2023 Differential Geometry- TD 3

(E) **Théorème de relèvement**

(a) Soit f une application continue de $[0,1]$ dans le cercle unité. Montrer qu'il existe $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, et que φ est unique une fois fixé $\varphi(0)$.

Indication : On découpera $[0,1]$ en intervalles assez petits sur lesquels φ est définie facilement, et on recollera convenablement sur l'intersection de ces intervalles.

(b) Montrer qu'il en est de même pour $[0,1]^2$ au lieu de $[0,1]$

Indication : Utiliser a) pour le faire sur $[0,1] \times \{y\}$ puis étendre aux bandes $[0,1] \times [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$. Terminer en recouvrant $\{0\} \times [0,1]$ par compacité, et en utilisant le a) pour les intersections des bandes.

(c) De même pour $[0,1]^k$ pour k quelconque

(d) Montrer que si f est de classe C^k alors ϕ est de classe C^k.

(F) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans S^1 continue (ou de classe C^∞ si on préfère) et périodique de période 2π (i.e. $f(t+2\pi) = f(t)$).

(a) Montrer que si $\phi(t)$ est le relèvement défini à l'exercice précédent, $\frac{1}{2\pi}(\phi(t+2\pi) - \phi(t))$ est un entier appelé degré de f et noté $\deg(f)$. Montrer que cet enter ne dépend pas du choix de ϕ.

(b) Montrer que si f_s est une famille continue de telles applications, $\deg(f_s)$ ne dépend pas de s.

(c) Calculer le degré d'une application constante. De l'application $f(x) = e^{2ix}$

1. Espace hyperoblique et tore

1– Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'espace hyperbolique S d'équation $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2– Soit $0 < \rho < r$. Montrer que

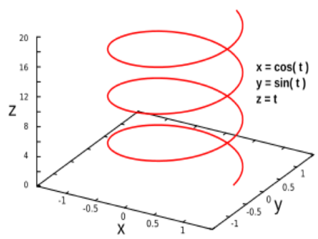
$$T = \{((r+\rho\cos(\theta))\cos(\varphi), (r+\rho\cos(\theta))\sin(\varphi), \rho\sin(\theta)), (\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

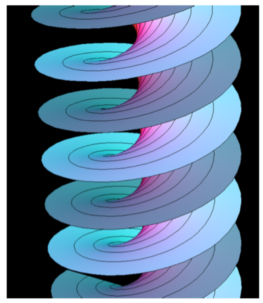
2. On considère l'hélice circulaire, d'équation paramétrique

$$t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$$

dans un repère orthonormé. Montrer que la surface engendrée par l'ensemble des droites qui rencontrent l'hélice et rencontrent orthogonalement l'axe Oz (*hélicoïde droit)* est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

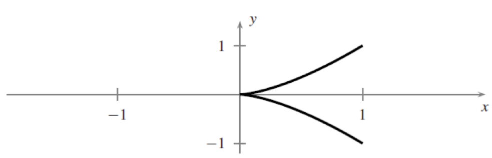


(a) helix


(b) Helicoid

3. Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que $M_1 \times M_2 = \{a = (a_1, a_2), a_1 \in \mathbb{R}^n, a_2 \in \mathbb{R}^m\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension

4. Montrer que l'image de la courbe $t \to (t^2, t^3)$ n'est pas une sous-variété.



5. Soit M sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leq n-2$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus M$ est connexe.