

Théorie de Faisceaux

Rédigé par WANG Zheng

Classe Franco-Chinoise - printemps 2024

Table des matières

Table des matières	i
1 Catégories	3
1.1 Catégories, foncteurs et transformations naturelles	3
1.2 Limites	12
1.3 Adjointes	16
1.4 Limites filtrantes	19
2 Faisceaux	21
2.1 Constructions	21
2.2 Fonctorialité	25
2.3 Recollement de faisceaux	28
2.4 G-torseur	28
2.5 Faisceaux localement constants : première partie	30
2.6 Changement de base propre	30
2.7 Faisceaux localement constants : deuxième partie	34
2.8 Monodromie, équation différentielles complexes	38
2.9 Faisceaux de Module	42
3 Algèbre homologique	45
3.1 Catégories additives	45
3.2 Complexes	46
3.3 Injectifs et projectifs	50
3.4 Catégorie homotopique	53
3.5 Localisation	53
3.6 Catégorie triangulée	55
3.7 Foncteurs dérivés	59
3.8 Généralisation du théorème de changement de base propre	63
3.9 Remarques sur le formalisme des 6-opérateurs	63
3.10 Faisceaux flasques	63
Bibliographie	67

C'est un polycopié du cours donné par Pf.ORGOGOZO¹ à USTC, en effet une compilation des notes de cours du professeur, qui contient encore des typos et des erreurs éventuelles. De plus, en raison du manque de temps, de nombreuses démonstrations n'ont pas été écrites en détail et doivent encore être complétées.

1. <http://fabrice.orgogozo.perso.math.cnrs.fr>

Chapitre 1

Catégories

1.1 Catégories, foncteurs et transformations naturelles

Définition 1.1.1 (Catégorie). Une **catégorie** \mathcal{C} est la donnée suivante :

- **Obj** : Une collection des objets, «des points».
- **Mor/Fl** : Des morphismes entre des objets, «des flèches». On note cette collection entre deux objets X et Y comme $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$, et $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. On peut omettre l'indice \mathcal{C} si la catégorie est claire.

telles que

- Pour tout objet X , il existe une flèche «identité», disons id_X , de X vers soi-même,
- Pour deux flèches f, g entre respectivement les objets X, Y et les objets Y, Z , ils sont composables : il existe une flèche $g \circ f$ de X vers Z . De plus, $1_Y f = f 1_X$ et $(hg)f = h(gf)$ quand ils sont composables. Autrement dit, la loi de composition est associative.

Mentalité : Ce sont les flèches les plus importantes !

Définition 1.1.2. Si la collection des objets d'une catégorie \mathcal{C} est un ensemble, on dit que \mathcal{C} est une catégorie **petite**. Si la collection de morphismes entre quelques deux objets de \mathcal{C} est un ensemble, on dit que \mathcal{C} est une catégorie **localement petite**.

Exemple 1.1.1. Il y a beaucoup des concepts mathématiques qui peut se faire une catégorie :

- (i) **Ens** : la catégorie des ensembles. **Obj** : ensembles, **Mor** : fonctions.

- (ii) **Top** : la catégorie des espaces topologiques. Obj : espaces topologiques, Mor : applications continues.
- (iii) **Ann** : la catégorie des anneaux commutatifs. Obj : anneaux commutatifs, Mor : morphismes des anneaux. Analogue pour **Grp** qui a des groupes (pas nécessairement commutative) comme des objets.
- (iv) Une préordre (\mathbf{P}, \leq) est naturellement une catégorie avec des objets et flèches claires.
- (v) $[n]$: la catégorie donnée par Obj : $\{1, 2, \dots, n\}$, Mor : seulement une flèche de i à j si $i \leq j$.
- (vi) Δ : la catégorie de simplexe, donnée par Obj : $\{[1], [2], \dots\}$, Mor : les morphismes entre $[i]$ et $[j]$ sont les applications de $\{1, \dots, i\}$ vers $\{1, \dots, j\}$ qui préservent l'ordre.

Définition 1.1.3. Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ dans la catégorie \mathcal{C} est dit un

- monomorphisme (mono pour abréger), si pour tout morphismes g, h tels que $fg = fh$, on a $g = h$. On note comme \hookrightarrow .
- épimorphisme (épi pour abréger), si pour tout morphismes g, h tels que $gf = gh$, on a $g = h$. On note comme \rightarrow .
- isomorphisme, s'il existe un morphisme $g: Y \rightarrow X$ tel que $fg = id_Y$, $gf = id_X$. On note comme $\xrightarrow{\sim}$.

Observation : gf mono $\Rightarrow f$ mono ; gf épi $\Rightarrow g$ épi. g, f mono $\Rightarrow gf$ mono (si composables) ; f, g épi $\Rightarrow gf$ épi (si composables).

Remarque. Il est pas toujours vrai que mono + épi \Rightarrow iso (mais c'est correct dans **Ens**) :

- (i) Dans la catégorie **Ann**, $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$.
- (ii) Dans la catégorie **Top**, l'inclusion $D \rightarrow F$, avec D une partie dense dans F .
- (iii) Dans la catégorie **Ann**, l'application canonique induite par la localisation $A \rightarrow A_S$.

Définition 1.1.4. Soit \mathcal{C} une catégorie. Un objet I de \mathcal{C} est dit **initial** si pour tout objet X de \mathcal{C} , il existe une et une seule flèche de I vers X . Un objet F est dit **final** si pour tout objet X de \mathcal{C} , il existe une et une seule flèche de X vers F . Un objet **nul** est un objet à la fois initial et final.

Remarque. Par suite, demander qu'un objet soit initial le définit à isomorphisme canonique près. En d'autres termes, de telles définitions permettent de se concentrer sur l'essentiel (le comportement de l'objet défini) sans se préoccuper des détails de sa construction. Bien entendu, une telle définition ne prouve pas l'existence de l'objet, qui doit

éventuellement être prouvée par une construction. Elle ne fait que débarrasser la définition de l'objet de tout ce qui est contingent. En contrepartie, elle oblige à intégrer dans la définition les outils nécessaires et suffisants pour la manipulation de l'objet.

Exemple 1.1.2. i) Dans **Ens**, l'ensemble vide est l'objet initial et les singletons sont les objets finaux.

ii) Dans **Ann**, l'anneau des entiers relatifs est initial et l'anneau nul est final.

iii) Le groupe trivial, l'espace vectoriel nul et le point sont les objets nuls dans les catégories respectives **Grp**, **Vect_k**.

Définition 1.1.5. Une **groupoïde** est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont isomorphismes.

Exemple 1.1.3. (i) Pour un groupe G , on note **G** la catégorie avec $\text{Obj} = \{*\}$ et $\text{Aut}(*) = G$ qui est bien une groupoïde.

(ii) Pour une espace topologique X , son **groupoïde fondamentale** $\Pi_1(X)$ est une catégorie dont les objets sont des points de X et les morphismes sont des classes des chemins à près d'homotopie à l'extrémité fixe.

Définition 1.1.6. Une **sous-catégorie** de \mathcal{C} est une catégorie \mathcal{D} telle que les objets sont une sous-collection des objets de \mathcal{C} et la collection des morphismes entre deux objets de \mathcal{D} (donc objets de \mathcal{C}) $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ sont une sous-collection de $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On dit que \mathcal{D} est une sous-catégorie **pleine** si $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tout X, Y objets de \mathcal{D} .

Définition 1.1.7 (dualité). Soit \mathcal{C} une catégorie. La **catégorie duale** \mathcal{C}^{op} est la catégorie avec :

- les mêmes objets de \mathcal{C} ,
- un morphisme $f^{op}: Y \rightarrow X$ dans \mathcal{C}^{op} pour chaque morphisme $f: X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , telle que $g^{op}f^{op} = (fg)^{op}$.

Observation Si f est mono/épi dans \mathcal{C} , alors f^{op} est épi/mono dans \mathcal{C}^{op} .

Définition 1.1.8 (Foncteur). Un **foncteur** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre les deux catégories est la donnée suivante :

- Un objet $Fc \in \mathcal{D}$ pour chaque objet $c \in \mathcal{C}$.
- Un morphisme $Ff: Fc \rightarrow Fc' \in \mathcal{D}$ pour chaque morphisme $f: c \rightarrow c' \in \mathcal{C}$.

telles que

- Pour f, g composables dans \mathcal{C} , on a $Fg \circ Ff = F(gf)$.
- Pour tout objet $c \in \mathcal{C}$, on a $F(1_c) = 1_{Fc}$.

Définition 1.1.9. Un foncteur dans 1.1.8 est dit **covariant**. Un **contravariant** foncteur de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est un foncteur de \mathcal{C}^{op} vers \mathcal{D} .

- Exemple 1.1.4.** (i) Le foncteur $P: \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ qui envoie un ensemble A à son ensemble exponent $PA = \{A' \subset A\}$.
- (ii) Pour une catégorie \mathcal{C} , un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ est appelé un **préfaisceaux** sur \mathcal{C} .]
- (iii) Les préfaisceaux sur la catégorie Δ est appelés les **ensembles simples**.
- (iv) Le **foncteur oublié**. Il enlève certain structure d'un objet. Par exemple $O: \text{Ann} \rightarrow \text{Ens}$ envoie A à $\{a \mid a \in A\}$, ou $\text{Alg}_k \rightarrow \text{Vect}_k$.
- (v) Le **foncteur libre**. Il envoie un objet à un certain libre. Par exemple $L: \text{Ens} \rightarrow \text{Grp}$ envoie A vers le group libre engendré par les éléments de A .

Définition 1.1.10. Soit \mathcal{C} et \mathcal{D} deux catégories et $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs, une **transformation naturelle** $\alpha: F \Rightarrow G$ est la donnée suivante :

- une flèche α_c de Fc vers Gc dans \mathcal{D} . La collection de α_c est dite les **composantes** de la transformation naturelle.

telle que pour tout $f: c \rightarrow c'$ dans \mathcal{C} , on a la diagramme commutative :

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{\alpha_c} & Gc \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ Fc' & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & Gc' \end{array}$$

Cette transformation naturelle est appelé un **isomorphisme naturel** si $\forall c \in \mathcal{C}$, α_c est un isomorphisme.

Définition 1.1.11 (Catégorie comma). Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ trois catégories et $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ deux foncteurs, la **catégorie comma** est la donnée suivante :

- $\text{Obj} : (x, y, a)$ où $x \in \mathcal{C}$, $y \in \mathcal{D}$, $a \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(f(x), g(y))$.
- Les morphismes entre (x, y, a) et (x', y', a') sont les paires (c, d) où $c \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$, $d \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(y, y')$ tels que la diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{a} & G(y) \\ F(c) \downarrow & & \downarrow G(d) \\ F(x') & \xrightarrow{a'} & G(y') \end{array}$$

On denote cette catégorie $\mathcal{C} \times_{\mathcal{E}}^{\rightarrow} \mathcal{D}$.

On a des projections naturelles $pr_1: \mathcal{C} \times_{\mathcal{E}}^{\rightarrow} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, $pr_2: \mathcal{C} \times_{\mathcal{E}}^{\rightarrow} \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, qui envoient (x, y, a) à x et respectivement y . De plus, on a une diagramme dans la catégorie \mathbf{Cat} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times_{\mathcal{E}}^{\rightarrow} \mathcal{D} & \xrightarrow{pr_2} & \mathcal{D} \\ pr_1 \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{E} \end{array}$$

où $\alpha_{(x,y,a)} = a: F(x) \rightarrow G(y)$.

Exemple 1.1.5. Soit \mathcal{C} une catégorie et c un objet de \mathcal{C} . Notons $*$ la catégorie ponctuelle et prenons le foncteur $* \rightarrow \mathcal{C}$ qui envoie $*$ à c et le foncteur identique $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, alors $\mathcal{C} \times_{\mathcal{C}}^{\rightarrow} *$ est la **catégorie au-dessus de c** , noté $\mathcal{C}_{/c}$. Analoguement, $* \times_{\mathcal{C}}^{\rightarrow} \mathcal{C}$ est la **catégorie au-dessous de c** , noté $\mathcal{C}_{c/}$.

Définition 1.1.12. Pour deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} , on définit la **catégorie produite** avec :

- $\text{Obj} : (c, d)$ où $c \in \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$.
- $\text{Mor} : \text{Hom}((c, d), (c', d')) = (f, g)$ où $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, d')$

Définition 1.1.13 (2-catégories). Une **2-catégories** \mathcal{C} est la donnée :

- Une classe d'objets $\text{Ob}(\mathcal{C})$.
- Pour $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il y a une catégorie petite $\mathcal{C}(x, y)$ dans laquelle les objets sont appelés les **1-morphismes** de \mathcal{C} , et les morphismes sont appelés les **2-morphismes** de \mathcal{C} .
- Pour $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il y a un objet $1_x \in \mathcal{C}(x, x)$ appelé le **morphisme identique**.
- Pour $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il y a un foncteur $\circ: \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y)$ appelé la **composition horizontale**, afin de se différencier de la composition des morphismes dans $\mathcal{C}(x, y)$ qu'on dit la **composition verticale**.
- Pour $x, y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il y a deux isomorphismes naturels :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(x, y) & & \mathcal{C}(x, y) \\ \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{l_{x,y}} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{1_y \circ} \end{array} \right) id & & \left(\begin{array}{c} \xrightarrow{r_{x,y}} \\ \downarrow \\ \xrightarrow{\circ 1_x} \end{array} \right) id \\ \mathcal{C}(x, y) & & \mathcal{C}(x, y) \end{array}$$

qu'on dit **unit à gauche** et **unit à droite**.

- Pour x, y, z, w , il y a un isomorphisme naturel

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(z, w) \times \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) & \xrightarrow{\mathcal{C}(z, w) \times \circ} & \mathcal{C}(z, w) \times \mathcal{C}(x, z) \\
 \downarrow \circ \times \mathcal{C}(x, y) & \nearrow \alpha & \downarrow \circ \\
 \mathcal{C}(y, w) \times \mathcal{C}(x, y) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}(x, w)
 \end{array}$$

appelé **l'associateur**.

qui satisfait les deux axiomes :

- (axiome triangle) Pour $x, y, z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $f \in \mathcal{C}(x, y), g \in \mathcal{C}(y, z)$, on a la diagramme commutative dans la catégorie $\mathcal{C}(x, v)$:

$$\begin{array}{ccc}
 (g \circ 1_y) \circ f & \xrightarrow{\alpha_{g, 1_y, f}} & g \circ (1_y \circ f) \\
 \searrow r_g \circ f & & \swarrow g \circ l_f \\
 & g \circ f &
 \end{array}$$

Ici $\alpha_{g, 1_y, f}$ est la composante correspondante de α .

- (axiome pentagone) Pour $x, y, z, w, v \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}(x, y), g \in \mathcal{C}(y, z), h \in \mathcal{C}(z, w), k \in \mathcal{C}(w, v)$, on a la diagramme commutative dans la catégorie $\mathcal{C}(x, v)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (k \circ h) \circ (g \circ f) & & \\
 & \nearrow \alpha_{k \circ h, g, f} & & \searrow \alpha_{k, h, g \circ f} & \\
 ((k \circ h) \circ g) \circ f & & & & k \circ (h \circ (g \circ f)) \\
 \downarrow \alpha_{k, h, g} \circ 1_f & & & & \uparrow 1_k \circ \alpha_{h, g, f} \\
 (k \circ (h \circ g)) \circ f & \xrightarrow{\alpha_{k, h \circ g, f}} & & & k \circ ((h \circ g) \circ f)
 \end{array}$$

C'est en fait une description d'homotopie.

Exemple 1.1.6. La catégorie des catégories **Cat** est bien une 2-catégories, où les 2-morphismes sont des transformations naturelles. On s'intéresse aux compositions ici.

- Soit $F_1, G_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, F_2, G_2: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ les foncteurs, et $\alpha: F_1 \Rightarrow G_1, \beta: F_2 \Rightarrow G_2$ les

transformations naturelles, on a

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{G_1} \end{array} \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{G_2} \end{array} \mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2 F_1} \\ \Downarrow \beta \circ \alpha \\ \xrightarrow{G_2 G_1} \end{array} \mathcal{E}$$

où la transformation naturelle $\beta * \alpha$ est définie par la diagramme commutative :

$$\begin{array}{ccc} F_2 F_1(X) & \xrightarrow{\beta_{F_1(X)}} & G_2 F_1(X) \\ F_2(\alpha_X) \downarrow & \searrow \beta \circ \alpha(X) & \downarrow G_2(\alpha_X) \\ F_2 G_1(X) & \xrightarrow{\beta_{G_1(X)}} & G_2 G_1(X) \end{array}$$

Ici $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. C'est alors la composition horizontale.

- Soit $F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ trois foncteurs et $\alpha: F \Rightarrow G, \beta: G \Rightarrow H$ deux transformations naturelles, on a

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{G} \\ \beta \Downarrow \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \beta \alpha \Downarrow \\ \xrightarrow{H} \end{array} \mathcal{D}$$

où $\beta \alpha$ est définie par

$$\begin{array}{ccccc} & & \beta \alpha_X & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) & \xrightarrow{\beta_X} & H(X) \\ F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow & & \downarrow H(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\beta_Y} & H(Y) \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ & & \beta \alpha_Y & & \end{array}$$

Ici $f: X \rightarrow Y$ est une flèche dans la catégorie \mathcal{C} . C'est alors la composition verticale.

Définition 1.1.14. On dit que $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un **isomorphisme de catégories** s'il existe un foncteur $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tel que $GF: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur identique sur \mathcal{C} , et $FG: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est le foncteur identique sur \mathcal{D} .

Remarque. La notion d'isomorphisme de catégories est très forte. On doit trouver une

meillure notion.

Définition 1.1.15. Une **équivalence de catégories** \mathcal{C} et \mathcal{D} est la donnée

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$$

avec des isomorphismes naturels $\eta: 1_{\mathcal{C}} \simeq GF$, $\varepsilon: FG \simeq 1_{\mathcal{D}}$. On dit que \mathcal{C} et \mathcal{D} sont **équivalents**, noté $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, s'il y a une équivalence de catégories entre eux.

Définition 1.1.16. Soit $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Pour tout $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, le foncteur F induit une fonction

$$F_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$$

On dit que le foncteur F est

- **fidèle** si $F_{X,Y}$ est injective pour $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- **plein** si $F_{X,Y}$ est surjective pour $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- **pleinement fidèle** si $F_{X,Y}$ est bijective pour $\forall X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- **essentiellement surjectif**, si pour tout $Y \in \text{Ob}(\mathcal{D})$, il existe $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tel que $FX \simeq Y$ dans la catégorie \mathcal{D} .

Théorème 1.1.1. Un foncteur est une équivalence de catégories si et seulement si il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

Démonstration. [Rie14] thm 1.5.9. □

Exemple 1.1.7. k corps, K/k extension galoisienne finie. On a alors une équivalence de catégories :

$$\text{Et}_{K/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G} - \text{Ens}_{\mathbf{f}}$$

Voir : [DD19] thm 5.9.4.

Définition 1.1.17. \mathcal{C} catégorie, $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$ foncteur, on définit la **catégorie des éléments** de \mathcal{F} , noté $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F}$ (ou $\text{Fib}(\mathcal{F})$), avec

- $\text{Ob} : (c, x)$ où $c \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $x \in \mathcal{F}(C)$.
- $\text{Mor} : \text{Hom}((c, x), (c', x')) = \{f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \mid \mathcal{F}(f)(x) = x'\}$.

Remarque. On a donc le foncteur canonique $\int_{\mathcal{C}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$, $(c, x) \mapsto c$.

Exemple 1.1.8. G groupe, X est un G -ensemble $\longleftrightarrow x: \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Ens}$, $* \mapsto X$. La catégorie $\int_{\mathbf{BG}} x$ a des objets dans X et $\text{Hom}(x, y) \simeq \{g \in G, gx = y\}$.

Définition 1.1.18. Soit \mathcal{C} une catégorie localement petite, on note $\hat{\mathcal{C}}$ la catégorie des préfaisceaux sur \mathcal{C} . De plus, on a un foncteur canonique

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &\rightarrow \hat{\mathcal{C}} \\ X &\mapsto h_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \\ f: X &\rightarrow Y \mapsto h_f: h_X \rightarrow h_Y \text{ par composition}\end{aligned}$$

appelé le **préfaisceau des points à valeurs dans X** .

Théorème 1.1.2 (Yoneda). Le foncteur dans 1.1.18 est pleinement fidèle : on peut identifier \mathcal{C} à une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{C}}$. En particulier, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, h_Y)$$

On l'appelle le **plongement de Yoneda**.

Remarque. C'est la trivialité la plus importante des mathématiques.

Démonstration. On montre que pour tout préfaisceau \mathcal{F} et objet X de \mathcal{C} , il y a une bijection

$$\text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}(X)$$

Précisément, on met $\varphi: \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ par $\varphi(\alpha) = \alpha_X(\text{Id}_X)$. Pour l'inverse, on donne $\psi: \mathcal{F}(X) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_X, \mathcal{F})$ par $\psi(s) = \alpha^s: h_X \Rightarrow \mathcal{F}$ qui est définie par $\alpha_T^s: h_X(T) \rightarrow \mathcal{F}(T), f \mapsto \mathcal{F}(f)$. Vérifions cela donne la bijection voulue. En particulier, le cas $\mathcal{F} = h_Y$ est le plongement de Yoneda. \square

Définition 1.1.19. Un préfaisceau \mathcal{F} dans l'image essentielle du plongement de Yoneda (c'est-à-dire il est isomorphe à un h_X) est dit **représentable**.

Exemple 1.1.9. (i) k anneau commutatif. $f = (f_1, \dots, f_l) \in k[T_1, \dots, T_N]$. Alors le foncteur $\text{Alg}_k \rightarrow \text{Ens}, A \mapsto Z_f(A) = \{(a_1, \dots, a_N) \in A^N \mid f_i(a_1, \dots, a_N) = 0, \forall 1 \leq i \leq l\}$ est représenté par $k[T_1, \dots, T_N]/(f_1, \dots, f_l)$.

(ii) $\mathcal{P}: \text{Ens}^{op} \rightarrow \text{Ens}, X \mapsto \mathcal{P}(X)$ est représenté par $\{0, 1\}$.

Exercice 1.1.1. (i) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $f: X \rightarrow Y$ mono
- b) $\Delta_f: h_X \rightarrow h_X \times_{h_Y} h_X$ morphisme diagonal est isomorphisme
- b') $X \xrightarrow{\sim} X \times_Y X$

- c) $X \rightarrow X \times_Y X$ est un épimorphisme
d) $pr_1 = pr_2$ dans la diagramme suivante :

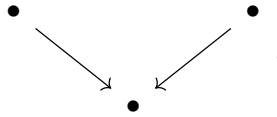
$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{pr_1} & X \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

- (ii) Identifier $\mathcal{Z}(\text{Alg}_{\mathbb{F}_p})$.
(iii) Identifier $\text{End}(\text{Oubli}: \mathbf{G} - \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ens})$.
(iv) Dans $\mathbb{Z} - \text{mod}$, $\forall A, A \simeq A/A_{tors} \oplus A_{tors} =: D(A)$ définit le foncteur D . Mais $D \neq \text{Id}$.

1.2 Limites

Définition 1.2.1. Soit \mathcal{I}, \mathcal{C} deux catégories et $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. On dit aussi \mathcal{F} est **diagramme (de type \mathcal{I}) à valeurs dans \mathcal{C}** .

Exemple 1.2.1. (i) Si \mathcal{I} est la catégorie illustrée par



alors $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ est donnée de $X, Y, S \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ telle qu'on a

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & S & \end{array}.$$

(ii) la limite de

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \swarrow & \searrow \\ & S & \end{array}$$

est S car le diagramme sous-jacent \mathcal{I} a un objet initial.

- (iii) $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \leq)^{op}$, p est un premier. On met $\mathcal{F}: n \mapsto \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, alors on a une flèche $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ quand $n \leq m$ et $\lim_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) =: \mathbb{Z}_p$.

- (iv) Soit \mathcal{I}, \mathcal{C} deux catégories et $T \in \text{Ob}\mathcal{C}$. On met le **foncteur constant** $\underline{T}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, $i \mapsto T$, $f \mapsto \text{id}_T$. Soit $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ une diagramme/un foncteur, alors $\text{Hom}(\underline{T}, \mathcal{F})$ est la donnée $\{(f_i)_{i \in \text{Ob}\mathcal{I}}\}$ telle que $\forall i \rightarrow j$, on a la diagramme commutative :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}(i) \\ & \nearrow f_i & \downarrow \\ T & & \\ & \searrow f_j & \downarrow \\ & & \mathcal{F}(j) \end{array} .$$

On l'appelle le **cône sur \mathcal{F} de sommet T** .

Par exemple, si \mathcal{I} est la diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & \searrow & \swarrow \\ & s & \end{array} ,$$

alors $\text{Hom}_{\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}}(\underline{T}, \mathcal{F})$ est juste la collection des flèches (f, g) telle qu'on a la diagramme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}(x) & & \\ & \nearrow f & & \searrow & \\ T & & \mathcal{C} & & \mathcal{F}(s) \\ & \searrow g & & \nearrow & \\ & & \mathcal{F}(y) & & \end{array} .$$

Définition 1.2.2. On dit que \mathcal{F} admet une **limite** notée $\lim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$ si ce foncteur $T \mapsto \text{Hom}(\underline{T}, \mathcal{F})$ est représentable par un objet qu'on appelle $\lim_{\mathcal{I}} \mathcal{F}$. En d'autre temrs, $\lim_{\mathcal{I}} \mathcal{F} \in \text{Ob}\mathcal{C}$ est l'objet universel s'envoyant vers les $\mathcal{F}(i)$: on a une diagramme suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \mathcal{F}(i) \\ & & & \nearrow & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\exists!} & \lim_{\mathcal{I}} \mathcal{F} & \nearrow & \mathcal{F}(j) \\ & & & \searrow & \\ & & & & \end{array}$$

tant qu'il y a une flèche $i \rightarrow j$. Dualament on a la notion **colimite** définie par le **cocône**.

Exemple 1.2.2. Dans la catégorie **Ens**, la limite de

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & S & \end{array}$$

est $X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$.

En général, pour \mathcal{C} catégorie quelconque, on note $X \times_S Y$ une telle limite si elle existe, appelé **produit fibré** de X et Y au-dessus de S . Dualelement (c'est-à-dire pour les colimites), on note $X \coprod_S Y$, appelé **somme amalgamée** :

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & S \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \coprod_S Y \end{array} \quad .$$

Définition 1.2.3. On dit qu'une catégorie est **complète** si les limites indicées par petite catégorie existent (=sont représentables) toujours.

Fait : Si $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, les limites existent toujours¹.

Exercice 1.2.1. Soit \mathcal{C} une catégorie complète et petite, alors \mathcal{C} est un préordre, c'est-à-dire pour $x, y \in \mathcal{C}$, $\text{Hom}(x, y) = \emptyset$ ou $*$.

Exemple 1.2.3. (i) $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$ où \mathcal{I} une petite catégorie, alors

$$\lim_{\mathcal{I}} \mathcal{F} = \{(x_i)_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})} \in \prod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})} \mathcal{F}(i) \mid \forall \varphi: i \rightarrow j \in \text{Mor } \mathcal{I}, \mathcal{F}(\varphi)(x_i) = x_j\}$$

(ii) Dans \mathbf{Vect}_k , pour

$$E \xrightarrow[0]{d} F ,$$

la limite est $\ker d$, la colimite est $\text{coker } d$.

(iii) Pour le même diagramme

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{Z} & & \end{array} ,$$

1. modulo des problèmes de taille/ensemblistes.

la colimite est \mathbb{Z}^2 dans **Ab**, tandis que la colimite dans **Grp** est \mathbf{F}_2 le groupe libre.

(iv) Soit G un groupe et X un G -ens, alors la limite du diagramme

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \forall g \\ X \end{array}$$

est $\text{Fix} X^{\curvearrowright G}$.

(v) Dans \mathbf{Alg}_k , la colimite du diagramme

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

et $A \otimes_k B$.

(vi) Van Kampen : X espace topologique, on a

$$\Pi_1(X) \simeq \text{colim} \Pi_1(U)$$

dans la catégorie des groupoïdes.

Exemple 1.2.4. Soit \mathcal{C} une catégorie et deux objets X et Y de cette catégorie. Soient deux morphismes parallèles f et g entre ces objets : $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$. On dit qu'une flèche $e : E \rightarrow X$ **égalise** la paire lorsque les morphismes composés $f \circ e = g \circ e$ coïncident. Il y a, potentiellement, de multiples façons d'égaliser une paire. L'égaliseur le fait d'une propriété universelle, au sens où toute autre solution se factorise de manière unique par lui : pour une paire de morphismes parallèles f, g , un **égaliseur** est une flèche $\text{eq} : E \rightarrow X$ qui égalise la paire et telle que, pour toute flèche $m : O \rightarrow X$ qui égalise la paire, il existe une unique flèche $u : O \rightarrow E$ telle que $m = \text{eq} \circ u$. Autrement dit, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\text{eq}} & X & \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} & Y \\ \uparrow \exists ! & \nearrow m & & & \\ O & & & & \end{array}$$

Une autre manière de dire cela est que l'égaliseur est la limite du $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} Y$. En particulier, tout égaliseur est un monomorphisme. Duale, on a la notion de **coégaliseur**.

Fait. Les catégories $\mathbf{Ab}, \mathbf{Top}, \mathbf{Cat}, \hat{\mathcal{C}}$ sont bicomplètes. Pour \mathbf{Cat} , voir plus tard dans la discussion de catégories dérivées.

1.3 Adjoints

Proposition-Définition 1.3.1. Si $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ et $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ deux foncteurs, les données suivantes sont en bijection :

- a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$ dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}, \mathbf{Ens})$.
- b) Il existe deux morphismes $\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, appelé **unité**, et $\varepsilon: FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, appelé **counité**, telles que ε est (à translation près) un inverse à gauche de η , c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow \mathrm{id}_F & \swarrow \varepsilon F \\ & F & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow \mathrm{id}_G & \swarrow G\varepsilon \\ & G & \end{array} .$$

- b') Il existe un morphisme $\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tel que $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \forall y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx, y) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GFx, Gy) \xrightarrow{\eta_x^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, Gy)$$

$\eta_x^* \circ G$ est un isomorphisme.

- c) Il existe un morphisme $\eta: \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tel que $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \eta_x: x \rightarrow GF(x)$ est un objet initial de $x \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$.

Dans ces conditions, on dit que F est l'**adjoint à gauche** de G et G est l'**adjoint à droite** de F , noté $F \dashv G$.

Exemple 1.3.1. 1) $f: X \rightarrow Y$ application entre ensembles, alors

$$\mathcal{P}(X) \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} \mathcal{P}(Y)$$

est une adjonction, où f_* l'image direct est f^* l'image inverse.

- 2) $A \rightarrow B$ morphisme d'anneaux, alors

$$\mathrm{Mod}_A \xrightleftharpoons[-[A]]{-\otimes_A B} \mathrm{Mod}_B$$

est une adjonction, où $-\otimes_A B$ l'extension des scalaires et $-[A]$ la restriction des scalaires.

3) L'adjoint à gauche de

$$\mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Ens}, \mathcal{C} \mapsto \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$$

est $E \mapsto$ **catégorie discrète** associé à E , dont les objets sont éléments de E et il n'y a que des identités comme flèches.

4) L'adjoint du foncteur oubli $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est le foncteur libre.

5) voir plus tard :

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{\quad \perp \quad} & & \xleftarrow{\quad} & \\ \mathbf{Grpd} & \xleftrightarrow{\quad \perp \quad} & \mathbf{Cat} & \xrightarrow{\quad [\text{nerf}] \quad} & \mathbf{Ens}_\Delta \\ & \xleftarrow{\quad \perp \quad} & & & \end{array}$$

On introduit maintenant le lien avec les limites et continuité.

Soit $L: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ une diagramme et $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{L} & \mathcal{D} \\ & & \downarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

supposons que $\lim_{\mathcal{I}} L$ et $\lim_{\mathcal{I}} GL$ existent, alors on a morphisme

$$G(\lim_{\mathcal{I}} L) \rightarrow \lim_{\mathcal{I}} GL$$

donné par

$$\begin{array}{ccccccc} \lim_{\mathcal{I}} L & \longrightarrow & L_i & \rightsquigarrow & G(\lim_{\mathcal{I}} L) & \longrightarrow & G(L_i) \\ & \searrow & \downarrow & & \searrow & & \downarrow \\ & & L_j & & & & G(L_j) \end{array}$$

Proposition 1.3.2. a) Les adjoints à droites respectent les limites, c'est-à-dire la flèche $G(\lim_{\mathcal{I}} L) \rightarrow \lim_{\mathcal{I}} GL$ est un isomorphisme de \mathcal{C} si G a un adjoint à gauche. On dit que G est **continu**.

b) Les adjoints à gauche respectent les colimites. On dit dualement **cocontinu**.

Démonstration. Supposons $F \dashv G$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I} & \xrightarrow{L} & \mathcal{D} \\ & \searrow GL & \downarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

on a alors, par adjonction et la définition de la limite,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}}(\underline{x}, GL) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}}(\underline{F(x)}, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), \lim_{\mathcal{I}} L)$$

Donc $\mathrm{c\^one}(x, GL) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, G(\lim_{\mathcal{I}} L))$, c'est-à-dire $G((\lim_{\mathcal{I}} L)) \simeq \lim_{\mathcal{I}} GL$. \square

Remarque. Pour montrer l'existence d'un adjoint (à droite ou à gauche), il suffit parfois d'étudier un énoncé «ponctuel».

Exemple 1.3.2. Soit $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur tel que $\forall y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), x \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), y)$ est représentable, alors F a un adjoint à droite.

On rappelle :

$G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ a un adjoint à gauche si $\forall x \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $x \times_{\mathcal{C}}^{\rightarrow} \mathcal{D}$ a un objet initial.

C'est utile pour démontrer une réciproque de « G admet un adjoint à gauche $\Rightarrow G$ continue ».

Définition 1.3.1. Un ensemble de **cogénérateurs** de la catégorie \mathcal{D} est un ensemble d'objets $Q \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ tel que

- $\forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \forall q \in Q, \exists$ une flèche $q \rightarrow x$.
- $\forall f, g: x \rightarrow y, f \neq g$, il existe $q \in Q$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(y, q)$ tels que $\varphi f \neq \varphi g$.

Théorème 1.3.3. Soit \mathcal{D} une catégorie

- complète,
- a un petit ensemble de cogénérateurs,
- toute collection de **sous-objets** (a sous-objet de $b: \exists a \hookrightarrow b$) une intersection (sous-objet commun),

alors si $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (localement petite) est continu, alors il admet un adjoint à gauche.

Démonstration. Point clé : on se ramène (en utilisant l'hypothèse sur G) à un énoncé d'existence d'objet initial dans des catégories particulières (comme \mathcal{D}).

Notons Q l'ensemble des cogénérateurs, $\pi := \prod_{q \in Q} q$ objet de \mathcal{D} , et e l'intersection des sous-objets de π . On veut montrer que e est initial, c'est-à-dire $\forall x \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}, \exists ! e \rightarrow x$.

Fixons x , posons $\pi_x := \prod_{q \in Q} q^{\mathrm{Hom}(x, q)}$, alors il existe une flèche $x \rightarrow \pi_x$ qui est mono

par la définition de cogénérateur. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \prod q = \pi & \xrightarrow{\text{diag}} & \pi_x \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 e & \xrightarrow{\exists \varphi} & \pi \times_{\pi_x} x & \xrightarrow{\text{pr}_2} & x
 \end{array}$$

Ici φ est induit par le fait que $\pi \times_{\pi_x} x$ est un sous objet de π . On obtient donc une flèche de e vers x . De plus, on affirme qu'il existe une unique flèche de e vers x . En fait, si $a, b: e \rightarrow x$ et $a \neq b$, alors l'égaliseur est un sous objet de e , contredit la définition de e . \square

1.4 Limites filtrantes

Définition 1.4.1. Une catégorie \mathcal{I} est **filtrante** si elle satisfait les conditions suivantes :

- (i) $\mathcal{I} \neq \emptyset$,
- (ii) $\forall x, y \in \text{Ob} \mathcal{I}, \exists a \in \text{Ob} \mathcal{I}$ tel qu'il y a des flèches $x \rightarrow a$ et $y \rightarrow a$,
- (iii) $\forall a, b: x \rightarrow y, \exists \varphi: y \rightarrow z$ tq $\varphi a = \varphi b$.

On dit \mathcal{I} est **cofiltrante** si \mathcal{I}^{op} est filtrante.

Remarque. Souvenet, on prend des limites associées à des ensembles ordonnés. Voir ce que cela veut dire si \mathcal{I} est une catégorie associée à préordre.

Exemple 1.4.1. $\text{Ouv}(X)^{op}$, où X un espace topologique.

Fait. Soit \mathcal{I} une petite catégorie et $E: \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$ un foncteur, alors

- 1) $\text{colim}_{\mathcal{I}} E \simeq (\coprod_{i \in \text{Ob}(\mathcal{I})} E(i)) / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence engendrée par $x_i \stackrel{R}{\sim} y_j$ s'il existe $a: i \rightarrow k, b: j \rightarrow k$ tq $x_i|_k (= E(a)(x_i)) = y_j|_k (= E(b)(y_j))$.
- 2) Si \mathcal{I} est filtrante, alors R est déjà une relation d'équivalence.

Corollaire 1.4.1. Les colimites filtrantes (à valeurs dans \mathbf{Ens}) commutent aux limites finies. Précisément, soit \mathcal{I} une petite catégorie filtrante et K une catégorie finie, on a alors

$$\text{colim}_{\mathcal{I}} \lim_K F(\cdot, \cdot) \xrightarrow{\sim} \lim_K \text{colim}_{\mathcal{I}} F(\cdot, \cdot)$$

Démonstration. admis (pas difficile). Voir [Rie14] ou [Lan98]. \square

Fait. $\text{Ann} \xrightarrow{\text{Oub}} \text{Ens}$ commute aux colimites filtrantes (et aux (petites) limites). C'est-à-dire l'ensemble sous-jacent à $\text{colim}_{\mathcal{I}} A_i = \coprod_{i \in \text{Ob } \mathcal{I}} A_i / \sim$.

Example 1.4.2. k corps, $V \in \text{Ob}(\text{Vect}_k)$ tq pour toute colimite filtrante on a

$$\text{Hom}_k(V, \text{colim}_{\mathcal{I}} W_i) \xleftarrow{\sim} \text{colim}_{\mathcal{I}} \text{Hom}_k(V, W_i)$$

Montrer que $\dim V < +\infty$.

Chapitre 2

Faisceaux

2.1 Constructions

X espace topologique. Rappelons qu'un préfaisceau est un foncteur $\mathcal{F}: \text{Ouv}(X)^{op} \rightarrow \text{Ens}$ sur $\text{Ouv}(X)$ (le préordre des ouverts de X), c'est-à-dire si $U \subset V$, on a alors une application appelée la **restriction** $\rho_{VU}: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U), s \mapsto s|_V$. On appelle $\mathcal{F}(U)$ la **section de \mathcal{F} sur U** .

Définition 2.1.1. Un faisceau (d'ensemble) est un préfaisceau $\mathcal{F}: \text{Ouv}(X)^{op} \rightarrow \text{Ens}$ satisfaisant la propriété suivante :

$\forall \underline{U} = (U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert d'un $U \subset X$, le morphisme

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \text{Ker}\left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_{ij})\right)$$

est un isomorphisme. Autrement dit,

- 1) (injectivité) «séparation» 2 sections localement égales sont égales. Précisément, si $s, t \in \mathcal{F}(U)$ et $(U_i)_{i \in I}$ tq $\cup_{i \in I} U_i = U$. Si $s|_{U_i} = t|_{U_i}$, alors $s = t$.
- 2) (surjectivité) «recollement» Posons $U = \cup_{i \in I} U_i$. Si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ familles de sections compatibles au sens où $\forall i, j, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, alors $\exists s \in \mathcal{F}(U)$ tq $\forall i, s_i = s|_{U_i}$.

Remarque. On note \hat{X} la catégorie des préfaisceaux sur X , et note \tilde{X} la catégorie des faisceaux sur X qui est une sous catégorie pleine de \hat{X} .

Exemple 2.1.1. 1) X espace topologique, $U \mapsto \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ les fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R} . X espace analytique, par exemple surface de Riemann, $U \mapsto$ analytiques sur U , noté $\mathcal{O}_X(U)$.

- 2) $Y \xrightarrow{\pi} X$ morphisme dans Top , $U \mapsto$ sections de π sur $U = \text{Hom}_{\text{Top}/X}(U, Y)$.

3) (X, x) espace topologique avec un point dedans, E ensemble,

$$U \mapsto \begin{cases} E & \text{si } x \in U \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

On note ce faisceau x_*E , appelé **le faisceau gratte-ciel**.

4) X espace topologique, E ensemble. $U \mapsto$ applications continues de U vers E équipé la topologie discrète (donc localement constantes) donne le faisceau $\underline{U} = E^{\pi_0(U)}$. On l'appelle le **faisceau constant** (de valeur E).

5) A anneau commutatif $\rightsquigarrow X = \text{Spec}(A)$ l'espace topologique où les points sont des idéaux premiers et les fermés sont $V(I) =$ idéaux contenant I , ici I est un idéal de A . Les ouverts sont donc les complémentaire de $V(f)$. On peut vérifier que les $D(f) = X \setminus V(f)$ donnent une base d'ouverts, où $f \in A$. On met l'application $D(f) \mapsto A[f^{-1}]$, cela s'étend en faisceau (d'anneaux).

Définition 2.1.2. On note x^* le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \text{colim}_{U \in \text{Vois}(x)^{op}} \mathcal{F}(U) = x^*\mathcal{F}$ ou \mathcal{F}_x . Comme c'est une colimite à valeur ensemble, on sait $\mathcal{F}_x = \coprod_{x \in U \subset X} \mathcal{F}(U) / \sim$, où $s \in \mathcal{F}(U) \sim t \in \mathcal{F}(V)$ si $\exists x \in W \subset U \cap V$ tq $s|_W = t|_W$.

Fait. On a l'adjonction :

$$\tilde{X} \begin{array}{c} \xrightarrow{x^*} \\ \perp \\ \xleftarrow{x_*} \end{array} \text{Ens}$$

En particulier, x^* est cocontinu et exact à droite.

Démonstration. Identifier l'unité $\eta: \mathcal{F} \rightarrow x_*x^*\mathcal{F}$, c'est en fait

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{si } x \in U \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui induit $\text{Hom}_{\text{Ens}}(x^*\mathcal{F}, G) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{X}}(\mathcal{F}, x_*G)$ par

$$\begin{array}{ccccc} x^*\mathcal{F} & \rightarrow & G & \rightsquigarrow & x_*x^*\mathcal{F} & \longrightarrow & x_*G \\ & & & & \uparrow \eta & \nearrow & \\ & & & & \mathcal{F} & & \end{array}$$

On peut vérifier que c'est une bijection. □

Exemple 2.1.2. 1) $\mathcal{O}_{X,x}^{an}$ = germes de fonctions analytiques au voisinage de x .

2) $(\mathcal{O}_{\text{Spec}A})_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}} = A[(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}]$.

Fait. $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un iso/mono/épi (dans \tilde{X}) ssi $\forall x \in X$, $f_x = x^*f$ l'est.

Démonstration. 1) isom : Si f isom, alors f_x isom $\forall x$. On veut montrer la réciproque.

Observation : si \mathcal{F} est un faisceau, lors $\mathcal{F} \hookrightarrow \prod \mathcal{F}$, $U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$. Alors, comme $\forall x$, f_x isom,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod \mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & \prod \mathcal{G} \end{array}$$

donc f mono dans \hat{X} et donc dans \tilde{X} . En particulier, pour $U \subset X$ ouvert, on a $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ ouvert. Il faut montrer que $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est surjective. Fixons $t \in \mathcal{G}(U)$. Pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert $V_x \subset U$ tq $\exists s_x \in \mathcal{F}(V_x)$, $f(s_x) = t|_{V_x}$. Sur $V_x \cap V_y$, on a $f(s_x|_{V_x \cap V_y}) = f(s_y|_{V_x \cap V_y}) = t|_{V_x \cap V_y}$. Comme $f: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ est mono, $s_x|_{V_x \cap V_y} = s_y|_{V_x \cap V_y}$, d'où $s \in \mathcal{F}(U)$ par recollement est un préimage voulu.

- 2) mono : Rappelons que $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est mono ssi $\Delta_f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ est isom. On a vu que c'est équivalent à $\forall x$, $x^*\Delta_f$ isom. Comme x^* exact à gauche, on sait

$$\mathcal{F}_x \rightarrow x^*(\mathcal{G} \times \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}_x \times_{\mathcal{G}_x} \mathcal{F}_x$$

donc $\mathcal{F}_x \hookrightarrow \mathcal{G}_x$, $\forall x \Leftrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$.

Le problème : est-ce que le produit fibré existe dans \tilde{X} ? En fait, plus généralement, \tilde{X} est complète : les (petites) limites sont représentables. Rappelons que \hat{X} est bicomplète, on peut montrer que la limite dans \tilde{X} des faisceaux \mathcal{F}_i est juste la limite dans \hat{X} , car deux limites commutent.

- 3) épi : on veut f épi $\Leftrightarrow \forall x, f_x \rightarrow \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$. \Leftarrow : Si $a, b: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ tq $af = bf$, on veut montrer que $a = b$. Tout abord, $\forall x$, $a_x f_x = b_x f_x$, donc $a_x = b_x$ car f_x est surjective. Cela donne $a = b$. Pour \Rightarrow , en admettant l'existence de sommes amalgamées, on sait f épi $\Leftrightarrow \mathcal{G} \coprod_{\mathcal{F}} \mathcal{G} \simeq \mathcal{G}$. Comme x^* est exact et la conclusion pour isomorphisme, cela est vrai ssi $\forall x$, $\mathcal{G}_x \coprod_{\mathcal{F}_x} \mathcal{G}_x \simeq (\mathcal{G} \coprod_{\mathcal{F}} \mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_x$, ssi $\forall x$, $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$.

□

Remarque. f mono ssi $\forall U \subset X$, $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ injectif. Mais c'est pas vrai pour épi. Par exemple, $X = \mathbb{C}^*$, $\mathcal{O}_X^{an} = \text{Hol}_X$ faisceaux des holomorphes (analytiques) sur X . Considérons $\mathcal{O}_X^{an} \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X^{an}$, $f \mapsto f'$.

Retour à la construction du faisceau associé :

$$\tilde{X} \xrightleftharpoons[\underset{i}{\rightarrow}]{\overset{a}{\leftarrow}} \hat{X}$$

Voici 4 approches.

- 1) utiliser thm général d'adjonction 1.3.3.
- 2) via $\coprod \mathcal{F}$, $s \mapsto (s_x)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \coprod \mathcal{F} \\ & \searrow & \uparrow \\ & & a\mathcal{F} \end{array}$$

Précisément, $U \mapsto \{(s(x)) \mid \forall x, \exists V, x \in V, t \in \mathcal{F}(V) \text{ tq } t_y = s(x), \forall y \in V\} \in \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x$.

Vérifions que cela donne un faisceau.

- 3) Rappelons que $Y \xrightarrow{\pi} X$ continue \rightsquigarrow faisceau des sections $\text{Hom}_X(-, Y) : U \mapsto (\sigma : U \rightarrow Y) \text{ tq } \pi \sigma = \text{id}$. Soit \mathcal{E} un préfaisceau sur X , posons $E = \coprod_{x \in X} \mathcal{E}_x$ avec la topologie discrète. Pour toute $s \in \mathcal{E}(U)$, on a une section $\sigma_s : u \mapsto (u, s_u) :$

$$\begin{array}{ccc} & & E^{\text{disc}} \\ & \nearrow \sigma_s & \downarrow \pi \\ U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

Munissons maintenant l'ensemble E^{disc} de la topologie la plus forte tq les σ_s soient continues. Précisément, une partie $W \subset E^{\text{disc}}$ est ouvert ssi $\forall U \subset X$, $s \in \mathcal{E}(U)$, la partie $\{x \mid s_x \in W\}$ est ouvert dans X . On vérifie facilement que c'est un homéo local (**étale**) et on a $\mathcal{E} \rightarrow \text{Hom}_X(-, E)$ s'identifie à $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} a\mathcal{E}$. On appelle E **espace étalé**.

- 4) \mathcal{F} préfaisceau. On veut définir

$$\check{H}^0(\underline{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(\underline{U}) = \text{Ker}(\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_{ij}))$$

et puis

$$(a\mathcal{F})(U) \xrightarrow{\sim} (a\mathcal{F})(\underline{U}).$$

Pour $U \subset X$, posons la catégorie des recouvrements \underline{U} . Précisément, pour deux recouvrement de U , disons \underline{U} et \underline{V} , un morphisme de \underline{U} vers \underline{V} est : $I \xrightarrow{\varphi} J$, tq le diagramme suivant commute $\forall i$: c'est-à-dire seulement les inclusions $U_i \subset V_{\varphi_i}$ ne

sont pas triviales.

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{f_i} & V_{\varphi_i} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

Fait. 1) R_U est cofiltrante.

2) $\underline{U} \xrightarrow{(\varphi, (f_i))} \underline{V}$ est indépendante de $(\varphi, (f_i))$.

Posons

Proposition 2.1.1. \tilde{X} est bicomplète.

Démonstration. complète : déjà vu.

cocomplète : Soit $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \tilde{X}$, alors $\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i$ existe dans \hat{X} (et se calculent terme à terme), notée $\widehat{\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i}$. On affirme que $a(\widehat{\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i})$ est une colimite dans \tilde{X} . En fait,

$$\text{Hom}_{\tilde{X}}(a\widehat{\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\hat{X}}(\widehat{\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i}, \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{I}} \text{Hom}_{\hat{X}}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{I}} \text{Hom}_{\tilde{X}}(\mathcal{F}_i, \mathcal{G})$$

Donc $a\widehat{\text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i} = \text{colim}_{\mathcal{I}} \mathcal{F}_i$. □

Exercice 2.1.1. 1) $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ préfaisceau, $U \mapsto$ fonctions continues, bornées. Identifier aB .

2) $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ faisceaux, $\forall x$, considérons l'application $(\coprod_i \mathcal{F}_i)_x \rightarrow \coprod_i (\mathcal{F}_{ix})$. Montrer que ce n'est ni injective ni surjective.

3) X quasi-compact, (\mathcal{F}_i) des faisceaux, I préordre filtrant. Montrer que

$$\text{colim}_I \Gamma(X, \mathcal{F}_i) \rightarrow \Gamma(X, \text{colim}_I \mathcal{F}_i)$$

est injective.

2.2 Fonctorialité

Toujours pour les faisceaux d'ensembles sur des espaces topologiques.

Soit $F: X \rightarrow Y$ continue/morphisme dans **Top**. On pose le faisceau

$$f_*: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}, \mathcal{F} \mapsto (V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V)))$$

Notons que $f^{-1}(V) := X_V$ est un produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X_V \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & V \end{array}$$

Proposition 2.2.1. Ce foncteur a un adjoint à gauche f^*

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{X}}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\tilde{Y}}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$$

déduite d'une unité $G \mapsto f_*f^*G$.

Démonstration. Réinterprétation de $\mathrm{Hom}_{\tilde{Y}}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$ comme $\mathrm{Hom}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ « f -morphisms de \mathcal{F} dans \mathcal{G} » :

$$\begin{array}{ccccc} U' & \longrightarrow & U & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Ici on exige que $U \subset f^{-1}(V)$. On pose $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{UV}} \mathcal{G}(U)$ fonctoriellement en U, V . On pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\tilde{Y}}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) \\ \varphi &\mapsto (V \mapsto \varphi_{Vf^{-1}(V)}), V \subset X, \text{ ouvert} \end{aligned}$$

tq

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & (f_*\mathcal{G})(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(f^{-1}V) \\ & \searrow \varphi_{VU} & & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

pour U donné, $U \subset f^{-1}(V)$. Alors $\varphi \in \mathrm{Hom}_f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est la donnée de

$$\{\varphi_{VU} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(U) \text{ pour } U \subset f^{-1}(V) \text{ compatibles aux restrictions } V' \subset V\}$$

En utilisant la langue de limite, c'est-à-dire

$$\mathrm{colim}_{V \text{ tq } U \subset f^{-1}(V)} \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

donc un f -morphisme de \mathcal{F} dans $\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\hat{X}}(U \mapsto \text{colim}_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V), \mathcal{G})$. On pose donc $f^* \mathcal{F}$ le faisceau associé de $U \mapsto \text{colim}_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V)$. Par la propriété du faisceau associé, on sait

$$\text{Hom}_{\hat{X}}(f^* \mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\hat{X}}(U \mapsto \text{colim}_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V), \mathcal{G}) = \text{Hom}_{\tilde{Y}}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{G})$$

Cela montre que f^* est l'adjoint à gauche de f_* . \square

Remarque. avec des espaces étalés, c'est beaucoup plus simple.

$$\begin{array}{ccc} Y_{\mathcal{F}} \times_X X & \xrightarrow{\quad} & Y_{\mathcal{F}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\mathcal{F}(V) = \text{section de } Y_{\mathcal{F}} \text{ sur } V$. Vérifions que $f^* \mathcal{F}(V)$ est section de $Y_{\mathcal{F}} \times_X X$ sur $f^{-1}(V)$.

Exemple 2.2.1. $f: X \rightarrow *$, \mathcal{F} un faisceaux sur X . Alors $f_* \mathcal{F}$ est simplement $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$. Pour $g: * \rightarrow X$ avec $g(*) = x$, $g^* \mathcal{F}$ est le fibre \mathcal{F}_x .

Remarque. f_* est facile à définir, tandis que la construction de f^* est plus difficile. C'est toujours f_* le plus intéressant.

Exemple 2.2.2. $f: X \rightarrow Y$, $f(x) = Y$, $\mathcal{F} \in \tilde{X}$, $\mathcal{G} \in \tilde{Y}$. Alors $(f^* \mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$. En fait

$$(f^* \mathcal{G})_x = i_x^*(f^* \mathcal{G}) = (i_x^* f^*)(\mathcal{G}) = (f \circ i_x)^*(\mathcal{G}) = i_y^*(\mathcal{G})$$

Pour la deuxième égalité, il faut vérifions que généralement $h^* f^* = (fh)^*$. Cela provient de $f_* h_* = (fh)_*$ et l'adjonction. Voir [Wed16] Rmq 3.51.

Mais

$$(f_* \mathcal{F})_y = \text{colim}_{y \in V} (f_* \mathcal{F})(V) = \text{colim}_{y \in V} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{F}_x$$

Attention : Ici la colimite porte sur les voisinages de X_y qui proviennent de la base Y ! Ce morphisme n'est pas toujours un isomorphisme.

Question. Soit \mathcal{F}, \mathcal{G} deux faisceaux sur X . Pour $x \in X$, est-ce qu'on a

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) ?$$

Ici $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est le faiceasu où $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$.

2.3 Recollement de faisceaux

$X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ un recouvrement des ouverts. Posons \mathcal{F}_λ faisceaux sur X_λ et

$$\theta_{\lambda\mu}: \mathcal{F}_\mu|_{X_{\lambda\mu}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\lambda|_{X_{\lambda\mu}}$$

des isomorphismes où $X_{\lambda\mu} := X_\lambda \cap X_\mu$ (analoguement $X_{\lambda\mu\nu} = X_\lambda \cap X_\mu \cap X_\nu$) tq

$$\theta_{\lambda\mu} \circ \theta_{\mu\nu} = \theta_{\lambda\nu}: \mathcal{F}_\nu|_{X_{\lambda\mu\nu}} \rightarrow \mathcal{F}_\lambda|_{X_{\lambda\mu\nu}}$$

qu'on appelle condition de cocycle/recollement.

Proposition 2.3.1. Il existe un faisceau \mathcal{F} sur X et des isomorphismes $\eta_\lambda: \mathcal{F}|_{X_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\lambda$ tq la diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}_\lambda|_{X_{\lambda\mu}} \\ & \nearrow \eta_\lambda & \uparrow \theta_{\lambda\mu} \\ \mathcal{F}|_{X_{\lambda\mu}} & & \\ & \searrow \eta_\mu & \downarrow \\ & & \mathcal{F}_\mu|_{X_{\lambda\mu}} \end{array}$$

commute pour $\forall \lambda, \mu$. De plus, ce faisceau est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Pour U ouvert de X , posons $U_\lambda := U \cap X_\lambda$. On met

$$\mathcal{F}(U) := \{(s_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda(U_\lambda))_{\lambda \in L} : s_\lambda|_{U_{\lambda\mu}} = \theta_{\lambda\mu}(s_\mu)|_{U_{\lambda\mu}}\}$$

Vérifions que cela donne le faisceau voulu, où $\eta: \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\mu(U)$, $(s_\lambda) \mapsto s_\mu$ pour $U \subset X_\mu$. \square

2.4 G-torseur

Définition 2.4.1. X espace topologique. G faisceau en groupes (un foncteur de $\text{Ouv}(X)^{op}$ vers Grp). \mathcal{F} faisceau sur X muni d'une action à droite de G , c'est-à-dire il y a un morphisme de faisceau $\mathcal{F} \times G \rightarrow \mathcal{F}$ tq $\forall U, \mathcal{U} \times G(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ est une action à droite.

On veut un lien avec la cohomologie de Čech.

Définition 2.4.2. \mathcal{F} est un G -torseur (G -espace homogène/principal) si \mathcal{F} est un faisceau muni d'une action de G tq localement l'action est trivial, c'est-à-dire il y a un recouvrement d'ouverts $X = \bigcup_{i \in L} U_i$ tq $\exists G|_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$ avec la diagramme commutative

$$\begin{array}{ccc}
G|_{U_i} \times \mathcal{F}|_{U_i} & \longrightarrow & \mathcal{F}|_{U_i} \\
\downarrow & & \downarrow \\
G|_{U_i} \times G|_{U_i} & \xrightarrow{\text{produit}} & G|_{U_i}
\end{array}$$

pour tout $i \in L$.

Exemple 2.4.1. $\mathcal{F} = G$. C'est le G -torseur trivial.

Discussion. On observe un G -torseur \mathcal{F} . Posons un recouvrement $\underline{U} = (U_i)_{i \in L}$ tq

$$G|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{U_i} \leftrightarrow e(U_i) \mapsto f_i \in \mathcal{F}(U_i)$$

(et puis $g \mapsto g.f_i$). Pour $i, j \in L$, il existe donc unique $g_{ij} \in G(U_{ij})$ tq $f_j|_{U_{ij}} = f_i|_{U_{ij}} \cdot g_{ij}$, car l'action de $G(U_{ij})$ sur $\mathcal{F}(U_{ij})$ est simplement transitive. Cela donne $(g_{ij}) \in \prod_{ij} G(U_{ij})$.

De plus, on a la condition de cocycle

$$g_{ij}|_{U_{ijk}} g_{jk}|_{U_{ijk}} = g_{ik}|_{U_{ijk}}.$$

Cette condition dépend du choix des f_i ! Supposons $f_i = f'_i \cdot h_i$ un autre choix de trivialisations $G|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}|_{U_i}$, on peut facilement vérifier que $g'_{ij} = h_i|_{U_{ij}} g_{ij} h_j^{-1}|_{U_{ij}}$.

Posons la cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(\underline{U}, G) = \{(g_{ij}) \in \prod_{i,j} G(U_{ij}) \mid g_{ij} g_{jk} = g_{ik}\} / \sim$$

où $(g_{ij} \sim g'_{ij})$ si $\exists (h_i) \in (G(U_i))$ tq $g'_{ij} = h_i g_{ij} h_j^{-1}$.

Proposition 2.4.1. On a une bijection d'ensemble :

classes d'isomorphisme de G -torseurs triviaux sur $\underline{U} \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(\underline{U}, G)$.

Démonstration. Par recollement de faisceaux. □

Fait. On a l'égalité

$$\operatorname{colim}_{R_U^{op}} \check{H}^1(\underline{U}, G) = \check{H}^1(X, G)$$

Ici $\operatorname{colim}_{R_U^{op}} \check{H}^1(\underline{U}, G)$ sont les classes d'isomorphisme de $\operatorname{Tors}_G(X)$, où $\operatorname{Tors}_G(X)$ est la groupoïde des G -torseurs.

2.5 Faisceaux localement constants : première partie

Définition 2.5.1. $\mathcal{L} \in \tilde{X}$ est dit **localement constant**(lc) si $\exists X = \cup U_i$ tq $\forall i, \mathcal{L}|_{U_i}$ soit constant (isomorphisme à un \underline{E}_i où E_i ensemble).

Exemple 2.5.1. 1) G groupe constant, tout G -torseur est localement constant.

2) recollement de $\mathcal{F}_\lambda|_{X_\lambda}$ localement constant est localement constant.

Exercice 2.5.1. $X = S^1$ cercle unité. \mathcal{L} associé à l'espace étalé : $S^1 \rightarrow S^1$. Alors $\mathcal{L}(S^1) = \emptyset$ et $\mathcal{L} \simeq \mu_2(\mathbb{C}) = \{\pm 1\}$. Posons $U_\pm = S^1 \setminus \{\pm 1\}$. Identifier f_+ et f_- . Quel est $g_{+-} \in \mu_2(U_{+-})$?

Proposition 2.5.1. Tout faisceau localement constant sur $I = [0, 1]$ est constant.

Lemme 2.5.2. Il existe un sous recouvrement fini par des $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ tq $U_i \cap U_{i+1}$ connexe et $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $|i - j| > 1$.

Démonstration du lemme. admis(facile). Essayez de donner une démonstration élégante !

Démonstration. On peut donc supposer que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ connexe tq $\mathcal{L}|_U, \mathcal{L}|_V$ constant de même valeur L car $U \cap V \neq \emptyset$. On veut montrer que \mathcal{L} est constant. Posons $\mathcal{I} = \underline{\text{Isom}}(\mathcal{L}, \underline{L})$ un faisceau localement constant. Pour $\sigma_U \in \mathcal{I}(U), \sigma_V \in \mathcal{I}(V)$, on veut $\sigma \in \mathcal{I}(X)$. Comme $\sigma_U|_{U \cap V}, \sigma_V|_{U \cap V} \in \mathcal{I}(U \cap V) \simeq \text{Aut}(L)$, il existe $g \in \text{Aut}(L)$ tq $g\sigma_V|_{U \cap V} = \sigma_U|_{U \cap V}$. Alors $g\sigma_V$ et σ_U se recollent en isom $\mathcal{L} \rightarrow \underline{L}$. \square

Fait. On peut généraliser cette proposition à $[0, 1]^2$ et voire l'espace contractile.

Notre approche utilise un théorème très important sur les faisceaux ayant de (très) nombreuses générations.

2.6 Changement de base propre

Soit on a une diagramme dans Top :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\rho} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ S & \xleftarrow{\pi} & T \end{array}$$

Soit \mathcal{F} un faisceau sur X , on a un morphisme

$$\pi^* f_* \mathcal{F} \rightarrow g_* \rho^* \mathcal{F}$$

Sous certaines hypothèses de «finitude» (compacité), ce morphisme est un isomorphisme si $Y = X \times_S T$.

Cas particulier. $T = \{s\}$ un point dans S et $X_s = f^{-1}(S)$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\rho=i_{X_s}} & X_s \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ S & \xleftarrow{\pi=i_s^*} & s \end{array}$$

Alors le morphisme s'écrit comme

$$(f_*\mathcal{F})_s \rightarrow \Gamma(X_s, \mathcal{F}|_{X_s})$$

Attention, ici $(f_*\mathcal{F})_s = \operatorname{colim}_{s \in V} \mathcal{F}(f^{-1}V)$.

première étape Soit $Z \xrightarrow{i} X$, \mathcal{F} sur X , via la construction de i^* , on a l'application :

$$\operatorname{colim}_{Z \subset V \text{ ouvert}} \Gamma(V, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(Z, i^*\mathcal{F})$$

Pas difficile : cette application est toujours injective. En effet, s, t ont de même image, alors $\forall z \in Z$, $s_z = t_z$, donc $\forall z \in Z$, $\exists U_z \subset X$ voisinage de z tq $s|_{U_z} = t|_{U_z}$. Donc $s = t$ sur $\bigcup_z U_z$ et donc sur Z .

Proposition 2.6.1. Si Z est quasi-compact et si toute paire de points de Z possède des voisinages disjoints dans X , alors c'est un isomorphisme.

Démonstration. Pour $s \in \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$ qu'on souhaite le relever à V ouvert qui contient Z . Par définition, $\forall z \in Z$, $\exists U_z$ voisinage de z et $s^z \in \mathcal{F}(U_z)$ d'image s de $\Gamma(U_z \cap Z, \mathcal{F}|_Z)$. Par quasi-compacté de Z , on a $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ avec $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tq $s_i \mapsto s|_{Z \cap U_i}$. Par la construction, on peut trouver $W_{ij} \subset U_{ij} = U_i \cap U_j$ tq $s_i|_{W_{ij}} = s_j|_{W_{ij}}$. Il suffit donc, pour conclure, de montrer que $\exists V_i \subset U_i$ ouverts tq $V_{ij} \subset W_{ij}$ et $Z \subset \bigcup V_i$ (et puis on a $s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$ qui donne une section sur $V = \bigcup V_i$ par recollement). Cela devient du lemme suivant 2.6.2. \square

Lemme 2.6.2. Z comme dans la proposition. $\forall n \geq 0$, si $Z \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, W^{i_0, \dots, i_n} ouverts où $i_0, \dots, i_n =: \underline{i}$ un $(n+1)$ -uplet de I , tq $W^{i_0, \dots, i_n} \cap Z = U_{i_0, \dots, i_n} \cap Z$ et $W^{\underline{i}} \subset U_{\underline{i}}$, alors, il existe V_i ouverts tq $\overline{V_i} \cap Z \subset U_i$, $V_i \subset W^{\underline{i}}$ et $Z \subset \bigcup V_i$.

Démonstration. Par récurrence. On montre seulement pour les cas $n = 0, 1$.

$n = 0$. $\forall z \in Z \cap U_i, \forall z' \in Z \setminus U_i$ qui est compact, par hypothèse de séparation, $\exists V_{z,z'}$ voisinage de z et $W_{z,z'}$ voisinage de z' disjoints, alors $Z \setminus U_i \subset W_{z,z'_1} \cup \dots \cup W_{z,z'_r}$ par quasi-compacité. Posons $V_z = \bigcap_{1 \leq i \leq r} V_{z,z'_i}$ voisinage ouvert de z , alors $V_z \cap Z \subset U_i$ par construction (car $W \cap V = \emptyset$). Par quasi-compacité de Z , $\exists (z_j, i_j)$ tq $V_{z_j} \subset U_{i_j}$ et $Z \subset \bigcup_j V_{z_j}$. Posons $V_i = \left(\bigcup_j \text{tq } i_j = i \right) V_{z_j}$, cela donne le recouvrement voulu pour le cas $n = 0$.

$n = 1$. Posons $(W^i := W^{i,i})$. Par le résultat du cas $n = 0$, on a (V_i) tq $\overline{V_i} \cap Z \subset U_i, Z \subset \bigcup V_i$ et $V_i \subset W_i$. Le problème maintenant c'est $\forall i \neq j$, on n'a pas $V_{ij} = V_i \cap V_j \subset W^{ij}$. Pour cela, on change V_i par $V_i \setminus$ fermé disjoint de Z . Précisément, on pose

$$T_{ij} := \overline{(V_i \cap V_j) \setminus W^{ij}} \subset (\overline{V_i} \cap \overline{V_j}) \setminus W^{ij}$$

qui est fermé et ne rencontre pas Z car $U_{ij} \cap Z = W^{ij} \cap Z$. Prenons $V'_i = V_i \setminus T_{ij}$ (pour i fixe) qui satisfait la même hypothèse $V'_i \cap V_j \subset W^{ij}$. On fait alors un nombre fini de modifications pour les (i, j) problématiques. Cela donne (V_i) voulu.

□

Proposition-Définition 2.6.3. Les conditions suivantes sur $f: X \rightarrow S$ sont équivalentes :

- 1) f est **universellement fermé**, c'est-à-dire $\forall T \rightarrow S, f_T: X_T = X \times_S T \rightarrow T$ est fermée.
- 2) f est fermée, à fibres quasi-compactes ($\forall s, f^{-1}(s)$ quasi-compact).
- 3) f est fermée, la préimage d'une partie quasi-compacte sous l'application f est quasi-compact.

Proposition-Définition 2.6.4. Les conditions suivantes sur $f: X \rightarrow S$ sont équivalentes :

- 1) $X \xrightarrow{\Delta} X \times_S X$ est fermée.
- 2) $\Delta(X) \subset X \times_S X$ est un fermé.
- 3) $\forall x_1, x_2 \in X$ ayant même image dans S par f , $\exists V_i$ voisinage de x_i tq $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

On dit que f est **séparé**.

Définition 2.6.1. f est **propre** si f est universellement fermé et séparé.

Exemple 2.6.1. Si X, S sont compacts, alors $f: X \rightarrow S$ est fermé.

Théorème 2.6.5. Changement de base pour les faisceaux d'ensembles :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\rho=i_{X_s}} & X_T \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_T \\ S & \xleftarrow{\pi_S} & T \end{array}$$

Si f est propre, on a l'isomorphisme

$$\pi_S^* f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} f_{T*} \pi_X^* \mathcal{F}$$

pour \mathcal{F} faisceau sur X .

Démonstration. Montrer tout d'abord dans le cas $T \rightarrow S = (s \hookrightarrow S)$:

$$\operatorname{colim}_{s \in U} \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_s, \mathcal{F}|_{X_s})$$

Il suffit de montrer que

$$\operatorname{colim}_{s \in U} \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = \operatorname{colim}_{X_s \subset W \text{ ouvert}} \Gamma(W, \mathcal{F})$$

On a donc besoin d'un résultat de cofinalité. En fait, pour W ouvert tq $X_s \subset W$, posons $X \setminus W$ fermé, alors $f(X \setminus W)$ est fermé. Prenons $U = S \setminus f(X \setminus W)$ un voisinage ouvert de s , alors $f^{-1}(U) \subset W$ est un voisinage ouvert de X_s .

Le cas général :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\rho=i_{X_s}} & X_T \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_T \\ S & \xleftarrow{\pi_S} & T \end{array}$$

il faut donc montrer que $\forall t \in T$,

$$((f_* \mathcal{F})|_T)_t \xrightarrow{\sim} (f_{T*} \mathcal{F}|_{X_T})$$

Considérons donc la diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\rho=i_{X_s}} & X_T & \longleftrightarrow & X_t \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_T & & \downarrow \\ S & \xleftarrow{\pi_S} & T & \longleftrightarrow & \{t\} \end{array}$$

Si $\pi_S(t) = s$, on sait $((f_*\mathcal{F})|_T)_t \simeq (f_*\mathcal{F})_s \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_s, \mathcal{F}|_{X_s})$ déduit du cas déjà vu. D'autre part, on peut montrer que f_T est aussi propre comme changement de base de l'application propre f . Grâce au cas particulier, on sait $(f_{T*}\mathcal{F}|_{X_T})_t \xrightarrow{\sim} \Gamma(f_T^{-1}(t), \mathcal{F}|_{f_T^{-1}(t)})$. Comme $f_T^{-1}(t) \simeq f^{-1}(s)$, on a $\Gamma(X_s, \mathcal{F}|_{X_s}) \simeq \Gamma(f_T^{-1}(t), \mathcal{F}|_{f_T^{-1}(t)})$, d'où le résultat. \square

2.7 Faisceaux localement constants : deuxième partie

Proposition 2.7.1. Tout faisceau localement constant sur un espace contractile (c'est-à-dire $x \rightarrow X$ équivalence d'homotopie) est constant.

Démonstration. On montre premièrement un lemme :

Lemme 2.7.2. Soit $Y \xrightarrow[f_1]{f_0} X$ homotopes ($\exists H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ tq $H|_{Y \times \{0\}} = f_1, H|_{Y \times \{1\}} = f_0$), alors pour \mathcal{L} faisceau localement constant sur X , on a

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma(X, \mathcal{L}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \Gamma(Y, f_0^*\mathcal{L}) & \xrightarrow{\exists \sim} & \Gamma(Y, f_1^*\mathcal{L}) \end{array}$$

Démonstration du lemme. Posons $Y_I = Y \times [0, 1]$ et $\pi: Y_I \rightarrow Y$ qui est propre car I compact. Pour \mathcal{F} faisceau sur Y , note $\mathcal{F}_I = \pi^*\mathcal{F}$. On montre le lemme en plusieurs étapes.

- 1) $\mathcal{F} \rightarrow \pi_*\mathcal{F}_I = \pi_*\pi^*\mathcal{F}$ l'adjonction est un isomorphisme. En fait, il faut montrer $\forall y \in Y$, on a $\mathcal{F}_y \xrightarrow{\sim} (\pi_*\pi^*\mathcal{F})_y$. Comme $E \xrightarrow{\sim} \Gamma([0, 1], \underline{E})$ pour E ensemble, on a donc

$$\mathcal{F}_y \xrightarrow{\sim} \Gamma(y_I, \mathcal{F}|_{y \times [0, 1]})$$

car $\mathcal{F}|_{y \times [0, 1]}$ localement constant sur $y_I \simeq [0, 1]$ donc constant. Et puis par changement de base propre :

$$\begin{array}{ccc} y_I & \xrightarrow{\pi_y} & Y_I \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ y & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

on a $(\pi_*\pi^*\mathcal{F})_y = i_y^*\pi_*(\pi^*\mathcal{F}) \simeq (\pi_y)_*i_I^*(\pi^*\mathcal{F}) = \Gamma(y_I, \mathcal{F}|_{y \times [0, 1]})$.

- 2) Appliquer $\Gamma(Y, -)$ à $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \pi_*\pi^*\mathcal{F}$. Cela donne $\mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_I(Y_I)$.

- 3) $\forall t \in I$, on a une bijection $\mathcal{F}_I(Y_I) \xrightarrow{i_t^*} \mathcal{F}(Y)$ indépendante de t (Notation : ici on note toujours $f^* : \mathcal{F}(U) \rightarrow f^* \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ pour $f : X \rightarrow Y$ et \mathcal{F} faisceau sur Y). En effet, posons $Y \xrightarrow{i_t} Y_I$, $y \mapsto (y, t)$, on a

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i_t} & Y_I \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

On a donc

$$\mathcal{F}(Y) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{F}_I(Y_I) \xrightarrow{i_t^*} \mathcal{F}(Y)$$

on sait π^* est une bijection et $i_t^* \circ \pi^* = (\pi \circ i_t)^* = id$, alors i_t^* est une bijection.

- 4) Supposons \mathcal{M} faisceau localement constant sur Y_I , alors \mathcal{M} «provient de Y », c'est-à-dire une égalité de co-unité :

$$\pi^*(\pi_* \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

En fait, pour $(y, t) \in Y_I$, le fibre en ce point

$$\begin{array}{ccc} (\pi_* \mathcal{M})_y & \longrightarrow & \mathcal{M}_{(y, t)} \\ = \downarrow & \nearrow \sim & \\ \Gamma(y_I, \mathcal{M}|_{y_I}) & & \end{array}$$

car $\mathcal{M}|_{y_I}$ est constant.

- 5) $\mathcal{M}(Y_I) \xrightarrow{\sim} i_t^* \mathcal{M}(Y)$. En fait, par 3) on a la bijection $\mathcal{M}(Y_I) \xrightarrow{i_t^*} \pi_* \mathcal{M}(Y)$, et par 4) $i_t^* \mathcal{M} \simeq i_t^* \pi^* \pi_* \mathcal{M} \simeq \pi_* \mathcal{M}$.

- 6) Soit $H : Y \xrightarrow[f_1]{f_0} X$ homotope et \mathcal{L} localement constant sur X , alors $\Gamma(Y, f_0^* \mathcal{L}) \simeq \Gamma(Y, f_1^* \mathcal{L})$. En fait, posons $f_0 = H \circ i_0$ où $i_0 : Y \simeq Y \times \{0\} \hookrightarrow Y_I$, alors

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(X, \mathcal{L}) & & \\ & \swarrow f_0^* & \downarrow H^* & \searrow f_1^* & \\ & & \Gamma(Y_I, \mathcal{H}) & & \\ & \swarrow i_0^* & & \searrow i_1^* & \\ \Gamma(Y, f_0^* \mathcal{L}) & & & & \Gamma(Y, f_1^* \mathcal{L}) \\ & \xrightarrow{\sim} & & & \end{array}$$

où i_0^* et i_1^* sont bijections depuis 5). Cela donne la bijection voulue entre $\Gamma(Y, f_0^* \mathcal{L})$ et $\Gamma(Y, f_1^* \mathcal{L})$.

□

On peut maintenant montrer la proposition 2.7.1 :

Démonstration. Prenons $X \xrightarrow[x]{id} X$ homotope. Par le lemme, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma(X, \mathcal{L}) & \\ \swarrow = & & \searrow \text{fibre} \\ \Gamma(x, id^* \mathcal{L}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(X, x^* \mathcal{L}) = \mathcal{L}_x \end{array},$$

donc $\Gamma(X, \mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}_x$, $\forall x \in X$, c'est-à-dire \mathcal{L} est constant. □

Remarque. En général, supposons X connexe et localement connexe, \mathcal{L} faisceau localement constant sur X , $u \in U \subset X$, alors

$$\Gamma(X, \mathcal{L}) \hookrightarrow \Gamma(U, \mathcal{L}) \hookrightarrow \mathcal{L}_u$$

où U un voisinage ouvert connexe de u . En fait, pour $s, t \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, posons $\{v \in X \mid s_v = t_v\}$. Par définition de fibre, cet ensemble est ouvert. Mais \mathcal{L} est localement constant, il est également fermé.

Proposition 2.7.3. X espace topologique localement connexe par arcs et simplement connexe, alors tout faisceau localement constant sur X est constant.

Démonstration. Supposons \mathcal{L} faisceau localement constant sur X , pour $\forall b \in X$, il suffit de montrer que $\Gamma(X, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}_b$. Pour $s \in \mathcal{L}_b$, on veut relever s .

- 1) Construire $\tilde{s} \in (\prod_{x \in X} \mathcal{L})(X)$. $\forall x \in X$, comme X est simplement connexe, on peut trouver un chemin $\gamma_x: b \rightsquigarrow x$, $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$, on a alors

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma(I, \gamma_x^* \mathcal{L}) & \\ \swarrow \sim & & \searrow \sim \\ \mathcal{L}_b & \xrightarrow{\gamma_x} & \mathcal{L}_x \end{array}$$

en prenant $f_0 = \{0\} \rightarrow I$, $f_1 = \{1\} \rightarrow I$ dans la proposition 2.7.2. Cela donne l'application $\gamma_x: \mathcal{L}_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_x$. On pose $s_x = \gamma_x \cdot s := \gamma_x(s)$, d'où $\tilde{s} = (s_x \in \mathcal{L}_x)_{x \in X} \in (\prod_{x \in X} \mathcal{L})(X)$.

- 2) Montrer que \tilde{s} provient de $\mathcal{L}(X)$. Fixe $x \in X$, on veut montrer que $\exists V$ voisinage de x et $t \in \mathcal{L}(V)$ tq $\forall y \in V$, $t_y = \gamma_y \cdot s (= s_y)$ (ceci implique que $\tilde{s} \in a\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X)$ car \mathcal{L} est déjà un faisceau). On prend V voisinage de x connexe par arcs tq $\mathcal{L}|_V$ constant, alors $\exists t \in \mathcal{L}(V)$ relevant $\gamma_x \cdot s$. On montre cette section t satisfait les conditions. Pour $y \in V$, on a un chemin c_{xy} de x vers y . Comme $\mathcal{L}|_V$ constant, on pose $t_y \in \mathcal{L}_y$, et définit c_{xy}^* comme $t_x \mapsto t_y$:

$$\begin{array}{ccc}
 & c_{xy}^* & \\
 \mathcal{L}_x & \xleftarrow{\sim} \Gamma(I, c_{xy}^* \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} & \mathcal{L}_y \\
 & \uparrow \sim & \\
 & \Gamma(V, \mathcal{L}), &
 \end{array}$$

alors $t_y = c_{xy} \cdot t_x = c_{xy} \cdot (\gamma_x \cdot s) = \gamma_y$ car $c_{xy} \circ \gamma_x$ est homotopie à γ_y (X simplement connexe), voir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \gamma_y^* & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 \mathcal{L}_b & \xrightarrow{\gamma_x^*} & \mathcal{L}_x & \xrightarrow{c_{xy}^*} & \mathcal{L}_y \\
 & \nearrow \sim & \nwarrow \sim & \nearrow \sim & \nwarrow \sim \\
 & \Gamma(I, \gamma_x^* \mathcal{L}) & & \Gamma(V, \mathcal{L}) & \\
 & \nwarrow \sim & \searrow \sim & \nwarrow \sim & \searrow \sim \\
 & \Gamma(I, \gamma_x^* \mathcal{L}) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(I, c_{xy}^* \mathcal{L}) & \\
 & \nwarrow \sim & \searrow \sim & \nwarrow \sim & \searrow \sim \\
 & \Gamma(I^2, H^* \mathcal{L}) & & & \\
 & \uparrow & & & \\
 & \Gamma(X, \mathcal{L}) & & &
 \end{array}$$

où $H: c_{xy} \circ \gamma_x \sim \gamma_y$ est l'homotopie. Cela fini la démonstration.

□

Remarque. Pour conclure, on a

- 1) $\gamma \cdot (\gamma' \cdot s) = (\gamma \circ \gamma') \cdot s$, $\forall s \in \mathcal{L}_x$.
- 2) $\gamma \cdot s = \gamma' \cdot s$ si $\gamma \sim \gamma'$ sont homotopes.

Théorème 2.7.4. X espace topologique. Note \mathbf{LC}_X la catégorie des faisceaux localement constant sur X , on a alors le foncteur

$$\mathbf{LC}_X \rightarrow \underline{\mathcal{H}om}(\Pi_1 X, \mathbf{Ens})$$

$$\mathcal{L} \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x & \mapsto \mathcal{L}_x \\ c: x \rightsquigarrow y & \mapsto (\mathcal{L}_x \xrightarrow{c} \mathcal{L}_y) \end{array} \right. .$$

Ceci est une équivalence de catégorie si X est plus localement simplement connexe (on dit X est **gentil**).

Théorème 2.7.5. Si X connexe, pour $x \in X$, on a l'équivalence de catégorie :

$$\mathbf{LC}_X \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) - \mathbf{Ens}$$

$$\mathcal{L} \mapsto (\mathcal{L}_x) =: L$$

En particulier, $\Gamma(X, \mathcal{L}) \leftrightarrow \text{Fix}(L^{\leftarrow \pi_1})$. Donc \mathcal{L} constant $\Leftrightarrow \mathcal{L}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_x \Leftrightarrow$ action triviale.

Remarque. Pour $U \hookrightarrow X$, on a $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ application naturelle qui induit la correspondance suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & L^{\leftarrow \pi_1(X)} \\ \mathcal{L}(X) & \text{Fix}(L^{\leftarrow \pi_1(X)}) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{L}(U) & \text{Fix}(L^{\leftarrow \pi_1(U)}) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{L}_x & L & \end{array}$$

L'identification de $\text{Aut}(\mathbf{LC}_X \rightarrow \mathbf{Ens}, \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}_x)$ est le problème de Galois.

2.8 Monodromie, équation différentielles complexes

Énoncé d'existence locale $D = D(0, \rho)$ disque ouvert, $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in \text{Hol}(D)$. Considérons l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (*)$$

Proposition 2.8.1. $\forall b_0, \dots, b_{n-1} = \underline{b} \in \mathbb{C}^n$, $\exists ! y \in \text{Hom}(D)$, solution de $(*)$ tq $y(0) = b_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$.

Démonstration. Posons $Y = (y, y^1, \dots, y^{(n-1)})$, l'équation (*) est équivalent à

$$Y' = AY \quad (**)$$

avec $A \in M_n(\text{Hol}(D))$. Il suffit de montrer que $Y' = AY$ a une unique solution avec $Y(0) = B$. On utilise le méthode «séries majorantes».

On réécrit formellement (**) en écrivant $A = \sum_{k \geq 0} A_k x^k$, où $A_k \in M_n(\mathbb{C})$ et $Y =$

$$\sum_{k \geq 0} Y_k x^k, Y_k \in \mathbb{C}^n, \text{ alors } (**) \Leftrightarrow Y_{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r A_{r-k} Y_k, \forall r \geq 0.$$

Fixe $0 < \sigma < \rho$. Pour un matrice A , notons

$$\|A\| = \sup_{D(0, \sigma), 1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}(x)| \leq M.$$

Donc $\|A_k\| \leq \frac{M}{\sigma^k}$, par le théorème de Cauchy.

Posons $a(x) := \sum_{k \geq 0} n \frac{M}{\sigma^k} x^k = \frac{nM}{1-\frac{x}{\sigma}}$ converge sur $D(0, \sigma)$ et considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Alors $y(x) = y_0 \exp(\int_0^x a(w)dw) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$ converge sur $D(0, \sigma)$.

En comparant les coefficients, on a $y_{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r a_{r-k} y_k$. On met $y_0 = \|Y_0\|$, et on peut montrer par récurrence que $y_r \geq 0$ et $\|Y_r\| \leq y_r$. En fait, c'est évident pour $r = 0$, et

$$\|Y_{r+1}\| = \frac{1}{r+1} \left\| \sum_{k=0}^r A_{r-k} Y_k \right\| \leq \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r \|A_{r-k} Y_k\| \leq \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^r a_{r-k} y_k = y_{r+1}$$

Donc $\|Y\|$ converge bien dans $D(0, \sigma)$, d'où une solution. \square

Exemple 2.8.1 (cas du disque épointé). $y' = ay$, $n = 1$, où a holomorphe sur $D^* = D(0, 1) \setminus \{0\}$. Soit f une solution au voisinage de x , on peut alors prendre la prolongement analytique de f le long d'un cercle autour de 0. Alors cela donne une autre solution \tilde{f} autour de x , après ce prolongement. Comme les solutions sont de dimension 1, on a $\tilde{f} = mf$, et on peut montrer que $m = \exp(2\pi i \text{Rés}_0(a))$ par calcul. On voit donc l'action de monodromie : $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(D^*, x) \rightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, $1 \mapsto m$. Généralement, on a une représentation de monodromie $\pi_1(X, x) \rightarrow GL(\mathcal{S}_{Ax}) GL_n(\mathbb{C})$ via f_1, \dots, f_n base de solution locales en x .

Proposition 2.8.2. $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ où $a_i \in \text{Hol}(U)$.

S est le faisceau de \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions sur $V \subset U$ variable «système local» est localement constant de rang n .

Point clé Si $U = D(0, 1)$, les solutions formelles sont analytiques sur U :

$$\begin{array}{ccc} y & & \Gamma(D, \mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_0 \\ & \searrow & \downarrow \sim \\ & (y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)) & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Classification sur $\mathcal{S}|_D$ constant ($\simeq \mathbb{C}^n$) : Soit $V \subset D$ ouvert connexe, $v \in D_v \subset V$, où D_v un disque ouvert, on a

$$\mathbb{C}^n \simeq \mathcal{S}_0 \simeq \Gamma(D, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(V, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(D_v, \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}_v \simeq \mathbb{C}^n$$

Ici toutes les flèches sont injectives grave au thm points isolés. Nécessairement les injections sont donc des isomorphismes.

Rappelons que $\pi_1(U, u)$ a une action sur S_u par le prolongement analytique, $\pi(U, u) \rightarrow GL(\mathcal{S}_u) \simeq GL_n(\mathbb{C})$, par exemple : 2.8.1. En fait, on a un résultat au-dessous :

Fait. Soit $U = D^*$ disque épointé, $M \in GL(\mathbb{C})$ image de $\mathfrak{O} \in \pi_1(D^*)$. Si M est diagonalisable de valeur propre $\mu_i = \exp(2\pi i \lambda_i)$, on a une base de (germes de) solutions de la forme $x^{\lambda_i} \times f_i$, où $f_i \in \text{Hol}(U)$ et $x^\lambda = \exp(\lambda \log x)$.

Remarque. On a plusieurs points de vue la fonction \log :

- 1) Purement locale.
- 2) Fonctions «multialée» via prolongement analytique.
- 3) (Riemann) Fonction sur \widetilde{D}^* :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} = \widetilde{D}^* & \xrightarrow{\log} & \mathbb{C} \\ \exp \downarrow & \times \nearrow & \\ D^* & & \end{array}$$

Démonstration. f_i vecteur propre de M associé à $\mu_i \neq 0$, donc $M f_i = \mu_i f_i$. Posons $g_i = x^{-\lambda_i} f_i$, c'est une fonction à priori «ultivalée», c'est-à-dire non nécessairement invariante par monodromie (=prolongement analytique). Mais $M(\log x) = \log(x) + 2\pi i \Rightarrow M(x^\lambda) = e^{2\pi i(\lambda)} x^\lambda$, donc $M(g_i) = (e^{-2\pi i \lambda_i} x^{-\lambda_i})(\mu_i f_i) = g_i$, donc g_i définie globalement sur D^* : c'est une fonction holomorphe. Donc $f_i = x^{\lambda_i} g_i$ est de la forme voulue. \square

Exemple 2.8.2. $a, b \in \mathbb{C}$, $x^2 y'' + axy' + by = 0$. Alors $\mathcal{S}_{a,b}$ localement constant de rang 2 sur D^* . Déterminer la classe de conjugaison de M de $GL_2(\mathbb{C})$. En effet, notons $A(y) = x^2 y'' + axy' + by$, alors $A(x^\alpha) = q(\alpha)x^\alpha$ où $\alpha(\alpha - 1) + \alpha + b$. Si α racine de q , alors x^α est une solution.

1) 2 racines distinctes : x^α, x^β base de (germes de solutions), $\alpha \neq \beta$, alors

$$M \sim \begin{pmatrix} e^{2\pi i \alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \beta} \end{pmatrix}.$$

2) racines doubles : $x^\alpha, x^\alpha \log(x)$, alors

$$M \sim \begin{pmatrix} e^{2\pi i \alpha} & 2\pi i e^{2\pi i \alpha} \\ 0 & e^{2\pi i \alpha} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.8.3. il existe une base de germes de solutions (de l'équation $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) = 0$) f_{ij} , $0 \leq i < b < 0 \leq j < n_i$ tq $\sum_{i < b} n_i = n$, $\lambda_i \in \mathbb{C} \forall i < b$, où $f_{ij} = \sum_{k < j} x^{\lambda_i} \log^k(x) \times g_{ij}$, $g_{ij} \in \text{Hol}(D^*)$.

Démonstration. Rappelons que pour $M \in GL_n(\mathbb{C})$, la décomposition de Jordan nous donne b blocs : $V = \bigoplus_{0 \leq i < b} V_i$, avec valeurs propres $e^{2\pi i \lambda_i}$. On peut donc supposer que $b = 1$ et μ valeur propre correspondant ($= e^{2\pi i \lambda}$). Pour W germes de fonctions analytiques, on pose L l'action de multiplication par $\frac{\log(x)}{2\pi i}$ et M l'action monodromie. On a donc $[M, L] := ML - LM = M$.

Lemme 2.8.4. M, L endomorphismes de \mathbb{C} -espace vectoriel W , $[M, L] = M$, $\mu \in \mathbb{C}^*$, $s \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\text{Ker}((M - \mu)^s) = \sum_{k < s} L^k \text{Ker}(M - \mu)$$

On affirme que ce lemme montre le théorème. En fait, prenons $f \in \text{Ker}(M - \mu)^n$, alors $f = \sum_{k < n} \log^k(x) \times g_k = \sum_{k < n} \log^k(x) x^\lambda h_k$, où $g_k \in \text{Ker}(M - \mu)$, $h_k \in \text{Hol}(D^*)$.

Montrons alors le lemme. Pour abbréviation, on note $A := M$, $B := L$, $1 := \mu$. Alors $[A, B] = A$, donc $[A - 1, B] = A$. On peut montrer par récurrence que $[(A - 1)^s, B] = sA(A - 1)^{s-1}$, cela montre que $\sum_{k < s} B^k \text{Ker}(A - 1) \subset \text{Ker}((A - 1)^s)$. Montrons par récurrence que $\text{Ker}((A - 1)^s) \subset \sum_{k < s} B^k \text{Ker}(A - 1)$. Le cas $s = 1$ est trivial. Supposons vrai pour s , alors $f \in \text{Ker}((A - 1)^{s+1}) \Rightarrow (1 - s^{-1}B(A - 1))f \in \text{Ker}((A - 1)^s)$ et $(A - 1)f \in \text{Ker}((A - 1)^s)$, car $(A - 1)^s(1 - s^{-1}B(A - 1))$ nul sur $\text{Ker}((A - 1)^{s+1})$. Par hypothèse récurrente, on a la forme voulue. \square

2.9 Faisceaux de Module

Définition 2.9.1. X espace topologique, \mathcal{C} catégorie (par exemple \mathbf{Ab} , \mathbf{Vect}_k , $\mathbf{A} - \mathbf{Mod}$ où A anneau commutatif). Un faisceau sur X à valeurs dans \mathcal{C} est un préfaisceau $\mathcal{F}: \mathbf{Ouv}(X)^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ tq $\forall \underline{U} = (U_i)_{i \in I}$, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, on a suite exacte :

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij})$$

c'est-à-dire $\forall T \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, on a

$$\mathbf{Hom}(T, \mathcal{F}(U)) \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbf{Hom}(T, \mathcal{F}(U_i)) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathbf{Hom}(T, \mathcal{F}(U_{ij}))$$

suite exacte (on note $E_0 \rightarrow E_1 \rightrightarrows E_2$) dans \mathbf{Ens} , c'est-à-dire $E_0 \xrightarrow{\sim} \text{Égalisateur } E_1 \rightrightarrows E_2 = \lim(E_1 \rightrightarrows E_2)$.

Définition 2.9.2. X espace topologique, \mathcal{O}_X faisceau d'anneaux commutatifs. $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ catégorie des \mathcal{O}_X -modules. $\mathbf{Ob} = \mathcal{M}$ de groupe abéliens, muni pour tout U ouvert d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module sur $\mathcal{M}(U)$. Flèches : $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ respectent cette structure supplémentaire.

Observation Soit $u: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de \mathcal{O}_X -modules, alors \ker dans $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ est $U \mapsto \ker(u(U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)))$ est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. Pour coker, il faut prendre le faisceau associé : $a(U \mapsto \text{coker}(u(U)))$ est coker dans $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$.

Définition 2.9.3. On appelle (X, \mathcal{O}_X) un **espace annelé**, où X espace topologique, \mathcal{O}_X faisceau d'anneaux. Le morphisme $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est $f: X \rightarrow Y$ et f -morphisme $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X \Leftrightarrow f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$. Précisément, pour

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

tq $U = f^{-1}(V)$, $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ est un morphisme d'anneaux. Cela donne la catégorie d'espace annelé.

Proposition 2.9.1. $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ morphisme d'espaces annelés. Alors $f_*: \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ a un adjoint à gauche, noté f^* . Ici f_* est définie par : pour $\mathcal{M} \in (\mathbf{Mod})(\mathcal{O}_X)$, $f_*\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(f^{-1}V)$, et l'action de $\mathcal{O}_Y(V)$ sur $f_*\mathcal{M}(V)$ via $\mathcal{O}_Y(V) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}V)$.

Remarque. à ne pas confondre avec colim défini pour les faisceaux d'ensemble, dorénavant noté f^{-1} .

Démonstration. $\mathcal{N} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{M} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y)$. Idée : $f^{-1}\mathcal{M}$ est naturellement $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ -module.

$$\begin{array}{ccc} & (X, \mathcal{O}_X) & \\ & \swarrow \quad \downarrow f & \\ (X, f^{-1}\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & (Y, \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

Le problème : on veut un \mathcal{O}_X -module :

$$\mathrm{Hom}_X(f^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{M}, f_*\mathcal{N})$$

1) si $f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme, on a la propriété d'adjonction voulue :

$$\mathrm{Hom}_{(X, f^{-1}\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(Y, \mathcal{O}_Y)}(\mathcal{M}, f_*\mathcal{N})$$

2) Cas général : on veut un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{(X, \mathcal{O}_X)}(f^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(X, f^{-1}\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

Rappelons que si $f: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ un morphisme d'espace annelé, identique sur X , alors $f_*: \mathbf{Mod}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{A})$ est la restriction. L'adjonction naturelle est

Par adjonction de restriction et $- \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, on pose $f^*\mathcal{M} = f^{-1}\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ où $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ définit l'action de \mathcal{A} sur \mathcal{B} . Précisément, on défini

$$f^*(M) := a(U \mapsto f^{-1}\mathcal{M}(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U))$$

Par la propriété universelle du faisceau associée, on a

$$\mathrm{Hom}_{\hat{X}}(f^*M, \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\hat{X}}(f^{-1}\mathcal{M} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{N})$$

Sur un ouvert U , par l'adjonction :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(f^{-1}\mathcal{M}(U) \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_X(U), \mathcal{N}(U)) \simeq \mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y(U)}(f^{-1}\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U)|_{f^{-1}\mathcal{O}_Y})$$

Cela montre que $\mathrm{Hom}_{(X, \mathcal{O}_X)}(f^*\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(X, f^{-1}\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{N})$. □

Proposition 2.9.2. Sous les notations au-dessus, on a les propriétés suivantes :

$$1) (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})_x \simeq \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{B}_x.$$

$$2) f^*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}) \simeq f^* \mathcal{M} \otimes f^* \mathcal{L}.$$

Remarque. f^* n'est pas toujours exact à gauche, sauf si $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est plat.

Chapitre 3

Algèbre homologique

Dans ce chapitre, on va introduire catégorie additives, complexes, catégories abéliennes, catégories dérivées et résolutions. On ne va pas faire ici la catégorie enrichées.

3.1 Catégories additives

Définition 3.1.1. Une **catégorie additive** est une catégorie tq les Hom soient des groupes abéliens, la composition

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$$

est bilinéaire et admettant les produits finis. En particulier, le produit vide est l'objet final.

Exercice 3.1.1. 1) Dans une catégorie additive, l'objet final est également initial.

2) Les produits finis coïncident avec les sommes finis.

Remarque. Pourquoi on dit l'objet initial $*$, mais pas la clôture algébrique Ω ? Parce que Ω est unique à isomorphisme près (cela amène la théorie de Galois), mais $*$ est unique à UNIQUE isomorphisme près. Quelques choses utiles :

1) P.Deligne, vidéo à l'IAS : «What do we mean by "equal"».

2) B.Mazur, article à 2007 : «When is one thing equal to some other thing».

Définition 3.1.2. Soit $f: X \rightarrow Y$, alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ker f & = & \lim(X \xrightarrow[f]{0} Y) \hookrightarrow X \\ \mathrm{coker} f & = & \mathrm{colim}(X \xrightarrow[f]{0} Y) \leftarrow Y \end{array} \right.$$

si \ker et coker sont représentables.

De plus, on définit

$$\begin{cases} \operatorname{im}(f) &= \ker(Y \rightarrow \operatorname{coker} f) \\ \operatorname{coim}(f) &= \operatorname{coker}(\ker f \rightarrow X) \end{cases}$$

Par la propriété universelle, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ \ker f \nearrow & & & & \searrow \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coim} f & \xrightarrow{\exists! \varphi} & \operatorname{im} f & \end{array}$$

Ici φ est mono et èpi par construction.

Exercice 3.1.2. Trouver des exemples où ce n'est pas un isomorphisme.

3.2 Complexes

Définition 3.2.1. \mathcal{A} une catégorie additive. Une **complexe** d'objets de \mathcal{A} est

$$C^\bullet = (C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}} = (\dots \rightarrow C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} C^{i+2} \rightarrow \dots)$$

tq $d^2 = 0$, c'est-à-dire $d^{i+1}d^i = 0, \forall i$. Le morphisme entre deux complexes est $(f_i): C^\bullet \rightarrow D^\bullet$, tq $f^{i+1}d^i = d^i f^i, \forall i$. Cela donne une catégorie additive $C(\mathcal{A})$ (on fait la somme directe terme à terme).

Définition 3.2.2. $C[n]$ est le complexe définie par : $(C[n])^i = C^{i+n}, d_{C[n]}^i = (-1)^n d_C^{i+n}$.

Définition 3.2.3. Un complexe $C^\bullet \in C(\mathcal{A})$ est **concentrée** en degrés $[a, b]$ si $C^i = 0, \forall i \notin [a, b]$, où $a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$. Note $C^{[a,b]}(\mathcal{A}) \subset C(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine. On peut identifier \mathcal{A} et $C^{[0,0]}(\mathcal{A})$ par $X \mapsto (\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \dots)$.

Définition 3.2.4. On dit $f, g: C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ sont **homotopes** si $\exists h^\bullet$ tq $g - f = \partial h + h \partial$, c'est-à-dire $\forall i, g^i - h^i = d_D^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_C^i$. Cela donne une relation d'équivalence $f \sim g$ compatible avec l'addition et la composition, d'où la catégorie $hC(\mathcal{A})$ ou $K(\mathcal{A})$ de «complexes à homotopie près». $\operatorname{Ob} K(\mathcal{A}) = \operatorname{Ob} C(\mathcal{A}), \operatorname{Mor} K(\mathcal{A}) = \operatorname{Hom}_{C(\mathcal{A})}(C, D)/(f \sim 0)$. $f \in \operatorname{Mor}(C(\mathcal{A}))$ est un **homotopisme**/une **équivalence d'homotopie** si elle devient isomorphisme dans $K(\mathcal{A})$, c'est-à-dire $\exists g$ tq $fg \sim 1$ et $gf \sim 1$.

Définition 3.2.5. Comme $C(\mathcal{A})$ est toujours une catégorie additive, on peut définir la

catégorie $C(C(\mathcal{A}))$. Un objet $C^{\bullet\bullet}$ est :

$$\begin{array}{ccc} C^{i,j+1} & \longrightarrow & C^{i+1,j+1} \\ \partial^j \uparrow & & \uparrow \\ C^{i,j} & \xrightarrow{\partial^i} & C^{i+1,j} \end{array}$$

avec $\partial' \partial'' = \partial'' \partial'$. Cela donne une **complexe double naïve**. Pour le complexe double avec signe, on exige que $\partial_v \partial_h + \partial_h \partial_v = 0$, où $\partial_h = \partial'$, $\partial_v^{i,j} = (-1)^i \partial^{i+j}$. On l'appelle **bicomplexe**.

Définition 3.2.6. Soit $C^{\bullet\bullet} \in C(C(\mathcal{A}))$, posons la **complexe totale** $\text{Tot}(C^{\bullet\bullet}) = ((\bigoplus_{i+j=n} C^{i,j})_n, \partial)$, où le différentiel est défini par :

$$\partial^n = \bigoplus_{i+j=n} (\partial_v^{i,j} + \partial_h^{i,j}) : \bigoplus_{i+j=n} C^{i,j} \rightarrow \bigoplus_{i+j=n} (C^{i+1,j} \oplus C^{i,j+1})$$

si les sommes produites existent dans \mathcal{A} .

Remarque. Si $C^{i,j} = 0 \forall i < 0$ ou $j < 0$, alors la somme directe est toujours finie et donc existe.

Définition 3.2.7. \mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories additives, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ covariant et additif. On pose

$$\mathcal{F}(C^\bullet)^n := (\mathcal{F}(C^n), \mathcal{F}(d_C^n))$$

Si \mathcal{F} est contravariant : $\mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{B}$, on pose

$$\mathcal{F}(C^\bullet)^n = (\mathcal{F}(C^\bullet)^{-n}, (-1)^{n+1} \mathcal{F}(d_C^{-(n+1)}))$$

Si $\mathcal{F} : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}$, on pose la bicomplexe avec objets $\mathcal{F}((C, D)^{i,j})$ et differential via : $\mathcal{F}(d_C, \text{Id})$ différentiel horizontal et $(-1)^i \mathcal{F}(\text{Id}, d_D)$ différentiel vertical. Cela donne un foncteur de $C(\mathcal{A}_1) \times C(\mathcal{A}_2)$ vers $\text{bi}C(\mathcal{B})$. Et puis prend le complexe simple associé (si les sommes directes existent), cela donne le complexe total.

Remarque. 1) Faire attention aux signes.

2) Formalism général s'applique en particulier/surtout $\text{Hom}(-, -)$ et $-\otimes-$ (dans les bornées catégories).

Définition 3.2.8. Pour $f : C \rightarrow D$, on définit le **cône** : $(\text{Cône}(f))_n := D^n \oplus C^{n+1}$ avec le différentiel :

$$\partial = \begin{pmatrix} \partial_D^n & f^n \\ 0 & \partial_C^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Remarque. Cela donne une suite : $C \xrightarrow{f} D \rightarrow \text{Cône}(f) \xrightarrow{pr_2} C[1]$. On va voir que c'est un triangle distingué.

Définition 3.2.9. Une **catégorie abélienne** est une catégorie additive dans laquelle \ker et coker sont représentable et $\text{im} \simeq \text{coim}$ (équivalent : $\text{mono} + \text{épi} \Leftrightarrow \text{iso}$),

Exemple 3.2.1. $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$. En particulier, $\text{Mod}(A)$.

Définition 3.2.10. Une **suite exacte** est $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tq $gf = 0$ et $\ker g = \text{Im } f$ (comme sous-objets de B).

Lemme 3.2.1 (lemme du serpent). Soit on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

où les deux suites horizontales sont exactes. Il existe alors un unique application $\delta : \ker h \rightarrow \text{coker } f$, tq le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \ker h & \xrightarrow{\delta} & \text{coker } f \\ \uparrow pr_2 & & \uparrow \\ B \times_C \ker h & \xrightarrow{g} & A' \end{array}$$

De plus, la suite $\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \xrightarrow{\delta} \text{coker } f \rightarrow \text{coker } g \rightarrow \text{coker } h$ est exacte.

Démonstration. admis. On peut montrer par chasse de diagramme dans $\text{Mod}(A)$. Pour $\text{Mod}(A)$, on peut montrer l'exactitude en fibre. En fait, on a $(\ker f)_x = \ker f_x$ (car colimite filtrante est exacte à gauche) et $(\text{coker } f)_x = \text{coker } f_x$ car l'adjoint de gauche est cocontinue. \square

Définition 3.2.11. Soit $C^\bullet \in C(\mathcal{A})$ où A une catégorie abélienne. On définit $Z^i C = \ker(C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1})$, $B^i C = \text{Im}(C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i)$ et $H^i C = Z^i C / B^i C$, appelé **cohomologie du complexe**.

Remarque. Facile à vérifier : $f \sim g \Rightarrow H^i f = H^i g$.

Définition 3.2.12. C^\bullet est **acyclique** si $H^i C = 0, \forall i$. C'est-à-dire il est quasi-isomorphe au complexe nul.

Proposition 3.2.2. Un morphisme de complexe f est un quasi-isomorphisme ssi $\text{Cône}(f)$ est acyclique.

Définition 3.2.13. Soit L un complexe. On définit le **complexe tronqué** :

$$\tau_{\leq n} L := \dots \rightarrow L^{n-1} \rightarrow Z^n L \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Donc $H^i(\tau_{\leq n} L) = H^i(L), \forall i \leq n$.

$$\tau_{\geq n} L := \dots \rightarrow 0 \rightarrow L^n / B^n L \rightarrow L^{n+1} \rightarrow \dots$$

Donc $H^i(\tau_{\geq n} L) = H^i(L), \forall i \geq n$.

$$\tau_{[a,b]} := \tau_{\leq b} \tau_{\geq a} = \tau_{\geq a} \tau_{\leq b} \leq b, \forall a \leq b$$

On a aussi le **complexe tronqué naïve** : $\dots \rightarrow L^{n-1} \rightarrow L^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Proposition 3.2.3. Soit $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ suite exacte dans $C(\mathcal{A})$, alors il existe une suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \rightarrow H^i L \rightarrow H^i M \rightarrow H^i N \xrightarrow{\delta} H^{i+1} L \rightarrow H^{i+1} M \rightarrow \dots$$

Démonstration. appliquer lemme du serpent à

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L^{i-1} & \longrightarrow & M^{i-1} & \longrightarrow & N^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L^i & \longrightarrow & M^i & \longrightarrow & N^i \longrightarrow 0 \end{array}$$

on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow Z^{i-1} L \rightarrow Z^{i-1} M \rightarrow Z^{i-1} N \rightarrow L^i / B^i L \rightarrow M^i / B^i M \rightarrow N^i / B^i N \rightarrow 0.$$

Appliquer une deuxième fois le lemme du serpent à $\tau_{[i,i+1]} L \rightarrow \tau_{[i,i+1]} M \rightarrow \tau_{[i,i+1]} N$:

$$\begin{array}{ccccccc} L^i / B^i L & \longrightarrow & M^i / B^i M & \longrightarrow & N^i / B^i N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z^{i+1} L & \longrightarrow & Z^{i+1} M & \longrightarrow & Z^{i+1} N \end{array}$$

on obtient la suite exacte

$$H^i L \rightarrow H^i M \rightarrow H^i N \rightarrow H^{i+1} L \rightarrow H^{i+1} M \rightarrow H^{i+1} N$$

et donc la suite exacte longue de cohomologie voulue par recollement :

$$\dots \rightarrow H^i L \rightarrow H^i M \rightarrow H^i N \xrightarrow{\delta} H^{i+1} L \rightarrow H^{i+1} M \rightarrow \dots$$

□

Discussion Soit $f: L \rightarrow M$, alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow M \rightarrow \text{Cône}(f) \rightarrow L[1] \rightarrow 0.$$

Par la proposition, on a

$$H^i M \rightarrow H^i \text{Cône}(f) \rightarrow H^{i+1} L \rightarrow H^{i+1} M \rightarrow H^{i+1}(\text{Cône}(f))$$

longue suite exacte. Donc $H^i L \simeq H^i M, \forall i$ ssi $H^i(\text{Cône}(f)) = 0, \forall i$.

Remarque. 1) On peut même montrer que les suites exactes de $C(\mathcal{A})$ sont de ce type (c'est-à-dire à quasi-isomorphisme près).

2) On a implicitement utilisé $H^i(\delta: M \rightarrow \text{Cône}(F) \rightarrow L[1]) = \pm H^{i+1}(f)$ dans la démonstration de la proposition.

3.3 Injectifs et projectifs

Définition 3.3.1. $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ foncteur covariant est dit **exact à gauche** si pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$, on a $0 \rightarrow TA \rightarrow TB \rightarrow TC$ exacte. On dit T et **exact à droite** si pour toute suite exacte $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, on a $TA \rightarrow TB \rightarrow TC \rightarrow 0$ exacte. On dit T est **exact** s'il est exacte à gauche et à droite.

Exemple 3.3.1. $\text{Hom}(-, C)$ est exact à gauche. $- \otimes_A B$ est exact à droite.

Remarque. 1) $- \otimes_A B$ est exact si B est plat sur A .

2) Le foncteur $\text{Hom}(-, I)$ est exact ssi pour tout $X \hookrightarrow Y$, on a $\text{Hom}(Y, I) \twoheadrightarrow \text{Hom}(X, I)$. Si c'est vrai pour $\forall X \hookrightarrow Y$, on dit que I est **injectif**. Remarquons que si $X \twoheadrightarrow Y$, alors $\text{Hom}(Y, I) \hookrightarrow \text{Hom}(X, I)$ est toujours injective par définition d'épimorphisme !

3) Dualelement on a notion de projectivité : si $\text{Hom}(P, -)$ est exact, alors P est dit **projectif**.

Définition 3.3.2. On dit que \mathcal{A} a assez d'injectifs si $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{A}, \exists$ un monomorphisme $X \hookrightarrow I$ injectif.

Remarque. un célèbre et bel article de Grothendieck : [Gro57].

Théorème 3.3.1. (X, \mathcal{O}_X) espace topologique annelé, alors $\mathcal{A} := \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ a suffisamment d'injectifs. De plus, on a une construction fonctorielle $\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Fl}(\mathcal{A}), x \mapsto (x \hookrightarrow I_x)$.

Démonstration. 1) $X = *, \mathcal{O} = \mathbb{Z}$. On a besoin d'un lemme :

Lemme 3.3.2 (Baire). A anneau, $I \in \text{Mod}(A)$. I est injectif ssi $\forall J \subset A$ idéal, $\text{Hom}(A, I) \rightarrow \text{Hom}(J, I)$ est surjectif. En particulier, si A est principal, I est injectif $\Leftrightarrow I$ est **divisible**.

Pour $A = \mathbb{Z}$, par ce lemme, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est bien injectif. On a donc la construction de plongement dans injectif :

$$L \xrightarrow{\text{év}} \prod_{\text{Hom}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où $\prod_{\text{Hom}(L, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est injectif car le produit d'objets injectifs est injectif.

2) $X = *, A$ anneau commutatif.

Lemme 3.3.3. Soit S, R deux anneaux et $S \rightarrow R$, si $\text{Mod}(S)$ a assez d'injectifs, $\text{Mod}(R)$ aussi.

Démonstration. On peut montrer un résultat plus général : si G est un adjoint à droite d'adjoint à gauche exact à gauche, alors G préserve l'injectivité. En fait, soit F l'adjoint à gauche de G qui est exacte à gauche. Pour $X \hookrightarrow Y$ et I injectif, on veut que $\text{Hom}(Y, G(I)) \twoheadrightarrow \text{Hom}(X, G(I))$. Par l'adjonction, ceci est équivalent à $\text{Hom}(FY, I) \leftarrow \text{Hom}(FX, I)$ qui est vrai car $FX \rightarrow FY$ est injective et I injectif. Maintenant, considérons les deux adjonctions :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{-\otimes_S R} & \\ \text{Mod}(S) & \xleftarrow[\text{oub}]{\perp} & \text{Mod}(R) \\ & \xrightarrow{\text{Hom}_S(R, -)} & \end{array}$$

appliquer le résultat à $\text{Hom}_S(R, -)$, on sait que pour $M \in \text{Mod}(R)$, il existe $I \in \text{Mod}(S)$ injectif tq $M|_S \hookrightarrow I$, donc $M \hookrightarrow \text{Hom}_S(R, I)$ est le plongement voulu. Prenons $S = \mathbb{Z}$ et $R = A$ donnons le résultat pour $X = *, A$ anneau commutatif.

3) Cas général : pour $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, posons

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \prod_{x \in X} i_{x*}(\mathcal{F}_x)$$

Comme \mathcal{F}_x est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module, il existe \mathcal{I}_x injectif. Pour conclure, il suffit de vérifier que $i_{x*}(\text{inj})$ est injectif. Cela déduit du fait que i_{x*} est l'adjoint à droite de i_x^* qui est exact.

□

Remarque. Dans notre construction, tout est fonctoriel en \mathcal{F} .

Corollaire 3.3.4. Pour $L^\bullet \in C^+(\text{Mod}(\mathcal{O}_X))$ (la catégorie des complexes borné, c'est-à-dire $L^i = 0, \forall i < 0$), on a une résolution injective $L^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$ qui est de plus un quasi-isomorphisme. Cette construction est aussi fonctorielle en L^\bullet .

Lemme 3.3.5. Si $X^{\bullet,\bullet} \rightarrow Y^{\bullet,\bullet}$ tq $\forall i, X^{i,\bullet} \rightarrow Y^{i,\bullet}$ est quasi-isomorphisme, alors $\text{Tot}(X^{\bullet,\bullet}) \rightarrow \text{Tot}(Y^{\bullet,\bullet})$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration du lemme. À n fixe, ne fait intervenir qu'un nombre fini de $X^{i,j}, Y^{i,j}$. On peut supposer que $X^{i,\bullet}$ et $Y^{i,\bullet}$ nuls pour $i \notin [a, b]$. On fait alors une récurrence sur $b - a$. On a le diagramme avec les deux suites horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^{>a,\bullet} & \longrightarrow & X^{\bullet,\bullet} & \longrightarrow & X^{a,\bullet}[-a] \longrightarrow \bullet \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & Y^{>a,\bullet} & \longrightarrow & Y^{\bullet,\bullet} & \longrightarrow & Y^{a,\bullet}[-a] \longrightarrow \bullet \end{array}$$

Prenons les complexes totaux, on a le diagramme avec les deux suites horizontales aussi exactes (car somme directe finie de suites exactes est exacte) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Tot}(X^{>a,\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tot}(X^{\bullet,\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tot}(X^{a,\bullet}[-a]) \longrightarrow \bullet \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \longrightarrow & \text{Tot}(Y^{>a,\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tot}(Y^{\bullet,\bullet}) & \longrightarrow & \text{Tot}(Y^{a,\bullet}[-a]) \longrightarrow \bullet \end{array}$$

Par thm de longue suite exacte, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(X^{>a,\bullet})) & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(X^{\bullet,\bullet})) & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(X^{a,\bullet}[-a])) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(Y^{>a,\bullet})) & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(Y^{\bullet,\bullet})) & \longrightarrow & H^n(\text{Tot}(Y^{a,\bullet}[-a])) \longrightarrow \bullet \end{array}$$

par lemme de cinq et hypothèse récurrence, on a $H^n(\text{Tot}(X^{\bullet,\bullet})) \simeq v$ par lemme de cinq et hypothèse récurrence, on a $H^n(\text{Tot}(X^{\bullet,\bullet})) \simeq H^n(\text{Tot}(Y^{\bullet,\bullet}))$.

Démonstration. On prend $X^{\bullet,\bullet} =$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L^n & \longrightarrow & L^{n+1} & \longrightarrow & L^{n+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

et $Y^{\bullet,\bullet} =$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^{n,0} & \longrightarrow & I^{n+1,0} & \longrightarrow & I^{n+2,0} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & I^{n,1} & \longrightarrow & I^{n+1,1} & \longrightarrow & I^{n+2,1} \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

où $I^{n,\bullet}$ est une résolution injective de L^n . Par le lemme, on obtient $I^\bullet = \text{Tot}(Y)$ injectif et $L^\bullet \xrightarrow{\sim} I^\bullet$. □

3.4 Catégorie homotopique

Objectif : définir $C^+(\mathcal{A})[\text{quasi-isom}^{-1}] = \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, puis définir, pour $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $RF: D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$.

3.5 Localisation

Pour catégorie \mathcal{C} et $S \subset \text{Mor}\mathcal{C}$, on veut définir $\mathcal{C}[S^{-1}]$ tq si l'image des morphismes dans S de $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ sont isomorphismes, il existe alors un unique morphisme de $\mathcal{C}[S^{-1}]$

vers \mathcal{D} qui prolonge $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}[S^{-1}] \\ \downarrow & \swarrow \text{---} & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

On a au moins deux approches.

- a) abstraite : écrire $\mathcal{C}[S^{-1}]$ comme une colimite dans \mathbf{Cat} (Si \mathcal{C} petite, $\mathcal{C}[S^{-1}]$ l'est aussi. Mais si \mathcal{C} localement petite, pas nécessaire pour $\mathcal{C}[S^{-1}]$).

Cas particulier : $I = \bullet \xrightarrow{s} \bullet$, quel est $I[S^{-1}]$? Considérons

$$I' := \bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{\llbracket s^{-1} \rrbracket} \end{array} \bullet$$

alors I' satisfait la propriété universelle.

Cas général : $I_S := S \times I$, S vue comme catégorie discrète (pas de morphismes entre deux objets distincts). Alors $F: I_S \rightarrow \mathcal{C} \Leftrightarrow (X_s \rightarrow Y_s)_{s \in S}$. Définissons $I'_S = S \times I'$ et $I_S \rightarrow \mathcal{C}, (s \times \bullet \rightarrow \bullet) \mapsto s$, on a alors

$$\begin{array}{ccc} I_S & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ I'_S & \longrightarrow & \mathcal{C} \coprod_{I_S} I'_S \\ & \searrow & \downarrow \text{---} \exists! \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

est le diagramme cartésien. Si cette colimite existe, alors elle satisfait bien la propriété voulue.

problème : pourquoi \mathbf{Cat} est-elle complète ? Voici un résultat général.

Fait. Si $L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est l'adjoint à gauche d'adjoint à droite pleinement fidèle, alors le calcul des colimites dans \mathcal{D} peut se faire de la façon suivante : $\text{colim dans } \mathcal{D} = L(\text{colim dans } \mathcal{C})$ (Rappelons l'exemple de \tilde{X} et \hat{X}).

Utiliser ici dans le cas

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat} & \xrightarrow{B \text{ ou } N} & \mathbf{Ens}_\Delta \\ \mathcal{C} & \mapsto & B_n \mathcal{C} = \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], \mathcal{C}) \end{array}$$

Ici B est défini par :

$$B_n\mathcal{C} = \{X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} X_n \mid X_i \in \text{Ob}(\mathcal{C}), f_i \in \text{Mor}(\mathcal{C})\}$$

Donc $B_0\mathcal{C} = \text{Ob}\mathcal{C}$, $B_1\mathcal{C} = \text{Fl}(\mathcal{C})$, $B_2\mathcal{C} = \{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z\}$ flèches composables.

Exercice 3.5.1. Montrer que B est pleinement fidèle. Autrement dit, une catégorie «est» un ensemble simplicial (particulier).

De plus, Ens_Δ est cocomplète (très général, comme préfaisceau sur une catégorie \mathcal{E}) dans $\hat{\mathcal{E}}$, la colimite se calculent terme à terme. Ce qui n'est pas clair c'est que B a un adjoint à gauche. Alors le fait montre que Cat est cocomplète. En fait, X ensemble simplicial \mapsto la catégorie homotopique associée à X donne l'adjoint à gauche, où les flèches définies comme ensemble quotient.

b) explicite : voir [PM67] pour $\mathcal{C}[S^{-1}]$ via une approche moins formelle.

3.6 Catégorie triangulée

Définition 3.6.1. \mathcal{D} catégorie additive, on dit que T un **foncteur de translation** si $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est un automorphisme additif. On note $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^n(L, M) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L, T^n M)$. On note aussi $M[n] := T^n M$ pour $N \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3.6.1. \mathcal{A} additive, la catégorie homotopique $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ et $L \mapsto L[1]$.

Définition 3.6.2. Un **triangle** de \mathcal{D} est une suite $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$. Notion évidente de morphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & L'[1] \end{array}$$

ce diagramme commute.

Remarque. 1) Grothendieck a eu l'idée des catégories dérivées à la fin des années 1950 pour énoncer sa généralisation de la dualité de Serre (géométrie algébrique généralisation de Riemann-Roch).

2) Verdier, un de ses élèves, a dégagé la notion de catégorie triangulée et a remarqué que $(C(\mathcal{A})[\text{q.iso}^{-1}] =) \mathcal{K}(\mathcal{A})[\text{q.iso}^{-1}]$ est plus simple à comprendre (descriptions des flèches).

Définition 3.6.3. Une **catégorie triangulée** \mathcal{D} est une catégorie additive avec foncteur de translation et un ensemble \mathcal{C} de «triangles distingués» satisfaisant les conditions suivantes :

TR1 si $T \in \mathcal{C}$, $T' \underset{\sim}{\text{isom}} T$, alors $T' \in \mathcal{C}$. De plus, $\forall X \in \text{Ob} \mathcal{D}$, $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1] \in \mathcal{C}$.

TR2 $\forall u: X \rightarrow Y$, $\exists X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ dans \mathcal{C} .

TR3 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \in \mathcal{C}$ ssi $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \in \mathcal{C} \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \in \mathcal{C}$.

TR4 $\forall X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1] \in \mathcal{C}$, $\forall X' \xrightarrow{u'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1] \in \mathcal{C}$ et

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

commute, il existe $h: Z \rightarrow Z'$ tq

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow -f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

commute.

TR5 Si

$$X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow X[1],$$

$$Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow Y[1],$$

$$X \xrightarrow{vu} Z \rightarrow Y' \rightarrow X[1]$$

sont dans \mathcal{C} , alors $\exists Z' \rightarrow Y'$ et $Y' \rightarrow X'$ tq

$$Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow Z'[1]$$

dans \mathcal{C} et un gros diagramme octogonal commmute :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \\
\text{id} \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{vu} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & X' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1] \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & Y[1] & \longrightarrow & Z'[1] & &
\end{array}$$

Théorème 3.6.1. \mathcal{A} catégorie additive, $L \mapsto L[1]$ le foncteur de translation usuel dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. \mathcal{C} est la collection des triangles isomorphes à

$$L \xrightarrow{u} M \rightarrow \text{Cône}(u) \rightarrow L[1],$$

alors $(\mathcal{K}(\mathcal{A}), [1]; \mathcal{C})$ est une catégorie triangulée.

Démonstration. admis. Vérifions à la main. □

Proposition 3.6.2. \mathcal{D} catégorie triangulée, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow X[1]$ distingué, alors $\forall L \in \mathcal{D}$, $\text{Hom}(L, X) \rightarrow \text{Hom}(L, Y) \rightarrow \text{Hom}(L, Z)$ est exacte.

Corollaire 3.6.3. Soit

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\
f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow -f[1] \\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1]
\end{array}$$

morphisme de triangles distingués, alors si 2 des trois flèches verticales sont des isom, alors la troisième l'est aussi.

Démonstration. On applique $\text{Hom}(L, \bullet)$ et utilise lemme de cinq et lemme de Yoneda. □

Corollaire 3.6.4. deux «cônes» d'un même morphisme sont isomorphes.

Définition 3.6.4. $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ entre deux catégories triangulées est dite un **foncteur triangulé**, si F satisfait les conditions suivantes :

1. 1)] F additif.

- 2) $\exists F(\cdot[1]) \simeq F(\cdot)[1]$ isomorphisme fonctoriel.
3) $F(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$.

Proposition 3.6.5. \mathcal{D} catégorie triangulée, $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow C \rightarrow X[1]$ dans \mathcal{C} , alors u est un isomorphisme ssi $C \simeq 0$.

Démonstration. Par TR4, posons

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \text{id} \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & C & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

La proposition est maintenant un résultat direct de 3.6.3. □

Corollaire 3.6.6. Dans $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, f est une équivalence d'homotopie ssi $\text{Cône}(f)$ est homotopique à 0.

Proposition 3.6.7. Dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, si $L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L[1]$ triangle distingué, alors

$$\dots \rightarrow H^i L \rightarrow H^i M \rightarrow H^i N \rightarrow H^{i+1} L \rightarrow \dots$$

est une longue suite exacte.

Soit A catégorie et $S \subset \text{Fl}(\mathcal{A})$.

Définition 3.6.5. S est un **système multiplicatif à gauche** si

- 0) S est stable par composition et contient 1.
1) $\forall t \in S$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ t \downarrow & & \\ X' & & \end{array}$$

se prolonge à

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ t \downarrow & & \downarrow s \\ X' & \dashrightarrow_g & Y' \end{array}$$

où $s \in S$.

- 2) $\forall s \in S$ et $f s = g s$, il existe $t \in S$ tq $t f = t g$:

$$X' \xrightarrow{s} X \xrightarrow[f]{g} Y \dashrightarrow_t Y'$$

Exercice 3.6.1. $S = (\text{«homologisme»})$ quasi-isomorphisme de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ satisfait les trois conditions au-dessus.

Démonstration. 0) facile. Pour 1), donnons $t \in S: X \rightarrow X'$ et $g: X \rightarrow Y$, par TR4, on a

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \longrightarrow & X & \xrightarrow{t} & X' & \longrightarrow & Z[1] \\ \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow \exists f & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\exists s} & W & \longrightarrow & Z[1] \end{array}$$

t est un quasi-isomorphisme $\Leftrightarrow \text{C\^one}(t) \simeq 0$. Donc $\text{C\^one}(s)[-1] \simeq Z \simeq \text{C\^one}(t)[-1] \simeq 0$, alors s est quasi-isomorphisme.

Pour 2), il suffit de montrer que si $t \in S$, $ft = 0$, il existe alors $s \in S$ tq $sf=0$. Par TR4 et TR3, on peut trouver s :

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{g} & \text{C\^one}(t) & \longrightarrow & X'[1] \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow u & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\text{id}} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow s & & \\ & & & & W & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \text{C\^one}(t)[1] & & \end{array}$$

t quasi-iso $\Leftrightarrow \text{C\^one}(f) \simeq 0 \Leftrightarrow s$ quasi-iso. $sf = (su)g = 0$. □

Proposition 3.6.8. $S = (\text{«homologisme»})$ quasi-isomorphisme de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est un système multiplicatif.

3.7 Foncteurs dérivés

\mathcal{A}, \mathcal{B} deux catégories abéliennes, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ exact à gauche, induit

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & C(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & \mathcal{K}(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathcal{A}) & & D(\mathcal{B}) \end{array}$$

car F préserve la relation d'équivalence. Mais $F(\text{quis}) \neq \text{quis}$ si F n'est pas exact, donc F ne peut pas se définir sur $D(\mathcal{A})$. On essaye de trouver un morphisme $RF : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ tq le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{A}) & \xrightarrow{F} & C(\mathcal{B}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}(A) & \xrightarrow{F} & \mathcal{K}(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & D(\mathcal{B}) \end{array}$$

Proposition 3.7.1. Si \mathcal{A} a assez d'injectifs, F exact à gauche, alors $\exists RF$ triangulé et $\beta F \Rightarrow RF\alpha$ universelle au sens où $\forall G : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ et $\beta F \Rightarrow G\alpha$, $\exists i : RF \Rightarrow G$ tq $*$ déduite de $\beta F \Rightarrow RF\alpha$ par composition :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^+(A) & \xrightarrow{F} & \mathcal{K}^+(B) \\ \alpha \downarrow & \swarrow & \downarrow \beta \\ D^+(A) & \xrightarrow{RF} & D^+(B) \end{array}$$

Remarque. La vérification a aspects :

- 1) purement catégorique (pas de complexes etc) avec des hypothèses.
- 2) vérification des critères du 1).

Démonstration. a) Si $\mathcal{C}_Q \subset \mathcal{C}$ sous-catégorie pleine contenant l'image de Q . $\mathcal{C}_Q \hookrightarrow \mathcal{C}$ et $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_Q$ induisent

$$\mathcal{C}[S^{-1}] \xrightleftharpoons[\sim]{\sim} \mathcal{C}_Q[S_Q^{-1}]$$

où $S_Q := S|_{\mathcal{C}_Q}$.

b) Si $F|_{\mathcal{C}_Q}(S_Q) \subset T$, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{C}[S^{-1}] & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D}[T^{-1}] \\ Q \downarrow \sim & \nearrow F & \\ \mathcal{C}_Q[S_Q^{-1}] & & \end{array}$$

Ici la transformation naturelle est donnée par $\text{Id} \Rightarrow Q$.

Proposition 3.7.2. Soit $S \subset \mathcal{C}$, $T \subset \mathcal{D}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}[S^{-1}] & & \mathcal{D}[T^{-1}] \end{array}$$

et $\text{Id} \Rightarrow Q$ pontuellement dans S , c'est-à-dire $\forall X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $X \rightarrow QX$ est dans S (application : Q = résolution injective et S = quasi-isomorphismes), et S satisfait une condition de stabilité, alors les conditions dans a) et b) sont satisfiées.

Démonstration. Voir [Rie14]. □

Proposition 3.7.3. $h \in K^+(\text{Inj})$ quasi-isomorphisme $\Leftrightarrow h$ est une homotopie.

Démonstration. Via cône, il suffit de montrer que pour $L \in K^*(\text{Inj})$, L acyclique $\Rightarrow L$ est homotopique à 0. Il suffit de trouver $s = (s_i)$, $s_i: L^i \rightarrow L^{i-1}$ tq $\text{id}_L = ds + sd$.

Comme L acyclique, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow Z^i L \rightarrow L^i \rightarrow Z^{i+1} L \rightarrow 0$$

Montrer par récurrence que les $Z^i L$ sont injectifs donc les suites exactes courtes ci-dessus sont scindées. Pour $n \ll 0$, $L^n = 0$ donc $Z^n L = 0$ injectif. Pour $0 \rightarrow Z^n L \rightarrow L^n \rightarrow Z^{n+1} L \rightarrow 0$ exacte, comme $Z^n L$ et L^n sont injectifs, alors $Z^{n+1} L$ injectif via scindage. Posons donc $k^n: L^n \rightarrow Z^n L$ et $t^n \rightarrow Z^{n+1}: L^n$ les scindages, et $s^n = t^{n-1}k^n: L^n \rightarrow Z^n L \rightarrow L^{n-1}$, on vérifie que $\text{id} = ds + sd$, donc L homotopie à 0. □

Remarque. $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ exact à gauche, et I^\bullet une résolution injective, alors par construction déjà vue, $RF(L) = F(I^\bullet)$. $L \in D^*(\mathcal{A})$, $L \xrightarrow{\sim} I^\bullet$. On pose $R^i FL := H^i(RF(L))$. En particulier, $FA \xrightarrow{\sim} R^0 F(A)$.

Définition 3.7.1. $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ exact à gauche, on dit que X est F -acyclique si

$$R^i F(X) = 0, \forall i > 0.$$

En particulier, X injectif $\Rightarrow X$ F -acyclique.

Proposition 3.7.4. $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, $A \rightarrow X^\bullet \in C^+(\mathcal{A})$ résolution par des X^i F -acycliques, alors

- 1) $\exists A \rightarrow I^\bullet$ résolution injective et I^\bullet unique à homotopie près tq le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & & \\ \downarrow & \swarrow & \\ & A & \\ & \swarrow & \\ I^\bullet & & \end{array}$$

où $X^\bullet \rightarrow I^\bullet$ est un homomorphisme.

- 2) I^\bullet comme dans 1), $FX^\bullet \rightarrow FI^\bullet$ est un homomorphisme.

Démonstration. 1) Par construction récursive. $n = 0$ est facile. Pour $n > 0$, utilisons $X^n/dx^{n-1} \hookrightarrow X^{n+1}$ et l'injectivité de I^{n+1} .

En fait, 2) est un cas particulier de «si $s: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ homomorphisme entre F -acycliques, alors Fs est un homomorphisme». Posons C cône de s , acyclique dans $C^+(\mathcal{A})$, on a alors suites exactes :

$$0 \rightarrow Z^i C \rightarrow C^i \rightarrow Z^{i+1} C \rightarrow 0$$

On veut montrer par récurrence que les $Z^i C$ sont F -acycliques.

Rappelons que $RF: D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$ est triangulé, donc $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ suite exacte dans $C^+(\mathcal{A})$ induit le triangle distingué

$$RFX \rightarrow RFY \rightarrow RFZ \rightarrow RFX[1],$$

cela donne la longue suite exacte :

$$0 \rightarrow F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \rightarrow R^1 F(X) \rightarrow R^1 F(Y) \rightarrow \dots$$

Donc $R^n F(C^i) = R^{n+1} F(Z^i) = 0$ pour $n > 0 \Rightarrow R^n F(Z^{i+1}) = 0$. Les Z^i sont donc F -acycliques.

Il suffit maintenant de montrer que $F(C)$ est acyclique (car $F(\text{triangle}) = \text{triangle}$) pour C à composantes F -acycliques.

Comme $0 \rightarrow Z^i \rightarrow C^i \rightarrow Z^{i+1} \rightarrow 0$ exacte, on a $\forall i$

$$0 \rightarrow FZ^i \rightarrow FC^i \rightarrow F(Z^{i+1}) \rightarrow 0$$

une suite exacte. En recollant des courtes suites exactes, on obtient une longue suite exacte :

$$\dots \rightarrow F(C^{i-1}) \rightarrow F(C^i) \rightarrow F(C^{i+1}) \rightarrow \dots$$

cela montre que $F(C^\bullet)$ est acyclique. \square

Question Les idées de la démonstration : si on a $K \xrightarrow{\sim} I^\bullet$, alors $Rf_*K = f_*I^\bullet$, donc $(Rf_*K)_y = \operatorname{colim}_{y \in V} I^\bullet f^{-1}(V)$. Alors peut-on calculer $R\Gamma(X_y, K|_{X_y}) = Rf_*f^*K$ avec les $I^\bullet|_{X_y}$? Autrement dit : est-ce que $I^n|_{X_y}$ sont Γ -acycliques ?

3.8 Généralisation du théorème de changement de base propre

Proposition 3.8.1. $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ propre, $K \in D^+(\mathcal{O}_X)$, alors pour $y \in Y$,

$$(Rf_*K)_y \simeq R\Gamma(X_y, K|_{X_y})$$

Démonstration. On admet un fait non trivial : si I sur X injectif, alors

$$\operatorname{colim}_{X_y \subset U} H^i(U, I) \xrightarrow{\sim} H^i(X_y, I|_{X_y})$$

on doit donc vérifier

$$\operatorname{colim}_V I(f^{-1}V) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X_y, I|_{X_y})$$

qui est déjà vu pour les ensembles. \square

3.9 Remarques sur le formalisme des 6-opérateurs

Théorème 3.9.1. $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C}$ foncteurs additives entre catégories abéliennes ayant suffisamment d'injectifs. Alors, si $F(\operatorname{inj})=G$ -acyclique, on a $R(GF): D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{C}) \simeq RG \circ RF$.

Démonstration. Pour L complexe sur \mathcal{A} , posons $L \xrightarrow{\sim} I^\bullet$ une résolution injective, alors $R(G \circ F)(L) = GF(I^\bullet)$. Il faut montrer que $F(I^\bullet) \xrightarrow{\sim} RG(RFL) \simeq RG(FI^\bullet)$, qui est vrai car les G -acycliques calculent la comohologie de G , par prop 3.7.4. \square

3.10 Faisceaux flasques

Définition 3.10.1. \mathcal{F} faisceau sur X est **flasque** si $\forall U \subset X, \mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(U)$.

Lemme 3.10.1. 1) $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exacte avec \mathcal{F}' flasque, alors $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}''(X)$.

2) $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ exacte avec $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ flasques $\Rightarrow \mathcal{F}''$ flasque.

Démonstration. 1) Soit $s \in \mathcal{F}''(X)$. Considérons l'ensemble non-vidé avec préordre :

$$(t, U) \mid U \subset X, t \in \mathcal{F}(U), f(t) = s|_U$$

relation d'ordre : $(t, U) \leq (t', U')$ si $U \subset U'$ et $t'|_U = t$. Par lemme de Zorn, il existe (t, U) maximal. Si $U \neq X$, prenons $x \notin U$, il existe V_x voisinage ouvert de x et $t^x \in \mathcal{F}(V_x)$ tq $t^x|_{V_x} = s|_{V_x}$. Donc $t|_{U \cap V_x} - t^x|_{V_x \cap U} \in \ker(\mathcal{F}(U \cap V_x) \rightarrow \mathcal{F}''(U \cap V_x)) = w \in \mathcal{F}'(U \cap V_x)$. Comme \mathcal{F}' est flasque, il existe $\tilde{w} \in \mathcal{F}'(V_x)$ tq $\tilde{w}|_{U \cap V_x} = w$. Posons $\tilde{t}^x := t^x + \tilde{w}$, alors $\tilde{t}^x|_{V_x \cap U} = t^x + w = t|_{V_x \cap U}$, donc \tilde{t}^x et t se recollent, contradiction.

2)

□

Fait. Un faisceau injectif est flasque.

Démonstration. Utiliser $\mathcal{F} \subset \coprod \mathcal{F}$. Comme $0 \rightarrow \mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{F}$ et \mathcal{F} flasque, \mathcal{I} est flasque comme facteur direct d'un faisceau flasque. □

Proposition 3.10.2. Soit $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z)$, alors $R(fg)_* = Rf_* \circ Rg_*$, si $g_*(\text{inj}) = f_*$ -acyclique.

Démonstration. Par le thm 3.9.1, il suffit de montrer que $g_*(\text{inj}) = f_*$ -acyclique. Mais on a vu que le faisceau injectif est flasque, et $g_*(\text{flasque}) = f_*$ -acyclique par définition, il suffit de montrer que les faisceaux flasques sont f_* -acycliques. Ceci est vrai car un faisceau flasque est Γ -acyclique, voir

Lemme 3.10.3. 3.10.4 .

□

Définition 3.10.2. Soit $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, le foncteur $\Gamma(X, -) : \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X(X))$ est exact à gauche. Posons $R\Gamma(X, -) : D^+(\text{Mod}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow D^+(\text{Mod}(\mathcal{O}_X(X)))$ le foncteur dérivé, on définit la **comohologie de faisceau** $H^i(X, \mathcal{F}) := H^i R\Gamma(X, \mathcal{F})$.

Lemme 3.10.4. $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ flasque $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \forall i > 0$.

Démonstration. Prenons

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

où I faisceau injectif, on a alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{G}(I) \rightarrow 0$$

et la longue suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{G}(I) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) = 0$$

donc $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Considérons la suite exacte

$$H^i(X, \mathcal{I}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{I}),$$

comme \mathcal{G} est flasque (lem 3.10.1), par récurrence on obtient le résultat voulu. \square

Exercice 3.10.1. Montrer que si \mathcal{G} faisceau de groupes flasques, alors $\check{H}^1(X, \mathcal{G}) = *$. C'est-à-dire tout \mathcal{G} -torseur sur X est trivial (ce résultat est très proche de $H^1(X, \mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}''(X)$).

Lemme 3.10.5. \mathcal{G} faisceau de groupes, T un \mathcal{G} -torseur trivial $\Leftrightarrow T(X) \neq \emptyset$.

Démonstration. \Rightarrow est évident. \Leftarrow : Pour $t \in T(X)$, $\forall U$, on a l'action $\mathcal{G}(U) \rightarrow T(U)$, $e_U \mapsto t|_U$. Posons l'ensemble avec un préordre évident :

$$\{U \subset X \mid t|_U \simeq \mathcal{G}(U)\}$$

Utilisons lemme de Zorn et rappelons que $\text{Tors}_X(\mathcal{G})$ est un groupoïde, en fait, dans cette catégorie, l'isomorphisme \Leftrightarrow localement isomorphisme, et puis presque le même que la démonstration du lem 3.10.1. \square

Remarque. On peut montrer avec cette idée que, si \mathcal{G} est abélienne (pas nécessairement flasque), alors

$$\check{H}^1(X, \mathcal{G}) \simeq H^1(X, \mathcal{G})$$

donne le lien entre toseurs et foncteurs dérivés.

Question X espace topologique, $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathcal{O}_X)$, alors $R\Gamma(X, \mathcal{F}) \in D^*(\mathcal{O}_X(X))$. On peut oublier que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, et que $\mathcal{F} \in \text{Mod}(\mathbb{Z})$, alors $R\Gamma(X, \mathcal{F})^{ab} \in D^+(\mathbb{Z})$.

Alors, $R\Gamma(X, \mathcal{F})$, vu dans $D^+(\mathbb{Z})$, est-il égale à $R\Gamma(X, \mathcal{F})^{ab}$?

$$\begin{array}{c}
 \text{Mod}(\mathcal{O}_X) \\
 \downarrow \text{Oub} \\
 \text{Mod}(\mathbb{Z}_X) \\
 \downarrow \Gamma^{ab} \\
 \text{Ab}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \Gamma \\
 \curvearrowright
 \end{array}$$

On a fait un changement de coefficient, c'est pourquoi on préfère de prendre une résolution flasque pour calculer la cohomologie de \mathcal{F} , car la propriété «flasque» est indépendant des coefficients.

Bibliographie

- [DD19] Régine Douady and Adrien Douady. *Algebra and Galois Theories*. Springer, 2019.
- [Gro57] Grothendieck. Sur quelques points d’algèbre homologique. *Tôhoku*, 1957.
- [Lan98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer, 1998.
- [PM67] P.Gabriel and M.Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer, 1967.
- [Rie14] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Cambridge University Press, 2014.
- [Wed16] Torsten Wedhorn. *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*. Springer, 2016.