TD4 : Produit semi-direct

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soient N et H des groupes et soit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupes. Notons $N \underset{\phi}{\rtimes} H$ l'ensemble $N \times H$ muni de la loi de composition définie par $(n_1, h_1) \underset{\phi}{\rtimes} (n_2, h_2) = (n_1\phi(h_1)(n_2), h_1h_2)$.

a) Montrer que $N \underset{\phi}{\rtimes} H$ est un groupe, appelé *produit semi-direct* de H par N relativement à ϕ.

b) Montrer que $N \times \{e_H\} \lhd N \underset{\phi}{\rtimes} H$ et $\{e_N\} \times H < N \underset{\phi}{\rtimes} H$.

c) Identifier le quotient de $N \underset{\phi}{\rtimes} H$ par $N \times \{e_H\}$.

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe et soient N et H des sous-groupes de G tels que $N \cap H = \{e\}$, $NH = G$ et $N \lhd G$. Montrer que :

a) l'application $i : H \to \mathrm{Aut}(N)$ définie par $h \mapsto i_h$, où $i_h(n) = hnh^{-1}$, est un morphisme de groupes.

b) l'application

$$\begin{array}{rcl} f : N \underset{i}{\rtimes} H & \to & G \\ (n,h) & \mapsto & nh \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

On dit alors que G est le *produit semi-direct* de H par N.

Exercice 3 : $\star$
Montrer que le produit semi-direct $N \underset{\phi}{\rtimes} H$ est direct si et seulement si ϕ est le morphisme trivial si et seulement si $\{e_N\} \times H \lhd N \underset{\phi}{\rtimes} H$.

Exercice 4 : $\star\star$
Une suite de morphismes $\ldots \to A \overset{u}{\to} B \overset{v}{\to} C \to \ldots$ est dit exacte en B si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$, et elle est dite *exacte* si elle est exacte en tous ses termes.
Soit

$$1 \longrightarrow N \overset{i}{\longrightarrow} G \overset{p}{\longrightarrow} H \longrightarrow 1$$

une suite exacte (courte). On dit alors que G est une *extension* de H par N.

a) Montrer que, si G est le produit direct de H et N ou bien un produit semi-direct de H par N, alors on a une telle suite exacte.

b) Réciproquement soit une telle suite exacte. Si p possède une *section*, c'est-à-dire s'il existe un morphisme de groupes $s : H \to G$ tel que $p \circ s = \mathrm{id}_H$, montrer que G est le produit semi-direct de H par N pour l'opération $h \cdot n = s(h)ns(h)^{-1}$.

c) Donner un exemple de suite exacte courte qui n'est pas un produit semi-direct.

Exercice 5 : $\star\star$

a) Montrer que l'on peut écrire $\mathfrak{S}_n$ comme un produit semi-direct naturel.
b) Montrer que l'on peut écrire le groupe diédral D_n comme un produit semi-direct naturel.
c) Montrer que l'on peut écrire $\mathrm{GL}_n(k)$ comme un produit semi-direct naturel (k est un corps).
d) Ces produits semi-directs sont-ils directs ?

Exercice 6 :
Soit $G = N \rtimes H$ et soit K un sous-groupe de G contenant N. Montrer que l'on a $K = N \rtimes (K \cap H)$.

Exercice 7 :
Montrer que tout groupe d'ordre 255 est cyclique.

Exercice 8 : ⋆⋆
Soient H et N des groupes et soient ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ des morphismes. On veut trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ soient isomorphes.

a) S'il existe un automorphisme α de H tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, montrer que l'on a la conclusion attendue.
b) S'il existe un automorphisme u de N tel que
$$\forall h \in H \qquad \phi(h) = u\psi(h)u^{-1},$$
montrer que la conclusion attendue vaut encore.
c) Si H est cyclique et que ϕ et $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ sont tels que $\phi(H) = \psi(H)$, montrer que $N \rtimes_\phi H$ et $N \rtimes_\psi H$ sont isomorphes.

Exercice 9 : ⋆⋆
Soient $p < q$ des nombres premiers.

a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal pq.
b) Si $q \geq 3$, en déduire que tout groupe de cardinal $2q$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ ou au groupe diédral D_q.

Exercice 10 : ⋆⋆⋆

a) Montrer qu'un groupe d'ordre 8 est isomorphe à l'un des groupes suivants :
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3,\ D_4,\ \mathbf{H}_8.$$
Justifier que $\mathbf{H}_8$ n'est pas un produit semi-direct et que les cinq groupes cités sont deux-à-deux non isomorphes.
b) Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ possède un unique 2-Sylow que l'on identifiera.
c) Donner la liste des classes d'isomorphisme de groupes finis de cardinal ≤ 15.

Exercice 11 : ⋆⋆⋆
Soit p un nombre premier impair.

a) Déterminer les p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
b) Soient ϕ et ψ des morphismes non triviaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. En notant pour tout entier k, ϕ_k le morphisme défini par $\phi_k(x) = \phi(kx)$, montrer qu'il existe un entier k et une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\psi = P\phi_k P^{-1}$.
c) En déduire qu'il existe, à isomorphisme près, un unique produit semi-direct non trivial $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
d) Montrer que le centre de ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
e) Soit G un groupe d'ordre p^3 non cyclique, contenant un élément x d'ordre p^2. Monter que $\langle x \rangle$ est distingué dans G et que G est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
f) Décrire les classes d'isomorphisme de groupes de cardinal p^3 : on raisonnera par exemple suivant l'ordre maximal d'un élément du groupe.

Exercice 12 : ⋆⋆⋆
Soient $p \neq q$ deux nombres premiers. Classifier les groupes d'ordre p^2q.