2023 Differential Geometry- TD 2

(B) Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est propre et que $df(x)$ est inversible pour tout x. Montrer que f est un difféomorphisme. On pourra commencer par montrer que $x \mapsto \# f^{-1}(x)$ est constante. On considérera alors une préimage u_0 de 0, et on montrera que pour chaque segment $[0, x]$ il existe un unique relèvement continu $u_x(t)$ tel que $f(u_x(t)) = tx$ et donc $f(u_x(1)) = x$. Montrer que $x \mapsto u_x(1)$ est continu. En déduire qu'il existe une application g inverse continue à droite de f, puis que f est bijective. (voir aussi l'exercice E).

(C) **Théorème d'Hadamard** (Il s'agit d'une version du théorème précédent où la propreté de f est remplacée par une hypothèse sur $df(z)$. Il nécessite la connaissance du lemme de Gronwall) .
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe des constantes A, B telle que pour tout z dans $\mathbb{R}^n$ la matrice $df(z)$ satisfait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_x(t)$. On cherche un chemin de classe C^1, $\gamma_x(t), t \in [0,1]$ tel que $f(\gamma_x(t)) = tx$ Montrer que cela équivaut à $df(\gamma_x(t))\dot{\gamma}_x(t) = x$, soit

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

(b) Montrer que sous l'hypothèse faite sur f, le flot de

$$\dot{\gamma}_x(t) = df(\gamma_x(t))^{-1}x$$

est défini sur $[0,1]$, et que g est de classe C^1.

(c) En déduire que si $g(x)$ est l'image de 0 par le flot au temps 1 de $\dot{\gamma}(t) = df(\gamma(t))^{-1}x$ on a $f(g(z)) = z$.

(d) Montrer que l'image de g est ouverte.

(e) Montrer que $z \in \mathrm{Im}(g)$ si et seulement si $g(f(z)) = z$. En déduire que cette image est fermée, puis que g est surjective.

(f) Montrer que si g vérifie $f \circ g = Id$ on a aussi $g \circ f = Id$.

(g) Démontrer le théorème suivant
Théorème (Hadamard)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ et qu'il existe une constante A telle que pour tout z dans $\mathbb{R}^n$ on ait l'inégalité

$$|df(z)^{-1}| \leq A|z| + B$$

Alors f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$

(E) **Théorème de relèvement**

(a) Soit f une application continue de $[0,1]$ dans le cercle unité. Montrer qu'il existe $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = e^{i\varphi(t)}$, et que φ est unique une fois fixé $\varphi(0)$.

Indication : On découpera $[0,1]$ en intervalles assez petits sur lesquels φ est définie facilement, et on recollera convenablement sur l'intersection de ces intervalles.

(b) Montrer qu'il en est de même pour $[0,1]^2$ au lieu de $[0,1]$

Indication : Utiliser a) pour le faire sur $[0,1] \times \{y\}$ puis étendre aux bandes $[0,1] \times [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$. Terminer en recouvrant $\{0\} \times [0,1]$ par compacité, et en utilisant le a) pour les intersections des bandes.

(c) De même pour $[0,1]^k$ pour k quelconque

(d) Montrer que si f est de classe C^k alors ϕ est de classe C^k.

(F) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans S^1 continue (ou de classe C^∞ si on préfère) et périodique de période 2π (i.e. $f(t+2\pi) = f(t)$).

(a) Montrer que si $\phi(t)$ est le relèvement défini à l'exercice précédent, $\frac{1}{2\pi}(\phi(t+2\pi) - \phi(t))$ est un entier appelé degré de f et noté $\deg(f)$. Montrer que cet enter ne dépend pas du choix de ϕ.

(b) Montrer que si f_s est une famille continue de telles applications, $\deg(f_s)$ ne dépend pas de s.

(c) Calculer le degré d'une application constante. De l'application $f(x) = e^{2ix}$