Introduction à la dynamique - Examen

printemps 2024 [1]

Note : *les documents, y compris les notes personnelles, sont interdits*

Les questions sont à traiter dans l'ordre indiqué et on peut utiliser les résultats des questions précédentes même si on ne les a pas résolues. Merci d'indiquer clairement les numéros des questions traitées (il n'est pas nécessaire d'en rappeler l'énoncé).

L'évaluation tiendra compte de la précision des arguments et de la qualité de la rédaction. Le barême sur environ 60 points est indicatif. **Il n'est pas nécessaire d'avoir résolu toutes les questions pour avoir une très bonne note.**

Problème 1 (9 points environ) : Statistique des fractions continues

L'application de Gauss est $G : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto \frac{1}{x} - E(\frac{1}{x})$. Elle est munie de la mesure de Gauss $\mu_G := \frac{1_{[0,1]}}{\log 2}\frac{dx}{x+1}$. Les quotients partiels de x sont les entiers $a_k(x) := a(G^{k-1}x)$ où $a(x) := E(1/x)$ et $k \geq 1$. On donne quelques valeurs, pour $p > -1$, $q > 0$:

$$A_p := \sum_{n\geq 1} n^{-p} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \; B := \sum_{n\geq 1} \log n \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \; C_q := \int_0^1 (\log(1/x))^q \frac{dx}{x+1}.$$

Etudier chacune des limites suivantes et si elle existe calculer sa valeur en fonction de A_p, B ou C pour Lebesgue-p.t. $x \in [0,1]$:

(Q1) [3 pts] Moyenne harmonique : $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1(x)}+\cdots+\frac{1}{a_n(x)}}$.

(Q2) [3 pts] Moyenne arithmétique : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1(x) + \cdots + a_n(x))$.

(Q3) [3 pts] Exposant de Lyapunov : $\lambda(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |(G^n)'(x)|$.

Problème 2 (12 points environ) : Automorphismes du tore

On fixe un entier $d \geq 1$ et une matrice $A \in GL_d(\mathbb{Z})$. On considère les translations $\tau_v : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $x \mapsto x + v$ ($v \in \mathbb{R}^d$), l'automorphisme induit $T_A : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $x \mapsto A.x \bmod \mathbb{Z}^d$, la mesure de probabilité m définie par le volume, le spectre $\mathrm{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I) = 0\}$ et la condition :

$$\mathrm{sp}(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists n \geq 1\ \lambda^n = 1\} = \varnothing. \tag{1}$$

(Q1) [1 pt] Vérifier que $m \in \mathbb{P}(T_A)$.

(Q2) [4 pts] Démontrer que (1) implique $m \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(T_A)$.

(Q3) [2 pts] Montrer que (1) implique la transitivité topologique de T_A.

1. Jérôme Buzzi - USTC - classe franco-chinoise de mathématiques.

(Q4) [3 pts] Montrer que si (1) n'a pas lieu, alors tout point appartient à un fermé invariant d'intérieur vide [*Indication :* considérer $\mathbb{T}^d \to \mathbb{T}$, $x \mapsto \ell.x$ où $\ell \in \mathbb{Z}^d$].

(Q5) [2 pts] Montrer que l'ergodicité de (T_A, m) est équivalente à la transitivité topologique de T_A.

Problème 3 (18 points environ) : Extensions de groupe itérées

On se donne des fonctions continues $h_i : \mathbb{T}^{i-1} \to \mathbb{T}$ ($i = 1, \ldots, d$; h_1 est une constante) et on définit $f_i : \mathbb{T}^i \to \mathbb{T}^i$ par :

$$(x_1, \ldots, x_i) \longmapsto (x_1 + h_1, x_2 + h_2(x_1), x_3 + h_3(x_1, x_2), \ldots, x_i + h_i(x_1, \ldots, x_{i-1})).$$

On désigne par $B(\mu)$ le bassin ergodique d'une mesure μ. On définit, pour chaque $y \in \mathbb{T}^i$, $\tau_{i,y} : \mathbb{T}^i \to \mathbb{T}^i$, $x \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y)$. On suppose que :

$$f_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \text{ est uniquement ergodique;} \tag{2}$$

$$(f_d, m_{\mathbb{T}^d}) \text{ est ergodique.} \tag{3}$$

On note $\pi_{i,j} : \mathbb{T}^i \to \mathbb{T}^j$ la projection $(x_1, \ldots, x_i) \mapsto (x_1, \ldots, x_j)$ $(j \geq i)$.

(Q1) [2 pts] Pour chaque $i = 1, \ldots, d$, montrer que $f_i : \mathbb{T}^i \to \mathbb{T}^i$ préserve la mesure produit $m_i := m_{\mathbb{T}^i}$ puis vérifier que (f_i, m_i) est ergodique.

(Q2) [3 pts] Montrer que $B(m_i) = \tau_y(B(m_i))$ pour tout $y \in \mathbb{T}$. En déduire que $B(m_i) = B_{i-1} \times \mathbb{T}$ où B_{i-1} est une partie mesurable de $\mathbb{T}^{i-1}$ et $m_{i-1}(B_{i-1}) = 1$.

(Q3) [3 pts] Démontrer que si $\mu \in \mathbb{P}_{\text{erg}}(f_i)$ vérifie $\pi_i(\mu) = m_{i-1}$ alors $\mu = m_i$.

(Q4) [2 pts] Montrer que f_d est uniquement ergodique.

Soit $S : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4$ défini par $S(x) = T_A(x) + y$ où $T_A(x) = A.x$ modulo $\mathbb{Z}^4$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } y := (\alpha, 0, \ldots, 0)^* \quad (\alpha \notin \mathbb{Q})$$

(Q5) [4 pts] Montrer que (S, m_4) est uniquement ergodique.

(Q6) [2 pts] Soit $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que, modulo $\mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq 0$, $\beta \cdot n^4 = \psi(S^n(X_0))$ avec $\psi \in C(\mathbb{T}^4, \mathbb{T})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{T}^4$ à préciser.

(Q7) [2 pts] En déduire : pour tout $m \in \mathbb{Z} \setminus 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi\beta\cdot m\cdot n^4} = 0$.

Problème 3 (20 points environ) : Exposant de Lyapunov

Soit $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{T}^d)$ un difféomorphisme de classe C^1 du tore de dimension $d \geq 1$. On note $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ la projection canonique, $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un relèvement de f. L'exposant de Lyapunov supérieur en $x \in \mathbb{T}$ est défini comme la limite suivante, si elle existe : $\lambda^+(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)\|$ où $Df^n(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

est la différentielle de f^n en x définie par $D_x f^n := D_X F^n$ pour tout relèvement X de x et

$$\|Df^n(x)\| := \sup\{\|Df^n(x).v\| : v \in \mathbb{R}^d,\ \|v\| \le 1\}$$

est la norme d'opérateur induite par la norme euclidienne $\|v\|$ pour $v \in \mathbb{R}^d$. On munit $\mathbb{T}^d$ de la distance $d(x+\mathbb{Z}^d, y+\mathbb{Z}^d) := \inf_{n\in\mathbb{Z}^d} \|x-y-n\|$ avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que la projection canonique $\pi : B_{\mathbb{R}^d}(x,r) \to B_{\mathbb{T}^d}(\pi(x),r)$ est une isométrie si $0<r<1/2$.

On suppose : $d \ge 1$ et $\mu \in \mathbb{P}_{\mathrm{erg}}(f)$.

(Q1) [1,5 pt] Vérifier qu'il existe $L \ge 1$ tel que, pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ avec $\|v\| = 1$, $L^{-1} \le \|Df(x).v\| \le L$. En déduire que, pour tout $r > 0$,

$$\forall n \ge 0\ \forall x \in \mathbb{T}^d \quad f^n(B_d(x,r)) \subset B_d(f^n(x), L^n r)$$

(Q2) [3,5 pts] Montrer que $\lambda^+(x)$ est bien défini dans $\mathbb{R}$ et constant pour μ-p.t. $x \in \mathbb{T}^d$.

On suppose : la valeur μ-p.p. de λ^+ est $-\chi < 0$.

(Q3) [3 pts] Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \ge 1$ tel que :

$$B := \{x \in \mathbb{T}^d : \|Df^N(x)\| < \exp(-\chi N/2)\} \text{ vérifie } \mu(B) > 1-\varepsilon.$$

(Q4) [1 pt] Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in B \quad \mathrm{Lip}(f^N | B(x,\rho)) \le e^{-\chi/3N}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, on définit $(a_i)_{i\ge 0}$ par récurrence en posant : $a_0 := -N$ et, pour $i \ge 0$, $a_{i+1} := \inf\{j \ge a_i + N : f^j(x) \in B\}$. On pose ensuite : $c_i := e^{-N\chi/3} \cdot L^{a_{i+1}-a_i-N}$ ($c_i := \infty$ si $a_{i+1} = \infty$) et enfin : $d_i := L^{a_1+N} \prod_{j=1}^{i-1} c_i$ pour $i \ge 1$.

(Q5) [2 pts] Montrer que $\lim_{i\to\infty} d_i(x) = 0$ pour μ-p.t. $x \in \mathbb{T}^d$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

(Q6) [2 pts] Démontrer qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que, pour tout $n \ge 1$ assez grand, $f^n : \overline{B(x,\rho_1)} \to \overline{B(f^n(x),\rho_1/4)}$ est une application bien définie et strictement contractante.

(Q7) [2 pts] En déduire que $\mu = \frac{1}{p}(\delta_y + \delta_{f(y)} + \delta_{f^{p-1}(y)})$ avec $y = f^p(y)$, $p \ge 1$.

On suppose désormais : $d = 1$, $f \in \mathrm{Diff}_+(\mathbb{T})$ et que le nombre de rotation $\rho(f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est irrationnel.

(Q8) [3 pts] Montrer que $\lambda^+(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{T}$ et constante.

(Q9) [2 pts] Vérifier que $\lambda(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.