Théorie des Nombres - TD6
Fonction Zêta et théorème des nombres premiers

Sauf mention explicite du contraire, les équivalents et les limites sont pris en $+\infty$.

Exercice 1 : Montrer que $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$.

Solution de l'exercice 1. On fait une intégration par parties. On obtient

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}\,.$$

Or on dispose du résultat classique suivant : si $f, g : [a; +\infty[\to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues, telles que $f = \mathrm{o}_{+\infty}(g)$ et g n'est pas intégrable, alors on a $\int_a^x f(t)dt = \mathrm{o}_{+\infty}\left(\int_a^x g(t)dt\right)$. Démontrons rapidement ce résultat : soit $\epsilon > 0$, il existe $M \geq a$ tel que pour tout $t \geq M$, $f(t) \leq \epsilon g(t)$. Soit $x \geq M$. On a alors $\int_a^x f = \int_a^M f + \int_M^x f \leq \int_a^M f + \epsilon \int_M^x g$. Donc en particulier $\frac{\int_a^x f}{\int_a^x g} \leq \frac{\int_a^M f}{\int_a^x g} + \epsilon$. Or par hypothèse, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x g = +\infty$, donc il existe $x_0 \geq M$ tel que pour tout $x \geq x_0$, on ait $\frac{\int_a^M f}{\int_a^x g} \leq \epsilon$. Alors, pour tout $x \geq x_0$, on a $\int_a^x f \leq \epsilon \int_a^x g$, ce qui conclut la preuve du résultat annoncé.
Déduisons l'équivalent recherché : on a vu que $\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$. Par le résultat intermédiaire, on a $\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = \mathrm{o}_{+\infty}(\mathrm{Li}(x))$, d'où finalement $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$.

Exercice 2 :

a) On définit $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$.
   i) Montrer que Γ est holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.
   ii) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
   iii) Montrer que Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On admet que celle-ci ne s'annule pas.
   iv) Calculer $\Gamma(n)$, pour $n \geq 1$ entier.
   v) Montrer que si $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, alors $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t}$.

b) Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ à décroissance rapide à l'infini. On définit $L(f, s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t) t^s \frac{dt}{t}$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.
   i) Montrer que $L(f, .)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier.
   ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L(f, -n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

c) On définit les nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le développement de Taylor de la fonction $f_0 : t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ en 0 : on écrit ce développement $\sum_{n\geq 0} B_n \frac{t^n}{n!}$.
   i) Montrer que $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} L(f_0, s-1)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(s) > 1$.
   ii) Montrer que ζ a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle, qui est simple de résidu 1, en $s = 1$.
   iii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$ (en particulier, $\zeta(-n) \in \mathbb{Q}$).

d) On définit la fonction $F(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$.
   i) Montrer que F est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples de résidu 1 en les entiers. Montrer également que F est impaire et 1-périodique.

ii) On note $G(z) := F(z) - \pi \text{cotan}(\pi z)$. Montrer que la fonction G est bornée sur l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|\text{Re}\,(z)| \leq \frac{1}{2}$ et $\text{Im}\,(z) \geq 1$.

iii) En déduire que G est la fonction nulle sur $\mathbb{C}$.

iv) En déduire que pour tout $k \geq 1$, on a $\zeta(2k) = -\frac{1}{2} B_{2k} \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k)!}$ (en particulier, $\zeta(2k)$ est un multiple rationnel de π^{2k}).

Solution de l'exercice 2.

a) i) On introduit la fonction $f(s,t) := e^{-t} t^{s-1}$. Il est clair que cette fonction vérifie les conditions suivantes :

– pour tout $s \in \mathbb{C}$, tel que $\text{Re}\,(s) > 0$, $f(s,.)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

– pour tout $t \in]0;+\infty[$, la fonction $f(.,t)$ est holomorphe sur $\text{Re}\,(s) > 0$.

– pour tous $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$, on a pour tout $s \in \mathbb{C}$, si $\sigma_1 \leq \text{Re}\,(s) \leq \sigma_2$, alors $|f(s,t)| \leq e^{-t} t^{\sigma_2 - 1}$ si $t \in [1;+\infty[$ et $|f(s,t)| \leq e^{-t} t^{\sigma_1 - 1}$ si $t \in]0;1]$. En outre, la fonction définie par $t \mapsto e^{-t} t^{\sigma_1 - 1}$ si $t \in]0;1]$ et $t \mapsto e^{-t} t^{\sigma_2 - 1}$ si $t \geq 1$, est intégrable sur $]0;+\infty[$.

Ces trois conditions assurent, via le théorème sur les intégrales à paramètres, que la fonction Γ définie par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} f(s,t)dt$ est holomorphe sur $\text{Re}\,(s) > 0$.

ii) Il s'agit de faire une intégration par parties : on a

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s dt = \left[-e^{-t} t^s \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s e^{-t} t^{s-1} = 0 + s\Gamma(s) .$$

iii) la fonction Γ est holomorphe sur $\text{Re}\,(s) > 0$, la relation de la question b) permet d'étendre Γ de la façon suivante : pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$, on pose $\Gamma(s) := \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\dots(s+n-1)}$, où $n \in \mathbb{N}$ est l'entier minimum tel que $\text{Re}\,(s+n) > 0$. Il est clair alors que cette formule définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles sont exactement les entiers négatifs. Ces pôles sont tous simples.

iv) Une réccurence simple avec la question b) assure que $\Gamma(n) = (n-1)!$, puisque $\Gamma(1) = 1$.

v) On calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t} \frac{1}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n \geq 0} e^{-t} (e^{-t})^n dt .$$

Donc on a, en utilisant le théorème de convergence dominée pour échanger somme et intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t} = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{s-1} dt .$$

On fait le changement de variables $u := nt$, et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t} = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} n^{-s} e^{-u} t^{s-1} dt = \Gamma(s)\zeta(s) .$$

On en déduit la formule souhaitée en utilisant le fait que la fonction Γ ne s'annule pas.

b) i) On rappelle que f est à décroissance rapide si pour tout $n \geq 0$ et tout $r \geq 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} x^r f^{(n)}(x) = 0$. Il est clair que $L(f,.)$ est définie sur $\text{Re}\,(s) > 0$, et que c'est une fonction holomorphe sur cet ensemble (la preuve est la même que celle de la question a)i)). Une intégration par parties assure que

$$L(f', s+1) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} f'(t) t^s dt = [f(t)t^s]_0^{+\infty} - \frac{s}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt = 0 - L(f,s)$$

en utilisant la question a)ii).

On a donc, si $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, $L(f,s) = -L(f', s+1)$. On peut donc prolonger $L(f,.)$ à $\mathbb{C}$ via la formule suivante : si $s \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}\,(s) \leq 0$, on pose $L(f,s) := (-1)^n L(f^{(n)}, s+n)$, où $n \in \mathbb{N}$ est l'entier minimum tel que $\mathrm{Re}\,(s+n) > 0$. Il est alors clair que cette fonction $L(f,.)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) Par définition, on a

$$L(f,-n) = (-1)^{n+1} L(f^{(n+1)}, 1) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t)dt = (-1)^{n+1}(-f^{(n)}(0)) = (-1)^n f^{(n)}(0)\,.$$

c) i) C'est une conséquence directe de la question a)v).

ii) La question b) assure que la fonction $L(f_0,.)$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ (il est clair que f_0 est une fonction C^∞ à décroissance rapide). En outre, on a $L(f_0,0) = f_0(0) = 1$ puisqu'on prolonge f_0 par continuité en 0, finalement la fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un seul pôle, en $s=1$, simple de résidu 1.

iii) Par la question b)ii), il suffit de calculer les dérivées de la fonction f_0 en 0. Par définition des nombres de Bernoulli, on a $f_0^{(n)}(0) = B_n$, donc les questions b)ii) et c) assurent que $\zeta(-n) = \frac{-1}{n+1} L(f_0, -(n+1)) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$.

d) i) On écrit $F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2}$. Sous cette forme, il est clair que cette série de fonctions converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ ne rencontrant pas $\mathbb{Z}$. Cela assure, puisque chaque fonction $z \mapsto \frac{z}{z^2-n^2}$, ainsi que $z \mapsto \frac{1}{z}$, est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, que la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Il est en outre clair que F est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et ses pôles sont exactement les entiers relatifs, ils sont simples, avec résidu 1. Il est également clair que F est impaire. Montrons pour finir que F est 1-périodique : soit $N \in \mathbb{N}$, on note $F_N(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$. On fixe $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Alors on a

$$F_N(z+1) = \frac{1}{z+1} + \left(\frac{1}{z+2} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z+3} + \frac{1}{z-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{z+(n+1)} + \frac{1}{z-(n-1)}\right),$$

donc

$$F_N(z+1) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) + \frac{1}{z+(n+1)} - \frac{1}{z-n} = F_N(z) + \frac{1}{z+(n+1)} - \frac{1}{z-n}\,.$$

On fait tendre N vers $+\infty$, et on obtient finalement que $F(z+1) = F(z)$ car $\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{z+(n+1)} - \frac{1}{z-n}\right) = 0$. Donc F est 1-périodique.

ii) Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et $y \geq 1$. Alors

$$|\pi\mathrm{cotan}(\pi z)| = \pi \frac{\left|e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}\right|}{\left|e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right|} \leq \pi \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \leq 2\pi \frac{e^{\pi y}}{e^{\pi y}-1}\,.$$

Or il est clair que la fonction $y \mapsto \frac{e^{\pi y}}{e^{\pi y}-1}$ est bornée sur $[1;+\infty[$ (car elle est continue est admet une limite finie en $+\infty$). Donc la fonction $z \mapsto \pi\mathrm{cotan}(\pi z)$ est bornée sur le domaine considéré.

Montrons maintenant que F est bornée sur le même domaine. On a

$$|F(z)| \leq 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{|z|}{|z^2-n^2|} \leq 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{|x|+y}{y^2+n^2-x^2} \leq 1 + 2\sum_{n\geq 1} \frac{\frac{1}{2}+y}{y^2+n^2-\frac{1}{4}},$$

d'où en utilisant une comparaison série-intégrale et en posant $t' := \frac{t}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}$,

$$|F(z)| \leq 1 + 2\left(\frac{1}{2}+y\right)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{y^2+t^2-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{2y+1}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}\int_0^{+\infty} \frac{dt'}{1+t'^2} = 1 + \frac{2y+1}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}\left[\arctan(t')\right]_0^{+\infty},$$

Donc
$$|F(z)| \leq 1 + \frac{\pi}{2}\frac{2y+1}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}\,,$$
et la fonction $y \mapsto \frac{2y+1}{\sqrt{y^2-\frac{1}{4}}}$ est bornée sur $[1;+\infty[$, donc F est bornée sur le domaine considéré. Donc finalement G est bornée sur le domaine considéré.

iii) On sait que la fonction $z \mapsto \pi\text{cotan}(\pi z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec ses pôles en tous les entiers relatifs, simples de résidu 1. Donc la question d)i) assure que G est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc G est bornée que le compact $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right] \times [-1;1]$ de $\mathbb{C}$. En outre, G est impaire, donc la question d)ii) assure que G est bornée sur la bande verticale $-\frac{1}{2} \leq \text{Re}\,(z) \leq \frac{1}{2}$. Enfin, G est 1-périodique (cf question d)i)), donc G est bornée sur $\mathbb{C}$. Donc finalement G est une fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$. Donc le théorème de Liouville assure que G est constante. Or G est impaire, donc $G(0) = 0$, donc G est la fonction nulle sur $\mathbb{C}$.

iv) La question d)iii) assure que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,
$$\pi z\text{cotan}(\pi z) = 1 + 2z^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^2-n^2}\,.$$
Or toutes les fonctions apparaissant dans cette égalité sont développables en séries entières sur le disque unité ouvert. On calcule ces dévloppements en séries entières :
$$\pi z\text{cotan}(\pi z) = i\pi z\frac{e^{2i\pi z}+1}{e^{2i\pi z}-1} = i\pi z\left(1+\frac{2}{e^{2i\pi z}-1}\right) = i\pi z + f_0(2i\pi z) = i\pi z + \sum_{n\geq 0} B_n\frac{(2i\pi z)^n}{n!}\,.$$
Par ailleurs, on a
$$1 + 2z^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{z^2-n^2} = 1 - 2z^2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n}\right)^2} = 1 - 2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{z^{2k}}{n^{2k}} = 1 - 2\sum_{k\geq 1}\zeta(2k)z^{2k}\,.$$
Donc finalement, on aboutit à l'identité de séries entières suivante :
$$i\pi z + \sum_{n\geq 0} B_n\frac{(2i\pi z)^n}{n!} = 1 - 2\sum_{k\geq 1}\zeta(2k)z^{2k}\,,$$
d'où l'on déduit par identification du coefficient devant z^{2k}, que pour tout $k \geq 1$, on a
$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2}B_{2k}\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Exercice 3 : L'objectif de cet exercice est de montrer la forme faible du théorème des nombres premiers qui affirme qu'il existe deux constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $x > 0$ suffisamment grand,
$$A\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq B\frac{x}{\log x}\,,$$
et d'expliciter les constantes A et B. On rappelle que la fonction $\Lambda : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $\Lambda(n) = \log(p)$ si $n = p^k$, p premier, et $\Lambda(n) = 0$ sinon.

a) On pose $T(x) := \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)E(\frac{x}{n})$. Montrer que $T(x) = \sum_{n\leq x}\log(n)$.

b) En déduire que $T(x) = x\log(x) - x + \mathcal{O}(\log x)$.

c) Montrer que $T(x) - 2T(\frac{x}{2}) \leq \pi(x)\log(x)$.

d) Montrer que l'on peut prendre pour A tout réel $< \log 2$.

e) Montrer que $T(x) - 2T(\frac{x}{2}) \geq \log(\frac{x}{2})\left(\pi(x) - \pi(\frac{x}{2})\right)$.

f) En déduire que $\pi(x) \leq 2\log(2) \sum_{k=1}^{\log_2(x)} \frac{x/2^k}{\log(x/2^k)} + \mathcal{O}(\log x)$.

g) En décomposant la somme précédente en $k \leq \frac{1}{10}\log_2(x)$ et $k > \frac{1}{10}\log_2(x)$, montrer que l'on peut prendre pour B tout réel $> \frac{20}{9}\log(2)$.

h) En raffinant ces methodes, on peut préciser ce résultat avec $A \sim 0,921$ et $B \sim 1,105$. Utiliser ce résultat pour en déduire le postulat de Bertrand (asymptotique) : pour tout $n \geq 1$ suffisamment grand, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.

Solution de l'exercice 3.

a) On montre d'abord le fait classique suivant : si $n \in \mathbb{N}$, et si p est un nombre premier, alors on a

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right) .$$

il suffit pour cela de remarquer qu'il y a $E(\frac{n}{p})$ multiples de p entre 1 et n, $E(\frac{n}{p^2})$ multiples de p^2 entre 1 et n, et plus généralement, pour tout $k \geq 1$, il y a $E(\frac{n}{p^k})$ multiples de p^k entre 1 et n. Alors, en écrivant $n! = 1.2.3.\ldots.(n-1).n$, on voit que

$$v_p(n!) = \left(E\left(\frac{n}{p}\right) - E\left(\frac{n}{p^2}\right)\right) + 2\left(E\left(\frac{n}{p^2}\right) - E\left(\frac{n}{p^3}\right)\right) + \cdots + k\left(E\left(\frac{n}{p^k}\right) - E\left(\frac{n}{p^{k+1}}\right)\right) + \ldots ,$$

donc

$$v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} E\left(\frac{n}{p^k}\right) .$$

On en déduit donc, en posant $r := E(x)$, que

$$\sum_{n\leq x} \log(n) = \log(r!) = \sum_{p} v_p(r!)\log(p) = \sum_{p}\sum_{k\geq 1} E\left(\frac{r}{p^k}\right)\log(p) = \sum_{p}\sum_{k\geq 1} \Lambda(p^k)\left(\frac{x}{p^k}\right) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n) E\left(\frac{x}{n}\right) .$$

b) On fait une comparaison série-intégrale : on a

$$\int_1^x \log(t)dt \leq \sum_{n\leq x} \log(n) \leq \int_2^{x+1} \log(t)dt ,$$

donc

$$x\log x - x + 1 \leq T(x) \leq (x+1)\log(x+1) - (x+1) - 2\log(2) + 2 .$$

Alors il est clair que ces inégalités impliquent que

$$T(x) = x\log x - x + \mathcal{O}(\log x) .$$

c) Par définition, on a

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \Lambda(n)\left(E\left(\frac{x}{n}\right) - 2E\left(\frac{x}{2n}\right)\right) .$$

Or pour tout n, on a $E\left(\frac{x}{n}\right) - 2E\left(\frac{x}{2n}\right) \in \{0;1\}$, donc

$$T(x) - T\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k\leq x} \log p \leq \sum_{p\leq x} \log p \frac{\log x}{\log p} = \log x \sum_{p\leq x} 1 = \pi(x)\log x .$$

d) En combinant les questions b) et c), on obtient que

$$\pi(x)\log x \geq T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \log(2)x + \mathcal{O}(\log x)\,,$$

donc pour tout $A < \log 2$, on a bien

$$A\frac{x}{\log x} \leq \pi(x)$$

pour x assez grand.

e) On a

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n\geq 1}\Lambda(n)\left(E\left(\frac{x}{n}\right) - 2E\left(\frac{x}{2n}\right)\right) \geq \sum_{p\leq x}\Lambda(p)\left(E\left(\frac{x}{p}\right) - 2E\left(\frac{x}{2p}\right)\right)$$

en se limitant aux entiers n premiers. On se limite ensuite aux entiers p premiers tels que $\frac{x}{2} < p \leq x$. On obtient :

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sum_{\frac{x}{2}<p\leq x}\log p\left(E\left(\frac{x}{p}\right) - 2E\left(\frac{x}{2p}\right)\right).$$

Or pour un tel nombre premier p, on a $E\left(\frac{x}{p}\right) = 1$ et $E\left(\frac{x}{2p}\right) = 0$, d'où

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \geq \sum_{\frac{x}{2}<p\leq x}\log p \geq \sum_{\frac{x}{2}<p\leq x}\log\left(\frac{x}{2}\right) = \log\left(\frac{x}{2}\right)\left(\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

f) La question précédente assure que

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{\log\left(\frac{x}{2}\right)}\left(T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Or la question b) assure que $T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) = \log(2)x + \mathcal{O}(\log x)$. Donc on obtient que

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\log 2}{\log\left(\frac{x}{2}\right)}x + \mathcal{O}(1)\,.$$

Une récurrence simple assure alors que

$$\pi(x) = 2\log(2)\sum_{k=1}^{\log_2(x)}\frac{x/2^k}{\log(x/2^k)} + \mathcal{O}(\log x)\,.$$

g) On pose $k_0 := \frac{1}{10}\log_2 x$. Alors on a

$$\sum_{k=1}^{k_0}\frac{x/2^k}{\log(x/2^k)} \leq \frac{x}{\log(x/2^{k_0})}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k} \leq \frac{x}{\log(x/2^{k_0})} \leq \frac{10}{9}\frac{x}{\log x}\,.$$

De l'autre côté, on a

$$\sum_{k>k_0}\frac{x/2^k}{\log(x/2^k)} \leq x\sum_{k>k_0}\frac{1}{2^k} \leq \frac{x}{2^{k_0}} \leq x^{\frac{9}{10}}\,.$$

D'où finalement

$$\pi(x) \leq \frac{20}{9}\log(2)\frac{x}{\log x} + \mathcal{O}(\log x)\,.$$

Cela implique alors que pour tout $B > \frac{20}{9}\log(2)$, on a

$$\pi(x) \leq B\frac{x}{\log x}$$

pour x assez grand.

h) On obtient l'estimation suivante : pour x assez grand, on a

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq A\frac{x}{\log x} - B\frac{x}{2\log\left(\frac{x}{2}\right)},$$

donc puisque $2A > B$, on obtient que pour x assez grand, $\pi(x) - \pi(\frac{x}{2}) > 0$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 4 : On souhaite démontrer directement le postulat de Bertrand, à savoir : pour tout $n \geq 1$, il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.

a) Montrer que $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

b) On veut montrer que pour tout réel $x \geq 2$, on a $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$.

  i) Montrer qu'il suffit de le montrer pour $x = q$ premier. On va alors le montrer par récurrence sur q.

  ii) Montrer que si $q = 2m+1$, on a $\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$ et $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$.

  iii) Montrer que $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.

  iv) Conclure.

c) Montrer que la valuation p-adique de $\binom{2n}{n}$ vaut $\sum_{k \geq 1} \left(E(\frac{2n}{p^k}) - 2E(\frac{n}{p^k})\right)$.

d) Montrer que pour tout n, p, k, $E(\frac{2n}{p^k}) - 2E(\frac{n}{p^k}) = 0$ ou 1.

e) Montrer que la valuation p-adique de $\binom{2n}{n}$ est inférieure ou égale à $\max\{r : p^r \leq 2n\}$.

f) Montrer que si $n \geq 3$, $\binom{2n}{n}$ n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $\frac{2}{3}n < p \leq n$.

g) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leq 2n} p$.

h) On suppose que pour un entier $n \geq 2$, il n'existe pas de nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$. Montrer que $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$.

i) En déduire qu'un tel n est majoré par une constante explicite.

j) Conclure.

Solution de l'exercice 4.

a) On sait que $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$. Or le plus grand terme dans cette somme de $2n+1$ termes est le terme central $\binom{2n}{n}$, et on a en outre $\binom{2n}{0} = \binom{2n}{2n} = 1$, donc on en déduit que $2n\binom{2n}{n} \geq 4^n$, d'où $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

b) i) Soit q le plus grand nombre premier inférieur ou égal à x. Si on sait que $\prod_{p \leq q} p \leq 4^{q-1}$, alors on a $\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq q} p \leq 4^{q-1} \leq 4^{x-1}$, d'où le résultat pour x. Donc on peut supposer dans la suite que x est un nombre premier.

  ii) Puisque $m+1 < q$, on sait par récurrence que $\prod_{p \leq m+1} p \leq 4^m$. Soit p un nombre premier tel que $m+1 < p \leq 2m+1$. Alors en écrivant

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)\dots(m+1)}{(m+1)m\dots2} = \frac{(2m+1)(2m)\dots(m+2)}{m(m-1)\dots2},$$

  On obtient que le nombre premier p divise le numérateur de cette fraction, mais pas son dénominateur, donc p divise l'entier $\binom{2m+1}{m+1}$. Donc on en déduit que $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$ (puisque le premier entier divise le second).

  iii) On remarque que $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$ et que $\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2.4^m$. Donc en ne conservant que les deux termes centraux dans la somme, on trouve

$$2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} + \binom{2m+1}{m} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2.4^m,$$

  d'où le résultat.

iv) Les questions b)ii) et b)iii) assurent que $\prod_{p\leq 2m+1} p \leq 4^m.4^m$, donc $\prod_{p\leq q} p \leq 4^{q-1}$. On a donc montré l'héridité dans la preuve par récurrence. Pour l'initialisation, il suffit de vérifier que $\prod_{p\leq 2} p \leq 4^1$, i.e. $2 \leq 4$, ce qui est vrai.

On a donc bien montré que pour tout réel $x \geq 2$, on a $\prod_{p\leq x} p \leq 4^{x-1}$.

c) On utilise à nouveau le calcul effectué à l'exercice 3 pour $v_p(n!)$. En effet, puisque $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, on a pour tout nombre premier p,

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k\geq 1}\left(E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right)\right).$$

d) C'est clair avec les encadrements $x-1 < E(x) \leq x$ pour tout réel x.

e) Supposons $p^r > 2n$. Alors dans la formule de la question c), on a $E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right) = 0$. Donc on obtient finalement que

$$v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = \sum_{r \text{ tel que } p^r\leq 2n}\left(E\left(\frac{2n}{p^k}\right) - 2E\left(\frac{n}{p^k}\right)\right) \leq \sum_{r \text{ tel que } p^r\leq 2n} 1 = r_0\,,$$

où $r_0 := \max\{r : p^r \leq 2n\}$.

f) Soit p premier tel que $\frac{2}{3}n < p \leq n$. Alors $p \neq 2$ et $3p > 2n$, donc les seuls multiples de p entre 1 et $2n$ sont p et $2p$. Or $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, donc p et $2p$ apparaissent au numérateur, et p apparait deux fois au dénominateur, donc p ne divise pas $\binom{2n}{n}$.

g) On décompose $\binom{2n}{n}$ en facteurs premiers. on obtient

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \prod_{\frac{2}{3}n<p\leq n} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \prod_{n<p\leq 2n} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)}.$$

Or le premier produit contient au plus $\sqrt{2n}-1$ termes, qui sont tous inférieurs ou égaux à $2n$ par la question e). Donc on a

$$\prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^{v_p\left(\binom{2n}{n}\right)} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}.$$

Dans les trois produits suivants, on a $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$ ou 1. En outre, on a vu à la question f), que si $\frac{2}{3}n < p \leq n$, alors $v_p\left(\binom{2n}{n}\right) = 0$. Donc finalement on obtient que

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \prod_{n<p\leq 2n} p\,.$$

h) On a, grâce à la question précédente,

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p\,.$$

Or la question b) assure que

$$\prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \leq \prod_{p\leq\frac{2}{3}n} p \leq 4^{\frac{2}{3}n},$$

d'où le résultat.

i) En combinant la question h) avec la question a), on obtient

$$\frac{4^n}{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{\frac{2n}{3}} \,,$$

donc

$$4^{\frac{n}{3}} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \,.$$

En prenant le logarithme, on obtient finalement

$$\sqrt{n} \leq \frac{3\sqrt{2}}{\log 4} \log(2n) \,.$$

Alors, un tableau de variation et une recherche par valeurs approchées (par dichotomie par exemple) assure que la relation précédente implique que

$$n \leq 426 \,.$$

j) Pour démontrer le postulat de Bertrand, il reste à le montrer pour les entiers $n \leq 426$. Pour cela, la suite de nombres premiers suivants suffit (chacun de ces nombres premiers est inférieur au double du précédent) :

$$2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 431 \,.$$

Exercice 5 : Soit $a, b, x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Soient $\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n) \in \mathbb{C}$. On pose $A(x) := \sum_{x_i \leq x} \alpha(x_i)$, pour $a \leq x \leq b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha(x_i) f(x_i) = A(b) f(b) - \int_a^b A(x) f'(x) dx \,.$$

Solution de l'exercice 5. C'est une transformation d'Abel. On pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. Calculons $\int_a^b A(x) f'(x) dx$:

$$\int_a^b A(x) f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} A(x) f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{j=1}^{i} \alpha(x_j) f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{i} \alpha(x_j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) dx \,.$$

Donc puisque f est de classe C^1, on obtient que

$$\int_a^b A(x) f'(x) dx = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{i} \alpha(x_j) \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) \sum_{i=j}^{n} \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) \left(f(b) - f(x_j) \right) \,.$$

Donc finalement,

$$\int_a^b A(x) f'(x) dx = f(b) \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) - \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) f(x_j) = f(b) A(b) - \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j) f(x_j) \,.$$

Exercice 6 :

a) Montrer que le théorème des nombres premiers implique que $p_n \sim n \log(n)$. De même, montrer qu'il implique que $\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log(p) \sim x$.

b) Si $d_n := p_{n+1} - p_n$, montrer que $\sum_{n \leq x} \frac{d_n}{\log n} \sim x$.

c) Montrer que $\liminf \frac{d_n}{\log(n)} \leq 1 \leq \limsup \frac{d_n}{\log n}$.

d) Montrer que l'ensemble des quotients de deux nombres premiers est dense dans $\mathbb{R}^+$.

e) Montrer les formules suivantes : $\sum_{p\leq x} \frac{\log(p)}{p} \sim \log(x)$ et $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \sim \log(\log(x))$.

f) Montrer que le théorème des nombres premiers implique que pour tout $\lambda > 1$, on a $\pi(\lambda x) - \pi(x) \sim (\lambda - 1)\frac{x}{\log(x)}$.

En déduire que pour tout $\lambda > 1$, il existe $x(\lambda) \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geq x(\lambda)$, l'intervalle $]x; \lambda x]$ contienne un nombre premier.

Solution de l'exercice 6.

a) Le théorème des nombres premiers assure que $\pi(p_n) \sim \frac{p_n}{\log p_n}$. Or par définition, on a $\pi(p_n) = n$. Donc finalement on a l'équivalent suivant : $p_n \sim n \log(p_n)$. Il reste à montrer que $\log(p_n) \sim \log n$ pour conclure. Puisque $p_n \sim n \log(p_n)$, on en déduit que $\frac{p_n}{n \log p_n}$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$, donc $\log p_n - \log n - \log\log p_n$ tend vers 0, donc en divisant par $\log p_n$, on obtient que $\frac{\log n}{\log p_n}$ tend vers 1 car $\lim_n \frac{\log\log p_n}{\log p_n} = 0$. Donc finalement $\log p_n \sim \log n$, donc $p_n \sim n \log n$.

On définit pour tout n, $\alpha(n) := 1$ si n est premier et 0 sinon. On pose $f := \log$. Alors on a

$$\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p = \sum_{n\leq x} \alpha(n) f(n) .$$

Si on pose $A(x) := \sum_{n\leq x} \alpha(x) = \pi(x)$, alors l'exercice 5 assure que l'on a

$$\theta(x) = \pi(x)\log(x) - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt .$$

Or on a $\frac{\pi(t)}{t} dt \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\log t}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\log t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, donc on obtient

$$\int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} dt \sim \frac{x}{\log x} ,$$

en utilisant l'exercice 1. Enfin, on sait que $\pi(x) \log x \sim x$, donc on conclut que

$$\theta(x) \sim x .$$

b) On applique l'exercice 5 avec $\alpha(n) := d_n$, $f(x) := \frac{1}{\log x}$ et $A(x) = \sum_{n\leq x} d_n = p_{E(x)} - 2$. On obtient alors

$$\sum_{n\leq x} \frac{d_n}{\log n} = \frac{p_{E(x)} - 2}{\log x} + \int_2^x \frac{p_{E(t)} - 2}{t(\log t)^2} dt .$$

Or la question a) assure que $\frac{p_{E(x)}-2}{\log x} \sim x$ et $\frac{p_{E(t)}-2}{t(\log t)^2} \sim \frac{1}{\log t}$. Donc puisque $t \mapsto \frac{1}{\log t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$, on en déduit que $\int_2^x \frac{p_{E(t)}-2}{t(\log t)^2} dt \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}$ en utilisant l'exercice 1. Finalement, on a donc

$$\sum_{n\leq x} \frac{d_n}{\log n} \sim x .$$

c) On note $\lambda := \liminf \frac{d_n}{\log n}$. Supposons $\lambda > 1$. En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $\frac{d_n}{\log n} \leq \frac{1+\lambda}{2}$. Donc $\sum_{n\leq x} \frac{d_n}{\log n} \geq \frac{1+\lambda}{2} x + \mathcal{O}(1)$. Or $\frac{1+\lambda}{2} > 1$, donc cela contredit la question b). Donc finalement $\liminf \frac{d_n}{\log n} \leq 1$. La preuve pour $\limsup \frac{d_n}{\log n} \geq 1$ est exactement symétrique.

d) Soient $0 < \alpha < \beta$. Alors $\frac{\pi(n\beta)}{\pi(n\alpha)} \sim \frac{\beta}{\alpha}\frac{\log n\alpha}{\log n\beta} \sim \frac{\beta}{\alpha} > 1$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\pi(n\beta) > \pi(n\alpha)$. Or il existe p premier tel que $p \geq n_0$. Alors $\pi(p\beta) > \pi(p\alpha)$, donc il existe un nombre premier q tel que $p\alpha < q \leq p\beta$. Donc $\alpha < \frac{q}{p} \leq \beta$. Cette construction étant valables pour tous $0 < \alpha < \beta$, cela assure que les quotients de deux nombres premiers sont denses dans $\mathbb{R}^+$.

e) On pose $\alpha(n) = 1$ si n premier, 0 sinon, et $f(x) := \frac{\log x}{x}$. Alors l'exercice 5 assure que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \pi(x)\frac{\log x}{x} - \int_2^x \frac{\pi(t)(1-\log t)}{t^2} dt\,.$$

Or on a $\pi(x)\frac{\log x}{x} \sim 1$, et $\frac{\pi(t)(1-\log t)}{t^2} \sim \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$, donc on a

$$\int_2^x \frac{\pi(t)(1-\log t)}{t^2} dt \sim \int_2^x \frac{dt}{t} \sim \log x\,.$$

Donc finalement, on a

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} \sim \log x\,.$$

Une autre solution pour démontrer cet équivalent consiste à poser $\alpha(n) = \log n$ si n est premier et 0 sinon, et $f(x) = \frac{1}{x}$, puis à utiliser l'exercice 5 et la question a) (avec la fonction θ).
Pour le second équivalent, on pose $f(x) := \frac{1}{x}$. Alors on obtient

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt\,.$$

Or on a $\frac{\pi(x)}{x} \sim \frac{1}{\log x}$ et $\frac{\pi(t)}{t^2} \sim \frac{1}{t \log t}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. On a donc

$$\int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \sim \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt \sim \log\log x\,.$$

Donc finalement on obtient

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log\log x\,.$$

f) On sait que $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ et $\pi(\lambda x) \sim \lambda \frac{x}{\log x}$. En particulier, on a $\lim \frac{\pi(\lambda x)}{\pi(x)} = \lambda$. Donc $\frac{\pi(\lambda x) - \lambda\pi(x)}{\pi(x)} \to 0$. Donc $\lim \left(\frac{\pi(\lambda x)-\pi(x)}{\pi(x)} - (\lambda - 1)\right) = 0$. Donc $\frac{\pi(\lambda x)-\pi(x)}{\pi(x)} \sim (\lambda - 1)$, donc finalement $\pi(\lambda x) - \pi(x) \sim (\lambda - 1)\frac{x}{\log x}$.
En particulier, pour x assez grand, $\pi(\lambda x) - \pi(x) > 0$, donc il existe un nombre premier p dans l'intervalle $]x; \lambda x]$.

Exercice 7 : On souhaite montrer que le théorème des nombres premiers implique la non-annulation de ζ sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = 1$.

a) On note $\zeta_{\mathbb{P}}(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}$. Montrer que la fonction $f(s) := \log(\zeta(s)) - \zeta_{\mathbb{P}}(s)$ (définie pour $s \in\,]1; +\infty[$) s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$.
b) Soit $t > 0$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $\zeta(1 + it) \neq 0$.
   ii) $\zeta_{\mathbb{P}}$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $1 + it$.
   iii) $\zeta_{\mathbb{P}}(\sigma + it) = \mathrm{o}(\log(\sigma - 1))$ quand $\sigma \to 1^+$.
c) Montrer que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on a $\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)\left(n^{-s} - (n + 1)^{-s}\right)$.
d) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, notée δ, telle que pour tout s, si $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on a $\zeta_{\mathbb{P}}(s) = s \sum_{n \geq 1} \frac{\pi(n)}{n} n^{-s} + \delta(s)$.
e) Montrer que dans la question b), on peut remplacer $\zeta_{\mathbb{P}}$ par $\Pi : s \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{\pi(n)}{n} n^{-s}$.

f) Soit une série de Dirichlet à coefficients strictement positifs $g(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$. On suppose que g a une abscisse de convergence absolue notée σ_0, et que $g(\sigma_0)$ diverge. Soit également $h(s) = \sum_{n\geq 1} b_n n^{-s}$, avec $b_n \sim a_n$. Montrer que l'abscisse de convergence absolue de h est aussi σ_0 et que $|g(s) - h(s)| = o(g(\mathrm{Re}\,(s)))$ quand $\mathrm{Re}\,(s) \to \sigma_0$.

g) On pose $h(s) := \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} n^{-s}$. Montrer que $h'(s) = 1 - \zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, et que $h(\sigma) \sim -\log(\sigma - 1)$ quand $\sigma \to 1^+$.

h) Montrer que $|\Pi(s) - h(s)| = o(\log(\mathrm{Re}\,(s) - 1))$ quand $\mathrm{Re}\,(s) \to 1^+$.

i) Montrer que pour $t > 0$, $|\Pi(\sigma + it)| = o(\log(\sigma - 1))$ quand $\sigma \to 1^+$.

j) Conclure que ζ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = 1$.

Solution de l'exercice 7.

a) Soit $s \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. Alors on a par définition $\log(\zeta(s)) = -\sum_p \log(1 - p^{-s})$, où $\log(1 - p^{-s}) = -\sum_{n\geq 1} \frac{p^{-ns}}{n}$, donc $f(s) = -\sum_p (\log(1 - p^{-s}) + p^{-s})$. Or on a $\log(1 - p^{-s}) + p^{-s} \sim_{p\to+\infty} -\frac{p^{-2s}}{2}$. Donc la série de fonctions précédente converge normalement sur tout compact contenu dans $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$. Donc la fonction f admet un prologement holomorphe à $\mathrm{Re}\,(s) > \frac{1}{2}$.

b) On suppose i). Alors la formule $\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \log(\zeta(s)) - f(s)$, valable pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, peut s'étendre sur un voisinage de $s = 1+it$ puisque ζ ne s'annule pas en ce point, donc la fonction $s \mapsto \log(\zeta(s))$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $1+it$. Alors la formule $\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \log(\zeta(s)) - f(s)$ permet de prolonger $\zeta_{\mathbb{P}}$ au voisinage de $1 + it$. D'où ii).

L'assertion ii) implique iii) est évidente.

Supposons iii) et le contraire de i), i.e. $\zeta(1 + it) = 0$. Alors $\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}$ admet une limite finie quand $\sigma \to 1^+$. Or on dispose de la formule $\zeta(s) = e^{\zeta_{\mathbb{P}}(s)} e^{f(s)}$ pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$. Puisque f est holomorphe au voisinage de $1 + it$, on en déduit que $e^{\zeta_{\mathbb{P}}(\sigma+it) - \log(\sigma-1)}$ admet une limite finie quand $\sigma \to 1^+$. Par ii), on a $\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{\zeta_{\mathbb{P}}(\sigma+it)}{\log(\sigma-1)} = 0$, donc $\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{\zeta_{\mathbb{P}}(\sigma+it) - \log(\sigma-1)}{\log(\sigma-1)} = -1$, donc $\lim_{\sigma\to 1^+} (\zeta_{\mathbb{P}}(\sigma + it) - \log(\sigma - 1)) = +\infty$, ce qui est contradictoire. Donc finalement iii) implique i).

c) On définit le fonction indicatrice des nombres premiers $\delta_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\delta_{\mathbb{P}}(n) = 1$ si n est premier et 0 sinon. On a alors $\delta_{\mathbb{P}}(n) = \pi(n) - \pi(n - 1)$. Or on a

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \sum_p p^{-s} = \sum_n \delta_{\mathbb{P}}(n) n^{-s} = \sum_n (\pi(n) - \pi(n-1))\, n^{-s}\,.$$

Or pour tout N, on a

$$\sum_{n=1}^{N} (\pi(n) - \pi(n-1))\, n^{-s} = \sum_{n=1}^{N-1} \pi(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s}) + \pi(N) N^{-s}\,.$$

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$,

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)(n^{-s} - (n+1)^{-s})\,.$$

d) On calcule $\zeta_{\mathbb{P}}(s) - s\sum_{n\geq 1} \frac{\pi(n)}{n} n^{-s}$, pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$:

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) - s\sum_{n\geq 1} \frac{\pi(n)}{n} n^{-s} = \sum_{n\geq 1} \pi(n) n^{-s} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} - \frac{s}{n}\right),$$

or on a $\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} - \frac{s}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{s(s-1)}{2n^2}$, donc $\pi(n) n^{-s} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} - \frac{s}{n}\right) \sim -\frac{s(s-1)}{2n^{1+s}\log n}$. Or la série de terme général $\frac{s(s-1)}{2n^{1+s}\log n}$ converge absolument pour $\mathrm{Re}\,(s) > 0$, donc en posant $\delta(s) := s\sum_{n\geq 1} \pi(n) n^{-s} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} - \frac{s}{n}\right)$, on a que δ est une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ telle que pour tout $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on ait

$$\zeta_{\mathbb{P}}(s) = s \sum_{n \geq 1} \frac{\pi(n)}{n} n^{-s} + \delta(s)\,.$$

e) C'est clair puisque δ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

f) Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a $|b_n n^{-s}| \sim |a_n n^{-s}|$. Cela assure que les deux séries de Dirichlet ont même abscisse de convergence absolue.

Par hypothèse, on a $(a_n - b_n) = \mathrm{o}(a_n)$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n - b_n| \leq \epsilon a_n$. Pour tout $s = \sigma + it$, avec $\sigma > \sigma_0$, on a

$$\frac{|g(s) - h(s)|}{|g(\sigma)|} \leq \frac{\sum_{n\geq 1} |a_n - b_n| n^{-\sigma}}{\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma}} = \frac{\sum_{n=1}^{n_0} |a_n - b_n| n^{-\sigma}}{\sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma}} + \frac{\sum_{n \geq n_0} |a_n - b_n| n^{-\sigma}}{\sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma}} \leq \frac{\sum_{n=1}^{n_0} |a_n - b_n| n^{-\sigma}}{\sum_{n\geq 1} a_n n^{-\sigma}} + \epsilon\,.$$

Or par théorème de convergence monotone, on a $\lim_{\sigma \to \sigma_0} \left(\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma} \right) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma_0} = +\infty$, donc pour $\sigma > \sigma_0$ suffisamment proche de σ_0, on a $\frac{\sum_{n=1}^{n_0} |a_n - b_n| n^{-\sigma}}{\sum_{n \geq 1} a_n n^{-\sigma}} \leq \epsilon$. Donc finalement, pour σ suffisamment proche de σ_0, on a $\frac{|g(s)-h(s)|}{|g(\sigma)|} \leq 2\epsilon$, donc

$$\lim_{\sigma \to \sigma_0^+} \frac{|g(s) - h(s)|}{|g(\sigma)|} = 0\,.$$

g) Par convergence uniforme de la série de fonctions et de la série des fonctions dérivées sur tout compact de $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, la fonction h est bien définie et dérivable sur $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, et sa dérivée est

$$h'(s) := -\sum_{n \geq 2} n^{-s} = 1 - \zeta(s)\,.$$

Or on sait que $\zeta(\sigma) \sim_{\sigma \to 1^+} \frac{1}{\sigma - 1}$ puisque ζ admet un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. Donc on en déduit que $h'(\sigma) \sim_{\sigma \to 1^+} \frac{-1}{\sigma-1}$. Donc en intégrant cet équivalent (on peut le faire car $\sigma \mapsto \frac{1}{\sigma-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1), on en déduit que $h(\sigma) \sim_{\sigma \to 1^+} -\log(\sigma - 1)$.

h) On applique la question f) aux fonctions $g : s \mapsto \Pi(s)$ et h, avec $a_n := \frac{\pi(n)}{n}$ et $b_n = \frac{1}{\log n}$ ($\sigma_0 = 1$). Le théorème des nombres premiers assure que $a_n \sim b_n$, et on sait que la série $\sum_n \frac{1}{n \log n}$ diverge. Donc on peut bien appliquer la question f), d'où $|\Pi(s) - h(s)| = \mathrm{o}(|h(\sigma)|)$ quand $\sigma = \mathrm{Re}\,(s)$ tend vers $\sigma_0^+ = 1^+$. Enfin, la question g) assure que $h(\sigma) \sim_{\sigma \to 1^+} -\log(\sigma - 1)$, donc on a bien

$$|\Pi(s) - h(s)| = \mathrm{o}(\log(\sigma - 1))\,.$$

i) La formule $h'(s) = 1 - \zeta(s)$ assure que h' admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un seul pôle en 1. Cela assure que h admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. En particulier, h admet une limite finie en $1 + it$, $t > 0$. Donc $|h(\sigma + it)| = \mathrm{o}(\log(\sigma - 1))$ quand $\sigma \to 1^+$. Donc la question h) assure que

$$|\Pi(\sigma + it)| = \mathrm{o}(\log(\sigma - 1))\,.$$

j) Les questions b), e) et i) assurent que pour tout $t > 0$, $\zeta(1 + it) \neq 0$. En utilisant que $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ sur $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, on conclut que ζ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = 1$.