Chapter 6

Cohomologie

6.1 Groupes de cohomologie et coefficients universels

Définition 6.1.1. Un complexe de cochaînes $C = (C^n, \partial^n)$ est une suite de groupes abéliens C^n, $n \geq 0$, et une suite de morphismes $\partial^n : C^n \to C^{n+1}$, vérifiant pour tout n: $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$.

Etant donné un complexe de cochaînes (C^n, ∂^n), on définit sa cohomologie:

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)} \ ,$$

où $Z^n(C) = \mathrm{Ker}(\partial^n)$ est le sous-groupe des cocycles, et $B^n(C) = \mathrm{Im}(\partial^{n-1})$ est le sous-groupe des cobords.

La dualité permet de construire un complexe de cochaînes à partir d'un complexe de chaînes: si $C = (C_*, \partial_*)$ est un complexe de chaînes et G un groupe, alors les groupes $C^n = Hom(C_n, G)$ forment un complexe de cochaînes avec le cobord $\partial^n = {}^t\partial_{n+1}$[1].

La cohomologie singulière à coefficients dans le groupe abélien G est obtenue avec les complexes de cochaînes $C^*(X, A; G) = Hom(C_*(X, A), G))$.

Coefficients universels

On peut restreindre cette section au cas des groupes abéliens, qui sont les modules sur $\mathbb{Z}$. On rappelle que tout sous-module d'un module libre sur un anneau principal est libre. Il en résulte que tout module M sur un anneau principal a une présentation libre: il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ i\ } L \xrightarrow{\ p\ } M \longrightarrow 0 \ ,$$

[1] On rejoint la convention de signe majoritaire, notamment pour être cohérent avec la formule de Stokes

avec L et R qui sont des modules libres.

Lemme 6.1.2. *Soient* $\mathbf{k}$ *un anneau princimal,* $f : M \to M'$ *une application* $\mathbf{k}$*-linéaire, et des présentations libres:*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \,,$$

$$0 \longrightarrow R' \xrightarrow{i'} L' \xrightarrow{p'} M' \longrightarrow 0 \,,$$

il existe une application linéaire canonique entre les conoyaux:

$$\operatorname{coker}({}^t i') \longrightarrow \operatorname{coker}({}^t i) \ ,$$

définie par passage au quotient de la transposée de la restriction à R *d'un relèvement de* $f \circ p$ *à* L.

Ici la transposée est associée à la dualité à valeur dans G: ${}^t i = \operatorname{Hom}(i, \operatorname{Id}_G)$.

Théorème 6.1.3. *Avec les notations précédentes, le groupe*

$$\operatorname{Ext}(M, G) = \operatorname{coker}(\operatorname{Hom}(i, \operatorname{Id}_G))$$

est canonique et Ext *s'étend en un bifoncteur, contravariant dans la première variable et covariant dans la seconde. On a alors pour toute présentation libre*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0 \,,$$

une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(L, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}(R, G) \longrightarrow \operatorname{Ext}(M, G) \longrightarrow 0 \ .$$

Exercice 6.1.4. Calculer $\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

Exercice 6.1.5. Montrer que pour G fixé, $\operatorname{Ext}(., G)$ commute avec les sommes directes.

Proposition 6.1.6. *Pour un groupe abélien* M*,* $\operatorname{Ext}(M, \mathbb{Z})$ *est égal au sous-groupe de torsion (éléments d'ordre fini).*

Théorème 6.1.7 (Coefficients universels)**.** *Etant donné un complexe de chaînes libre* $C = (C_*, \partial_*)$*, pour tout groupe abélien* G *il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C), G) \longrightarrow H^n(\operatorname{Hom}(C, G)) \longrightarrow \operatorname{Hom}(H_n(C), G) \longrightarrow 0 \ .$$

De plus la suite est scindée, mais ne l'est pas naturellement.

6.2 Anneau de cohomologie

On commence par définir le produit *cup* au niveau des cochaînes à coefficients dans un anneau Λ. Pour $\alpha \in C^p(X,\Lambda)$, $\beta \in H^q(X,\Lambda)$, σ un $p+q$-simplexe singulier dans X:

$$< \alpha \cup \beta, \sigma >= (-1)^{pq} < \alpha, {}_p\sigma >< \beta, \sigma_q > \quad .$$

Ici, ${}_p\sigma(t_0,\ldots,t_p) = \sigma(t_0,\ldots,t_p,0,\ldots,0)$ et $\sigma_q(t_0,\ldots,t_q) = \sigma(0,\ldots,0,t_0,\ldots,t_q)$

Le produit tensoriel $C^* \otimes C'^*$ de deux complexes de cochaînes est un complexe de cochaînes avec la différentielle d définie par:

$$d\,\alpha \otimes \beta = (\partial\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \otimes (\partial'\beta) \ .$$

Proposition 6.2.1. *Le produit cup est un morphisme de complexes de cochaînes.*

Théorème 6.2.2. *Le produit cup induit sur la cohomologie une opération, qui munit $H^*(X,\Lambda)$ d'une structure d'anneau.*

Cas relatif

Définition 6.2.3. Soient A et B deux sous-espaces de X. On dit que (A,B) est un couple excisif dans X si et seulement si l'application donnée par les inclusions de $C(A)+C(B)$ dans $C(A\cup B)$ induit un isomorphisme en homologie.

C'est le cas si A et B sont ouverts dans $A\cup B$, ou des sous-complexes dans un CW-complexe.

Théorème 6.2.4. *Si (A,B) est un couple excisif dans X, alors le produit cup est défini:*

$$H^p(X,A;\Lambda) \otimes H^p(X,B;\Lambda) \to H^{p+q}(X, A\cup B;\Lambda) \ .$$

Propriétés du produit cup

1. Fonctorialité.
2. Supersymétrie: $\alpha \cup \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \cup \alpha$.
3. Relation avec l'exactitude.
   Pour $i : A \hookrightarrow X$, $\alpha \in H^p(A,\Lambda)$, $\beta \in H^q(X,\Lambda)$, $\partial(\alpha \cup i^*(\beta)) = (\partial\alpha) \cup \beta$.

6.3 Action sur l'homologie

Le produit cap sur les chaînes est l'homomorphisme

$$\cap : C^p(X,\Lambda) \otimes C_{p+q}(X,\Lambda) \to C_q(X,\Lambda) \ ,$$

défini pour une p-cochaîne α et un $(p+q)$-simplexe σ par

$$\alpha \cap \sigma = \langle \alpha, {}_p\,\sigma \rangle \sigma_q \ .$$

Théorème 6.3.1. *Le produit cap induit un homomorphisme fonctoriel*

$$\cap : H^p(X,\Lambda) \otimes H_{p+q}(X,\Lambda) \to H_q(X,\Lambda) \ ,$$

qui munit l'homologie $H_*(X,\Lambda)$ d'une structure de module sur l'anneau de cohomologie.

Cas relatif

Théorème 6.3.2. *Si (A,B) est un couple excisif dans X, alors le produit cap est défini:*

$$H^p(X,A;\Lambda) \otimes H_{p+q}(X,A\cup B;\Lambda) \to H^q(X,B;\Lambda) \ .$$

Dualité de Poincaré

Théorème 6.3.3. *Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension n, et $[M] \in H_n(M,\mathbb{Z})$ sa classe fondamentale, alors, pour $p+q=n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme:*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,\Lambda) & \to & H_p(M,\Lambda) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap [M] \end{array}$$

Dans la cas à bord:

Théorème 6.3.4. *Soit M une variété compacte de dimension n, et μ une classe fondamentale à coefficient dans l'anneau Λ, alors, pour $p+q=n$, le produit cap avec la classe fondamentale définit un isomorphisme:*

$$\begin{array}{rccc} D: & H^q(M,\partial M;\Lambda) & \to & H_p(M,\Lambda) \\ & \alpha & \mapsto & \alpha \cap \mu \end{array}$$

6.4 La cohomologie de De Rham

On appelle variété différentiable, ou variété lisse, une variété munie d'un atlas dont les changements de cartes sont C^∞ (à équivalence près). Pour les variétés lisses M, on définit le complexe des chaînes singulières lisses, librement engendré par les simplexes $\sigma : \Delta_n \to M$ qui sont restrictions d'applications C^∞ définies sur un voisinage ouvert de Δ_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On obtient alors un sous-complexe $C_*^\infty(M)$, dont l'homologie est isomorphe à l'homologie singulière.

On note $\Omega^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles (à coefficients réels) sur la variété lisse M. Avec la dérivée extérieure $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ on obtient un complexe de cochaînes qui définit la cohomologie de De Rham $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$. La formule de Stokes démontre que l'intégration sur les simplexes lisses

$$\omega \mapsto \int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} f^*\sigma \ ,$$

définit un morphisme de complexes de cochaînes

$$F : \Omega^*(M) \to C^*_\infty(M, \mathbb{R}) \ ,$$

qu'on appelle morphisme de De Rham.

Théorème 6.4.1 (De Rham)**.** *Pour les variétés lisses, la cohomologie de De Rham est naturellement isomorphe à la cohomologie singulière.*

6.5 Quelques anneaux de cohomologie

Les surfaces orientées

On note Σ_g la surface orientée de genre g, obtenue en recollant à la sphère à g trous g copies du tore troué. On note a_i, b_i, $1 \leq i \leq g$, le méridien $S^1 \times 1$ et le parallèle (longitude) du i-ème tore. Ces $2g$ courbes orientées représentent une base de $H_1(\Sigma_g) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. On note α_i, β_i,$1 \leq i \leq g$ la base duale de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, et $\mu^* \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z})$ la classe duale de la classe fondamentale.

Proposition 6.5.1. *On a $\alpha_i \cup \beta_i = \mu^* = -\beta_i \cup \alpha_i$, $1 \leq i \leq g$. Tous les autre produits de deux classes de la base de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ sont nuls.*

Les espaces projectifs

Théorème 6.5.2. *L'anneau $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2[\alpha]/\alpha^{n+1}$, α étant de degré 1.*

Théorème 6.5.3. *L'anneau* $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}[x]/x^{n+1}$*,* x *étant de degré* 2*.*