Examen du 26 septembre 2020
Durée : 1h30

Les exercices sont indépendants. Sauf le dictionnaire français-chinois, aucun document n'est autorisé, ni poly, ni TD, ni notes de cours. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On en tire deux et on note X le premier numéro tiré, Y le second.

a) Déterminer les lois conjointe et marginales en examinant au cas « tirage avec remise ».

b) Déterminer les lois conjointe et marginales en examinant au cas « tirage sans remise ».

c) En comparant les deux cas : tirage avec remise et tirage sans remise, que peut-on en conclure par le calcul ci-dessus ?

d) Dans le cas « tirage sans remise », calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$ avec $i = 1, 2, 3$, les espérances de X,Y, les variances de X, Y, et les covariances de (X, Y). Est ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 2. Soit X et Y deux variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $Z = |X - Y|$. Etudier l'indépendance deux à deux et l'independence mutuelles des variables X, Y, Z.

Exercice 3. [Loi forte des grands nombres] Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes, de même loi, possédant un espérance finie m. On définit S_n par

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n. \tag{1}$$

a) Si $A_n \in \mathcal{A}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, montrer que

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{p=k}^{\infty} A_p) = 0.$$

b) On pose $X_n^+ = \sup\{0, X_n\}$ et $Y_n = X_n^+ \mathbf{1}_{X_n^+ \leq n}$ et

$$S_n^+ = X_1^+ + \ldots + X_n^+, \quad T_n = Y_1 + \ldots + Y_n. \tag{2}$$

i) Montrer directement par définition que X_n^+ sont aléatoires réelles discrètes, mutuellement indépendantes, de même loi, possédant un espérance finie m^+.

ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n}\right] = m^+$.

iii) Soit $\alpha > 1$. On pose $k_n = [\alpha^n]$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{T_{k_n}}{k_n} - \mathbb{E}\left[\frac{T_{k_n}}{k_n}\right]\right| \geq \epsilon\right) < \infty.$$

En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0$ tel que quand $n \to \infty$, on a

$$\frac{T_{k_n}}{k_n}(\omega) \to m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A.$$

iv) Pour $p \in [\![k_n, k_{n+1}]\!]$, montrer que $(\alpha^{-1} - \alpha^{-n-1})\frac{T_{k_n}}{k_n} \leq \frac{T_p}{p} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha^{-n}} \frac{T_{k_{n+1}}}{k_{n+1}}$. En déduire qu'il existe $A' \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A') = 0$ tel que quand $p \to \infty$, on a

$$\frac{T_p}{p}(\omega) \to m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus A'.$$

v) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n^+ \neq Y_n) \leq \mathbb{E}(X_1^+).$$

En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B) = 0$ tel que quand $n \to \infty$, on a

$$\frac{S_n^+}{n} \to m^+ \quad \forall \omega \in \Omega \setminus B.$$

On dit que $\frac{S_n^+}{n}$ converge presque sûrement vers m^+.

c) **Loi forte des grands nombres.** Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \neq m\right) = 0. \tag{3}$$

d) **Loi faible des grands nombres**. Déduire que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) = 0. \tag{4}$$