TD11 : Représentations des groupes finis I

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Montrer que tout groupe fini G admet une représentation fidèle sur tout corps K.

Exercice 2 : $\star$
Soit G un groupe fini, soit H un sous-groupe distingué dans G, notons $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Soit ρ une représentation complexe de G/H.

a) Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
b) Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 3 : $\star$
Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, soit G un groupe et soit (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 4 : $\star\star$
Soit V une représentation complexe d'un groupe fini G. On note S la représentation $S^2(V)$ et A la représentation $\bigwedge^2 V$.

a) Calculer les caractères χ_S et χ_A de S et de A en fonction du caractère χ_V de V.
b) Calculer $\chi_{V\otimes V}$ en fonction de χ_A et χ_S.

Exercice 5 : $\star\star$
Soit $G = \mathfrak{S}_3$ et soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments de G. On considère l'application $T : G \to \mathrm{GL}(V)$ définie par $T(g)e_\tau = e_{g\tau g^{-1}}$.

a) Montrer que T est une représentation de G.
b) Soit j une racine cubique primitive de 1. Soit W le sous-espace de V dont une base est
$$\alpha = e_{(1,2)} + je_{(1,3)} + j^2 e_{(2,3)}, \qquad \beta = e_{(1,2)} + j^2 e_{(1,3)} + je_{(2,3)}.$$
Montrer que W est une sous-G-représentation de V. Est-ce que W est irréductible ?
c) Déterminer la décomposition de V en somme directe de sous-espaces irréductibles et expliciter l'action de G sur chacun de ces sous-espaces.
d) Soit U une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$ de dimension 2. Décomposer $U \otimes U$, $S^2(U)$ et $\bigwedge U$ en somme de représentations irrédutibles.

Exercice 6 :
Soit p un nombre premier et soit K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur K.

Exercice 7 :
Soit G un groupe fini et soit χ un caractère de G vérifiant
$$\forall g \in G \qquad g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$
Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 8 :

a) Soit A un groupe fini abélien et χ un caractère de A sur $\mathbb{C}$. Montrer

$$\sum_{a\in A} |\chi(a)|^2 \geq |A| \cdot \chi(1).$$

b) Soit G un groupe fini et soit A un sous-groupe abélien de G d'indice $n \geq 1$. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G, on a $\chi(1) \leq n$. Que peut-on dire si $\chi(1) = n$?

Exercice 9 : $\star\star$
Soit G un groupe fini et soient ϕ et ψ des caractères de G dans $\mathbb{C}$.

a) Montrer que si ψ est de degré 1, $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.
b) Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.
c) Soit ϕ un caractère irréductible de G. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 10 : $\star\star$

a) Établir la table de caractère de D_4.
b) Établir la table de caractère de $\mathbf{H}_8$.
c) Que peut-on en conclure ?

Exercice 11 :

a) En considérant la représentation naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, construire une (sous-)représentation irréductible de dimension 3, de caractère valant $(3, 1, 0, -1, -1)$ sur les différentes classes de conjugaisons.
b) Dresser les tables de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$ et interpréter géométriquement certaines représentations obtenues.
c) Dresser les tables de caractères de $\mathfrak{S}_5$ et $\mathfrak{A}_5$ et interpréter géométriquement certaines représentations obtenues.

Exercice 12 : $\star\star$
Soit p un nombre premier et soit $f \geq 1$ un entier ; on pose $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_q^\times,\ b \in \mathbb{F}_q\}$.

a) Déterminer la table des caractères de G sur $\mathbb{C}$.
b) Déterminer les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 13 :
Soient G_1 et G_2 deux groupes finis. Déterminer l'ensemble des représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$ en fonction des représentations irréductibles de G_1 et G_2.

Exercice 14 : $\star\star$
Soient p un nombre premier, G un p-groupe fini et K un corps de caractéristique p.

a) Montrer que toute représentation linéaire de G sur un K-espace vectoriel non nul admet des vecteurs fixes non nuls.
b) Montrer que toute représentation irréductible de G à coefficients dans K est isomorphe à la représentation triviale.

Exercice 15 : $\star\star$
Soient G un groupe fini, χ le caractère d'une représentation et $K_\chi := \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.

a) Montrer que K_χ est un sous-groupe distingué de G.

b) Montrer que G est simple si et seulement si $K_\chi = \{e\}$ pour tout caractère irréductible $\chi \neq 1$.

Exercice 16 :
Soit G un groupe fini et soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit ρ la représentation de permutation sur $\mathbb{C}$ définie par X et soit χ son caractère.

a) Montrer la décomposition $\rho = 1 \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale 1.

On fait opérer diagonalement G sur le produit $X \times X$ en posant $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in X$.

b) Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est égal à χ^2.

c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
 (i) l'action de G sur X est doublement transitive ;
 (ii) on a l'égalité $\langle \chi^2, 1 \rangle = 2$;
 (iii) la représentation θ est irréductible.

Exercice 17 : $\star\star\star$

a) Soit G un groupe abélien (éventuellement infini) et (V, ρ) une représentation complexe irréductible de G (de dimension éventuellement infinie). Sous quelles hypothèses cette représentation est-elle de dimension 1 ? Est-ce toujours le cas ?

b) Soit K un corps de caractéristique nulle, G un groupe (éventuellement infini) et (V, ρ) une représentation de G sur K (de dimension éventuellement infinie). Sous quelles hypothèses cette représentation est-elle somme directe de sous-représentations irréductibles ? Est-ce toujours le cas ?