习题2020秋

1. 高斯整环的素理想

高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$， 其中 $i=\sqrt{-1}$. 下面我们分类 $\mathbb{Z}[i]$ 中的所有素理想。

1，证明主理想整环的所有非零素理想都是极大理想。

2， 验证高斯整环 $\mathbb{Z}[i]$ 是Euclide环，从而是主理想整环。

3，对于两个含单位元的交换环 R_1, R_2 和环同态 $f: R_1 \to R_2$, 求证：任何素理想的原像是素理想。

4， 在上题的情况中，举例说明极大理想的原像不一定是极大理想。

5，通过环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[i]$, 证明 $\mathbb{Z}[i]$ 里的所有非零素理想都包含某个素数 p。

6，应用如下著名结论分类 $\mathbb{Z}[i]$ 中的所有素理想。

定理：对于一个奇素数 p，方程 $x^2+y^2=p$ 有正整数解当且仅当 $p\equiv 1 (\mod 4)$。

2. 子群、子环的乘、加

1， 取一个群 G 和它的俩子群 G_1, G_2, 定义

$$G_1 \cdot G_2 := \{ab: \ a\in G_1, b\in G_2\}.$$

问题： 什么时候 $G_1\cdot G_2$ 是 G 的子群 （正规子群)? 那么$G_1\cap G_2$ 呢?

2，取环 R 和它的俩理想 (左、右、双边，或者子环) I_1, I_2， 定义

$$I_1 + I_2 := \{a+b: \ a\in I_1, b\in I_2\}.$$

问题：什么时候 I_1+I_2 是理想 (左、右、双边，或者子环)? 那么$I_1\cap I_2$ 呢?

3. 极大理想、素理想

设 R 是一个含幺交换环。

R 的一个乘法系是 R 的一个子集 S 使得 $0\notin S$，$1\in S$ 并且 S 对乘法封闭: 任意 $a,b\in S$ 可以推出 $ab\in S$。 $I(S)$ 为和 S 不交的理想全体。

1，回顾梁老师的极大理想是素理想的证明：I 是极大理想 $\Rightarrow R/I$ 是域 $\Rightarrow R/I$ 是整环 $\Rightarrow I$ 是素理想。

2，模仿上面的证明求证 $I(S)$ 中的极大元是素理想（利用作业里的环同态基本定理）：I 是 $I(S)$ 中的极大元 $\Rightarrow R/I$ 中任何理想包含 S 的像里的元素 $\Rightarrow R/I$ 是整环 $\Rightarrow I$ 是素理想。

3，翻译 上面两个证明，如何不通过商环 R/I，直接给出证明。

4. 中国剩余定理的抽象版本

这道题给大家展示一下具体的东西和抽象的东西怎么相互翻译（就是相互抄），这是理解抽象数学的一个非常好的方法。我没期待大家掌握下面的结论，更期待大家掌握这种翻译方法。

设 R 是一个含幺交换环，取 R 的理想 $I_1, \cdots, I_n$, 其中 n 是整数。

1, 构造同态

$$\phi : R \to R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

（后者是环的乘积，见之前的作业题）并证明同态核$\phi^{-1}(0) = I_1 \cap \cdots \cap I_n$。

2, 请模仿中国剩余定理的证明（就是抄一遍证明），证明：如果对任意的 $1 \le i < j \le n$, 我们有 $I_i + I_j = R$, 那么 ϕ 是满同态。

3, 设 k 是一个域，取 $R = k[x]$。证明：对于两两不同的 n 个元素 $a_i \in k$ 以及 n 个元素 $b_i \in k$, 存在多项式 $f \in k[x]$ 使得对于所有的 i，我们有 $f(a_i) = b_i$。

5. 中国剩余定理的具体计算

我会随手写一些同余方程（类似于 $a \equiv 2 \mod 3$; $a \equiv 4 \mod 5$, 求 $a \equiv$ 多少 $\mod 15$），然后大家来用中国剩余定理的证明里的方法解（注意：中国剩余定理的证明本质上是个构造性证明）。

比如：$a \equiv 4 \mod 5$; $a \equiv 3 \mod 7$, 求 $a \equiv$ 多少 $\mod 35$?

6. 课外读物：分式环

设 R 是一个含幺交换环，S 是它的一个乘法系，$I(S)$ 为所有与 S 不交的理想。

此时我们在笛卡尔积 $R \times S$ 上定义关系:

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \exists s" \in S, \quad \text{使得} \quad s"(as' - a's) = 0.$$

1，证明上面的关系是等价关系。

记 $[a, s]$ 为相应等价类， R_S 为商集。我们希望 $[s, a]$ 想象成 a/s，我们定义加法和乘法：定义

$$[a, s] + [a', s'] := [s'a + sa', ss']$$
$$[a, s] \cdot [a', s'] := [aa', ss'].$$

2，证明上面的定义是合理的，并且

（i）这两个运算使得 R_S 是一个含幺交换环;

（ii）映射 $\phi : R \to R_S : a \mapsto [a, 1]$ 是一个环同态。

3，取 $R = \mathbb{Z}$, 并取一个素数 p。

（i）当 $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 时， 求证: $R_S = \mathbb{Q}$。

（ii）当 $S := \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ 时，刻画 R_S, 并证明 $R_S \neq \mathbb{Z}_p$。

4，取 $I(S)$ 中的的理想 I,。 证明：$I_S := \{[a, s] : \ a \in I, s \in S\}$ 是 R_S 的一个理想。

5，证明：在上题中，当 I 是素理想时，I_S 也是素理想，并且 $\phi^{-1}(I_S) = I$。

6，证明映射：$\{I(S)$ 中所有素理想$\} \to \{R_S$ 中的所有素理想$\}$： $I \mapsto I_S$ 是一个双射。

7，用6重新证明 $I(S)$ 中的极大元是素理想。

8，请举例说明: 上面的 ϕ 不一定是单射。

7. 多项式环与域扩张

设 L 是一个域，$K \subset L$ 是子域。这些诱导了环嵌入 $K[x] \subset L[x]$. 注意 $K[x]$ 是主理想整环。回顾，对于环同态，素理想的原像是素理想（之前的习题）。

1, 对于两个多项式 $f, g \in K[x]$, 求证 它们在 $K[x]$ 和 $L[x]$ 里的最大公因式相等。

2，求证：对于 $K[x]$ 的任何理想 I, 我们有 $(L[x] \cdot I) \cap K[x] = I$。

3，对任何素理想 $P \subset K[x]$, 记 $S(P)$ 为 $L[x]$ 的所有满足 $Q \cap K[x] = P$ 的素理想 Q。 求证：$S(P)$ 非空。

4，对于任何一个非平凡素理想 P, 求证集合 $S(P)$ 有限并给出上界。

5，对于平凡素理想 (0), 集合 $S((0))$ 是否一定有限?

8. 有限域上的多项式环

固定一个素数 p, 设 $\mathbb{F} := \mathbb{Z}/p$. 我们考虑含幺交换环 $\mathbb{F}[x]$。

1, 在 $\mathbb{F}[x]$ 里面分解 $x^p - x$ 和 $x^p - a$, 其中 $a \in \mathbb{F}$。

2, 回顾可能讲过的结论：对于任何一个有限群 G，取 n 为 G 的元素个数，那么任何一个元素 $g \in G$, 我们有 $g^n = e$.

3，回顾梁老师课上讲的 $\mathbb{Z}$ 上的Eular 定理的证明：$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ 对于所有的 $(m, n) = 1$, 其中 $\varphi(n)$ 为Eular 函数。

4，（费马小定理）设 f 是 $\mathbb{F}[x]$ 里的不可约多项式。请猜测并证明相应的费马小定理：取一个什么样的整数 n 使得，对于任一多项式 g, 我们有

$$g^n \equiv 1 \mod f,$$

并且 $\equiv$ 又是什么意思。同样，欧拉版本的定理也可以建立。

9. 多元高次方程组

对于任何一个域 K, 我们都可以考虑以 K 上的多元高次方程的解（即以K）。比如著名的费马大定理就是问 以 $\mathbb{Q}$ 为系数 的 3元多项式方程 $x^n + y^n - z^n = 0$ 的解。 再比如 $ax^2 + by^3 = 0$, 其中 $a, b \in K$ （我们称系数在域 K 里面）。

一个多项式是**齐次**指它的每一项的次数都相等。比如 $3x^n + 4y^n - 5z^n$, $2xy - 7z^2$ 都是齐次的，但 $x^3 + x^2 + y$, $xy^2 + z^2$ 都不是齐次的。 齐次方程组指有多个齐次多项式构成的方程组。比如 $2x^4 + 5y^4 = 0, x^2y - 9z^3 = 0$ 是2个3元齐次方程构成的方程组 （几元只考虑所有方程一共几个变元，而齐次只要求每个方程齐次，不要求方程组里不同方程次数一样）。

域 $\mathbb{C}$ 上的代数基本定理有下面的推论（我没找到初等证明，谁自己证出来可以免口试）：

当 $m < n$ 时，域 $\mathbb{C}$ 上任何 m个n元齐次方程构成的方程组一定有非零解 (即，不等于 $(0,\cdots,0)$, 但 $(1,0\cdots,0)$ 可以考虑)。

1，对上述结果，如果不加齐次条件，请给出反例。

2，在多项式环 $\mathbb{C}[t]$ 上，求2次齐次方程：$tx^2+(1-t^2)y^2+z^2=0$ 的一个非零解，注意，这里 $x,y.z$ 是未知数，而 t 是系数，并且得到的解 x,y,z 是在 $\mathbb{C}[t]$ 里的（不一定在 $\mathbb{C}$ 里）。

3, 在多项式环 $\mathbb{C}[t]$ 上，求2次齐次方程：$tx^2+(1-t^3)y^2+z^2=0$ 的一个非零解。

4，说明：在 $\mathbb{C}(t)$ 上解多元高次齐次方程 和 在 $\mathbb{C}[t]$ 上解多元高次方程是一样的。

5，（曾氏定理）对于 $\mathbb{C}(t)$ 上的一个n元d次齐次多项式，如果 $n>d$, 那么一定有非零解。 提示：要用到上面的 $\mathbb{C}$ 上方程组有解的结论。

10. 形式幂级数环

即 $\mathbb{C}[[x]]$ 为 $\mathbb{C}$ 上所有幂级数构成的环，即元素为 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, 其中 $a_i \in \mathbb{C}$ （不要求只有有限个不为零），加、乘 都是形式的做，不需要考虑收敛性。

1，求证：$\mathbb{C}[[x]]$ 里面任何 $a_0 \neq 0$ 的元素（即幂级数）都可逆。

2，求证：$\mathbb{C}[[x]]$ 里面任何 $a_0 \neq 0$ 的元素（即幂级数）都是 $\mathbb{C}[[x]]$ 中某个元素的平方。

11. Eisenstein判别

1，对于多项式 $f=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, 设 $a_n a_0 \neq 0$。 定义

$$\hat{f}(x) := x^n f(\frac{1}{x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \in \mathbb{Z}[x].$$

求证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 里面不可约当且仅当 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 里面不可约（这里 $\mathbb{Z}[x]$ 换成 $\mathbb{Q}[x]$ 也可以）。

2，当 $f(x)$ 满足Eisenstein判别的条件时，描述 $\hat{f}(x)$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 里面的像，并由此重新证明Eisenstein判别。

3，给出 $x^n - a \in \mathbb{Z}[x]$ 是不可约多项式的充要条件。

12. 不可约多项式的稠密性

固定正整数 n, 我们讨论集合 $\mathbb{Z}^{n+1}$。 对于一个点 $a := (a_0,\cdots,a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 和正整数 N, 定义

$$U(a,N) := \{b=(b_0,\cdots,b_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid b_i - a_i \in N\mathbb{Z}, \forall i\}.$$

设 $S \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ 为一个子集。 我们称子集 S 在 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 里面是**稠密的**，如果对于正整数 N 和任何 $a \in \mathbb{Z}^{n+1}$，都有 $s \in S$ 使得 $s \in U(a,N)$。 我们称子集 S 在 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 里面是**开的**，如果对于任何 $s \in S$, 都存在正整数 N 使得 $U(s,N) \subset S$。

设 $\mathbb{Z}[x]_n$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 里面 n 次多项式全体。 我们有一一映射

$$\Phi : \mathbb{Z}[x]_n \to \mathbb{Z}^{n+1} :\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto (a_0, \cdots, a_n).$$

这样我们可以谈 $\mathbb{Z}[x]_n$ 里面子集的 稠密性 和 开性。

设 $\mathbb{Z}[x]_{n,irr}$ 为 $\mathbb{Z}[x]_n$ 里面所有在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约的多项式全体（即：$\mathbb{Z}[x]_n$ 里的多项式，但要求在 $\mathbb{Q}[x]$ 里面不可约）。

1，求证：子集 $\mathbb{Z}[x]_{n,irr}$ 在 $\mathbb{Z}[x]_n$ 里面是稠密的。

2，事实上，子集 $\mathbb{Z}[x]_{n,irr}$ 在 $\mathbb{Z}[x]_n$ 里面是开的。请在 $n = 2$ 时证明这个结论（能证出 $n = 3$ 或者全证更好）。

注（小注的意思就是看不懂就跳过）：就像我们在分析里常用的：对任何 $a, r \in \mathbb{R}$, 区间 $(a - r, a + r)$ 为所有 $x \in \mathbb{R}, |x - a| < r$ 的全体, 即与 x 的距离小于 r 的全体。 在 $\mathbb{Z}$ 上，我们可以定义距离 $|a - b|_p := p^{-v_p(a-b)}$。 同理，在这里对于任何整数 N 和点 $a = (a_0, \cdots a_n)$, 集合 $U(a, N)$ 是到 a 的所有 $|\cdot|_p$ 距离小于 $|N|_p$ 的全体。

13. 直积与直和

设 K 是一个域。回顾：一个 K-向量空间就是一个 K-模，而 K-向量空间之间的映射就是 K-模同态 (以下简称 K-映射)。

设 $\{V_i\}_{i\in I}$ 为一族 K-向量空间 (不一定有限个)。

它们的**直积** 是一个 K-向量空间 $\prod_{i\in I} V_i$ 和一族 K-映射 $p_i : \prod_{i\in I} V_i \to V_i$ 满足如下性质: 对于任何 K-向量空间 W 和一族 K-映射 $\phi_i : W \to V_i$, 存在唯一的 K-映射 $\psi : W \to \prod_{i\in I} V_i$ 使得，对于任何 $i \in I$, 我们有 $\phi_i = p_i \circ \psi$。

它们的**直和** 是一个 K-向量空间 $\oplus_{i\in I} V_i$ 和一族 K-映射 $l_i : V_i \to \oplus_{i\in I} V_i$ 满足如下性质: 对于任何 K-向量空间 W 和一族 K-映射 $\phi_i : V_i \to W$, 存在唯一的 K-映射 $\psi : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ 使得，对于任何 $i \in I$, 我们有 $\phi_i = \psi \circ l_i$。

1, 具体构造出 $\prod_{i\in I} V_i$ 并证明上述泛性质。

2，具体构造出 $\oplus_{i\in I} V_i$ 并证明上述泛性质。

3， 证明 $\oplus_{i\in I} V_i$ 是 $\prod_{i\in I} V_i$ 的子空间并验证什么时候相等。

4，设 $f : W \to V$ 是 K-向量空间的一个 K-映射。假设 f 是满射，求证 存在一个 K-映射 $g : V \to W$ 使得 $f \circ g$ 是 V 上的恒等映射。

5，在上题中，取 $Ker(f)$ 为 映射 f 的核。求证 W 同构于直和 $Ker(f) \oplus V$（这里直和就是 $\oplus_{i\in I} V_i$ 中取 $I = \{1, 2\}$, $V_1 = Ker(f)$, $V_2 = V$）。

6，在题目 4 里面，如果 f 是单射，请写出相应的结论。

下面题目中我们固定一个满线性映射 $f : E \to F$, 记 $V := Ker(f)$。

7，设 $\mathcal{L}(E)$ 为 E 的线性自同态全体（课上证过，这是一个 K-向量空间）。设 $\mathcal{L}_f(E)$ 为 E 的满足 $\psi(V) \subset V$ 线性自同态 ψ 全体。 回顾 $\mathcal{L}(E)$ 上的 K-向量空间结构（即加法和数乘是什么），并证明此时 $\mathcal{L}_f(E)$ 是 $\mathcal{L}(E)$ 的一个向量子空间。

8，请给出“最自然”的线性映射 $\Phi : \mathcal{L}_f(E) \to \mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(F)$ 并证明 Φ 是满射。

这里，“最自然”是指你能给出的看起来最好的。

9，请刻画上面的线性映射 Φ 的核。

14. 多项式环的素理想

回忆，我们之前证过：对于一个域 K, 多项式环 $K[x]$ 的所有理想都是主理想，所有非零素理想都恰好是某个不可约多项式生成的主理想。下面，请用以上结果，分类 $\mathbb{Z}[x]$ 里的所有素理想。

1，对于嵌入 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$，素理想 $I \subset \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Z}$ 里面的原像也是素理想，称 I 为卧于 $I \cap \mathbb{Z}$ 上面的素理想。

2，讨论 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的不可约多项式和卧于理想 $p\mathbb{Z}$ 之上的素理想的关系。

3，讨论 $\mathbb{Z}[x]$ 里的本原不可约多项式与卧于理想 0 之上的素理想的关系。

15. 域扩张

设 L 是一个域，K 是 L 的子域。我们称 L 是 K 的一个域扩张（常记为 L/K）。

1，求证：L 是 K 上的向量空间。

如果 L 是由有限个元素生成的 K 上的向量空间，称域扩张 L/K 为有限扩张。

2，求所有有限域的元素个数。

3，对于有限扩张 L/K，求证：任何一个元素 $a \in L$, 都存在首一多项式 $f(x) \in K[x]$ 使得 $f(a) = 0$。

16. 向量空间的自同态环

设 K 是一个域，E 是一个 K-向量空间。我们考虑 E 的自同态 $\mathcal{L}(E)$。固定一个 $\psi \in \mathcal{L}(E)$。

1， 回顾：$\mathcal{L}(E)$ 是一个环，且包含子环 K。

2， 对于多项式 $f \in K[x]$，如何定义 $f(\psi) \in \mathcal{L}(E)$ 且映射 $K[x] \to \mathcal{L}(E) : f \mapsto f(\psi)$ 是个环同态。

3， 若 $\phi \in \mathcal{L}(E)$ 和 ψ 交换（即在 $\mathcal{L}(E)$里面 $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$）。求证：对于任何多项式 $f \in K[x]$, 我们有：ϕ 和 $f(\psi)$ 交换且 $Ker(f(\psi))$ 和 $Im(f(\psi))$ 是 ϕ 不变的子空间（子空间 $G \subset E$ 是 ϕ 不变的指 $\phi(G) \subset G$）。

4， 假设多项式 f 有分解 $f = gh \in K[x]$ 且 g, h 互素。取 $\psi_1 := g(\psi)$, $\psi_2 := h(\psi)$。求证：如果 $f(\psi) = 0$，那么 $Ker(\psi_1)$ 和 $Ker(\psi_2)$ 生成整个空间 E 且 $Ker(\psi_1) \cap Ker(\psi_2) = 0$, 即 E 是 $Ker(\psi_1)$ 和 $Ker(\psi_2)$ 的直和。

5， 如果 E 是**有限生成的**（即，存在一个有限生成元集），求证 $\mathcal{L}(E)$ 也是有限生成的，并且一定存在多项式 $f \in K[x]$ 使得 $f(\psi) = 0$。

满足 $f(\psi) = 0$ 的次数最小的首一多项式 f 称为 ψ 的**极小多项式**。假设 K 是代数闭域（比如 $K = \mathbb{C}$），如果 ψ 的极小多项式 f 没有重根，我们称 ψ 是**半单的**（或者 可对角化的）。

6， 假设 K 是代数闭域（比如 $K = \mathbb{C}$），请根据 ψ 的极小多项式 f 在 $K[x]$ 里面的分解写出 E 的直和分解（即把 E 分解称一些子空间的直和）。

7, 在题目5和6的条件下，如果 ψ 是半单的，请证明存在 E 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$ 和元素 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$ 使得 $\psi(x_i) = \lambda_i x_i$ (这就是可对角化)。

8，在上题的条件下，对于一族线性映射 $(\psi_j)_{j\in J} \in \mathcal{L}(E)$ （不一定有限个），如果所有的 ψ_j 都是半单的且两两可交换，求证：存在 E 的一组基 $(x_i)_{1\le i\le n}$ 和元素 $\lambda_{i,j} \in K$ $(1 \le i \le n, j \in J)$, 使得 $\psi_j(x_i) = \lambda_{i,j} x_i$ （这件事被称为同时对角化）。

17. 域上的有限维代数

1，求证：对任何一个含幺交换环 A 和它的两个理想 I, J, 任何两个正整数 n, m, 如果 $I \neq J$, 那么 $I^n + J^m = A$。

注：回忆： $I^2 := I \cdot I$ 是由集合 $\{ab|\ a, b \in I\}$ 生成的理想。所以 $I^2 \subset I$。 同理，我们可以定义 $I^3, I^4, \cdots$。

回顾：之前证过的中国剩余定理： 对于含幺交换环 A 和它的有限个理想 $(I_i)_{1\le i\le n}$, 如果对于任何 $i \neq j$, 我们有 $I_i + I_j = A$，那么商映射诱导环同构:

$$A/\cap_i I_i \to \prod_i A/I_i$$

2，求证：对任何一个含幺交换环 A 和它的两个理想 I, J, 如果 $I + J = A$, 那么 $IJ = I \cap J$。

现在，设 R 是一个含幺交换环，K 是 R 的子环并且 K 是一个域。假设 R 作为 K-向量空间是有限生成的。 下面的 3、4、5、6题。

3，求证：如果 R 是整环，那么 R 一定是域。

4，求证：R 的素理想都是极大理想，且所有极大理想的交是幂零根（回顾期中考试里的定义和结论）。

5， 求证：存在有限多个 R 的极大理想 $(I_i)_{1\le i\le n}$ 和相应的正整数 $(l_i)_{1\le i\le n}$ 使得商映射诱导一个环同构

$$R \to \prod_i R/I_i^{l_i}.$$

6，求证：题目4里面的极大理想 $\{I_i\}_{1\le i\le n}$ 是 R 的全部素理想。

18. 直和与同态

设 K 是一个域，E 是一个 K-向量空间，$(V_i)_{i\in I}$ 是一族 K-向量空间。 回顾：$\oplus_{i\in I} V_i$ 为直和，$\prod_{i\in I} V_i$ 为直积, $\mathcal{L}(-,-)$ 为线性映射, $\mathcal{L}(-)$ 为线性自同态。

1, 求证 $\mathcal{L}(E, \prod_{i\in I} V_i) \cong \prod_{i\in I} \mathcal{L}(E, V_i)$

2, 求证 $\mathcal{L}(\oplus_{i\in I} V_i, E) \cong \prod_{i\in I} \mathcal{L}(V_i, E)$

3, 对于 K-向量空间 V_1, V_2, 求证:

$$\mathcal{L}(V_1 \oplus V_2) \cong \mathcal{L}(V_1) \oplus \mathcal{L}(V_2) \oplus \mathcal{L}(V_1, V_2) \oplus \mathcal{L}(V_2, V_1).$$

4， 在题目3里面，根据直和的定义，$V_1 \subset V_1 \oplus V_2$ 是一个线性子空间，记 $\mathcal{L}_1(V_1 \oplus V_2)$ 为保持 V_1 的自同态全体（即满足 $\psi(V_1) \subset V_1$ 的全部 $\psi \in \mathcal{L}(V_1 \oplus V_2)$）。求证 $\mathcal{L}_1(V_1 \oplus V_2) \cong \mathcal{L}(V_1) \oplus \mathcal{L}(V_2) \oplus \mathcal{L}(V_2, V_1)$。

在题目4的基础上，重新思考之前做过的 习题2020.12.15 的题目1.3和题目1.4（别忘了 习题2020.12.10 的题目1.5 的结论）。

19. 对偶空间

取 K 是一个域，E 是一个 K-向量空间，$(e_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个基。定义 $E^* := \mathcal{L}(E,K)$ 是 E 上的所有线性型。回顾课上定义的线性型 e_i^*。

1，若 I 有限，求证 $(e_i^*)_{i\in I}$ 是 E^* 的基。

2，若 I 无限，求证上题不成立（即 $(e_i^*)_{i\in I}$ 不是基）。

3，定义 $E^{**} := (E^*)^*$。这样我们定义映射 $\Phi : E \to E^{**}$: 对任何 $x \in E$, $\Phi(x)$ 把 $f \in E^* = \mathcal{L}(E,K)$ 映为 $f(x)$ (即 $(\Phi(x))(f) := f(x)$)。求证 Φ 是一个线性映射，并且是单射。

4，求证: 若 I 有限，则 Φ 是一个同构；若 I 无限，则 Φ 不是满射。

5, 如果 $E = K[x]_n$ 为次数小于等于 n 的多项式全体构成的向量空间。取两两不同的一组元素 $a_i \in K$, 其中 $0 \le i \le n$。设 $\phi_i : E \to K : f \mapsto f(a_i)$。求证 $\phi_0, \cdots, \phi_n$ 构成 E^* 的一组基。

6, 考虑 $K = \mathbb{R}$ 为实数域，$E = \mathbb{R}[x]$ 为多项式环。对于任何整数 $i \in \mathbb{Z}$, 我们模仿题目5定义 $\psi_i : E \to \mathbb{R} : f \mapsto f(i)$。那么 $(\psi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是否构成 E^* 的自由族或者生成元族。

20. 线性映射的一些补充性质

取 K 是一个域，E, V, W 是 K-向量空间，$f : V \to W$ 是线性映射。我们定义过映射 f 的核 $Ker(f)$，像 $Im(f)$ 和余核 $Coker(f) := W/Im(f)$。定义映射

$$f_* : \mathcal{L}(E,V) \to \mathcal{L}(E,W) : \phi \mapsto f \circ \phi$$

和

$$f^* : \mathcal{L}(W,E) \to \mathcal{L}(V,E) : \phi \mapsto \phi \circ f.$$

1， 求证：f^*, f_* 是线性映射。

2，求证： $Ker(f_*) \cong \mathcal{L}(E, Ker(f)), Coker(f_*) \cong \mathcal{L}(E, Coker(f))$ 和 $Im(f_*) \cong \mathcal{L}(E, Im(f))$。

3，求证：$Ker(f^*) \cong \mathcal{L}(Coker(f), E), Coker(f^*) \cong \mathcal{L}(Ker(f), E)$ 和 $Im(f^*) \cong \mathcal{L}(Im(f), E)$。

注：题目3可以应用到 $E = K$ 的情况，即我们有 $f^* : W^* \to V^*$ 并且 $Ker(f^*) \cong Coker(f)$ 和 $Coker(f^*) \cong Ker(f)$。

4， 设 $(V_j)_{j\in J}$ 是一族 K-向量空间。求证：若 E 是有限生成的，那么

$$\mathcal{L}(E, \oplus_{j\in J} V_j) = \oplus_{j\in J} \mathcal{L}(E, V_j).$$

21. 线性型的公共解

之前习题里面提到过一个结论：当 $m < n$ 时，域 $\mathbb{C}$ 上任何 m个n元齐次方程构成的方程组一定有非零解 (即，不等于 $(0, \cdots, 0)$, 但 $(1, 0 \cdots, 0)$ 可以考虑)。

现在请证明当方程都是1次的时候，上述结论成立。

22. 投影与对称

取 K 是一个域，E 是一个 K-向量空间。设 $\psi \in \mathcal{L}(E)$ 为一个线性自同态。如果存在多项式 $f \in K[x]$ 使得 $f(\psi) = 0$, 我们之前证明了 f 的分解诱导 E 的直和分解：如果 $f(x) = \prod_i f_i(x)$ 且 $f_i(x)$ 为两两互素的多项式，那么 $E = \oplus_i Ker(f_i(\psi))$。

下面请用这个结论重新证明投影和对称的主结构定理: $\psi \circ \psi = \psi$ 为投影，$\psi \circ \psi = Id$ 为对称。

注：回顾我们习题课之前给的证明，事实上包含了梁老师课上的证明。

23. 梁老师非要让大家做的思考题

设 K 是一个域，E 是一个有限维 K-向量空间，E_1, E_2, E_3 是 E 的子空间。

1，求证 $dim(E_1 + E_2 + E_3) \leq dim(E_1) + dim(E_2) + dim(E_3) - dim(E_1 \cap E_2) - dim(E_1 \cap E_3) - dim(E_2 \cap E_3) + dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

2, 请举例说明 $=$ 可能不成立。

24. 自同态的复合

设 K 是一个域，E 是一个有限维 K-向量空间, $\psi \in \mathcal{L}(E)$ 是一个线性自同态。设 ψ^l 为 l 个 ψ 的复合。定义 $K_l := Ker(\psi^l)$, $I_l := Im(\psi^l)$。

1，求证：对于任何自然数 l，有 $K_l \subset K_{l+1}$ 和 $I_{l+1} \subset I_l$。

2，求证：存在最小的自然数 r 使得 $K_r = K_{r+1}$。

3，求证：在题目2的条件下，对于任何自然数 $l \geq r$, 我们有 $K_r = K_l$，$I_r = I_l$ 和 $E = K_r \oplus I_r$。

4，假设存在自然数 r 使得 $I_r = 0$, 请尝试给出 E 的一组基和在这组基下 ψ 的表达（即找出一组比较好的基使得 ψ 比较好写）。

我们之前证过，如果 $K = \mathbb{C}$ 时，存在次数最小的多项式 $f = \prod_i (x - a_i)^{n_i}$ 使得 $f(\psi) = 0$，且此时我们有直和分解 $E = \oplus_i Ker((\psi - a_i)^{n_i})$。

5, 应用4, 刻画 $Ker((\psi - a_i)^{n_i})$（这样我们完成了若当标准型这一刻画）。

25. 三元齐次多项式

设 K 是一个域，我们可以考虑以 K 上的多元高次多项式。记 $K[x, y, z]$ 为3元高次多项式全体。我们可以简单的看到，$K[x, y, z]$ 是一个环。比如，可以把 $K[x, y]$ 视为 $(K[x])[y]$, 即 $K[x]$ 上的多项式环，然后 $K[x, y, z]$ 视为 $(K[x, y])[z]$。

一个多项式是**齐次**指它的每一项的次数都相等。比如 $3x^n + 4y^n - 5z^n$，$2xy - 7z^2$ 都是齐次的，但 $x^3 + x^2 + y$，$xy^2 + z^2$ 都不是齐次的。我们记 $K[x, y, z]_n$ 为次数是 n 的三元齐次多项式（不是次数小于 n, 而是恰好等于 n）。

1, 求证 $K[x, y, z]_n$ 为有限维 K-向量空间，且其维数为 C_{n+2}^2。

2, 设 I 为有限个齐次多项式生成的理想，设 $I_n := I \cap K[x, y, z]_n$。求证: 作为 K-向量空间，我们有 $I = \oplus_n I_n$。

3, 设 I 为 $f \in K[x, y, z]_d$ 生成的理想。求证 $dim(I_n) = C_{n-d+2}^2$。

4, 如果 I 是由 $f \in K[x,y,z]_d$ 和 $g \in K[x,y,z]_s$ 生成的理想。求证：除了有限个小的整数 n, 我们有

$$dim(K[x,y,z]_n) - dim(I_n) \geq sd.$$

5, 对于上题的 I, 求证：x, y, z 这三个元素里面至少存在一个 （不妨设为 x） 满足：$1-x$ 和 I 生成的理想是 $K[x,y,z]$ 的真理想。

我们知道复数域上的多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 的极大理想恰好是全部由 $x-a$ 生成的理想，其中 $a \in \mathbb{C}$。 这个结论对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的多元多项式环也对，即：

对于复数域 $\mathbb{C}$ 上的多元多项式环 $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$，设 $I_{a_1,\cdots,a_n}$ 为由 $x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n$ 生成的理想，其中 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$，则 $I_{a_1,\cdots,a_n}$ 是这个环的全部极大理想。

上述结论被称为 希尔伯特零点定理，这个定理的证明必须用到一个技巧：诺特正规化引理。这些东西的证明不难但太技巧，等到时间合适了再展示给大家。 下面不妨先直接用这个结论，展示一下环的理论有什么用。

6， 当 $K = \mathbb{C}$ 时，求证：2个3元元齐次方程 f, g 构成的方程组有非零解, 即：存在 $\mathbb{C}^3$ 中的点 (a,b,c) 使得 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 且 $f(a,b,c) = g(a,b,c) = 0$。

7，请模仿上面4，5，6 的证明，证出一般形式的定理： **当 $m < n$ 时，域 $\mathbb{C}$ 上任何 m个n元齐次方程构成的方程组一定有非零解** (即，不等于 $(0, \cdots, 0)$, 但 $(1, 0 \cdots, 0)$ 可以考虑)。

提示：分析题目5，6，把问题划归到证明某类向量空间非空。

8，(课外思考）设 $K = \mathbb{C}$。假设题目4中的等号成立（即除了有限个小的整数 n后都成立）， 求证：存在 $\mathbb{C}[x,y,z]_1$ 中的非零元素 L 使得商环 $\frac{K[x,y,z]}{(I, 1-L)}$ 作为 K-向量空间的维数恰好是 sd，其中 $(I, 1-L)$ 为 $1-L$ 和 I 生成的理想。

26. 一些维数

设 K 是一个域。

1，设 E, F 为两个有限维 K-向量空间，$E_0 \subset E$, $F_0 \subset F$ 为两个子空间，设 $\mathcal{L}_0(E,F)$ 为满足 $f(E_0) \subset F_0$ 的线性映射 $f \in \mathcal{L}(E,F)$ 全体。 求 $\mathcal{L}_0(E,F)$ 的维数 （用 E_0, F_0, E, F 的维数表达）。

2，对于矩阵全体 $M_n(K)$, 求出上三角矩阵全体、严格上三角矩阵全体、对角矩阵全体、对称矩阵全体、反对称矩阵全体 的维数。

3， （据说你们会矩阵的乘法）在矩阵 $M_n(K)$ 中，设 $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ 为矩阵。 设 L 为满足 $XA - AX = B$ 的矩阵 X 全体。假设 L 非空。 求证： L 是一个仿射子空间， 且 B 满足 $\sum_i b_{i,i} = 0$。

我们把 L 的维数定义成其相应的向量子空间的维数。

4，在题目3里面，如果 A 是一个对角矩阵且对角线上的元素两两不同。 求 L 的维数。

5，在题目3里面，如果 A 满足：$a_{1,2} \neq 0, 1$， 对所有的 i 有 $a_{i,i} = 1$，其他所有的 $a_{i,j}$ 都是0。 求 L 的维数。