Chapter 4

L'homologie singulière

4.1 Les groupes d'homologie d'un espace topologique

Le simplexe standard de dimension n, Δ_n, est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(t_0, \ldots, t_n),\ \forall i\ t_i \geq 0,\ \sum_i t_i = 1\}\ .$$

Définition 4.1.1. Un simplexe singulier de dimension n dans l'espace topologique X est une application continue $\sigma : \Delta_n \to X$.

Pour $0 \leq i \leq n$, la face d'indice i, F_i^n, de Δ_n est le simplexe singulier de dimension $n-1$ défini par:

$$F_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})\ .$$

On notera au besoin ce simplexe par la suite ordonnée de ses sommets: $(e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_n)$. Ici $(e_0, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et le chapeau signifie que e_i est enlevé de la suite. Cette notation pourra être utilisée pour les simplexes singuliers linéaires.

Avec cette notation, on a:

$$\forall i < j,\ F_j^{n+1} \circ F_i^n = (e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, \widehat{e_j}, \ldots, e_{n+1}) = F_i^{n+1} \circ F_{j-1}^n\ .$$

Soit X une espace topologique. Pour $n \geq 0$, le groupe des chaînes singulières de dimension n est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base les simplexes singuliers de dimension n à valeur dans X. On définit pour $n \geq 1$, une *application bord*:

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)\ ,$$

en étendant linéairement la formule donnée pour un simplexe σ de dimension $n \geq 1$ par:

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ F_i^n \ .$$

Pour $n = 0$, $\partial_0 : C_0(X) \to C_{-1}(X) = \{0\}$ est l'application nulle.

Proposition 4.1.2. *Pour tout $n \geq 1$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.*

Définition 4.1.3. Un complexe de chaînes $C = (C_n, \partial_n)_{n\geq 0}$ est une suite de groupes abéliens $(C_n)_{n\geq 0}$ et une suite de morphismes $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, $n \geq 0$ ($\partial_0 : C_0 \to C_{-1} = \{0\}$) vérifiant pour tout n, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Etant donné un complexe de chaîne $C = (C_n, \partial_n)_{n\geq 0}$, on définit son homologie:

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} \ ,$$

où $Z_n(C) = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ est le sous-groupe des cycles, et $B_n(C) = \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ est le sous-groupe des bords.

Définition 4.1.4. L'homologie singulière d'un espace topologique X est l'homologie du complexe des chaînes singulières:

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} \ .$$

Le groupe $C_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base X.

Proposition 4.1.5. *Si X est connexe par arc , alors $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

Proposition 4.1.6. *Si X est réunion disjointe des composantes connexes par arc X_i, $i \in I$, alors pour tout n, $H_n(X) = \oplus_{i\in I} H_n(X_i)$. En particulier $H_0(X)$ est libre de base les composantes connexes par arc de X, $\pi_0(X)$.*

4.2 Propriétés

4.2.1 Fonctorialité

Définition 4.2.1. Un morphisme entre les complexes de chaînes $C = (C_n, \partial_n)_{n\geq 0}$ et $C' = (C'_n, \partial'_n)_{n\geq 0}$ est une suite de morphismes $g_n : C_n \to C'_n$, $n \geq 0$, qui commutent avec les bords: pour tout n, $\partial'_n \circ g_n = g_{n-1} \circ \partial_n$.

Une suite de groupes abéliens (ou la somme directe de ceux-ci) est appelée *un groupe abélien gradué*; l'indice est appelé *degré*. L'homologie définit un foncteur de la catégorie des complexes de chaînes vers la catégorie des groupes abéliens gradués.

A une application continue $f : X \to Y$, on associe la suite $C = (C_n(f))_{n \geq 0}$ d'homomorphismes:

$$\begin{array}{rrcl} C_n(f): & C_n(X) & \to & C_n(y) \\ & \sigma & \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

Proposition 4.2.2. *Pour tout application continue f, $C(f)$ est un morphisme de complexes de chaînes et on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de chaînes.*

Corollaire 4.2.3. *L'homologie singulière définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens gradués.*

Pour une application continue $f : X \to Y$, on note généralement $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ l'application induite en homologie. Un homéomorphisme induit un isomorphisme en homologie: les groupes d'homologie sont des *invariants topologiques.*

4.2.2 Homotopie

Théorème 4.2.4. *Si $f, g : X \to Y$ sont des applications continues homotopes alors $f_* = g_*$.*

Corollaire 4.2.5. *Un équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.*

Proposition 4.2.6. *Si X est un espace topologique contractile, alors*

$$H(X) = H_0(X) \cong \mathbb{Z} \ .$$

4.2.3 Exactitude

On étend le foncteur homologie singulière à la catégorie des paires d'espaces (X, Y), $Y \subset X$, les morphismes étant des applications continues dont la restriction est bien définie.

$$C(X, Y) = \frac{C(X)}{C(Y} \ , H(X, Y) = H(C(X, Y)) \ .$$

Théorème 4.2.7. *Le bord induit une application bien définie $\beta_n : H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y)$. Ce morphisme est naturel (i.e. commute avec les morphismes induits par les applications continues) et donne lieu à une suite exacte longue: Etant donné une paire d'espace (X, Y), il existe une suite exacte longue en homologie,*

$$\cdots \to H_n(Y) \to H_n(X) \to H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y) \to \dots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions et le dernier, appelé bord ou connectant est l'homomorphisme β_n qui associe à la classe d'homologie representée par le cycle relatif x la classe d'homologie de $\partial_n \widetilde{x}$ où $\widetilde{x} \in C_n(X)$ est une chaîne qui représente x.

4.2.4 Excision et suite exacte de Mayer-Vietoris

Théorème 4.2.8 (Petites chaînes)**.** *Si X est un espace topologique recouvert par les intérieurs des sous-espaces X_i, $i \in I$, alors la somme des sous-complexes $C(X_i)$, $i \in I$, est un sous-complexe de $C(X)$ qui a la même homologie.*

Théorème 4.2.9 (Excision)**.** *Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence de A est contenue dans l'intérieur de Y, alors l'inclusion de $(X \setminus A, Y \setminus A) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Théorème 4.2.10 (Mayer-Vietoris)**.** *On suppose que l'espace topologique X est la réunion des intérieurs des sous-espaces X_1 et X_2. Il existe une suite exacte longue:*

$$\cdots \to H_n(A \cap B)) \xrightarrow{(i_A)_* \oplus -(i_B)_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(j_A)_* + (j_B)_*} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to \dots ,$$

où les premières applications sont induites par les inclusions, et le connectant β_n associe à la classe de x, écrite $x = x_1 + x_2$, $x_i \in C_n(X_i)$, la classe de $\partial_n x_1$.

4.3 Calcul d'homologies

Théorème 4.3.1. *Pour $n \geq 1$:*
a)$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ ou } k = n; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$
b)$H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$
c) Pour $n \geq 1$, le bord $\partial_{n+1} : H_n(D^{n+1}, S^n) \to H_n(S^n)$ est un isomorphisme.

Homologie réduite

Le complexe singulier réduit $\widetilde{C}(X)$ est défini par:
$\widetilde{C}_n(X) = C_n(X)$ pour $n \neq -1$, $\widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$, $\widetilde{\partial}_n = \partial_n$ pour $n > 0$, et
$\widetilde{\partial}_0 : \widetilde{C}_0(X) = C_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z} \approx C_0(pt)$ est l'augmentation (induite par l'application constante).

On peut reformuler avec l'homologie réduite les résultats précédents:

$$\forall n \geq 1 \;\; H_*(D^n, S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_{*-1}(S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } * = n; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inclusion $i : (D^n, S^{n-1}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ induit un isomorphisme en homologie (équivalence d'homotopie). On peut fixer le choix d'un générateur des groupes

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \ ,$$

avec un simplexe singulier qui est un cycle relatif dans $C_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. En notant $(b_1, \ldots, b_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $b_0 = -(b_1 + \cdots + b_n)$, le simplexe

$$b = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n \rangle = [(t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_i t_i b_i] \ .$$

représente une base de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$, ce qui fixe aussi un générateur des groupes $H_n(D^n, S^{n-1})$ et $\widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$.

Au besoin on notera $[D^n] \in H_n(D^n, S^{n-1})$ et $[S^{n-1}] \in H_{n-1}(S^{n-1})$ les *classes fondamentales* ainsi fixés. Ici le vocabulaire et la notation anticipent sur ce qui sera fait plus généralement avec l'orientation des variétés.

Homologie des surfaces

Les surfaces modèles ont des homologie deux à deux non isomorphes et sont donc non homéomorphes (cf devoir).

4.4 L'homotopie

On rappelle qu'un morphisme F entre deux complexes de chaîne (C, ∂) et (C', ∂') est un homomorphisme gradué, $F_n : C_n \to C'_n$, $n \geq 0$, qui commute avec les bords. On a alors en homologie un homomorphisme gradué $H(F)$.

Définition 4.4.1. Une homotopie entre deux morphismes de chaînes $F, G : (C, \delta) \to (C', \delta')$ est un homomorphisme de degré 1 (augmente le degré de 1), $D_n : C_n \to C'_{n+1}$, $n \geq 0$, tel que $G - F = D \circ \partial + \partial \circ D$ (pour tout n, $G_n - F_n = D_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ D_n$).

Proposition 4.4.2. *Si F et G sont des morphismes de chaîne homotopes, alors $H(F) = H(g)$.*

Le théorème d'homotopie pour l'homologie singulière est conséquence du lemme suivant:

Lemme 4.4.3. *Si f et g de X dans Y sont des applications continues homotopes, alors les morphismes de chaîne $C(f)$ et $C(g)$ sont homotopes.*

On prouve ce résultat avec la construction d'un opérateur *prisme* obtenu avec une chaîne $P_n \in C_{n+1}([0,1] \times \Delta_n)$ qui décompose le prisme $[0,1] \times \Delta_n$ en $(n+1)$-simplexes. En notant $(v_0, \ldots, v_n)$, les sommets du simplexe entrant $\{0\} \times \Delta_n$ et $(w_0, \ldots, w_n)$ les sommets du simplexe sortant $\{1\} \times \Delta_n$, on définit:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \langle v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n \rangle \ .$$

Soit $H : [0,1] \times X \to Y$ une homotopie entre f et g. On définit $D_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, $n \geq 0$, sur les simplexes singuliers $\sigma : \Delta_n \to X$ par:

$$D_n(\sigma) = C_n(H \circ (\mathrm{Id} \times \sigma))(P_n) \ .$$

Pour la preuve que D est une homotopie, voir le livre de Hatcher 2.10.

4.5 Le théorème des petites chaînes via les modèles acycliques

Définition 4.5.1. a) Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie cAb des complexes de chaînes est libre de base les $m_i \in F(M_i)$, $i \in I$, si et seulement si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $F(X)$ est le groupe abélien libre de base les $F(\sigma)(m_i)$, $i \in I$, $\sigma \in Hom_{\mathcal{C}}(M_i, X)$. On dit que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ s'il a une base $m_i \in F(M_i)$, $i \in I$, avec $M_i \in \mathcal{M}$ pour tout $i \in I$.
b) Un foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie cAb des complexes de chaînes est acyclique sur l'ensemble de modèles $\mathcal{M} \subset Obj(\mathcal{C})$ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{M}$, $H_n(F(M)$ est nul pour $n > 0$.

Définition 4.5.2. Une transformation naturelle entre deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une famille de morphismes $t_X : F(X) \to G(X)$, X objet de $\mathcal{C}$, qui commute avec les images des morphismes de $\mathcal{C}$. On dit aussi que t_X est une famille naturelle de morphismes.

Théorème 4.5.3. *Soient F et G deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des complexes de chaîne. On suppose que F est libre à modèles dans $\mathcal{M}$ et que G est acyclique sur les modèles.*
a) Toute famille naturelle de morphismes $t_X : H_0(F(X)) \to H_0(G(X))$, X objet de $\mathcal{C}$, est induite par des morphismes de chaîne naturels

$$\nu_X : F(X) \to G(X) \ .$$

b) Deux familles naturelles de morphismes de chaîne $\nu_X, \nu'_X : F(X) \to G(X)$ qui induisent les mêmes morphismes en H_0: $H_0(\nu_X) = H_0(\nu'_X)$, sont naturellement homotopes.

Pour prouver le théorème des petites chaînes, on définit la catégorie des espaces topologiques avec un recouvrement à raffinement ouvert, noté $TopR$. Un objet de $TopR$, noté $X^{\mathcal{U}}$ est un espace topologique X avec une partie $\mathcal{U}$ de sous-espaces de X dont les intérieurs recouvrent X. Un morphisme entre $X^{\mathcal{U}}$ et $Y^{\mathcal{V}}$ est une application continue subordonnée: chaque $U \in \mathcal{U}$ a son image contenue dans l'un des $V \in \mathcal{V}$. Le simplexe singulier avec le recouvrement trivial par lui même, $\Delta_n^{\{\Delta_n\}}$ est un objet de $TopR$ qu'on note simplement Δ_n. Sur la catégorie $TopR$, on va considérer d'une part le foncteur C des chaînes singulières et d'autre part le foncteur C^R des chaînes singulières subordonnées, librement engendré par les simplexes singuliers subordonnés.

L'inclusion définit une transformation naturelle F de C^R vers C. On démontre que $H_0(C^R(X))$ est égal à $H_0(C(X))$: deux points connectés par un arc sont connectés par un chemin qui se décompose en chemins subordonnés.

Les deux fonsteurs C et C^R sont libres et acycliques avec modèles dans les simplexes standards.

Le théorème ci-dessus permet de construire une transformation naturelle $G : C \to C^R$. L'énoncé b) permet de prouver que les compositions $F \circ G$ et $G \circ F$ sont naturellement homotopes à l'identité. On déduit que $H(F)$ et $H(G)$ sont des isomorphismes naturels inverses. En conclusion, l'inclusion des chaînes subordonnées induit un isomorphise en homologie.