第二届中科大中法班第一学期分析作业题集

2020-2021 年

目录

I 作业题 **1**

1 10 月 9 日作业 **2**

2 10 月 16 日作业 **3**

3 10 月 23 日作业 **4**

4 10 月 30 日作业 **5**

5 11 月 6 日作业 **6**

6 11 月 13 日作业 **7**

7 11 月 20 日作业 **8**

8 12 月 2 日期中考试 **9**

9 12 月 4 日作业 **10**

10 12 月 11 日作业 **11**

11 12 月 18 日作业 **12**

12 12 月 25 日作业 **13**

13 3 月 6 日期末考试 **14**

II 参考答案 **15**

14 10 月 9 日作业答案 16

15 10 月 16 日作业答案 19

16 10 月 23 日作业答案 23

17 10 月 30 日作业答案 26

18 11 月 6 日作业答案 29

19 11 月 13 日作业答案 31

20 11 月 20 日作业答案 34

21 12 月 2 日期中考试答案 38

22 12 月 4 日作业答案 41

23 12 月 11 日作业答案 42

24 12 月 18 日作业答案 45

25 12 月 25 日作业答案 49

26 3 月 6 日期末考试答案 53

Part I

作业题

Chapter 1

10 月 9 日作业

一、设 $I=[0,1]$, A, B 为 I 的非空子集, $\Sigma=\{[0,a)\}_{a\in A}\bigcup\{(b,1]\}_{b\in B}$ 是 I 的一个覆盖.
求证: Σ 必有有限子覆盖.

二、求下列和式的极限:
$a)S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$; $b)S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$; $c)S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$; $d)S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}$;
$e)S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$; $f)S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; $g)S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k!$.

三、 $A=\{\frac{mn}{m^2+n^2+1}:(m,n)\in\mathbb{N}^2\}$,
$a)$ 求证：A 有上确界; $b)$ 求出其上确界.

四、设实数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 a,b, 求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n+1}=ab.$$

Chapter 2

10 月 16 日作业

一、 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 一致连续, 求证: $\exists a,b\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)|\leq a+b|x|.$$

二、 A 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 定义 $f(x)=\inf\{|y-x|:y\in A\}$, 求证: f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

三、 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续, $\exists a>0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,|f(x)-f(y)|\geq a|x-y|$, 求证: f 是双射.

四、 I 为有界区间, f 为 I 上的一致连续函数, 求证: $f(I)$ 为有界区间.

五、 f 在 $[a,b]$ 连续, 令 $\omega:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R},\omega(\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)|:|x-y|\leq\delta\}$,
求证: ω 连续, 且 $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(x)=0$.

六、 $a)$ f 在 0 处可导, $f(0)=0$, 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$ 存在并求其值.
$b)$ 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Chapter 3

10 月 23 日作业

一、 f, g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(b) = g(a) = 0, \forall x \in (a,b), f(x)g(x) \neq 0$.
求证: $\exists \xi \in (a,b), \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.

二、 $f \in D([a,b], \mathbb{R}), f'(a) = f'(b)$. 求证: $\exists c \in (a,b)$, 满足

$$f(c) - f(a) = (c-a) f'(c).$$

三、 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ 满足 f 可导且 $f(0) = f'(0) = 0, \exists a > 0, f(a) = 0$.
求证: 在 f 图像上存在不同于原点的点, 使得其在该点处切线过原点.

四、 f 在 $(0,1]$ 上可导且 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. 求证: f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

五、 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导且 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x f'(x)) = l \in \mathbb{R}$. 求证: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

六、 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}, f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界.
求证: $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Chapter 4

10 月 30 日作业

一、设 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为凹函数. 求证:
$a)$ 关于 x 的函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减;
$b)$ $\forall x\ge 0, y\ge 0, f(x+y)\le f(x)+f(y)$.

二、设 u,v 均是 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数, $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)\neq v(x), \lim\limits_{x\to 0}u(x)=\lim\limits_{x\to 0}v(x)=a>0$.
$a)$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u^v-v^v}{u-v}$;　　$b)$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u^v-v^u}{u^u-v^v}$.

三、设 $f\in C^1([-2,2],\mathbb{R})$ 是凸函数, $g\in C^2([-2,2],\mathbb{R})$, 满足

$$\exists M>1, |g''|\le M, \exists\epsilon<\frac{1}{10}, |f-g|\le\epsilon.$$

求证: $\forall x\in[-1,1], |f'(x)-g'(x)|\le 2\sqrt{M\epsilon}$.

四、 $u\in C([-2,2],\mathbb{R}), \forall x\in(-2,2), \exists l_x(z)=az+b, \forall z\in(-2,2), |u(z)-l_x(z)|\le|z-x|^{1+\alpha}$.
求证: $u\in C^1((-1,1),\mathbb{R})$, 且$\forall x\in(-1,1), y\in(-1,1), |u'(x)-u'(y)|\le 2|x-y|^{\alpha}$.

Chapter 5

11 月 6 日作业

一、对于给定实数 x_0, 给出实数对 (a, b), 使得 f 在 x_0 处可导, 其中,

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq x_0 \\ ax+b, & x < x_0 \end{cases}.$$

二、开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 包含 $0, f: I \to \mathbb{R}$ 在 $x=0$ 处连续且

$$f(0)=0, \lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A\in\mathbb{R}.$$

求证: f 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=A$.

三、 $f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 求证: $f^{(k)}(0)(k=1,2,\cdots,n)$ 存在, $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

四、区间 $X \subset \mathbb{R}, f: X \to \mathbb{R}$ 是可导函数, 计算 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}$.

五、求证: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}}, & |x|>1 \\ 0, & |x| \leq 1 \end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上均属 C^∞ 类.

Chapter 6

11 月 13 日作业

一、求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}$.

二、求 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+8k^3}$.

三、求 $\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

四、设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 问 $|f|, f^2$ 在 $[a,b]$ 上是否 Riemann 可积?

五、设 $f:[a,b]\to[c,d]$ 及 $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ 均 Riemann 可积, 问 $g\circ f$ 是否 Riemann 可积?

六、设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Riemann 可积的. 求证: f 的所有连续点构成的集合在 $[a,b]$ 中稠密.

Chapter 7

11 月 20 日作业

一、设 $f(x) \geq 0$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减. 设 $0 < \alpha < \beta < 1$. 求证: $\int\limits_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x$.

二、设 $f \in C^1([0,1])$, 求证: $\int\limits_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int\limits_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$.

三、计算: (1) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\mathrm{d}x$; (2) $\int\limits_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2 x+\sin^2 x}$; (3) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$; (4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

四、设 $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. 且 $\forall[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq M|\beta-\alpha|^{\frac{4}{3}}$. 求 f.

五、 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}), F(x) = \int\limits_a^b f(x+t)\cos t\mathrm{d}t, x \in [a,b]$. 求证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 可导并求 $F'(x)$.

六、设 $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$. 求证: $\lim\limits_{h\to 0^+}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \pi f(0)$.

七、求证: 当 $\lambda < 1$ 时, $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{\lambda}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 0$.

Chapter 8

12 月 2 日期中考试

一、计算极限: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+2)}{\ln x}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(k+1)\right)^{\frac{1}{n}}$.

二、数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n=\dfrac{p_n}{q_n}, p_n\in\mathbb{Z}, q_n\in\mathbb{Z}^*, \lim\limits_{n\to+\infty}=a, a$ 是无理数.
求证: $\lim\limits_{n\to+\infty}|p_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}|q_n|=+\infty$.

三、 $f(x)$ 在 $[a,b](a<b)$ 上可导, 且 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\sup\limits_{[a,b]}f'(x)$.
求证: f 是仿射函数, 即 $\exists c,d\in\mathbb{R}, f(x)=cx+d$.

四、实数列 $\{x_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0, \forall n\in\mathbb{N}^*, x_n+x_{2020n}=\dfrac{2021}{2020n}$,
是否有 $x_n=\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$?

五、 f 定义在 $[-1,1]$ 上, 且在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2020x)-f(x)}{x}=0$.
求证: f 在 $x=0$ 处可导, 并求其导数.

六、 $f\in C^2([0,1]), f(0)=0, f(1)=2020, F$ 是 f 的原函数.
(1) 求证: $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right)$;
(2) 求极限: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Chapter 9

12 月 4 日作业

一、设 $r = a(1+\cos\theta)$ 是极坐标下的曲线, 其中 $a > 0$, 求:

(1) 曲线围成的面积;

(2) 曲线的周长;

(3) 曲线绕极轴旋转一周所转形成的旋转体的体积;

(4) 曲线绕极轴旋转一周所转形成的旋转体的表面积.

二、求: (1) 半圆 $0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心;　　(2) 半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ 的重心.

三、求半球 $0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的重心.

Chapter 10

12 月 11 日作业

一、计算极限

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |\tan x|^{\cos x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot xe^{\frac{1}{1-\sin x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to e^-} (\ln x)^{\ln(e-x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sin x)^x - x^{\sin x}}{\ln(x-x^2)+x-\ln x}$.

二、极限展开

1. $\dfrac{1}{1-x^2-x^3}$ 在 0 处展开到 7 阶.

2. $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ 在 1 处展开到 3 阶.

3. $\arctan(\cos x)$ 在 0 处展开到 5 阶.

4. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$ 在 0 处展开到 10 阶.

5. $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$ 在 0 处展开到 100 阶.

三、求函数在 0 附近的简单等价量（形如 $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$）

1. $(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x}$.

2. $\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

Chapter 11

12 月 18 日作业

一、根据通项公式判断相应级数的敛散性

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$.

2. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

3. $u_n = \sqrt[4]{n^4+2n^2} - \sqrt[3]{p(n)}$. 其中 p 是一多项式.

二、根据通项公式判断相应级数的敛散性并求和（如果收敛）

通项为 $u_n = \dfrac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}$, 其中 $n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

三、根据通项公式判断相应级数的敛散性

通项为 $u_n = \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

四、计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

1. 求 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\mathrm{d}t$.

2. 若 $\dfrac{t}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. 求证: $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

3. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = 0$. 其中 $g(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$.

4. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Chapter 12

12 月 25 日作业

一、数列 $(u_n)_{n\geq 3}$ 的通项为 $u_n = \dfrac{\ln 2}{2} + \cdots + \dfrac{\ln n}{n}$.

1. 求 $n \to +\infty$ 时 u_n 的简单等价量. **2.** 记 $v_n = u_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$. 求证: $(v_n)_{n\geq 3}$ 收敛.

3. 记 $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. 求 $n \to +\infty$ 时 $v_n - l$ 的等价量.

二、设级数 $\sum\limits_{n\geq 1} nu_n$ 收敛. 求证: $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ 收敛.

三、设 $(u_n)_{n\geq 1}$ 是一个非负的递减序列, 且 $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ 收敛.

1. 求证: $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. 求证: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛且等于 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

四、求证: $n! = \sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{12n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

五、设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为复值序列, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = l \in \mathbb{C}$.
求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{u_1}{1} + \cdots + \dfrac{u_n}{n}\right) = l$.

六、对 $n \in \mathbb{N}_{>1}$, 定义 $p(n) = \max\{p : p\text{是素数且}p|n\}$. 求证: $\sum\limits_{n>1} \dfrac{1}{np(n)}$ 收敛.

Chapter 13

3 月 6 日期末考试

一、 1. 给定实数 $a>1, b>1$, 计算积分 $\int\limits_0^\pi \frac{a-\cos x}{b-\cos x}\mathrm{d}x$.

2. 设 $I_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\mathrm{d}t$, 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

二、设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 黎曼可积, 且 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1$. 是否有 $\int\limits_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$?
请给出证明或者反例.

三、设 $a>0, f\in C([0,a],\mathbb{R})$, 是否有以下不等式成立: $|f(0)|\le \frac{1}{a}\int\limits_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$?
请给出证明或者反例.

四、求 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 使得 $\sum\limits_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2} = a+\frac{b}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$; $\sum\limits_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2} = \frac{c}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

五、判断敛散性 1. $\sum\limits_{n\ge1}\frac{\cos\ln n+\sin\ln n}{n}$. **2.** $\sum\limits_{n\ge1} a_n^{\frac{n-3}{n}}$. 其中 $\sum\limits_{n\ge1} a_n$ 是收敛的正项级数.

六、$\mathbb{R}$ 上常微分方程求解 1. $(1+x)y'+y=(1+x)\sin x$. **2.** $y''-2y'+y=xe^x$.

七、设 $f\in C([0,+\infty),\mathbb{R}), L\ne0$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\int\limits_0^x f(t)^2\mathrm{d}t = L$. 求 f 在 $+\infty$ 处等价量.

Part II

参考答案

Chapter 14

10 月 9 日作业答案

一、证明: 记 $\alpha=\sup A$, $\beta=\inf B$,

i) 若 $\alpha\le\beta$, 取 c 使

$$\alpha\le c\le\beta,$$

则 c 不被 Σ 覆盖到, 矛盾!

ii) 若 $\alpha>\beta$, 则

$$\exists a\in A, b\in B, a>b,$$

那么 $\{[0,a),(b,1]\}$ 即为 Σ 的有限子覆盖.

二、解答: $a)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$;

$b)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$;

$c)$ $\dfrac{1}{2n}=\dfrac{n}{n^2+n^2}<S_n<\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=0$;

$d)$ $\dfrac{1}{4n}=\dfrac{n}{(2n)^2}<S_n<\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=0$;

$e)$ $\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n\cdot n}{n^2+n}<S_n<\dfrac{n\cdot n}{n^2}=1$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}1=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$;

$f)$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} < S_n < \dfrac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$, 且

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$;

$g)$ $\quad$ 由 S_n 表达式知

$$S_{n+1} + S_n = (n+1)!, S_{n+2} + S_{n+1} = (n+2)!,$$

故

$$S_{n+2} = S_n + (n+1)\cdot(n+1)!,$$

由此易推知

$$S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2i\cdot(2i)!,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = +\infty$, 同理 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

三、解答: $a)\forall x\in A$, 存在 $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, 使得

$$x = \frac{mn}{m^2+n^2+1} \le \frac{mn}{2mn+1} < \frac{1}{2},$$

从而 $\dfrac{1}{2}$ 是 A 的一个上界, 由 A 是 $\mathbb{R}$ 子集, 由确界原理知 A 有上确界.

$b)$ 记 $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}, n\in\mathbb{N}$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}, a_n\in A$,

$\forall l < \dfrac{1}{2}$, 记 $l = \dfrac{1}{2} - \epsilon$, 取 n 使

$$2n^2+1 > \frac{1}{2\epsilon},$$

得 $a_n > l$, 从而 l 不是 A 上界, 而 $\dfrac{1}{2}$ 是 A 的一个上界, 故 $\sup A = \dfrac{1}{2}$.

四、证明: 由于 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 a, b,

得 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ 均有界, 故存在 $M > 0$, 满足

$$\forall n\in\mathbb{N}, |a_n| < M, |b_n| < M, |a_n - a| < M, |b_n - b| < M, |a| < M, |b| < M,$$

考虑 $\forall \epsilon > 0$, 记 $\epsilon_0 = \dfrac{\epsilon}{4M}$, 有

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon_0, |b_n - b| < \epsilon_0,$$

则 $0 \le k \le N_0, n - k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| \le |a_k||b_{n-k} - b| + |b||a_k - a| < M(M + \epsilon_0),$$

同理, $0 \le n - k \le N_0, k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| < M(M + \epsilon_0),$$

此外, $k > N_0, n - k > N_0$ 时,

$$|a_k b_{n-k} - ab| \le |a_k||b_{n-k} - b| + |b||a_k - a| < 2M\epsilon_0,$$

则 $n > 2N_0 + 1$ 时,

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1} - ab\right| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k} - ab| \le 2M\epsilon_0 \cdot \frac{n - N_0}{n+1} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1},$$

取 $N = \max\{2N_0 + 1, \left[\dfrac{4M^2(N_0+1)}{\epsilon}\right]\}$, 有 $\forall n > N$ 时,

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1} - ab\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M^2(N_0+1)}{n+1} < \epsilon,$$

因此,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1} = ab.$$

注记: 将题中“实数列”改为“复数列”, 结论仍然正确.

Chapter 15

10 月 16 日作业答案

一、证明: 由于 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 一致连续,

$$\exists\delta>0, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le 1,$$

记 $\alpha=\sup\limits_{x\in(-\delta,\delta)}\{|f(x)-f(0)|\}$, 则 $\alpha\ge 0$, 取

$$a=|f(0)|+\alpha, b=\frac{1}{\delta},$$

对 $x\in\mathbb{R}$, 若 $|f(x)|\le|f(0)|$, 则 $|f(x)|\le a+b|x|$,
若 $|f(x)|>|f(0)|$, 则 $x\neq 0$, 记 $n=\left[\frac{|x|}{\delta}\right]\le\frac{|x|}{\delta}$,

$$\begin{aligned}
\text{则}|f(x)|-|f(0)| &\le |f(x)-f(0)| \\
&\le \sum_{k=1}^{t}\left|f\left(x-(i-1)\frac{x}{|x|}\delta\right)-f\left(x-(i)\frac{x}{|x|}\delta\right)\right|+\left|f\left(x-n\frac{x}{|x|}\delta\right)-f\left(0\right)\right| \\
&\le n+\alpha\le\frac{|x|}{\delta}+\alpha
\end{aligned}$$

即 $|f(x)|\le a+b|x|$, 原题得证.

二、证明: $\forall\epsilon>0,\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\forall y\in A,|x_1-x_2|<\epsilon\Rightarrow||y-x_1|-|y-x_2||\le|x_1-x_2|<\epsilon$, 故

$$|y-x_1|-\epsilon<|y-x_2|<|y-x_1|+\epsilon,$$

如果 $\inf\{|y-x_1|:y\in A\}-\epsilon<\inf\{|y-x_2|:y\in A\}$,
取

$$\delta=\inf\{|y-x_1|:y\in A\}-\epsilon-\inf\{|y-x_2|:y\in A\},$$

则 $\exists y_1 \in A, y_2 \in A$,

$$\begin{aligned}\inf\{|y-x_1| : y \in A\} \le |y_1 - x_1| &\le |y_2 - x_2| + \epsilon \\ &< \inf\{|y-x_2| : y \in A\} + \epsilon + \delta \\ &< \inf\{|y-x_1| : y \in A\},\end{aligned}$$

矛盾!

如果 $\inf\{|y-x_2| : y \in A\} > \inf\{|y-x_1| : y \in A\} + \epsilon$, 类似得矛盾!

故

$$\inf\{|y-x_1| : y \in A\} - \epsilon \le \inf\{|y-x_2| : y \in A\} \le \inf\{|y-x_1| : y \in A\} + \epsilon,$$

即 $|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon$, 故 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 自然是连续的.

三、证明: 先证明 f 是单射, 用反证法, 假设

$$\exists x \neq y, f(x) = f(y),$$

则

$$0 = |f(x) - f(y)| \ge |x - y| > 0,$$

矛盾! 故 f 是单射.

由于 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的连续单射必然严格单调, 不妨设 f 是严格增的,

若 f 有上界, 取严格增的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 满足

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

则序列 $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 严格单调增且有上界, 故其收敛, 为柯西列,

即

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \ge N, p \in \mathbb{N} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_{n+p})| < \epsilon,$$

由

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty, \exists p \in \mathbb{N}, x_{N+p} - x_N \ge \frac{\epsilon}{a},$$

有

$$\epsilon > |f(x_N) - f(x_{N+p})| \ge a|x_N - x_{N+p}| \ge \epsilon,$$

矛盾!

若 f 有下界, 取严格减的序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, 与上类似得矛盾!
故 f 既无上界又无下界, 即

$$\forall m\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, f(x) < -|m| \leq m \leq |m| < f(y),$$

由 f 连续性应用介值定理知, $m\in f(\mathbb{R})$, 故 f 是满射, 从而 f 是双射.

四、证明: 由 I 是区间,

$$\forall x\in I, y\in I, x<y, x<z<y \Rightarrow z\in I,$$

设 $m\in f(I), n\in f(I), m<n, m=f(x), n=f(y)$,
$\forall m<p<n$, 由介值定理, $\exists z, x<z<y \text{或} x>z>y, p=f(z)\in f(I)$, 故 $f(I)$ 是区间,
设 $\inf I=\alpha, \sup I=\beta$, 任取 $\epsilon>0, \exists\delta>0, x\in I, y\in I, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$,
取 $a\in I, b\in I, a\leq b$ 满足

$$\alpha-\delta>a>\alpha, \beta-\delta<b<\beta,$$

则由于 f 在 $[a,b]$ 上是一致连续函数, 其必然在 $[a,b]$ 上有界,
又由 $\alpha+\delta>a>\alpha, x\in I\cap(-\infty,a) \Rightarrow |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)\in(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$,
故 f 在 $I\cap(-\infty,a)$ 上有界, 同理其在 $I\cap(b,+\infty)$ 上有界, 因之 f 在 I 上有界,
综上, $f(I)$ 是有界区间.

五、证明: 由 f 为闭区间上的连续函数, f 一致连续,

$$\forall\epsilon>0, \exists\Delta>0, |x-y|\leq\Delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\epsilon,$$

故

$$\forall\delta_1>\delta_2, |\delta_1-\delta_2|<\Delta, \forall x<y, |x-y|\leq\delta_1, \exists z, x<z<y, |x-z|\leq\delta_2, |y-z|\leq\Delta,$$

有

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f(z)|+|f(z)-f(y)|\leq|f(x)-f(z)|+\epsilon,$$

故 $\omega(\delta_1)\leq\omega(\delta_2)+\epsilon$, 而由 $\delta_1>\delta_2$ 易知 $\omega(\delta_1)\geq\omega(\delta_2)$, 故 $|\omega(\delta_1)-\omega(\delta_2)|<\epsilon$, 故 ω 连续,
$\forall\epsilon'>0, \exists d>0, |x-y|\leq d \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\epsilon'$, 则 $\delta\leq d \Rightarrow \omega(\delta)\leq\epsilon'$, 故 $\lim\limits_{\delta\to0}\omega(\delta)=0$.

六、解答: $a)$ 设 $f'(0)=t\in\mathbb{R}$, 则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=t,$$

从而

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,0<x<\delta\Rightarrow x(t-\epsilon)<f(x)<x(t+\epsilon),$$

取

$$N=\frac{1}{\delta},n>N\Rightarrow\forall k\in[0,n],\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}<\delta,$$

此时

$$\frac{n+1}{2n}(t-\epsilon)\leq S_n=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\leq\frac{n+1}{2n}(t+\epsilon),$$

取极限,

$$\frac{1}{2}(t-\epsilon)\leq\lim_{n\to+\infty}S_n\leq\frac{1}{2}(t+\epsilon),$$

由 ϵ 任意性,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}f'(0).$$

$b)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+x)\right)'\bigg|_{x=0}=\frac{1}{2}$, 故 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\sqrt{e}$.

Chapter 16

10 月 23 日作业答案

一、证明: 由于 f, g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,
有 $h(x) = f(x) g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,
又由于

$$f(a) g(a) = f(b) g(b) = 0,$$

由 Rolle 定理,

$$\exists \xi \in (a, b), h'(\xi) = 0,$$

即

$$f(\xi) g'(\xi) + f'(\xi) g(\xi) = 0,$$

由于 $f(\xi) g(\xi) \neq 0, \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}$.

二、证明: 对于 $x \in [a, b]$, 定义

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, x \neq a; g(a) = f'(a),$$

则 g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 原题即要证明 $\exists c \in (a, b), g'(c) = 0$, 用反证法, 结合导数的 Darboux 性质, 不妨假设

$$g'(x) > 0, \forall x \in (a, b),$$

则

$$\forall c \in (a, b), \frac{f(c) - f(a)}{c - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

且

$$g(a) < g(b),$$

由于

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{b-a}+\frac{f(b)-f(c)}{b-c}\cdot\frac{b-c}{b-a},$$

有

$$\forall c\in(a,b),\frac{f(b)-f(c)}{b-c}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

则

$$f'(a)=g(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\lim_{c\to b}\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(b)=f'(a),$$

矛盾! 此矛盾表明原题得证.

三、证明: 记 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x},x\neq 0,g(0)=0,$

则 g 在 $[0,a]$ 上连续, 在 $(0,a)$ 上可导, $g(0)=g(a)=0,$

由 Rolle 定理,

$$\exists b\in(0,a),g'(b)=0,$$

得

$$f(b)=bf'(b),$$

故 f 图像在 $(b,f(b))$ 处切线过原点.

四、证明: 由已知得, $\exists\delta_0,0<x<\delta_0\implies\sqrt{x}f'(x)\in(l-1,l+1),$

任取 $0<n<m<\delta_0$, 由 Cauchy 中值定理得:

$$\exists x\in(n,m),\frac{f(m)-f(n)}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=2\sqrt{x}f'(x)\in(2l-2,2l+2),$$

由此得

$$|f(m)-f(n)|<2\sqrt{m}(|l|+1),$$

$\forall\epsilon>0$, 设 δ' 满足 $2\sqrt{\delta'}(|l|+1)<\dfrac{\epsilon}{2}$, 取 $\delta_1=\min\{\delta_0,\delta'\}$,

则

$$x\in(0,\delta_1],y\in(0,\delta_1]\implies|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\epsilon,$$

由于 f 在 $[\delta_1,1]$ 上一致连续,

$$\exists\delta_2,\forall x\in[\delta_1,1],y\in[\delta_1,1],|x-y|<\delta_2\implies|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}\epsilon,$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则

$$x\in(0,1],y\in(0,1],|x-y|<\delta\implies|f(x)-f(y)|<\epsilon,$$

故 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

五、证明: 条件即 $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))'=l$,
故

$$\forall\epsilon>0,\text{记}\epsilon_0=\frac{\epsilon}{2},\exists M>0,x\geq M\implies(xf(x))'\in(l-\epsilon_0,l+\epsilon_0),$$

利用 Lagrange 中值定理, 取 $M<y$, 知:

$$\exists x\in(M,y),\frac{yf(y)-Mf(M)}{y-M}=(xf(x))'\in(l-\epsilon_0,l+\epsilon_0),$$

整理得:

$$\frac{M(f(M)-l+\epsilon_0)}{y}-\epsilon_0<f(y)-l<\frac{M(f(M)-l-\epsilon_0)}{y}+\epsilon_0,$$

记

$$P=-\frac{M(f(M)-l+\epsilon_0)}{\epsilon_0},Q=\frac{M(f(M)-l-\epsilon_0)}{\epsilon_0},$$

则

$$y>\max\{M,P,Q\}\implies|f(x)-l|<\epsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

六、证明: 用反证法, 不妨假设

$$\exists a>0,\forall N>0,\exists x>N,f'(x)>a,$$

设 $M>0$ 满足 $\forall x\in\mathbb{R},|f''(x)|<M$, 取数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$$

且

$$f'(x_n)>a,$$

则在区间 $[x_n,x_n+\frac{a}{2M}]$ 上, $f'(x)>\frac{a}{2}$, 由 Lagrange 中值定理,

$$\exists y_n\in[x_n,x_n+\frac{a}{2M}],\frac{a}{2}<f'(y_n)=\frac{2M}{a}\left(f(x_n+\frac{a}{2M})-f(x_n)\right),$$

但由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=l\in\mathbb{R},$$

有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x_n+\frac{a}{2M})-f(x_n)\right)=0,$$

这便导出了矛盾.

Chapter 17

10 月 30 日作业答案

一、证明: $a)$ 设 $0 < x < y$, 记 $\lambda = \dfrac{x}{y} \in (0,1)$, 则

$$x = \lambda y + (1-\lambda)\cdot 0,$$

由于 f 是凹函数,

$$yf(x) - xf(y) \geq y\lambda f(y) + (1-\lambda)yf(0) - \lambda y f(y) = (1-\lambda)yf(0) \geq 0,$$

从而

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(y)}{y},$$

故函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减.
$b)$ 若 $xy = 0$, 该式显然成立, 下考虑 $x > 0, y > 0$ 的情形,
即证:

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{x}{x+y} + \frac{f(y)}{y}\cdot\frac{y}{x+y},$$

由

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}, \frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}$$

即得.

二、解答: $a)$ 任取 $x_n \to 0$, 有

$$u_n = u(x_n) \to a, v_n = v(x_n) \to a,$$

故 $\exists N \in \mathbb{N}_{>0}, n > N \implies v_n > 0$, 记 $f_n(t) = t^{v_n}, n > N$,

由于 f_n 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 用 Lagrange 中值定理:

$$\exists w_n, (u_n - w_n)(v_n - w_n) < 0, v_n \cdot w_n^{v_n - 1} = f'(w_n) = \frac{u_n^{v_n} - v_n^{v_n}}{u_n - v_n},$$

由于 $w_n \to a, \dfrac{u_n^{v_n} - v_n^{v_n}}{u_n - v_n} \to a^a$, 由 x_n 任意性,

$$\lim_{x\to 0} \frac{u^v - v^v}{u - v} = a^a.$$

$b)$ 用与 $a)$ 完全类似的方法, 可以证明

$$\lim \frac{v^v - v^u}{u - v} = -a^a \ln a,$$

$$\lim \frac{u^u - v^v}{u - v} = a^a(1 + \ln a),$$

从而

$$\lim_{x\to 0} \frac{u^v - v^u}{u^u - v^v} = \frac{1 - \ln a}{1 + \ln a}.$$

三、证明: 若 $\exists x \in [-1, 1], f'(x) - g'(x) > 2\sqrt{M\epsilon}$, 由 $|g''| \le M$, 且 f 为凸函数, 有

$$\forall y > x, y \in [-2, 2], f'(y) - g'(y) > h'(x) - M(y - x),$$

记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 任取 $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

由 Lagrange 中值定理, 对 $i = 1, 2, \cdots, n, \exists \xi_i \in (x + \dfrac{i-1}{n} \cdot \dfrac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}, x + \dfrac{i}{n} \cdot \dfrac{2\sqrt{M\epsilon}}{M})$, 满足;

$$h'(\xi_i)\frac{2\sqrt{M\epsilon}}{nM} = h(x + \frac{i}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x + \frac{i-1}{n} \cdot \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}),$$

而 $h'(\xi_i) > h'(x) - M\dfrac{i \cdot 2\sqrt{M\epsilon}}{nM}$, 故可得

$$h(x + \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x) > \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M} h'(x) - 2\epsilon \cdot \frac{n+1}{n},$$

由 n 的任意性,

$$h(x + \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M}) - h(x) \ge \frac{2\sqrt{M\epsilon}}{M} h'(x) - 2\epsilon > 2\epsilon,$$

与 $|f - g| \le \epsilon$ 矛盾! 若 $\exists x \in [-1, 1], g'(x) - f'(x) > 2\sqrt{M\epsilon}$, 可类似得矛盾,

故 $\forall x \in [-1, 1], |f'(x) - g'(x)| \le 2\sqrt{M\epsilon}$.

四、证明: 首先, 我们证明 u 可导: 这是因为

$$\frac{u(z) - u(x)}{z - x} = \frac{u(z) - l_x(z)}{z - x} + \frac{l_x(z) - u(x)}{z - x},$$

故

$$0 \le |\frac{u(z)-u(x)}{z-x} - a| = |\frac{u(z)-l_x(z)}{z-x}| \le |z-x|^{\alpha},$$

由此可得 $u'(x) = a$.

此外, 我们还得到了 l_x 的刻画, 有

$$l_x(z) = u'(x)z + u(x) - xu'(x),$$

带入条件化简得:

$$|\frac{u(z)-u(x)}{z-x} - u'(x)| \le |z-x|^{\alpha}, \forall x \in (-2,2), z \in (-2,2),$$

交换 x, z 顺序, 得

$$|\frac{u(z)-u(x)}{z-x} - u'(z)| \le |z-x|^{\alpha},$$

故有

$$|u'(x) - u'(z)| \le 2|x-z|^{\alpha},$$

由此便可推出 u' 的连续性, 于是 $u \in C^1((-1,1),\mathbb{R})$.

Chapter 18

11 月 6 日作业答案

一、解答: 列方程 $\begin{cases} x_0^2 = ax_0 + b \\ 2x_0 = a \end{cases}$, 解得 $(a, b) = (2x_0, -x_0^2)$.

二、证明: 由已知得

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| < \delta, n \in \mathbb{N} \implies \frac{f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})}{\frac{x}{2^{n+1}}} \in (A - \epsilon, A + \epsilon).$$

对 $x > 0, f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}}) \in ((A - \epsilon)\frac{x}{2^{n+1}}, (A + \epsilon)\frac{x}{2^{n+1}})$,
由此得

$$f(x) - f(0) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (f(\frac{x}{2^n}) - f(\frac{x}{2^{n+1}})) \in [(A - \epsilon)x, (A + \epsilon)x],$$

从而由 ϵ 任意性得 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$, 对 $x < 0$ 类似得 $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$,
故 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$, 证毕.

三、证明: 我们用数学归纳法证明:
$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 与 $g_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 均满足本题结论.
$n = 1$ 时, $f_1'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 存在, 在 0 处不连续,
故 $f''(0)$ 不存在. g 类似.
下面假设命题对 $n (\geq 1)$ 成立, 则对 $n + 1$: $f_{n+1}'(x) = 2nx f_n(x) - g_n(x)$,

$f^{(k)}(0)(k=1,2,\cdots,n)$ 存在, 由 Lebniz 公式得 $(2nxf_n(x))^{(k)}(0)(k=1,2,\cdots,n+1)$ 存在, 对 $g_n(x)$ 用归纳假设即得 $f_{n+1}^{(k)}(0)(k=1,2,\cdots,n+1)$ 存在, $f_{n+1}^{(n+2)}(0)$ 不存在. g_{n+1} 类似. 综上所述, 原题得证.

四、解答:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+3h)-f(x-h))(f(x+3h)+f(x-h))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}(f(x+3h)+f(x-h))\\&=2f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}=f'(x),\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=f'(x),$$

我们有:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-h)}{h}=4f'(x),$$

故

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}=8f(x)f'(x).$$

五、证明: 注意 f 是偶函数, 我们给出两个命题, 由这两个命题可证明原题关于 f 的部分. 对关于 g 的部分的证明是类似的.

（一）对 $x\in\mathbb{R},|x|<1,n\in\mathbb{N}^+,(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)$ 存在且连续, 且在 1 处极限为 0,

（二）$\forall n\in\mathbb{N},\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)}{x-1}=0.$

注意到（二）可由（一）及 L'Hospital 法则得到, 我们证明（一）即可.

记 $h_1=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, 有 $h_1\in C^1(-1,1)$, 定义

$$h_{n+1}=h_n'+h_1h_n,$$

可用归纳法证明: h_n 均可写为有限个 $\dfrac{kx^s}{(x^2-1)^t}$ 之和, 其中 $k\in\mathbb{R},s\in\mathbb{N},t\in\mathbb{N}$,

故 $h_n\in C^1(-1,1)$, 且有 $(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)=h_n(x)\cdot e^{\frac{1}{x^2-1}},\forall n\in\mathbb{N}^+$,

由于

$$\forall t\in\mathbb{N},\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^t}=\lim_{u\to-\infty}e^u\cdot u^t=0,$$

故对 $x\in\mathbb{R},|x|<1,n\in\mathbb{N}^+,(e^{\frac{1}{x^2-1}})^{(n)}(x)$ 存在且连续, 且在 1 处极限为 0, 原题得证!

Chapter 19

11 月 13 日作业答案

一、解答:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\sin\frac{k\pi}{n}=\int\limits_0^1 x^2\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{(2-\pi^2x^2)\cos(\pi x)+2\pi x\sin(\pi x)}{\pi^3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi^2-4}{\pi^3}.$$

二、解答:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+8k^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\frac{k}{n})^2}{1+8(\frac{k}{n})^3}=\int\limits_0^1\frac{x^2}{1+8x^3}\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{24}\ln(1+8x^3)\right)\Bigg|_0^1=\frac{\ln 3}{12}.$$

三、解答:

$$\lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{(\frac{k}{n})^2}=\int\limits_0^1\sin\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x=e^{-\frac{1}{x}}\Big|_0^1=\frac{1}{e}.$$

四、解答: $|f|$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, f^2 在 $[a,b]$ 也 Riemann 可积.

引理: f 及 g 在 $[a,b]$ 上均 Riemann 可积, 则 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

引理的证明: f 及 g 在 $[a,b]$ 上均 Riemann 可积 $\Longrightarrow \exists M>0, |f|<M, |g|<M$.

此外, $\forall\epsilon>0,\exists$ 阶梯函数 $F,G,I,J,|f-F|<I,|g-G|<J,|F|<2M$, 且

$$\int\limits_a^b I<\frac{\epsilon}{4M},\int\limits_a^b J<\frac{\epsilon}{4M}.$$

(对满足上述除 $|F|<2M$ 但满足其他条件的 (F,I),

考虑 $\hat{F}(x)=F(x)$, 当 $I(x)\le M$, 否则 $\hat{F}(x)=0$, 以 $\hat{F}$ 代替 F 即可.)

则 $|fg-FG| \le |g||f-F|+|F||g-G| < MI+2MJ$, 且

$$\int_a^b (MI+2MJ) < \epsilon,$$

故 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

回到原题, 由引理, $f^2 = f\cdot f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

而 f 是 Riemann 可积的 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists$ 阶梯函数 I, J,

$$|f(x)-I(x)| \le J(x), \int_a^b J(x) \le \epsilon.$$

则

$$||f(x)|-|I(x)|| \le |f(x)-I(x)| \le J(x), \int_a^b J(x) \le \epsilon,$$

故 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上仍 Riemann 可积.

五、解答: 答案是否定的. 令 $a=c=1, b=d=0$.

$$取 f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x \ne 0, x = \dfrac{m}{n}, \gcd(m,n)=1, (m,n)\in \mathbb{N}_+^2 \\ 0, & x = 0 \text{ 或} x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

则有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

再取 $g(x)=1, x>0; g(0)=0$, 则

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 1.$$

但

$$g\circ f = \begin{cases} 1, & x\ne 0, x\in \mathbb{Q} \\ 0, & x=0 \text{ 或} x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

不是 Riemann 可积的 (由于其是处处不连续的, 见第 6 题),

这便构造出了反例.

六、证明: 用反证法, 假设结论不成立, 则存在 $a\le c<d\le b, f$ 在 $[c,d]$ 上处处不连续.

由于 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 有 f 在 $[c,d]$ 上 Riemann 可积, 且 f 有界.

我们知: 存在闭区间 $I_1 \subset [c,d], \sup\limits_{x\in I_1} f(x) - \inf\limits_{x\in I_1} f(x) < 1$,

(否则 f 对任意划分的达布上和与达布下和相差至少为 $d-c$, 与其 Riemann 可积矛盾!)

下设已有闭区间 $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1, \sup\limits_{x\in I_k} f(x) - \inf\limits_{x\in I_k} f(x) < \dfrac{1}{k}$,

取 $I_{n+1} \subset I_n, \sup\limits_{x\in I_{n+1}} f(x) - \inf\limits_{x\in I_{n+1}} f(x) < \dfrac{1}{n+1}$(存在性的证明与 I_1 类似),

这便得到一个闭区间套, 由闭区间套定理, $\exists x, \forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$,

则 f 在 $x \in [c,d]$ 处连续, 矛盾! 于是 f 的所有连续点构成的集合在 $[a,b]$ 中稠密.

Chapter 20

11 月 20 日作业答案

一、证明: $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^\alpha f(\alpha)\mathrm{d}x \geq f(\alpha)\alpha \geq \frac{\alpha}{\beta}(\alpha-\beta)f(\alpha) \geq \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(\alpha)\mathrm{d}x \geq \frac{\alpha}{\beta}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$

二、证明: 若 f 在 $[0,1]$ 上恒非负或恒非正, 则有

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

若不然, 则 $\exists t \in [0,1], f(t) = 0$,

$$|f(x)| = \left|\int_t^x f'(s)\mathrm{d}s\right| \leq \left|\int_t^x |f'(s)|\mathrm{d}s\right| \leq \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

综上

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

三、解答:

$$(1)\ 原式 = \int_0^{\ln 2} \frac{\sqrt{1-e^{-2x}}}{e^x}\mathrm{d}e^x = \int_1^2 \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{t^2-1}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

$$= \sqrt{t^2-1}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2 + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^2 = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned}(2)\ \text{原式}=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin x(1+\cos^2 x)}\mathrm{d}\cos x=2\int_0^1\frac{1}{-\sqrt{1-t^2}(1+t^2)}\mathrm{d}t\\=&2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u(1-u)}(1+u)}\mathrm{d}u(\text{令}u=t^2)=2\int_0^{+\infty}\frac{2}{v^2+2}\mathrm{d}v(\text{令}v=\sqrt{\frac{1-u}{u}})\\=&\sqrt{2}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

$$(3)\ \text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}}\sqrt{2x-1}\mathrm{d}\sqrt{2x-1}=\int_0^1 e^t t\mathrm{d}t=(t-1)e^t\big|_0^1=1.$$

$$\begin{aligned}(4)\text{原式}=&\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^3 x}\mathrm{d}\sin x\\=&\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\arcsin t}{2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi-2\ln 2}{8}.\end{aligned}$$

四、解答: 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 得

$$\left|\frac{F(x)-F(y)}{x-y}\right|\leq M|x-y|^{\frac{1}{3}},$$

故 $f(x)=F'(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

五、证明: 有

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(y)}{x-y}=&\frac{1}{x-y}\left(\int_{a+x}^{b+x}f(s)\left(\cos(s-x)-\cos(s-y)\right)\mathrm{d}s\right.\\&\left.+\int_{a+x}^{a+y}f(s)\cos(s-y)\mathrm{d}s-\int_{b+x}^{b+y}f(s)\cos(s-y)\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

由于 f 在 $[a+x,b+x]$ 连续, 其自然是有界的. 故

$$\lim_{y\to x}\frac{1}{x-y}\left(\int_{a+x}^{b+x}f(s)\left(\cos(s-x)-\cos(s-y)\right)\mathrm{d}s\right)=\int_{a+x}^{b+x}f(s)\sin(s-x)\mathrm{d}s.$$

同时有:

$$\lim_{y\to x}\frac{1}{x-y}\left(\int\limits_{a+x}^{a+y}f(s)\cos(s-y)\mathrm{d}s-\int\limits_{b+x}^{b+y}f(s)\cos(s-y)\mathrm{d}s\right)=-f(a+x)\cos a+f(b+x)\cos b.$$

于是 F 可导, $F'(x)=\int\limits_a^b f(x+t)\sin t\mathrm{d}t+f(b+x)\cos b-f(a+x)\cos a.$

六、证明: 由于

$$\lim_{h\to 0^+}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0^+}\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{1}=\pi,$$

不妨 $f(0)=0$.

$f\in C([-1,1],\mathbb{R})$, 故 $\exists M\in\mathbb{R},|f|\le M$, 考虑 $0<h<1$.

$$\left|\int\limits_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le M\int\limits_{-1}^{-\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=M\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}}=M\arctan\frac{\sqrt{h}-h}{1+h^{\frac{3}{2}}}\le M\sqrt{h}.$$

同理,

$$\left|\int\limits_{\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le M\sqrt{h}.$$

由积分第一中值定理:

$$\exists\xi\in(-\sqrt{h},\sqrt{h}),\int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}=2f(\xi)\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}.$$

因此,

$$\left|\int\limits_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le\pi|f(\xi)|,$$

于是,

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right|\le 2M\sqrt{h}+\pi|f(\xi)|.$$

令 $h\to 0^+$, 则 $\xi\to 0^+$, 利用 f 连续性即得

$$\lim_{h\to 0^+}\int\limits_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而原题得证.

七、证明: $\forall x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$,

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, e^{-R\sin\theta} \leq e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} \Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right).$$

故 $R>0$ 时, $0 < R^{\lambda}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta \leq \dfrac{\pi}{2R^{1-\lambda}}\left(1-e^{-R}\right)$. 故 $\lim\limits_{R\to+\infty} R^{\lambda}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\mathrm{d}\theta = 0$.

Chapter 21

12 月 2 日期中考试答案

一、解答: (1) 由于

$$\frac{\ln(x+2)}{\ln x}=1+\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\ln x}=1+\frac{2}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right),$$

有

$$\begin{aligned}\text{原式}=&e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)}=e^{x\left(\frac{2}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)}\\=&1+x\left(\frac{2}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)+o\left(\frac{1}{\ln x}\right)=1+o(1).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+2)}{\ln x}\right)^x=1.$$

(2) 原式 $=(n+1)^{\frac{1}{n}}, n\geq 4$ 时, 由 AM-GM 不等式,

$$1<(n+1)^{\frac{1}{n}}<\frac{2\sqrt{n+1}+n-2}{n}.$$

而

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n+1}+n-2}{n}=1,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

二、证明: 不妨 $q_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$. 先证 $\lim\limits_{n\to+\infty}q_n=+\infty$, 用反证法, 设

$$\exists M\in\mathbb{N},\forall N\in\mathbb{N},\exists n>N,|q_n|<M.$$

则存在递增正整数列 $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}, |q_{n_i}| < M$. 记

$$||x|| = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x\}, \epsilon = \frac{1}{2M} \min_{1\le i\le M}\{||ia||\}.$$

知

$$\exists L \in \mathbb{N}, k > L \implies \left|\frac{p_{n_k}}{q_{n_k}} - a\right| < \epsilon \implies |p_{n_k} - aq_{n_k}| < M\epsilon = \frac{1}{2}\min_{1\le i\le M}\{||ia||\}.$$

但

$$|p_{n_k} - aq_{n_k}| > \min_{1\le i\le M}\{||ia||\},$$

矛盾! 故 $\lim\limits_{n\to+\infty} |q_n| = +\infty$.

取 $\epsilon' = \left|\frac{a}{2}\right|, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N \implies \left|\frac{p_n}{q_n} - a\right| < \left|\frac{a}{2}\right| \implies \frac{|a|q_n}{2} \le |p_n| \le \frac{3|a|q_n}{2}$.

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |p_n| = +\infty$.

三、证明: 记 $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, 则 g 在 $[a,b]$ 可导. $g(a) = g(b) = 0$.

由已知得 $\forall x \in [a,b], g'(x) \le 0$.

$\forall x \in (a,b)$, 由 Lagrange 中值定理,

$$\exists \xi_1 \in (a,x), \xi_2 \in (x,b), \frac{g(x)}{x-a} = g'(\xi_1) \le 0, \frac{-g(x)}{b-x} = g'(\xi_2) \le 0.$$

这表明 $g(x) = 0$, 令 $c = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, d = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, 则有 $f(x) = cx + d$, 证毕.

四、解答: 记 $y_n = x_n - \frac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$, 且 $y_n + y_{2020n} = 0$.

于是易用反证法证明:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, y_n = 0.$$

故

$$x_n = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

注记: 将条件

$$x_n + x_{2020n} = \frac{2021}{2020n}$$

弱化为

$$x_n + x_{2020n} = \frac{2021}{2020n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

仍有

$$x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

五、证明: 见 11 月 6 日作业第 2 题.

六、解答: (1) $LHS=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$

(2) 由 Taylor 公式, 对于 $t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, $f(t)=f\left(\frac{k}{n}\right)+f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)$,

故

$$n\left(\int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{2n}f'\left(\frac{k}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

从而

$$n\left(\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)+o\left(1\right),$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(f(1)-f(0)\right)=1010.$$

Chapter 22

12 月 4 日作业答案

一、解答: (1) $S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta = a^2\left(\sin\theta + \frac{1}{8}\sin 2\theta + \frac{3}{4}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{2}$.

(2) $C = \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta = 2a\int_0^{2\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|\mathrm{d}\theta = 8a$.

(3) $V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2a^3\pi}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\mathrm{d}\cos\theta = \frac{8a^3\pi}{3}$.

(4) $S_2 = 2\pi\int_0^{\pi} r|\sin\theta|\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 16a^2\pi\int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{32a^2\pi}{5}$.

二、答案: (1) 重心坐标 $\left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

(2) 重心坐标为 $\left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$.

三、答案: 重心坐标为 $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

Chapter 23

12 月 11 日作业答案

一、计算极限

1. 解答: 解答: 原式 $= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right)^x = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}-1\right)} = e^0 = 1.$

2. 解答: 原式 $= \frac{\pi}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\cdot e^{\frac{1}{1-\sin x}} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}e^{\frac{1}{1-x}}$,

$$\sqrt{1-x^2}e^{\frac{1}{1-x}} > \sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{1-x}+1\right) = \frac{(2-x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}},$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2-x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = +\infty,$$

故

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty,$$

从而

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\cdot xe^{\frac{1}{1-\sin x}} = +\infty,$$

类似得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x\cdot xe^{\frac{1}{1-\sin x}} = -\infty,$$

故该极限不存在.

3. 解答: 原式 $= \lim_{x\to 0^+}(\ln(e-x))^{\ln x}$, 考虑 $\ln\ln(e-x)\cdot\ln x$, 有

$$\ln\ln(e-x) = -\frac{x}{e}+o(x),$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0,$$

故

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\ln(e-x)\cdot \ln x = 0,$$

从而原式 $=1$.

4. 解答: $\ln(\sin x) = \ln x - \dfrac{x^2}{6} + o(x^3)$, 故

$$(\sin x)^x = 1 + x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + \frac{x^3}{6}(-1+\ln^3 x) + o(x^3),$$

同时,

$$x^{\sin x} = 1 + x\ln x + \frac{x^2\ln^2 x}{2} + \frac{x^3}{6}(-\ln x+\ln^3 x) + o(x^3),$$

$$\ln(x-x^2) + x - \ln x = \ln(1-x) + x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

故原式 $=0$.

二、极限展开

1. 解答: 原式 $= \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(x^2+x^3)^k + o(x^7) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o(x^7)$.

2. 解答: 计算得

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^{(1)} = \frac{-2(x+1)\ln(1+x)+x}{x^3(x+1)},$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^{(2)} = \frac{6\ln(1+x)(x+1)^2-5x^2-4x}{x^4(x+1)^2},$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^{(3)} = \frac{-24\ln(1+x)(x+1)^3+26x^3+42x^2+18x}{x^4(x+1)^3},$$

故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \ln 2 + \left(\frac{1}{2} - 2\ln 2\right)(x-1) \\ &\quad + \left(3\ln 2 - \frac{9}{8}\right)(x-1)^2 + \left(\frac{43}{24} - 4\ln 2\right)(x-1)^3 + o((x-1)^3).\end{aligned}$$

3. 解答: $\arctan x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(x-1)^3}{12} + o((x-1)^3)$, 且

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^6),$$

代入得: 原式 $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$.

4. 解答: 记原式 $= f(x)$, 则

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = -1 + 2x + \frac{x^4}{2} - \frac{3}{8}x^8 - x^9 + o(x^{10}),$$

故原式 $= -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$.

5. 解答: $\sum\limits_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式} =& \ln\left(e^x - \frac{x^{100}}{100!} + o(x^{100})\right) = x + \ln\left(1 - \frac{x^{100}}{100!e^x} + o(x^{100})\right) \\ =& x - \frac{1}{100!e^x}x^{100} + o(x^{100}).\end{aligned}$$

从而原式 $= x - \frac{1}{100!}x^{100} + o(x^{100})$.

三、求函数在 0 附近的简单等价量（形如 $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$）

1. 解答: $\ln(\sin x) = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$, 故

$$(\sin x)^{x-x^2} = 1 + x\ln x + \frac{1}{2}(-2\ln x + \ln^2 x)x^2 + o(x^2),$$

而

$$(x-x^2)^{\sin x} = 1 + x\ln x + \frac{1}{2}(-2 + \ln^2 x)x^2 + o(x^2),$$

从而

$$(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x} = (1 - \ln x)x^2 + o(x^2),$$

故原式 $\sim -x^2 \ln x$.

2. 解答: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8), \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^8)$,
则有

$$\tan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{107x^7}{5040} + o(x^8),$$
$$\sin(\tan x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{55x^7}{1008} + o(x^8),$$

故原式 $\sim \frac{x^7}{30}$.

Chapter 24

12 月 18 日作业答案

一、根据通项公式判断相应级数的敛散性

1. 解答: 我们有 $u_n > \dfrac{1}{2^{\ln n}}$, 而

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{\ln k}} > 2^n \frac{1}{2^{\ln 2^{n+1}}} = \frac{1}{2}(2^{n+1})^{1-\ln 2} > \frac{1}{2},$$

故 $\sum u_n$ 发散.

2. 解答: $\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
从而有

$$\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故

$$\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{12\sqrt{e}n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$u_n \sim -\frac{1}{12\sqrt{e}n},$$

故 $\sum u_n$ 发散.

3. 解答: (i) 若 $\deg p \neq 3$ 或 p 的首项系数不是 1, 则

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0,$$

此时 $\sum u_n$ 发散;

(ii) 假设 $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, 则

$$\sqrt[3]{p(n)} = n + \frac{a}{3} + o(1),$$

但

$$\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} = n + o(1),$$

此时 $\sum u_n$ 发散;

(iii) 假设 $p(x) = x^3 + bx + c$, 其中 $b, c \in \mathbb{R}$, 则

$$\sqrt[3]{p(n)} = n + \frac{b}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

而

$$\sqrt[4]{n^4 + 2n^2} = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

这便得到 $\sum u_n$ 收敛 $\iff b = \frac{3}{2}$.

综上, $\sum u_n$ 收敛 $\iff p(x) = x^3 + \frac{3}{2}x + c, c \in \mathbb{R}$.

二、根据通项公式判断相应级数的敛散性并求和（如果收敛）

解答: 当 $\alpha \in (0, 1]$ 时, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$, 此时 $\sum u_n$ 发散;

下考虑 $\alpha > 1$, 由 Raabe 判别法知此时 $\sum u_n$ 收敛. 记 $S = \sum u_n$.

我们有

$$(n+1)(u_n - u_{n+1}) = \alpha u_{n+1},$$

由于 u_n 是递减的正项数列且 $\sum u_n$ 收敛, 有

$$\lim_{n \to +\infty} n u_n = 0.$$

（这是某次习题课上证明的命题.）

结合这两个结论, 就得到

$$S = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

三、根据通项公式判断相应级数的敛散性

解答: 注意到 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in 2\mathbb{Z},$$

有

$$|u_n| = |\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)| = |\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)| \le \pi(2-\sqrt{3})^n.$$

由 $\sum(2-\sqrt{3})^n$ 收敛, 得 $\sum u_n$ 绝对收敛, 自然是收敛的.

四、级数计算

1. 解答: 由分部积分公式得

$$\int_0^{\pi}(at^2+bt)\cos(nt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(2at+b)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2at+b}{n^2}\cos(nt)\Big|_0^{\pi},$$

分别考虑 n 为奇数、偶数的情形, 有

$$\begin{cases} 2a\pi = 1 \\ -2a\pi - 2b = 1 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2\pi} \\ b = -1 \end{cases}.$$

2. 证明: $2\sin\dfrac{t}{2}\cos(kt) = \sin\left(\dfrac{2k+1}{2}t\right) - \sin\left(\dfrac{2k-1}{2}t\right)$,

于是

$$\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos(kt) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\frac{t}{2},$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

3. 证明: $g(t)\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right) = g(t)\cos\dfrac{t}{2}\sin(nt) + g(t)\sin\dfrac{t}{2}\cos(nt)$,

我们只需证明如下结论:

引理: f 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

引理的证明: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin(nx)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\cos n\alpha - \cos n\beta}{n}\right| \leq \frac{2}{n}.$$

记 $M = \sup|f|, \forall \epsilon > 0, \exists$ 划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$,

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i - x_{i-1})(M_i - m_i) < \frac{\epsilon}{2},$$

其中, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f, m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$.

令 $n > \dfrac{4mM}{\epsilon}$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq& \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\sin(nx)\mathrm{d}x + \int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(x) - f(x_k))\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \\ \leq& \frac{2mM}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0,$$

同理

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

原题得证.

4. 解答: 由 2,

$$\int_0^\pi g(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi(\frac{t^2}{2\pi} - t)\cos(nt)\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{t^2 - 2\pi}{4\pi}\mathrm{d}t.$$

结合 1, 3, 有

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Chapter 25

12 月 25 日作业答案

一、研究一个级数

1. 解答: 记 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} > 0, x \geq 3$, 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0,$$

故 f 是 $[3, +\infty)$ 上的正值减函数.

我们有

$$\frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{2} + \int_2^{n} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t.$$

即

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} + \frac{\ln^2(n+1)}{2} \leq u_n \leq \frac{\ln^2 n}{2}.$$

故

$$u_n \sim \frac{\ln^2 n}{2}.$$

这便是 $n \to +\infty$ 时 u_n 的简单等价量.

2. 证明: 由于

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} + \frac{\ln^2 n}{2} \leq u_n,$$

有

$$\frac{\ln 2 - \ln^2 3}{2} \leq v_n.$$

又

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} \mathrm{d}t \leq 0,$$

知 $(v_n)_{n\geq 3}$ 是单调递减有下界的数列, 自然收敛.

3. 解答: $v_n - v_{n+1} = -\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \sim \frac{\ln n}{2n^2}$,

故

$$v_n - l = \sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln k}{2k^2}.$$

记 $g(x) = \dfrac{\ln x}{2x^2} > 0, x \geq 3$, 则 $g'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{2x^3} < 0$.

有

$$\frac{1+\ln n}{2n} = \int_n^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\ln k}{2k^2} < \int_{n-1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1+\ln(n-1)}{2(n-1)}.$$

于是

$$v_n - l \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

二、证明: 记 $a_n = nu_n, b_n = \dfrac{1}{n}, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. 则 b_n 单调且 $\{S_n\}$ 有界, 且

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

由 Dirichlet 判别法知: $\sum\limits_{n\geq 1} a_n b_n$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ 收敛.

三、Abel 变换的应用

1. 证明: 若 $\exists n_0, u_{n_0} = 0$, 则 $\forall n > n_0, u_n = 0$, 此时结论显然成立.

下面假设 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. 由已知,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \implies \frac{\epsilon}{2} > u_{N+1} + \cdots + u_n > (n-N)u_n.$$

则有

$$n > 2N \implies nu_n < \epsilon.$$

于时 $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$, 即 $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. 证明: 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k, T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = S_n - nu_{n+1}$.

由 1 知

$$\lim_{n\to+\infty} nu_{n+1} = 0,$$

由于 $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 有

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

即 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ 收敛且等于 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

四、证明: 记 $w_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, 则有

$$\ln w_{n+1} - \ln w_n = -\frac{1}{12n^2} + O_n,$$

其中, $O_n = O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

我们有

$$\ln w_{n+1} = \ln w_1 + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{12k^2} + O_k\right).$$

由 Stirling 公式,

$$\ln\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to+\infty}\ln w_n = \ln w_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{12k^2} + O_k\right).$$

从而

$$\ln\frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{12k^2} - O_k\right) = \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而

$$\frac{w_n}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

即

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

五、证明: 记 $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \to l$, 则

$$\frac{1}{\ln n}\left(\frac{u_1}{1} + \cdots + \frac{u_n}{n}\right) = \frac{1}{\ln n}\left(\frac{v_1}{2} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{n}\right) + \frac{v_n}{\ln n}.$$

只需证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{v_1}{2} + \cdots + \frac{v_{n-1}}{n}\right) = l.$$

由于

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n,$$

我们只需考虑 $l=0$ 的情形. 此时, $\forall\epsilon>0$, 不妨 $\epsilon<1$, 则 $\exists N\in\mathbb{N}, n\geq N \implies |v_n|<\frac{\epsilon}{3}$.
$n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{v_1}{2}+\cdots+\frac{v_{n-1}}{n}\right|\leq\frac{|v_1|}{2}+\cdots+\frac{|v_{N-1}|}{N}+\frac{\epsilon}{3}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k+1},$$

记 $M=\frac{|v_1|}{2}+\cdots+\frac{|v_{N-1}|}{N}$, 有

$$\exists P_1, n>P_1 \implies \frac{M}{\ln n}<\frac{\epsilon}{3}, \exists P_2, n>P_2 \implies \frac{1}{\ln n}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{k+1}<1+\frac{\epsilon}{3},$$

令 $P=\max\{P_1,P_2\}$, 有

$$n>P \implies \left|\frac{v_1}{2}+\cdots+\frac{v_{n-1}}{n}\right|<\frac{\epsilon^2}{9}+\frac{2\epsilon}{3}<\epsilon.$$

这就表明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\frac{v_1}{2}+\cdots+\frac{v_{n-1}}{n}\right)=l.$$

证毕.

六、证明: 设 $(p_k)_{k\geq1}$ 是所有素数的递增排列, $P_k=\{n:p(n)=p_k\}$.
则有

$$\sum_{n\in P_k}\frac{1}{np(n)}=\frac{1}{p_k}\sum_{n\in P_k}\frac{1}{n}=\frac{1}{p_k^2}\left(1+\sum_{p(n)\leq p_k}\frac{1}{n}\right).$$

可用数学归纳法证明:

$$\sum_{p(n)\leq p_k}\frac{1}{n}=\prod_{l=1}^{k}\frac{p_l}{p_l-1}<2\prod_{l=2}^{k}\frac{2l-1}{2l-2}.$$

结合 Stirling 公式, 便可得到

$$\sum_{p(n)\leq p_k}\frac{1}{n}=O(\sqrt{k}),$$

于是

$$\sum_{n\in P_k}\frac{1}{np(n)}=O\left(\frac{\sqrt{k}}{p_k^2}\right)=O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right).$$

而 $\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n>1}\frac{1}{np(n)}$ 收敛.

Chapter 26

3 月 6 日期末考试答案

一、1. 解答: 原式 $= \pi + (a-b)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{b-\cos x}$.

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{b-\cos x} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}u}{\left(\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}u\right)^2+1} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}}.\text{（令 } u=\tan\frac{x}{2}.\text{）}$$

故原式 $= \pi\left(1+\frac{a-b}{\sqrt{b^2-1}}\right)$.

2. 解答: $nI_n = \int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{2}-1)$.

$\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, n>N \implies \epsilon^{\frac{1}{n}} > 1-\epsilon$, 于是有

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x > \int_{\epsilon}^1 \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x > (1-\epsilon)\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = 2(1-\epsilon)(\sqrt{2}-\sqrt{1+\epsilon}).$$

令 $\epsilon\to 0$ 得 $nI_n \to 2(\sqrt{2}-1)$, 于是 $I_n \to 0$.

二、解答: 该式成立. 证明如下: 由 f 黎曼可积, f 有界. 设 $|f|\le M$.

由已知, $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, 1-\delta<x<1 \implies 1-\epsilon<f(x)<1+\epsilon$.

$$\left|\int_0^{1-\delta} f(x)x^n\mathrm{d}x\right| \le M\int_0^{1-\delta} x^n\mathrm{d}x = \frac{M(1-\delta)^n}{n+1} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\int_{1-\delta}^1 (1-\epsilon)x^n\mathrm{d}x = \frac{1-\epsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) < \int_{1-\delta}^1 f(x)x^n\mathrm{d}x < \int_{1-\delta}^1 (1+\epsilon)x^n\mathrm{d}x = \frac{1+\epsilon}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由 ϵ 任意性, 原式得证.

三、解答: 此不等式成立, 证明如下: 由已知, $|f|$ 连续, 由积分第一中值定理,

$$\exists \xi \in [0,a], |f(\xi)| = \frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t.$$

于是 $|f(0)| - \frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t \le |f(0)-f(\xi)| = \left|\int_0^\xi f'(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^a |f'(t)|\mathrm{d}t.$
不等式得证.

四、解答: $\sin\frac{k}{n^2} = \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 故

$$\sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

又 $\sum\limits_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2} = \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, 而

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{n}{(n+k)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

于是 $a=b=c=\frac{1}{2}$.

五、1. 解答: 发散. 设 $u_n = \frac{\cos\ln n + \sin\ln n}{n} = \frac{\sin(\ln n + \frac{\pi}{4})}{n}$.
则当 $n \in (e^{2k\pi}, e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}})$ 时, $u_n > \frac{\sqrt{2}}{2e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}}$. 故 $\sum\limits_{[e^{2k\pi}]+1}^{[e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}]} u_n \ge \frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}} + o(1)$, 从而级数发散.

2. 解答: 收敛. 若 $a_n \ge \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}}$, 则 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \le 2a_n$; 否则, $a_n^{\frac{n-3}{n}} \le 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$, 故 $a_n^{\frac{n-3}{n}} \le 2a_n + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$.
级数 $\sum a_n$ 与 $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{3}}$ 均收敛, 故 $\sum a_n^{\frac{n-3}{n}}$ 收敛.

六、1. 解答: 分别在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 上解此方程.
考虑 $(1+x)y'+y=0$, 它的解形如 $y=\frac{c}{1+x}, c\in\mathbb{R}$, 且原方程有特解 $y=-\cos x - \frac{\sin x}{1+x}$.
于是原方程解恰为具有如下形式的所有函数:

$$y = \begin{cases} \dfrac{c_1 - \sin x}{1+x} - \cos x, & x > -1 \\ \dfrac{c_2 - \sin x}{1+x} - \cos x, & x < -1 \end{cases}$$

2. 解答: 方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解形如 $y = (ax+b)e^x, a, b \in \mathbb{R}$, 原方程有特解 $y = \dfrac{x^3 e^x}{6}$.
故原方程解集为 $\{y = \left(\dfrac{x^3}{6} + ax + b\right) e^x : a, b \in \mathbb{R}\}$.

七、解答: 不妨设 $L > 0$, 则 x 充分大时 $f(x) > 0$.
记 $F(x) = \int\limits_0^x f(t)^2 \mathrm{d}t$, 则有 $F(x)\sqrt{F'(x)} \sim L \implies F(x)^2 F'(x) \sim L^2$.
即 $\left(\dfrac{F(x)^3}{3}\right)' \sim L^2$, 于是 $F(x) \sim (3L^2 x)^{\frac{1}{3}}$. 又 $F(x)f(x) \sim L$, 于是 $f(x) \sim \left(\dfrac{L}{3x}\right)^{\frac{1}{3}}$.