2(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 的子向量空间。

2, 求证：对于 $(a_n),(b_n)\in l^2(\mathbb{R})$，求和 $\sum_{i=0}^{+\infty} a_nb_n$ 收敛。

3，求证： $((a_n)\mid(b_n)) := \sum_{i=0}^{+\infty} a_nb_n$ 是 $l^2(\mathbb{R})$ 上一个数量内积。

4，取 $e_k\in l^2(\mathbb{R})$ 为第k项是1，其余是0的元素。那么 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是否是规范正交的？否构成 $l^2(\mathbb{R})$ 的一组基？是否是规范正交完全序列？

5，求证：存在线性子空间$V_1,V_2\subset l^2(\mathbb{R})$ 使得 $V_1^{\perp}+V_2^{\perp}=(V_1\cap V_2)^{\perp}$ 不成立。

6, 请问 $l^2(\mathbb{R})$ 中的单位闭球 $\{(a_n)\in l^2(\mathbb{R})\mid ||(a_n)||\le 1\}$ 是否是紧集？给出证明。

43. 有限群的不变内积

设 G 是一个有限群，V 是一个有限维$\mathbb{R}$-向量空间，$\rho: G\to GL(V)$ 为一个群同态。这时称(V,ρ) 为 G 的一个有限维表示。 空间 V 上的一个 G 不变的内积是指一个内积 $(-|-)$ 使得 $(x|y)=(\rho(g)\cdot x\mid \rho(g)\cdot y)$ 对任何$g\in G$, $x,y\in V$ 都成立。

1, 求证：G 不变的内积一定存在。

2，设 V_1 是一个 G-不变子空间 (即 $\rho(g)V_1\subset V_1$ 对任何 $g\in G$ 成立), 求证：对于一个G不变的内积, 有 $V_1^{\perp}$ 也是G-不变的。

如果 V 上不存在非平凡的G-不变子空间，则称 V 是不可约的有限维G-表示。

对于两个G 的一个有限维表示 $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$, 我们定义：

（i）它俩之间的G-映射为 $f\in\mathcal{L}(V_1,V_2)$ 使得 $f(\rho_1(g)v)=\rho_2(g)f(v)$ 对任何$g\in G, v\in V_1$ 都成立。

（ii）它俩的直和为：$(V_1\oplus V_2,\rho_{1\oplus2})$, 其中 $\rho_{1\oplus2}$ 为 $G\xrightarrow{\rho_1,\rho_2} GL(V_1)\oplus GL(V_2)\to GL(V_1\oplus V_2)$.

3, 写出上述定义中的$\rho_{1\oplus2}$ 的具体表达 :-）。

4，证明：任何一个G 的有限维表示都是不可约的G-表示的直和。

5，证明：不可约的G-表示之间的G-映射只有0映射和同构。

44. 周期函数的规范正交基

设 E 为$\mathbb{R}$ 上满足 $f(x+2\pi)=f(x)$ 的连续函数全体 （即 2π 周期函数全体）。

1， 求证：$(f|g) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ 是一个数量积。

2，设 $f_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_k := cos(kx)$ 对于 $k > 0$, $f_k(x) := sin(-kx)$ 对于 $k < 0$. 求证：$(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是规范正交族。

注：事实上 $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是规范正交完全序列。

45. 三点共线

1，设E 是一个2维仿射空间，我们考虑E中的三个点$M_i := (x_i, y_i)$, 其中 $i = 1,2,3$. 求证：三点共线当且仅当 $det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix} = 0$.

2, 考虑n维仿射空间 E 和其中的m个点 M_i, 请给出这m个点被包含在一个r维仿射子空间的充要条件 （至少解决$m = n, r = n-1$ 的情况）。

上述讨论中对应行列式的第一行全是1，事实上来自于射影空间。

46. 射影空间

定义：n维射影空间$P^n := (\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0)/\sim$, 其中$(x_0, x_1, \cdots, x_n) \sim (y_0, \cdots, y_n)$ 当且仅当存在非0 实数λ使得 $x_i = \lambda y_i$ 对所有i 成立。 这时 P^n中点的相应坐标记作 $(x_0 : \cdots : x_n)$, 并且记 $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0 \to P^n$ 相应的商映射。

1， 求证：P^n 中的点和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的1维线性子空间一一对应。

2，求证：嵌入 $l : \mathbb{R}^n \to P^n : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots x_n)$ 是一个开嵌入。

3，证明: l, π 给出了$\mathbb{R}^n$ 中的仿射子空间和$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的线性子空间的联系，并由此重新证明上一大题。

47. 三点共线

1，设E 是一个2维仿射空间，我们考虑E中的三个点$M_i := (x_i, y_i)$, 其中 $i = 1,2,3$. 求证：三点共线当且仅当 $det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix} = 0$.

2, 考虑n维仿射空间 E 和其中的m个点 M_i, 请给出这m个点被包含在一个r维仿射子空间的充要条件 （至少解决$m = n, r = n-1$ 的情况）。

上述讨论中对应行列式的第一行全是1，事实上来自于射影空间。

48. 射影空间

定义：n维射影空间$P^n := (\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0)/\sim$, 其中$(x_0, x_1, \cdots, x_n) \sim (y_0, \cdots, y_n)$ 当且仅当存在非0 实数λ使得 $x_i = \lambda y_i$ 对所有i 成立。 这时 P^n中点的相应坐标记作 $(x_0 : \cdots : x_n)$, 并且记 $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0 \to P^n$ 相应的商映射。

1， 求证：P^n 中的点和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的1维线性子空间一一对应。

2，求证：嵌入 $l : \mathbb{R}^n \to P^n : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots x_n)$ 是一个开嵌入（P^n的拓扑是从$\mathbb{R}^{n+1}$诱导的商拓扑）。

3，证明: l, π 给出了$\mathbb{R}^n$ 中的仿射子空间和$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的线性子空间的联系，并由此重新证明上一大题。

4, 验证：$P^n \setminus \mathbb{R}^n$ 中的点和 $\mathbb{R}^n$ 中直线的平行等价类一一对应。

5，求证：$P^n \setminus \mathbb{R}^n = P^{n-1}$.
6，证明：P^n 是紧集。

49. 多项式超平面的切空间和法向量

设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，我们假设f光滑（即当我们想求导数时总可以求到）。定义$X \subset \mathbb{R}^n$ 为 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 定义的超曲面。取 $P = (a_1, \cdots, a_n) \in X$ 是一个点。定义X在点P的法向量是向量 $n(f, P) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}|_{(x_i=a_i)}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}|_{(x_i=a_i)})$，其中 $\frac{\partial f}{\partial x_j}|_{(x_i=a_i)}$ 为 f 对x_j 在P点处的偏导数。X在点P的切空间是经过点P 且与法向量垂直的超平面。
1，求出切空间的方程。
2，证明：当f是多元多项式时，切空间的方程恰好是f在点P处的线性逼近，即如果 $f(x_1, \cdots, x_n) = L(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) + G(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$，其中$L$为一次方程而$G$ 中不含一次项时，切空间恰为$L(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) = 0$.

50. 周期函数的规范正交基

设 E 为$\mathbb{R}$ 上满足 $f(x+2\pi) = f(x)$ 的连续函数全体（即 2π 周期函数全体）。
1，求证：$(f|g) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ 是一个数量积。
2，设 $f_0 := \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_k := cos(kx)$ 对于 $k > 0$, $f_k(x) := sin(-kx)$ 对于 $k < 0$. 求证：$(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是规范正交族。
注：事实上 $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是规范正交完全序列。

51. Exercise

Soient E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E et p le projecteur de E d'axe F et de direction G （就是：E上平行于F的到G的投影，这里是法语中的另一个表达）.
1). On suppose que $F \perp G$. Montrer que $\forall x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
2). On suppose que $\forall x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
(a) Soient $a \in F, b \in G$. Montrer que $\|a + b\| \geq \|a\|$.
(b) En déduire que $F \perp G$.

52. Exercise

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. On note p la projection orthogonale sur F et on pose, pour tout $x \in E$: $d(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Soit $z \in F$.
1. Montrer que pour tout $x \in F$, les trois conditions sont équivalentes :
(i) $d(x, F) = \|x - z\|$;
(ii) $z = p(x)$;
(iii) $\forall y \in F$, on a $y \perp (x - z)$
2. En déduire: $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

53. Exercise

Déterminer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx$.

54. Exercise

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f : E \to E$ une application non nécéssairement linéaire.

1. On suppose que f conserve le produit scalaire. Démontrer que f est linéaire.

2. On suppose que f conserve les distances, c'est à dire : $\forall x, y \in E$, on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Démontrer que $f(x) = f(0) + g(x)$ avec $g \in O(E)$.

55. Exercise

1. Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que : $A^tA + A + A^t = 0$.

2. Montrer que pour une telle matrice, $|det(A)| \leq 2^n$.

56. Exercise

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in L(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si: $\forall x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall x, y \in E$, on a $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$.

2. Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

3. Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall x, y \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

57. Exercise

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in L(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si: $\forall x \in E$, on a $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall x, y \in E$, on a $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$.

2. Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

3. Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall x, y \in E$, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.

58. Exercise

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in O(E)$ (这里是指：如果$E = \mathbb{R}^n$, 那么$O(E) := O_n(\mathbb{R})$). Notons $O^+(E) := \{A \in O(E)| \ det(A) = 1\}$ （就是$SO(E)$） et $O^-(E) := \{A \in O(E)| \ det(A) = -1\}$

1. On suppose n impair et $f \in O^+(E)$. Montrer que 1 est valeur propre de f (comparer $det(f - id)$ et $det(f^{-1} - id)$).

2. Que peut-on dire quand n est pair ?

3. Soit n quelconque, $f \in O^-(E)$. Montrer que -1 est un valeur propre de f.

59. Exercise

Soit $E := M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A|B) := Tr(A^t B)$.

1. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les applications $\phi_P : A \mapsto AP$ et $\Phi_P : A \mapsto PAP^{-1}$ sont orthogonales.

2. Réciproquement, si ϕ_P ou Φ_P est orthogonale, est-ce que $P \in O_n(\mathbb{R})$?

60. Exercise

A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx + P(0)Q(0).$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

61. Exercise

1, Déterminer tous les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

2, Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ (comme un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$) est connexe.

62. Décomposition polaire

1, Soit r un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On dit que r est positif, si toutes ses valeurs propres sont positives.

(a) Montrer que si r est positif, il existe un et un seul endomorphisme symétrique s positif tel que $s^2 = r$. On appelle s racine carrée positive de r.

(b) Montrer que si r est défini positif, alors sa racine est défini positif aussi.

2, Soit f un endomorphisme de E.

(a) Montrer que ${}^t ff$ est symétrique et positif.

(b) Montrer que si en plus f est bijective, ${}^t ff$ est défini positif.

3, On suppose maintenant que f est une bijection. Soit s la racine carrée positive de ${}^t ff$.

(a) Montrer que $u := f \circ s^{-1}$ est une transformation orthogonale.

(b) En déduire que tout endomorphisme bijectif de E peut se mettre sous la forme : $f = u \circ s$ où u et une transformation orthogonale, et s est symétrique défini positif.

(c) Montrer que cette décomposition, appelée décomposition polaire de f est unique.

4, Que se passe-t-il si f n'est pas bijective ?

63. Exercise

Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthogonal d'un espace euclidien E. On dit qu'un endomorphisme f de E conserve l'orthogonalité de B si et seulement si $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ est une famille orthogonale.

(a), Montrer que f conserve l'orthogonalité de B si et seulement si B est une base de vecteurs propres de ${}^t ff$.

(b), Montrer que pour tout endomorphisme f de E, il existe une base orthogonale dont f conserve l'orthogonalité.

64. Exercise

1, Déterminer tous les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

2, Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ (comme un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$) est connexe.

65. Exercise

Soit E un espace vectoriel.

Rappelons: soit u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors u et v sont diagonalisables dans une même base.

1, Montrer que $u - v$ est diagonalisable.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrix, et on lui associe les endomorphismes

$$u_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto MA,$$

$$v_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto AM,$$

$$w_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto MA - AM.$$

2, Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si $P(A) = 0$, montrer que $P(u_A) = P(v_A) = 0$.

3, Si A est diagonalisable, montrer que u_A, v_A, w_A sont diagonalisables.

66. défini positif

(已做完) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$ réelles symétriques. On dit que A est définie positive si le forme $(X|Y) := {}^tXAY$ est défini positif. Pour tout $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, notons (称为 主子式)

$$G_{i_1 < \cdots < i_k} := \begin{pmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_k} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & a_{i_k,i_2} & \cdots & a_{i_k,i_k} \end{pmatrix}$$

Notons $H_i := G_{1<2<\cdots<i}$ (称为 顺次主子式).

Montrer que les suivants sont équivalents:

(i) A est défini positif.

(ii) tous les valeurs propres sont strictement positifs;

(iii) tous les $det(G_{i_1<\cdots<i_k})$ sont strictement positifs;

(iv) tous les $det(H_i)$ sont strictement positifs.

(v) il existe un $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^tAP = I_n$.

67. Exercise

1, Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques positives. Montrer que $0 \leq tr(AB) \leq tr(A)tr(B)$.

2, Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives. Montrer que $det(A + B) \geq det(A) + det(B)$.

68. Exercise

1, Déterminer tous les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ et de $O_2(\mathbb{R})$.

2, Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ (comme un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$) est connexe.

69. Exercise

Soit E un espace vectoriel.

Rappelons: soit u et v deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors u et v sont diagonalisables dans une même base.

1, Montrer que $u - v$ est diagonalisable.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice, et on lui associe les endomorphismes

$$u_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto MA,$$

$$v_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto AM,$$

$$w_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : M \mapsto MA - AM.$$

2, Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Si $P(A) = 0$, montrer que $P(u_A) = P(v_A) = 0$.

3, Si A est diagonalisable, montrer que u_A, v_A, w_A sont diagonalisables.

70. Exercise

Soient A_i une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.

1, Montrer qu'il existe un $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout i, le $P^{-1}A_iP$ est diagonal.

2, Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que: $A_i = P_i(A)$ pour tout i.

71. 思考题

回顾：我们证明了，对任何$A \in SO_n(\mathbb{R})$, 存在一组规范正交基，使得在这组基下A 是分块对角的且每个分块是1阶的或者2阶的。

1，求证：对于任何一族两两交换的元素$A_i \in SO_n(\mathbb{R})$, $i \in I$, 存在一组规范正交基，使得在这组基下 A_i 都有上述的分块对角。

2，由此，分类 $SO_n(\mathbb{R})$ 的全部有限交换子群。

72. Exercise

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint tel que $tr(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $u(x) \perp x$.

2. En déduire qu'il existe une base orthonormée e_i telle que $u(e_i) \perp e_i$ pour tout i.

73. Exercise

Soient A_i une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.

1, Montrer qu'il existe un $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout i, le $P^{-1} A_i P$ est diagonal.

2, Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que: $A_i = P_i(A)$ pour tout i.

74. Exercise

Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme u autoadjoint tel que $q(x) = \|u(x)\|^2$ pour tout $x \in E$.

75. Exercise

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

76. diagonale fortement dominante

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. On dit que A est à diagonale faiblement dominante si pour tout i on a $a_{i,i} \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$, et que A est à diagonale fortement dominante si pour tout i on a $a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Montrer que si A est à diagonale fortement dominante alors A est définie positive et si A est à diagonale faiblement dominante alors A est positive.

77. Exercise

Soit $S = (s_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $X := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1, \cdots, x_n)) := -det \begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^tX & S \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

78. Exercise

Soit E un espace euclidien de dimension n et des endomorphismes autoadjoints $u_1, \cdots, u_p$. Soit q_i la forme quadratique associée à u_i, i.e. $q_i(x) := (u_i(x)|x)$. On suppose:

$$\forall x \in E,\ q_1(x) + \cdots + q_p(x) = \|x\|^2, \quad \text{et} \quad rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n.$$

1, Montrer que $u_1 + \cdots u_p = id_E$.
2, Montrer que $Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_n) = E$.
3, Montrer que les u_i sont en fait des projecteurs orthogonaux et que la somme précédente est orthogonale.

79. Exercise

Soient A_i une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.
1, Montrer qu'il existe un $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout i, le $P^{-1}A_iP$ est diagonal.
2, Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que: $A_i = P_i(A)$ pour tout i.

80. Exercise

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n (où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit q une forme quadratique sur E.
1, q peut-elle être injective ?
2, Trouver une condition nécessaire et suffisante sur q pour qu'elle soit surjective.

81. Exercise

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par $q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

82. Exercise

Soient A_i une famille de matrices $n \times n$ réelles symétriques commutant deux à deux.
1, Montrer qu'il existe un $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout i, le $P^{-1}A_iP$ est diagonal.
2, Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que: $A_i = P_i(A)$ pour tout i.

83. Polynômes de Legendre

Soit $E = \mathbb{R}[x]$ avec produit scalaire $(P|Q) := \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, soient $P_n(x) := (x^2-1)^n$ et $Q_n := P_n^{(n)}$ (这里 $-^{(n)}$ 是n阶导数).

1, Montrer que les Q_n sont une famille orthogonale. Déterminant la norme de Q_n.

2, Soit $W_n := \frac{Q_n}{\|Q_n\|}$. Montrer que $W_0, \cdots W_n$ est l'orthonormalisée de Schmide de la base canonique $(1, x, x^2, \cdots x^n)$.

84. Exercise

Soient $A_1, \cdots A_p \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots A_p$ est inversible et ${}^tA_iA_j = 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $rg(A_1) + \cdots + rg(A_p) = n$.

85. 补充：辛群

今天补充交错双线性型和辛群的相关内容。

设 E 为域K 上的n维向量空间，$f : E \times E \to K$ 是一个交错双线性型，即 $f(x,y) = -f(y,x)$. 我们称 $x, y \in E$正交（记为$x \perp y$）如果 $f(x,y) = 0$. 同样的，我们可以定义 两个E的子集正交、子空间的正交补，特别的是$ker(f) := E^{\perp}$. 同样，如果 $ker(f) = 0$, 称 f 非退化。

取 E的一组基 $(e_1, \cdots, e_n)$， 则 f 在这组基下的矩阵 $A := Mat_e(f) := (f(e_i, e_j)_{i,j})$.

1, 求证：上述 A 反对称 （${}^tA = -A$），在基变换下f 对应的 A 两两合同，并且 $dim\ ker(f) = n - rg(A)$.

2, 设f 为非退化的交错双线性型。求证： $\forall x \in E$, 映射 $f_x : E \to K : y \mapsto f(x,y)$ 满足 $f_x \in E^*$ 并且这诱导了K向量空间的同构：$E \to E^* : x \mapsto f_x$.

非退化的交错双线性型 f 的一组辛基底 （base symplectque) 是指一组基 $e_1 \cdots e_n$ 满足：

$$Mat_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $f(e_{2i-1}, e_{2i}) = -f(e_{2i}, e_{2i-1}) = 1$ 并且其他的$f(e_i, e_j)$ 全为0 （包括 $f(e_i, e_i)$）.

3，设f 为非退化的交错双线性型. 假设 $char(K) \neq 2$, 求证：对任何 $e_1 \in E$, 存在 $e_2 \in E$ 使得 $f(e_1, e_2) = -f(e_2, e_1) = 1$ 且 e_1, e_2 线性无关。

4，设f 为非退化的交错双线性型. 假设 $char(K) \neq 2$, 求证：f 一定存在一组辛基底 （提示：维数归纳，注意把所有条件都验证）。

作为推论，$dim(E)$ 是偶数。

5, 证明：对于任何实反对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 存在 $P \in SO_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{-1}AP$ 有如下形式 (其中 $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_i \in \mathbb{R}_{\neq 0}$):

$$\begin{pmatrix} b_1 J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_s J_1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

对于上述 E, f, 定义相应的辛群（groupe symplectque）为

$$Sp(E,f) := \{\phi \in GL(E) |\ f(\phi(x), \phi(y)) = f(x,y) \text{ 对于所有的 } x, y \in E\}.$$

6，对于辛基底 $(e_1, \cdots e_n)$, 写出 $Sp(E,f)$ 在基 $(e_1, e_3, \cdots, e_{n-1}, e_2, e_4, \cdots, e_n)$ 下的矩阵表达所满足的条件。

7， 求证：设f 为非退化的交错双线性型. 假设 $char(K) \neq 2$。求证：任何 $M \in Sp(E,f)$ 满足 $det(M) = 1$, 并且当维数为 2 时， $Sp(E,f) = SL_2(K)$.

86. AUTOADJOINT ET TRACE=0

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $tr(u) = 0$.

1, Montrer qu'il existe un $x \in E$ non nul tel que $u(x) \perp x$.

2, En déduire qu'il existe une base orthonormée $e_i \in E$ telle que $u(e_i) \perp e_i$, $\forall i$.

87. Exercise

Soient $A_1, \cdots A_p \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots A_p$ est inversible et ${}^tA_iA_j = 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $rg(A_1) + \cdots + rg(A_p) = n$.

88. 补充：实规范方阵

我们考虑$\mathbb{R}^n$ 上的标准内积（即$(x|y) := \sum_i x_i y_i$). 实反对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 指 ${}^tA = -A$.

1， 如果实反对称矩阵 A满足 ${}^tAA = \lambda I_n$, 求证：对任何 $x \in \mathbb{R}^n$, 空间 $E_0 := Vect(Ax, x)$ 满足：$\forall y \in E_0, z \in E_0^{\perp}$ (当做列向量), 有 ${}^tyAz = 0$.

2，在上题中，如果$n \geq 2$, 求证：存在 $P \in SO_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 \in M_2(\mathbb{R})$ 或者 $A_1 \in M_1(\mathbb{R})$.

4, 证明：对于任何实反对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 存在 $P \in SO_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^{-1}AP$ 有如下形式 (其中 $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_i \in \mathbb{R}_{\neq 0}$):

$$\begin{pmatrix} b_1 J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & b_s J_1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

一个实矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 称为实规范方阵，如果 ${}^tAA = A{}^tA$. 显然对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵都是实规范方阵。 取 $S := (A + {}^tA)/2$ 和 $P := (A - {}^tA)/2$.

5，求证：上述 S 对称， P 反对称, 并且 S 和 ${}^tAA$ 可同时对角化。

6, 对于 实规范方阵 A， 求证：存在$P \in SO_n(\mathbb{R})$使得 $P^{-1}AP$ 有形式:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中：$A_i \in M_2(\mathbb{R})$ 或者 $A_i \in M_1(\mathbb{R})$.

89. 二次曲面分类

确定下面$\mathbb{R}^3$中的方程对应的二次曲面的类型（尽可能少的计算）。 如果确定是直纹面，请指出，并给出直母线的方程。

1，$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$

2，$(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$

3， $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0$

4，$x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$

5，$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0$

6， $xy + xz + yz + 1 = 0$

7， $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0$

8， $xy + yz - 1 = 0$

9， $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0.$

90. 补充：二次曲面的分类

设 $F(x,y,z) \in \mathbb{R}[x,y,z]$ 为一个三元二次多项式。这样会产生两个二次型： $q(x,y,z)$ 为 $F(x,y,z)$ 中的二次齐次部分（即次数是2的单项式放在一起，比如

$x^2+y^2+xz+3x+5z$ 的二次齐次部分是 x^2+y^2+xz）； 和 $p(x,y,z,w) := w^2F(\frac{x}{w},\frac{y}{w},\frac{z}{w})$。

1， 验证：关于 (x,y,z) 的坐标变换（线性变化+平移）不改变$q(x,y,z)$ 和 $p(x,y,z,w)$ 的符号；

2，验证：曲面分类中的17类中，没有任何两类使得 $q(x,y,z)$ 和 $p(x,y,z,w)$ 的符号都相同；

3，由上面可知：判定一个曲面属于哪一类，可以做任意的坐标变换，不仅仅是正交变换+平移。

91. 矩阵的指数（补充）

对于一个矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 定义 $e^A := \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{A^m}{m!}$.

1，请利用范数 $\|A\| := max\{|a_{i,j}|\}$, 证明 e^A 是良定义的，即 e^A 的每一项都绝对收敛。

2， 证明: 如果 A, B 交换，那么 $e^{A+B}=e^Ae^B$.

3, 假设A 可以上三角化，请给出 A 的特征多项式和 e^A 的特征多项式之间的关系。

4, 在上题条件下，求证： $e^A\in SL_n(\mathbb{R})$ 当且仅当 $tr(A)=0$.

注：2、3 中 A 可以上三角化 这个条件不是必须的。一般情况下可以在$M_n(\mathbb{C})$ 中同样操作即可（需要对复数 z 定义 e^z）。

5，求证：如果 A 是反对称矩阵，那么e^A 是正交矩阵。

92. AUTOADJOINT ET TRACE=0

Soient E un espace euclidien et $u\in\mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $tr(u)=0$.

1, Montrer qu'il existe un $x\in E$ non nul tel que $u(x)\perp x$.

2, En déduire qu'il existe une base orthonormée $e_i\in E$ telle que $u(e_i)\perp e_i$, $\forall i$.

以上是习题

下面是口试题

93. Exercise

Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer que $Im(p) \subset Im(q)$ si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$ pour tout $x \in E$.

94. Exercise

Soient $E = \mathbb{R}_n[x]$, et $(a_0, \cdots, a_n)$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On définit

$$(P|Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1, Vérifier qu'on a là un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance d'un polynôme P à

$$H = \{Q \in \mathbb{R}_n[x], \sum_{i=0}^{n} Q(a_i) = 0\}.$$

95. Exercise

Soient x,y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}.$$

96. Exercise

Soient E un espace préhilbertien réel et $(x_1, \cdots, x_n)$ dans E unitaires. Supposons que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Montrer que $\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i|x_j) = -\frac{n}{2}$.

97. Exercise

Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie vectorielle de E. On pose $g = f - Id$.
1, Montrer que $Im(g) = Ker(g)^{\perp}$.
2, Soit p la projection orthogonale sur $Ker(g)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, on considère

$$p_n := \frac{1}{n}(Id + f + f^2 + \cdots f^{n-1}).$$

Démontrer que pour tout $x \in E$, on a

$$lim_{n\to\infty}\|(p_n - p)(x)\| = 0.$$

98. Exercise

Décomposition QR. Soit A dans $GL_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$, R triangulaire inférieure avec tous les coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

99. Exercise

Soient E un espace vectoriel euclidien, et $a \in E$ unitaire. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$, on définit

$$f_\lambda : x \mapsto x + \lambda(x|a)a.$$

On nomme $F := \{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1, Montrer que F est stable par produit.

2, Montrer que f_λ est inversible si et seulement si $\lambda \neq -1$.

3, Qu'est f_{-1}?

4, Quand f_λ est une isométrie?

100. Exercise

1, Montrer que $(P|Q) := \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

2, Soit $\psi : P(x) \mapsto P(0)$. Montrer qu'il n'existe pas de $Q(x)$ dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $\psi(P) = (P|Q)$.

101. Exercise

Déterminer les sous-groupes de $SO_3(\mathbb{R})$ de cardinal 2,3, ou 4.

102. Espaces euclidiens 1

On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_{\geq 0})$.

1, Soit $f(t) \in E$, notons $I_n := \int_0^1 f^n(t)dt$. Montrer que $I_n^2 \leq I_{n-1}I_{n+1}$.

2, Trouver le minimum de $\int_0^1 f^2(t)dt$ pour f vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

103. Espaces euclidiens 2

Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ une application. Supposons que, pour tout $a, b \in E$, on a $(f(a)|f(b)) = (a|b)$. Montrer que f est linéaire.

104. Trace 1

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $rg(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

105. Trace 2

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. Calculer $tr(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

106. Semblable (相似) 1

1, Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que A est semblable à B si et seulement s'il existe $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = XY$ et $B = YX$.
2, Est-ce que cet énoncé est encore vrai sans inversibilité (可逆性).

107. Semblable (相似) 2

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient semblables.

108. Polynôme caractéristique 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible et $B = A^{-1}, C = A^2$. Exprimer les polynômes caractéristiques χ_B, χ_C en fonction de χ_A.

109. Polynôme caractéristique 2

Soit $C = (c_1, \cdots, c_n) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tCC \in M_n(\mathbb{R})$.
1, Calculer le polynôme caractéristique de M.
2, M est-elle diagonalisable?

110. Diagonalisation 1

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \frac{i}{j}$. A est-elle diagonalisable ?

111. Diagonalisation 2

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$ tel que A^2 est diagonalisable et $tr(A) \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.

112. Déterminants 1

1, Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose: $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $det(C + M) = det(M)$. Montrer que $C = 0$.
2, Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose: $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $det(A+M) = det(B+M)$. Montrer que $A = B$.
3, Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose: $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $det(A+M) = det(B+{}^tM)$. Montrer que $A = {}^tB$.

113. Déterminants 2

1, Calculer $det \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 & e^5 \end{pmatrix}$.

2, En déduire $det \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+d & d+e & e+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+d^2 & d^2+e^2 & e^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+d^3 & d^3+e^3 & e^3+a^3 \\ a^4+b^4 & b^4+c^4 & c^4+d^4 & d^4+e^4 & e^4+a^4 \\ a^5+b^5 & b^5+c^5 & c^5+d^5 & d^5+e^5 & e^5+a^5 \end{pmatrix}$.

114. A^2 et ${}^tAA$

1, Pour $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa signature en fonction de $rg(A)$.

2, Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, soit $q(A) := tr(A^2)$. Montrer que q est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature. (提示：考虑对称矩阵和反对称矩阵)

115. exemple de dimension 3

Soit a un nombre réel. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

pour $v = (x, y, z)$. Soit f la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1, Déterminer une décomposition de q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

2, Donner le rang et la signature de q suivant les valeurs de a.

3, Pour quelles valeurs de a, f définit-elle un produit scalaire?

116. forme quadratique à un sous-espace vectoriel

Soient q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature $(n-1, 1)$ et H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d \geq 1$.

1, On suppose qu'il existe $x \in H$ tel que $q(x) < 0$. Montrer que la signature de $q|_H$ est $(d-1, 1)$.

2, On suppose que $q|_H$ est positive, quelle est sa signature?

117. Exercise

Soient $E = \mathbb{R}[x]_2$ et q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = P(0)P(1)$.

1, Montrer que q est une forme quadratique sur E.

2, Déterminer le rang et la signature de q.

118. Exercise

Soient $E := M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On pose $q(A) := \lambda \cdot tr(A^2) + \mu \cdot det(A)$.

1, Montrer que q est une forme quadratique sur E.

2, Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de q.

119. Exercise

Soit $E := \mathbb{R}[x]_n$. Pour tout $P(x) \in E$, soit $q(P) := \sum_{k=0}^{+\infty} P(k)P(-k)e^{-k}$.
1, Montrer que q est une forme quadratique sur E.
2, Déterminer sa signature.

120. Orthogonalisation de Schmidt

Soient $S^{n-1} := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_i a_i x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ et

$$S^{n-1}(\mathbb{Q}) := \{(x_1, \cdots, x_n) \in S^{n-1} | \forall i, x_i \in \mathbb{Q}\},$$

où $a_i \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$ pour tout i. Un théorème classique dit que $S^{n-1}(\mathbb{Q})$ est dense dans S^{n-1}.

Montrer que $SO_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $SO_n(\mathbb{R})$ en utilisant le résultat ci-dessus.

121. Mineurs principaux

Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})$ une matrice réelle symétrique $n \times n$ représentant une forme quadratique q. On appelle mineurs principaux de A les déterminants:

$$\Delta_k := det((a_{i,j})_{i,j \leq k}).$$

On suppose que tous les mineurs principaux de A sont non nuls, montrer que la signature de q est (r, s) où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, \Delta_1, \cdots \Delta_n)$ et $r = n - s$.

122. Compact

On rappelle que l'application $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : (A, B) \mapsto AB$ est continue.
1, Montrer que $SO_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est fermé.
2, Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est compact (comme sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$).

123. Formes quadratiques de signature donnée

Soient:
(i) $Quad(n)$: l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$,
(ii) $Quad^*(n)$: l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ de rang n;
(iii) $Quad_{p,q}(n)$: l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ de signature (p, q).
On peut voir $Quad(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ comme un sous-espace topologique. On rappelle que, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, les applications $l_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : B \mapsto A \cdot B$ et $r_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) : B \mapsto B \cdot A$ sont homéomorphes.

Alors:
1, Montrer que $Quad^*(n)$ est dense dans $Quad(n)$.
2, Montrer que, si $p + q = n$, l'ensemble $Quad_{p,q}(n)$ est ouvert dans $Quad(n)$.
3, Montrer que $Quad_{p,q}(n)$ est connexe par arcs.

124. Vecteur propre 1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = id$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1, Montrer que la dimension de E est paire.

2, Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

125. Vecteur propre 2

Soient $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire correspondant. Soient $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une réflexion par rapport à un hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$ et $u \in H^\perp$

1, Montrer que $f \circ s = s \circ f$ si et seulement si u est un vecteur propre de f.

2, Calculer le centre de $O_n(\mathbb{R})$.

126. Vecteur propre 3

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Supposons que A a n valeurs propres distincts. Montrer que: pour tout $B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $BA = AB$, il existe un $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ tel que $P(A) = B$.

127. Trace 1

Soit $\psi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

1, Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que: $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\psi(M) = tr(AM)$.

2, On suppose par ailleurs que: pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\psi(P^{-1}MP) = \psi(M)$. Montrer qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(M) = \lambda tr(M)$ pour tout M.

128. Trace 2

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie avec $dim(E) = n$, $dim(F) = p$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $H := \{g \in \mathcal{L}(F, E) |\ f \circ g \circ f = 0\}$.

1, Montrer que $H \subset \mathcal{L}(F, E)$ est d'un sous-espace de dimension $np - r^2$, où $r = rg(f)$.

2, On suppose que $E = F$ et on définit: $\psi : g \mapsto f \circ g \circ f$. Montrer que $tr(\psi) = tr(f)^2$.

129. Dimension 1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5)$ tel que $rg(f) = 3$ et $f^3 = 0$. Montrer que $f^2 \neq 0$ et déterminer $dim\ Im(f^2)$.

130. Dimension 2

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$. Supposons que $f \circ g = 0$, et qu'il existe $f_1 \in \mathcal{L}(E, F)$, $g_1 \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g_1 + f_1 \circ g = Id$. Montrer que $Im(g) = Ker(f)$.

131. Projecteur

1, Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace?

2, Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer:

$$dim\ ker(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} Tr(A^k).$$

132. Déterminant 1

1, Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} \in \{1, -1\}$. Montrer que $det(A)$ est divisible par 2^{n-1}.

2, Calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$.

133. Déterminant 2

Soit $A_k := (a_{i,j}^{(k)})$ avec $a_{i,j}^{(k)} := (x_i - y_j)^k$. Calculer $det(A_k)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

134. Chasse

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Im(u^2) = ker(u^3)$. Montrer que $Im(u) = Ker(u^4)$.

135. Sous-espaces

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $x_1, \cdots, x_n$ distincts dans E.

1, Montrer l'existence de $f \in E^*$ telle que les $f(x_k)$ soient distincts.

2, Montrer que le résultat est toujours vrai si on prend une famille dénombrable de vecteurs de E.