

Surfaces de Riemann

Rédigé par WANG Zheng

Classe Franco-Chinoise - printemps 2024

Table des matières

Table des matières	3
0.1 Rappel sur les fonctions holomorphes dans \mathbb{C}	4
0.2 Forme locales des fonctions holomorphes	6
0.3 Fonctions méromorphes.	7
1 Surfaces de Riemann	9
1.1 Surfaces de Riemann	9
1.1.1 Sous-variété affine	13
1.2 Uniformisation et construction d'objet holomorphe	14
1.2.1 Théorème de Koebe-Poincaré	14
1.2.2 Quotient de surface de Riemann	15
1.2.3 Théorie de Weierstrass (fonctions \mathfrak{P})	21
1.2.4 Construction d'objets holomorphes	27
2 Théorie de Hodge sur les surfaces de Riemann	33
2.1 Calcul sur les surfaces de Riemann	33
2.1.1 Formes différentielles.	33
2.1.2 Opérations sur les formes différentiels	36
2.2 Formes de carré intégrable	39
2.3 Existence de différentielle harmoniques (et méromorphes)	42
3 Surfaces de Riemann compacts	49
3.1 Topologie	49
3.1.1 Forme d'intersection dans $H_1(M_g, \mathbb{Z})$	50
3.2 Homologie et théorème de Riemann-Hurwitz	51
3.2.1 Triangulation	51
3.2.2 Homologie simpliciale	51
3.2.3 Formule de Riemann-Hurwitz	55
3.3 Théorie de Hodge des surfaces de Riemann compacts	56
3.4 Corps des fonctions méromorphes	58
3.5 Groupe des diviseurs	59
3.6 Théorème de Riemann-Roch	63

0.1 Rappel sur les fonctions holomorphes dans \mathbb{C}

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert connexe, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Définition 0.1.1. f est *analytique* si elle est développable en suite entière en tout point de Ω , c'est-à-dire $\forall z \in \Omega, \exists r > 0, D(z, r) \subseteq \Omega$ et

$$f(z + w) = \sum_{n \geq 0} a_n w^n, \quad \forall |w| < r$$

Définition 0.1.2. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 . On dit que f est *conforme* si $\forall z \in \Omega, df(z)$ est \mathbb{C} -linéaire.

Remarque. $L := df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est \mathbb{R} -linéaire, il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, tels que

$$L(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

Prenons l'isomorphisme $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + iy$, on peut voir L comme une application de \mathbb{C} à \mathbb{C} , avec

$$L(x, y) = ax + by$$

où $a = \alpha + i\gamma \in \mathbb{C}, b = \beta + i\delta \in \mathbb{C}$. Prenons $A = \frac{a+b}{2}, B = \frac{a-b}{2}$, on a

$$L(z) = Az + B\bar{z}$$

Donc L est \mathbb{C} -linéaire $\Leftrightarrow B = 0$. À nouveau,

$$\begin{aligned} L(z_0) = df(z_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z} \end{aligned}$$

où $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), dy = \frac{1}{2}(dz - d\bar{z})$. Donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$.

Conclusion : f est conforme $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Proposition 0.1.1 (Condition de Cauchy). Soit $f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Théorème 0.1.2. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, f est conforme si et seulement si f est analytique. On dira cela que f est holomorphe.

Remarque. Munissons le plan complexe de la métrique euclidienne standard $dx^2 + dy^2$. Pour cette métrique une application \mathbb{R} -linéaire préserve les angles si et seulement si elle est composée d'une rotation, d'une homothétie et éventuellement de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe réel. En notations complexes, une telle application est donc de la forme $z \mapsto \lambda z$ ou $\lambda \bar{z}$. On en déduit qu'une application f est holomorphe si et seulement si sa différentielle $df(z)$ induit une application linéaire qui préserve l'orientation ainsi que les angles mesurés avec la métrique euclidienne du plan complexe.

On notera $f'(a) \in \mathbb{C}$ la différentielle d'une application holomorphe en un point a .

Démonstration. Commençons par observer que les fonctions monomiales $z \mapsto z^n$ sont bien conformes. En effet la formule de Leibniz implique

$$\frac{\partial z^{n+1}}{\partial \bar{z}} = z \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} + z^n \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = z \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}}$$

et le résultat s'ensuit par récurrence.

Supposons maintenant que f soit analytique dans un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} . On peut donc écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ avec $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n| r^n < \infty$ pour un réel $r > 0$. Par convergence normale, on peut dériver sous le signe somme et on en déduit que la différentielle de f est la somme des différentielles de fonctions monomiales. En particulier $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0$, donc f est bien conforme.

Réciproquement, supposons que f soit conforme sur le disque de centre 0 et de rayon $1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. La formule de Green-Riemann donne alors pour tout point z dans le disque unité ouvert

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|w|<1} \frac{1}{\pi(w - z)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dw d\bar{w} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Pour tout ζ sur le cercle unité, on peut maintenant écrire $(\zeta - z)^{-1} = \zeta^{-1} \sum_{n \geq 0} (\frac{z}{\zeta})^n$ car $|\frac{z}{\zeta}| = |z| < 1$. Comme f est définie sur un disque ouvert contenant le cercle unité, sa restriction au cercle est en particulier bornée et on peut donc permuter les signes somme et intégral pour obtenir

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n \geq 0} z^n \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right).$$

On conclut donc que f est analytique. □

0.2 Forme locales des fonctions holomorphes

Théorème 0.2.1 (inversion locale holomorphe). Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ et f est biholomorphe sur $D(z_0, r)$,

Théorème 0.2.2. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constant, Ω connexe, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi: (\mathbb{C}, z_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, et $\psi: (\mathbb{C}, f(z_0)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ biholomorphes locaux tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

De plus, f est biholomorphe locale si et seulement si $k = 1$.

Démonstration. En choisissant pour commencer $\varphi(z) = z + a$ et $\psi(z) = z - f(a)$, on se ramène au cas où $a = f(a) = 0$. Comme f est analytique on peut l'écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dans un voisinage de l'origine. Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$. Cet entier est positif, sinon f est identiquement nulle dans un voisinage de a .

Quitte à post-composer par $z \mapsto z/a_k$, on peut même supposer que l'on a $f(z) = z^k(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n)$.

Rappelons que la fonction $\log(1 + z)$ est définie dans le disque unité ouvert par la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$, et que $\exp(\log(1 + z)) = 1 + z$.

Pour $|z| < r$ avec $r > 0$ assez petit, on a $|\sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n| < 1$ et on peut donc poser

$$H(z) = z \exp\left(\frac{1}{k} \log(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n)\right)$$

C'est une fonction holomorphe définie dans le disque de centre 0 et de rayon r , telle que $H(z) = z(1 + o(1))$ et on a de plus $H(z)^k = z^k \exp(\log(1 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n z^n)) = f(z)$. On peut donc poser $\varphi(z) = H^{-1}(z)$ de telle sorte que $f \circ \varphi(z) = H(\varphi(z))^k = z^k$ ce qui conclut la démonstration. \square

Corollaire 0.2.3. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe définie sur un ouvert connexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

- 1) Soit $f \equiv 0$, soit $\{z \in \Omega: f(z) = 0\}$ est discret.
- 2) Soit f est constante, soit $\{z \in \Omega: f'(z) = 0\}$ est discret.
- 3) Soit f est constante, soit f est ouverte.

La première assertion est appelée le principe des zéros isolés. On démontrera la dernière assertion dans un cadre plus général, voir 1.1.2.

0.3 Fonctions méromorphes.

Rappelons quelques faits sur les fonctions holomorphes définies sur un disque épointé. Nous énonçons sans démonstration le résultat suivant.

Théorème 0.3.1. Soit $f: \mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Il existe alors une unique série de Laurent $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$ telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1, la série entière $\sum_{n \leq 0} \alpha_n z^{-n}$ est de rayon de convergence ∞ , et $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^n$ pour tout $0 < |z| < 1$.

On dira qu'une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\}$ possède une *singularité essentielle* en 0 si sa série de Laurent possède une infinité de coefficient α_n non nuls avec $n \rightarrow -\infty$.

De manière équivalente, f n'a pas de singularité essentielle si et seulement si il existe un entier $k \geq 0$ tel que $z^k f(z)$ soit holomorphe au voisinage de 0.

Rappel. Lorsque 0 est une singularité essentielle, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'image $f(\mathbb{D}(0,\varepsilon) \setminus \{0\})$ est dense dans \mathbb{C} .

Remarque. Le “grand” théorème de Picard énonce que si f possède une singularité essentielle en 0, alors $f(\mathbb{D}(0,1) \setminus \{0\})$ contient tout le plan complexe sauf au plus une valeur. La démonstration est nettement plus délicate.

Définition 0.3.1. Une fonction méromorphe sur un ouvert Ω connexe du plan complexe est la donnée :

- d'une partie discrète S de Ω ,
- d'une fonction holomorphe $f: \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$

tels que f ne possède aucune singularité essentielle aux points de S .

On identifie de plus deux telles données (f_1, S_1) et (f_2, S_2) dès que $f_1 = f_2$ sur le complémentaire de $S_1 \cup S_2$.

Une fonction méromorphe n'est pas à proprement parler une fonction, mais définit cependant une fonction holomorphe sur un ouvert dense $\Omega' \subseteq \Omega$ maximal (pour l'inclusion). Le complémentaire $\Omega \setminus \Omega'$ est un ensemble discret appelé *ensemble des pôles* de la fonction.

Proposition 0.3.2. L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe Ω de \mathbb{C} forme un corps qui contient l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω .

Démonstration. Voir le poly de Joël Merker. □

Remarque. Il faut faire attention à ce qu'une fonction holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble discret dans Ω n'induit pas forcément une fonction méromorphe. Ainsi la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* mais n'est pas méromorphe sur \mathbb{C} .

Chapitre 1

Surfaces de Riemann

1.1 Surfaces de Riemann

Définition 1.1.1. Une surface de Riemann est une espace topologique \mathcal{S} muni d'une famille de pair (U_i, φ_i) tel que

- 1) $\{U_i\}$ est un revouvrement ouvert de \mathcal{S} ,
- 2) $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}$ est un homéomorphisme,
- 3) *condition de recollement* : $\forall i, j, \varphi_{ij}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est holomorphe.

Une surface de Riemann est une *variété holomorphe* de dimension $\mathbb{C} = 1$. Il est possible que $\{(U_i, \varphi_i)\}, \{(V_i, \psi_i)\}$ définisse la même structure.

Terminologie. On appelle *atlas holomorphe* la famille $\{(U_i, \varphi_i)\}$ satisfaisant les trois conditions ci-dessus.

- $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \mathfrak{B} = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ atlas sur \mathcal{S} . On dit que \mathfrak{B} *raffine* \mathfrak{A} si pour tout $i \in I, \exists j \in J$ tel que $V_j \subseteq U_i$ et $\varphi_i \circ \psi_j^{-1}$ est holomorphe.
- \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' sont *équivalences* si et seulement si \exists un atlas \mathfrak{B} qui raffine à la fois \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' .

Définition 1.1.2. Une *structure de surface de Riemann* sur un espace topologique séparé \mathcal{S} est une classe d'équivalence d'atlas holomorphe.

Remarque. On peut très bien ne pas être satisfait d'une définition comportant la notion de classe d'équivalence. Une définition équivalente de surface de Riemann est la donnée d'un atlas holomorphe \mathfrak{A} sur un espace topologique séparé qui est maximal au sens suivant. L'atlas \mathfrak{A} raffine tout atlas holomorphe \mathfrak{B} qui lui est équivalent.

Il est important de réaliser que même si cette définition semble un peu technique, les exemples de surfaces de Riemann que nous verrons seront tout définis par *un* atlas holomorphe particulier (pas maximal) associé à un recouvrement qui comportera un, deux, ou une infinité dénombrable d'ouverts.

Terminologie. \mathcal{S} surface de Riemann, $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas, $a \in \mathcal{S}$. Une carte holomorphe centrée en a est $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in U$ ouvert, $\varphi(a) = 0$, $\varphi(U)$ bornée.

Observation. $\forall a \in \mathcal{S}$, $\forall V$ voisinage de a , \exists une carte holomorphe centrée en a $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ avec $U \subseteq V$. En effet, il existe une famille de cartes holomorphes centrées en a et formant une base de voisinages ouverts de a . Si (U, φ) est une carte, alors pour tout ouvert V , $(U \cap V, \varphi|_{U \cap V})$ est encore une carte holomorphe (au moins lorsque $U \cap V$ n'est pas vide) et on fait une translation.

Définition 1.1.3. $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux surfaces de Riemann, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ une application. $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ atlas de \mathcal{S} , $\mathfrak{B} = \{(V_j, \psi_j)\}$ atlas de \mathcal{S}' . f est dite *holomorphe* si et seulement si $\forall i, j$, l'application

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(V_j)) \rightarrow \psi_j(f(U_i) \cap V_j)$$

est holomorphe.

Terminologie. Un *biholomorphe* $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est une application holomorphe bijective telle que f^{-1} est holomorphe.

Théorème 1.1.1. $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ holomorphe, \mathcal{S} connexe, $p \in \mathcal{S}$. Si f n'est pas constante, alors il existe des cartes holomorphe (U, φ) centrée en p et (V, ψ) centrée en $f(p)$ telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Soit (V_0, ψ_0) une carte holomorphe centrée en $f(p)$ et (U_0, φ_0) une carte centrée en p . On peut supposer que $U_0 \subseteq f^{-1}(V_0)$. L'application $F := \psi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}$ est une fonction holomorphe d'un voisinage de 0 dans \mathbb{C} fixant l'origine. Par le théorème 0.2.2, on peut donc trouver des voisinages ouverts A et B de 0 et des biholomorphismes $h: A \rightarrow \mathbb{D}$, $g: B \rightarrow \mathbb{D}$ tels que $F(z) = z^k$ pour un entier $k > 0$. Dans les nouvelles cartes $(U, \varphi) = (\varphi_0^{-1}(A), h \circ \varphi_0)$ et $(V, \psi) = (\psi_0^{-1}(B), g \circ \psi_0)$ on a donc

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Théorème 1.1.2. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux surfaces de Riemann connexes et $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ une application holomorphe non constante. Alors f est une application ouverte.

Démonstration. La propriété d'être une application ouverte est une propriété locale. Il suffit de vérifier que pour tout point p , il existe un ouvert U contenant p tel que $f(U)$ est encore ouvert. On applique le théorème précédent. Si f n'est pas localement constante en p , l'entier k qu'on a trouvé devant est non nul, et l'image d'un petit disque ouvert centré en 0 par $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est encore un disque ouvert et la démonstration est terminée.

Supposons maintenant par l'absurde que l'application f est donc localement constante : il existe un voisinage U de p tel que $f|_U \equiv q := f(p)$. Montrons que $f = f(p)$ sur tout \mathcal{S} . Pour cela on introduit l'ensemble O des points de \mathcal{S} admettant un voisinage ouvert sur lequel f est constante égale à $f(p)$. Cet ensemble est ouvert par définition et non vide. Montrons qu'il est aussi fermé. cela terminera la démonstration car \mathcal{S} est connexe.

Soit $p_n \in O$ une suite de points convergeant vers un point p' . Prenons des cartes holomorphes (U', φ') et (V', ψ') centrées respectivement en p' et $f(p')$. Pour n assez grand, p_n tombe dans U' et la fonction $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$ prend donc les mêmes valeurs sur la suite de points $\varphi'(p_n) \rightarrow 0$. Par le principe des zéros isolés, cette fonction est constante au voisinage de l'origine, ce qui implique que f est bien constante égale à $f(p_n) = f(p)$ au voisinage de p' . \square

Corollaire 1.1.3. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux surfaces de Riemann connexes et $f, g: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ deux applications holomorphes. Si le lieu $\{p \in \mathcal{S}: f(p) = g(p)\}$ possède un point d'accumulation dans \mathcal{S} , alors $f \equiv g$.

Démonstration. Soit p_* un point d'accumulation du lieu $\{p \in \mathcal{S}: f(p) = g(p)\}$. On fixe une carte holomorphe $\phi: U \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en p_* , ainsi qu'une carte holomorphe $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en $q_* := f(p_*) = g(p_*)$. Les deux fonctions $F(z) := \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$, et $G(z) := \psi \circ g \circ \phi^{-1}(z)$ sont alors bien définies dans un voisinage commun de 0 et holomorphes, et le lieu $\{F - G = 0\}$ contient $\phi(\{p \in \mathcal{S}: f(p) = g(p)\})$. Comme cet ensemble n'est pas discret, le principe des zéros isolés implique $F = G$.

On définit maintenant $\Omega \subseteq \mathcal{S}$ l'ensemble des points p qui possède un voisinage ouvert U sur lequel $f|_U = g|_U$. Par définition, Ω est ouvert. L'argument précédent montre à la fois que Ω n'est pas vide et qu'il est fermé, donc égal à \mathcal{S} par connexité. \square

Exemple 1.1.1.

- *La sphère de Riemann* : $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la topologie de compactification d'Alexander. $U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Alors $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ est un atlas de , où $\varphi_1(z) = z$ et $\varphi_2(z) = z^{-1}$.
- *Courbes elliptiques* : $\omega \in \mathbb{H} = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$, $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \subseteq (\mathbb{C}, +)$ un sous-groupe discret qu'on appelle un *réseau*. On note \mathbb{C}/Λ le quotient en tant que groupe abélien, et $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ la projection canonique.

Proposition 1.1.4. Posons l'espace quotient $\mathcal{S} := \mathbb{C}/\Lambda$ où deux points z, z' sont identifiés par la relation d'équivalence $z \sim z'$ si et seulement si $z - z' \in \Lambda$.

- 1) L'espace quotient \mathcal{S} est muni d'une unique structure de surface de Riemann telle que la projection naturelle $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}$ est holomorphe.
- 2) La loi d'addition sur \mathbb{C} munit la surface \mathcal{S} d'une structure de groupe abélien pour laquelle les applications $p \mapsto p + q$ sont holomorphes et ce pour tout point $q \in \mathcal{S}$.

Remarque. Une surface de Riemann munie d'une structure de groupe abélien et vérifiant la propriété 2) est appelée *courbe elliptique*. L'usage de la terminologie "courbe" est au premier abord surprenante : elle s'explique cependant par le fait qu'une surface de Riemann est certes de dimension 2 "réelle" mais de dimension 1 "complexe".

On peut montrer que toute courbe elliptique est obtenue par la construction précédente.

Démonstration. 1) Montrons en trois étapes.

- a) \mathbb{C}/Λ est métrisable. En effet, en notant

$$d(\pi(z), \pi(z')) = \text{dist}(z - z', \Lambda) := \min_{\lambda \in \Lambda} |z - z' - \lambda|$$

On observe que l'infimum est toujours atteint pour un $\lambda \in \Lambda$. En effet si $|\lambda| > 2|z - z'|$, on a $|z - z' + 0| < |z - z' + \lambda|$, et l'ensemble des points du réseau de norme $\leq 2|z - z'|$ est fini.

Il est clair que d est symétrique. elle vérifie aussi l'inégalité triangulaire car

$$d(\pi(z), \pi(z')) \leq |z - z' + \lambda + \lambda'| \leq |z - z'' + \lambda| + |z' - z'' + \lambda'|$$

pour tout $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ et on conclut en prenant λ et λ' tels que $d(p, \pi(z'')) = |z - z'' + \lambda|$ et $d(p', \pi(z'')) = |z' - z'' + \lambda'|$. Enfin $d(p, p') = 0$ implique l'existence d'un λ tel que $0 = |z - z' + \lambda|$ ce qui montre bien que d induit une distance sur l'espace quotient $\mathcal{S} = \mathbb{C}/\Lambda$ (et celui-ci est donc bien séparé).

- b) Construction des cartes holomorphes sur \mathcal{S} . Fixons n'importe quel réel positif $\rho < \frac{1}{4} \min\{|\lambda|, \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application de projection π restreinte à la boule ouverte $B(z, \rho)$ est une isométrie car d'une part $d(\pi(z+w), \pi(z+w')) = \inf_{\lambda \in \Gamma} |w - w' + \lambda| \leq |w - w'| \leq 2\rho$ pour tout $|w|, |w'| < \rho$. Et d'autre part si λ est un élément de Γ non nul, alors $|\lambda| > 4\rho$ et donc $|w - w' + \lambda| > 2\rho$, ce qui implique bien $d(\pi(z+w), \pi(z+w')) = |w - w'|$. En particulier $\pi(B(z, \rho))$ est la boule de centre $\pi(z)$ et de rayon ρ dans \mathbb{C}/Λ .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $U_z := \pi(B(z, \rho)) \subseteq \mathcal{S}$ et on définit $\varphi_z: U_z \rightarrow B(z, \rho) \subseteq \mathbb{C}$ comme l'inverse de π . Alors $\mathfrak{A} = \{(U_z, \varphi_z)\}_{z \in \mathbb{C}}$ nous donne un atlas sur \mathcal{S} .

- c) \mathfrak{A} est un atlas holomorphe. Soient donc deux points $z, z' \in \mathbb{C}$. On doit vérifier que l'application $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}$ qui est définie sur $U_{zz'} := \varphi_z(U_z \cap U_{z'})$ est holomorphe. Lorsque $U_{zz'} \neq \emptyset$, il n'y a rien à démontrer/ Sinon un point w dans l'intersection vérifie $|w - z| < \rho$ et $|w - z' + \lambda| < \rho$ pour un $\lambda \in \Gamma$, et donc $B(z, \rho) \cap B(z' - \lambda, \rho) \subseteq U_{zz'}$. On a en fait égalité $U_{zz'} = B(z, \rho) \cap B(z' - \lambda, \rho)$ car lorsque $w' \in \mathbb{C}$ vérifie $|w' - z| < \rho$ et $|w' - z' + \lambda'| < \rho$ alors $|\lambda' - \lambda| < |\lambda' + w' - z' + z' - w' - \lambda| < 2\rho$ et par suite $\lambda' = \lambda$.

L'application $\varphi_{z'} \circ \varphi_z^{-1}$ est donnée par la translation $w \mapsto w + \lambda$ qui est bien holomorphe.

Notons que l'application π est évidemment holomorphe. En effet pour $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé, $\varphi_{z_0} \circ \pi$ est l'identité.

2) On se donne $q \in \mathbb{C}/\Lambda$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $\pi(w) = q$. On note $\tau(p) = p + q$, $T(z) := z + w$ de telle sorte que $\pi(T(z)) = \pi(z) + q = \tau(\pi(z))$. Au voisinage d'un point $p_0 := \pi(z_0)$, l'application $\varphi_{z_0+w} \circ \tau \circ \varphi_{z_0}^{-1}$ s'identifie à T qui est bien holomorphe. \square

1.1.1 Sous-variété affine

Prenons $P(x, y) = \sum a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$ non constant.

Théorème 1.1.5. On suppose que $\{p = 0\} \cap \{\frac{\partial P}{\partial X} = 0\} \cap \{\frac{\partial P}{\partial Y} = 0\} = \emptyset$. Alors $\{p = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ peut être muni d'une structure de surface de Riemann telle que $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$ sont holomorphes.

Remarque. En général $\{P = 0\}$ peut ne pas être connexe, comme par exemple lorsque $P(x, y) = x(xy - 1)$. On peut cependant montrer que $\{P = 0\}$ est connexe par arcs dès que le polynôme est irréductible, c'est-à-dire lorsqu'il ne peut pas se décomposer en un produit de deux polynômes non constants.

Remarque. Fixons P un polynôme à deux variables non constant. On peut alors montrer que l'ensemble des nombres complexes $c \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $P(x, y) = c$, et $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$ est fini.

Remarque. Si $P = Q^2$, $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$, alors $\{P = 0\} \subseteq \{\frac{\partial P}{\partial X} = 0\} \cup \{\frac{\partial P}{\partial Y} = 0\}$. Si P est irréductible en $\mathbb{C}[X, Y]$, alors $\{P = 0\} \cap \{\frac{\partial P}{\partial X} = 0\} \cap \{\frac{\partial P}{\partial Y} = 0\}$ est fini.

Démonstration. On utilise le théorème de fonction implicite, version analytique.

- 1) Si $P(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) \neq 0$, alors $\exists U$ voisinage de (x_0, y_0) et $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que $(x_0, y_0) = (\Phi(y_0), y_0)$ sur $U \cap \{P = 0\}$. Donc $\Phi^{-1} \circ \pi_1|_U = id_U$ et $\pi_1|_U \circ \Phi^{-1} = id_{\Phi(\pi_1(U))}$. Alors $(U, \pi_1|_U)$ est une charte.
- 2) Si $P(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial X}(x_0, y_0) = 0$, alors $\frac{\partial P}{\partial Y} \neq 0$. De même, $\exists V$ voisinage de (x_0, y_0) , $(V, \pi_2|_V)$ est une charte.

Dans $U \cap V$, $\pi_1|_U \circ (\pi_2|_V)^{-1} = \Phi$ et $\pi_2|_V \circ (\pi_1|_U)^{-1} = \tilde{\Phi}$.

Montrons le théorème de fonction implicite, version analytique. Soit $P: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $P = Q + iR$, $Q(\mathbb{C}^2)$ et $R(\mathbb{C}^2)$ sont réelles. Alors

$$dP = \begin{pmatrix} \frac{dQ}{dx_1} & \frac{dR}{dx_1} \\ \frac{dQ}{dx_2} & \frac{dR}{dx_2} \\ \frac{dQ}{dy_1} & \frac{dR}{dy_1} \\ \frac{dQ}{dy_2} & \frac{dR}{dy_2} \end{pmatrix}$$

Comme $\begin{vmatrix} \frac{dQ}{dx_1} & \frac{dR}{dx_1} \\ \frac{dQ}{dx_2} & \frac{dR}{dx_2} \end{vmatrix} = |\frac{\partial P}{\partial x}|^2$, $\begin{vmatrix} \frac{dQ}{dy_1} & \frac{dR}{dy_1} \\ \frac{dQ}{dy_2} & \frac{dR}{dy_2} \end{vmatrix} = |\frac{\partial P}{\partial y}|^2$, on sait $\text{rang}(dP)=2$. On peut donc appliquer le théorème de fonction implicite. Et comme $0 = \frac{\partial}{\partial x} P(x, \theta(x)) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial P}{\partial y}(x, \theta(x)) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$, d'où θ holomorphe. \square

Exemple 1.1.2. $P(x, y) = y^2 - (x^3 + Ax + B)$, $\{p = 0\} \cap \{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0\} = \emptyset \Leftrightarrow 4A^3 + 27B^2 \neq 0$. Si $4A^3 + 27B^2 \neq 0$, alors $\{p = 0\}$ est une surface de Riemann.

1.2 Uniformisation et construction d'objet holomorphe

1.2.1 Théorème de Koebe-Poincaré

Il donne une classification des surfaces de Riemann.

Théorème 1.2.1 (Koebe-Poincaré). Les seules surfaces de Riemann simplement connexes sont \mathbb{D} , \mathbb{C} et $\hat{\mathbb{C}}$.

Remarque.

- \mathbb{D} et \mathbb{C} ne sont pas compacts.
- Il existe une unique structure de surface de Riemann sur la sphère S^2 .

1.2.2 Quotient de surface de Riemann

Buts :

- obtenir plus d'exemples.
- obtenir une classification à partir du théorème de Koebe-Poincaré et la théorie des revêtements.

Soit X surface de Riemann, G groupe, l'action de G sur X est holomorphe. On muni X/G la topologie quotient.

Attention : En général, X/G n'est pas séparée même si X est séparée.

Exemple 1.2.1. \mathbb{Z}^2 agit sur G par translation. Soit $w \in \mathbb{C}$, $(n, m) \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + n + mw$.

- On a traité le cas $\text{Im}(w) \neq 0$, et munit le quotient d'une structure de surface de Riemann.
- Lorsque $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ n'est pas séparée.

Définition 1.2.1. G agit proprement discontinuément sur X si $\forall x, \forall x', \exists U_x$ voisinage ouvert de x , $\exists U_{x'}$ voisinage ouvert de x' , tels que $\{g \in G \mid (g.U_x) \cap U_{x'} \neq \emptyset\}$ est fini.

Remarque. Lorsque X est localement compact, la condition est équivalente à

$$\Leftrightarrow \forall K, L \text{ compacts, } \{g \in G \mid (g.K) \cap L \neq \emptyset\} \text{ est fini.}$$

$$\Leftrightarrow \forall K \text{ compacts, } \{g \in G \mid (g.K) \cap K \neq \emptyset\} \text{ est fini.}$$

Théorème 1.2.2. G agit proprement discontinuément et holomorphiquement sur \mathcal{S} surface de Riemann. Alors il existe une (unique) structure de surface de Riemann sur \mathcal{S}/G telle que $\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ est holomorphe. De plus,

- 1) $V \subseteq \mathcal{S}/G$ ouvert, $\varphi: V \rightarrow \mathcal{S}'$ est holomorphe si et seulement si $f \circ \pi: \pi^{-1}(V) \rightarrow \mathcal{S}$ est holomorphe.
- 2) $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ est holomorphe et G -equivariant ($\forall g \in G, h(g.x) = h(x)$), alors il existe $\bar{h}: \mathcal{S}/G \rightarrow \mathcal{S}'$ holomorphe tel que $\bar{h} \circ \pi = h$.

Exemple 1.2.2. $G = \mathbb{Z}$ agit sur \mathcal{S} , l'action est déterminée par l'application $\varphi(p) = 1.p$

• $\mathcal{S} = \mathbb{C}$, $\varphi(z) = z + 1$, l'action est donc proprement discontinue. Posons $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^{2\pi iz}$ un morphisme de groupe surjective et holomorphe. Comme $\ker p = \mathbb{Z} = G.0$, par le thm, $\exists \bar{p}: \mathbb{C}/\langle z + 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}^*$, $\bar{p} \circ \pi = p$. Notons que \bar{p} est injectif. Comme p est surjectif, \bar{p} l'est aussi. Donc $\mathbb{C}/\langle z + 1 \rangle \simeq \mathbb{C}^*$.

• $\mathcal{S} = \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \lambda z$ ($\lambda \neq 0$, $\lambda^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{Z}$).

Si $|\lambda| = 1$, l'action n'est pas proprement discontinue.

Si $|\lambda| \neq 1$, l'action sur \mathbb{C} n'est pas proprement discontinue, mais l'action sur \mathbb{C}^* est proprement discontinue. Choisissons $\mu \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda = e^{2\pi i\mu}$. On a une projection holomorphe :

$$q: \mathbb{C}/\langle z + 1 \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle \lambda z \rangle, [z] \mapsto [e^{2\pi iz}].$$

On note que $\ker q = \mathbb{Z} \cdot [\mu]$, alors par le théorème, $\mathbb{C}^*/\langle \lambda z \rangle$ est biholomorphe à \mathbb{C}/Λ , où $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\mu$.

Démonstration. On fixe une famille de cartes holomorphes centrées en $p : (U_p, \varphi_p)$, $\varphi_p: U_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(0, 1) \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi_p(p) = 0$.

a) L'espace \mathcal{S}/G est séparé. Notons $\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$ la projection canonique. Montrons d'abord que \mathcal{S}/G est séparée pour la topologie quotient. Pour cela prenons deux points $q = \pi(p) \neq q' = \pi(p')$. En particulier les deux points p et p' de \mathcal{S} sont distincts. Fixons $n > 0$ assez grand pour que $\overline{\mathbb{D}(0, 1)}$ soit contenu dans $\varphi_p(U_p)$. On pose $U_{p,n} := \varphi_p^{-1}(\mathbb{D}(0, \frac{1}{n}))$, puis $O_n(p) := \cup_{g \in G} g(U_{p,n})$ qui est alors un ouvert G -invariant contenant p . Comme $O_n(p) = \pi^{-1}(\pi(O_n(p)))$, la partie $\pi(O_n(p)) \subseteq \mathcal{S}/G$ est un voisinage ouvert de $q = \pi(p)$. On construit de même les ouverts $U_{p',n}$, $O_n(p')$ qui sont des voisinages de p' , et $\pi(O_n(p'))$ qui est un voisinage de q' .

Pour voir que \mathcal{S}/G est séparée, il suffit de montrer que les deux ouverts $\pi(O_n(p))$ et $\pi(O_n(p'))$ ne s'intersectent pas au moins pour $n > 0$ assez grand. Supposons par contradiction que $\pi(O_n(p)) \cap \pi(O_n(p'))$ soit non vide pour tout $n > 0$. On obtient une suite de points $q_n \in U_{p,n} \cap O_n(p')$, et donc une suite d'éléments $g_n \in G$ tels que $g_n \cdot q_n \in U_{p',n}$. Comme l'action est proprement discontinue, et que g_n appartient à l'ensemble $\{g \in G, g(\overline{U_{p,n}}) \cap \overline{U_{p',n}} \neq \emptyset\}$, on peut extraire une sous-suite telle que $g_n = g$ est un élément fixe de G . En passant à la limite, on en déduit que $g \cdot p = p'$ et donc $\pi(p) = \pi(p')$, ce qui contredit notre hypothèse.

Il nous faut maintenant construire des cartes holomorphes. Nous allons tout d'abord traiter le cas sans point fixe pour lequel la démonstration est un peu plus simple.

b) Constructions des cartes holomorphes lorsque l'action est libre. Dans cette partie, nous supposons donc que pour tout $g \in G$ différent de l'identité, le lieu des points fixes de g est vide, i.e. $g.x = x$ implique $g = \text{id}$.

Fixons $p \in \mathcal{S}$. On va tout d'abord remplacer U_p par un ouvert plus petit $U'_p \subseteq U_p$ de telle sorte que $g(U'_p) \cap U'_p \neq \emptyset$ dès que $g \neq \text{id}$. Ceci est toujours possible. Sinon on pourrait trouver une suite de points $p_n \rightarrow p$ et des éléments $g_n \neq \text{id}$ tels que $g_n \cdot p_n \rightarrow p$. L'action de G étant proprement discontinue, on peut supposer comme à l'étape a) que $g_n = g \neq \text{id}$ (quitte à extraire une sous-suite), et on obtiendrait $g \cdot p = p$ ce qui contredit le fait que G agit librement.

Pour simplifier les notations on notera encore $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{C}$ les cartes que l'on vient de construire. Le point est que la restriction de l'application $\pi: U_p \rightarrow V_p := \pi(U_p) \subseteq \mathcal{S}/G$ est maintenant un homéomorphisme. Pour le voir, il suffit de vérifier que l'application est injective, ce qui revient exactement à la propriété $g(U_p) \cap U_p \neq \emptyset$ dès que $g \neq \text{id}$. Notons $\pi_p^{-1}: V_p \rightarrow U_p$ l'inverse de cette application, et $\psi_p := \varphi_p \circ \pi_p^{-1}: V_p \rightarrow \mathbb{C}$. Nous allons montrer que la famille (V_p, ψ_p) est un atlas holomorphe sur \mathcal{S}/G .

Soient donc p, p' deux points de \mathcal{S} tels que $V_p \cap V_{p'} \subseteq \mathcal{S}/G$ soit non vide. On cherche à montrer que l'application $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}: \psi_p(V_p \cap V_{p'}) \rightarrow \psi_{p'}(V_{p'})$ est holomorphe. Remarquons tout d'abord que

$$\pi_p^{-1}(V_p \cap V_{p'}) = U_p \cap \pi^{-1}(V_{p'}) = U_p \cap \bigcup_{g \in G} g(U_{p'}),$$

et que de plus les ouverts $g(U_{p'})$ sont disjoints deux à deux. Comme $\psi_p(V_p \cap V_{p'}) = \varphi_p \pi_p^{-1}(V_p \cap V_{p'})$, il suffit de voir que $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ est holomorphe sur chaque ouvert $\varphi_p(U_p \cap g(U_{p'}))$.

Or sur $\pi(U_p \cap g(U_{p'}))$, on a $\pi_p^{-1} = g^{-1} \cdot \pi_{g(p')}^{-1} = g^{-1} \cdot \pi_p^{-1}$, et donc

$$\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}(z) = \varphi_{p'} \circ \pi_{p'}^{-1} \circ \pi \circ \varphi_p^{-1}(z) = \varphi_{p'}(g^{-1} \cdot \varphi_p^{-1}(z)),$$

qui est bien holomorphe car G agit par transformations holomorphes sur \mathcal{S} .

- c) Construction de cartes holomorphes lorsque l'action possède éventuellement des points fixes. Comme G agit discontinûment le sous-groupe H de G des éléments tels que $g \cdot p = p$ pour tout p est un groupe fini distingué et on obtient une action fidèle de G/H sur \mathcal{S} induite par celle de G . Dans la suite on remplacera donc G par G/H et on supposera que l'action de G sur \mathcal{S} est fidèle.

Le premier point à vérifier est que l'ensemble de points fixes de l'action

$$F = \{p \in \mathcal{S}, \exists g \neq e, g \cdot p = p\}$$

est discret dans \mathcal{S} . Soit $p_n \in F \rightarrow p$, $\exists g_n \neq e$, $g_n.p_n = p$. "Proprement discontinue" appliqué $F \Rightarrow$ pour n assez grand, $g_n = g$. Comme $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, $q \mapsto g.q$ est holomorphe et admet un ensemble de points fixes qui procède un point adhérent, donc $g = e$ (principe de zéros isolées). Donc F est discret.

Pour construire maintenant un atlas holomorphe. on va définir pour tout $p_0 \in \mathcal{S}$ une carte holomorphe $\psi_{p_0}: V_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$ centrée en $\pi(p_0) \in \mathcal{S}/G$. Si $p_0 \notin F$, la construction est identique à celle que l'on a faite dans le cas précédent. Nous pouvons donc supposer que $p_0 \in F$. Le point clé est le lemme 1.2.3 ci-dessous qui nous permet de se ramener à traiter l'action d'un groupe fini de rotations dans le plan. Voyons ceci en détails.

Notons G_{p_0} le stabilisateur de p_0 , c'est-à-dire le sous-groupe de G qui fixe p_0 . C'est un groupe fini (pas nécessairement distingué). On choisit une carte holomorphe $\varphi_{p_0}: U_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$. Quitte à remplacer U_{p_0} par un ouvert plus petit, on peut supposer que $g(U_{p_0}) \cap U_{p_0} \neq \emptyset$ implique $g \in G_{p_0}$. On peut aussi supposer que U_{p_0} est G_{p_0} -invariant quitte à le remplacer par $\cap_{g \in G_{p_0}} g(U_{p_0})$.

On obtient donc une action du groupe fini G_{p_0} sur l'ouvert $\Omega_{p_0} = \varphi_{p_0}(U_{p_0})$ du plan complexe en posant $g.z = \varphi_{p_0}(g.\varphi_{p_0}^{-1}(z))$. Cette action fixe $0 \in \mathbb{C}$.

Lemme 1.2.3 (Cartan). Il existe un biholomorphisme local $h: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ et un morphisme de groupe $\lambda(g): G_{p_0} \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ tel que

$$h(g.h^{-1}(z)) = \lambda(g)z.$$

Démonstration du lemme Pour simplifier les notations, on écrit $g.z := g(z)$. On pose alors

$$h(z) := \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(z)}{g'(0)}.$$

La dérivée en 0 de h est égale à $h'(0) = 1$, donc h est un biholomorphisme local. Pour tout $g_0 \in G$, on obtient enfin

$$h(g_0(z)) = \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(g_0(z))}{(gg_0)'(0)} g'_0(0) = g'_0(0) \times \frac{1}{k} \sum_{g \in G_{p_0}} \frac{g(z)}{g'(0)} = g'_0(0)h(z)$$

car $g(g_0(z)) = (gg_0)(z)$ et $(gg_0)'(0) = g'(0) \times g'_0(0)$.

Comme G_{p_0} est fini, ce lemme implique en particulier que λ est à valeurs dans S^1 . L'action étant fidèle, λ est un isomorphisme, et donc G_{p_0} est isomorphe au groupe des racines k -ième de l'unité pour un certain $k \geq 2$.

On remplace maintenant φ_{p_0} par $h \circ \varphi_{p_0}$ et U_{p_0} par $(h \circ \varphi_{p_0})^{-1}(\mathbb{D}(0, \varepsilon))$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. On se retrouve finalement dans la situation suivante : $\varphi_{p_0} : U_{p_0} \rightarrow \mathbb{C}$ est une carte holomorphe centrée en p_0 , U_{p_0} est G_{p_0} -invariant, $\varphi_{p_0}(U_{p_0}) = \mathbb{D}(0, \varepsilon)$, $\varphi_{p_0}(g \cdot \varphi_{p_0}^{-1}(z)) = \lambda(g)z$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \varepsilon)$, et $\{\lambda(g)\}_{g \in G_{p_0}} = \{\exp(\frac{2i\pi l}{k}), 1 \leq l \leq k\}$.

On définit alors $V_{p_0} := \pi(U_{p_0})$ et on pose $\psi_{p_0}(\pi(p)) := \varphi_{p_0}(p)^k$. L'application ψ_{p_0} est bien définie car $\pi(p) = \pi(p')$ avec $p, p' \in U_{p_0}$ implique l'existence d'un $g \in G_{p_0}$ tel que $g \cdot p = p'$ et donc d'un entier l tel que $\exp(\frac{2i\pi l}{k})\varphi_{p_0}(p) = \varphi_{p_0}(p')$. Le même argument montre plus précisément que ψ_{p_0} est une bijection de V_{p_0} sur $\mathbb{D}(0, \varepsilon^k)$, et qu'elle est de plus continue. En la restreignant sur les préimages des compacts $\overline{\mathbb{D}(0, \eta)}$ avec η croissant vers ε^k , on voit que ψ_{p_0} est en réalité un homéomorphisme de V_{p_0} sur $\mathbb{D}(0, \varepsilon^k)$.

Pour conclure, il nous fait vérifier que les changements de cartes $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ sont holomorphes. Cette application est définie sur l'ouvert $\psi_p(V_p \cap V_{p'})$.

Notons que par construction $\psi_p(V_p)$ est un disque, et que sur tout secteur \mathbb{S} ouvert d'angle $\frac{2\pi}{k}$ (où k est le cardinal du stabilisateur de p), on peut écrire $\psi_p(z) := \pi(\varphi_p^{-1}(z^{1/k}))$.

On a de plus

$$U_p \cap \pi^{-1}(V_{p'}) = \bigcup_{g \in G/G_{p'}} U_p \cap g(U_{p'}),$$

où $g \in G/G_{p'}$ signifie que g parcourt une partie de G intersectant chaque classe (à droite) de G modulo $G_{p'}$ exactement une fois, et cette union est disjointe.

Dans $\mathbb{S} \cap \psi_p(\pi(g(U_{p'})))$, on a donc

$$\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}(z) = \psi_{p'} \circ \pi(\varphi_p^{-1}(z^{1/k})) = (\varphi_{p'}(g \cdot \varphi_p^{-1}(z^{1/k})))^{k'},$$

qui est bien holomorphe (où k' est le cardinal du stabilisateur de p'). En recouvrant $\psi_p(V_p)$ par des secteurs ouverts d'angle $\frac{2\pi}{k}$, on en déduit tout d'abord que $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ est holomorphe dans tout $\psi_p(V_p \cap V_{p'})$ privé de l'origine. Comme $\psi_{p'}$ est à valeurs dans un borné de \mathbb{C} par construction, l'application $\psi_{p'} \circ \psi_p^{-1}$ s'étend holomorphiquement même en p (on peut aussi remarquer que par construction le seul cas où $V_{p'}$ contient p est lorsque p' est dans l'orbite de p).

Avant d'attaquer la dernière partie de la démonstration, résumons les propriétés de la structure de surface de Riemann que nous avons construite sur \mathcal{S}/G .

A1) Le stabilisateur G_p de tout point $p \in \mathcal{S}$ est cyclique.

A2) Pour tout $p \in \mathcal{S}$, il existe une carte holomorphe $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{C}$ centrée sur p , et une autre carte holomorphe $\psi_p: V_p \rightarrow \mathbb{C}$ centrée sur $\pi(p)$, telles que $\psi_p \circ \pi \circ \varphi_p^{-1}(z) = z^k$ où k est l'ordre de G_p .

A3) L'ensemble $F \subseteq \mathcal{S}$ des points dont le stabilisateur n'est pas trivial est un ensemble G -invariant et discret. Son image par π dans \mathcal{S}/G l'est encore. En effet, soit $p_n \rightarrow p$ dans $\pi(F)$, fixons une préimage de p , notée $q \in F$, et un voisinage ouvert de q telle que $V \cap F = \{q\}$. alors $\cup_{g \in G} g.V = \pi^{-1}(\pi(\cup_{g \in G} g.V))$, donc $\pi(\cup_{g \in G} g.V) = \pi(V)$ est ouvert, on peut donc trouver $\{p_{n_k}\} \subseteq \pi(V)$. Si p_{n_k} à une préimage q_k dans $g_k.V$, alors $g_k^{-1}.q_k \in V$. Mais $g_k^{-1}.p_k \in F$, d'où une contradiction avec le choix de V .

d) Application holomorphe sur \mathcal{S}/G .

Prenons maintenant V un ouvert de \mathcal{S}/G (i.e. $\pi^{-1}(V)$ est ouvert dans \mathcal{S}) et $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors $f \circ \pi$ est bien holomorphe. Réciproquement, soit $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ une application telle que $f \circ \pi$ est holomorphe, et $p \in \mathcal{S}$. En un point $p \notin F$, A2) montre que π est un biholomorphisme local et donc $f = (f \circ \pi) \circ \pi^{-1}$ est holomorphe en $\pi(p)$. Comme $\pi(F)$ est discret par A3), il suffit de voir que f est continue en tout point de $\pi(F)$ pour conclure qu'elle est holomorphe en ces points (car toute fonction holorphe bornée sur \mathbb{D}^* s'étend à l'origine). Mais la continuité de f en $\pi(p)$ résulte du fait que la restriction de π à la carte U_p est continue et vérifie $\pi^{-1}(\pi(p)) \cap U_p = \{p\}$.

Enfin supposons que $h: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ une application holomorphe G -équivariante, i.e. $h(g.p) = h(p)$ pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $g \in G$. Pour $q \in \mathcal{S}/G$, on choisit $p \in \pi^{-1}\{q\}$ et on pose $\bar{h}(q) := h(p)$. Cette définition ne dépend pas du choix de p car pour un autre choix $p' \in \pi^{-1}\{q\}$ on peut trouver un élément $g \in G$ vérifiant $g.p = p'$ et $h(p') = h(g.p) = h(p)$.

L'application ainsi définie est continue, et holomorphe en dehors de $\pi(F)$ donc partout. Les détails de la démonstration sont identiques aux arguments précédents.

□

Remarque. La démonstration donne des informations précises sur la structure locale de l'application $\pi: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}/G$. En effet, supposons que l'action de G sur \mathcal{S} soit fidèle.

Lorsque le stabilisateur de $p \in \mathcal{S}$ est trivial (i.e. réduit au neutre de G) alors π est un biholomorphisme local de (\mathcal{S}, p) sur $(\mathcal{S}/G, \pi(p))$.

Sinon le stabilisateur de p est fini cyclique d'ordre k , et dans des coordonnées holomorphes adéquates centrées en p et $\pi(p)$, on peut écrire $\pi(z) = z^k$.

1.2.3 Théorie de Weierstrass (fonctions \mathfrak{P})

On fixe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(\omega) > 0$. On note $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ et note $P = [0, 1] + \omega[0, 1]$ paralléogramme fondamental. Alors $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \lambda + P = \mathbb{C}$.

But : construire des fonctions holomorphes de \mathbb{C}/Λ sur $\hat{\mathbb{C}}$. Il est équivalent de construire des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} et invariantes par translation par 1 et ω .

Définition 1.2.2. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe est *elliptique* si $f(z + \lambda) = f(z)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

On fait la construction pas à pas.

- 1) Si f est elliptique et holomorphe, alors f est bornée donc f est constante. En effet, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exists z' \in P$ tel que $f(z) = f(z')$. Donc $\sup_{\mathbb{C}} |f| = \sup_P |f| < \infty$. Une autre démonstration : Si f est Λ -invariant, donc $\exists \bar{f}: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Or \mathbb{C}/Λ est compact, $\bar{f}(\mathbb{C}/\Lambda)$ est compact. Par principe du maximum, on sait que \bar{f} est constante, donc f est constante.

- 2) Fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$G_k = \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^k}$$

Alors G_k converge si $k \geq 3$. En effet, on a

$$c(|n| + |m|) \leq |\lambda| = |n + m\omega| \leq (|n| + |m|)(1 + |\omega|),$$

c'est-à-dire $|x + y\omega| \sim |x| + |y|$. Donc $G_k = \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^k} \leq c \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(|n| + |m|)^k}$.

Mais $\sum \frac{1}{(|n| + |m|)^k} < \infty \Leftrightarrow \int \frac{1}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^{\frac{k}{2}}} dx dy < \infty \Leftrightarrow \int \frac{r dr}{r^k} < \infty \Leftrightarrow k > 2$.

- 3) Posons

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

\mathfrak{P} est bien définie, méromorphe sur \mathbb{C} , aussi elliptique et paire sur $\mathbb{C} - \Lambda$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right| &= \left| \frac{\lambda^2 - (z - \lambda)^2}{(z - \lambda)^2 \lambda^2} \right| \\ &= \left| \frac{-z^2 + 2\lambda z}{(z - \lambda)^2 \lambda^2} \right| \\ &\leq \frac{c(z)}{|\lambda|^3} \end{aligned}$$

qui converge bien. Au voisinage de 0, $\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + h(z)$, avec h holomorphe en 0

et $h(0) = 0$. De même, on sait $\{\text{pôles de } \mathfrak{P}\} = \Lambda$, et tout $\lambda \in \Lambda$ est un pôle d'ordre 2. Montrons que \mathfrak{P} est paire :

$$\mathfrak{P}(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{(-z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{(z + \lambda)^2} - \frac{1}{(-\lambda)^2} = \mathfrak{P}(z).$$

Montrons que \mathfrak{P} est elliptique. Comme $\mathfrak{P}(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\lambda)^3}$ une fonction méromorphe sur \mathbb{C} et impaire, on sait $\mathfrak{P}'(z)$ est elliptique, donc $\mathfrak{P}(z + \lambda) - \mathfrak{P}(z)$ est constant pour $\lambda \in \Lambda$.

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\mu \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z - \mu)^2} - \frac{1}{\mu^2} \right)$$

en 0, $\mathfrak{P} = \frac{1}{z^2} + h(z)$, avec $h(0) = 0$ par symétrie. Ainsi

$$\mathfrak{P}(z + \lambda) = \frac{1}{(z + \lambda)^2} + \sum_{\mu \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z + \lambda - \mu)^2} - \frac{1}{\mu^2} \right)$$

en 0,

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(z) &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(z + \lambda)^2} + \sum_{\mu \in \Lambda^* \setminus \{\lambda\}} \left(\frac{1}{(z + \lambda - \mu)^2} - \frac{1}{\mu^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(z + \lambda)^2} + \sum_{\mu \in \Lambda^* \setminus \{\lambda\}} \frac{1}{(z + \mu)^2} - \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

Donc en 0, $\mathfrak{P}(z + \lambda) = \frac{1}{z^2} + \tilde{h}(z)$ avec $\tilde{h}(0) = 0$. Donc $\mathfrak{P}(z + \lambda) - \mathfrak{P}(z) = 0$.

- 4) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ elliptique méromorphe. Note $P = [0, 1] + \omega[0, 1]$ le parallélogramme fondamental, alors $\partial P \cap \{f = 0\} \cap \{f = \infty\} = \emptyset$.

$$\sum_{p \in P} \text{res}_p(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} f dz = 0$$

par périodicité. Ainsi,

$$\int_{\partial P} \frac{f'}{f} dz = 0 = \sum_{p \in P} m_p$$

Ici $m_p := \text{ord}_p(f)$, m_i est positif si p est un zéro de f , et négatif si p est un pôle de f . Posons

$$I = \int_{\partial P} z \frac{f'}{f} dz = I_1 + I_2$$

où

$$I_1 = \int_{[0,1]} z \frac{f'}{f} dz - \int_{[0,1]} (z + \omega) \frac{f}{f'} dz = \omega \int_{[0,1]} \frac{f'}{f} dz$$

$$I_2 = - \int_{[0,\omega]} z \frac{f}{f'} dz + \int_{[0,\omega]} (1 + z) \frac{f}{f'} dz = \int_{[0,\omega]} \frac{f}{f'} dz$$

Donc $I = \omega \int_{[0,1]} \frac{f'}{f} dz + \int_{[0,\omega]} \frac{f}{f'} dz$. Ainsi, $I = 2i\pi \sum m_i z_i$, où z_i sont les pôles ou zéro de f et m_i est $\text{ord}_{z_i}(f)$.

5) Montrons

$$(\mathfrak{P}')^2 = 4\mathfrak{P}^3 - 60G_4\mathfrak{P} - 140G_6.$$

Posons $g(z) = (\mathfrak{P}')^2 - 4\mathfrak{P}^3 + 60G_4\mathfrak{P} + 140G_6$ une fonction elliptique, paire et avec ses pôles dans Λ . On va montrer que g est holomorphe au voisinage de 0 et $g(0) = 0$ qui implique que $g \equiv 0$.

Comme

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2},$$

on a

$$\mathfrak{P}' = -\frac{2}{z^3} - 2 \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{(z - \lambda)^3} = -\frac{2}{z^3} + \alpha z + \beta z^3 + \dots$$

Par un calcul direct, on sait $\frac{1}{(\lambda - z)^3} = \frac{1}{\lambda^3} (1 + \frac{3z}{\lambda} + 10\frac{z^3}{\lambda^3} + \dots)$, on a

$$(\mathfrak{P}') = -\frac{2}{z^3} - 2(3zG_4 + 10z^3G_6 + \dots)$$

Donc

$$(\mathfrak{P}')^2 = \frac{4}{z^6} + \frac{24G_4}{z^2} + 80G_6 + G(z)$$

De même, on fait un développement de \mathfrak{P} et on obtient

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{z^2} + 5z^2G_4 - 11z^4G_6 + \dots$$

Donc g est holomorphe au voisinage de 0.

6) Montrons que \mathfrak{P}' admet trois zéro en $\frac{\omega}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+\omega}{2}$. Comme $\mathfrak{P}'(-z) = -\mathfrak{P}'(z) = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}(\frac{1}{2}) = -\mathfrak{P}'(-\frac{1}{2}) = -\mathfrak{P}'(-\frac{1}{2} + 1) = -\mathfrak{P}'(\frac{1}{2})$. Donc $\mathfrak{P}'(\frac{1}{2}) = 0$. De même, on a $\mathfrak{P}'(\frac{\omega}{2}) = \mathfrak{P}'(\frac{1+\omega}{2}) = 0$.

Prenons un parallélogramme avec 4 sommet : $-\varepsilon - i\varepsilon, 1 - \varepsilon - i\varepsilon, 1 + \omega - \varepsilon - i\varepsilon, \omega - \varepsilon - i\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. En intégrant $z \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}$ sur le bord de ce parallélogramme, par 4), on sait \mathfrak{P}' n'admet que ces trois zéros simples car \mathfrak{P} n'a qu'un pôle d'ordre 3 (l'origine)

dans ce parallélogramme. Posons $e_1 = \mathfrak{P}(\frac{1}{2})$, $e_2 = \mathfrak{P}(\frac{\omega}{2})$, $e_3 = \mathfrak{P}(\frac{1+\omega}{2})$. Montrons que e_1, e_2, e_3 sont 2 à 2 distincts, posons $g(z) = \mathfrak{P}(z) - e_1 = \mathfrak{P}(z) - \mathfrak{P}(\frac{1}{2})$. Notons que $g'(z) = \mathfrak{P}'(z)$, donc $\frac{1}{2}$ est un zéro d'ordre 2 de g et 0 est un pôle d'ordre 2 de g . Prenons aussi le parallélogramme avec 4 sommet : $-\varepsilon - i\varepsilon, 1 - \varepsilon - i\varepsilon, 1 + \omega - \varepsilon - i\varepsilon, \omega - \varepsilon - i\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. En intégrant de même $z \frac{g'}{g}$ sur le bord de ce parallélogramme, par 4), on sait g n'a qu'un zéro d'ordre 2, disons $\frac{1}{2}$. Donc $\mathfrak{P}(\frac{\omega}{2}) \neq \mathfrak{P}(\frac{1}{2})$, c'est-à-dire $e_1 \neq e_2$. De même on a $e_1 \neq e_3$, $e_2 \neq e_3$, cela signifie que

$$(\mathfrak{P}')^2 = 4(\mathfrak{P} - e_1)(\mathfrak{P} - e_2)(\mathfrak{P} - e_3)$$

7) Posons $P(x, y) = y^2 - 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = y^2 - 4x^3 + 60G_4x - 140G_6$, alors

$$C_P := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2, P(x, y) = 0\}$$

est une surface de Riemann, car $C_P \cap (\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0) = \emptyset$.

On met $F: \mathbb{C} - \Lambda \rightarrow C_P$, $z \mapsto (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$, F est donc holomorphe car \mathfrak{P} et \mathfrak{P}' sont holomorphes. Comme F est Λ -invariant, cela induit $f: \mathbb{C} - \Lambda/\Lambda = \mathbb{C}/\Lambda \setminus \{\text{un point}\} \rightarrow C_P$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \Lambda & \xrightarrow{F} & C_P \\ \downarrow \pi & \nearrow & \\ \mathbb{C} - \Lambda/\Lambda & & \end{array}$$

Théorème 1.2.4. f est un biholomorphisme.

Démonstration.

1. Surjectif : soit $(x, y) \in C_P$, on cherche $z \in \mathbb{C} - \Lambda$ tel que $\mathfrak{P}(z) = x, \mathfrak{P}'(z) = y$. Posons $g(z) = \mathfrak{P}(z) - x$, alors g est Λ -périodique sur P (le parallélogramme qu'on a défini dans 6)) avec un pôle d'ordre 2 (même chose qu'on a fait dans 6)), donc P admet deux zéros (avec multiplicité). Donc $\exists z \in \mathbb{C} - \Lambda$ tel que $\mathfrak{P}(z) = x$. Comme $(x, y) \in C_P$, on sait $y^2 = P(x)$. Mais $(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) \in C_P$, $(\mathfrak{P}'(z))^2 = P(\mathfrak{P}(z)) = P(x) = y^2$, soit $\mathfrak{P}'(z) = y$ (alors z marche), soit $\mathfrak{P}'(z) = -y$ (dans ce cas on note que $\mathfrak{P}'(z) = x, \mathfrak{P}'(-z) = y$).
2. Injectif : Si $\mathfrak{P}(z_1) = \mathfrak{P}(z_2), \mathfrak{P}'(z_1) = \mathfrak{P}'(z_2)$, posons $g(z) = \mathfrak{P}(z) - \mathfrak{P}(z_1)$.
 · Si $z_1 \in \{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}\}$, on sait $\mathfrak{P}'(z_1) = 0$. Mais $P \cap \{\mathfrak{P}' = 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}\}$, donc $z_2 \in \{\frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}\}$. Mais $\mathfrak{P}(\frac{1}{2}), \mathfrak{P}(\frac{\omega}{2}), \mathfrak{P}(\frac{1+\omega}{2})$ sont 2 à 2 distincts par 6), cela exige $z_1 = z_2$.

· Sinon $g(z) = \mathfrak{P}(z) - \mathfrak{P}(z_1)$ a exactement 2 zéros z_1 et $-z_1 + \omega + 1$. Si $z_2 \neq z_1$, on a $z_2 = -z_1 \bmod \Lambda$, mais $\mathfrak{P}'(z_1) \neq -\mathfrak{P}'(-z_1)$, contradiction.

□

Exemple 1.2.3. $P \in \mathbb{C}[x]$ de degré $d \geq 1$. P n'a que des racines simples. Posons

$$C = \{y^2 = P(x)\} \subseteq \mathbb{C}^2.$$

- 1) C peut être muni d'une structure de surface de Riemann.
- 2) $\pi: C \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x$ est holomorphe,

$$|\pi^{-1}(x)| = \begin{cases} 2 & \text{si } P(x) \neq 0 \\ 1 & \text{si } P(x) = 0 \end{cases}$$

Remarque. $\pi: C - \{(x, 0) \mid P(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{P = 0\}$ est un revêtement de degré 2.

Théorème 1.2.5. Il existe une surface de Riemann compacte connexe \mathcal{S} et $F \subseteq \mathcal{S}$ un ensemble fini tel qu'il y a un biholomorphisme de C à $\mathcal{S} - F$.

Démonstration. On fixe $R \gg 1$ tel que $\{P = 0\} \subseteq \{|x| \leq \frac{R}{2}\}$. Un tel R existe car l'ensemble $\{P = 0\}$ est fini. Alors $\pi: C \cap \pi^{-1}\{|x| > R\} \rightarrow \{|x| > R\} \simeq \{0 < |x'| < 1\}$ ($x \mapsto \frac{R}{x}$) est un revêtement de degré 2. Par théorie de revêtements, les revêtements de degré 2 de \mathbb{D}^* sont isomorphes à :

- 1) $\mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*, z \mapsto z^2$.
- 2) $\mathbb{D}^* \sqcup \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{D}^*$ revêtement trivial.

Si $\varphi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}^*$ est un revêtement connexe de degré 2, alors $\exists \psi: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{D}^*$ un biholomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{D}^* \\ & \searrow \varphi & \swarrow z \mapsto z^2 \\ & \mathbb{D}^* & \end{array}$$

Lemme 1.2.6. Le revêtement $\pi: C \cap \pi^{-1}\{|x| > R\} \rightarrow \{|x| > R\}$ est connexe si et seulement si d est impair. Ici d est le degré de P .

Démonstration. Prenons $\gamma(t) = Re^{2i\pi t}$ le cercle dans \mathbb{C}^2 , et relevons γ en un chemin dans $y^2 = P(x) = x^d + a_1x^{d-1} + \dots + a_d$. Supposons donc $\hat{\gamma}(t) = (Re^{2i\pi t}, y(t))$ le relèvement, alors

$$y(t)^2 = R^d e^{2i\pi dt} \left(1 + \frac{a_1}{Re^{2i\pi t}} + \dots + \frac{a_d}{R^d e^{2i\pi Rt}}\right) =: R^d e^{2i\pi dt} (1 + h(t))$$

On cherche à comprendre $y(1)$ en fonction de $y(0)$.

- Si $y(1) = y(0)$, alors c'est un revêtement trivial.
- Si $y(1) \neq y(0)$, alors c'est un revêtement connexe.

Observation. En choisissant R assez grand, on peut supposer que $|h(t)| \leq \frac{1}{2}$, donc $1 + h(t) > 0$ et on peut prendre le déterminant principal. Par continuité, $y(t) = R^{\frac{d}{2}} e^{i\pi dt} \sqrt{1 + h(t)}$ ou $y(t) = -R^{\frac{d}{2}} e^{i\pi dt} \sqrt{1 + h(t)}$.

- Si d pair $\Rightarrow y(1) = y(0) \Rightarrow$ un revêtement trivial.
- Si d impair $\Rightarrow y(1) \neq y(0) \Rightarrow$ un revêtement connexe.

Cela fini la preuve du lemme. \square

Montrons que C est connexe. Comme $\pi: C \setminus \{(x, 0) \mid P(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{P = 0\}$ est un revêtement de degré 2, prenons $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(x_0) = 0$. On prend $(x, y) \in C$, alors $y^2 = P(x)$. On choisit un chemin continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, tel que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_0$, et $\gamma([0, 1] \cap P^{-1}(0) = \emptyset$, c'est possible car $\{P = 0\}$ est discret dans \mathbb{C} . On relève alors $\gamma|_{[0, 1]}$ à C en un chemin $\hat{\gamma}: [0, 1] \xrightarrow{C^0} C$. Alors $\hat{\gamma}(0) = (x, y)$, et $\lim_{t \rightarrow 1} \hat{\gamma}(t) = (x_0, 0)$, car si on note $\hat{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, alors $\gamma_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} x_0$, $\gamma_2(t) = P(\gamma_1(t)) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0$. Cela provient d'un chemin de (x, y) à x_0 et C est donc connexe.

1. d impair. On définit $\mathcal{S} = C \cup \{\infty\}$. Pour construire la structure holomorphe sur \mathcal{S} , vu qu'on a déjà un atlas holomorphe sur \mathcal{S} , disons \mathfrak{A} , et la topologie sur \mathcal{S} (compactification d'Alexandrov : ouvert de \mathcal{S} est soit un ouvert de C , soit $\{\infty\} \cup C \setminus K$ où K compact). De plus, on a une carte holomorphe en $\{\infty\}$, comme ce qu'on a fait dans l'exemple de la sphère riemannne. Posons $U = \{|x| > R\} \cap C \cup \{\infty\}$, et $U^* = U \setminus \{\infty\}$, une carte holomorphe sur U^* est $h: U^* \rightarrow \mathbb{D}^*$, $h(x, y) = \frac{R}{x}$. On a montré que c'est un revêtement connexe de degré 2.

Par théorème des revêtements, $\exists \varphi$ homéomorphisme, tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* \\ & \searrow h & \swarrow z \mapsto z^2 \\ & \mathbb{D}^* & \end{array}$$

On pose $\varphi: U \rightarrow \mathbb{D}$,

$$\begin{cases} \varphi|_{U^*} = \varphi \\ \varphi(\infty) = 0 \end{cases}$$

φ est un homéomorphisme, car h s'étend continûment avec $h(\infty) = 0$. On doit vérifier que l'atlas $\mathfrak{A} \cap \{(U, \varphi)\}$ est holomorphe. Prenons $(V, \psi) \subseteq \mathfrak{A}$, $V \subseteq C$,

$V \cap U = V \cap U^*$. Soit $\psi(x, y) = x$, soit $\psi(x, y) = y$. Si $\psi(x, y) = x$, on doit regarder $\alpha(x) := \varphi \circ \psi^{-1}(x) = \varphi(x, y)$, donc $\alpha^2(x) = \frac{R}{x}$, localement on a $\alpha(x) = \pm \sqrt{\frac{R}{x}}$ holomorphe. Si $\psi(x, y) = y$, alors $\alpha(y) = \varphi(x, y)$, on a $\alpha^2(y) = \frac{R}{\eta(y)}$, où η est un difféomorphisme local obtenu par théorème 1.1.5. Donc localement $\alpha(y) = \pm \sqrt{\frac{R}{\eta(y)}}$ holomorphe.

2. d pair. On construit un biholomorphisme φ qui satisfait le diagramme commutative suivant :

$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{D}^* \times \{0, 1\} \\ & \searrow h & \swarrow pr_1 \\ & \mathbb{D}^* & \end{array}$$

Ici pr_1 est la projection à la première composante.

On définit $\mathcal{S} = C \cup \{\infty_0, \infty_1\}$ et posons 2 cartes $U_0 = \varphi^{-1}(\mathbb{D}^* \times \{0\}) \cup \{\infty_0\}$, $U_1 = \varphi^{-1}(\mathbb{D}^* \times \{1\}) \cup \{\infty_1\}$ et $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{D}$, $\varphi_i(x, y) = h$, $\varphi_i(\infty_i) = 0$, $i = 1, 2$. De même on peut montrer que \mathcal{S} est une surface de Riemann.

□

Exemple 1.2.4. $P(x) = 4x^3 - G_4x + 140G_6$, on a vu que $C = \mathbb{C}/\Lambda - \{\text{pt}\}$.

1.2.4 Construction d'objets holomorphes

Rappelle le théorème 1.2.1 : Les seules surfaces de Riemann simplement connexes sont $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, \mathbb{C} et $\hat{\mathbb{C}}$.

But : Utiliser la théorie des revêtements pour en déduire une classification de toutes les surfaces de Riemann.

Rappel. \mathcal{S} une surface de Riemann connexe. \mathcal{S} admet un revêtement universel (car \mathcal{S} est localement contractile) que l'on note $\hat{\mathcal{S}} : \pi: \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ tel que

- $\hat{\mathcal{S}}$ est simplement connexe.
- π est un revêtement.

Proposition 1.2.7. $\hat{\mathcal{S}}$ peut être muni d'une structure de surface de Riemann telle que π est holomorphe.

Attention : $S^2/\{\pm e\} = \mathbb{R}P^2$ n'admet pas de structure de surface de Riemann car l'action n'est pas holomorphe.

Démonstration. On construit un atlas holomorphe sur $\hat{\mathcal{S}}$. Comme $\hat{\mathcal{S}}$ est un revêtement de \mathcal{S} , pour tout point $p \in \mathcal{S}$, il existe U voisinage ouvert contient p et F discret tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

on prend donc un atlas $\mathfrak{A} = (U_i, \varphi_i)$ de \mathcal{S} avec U_1 assez petit pour que

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\sim} & U_i \times F_i \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U_i & \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{C} \end{array}$$

Les cartes de $\hat{\mathcal{S}}$ sont données par $V_{i,f} = h_i^{-1}(U_i \times \{f\})$ avec $f \in F_i$, et $\psi_{i,f} : V_{i,f} \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_{i,f} = \varphi_i \circ \pi$ qui est holomorphe et homéomorphe. Vérifions que les changements de cartes sont holomorphes. Posons (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) deux cartes et $(V_{i,f}, \psi_{i,f})$ et $(V_{j,g}, \psi_{j,g})$ respectivement des cartes correspondantes. Alors

$$\psi_{j,g} \circ \psi_{i,f}^{-1} = \varphi_j \circ \pi \circ \pi|_{U_i \times f}^{-1} \circ \varphi_i^{-1} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

est bien holomorphe. Enfin π est holomorphe et $\varphi_i \circ \pi \circ \psi_{i,f}^{-1} = id$. \square

Théorème 1.2.8. \mathcal{S} une surface de Riemann connexe, on est dans un et un seul des hypothèses suivantes :

- 1) \mathcal{S} est biholomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$.
- 2) \mathcal{S} est biholomorphe à \mathbb{C} , \mathbb{C}^* , \mathbb{C}/Λ (courbe elliptique). Dans ce cas $\hat{\mathcal{S}} \simeq \mathbb{C}$.
- 3) \mathcal{S} est biholomorphe au quotient de \mathbb{H} par un sous-groupe $G \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ qui agit proprement discontinueûment *sans point fixe* sur \mathbb{H} . $\hat{\mathcal{S}} \simeq \mathbb{H}$, $\mathcal{S} \simeq \mathbb{H}/G$.

Fait : Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, alors $\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, et on a bien $\text{Bihol}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid ad \neq bc, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

Terminologie. Dans le cas 2), on dit que \mathcal{S} est *hyperbolique*, et G est discret.

Remarque.

cas 1) \mathcal{S} admet une métrique Riemannienne de courbure $= +1$.

cas 2) \mathcal{S} admet une métrique Riemannienne de courbure $= 0$.

cas 3) \mathcal{S} admet une métrique Riemannienne de courbure $= -1$.

Démonstration. Soit $\pi: \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ le revêtement universel de \mathcal{S} . Par le théorème de Koebe-Poincaré, $\hat{\mathcal{S}}$ est $\hat{\mathbb{C}}$ ou \mathbb{C} ou \mathbb{H} . On note

$$\text{Aut}(\pi) := \{g: \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}} \text{ homéomorphe} : \pi \circ g = \pi\}$$

Lemme 1.2.9. $\text{Aut}(\pi)$ est un sous-groupe de $\text{Bihol}(\hat{\mathcal{S}})$, qui agit proprement discontinuément sur \mathcal{S} , sans points fixe (sauf id). On a biholomorphisme $\hat{\mathcal{S}}/\text{Aut}(\pi) \simeq \mathcal{S}$.

En fait, lemme 1.2.9 implique théorème 1.2.8 :

- 1) $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathbb{C}}$: $\text{Bihol}(\hat{\mathbb{C}}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{C}\} = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$. $\forall g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Bihol}(\hat{\mathbb{C}})$, g admet un point fixe dis que $c \neq 0$ ou $c = 0$ et $a \neq d$. Si $c = 0, a = d$, alors g admet un point fixe ∞ . Donc $\text{Aut}(\pi) = \{id\}$. Alors $\mathcal{S} = \hat{\mathbb{C}}$.
- 2) $\hat{\mathcal{S}} = \mathbb{C}$: $\text{Bihol}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}\}$. Si $a \neq 1$, elle admet un point fixe. Donc $\text{Aut}(\pi) \subseteq \{z \mapsto z + b\} \simeq (\mathbb{C}, +)$. Comme $\text{Aut}(\pi)$ agit proprement discontinuément sur \mathbb{C} , alors
 - i) $\text{Aut}(\pi) = \{id\} : \mathcal{S} = \mathbb{C}$.
 - ii) $\text{Aut}(\pi) \simeq \mathbb{Z}$ engendré par $z \mapsto z + b, b \neq 0$. Maintenant $\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}/\langle z \mapsto z + b \rangle \simeq \mathbb{C}^*$.
 - iii) $\text{Aut}(\pi)$ est un treillis et $\mathcal{S} = \mathbb{C}/\Lambda$.
- 3) $\hat{\mathcal{S}} = \mathbb{H}$: c'est compliqué. Voir plus tard un cas simple dans théorème 1.2.10.

Démonstration du lemme :

- Soit $g \in \text{Aut}(\pi)$. Notons $A = \{x \in \hat{\mathcal{S}} : g(x) = x\}$. On peut montrer que A est à la fois ouvert et fermé. Prenons un point $x' \in \hat{\mathcal{S}}$ qui est fixé par g , il suffit de voir que l'ensemble des points fixes est ouvert dans un voisinage de x' . On fixe un ouvert de trivialisatation U contenant $\pi(x')$, on écrit $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha \in F} U_\alpha$, et on note $\pi_\alpha^{-1} : U \rightarrow U_\alpha$ est l'inverse de π à valeurs dans U_α . La restriction de g à U_α est toujours de la forme $\pi_\beta^{-1} \circ \pi$. Si U_α contient x' et $g(x')$, il s'ensuit $\alpha = \beta$ et donc $g = id$ sur U_α . Comme $\hat{\mathcal{S}}$ est connexe, soit $g = id$, soit $A = \emptyset$.
- Montrons que l'action est proprement discontinue. Si $\exists K \subseteq \hat{\mathcal{S}}$ compact, tel que $\{g \in \text{Aut}(\pi) : gK \cap K \neq \emptyset\}$ est infini, alors comme K est compact et localement euclidien, $\exists y_n = g_n \cdot x_n$, tels que $y_n, x_n \in K, g_n \in \text{Aut}(\pi)$. Supposons que y_n converge vers y, x_n converge vers x et g_n sont 2 à 2 différents. Soit U un voisinage

de $\pi(x)$ tel que $\pi^{-1}(U) \simeq \coprod_{i \in I} U_i$. Comme $\pi \circ g = \pi$, π est continue, $x, y \in \pi^{-1}(U)$.

Et $\forall n$, comme $g_n \in \text{Bihol}(\hat{\mathcal{S}})$, g_n envoie un U_i sur un $U_{i'}$. Soit $x \in U_{i_0}, y \in U_{i_1}$, pour m, n assez grand, g_m envoie U_{i_0} sur U_{i_1} et g_n^{-1} envoie U_{i_1} sur U_{i_0} . Donc $g_n^{-1} \circ g_m$ envoie U_{i_0} sur U_{i_0} . Alors $g_n^{-1} \circ g_m(x) = x$, donc $g_n^{-1} \circ g_m = \text{id}$, contradiction.

- Montrons que $\hat{\mathcal{S}}/\text{Aut}(\pi) \simeq \mathcal{S}$.

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{S} \\ & \searrow & \nearrow \exists h \\ & \hat{\mathcal{S}}/\text{Aut}(\pi) & \end{array}$$

Ici h est holomorphe.

h est surjective car π l'est. h est injective comme $\text{Aut}(\pi)$ agit transitivement sur les fibres de π . Donc h est un biholomorphisme.

□

Remarque. $\text{Aut}(\pi) \simeq \pi_1(\mathcal{S}, *)$. En effet, posons $g \in \text{Aut}(\pi)$, $p \in \pi^{-1}(g)$, on choisit un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{S}}$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = g(p)$, alors on pose $g \mapsto [\pi \circ \gamma]$, c'est un isomorphisme de groupe.

Théorème 1.2.10. \mathcal{S} une surface de Riemann connexe, $p \in \mathcal{S}$. On suppose que $\pi_1(\mathcal{S}, p)$ est abélien, alors \mathcal{S} est biholomorphe à

- * $\mathbb{D}, \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$
- * $\mathbb{C}^*, \mathbb{C}/\Lambda$
- * \mathbb{D}^* , anneau rond.

Démonstration. On utilise le théorème de Koebe-Poincaré. Soit $\hat{\mathcal{S}}$ le revêtement universel de \mathcal{S} , alors

1. $\hat{\mathcal{S}} = \hat{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathcal{S} = \hat{\mathbb{C}}$. OK.
2. $\hat{\mathcal{S}} = \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \mathbb{C}/\Lambda$, OK.

On suppose donc que $\hat{\mathcal{S}} = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Note $G = \pi_1(\mathcal{S}, p)$, il existe donc un morphisme injectif $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H})$, satisfaisant

- ρ est proprement discontinue
- ρ est sans point fixe
- $\rho(G)$ est abélien

tel que $\mathcal{S} \simeq \mathbb{H}/\rho(G)$.

On a déjà vu que $\text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\} = SL(2, \mathbb{R})/(\pm \text{id})$. Prenons $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ sans point fixe, on montre que soit g est conjugué à $(z \mapsto az)$, où $a \neq 1, a > 0$, soit g est conjugué à $(z \mapsto z + 1)$. Voir $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{H} \cup (-\mathbb{H}) \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, alors g induit un élément dans $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{\frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$ qu'on note encore g . Alors $g(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, $g(-\mathbb{H}) = -\mathbb{H}$, donc $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Résoudre $g(z) = z$ sur \mathbb{R} , c'est-à-dire $cz^2 + (d - z)z + b = 0$. Donc g a deux points fixés sur \mathbb{R} (compter multiplicité).

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est fixé par g , on choisit $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $h(x_0) = \infty$. Alors $h \circ g \circ h^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$ fixe ∞ . Soit $g(\infty) = \infty$. Alors $g = (z \mapsto az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mais g n'a, donc $a = 1$, $g = (z \mapsto z + b)$. Soit $h = \lambda z$, où $\lambda = \frac{1}{b}$, alors $h \circ g \circ h^{-1}(z) = \lambda(\frac{1}{\lambda}z + b) = z + \lambda b$.
- Si $\{x_0, x_1\}$ sont des points fixe de g dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on choisit $h \in PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $h(x_0) = 0$, $h(x_1) = \infty$. Alors $\hat{g} = h \circ g \circ h^{-1} \in PSL(2, \mathbb{R})$ fixe 0 et ∞ , donc $\hat{g} = az$.
- Si $G = \langle z + 1 \rangle$, alors $\mathbb{H}/G \simeq \mathbb{D}^*$, comme le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\exp(2i\pi z)} & \mathbb{D}^* \\ & \searrow & \nearrow S \\ & \mathbb{H}/\langle z + 1 \rangle & \end{array}$$

- Si $G = \langle az \rangle$, où $g > 1$, alors $\mathbb{H}/G \simeq \{z \in \mathbb{C}, e^{-\frac{2\pi}{\log a}} < |z| < 1\}$, comme le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\exp(\frac{2i\pi z}{\log a})} & \text{Anneau rond} \\ & \searrow & \nearrow S \\ & \mathbb{H}/\langle az \rangle & \end{array}$$

Comme $G = \pi_1(\mathcal{S}, p)$ est abélien, $\mathcal{S} = \mathbb{H}$, alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$.

- 1) $\exists h \in PSL(2, \mathbb{R})$, tel que $hGh^{-1} \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ contient $(z \mapsto z + 1)$. Alors tout élément $g \in G$ est une translation. En effet, comme g est commutative avec $z \mapsto z + 1$, on a $g(z) + 1 = g(z + 1)$, $\forall z \in \mathbb{H}$. Donc $g(\infty) = \infty$, donc $g(z) = az + b$. On a

$$0 = g(z + 1) - (g(z) + 1) = a(z + 1) + b - (az + b + 1) = a - 1$$

Donc $a = 1$. Ainsi $G \subseteq \{z \mapsto z + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Comme G agit proprement discontinûment, on a $G = \{z \mapsto z + h\alpha, h \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $\alpha > 0$.

2) $\exists h \in PSL(2, \mathbb{R})$, tel que $hGh^{-1} \subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ contient $(z \mapsto az)$, où $a > 1$. On peut montrer de même que $G = \{z \mapsto \alpha^h z, h \in \mathbb{Z}\}$ pour un certain $\alpha > 0$.

D'où la démonstration du théorème. □

Remarque. Prenons deux anneaux ronds $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < 1\}$, $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : b < |z| < 1\}$ avec $a, b > 0$. On peut montrer que les deux anneaux ronds sont biholomorphes si et seulement $a = b$.

Chapitre 2

Théorie de Hodge sur les surfaces de Riemann

2.1 Calcul sur les surfaces de Riemann

But. Construire des fonctions méromorphe non constantes sur une surface de Riemann quelconque.

2.1.1 Formes différentielles.

\mathcal{S} une surface de Riemann connexe, $\mathfrak{A} = \{(U_j, \varphi_j)\}$ atlas holomorphe. $\varphi_{lj} : \varphi(l)(U_l) \rightarrow \varphi_j(U_j)$ les changements des carte. Note l'isomorphisme $z = x + iy$, $\varphi_{lj}(x + iy) = P_{lj} + iQ_{lj}$, $P_{lj}, Q_{lj} \in \mathcal{C}^\infty$.

Définition 2.1.1. Une 1-forme (continue) sur S^1 est la donnée pour tout l deux fonctions continues $a_l, b_l \in \mathcal{C}(\Omega_l)$ tel que

$$\begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{lj}}{\partial x} & \frac{\partial Q_{lj}}{\partial x} \\ \frac{\partial P_{lj}}{\partial y} & \frac{\partial Q_{lj}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \quad (*)$$

Pour comprendre (*), on note

$$\omega_l = a_l dx + b_l dy$$

alors $(*) \Leftrightarrow (\varphi_{lj})^* \omega_j = \omega_l$.

Remarque. On définit les 1-formes $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \dots, \mathcal{C}^k, L_{loc}^1$. Si ω est une 1-forme sur \mathcal{S} et

(U, φ) est une carte holomorphe, $\Omega = \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$, il existe une 1-forme ω_U définie sur Ω :

$$\omega_U|_{\varphi(U \cap U_j)} = (\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* \omega_j, \quad \forall j$$

Une 1-forme est une famille de 1-forme ω_U sur $\Omega = \varphi(U)$ pour toute carte (U, φ) tel que $\omega_U = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1})^* \omega_V$.

L'espace des 1-formes de classe \mathcal{C}^k est un $\mathcal{C}^k(\mathcal{S})$ -module :

$$\begin{aligned} \omega, \omega' \text{ 1-formes} &\rightarrow \omega + \omega' \text{ 1-forme} \\ f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{S}) &\rightarrow f \cdot \omega \end{aligned}$$

En coordonnées holomorphe $(dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy)$,

$$\omega_j = a_j dx + b_j dy = f_j dz + g_j d\bar{z}$$

où $f_j = \frac{a_j - ib_j}{2}, g_j = \frac{a_j + ib_j}{2}$.

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^* \circ \omega_j &= \varphi_{ij}^* (f_j dz + g_j d\bar{z}) \\ &= (f_j \circ \varphi_{ij}) \varphi'_{ij} dz + (g_j \circ \varphi_{ij}) \overline{\varphi'_{ij}} dz \end{aligned}$$

Définition 2.1.2. Une (0,1)-forme sur \mathcal{S} est une 1-forme qui s'écrit localement $\omega_j = g_j d\bar{z}, \forall j$. Une (1,0)-forme sur \mathcal{S} est une 1-forme qui s'écrit localement $\omega_j = f_j dz, \forall j$. ω est de type (0,1) (resp. (1,0)) si et seulement si ω_U est de type (0,1) (resp. (1,0)).

Définition 2.1.3. Une 1-forme holomorphe (resp. méromorphe) est une (1,0) forme ω telle que $\omega_j = f_j dz$ avec f_j holomorphe (resp. méromorphe).

Notations.

- $\mathcal{E}_k^0 = 0$ -formes \mathcal{C}^k , c'est-à-dire les fonctions \mathcal{C}^k à valeurs dans \mathbb{C}
- $\mathcal{E}_\infty^1(\mathcal{S}) = 1$ -formes \mathcal{C}^∞
- $\mathcal{E}_k^1(\mathcal{S}) = 1$ -formes \mathcal{C}^k
- $\mathcal{E}_k^{1,0}(\mathcal{S}) = (1,0)$ formes de classe \mathcal{C}^k
- $\mathcal{E}_k^{0,1}(\mathcal{S}) = (0,1)$ formes de classe \mathcal{C}^k
- $\Omega^1(\mathcal{S}) = 1$ -formes holomorphes sur \mathcal{S} .

Définition 2.1.4. Une 1-forme ω est *réelle* si $\omega_j = a_j dx + b_j dy$ avec a_j et b_j à valeurs réelles. Si on écrit $\omega_j = f_j dz + g_j d\bar{z}$, alors $\forall j, \bar{\omega}_j = \omega_j \Leftrightarrow \omega$ réelle. Ici $\bar{\omega}_j = \bar{f}_j d\bar{z} + \bar{g}_j dz$.

Définition 2.1.5. *2-forme* est la donnée pour toute carte (U, φ) d'une fonction a_U . Prenons $(U, \varphi), (V, \psi)$ deux cartes, alors

$$\begin{aligned} & (\psi \circ \varphi^{-1})^*(a_v dx \wedge dy) \\ &= a_U dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2} a_U dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

Par le théorème de changement de variable, on a

$$a_U = a_V \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (*)$$

où $\psi \circ \varphi^{-1} = P + iQ$. Note que $dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy$, on a

$$dz \wedge d\bar{z} = -2idx \wedge dy$$

Donc $(*) \Leftrightarrow a_U = a_V \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) |(\psi \circ \varphi^{-1})'|^2$.

Observation. Soit ω 2-forme. Elle est réelle si et seulement si $\omega_j = a_j dx \wedge dy$ et a_j à valeurs réelles. En effet, on a

$$\mathcal{E}_\infty(\mathcal{S}) = \mathcal{E}_\infty^0 \oplus \mathcal{E}_\infty^1 \oplus \mathcal{E}_\infty^2$$

sont les formes différentielles sur \mathcal{S} est $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ -module gradué.

Si $\omega \in \mathcal{E}_\infty^\alpha, \hat{\omega} \in \mathcal{E}_\infty^\beta \rightarrow \omega \wedge \hat{\omega} \in \mathcal{E}^{\alpha+\beta}$.

- $\alpha = 0, \omega = f$ est une fonction, $\omega \wedge \hat{\omega} = f\hat{\omega}$.
- $\alpha + \beta \geq 3, \omega \wedge \hat{\omega} = 0$.
- $\alpha = \beta = 1 \quad \omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z}, \hat{\omega}_U = \hat{f}_U dz + \hat{g}_U d\bar{z}$, alors

$$(\omega \wedge \hat{\omega})_U = (f_U \hat{g}_U - g_U \hat{f}_U) dz \wedge d\bar{z}$$

Remarque. On a des observations suivantes.

- $\hat{\omega}, \omega \in \mathcal{E}^{0,1} \rightarrow \omega \wedge \hat{\omega} = 0$.
- $\hat{\omega}, \omega \in \mathcal{E}^{1,0} \rightarrow \omega \wedge \hat{\omega} = 0$.
- $\omega \wedge \hat{\omega} = -\hat{\omega} \wedge \omega, \forall \omega, \hat{\omega} \in \mathcal{E}^1$.

2.1.2 Opérations sur les formes différentiels

Définition 2.1.6 (tire en arrière). $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ holomorphe, $\omega \in \mathcal{E}_k^\alpha(\mathcal{S})$. On définit $f^*\omega \in \mathcal{E}_k^\alpha(\mathcal{S})$. Prenons respectivement deux atlas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ et pour deux cartes $(U, \varphi), (V, \psi)$, où $U \subseteq \mathcal{S}, V \subseteq \mathcal{S}'$, avec $f(U) \subseteq V$. On a

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

On définit $(f^*\omega)_U = F^*(\omega_V)$, d'où la forme $f^*\omega \in \mathcal{E}_k^\alpha(\mathcal{S})$.

Proposition 2.1.1. On a des propriétés suivantes.

- $f^*\omega \in \mathcal{E}_k^\alpha(\mathcal{S})$.
- $f^*(h\omega + \hat{\omega}) = (h \circ f)(f^*\omega + f^*\hat{\omega})$.
- $\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ (resp. $\mathcal{E}^{(1,0)}$), alors $f^*\omega \in \mathcal{E}^{(1,0)}$ (resp. $\mathcal{E}^{(0,1)}$).
- si ω est une 1-forme méromorphe, alors $f^*\omega$ est aussi méromorphe (si f est non constante).
- $\omega_v = h_v dz + g_v d\bar{z}$, alors $f^*\omega_V = h_v \circ f f' dz + g_v \circ f \bar{f}' d\bar{z}$.

Démonstration. En exercice. □

Corollaire 2.1.2. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, $i: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, $\omega \in \mathcal{E}_k^\alpha(\mathcal{S}')$, alors $i^*\omega = \omega|_{\mathcal{S}}$.

Définition 2.1.7 (différentielle extérieure). On définit la *différentielle extérieure* comme suivante :

$$d: \mathcal{E}_k^0 \rightarrow \mathcal{E}_{k-1}^1, \quad \forall k \geq 1$$

$$d: \mathcal{E}_k^1 \rightarrow \mathcal{E}_{k-1}^2, \quad \forall k \geq 1$$

$$d: \mathcal{E}_k^2 = 0$$

Précisément, soit f une fonction, alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

Soit $\omega \in \mathcal{E}_k^1$, $\omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$, alors

$$d\omega_U = \left(\frac{\partial g_U}{\partial z} - \frac{\partial f_U}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z}.$$

Lemme 2.1.3. $d: \mathcal{E}_k^\alpha \rightarrow \mathcal{E}_{k-1}^\alpha$, $\forall k \geq 1$ est bien définie et préserve les formes réelles. On a $d \circ d(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{E}_k^\alpha$, $k > 2$. De plus,

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

Soit $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$, on a

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$$

Démonstration. Il suffit de montrer $d \circ d(f) = 0$ pour $f \in \mathcal{E}_k^0$, $k > 2$. En effet,

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z} \partial \bar{z} dz \wedge d\bar{z} = 0$$

Les autres sont en exercice. □

Définition 2.1.8 (opérateurs $\partial, \bar{\partial}$). Soit $f \in \mathcal{E}^0$, on définit

$$df = \partial f + \bar{\partial} f$$

où $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz \in \mathcal{E}^{(1,0)}$, $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \in \mathcal{E}^{(0,1)}$.

Soit $\omega \in \mathcal{E}^1$, $\omega = f dz + g d\bar{z}$, alors

$$\partial \omega = \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$$

$$\bar{\partial} \omega = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

Lemme 2.1.4. $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial = 0$.

Démonstration. En exercice. □

Définition 2.1.9 (Opération stellaire). Soit (M, g) une variété Riemannienne orientée, on définit l'opération $*$: $\mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^1$,

$$\omega_U = a_U dx + b_U dy \mapsto (*\omega)_U = -b_U dx + a_U dy$$

Si on écrit $\omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$, alors

$$*\omega_U = -i f_U dz + i g_U d\bar{z}.$$

Donc $*\omega$ est bien défini comme 1-forme et $*$ préserve le type.

Proposition 2.1.5. On a des propriétés suivantes pour l'opération $*$:

- $**\omega = -\omega$.
- $(*\omega_1) \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge (*\omega_2)$.

$$\cdot f \in \mathcal{C}^2, d(*df) = 2i\partial\bar{\partial}f = \Delta f.$$

Démonstration. On s'écrit $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, alors

$$\begin{aligned} d(*df) &= d(-i\frac{\partial f}{\partial z}dz + i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}) \\ &= 2i\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

On s'écrit $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, alors

$$\begin{aligned} d(*df) &= d(-\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dx \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx \wedge dy \end{aligned}$$

□

Définition 2.1.10 (Intégration des formes). Soit $\omega \in \mathcal{E}_0^2(\mathcal{S})$, (U, φ) une carte holomorphe. ω à support compact dans U , on définit alors

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} \omega_U = \int_{\varphi(U)} a_U dx \wedge dy$$

Si $F = \psi^{-1} \circ \varphi: \psi(V) \rightarrow \varphi(U)$ un changement de carte, alors

$$\int F^* \omega_U = \int a_U \circ F |F'|^2 dx \wedge dy$$

bien définit car une surface de Riemann est orientée.

Si ω est à support compact dans \mathcal{S} , on fixe une partition de l'unité (U_i, φ_i) , tels que $\chi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(U_i)$, $\sum_i \chi_i = 1$. On définit alors

$$\int_{\mathcal{S}} \omega = \sum_i \int_{U_i} \chi_i \omega$$

Prenons $\alpha \in \mathcal{E}_0^1(\mathcal{S})$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 , on définit $\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \gamma^* \alpha$. Précisément, si on écrit $(\alpha)_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$, on a

$$(\gamma^* \alpha) = (f_U \circ \gamma \cdot \gamma' + g_U \circ \gamma \cdot \bar{\gamma}') dt$$

Observation $\int_\gamma \alpha$ ne dépend pas du paramétrage.

2.2 Formes de carré intégrable

Soit \mathcal{S} une surface de Riemann connexe. Prenons $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathcal{S})$, avec $\omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$, alors $\overline{* \omega_U} = \overline{-i f_U dz + i g_U d\bar{z}} = i \bar{f}_U d\bar{z} - i \bar{g}_U dz$, on a donc

$$\omega \wedge \overline{* \omega} = i(|f_U|^2 + |g_U|^2) dz \wedge d\bar{z}$$

Note que $idz \wedge d\bar{z} = i(dx + idy) \wedge (dx - idy) = 2dx \wedge dy$, on sait $\omega \wedge \overline{* \omega}$ 2-forme réelle positive. On peut donc définir un produit hermitien sur $\mathcal{E}_{c,0}^1(\mathcal{S})$ (1-formes à support compact continues) défini positif :

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_{\mathcal{S}} \omega_1 \wedge \overline{* \omega_2}$$

Définition 2.2.1. On définit $\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S})$ la complétion de $(\mathcal{E}_{c,0}^1(\mathcal{S}), \langle, \rangle)$. C'est un espace de Hilbert. De plus, si on prendre un élément $\omega \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S})$, elle s'écrit dans une carte

$$\omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$$

avec $\int_U |f_U|^2 + |g_U|^2 < \infty$, i.e $f_U, g_U \in L^2(U)$.

Remarque. Si \mathcal{S} est compacte, alors $\omega \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S})$ si et seulement si pour toute carte (U, φ) , $\int_{\varphi(U)} |f_U|^2 + |g_U|^2 dx dy < \infty$, car on a toujours un revêtement fini.

Définition 2.2.2. On définit deux espaces suivants :

$$E = \overline{\{df, f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{S})\}}^{L^2}$$

$$E^* = \{\omega \in \mathcal{E}_{L^2}^1, * \omega \in E\}$$

Donc $\alpha \in E \Leftrightarrow \exists (f_n)$ fonctions lisses à support compact tels que $\int (\alpha - df_n) \wedge \overline{*(\alpha - df_n)} \rightarrow 0$.

Théorème 2.2.1. On a la décomposition *orthogonale* suivante

$$\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S}) = E \oplus E^* \oplus \mathcal{H}$$

Ici $\mathcal{H} = \{\alpha \in \mathcal{E}^1 \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ telle que } d\alpha = 0, d(*\alpha) = 0\}$.

Remarque. Ceci peut montrer l'existence de fonction méromorphe non constante et de forme méromorphe à pôles déterminés.

Observation Soit $\alpha \in \mathcal{H}$, avec $\alpha_U = f_U dz + g_U d\bar{z}$, alors

$$d\alpha = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

$$d(*\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$, donc f, \bar{g} sont holomorphes. En d'autres termes, on peut écrire toujours $\alpha = \omega_1 + \bar{\omega}_2$, où $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}_1^{(1,0)}$.

Lemme 2.2.2. En faisant des calculs directs, on a

$$**\alpha = -\alpha$$

$$\langle *\alpha, \beta \rangle = -\langle \alpha, *\beta \rangle$$

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

$$*(\bar{\alpha}) = \overline{* \alpha}$$

Démonstration du lemme est en exercice.

Démonstration. E est fermé dans l'espace de Hilbert $\mathcal{E}_{L^2}^1$, on peut donc écrire

$$\mathcal{E}_{L^2}^1 = E \oplus E^\perp = (E^*) \oplus (E^*)^\perp$$

Ici $E^\perp = \{\alpha \in \mathcal{E}_{L^2}^1, \langle \alpha, \beta \rangle = 0, \forall \beta \in E\}$.

Lemme 2.2.3. Soit $\alpha \in \mathcal{E}_{L^2}^1 \cap \mathcal{C}^1$.

$$1) \alpha \in E^\perp \Leftrightarrow d(*\alpha) = 0$$

$$2) \alpha \in (E^*)^\perp \Leftrightarrow d(\alpha) = 0$$

Démonstration du lemme

$$\begin{aligned} \alpha \in E^\perp &\Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0, \forall \beta \in E \\ &\Leftrightarrow \langle \alpha, df \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \alpha, df \rangle \\
&= \int_S \alpha \wedge *d\bar{f} \\
&= \int_S *\alpha \wedge d\bar{f} \\
&= - \int_S d(*\alpha \bar{f}) + \int_S d(*\alpha) \bar{f} \\
(\text{Stokes} \Rightarrow) &= \int_S d(*\alpha) \bar{f}
\end{aligned}$$

On écrit $d(*\alpha)_U = h_U idz \wedge d\bar{z}$, alors $\int gh_U = 0, \forall g \in \mathcal{C}_c^\infty$. Donc $h_U = 0$, d'où $d(*\alpha) = 0$.

Ceci montre 1) et 2) est analogue.

Rentrons à la démonstration du théorème. E et E^* sont orthogonaux. En effet, soit $\alpha \in E$, on doit montrer que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0, \forall \beta \in E^*$. Il suffit de montrer que $\langle \alpha, *df \rangle = 0, \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty$. Comme $\alpha \in E, \exists g_n \in \mathcal{C}_c^\infty$ tels que $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} dg_n$. Par Stokes, on a

$$\langle dg_n, *df \rangle = - \int_S dg_n \wedge d\bar{f} = - \int_S d(g_n d\bar{f}) = 0$$

En posant à la limite dans $(\mathcal{E}_{L^2}^1, \langle, \rangle)$, on a $\langle \alpha, *df \rangle = 0$.

De même, $E^* \subseteq E^\perp$. On pose alors $H = (E \oplus E^*)^\perp$. Par le lemme, pour montrer que $H = \mathcal{H}$, il suffit de montrer que si $\omega \in H$, alors ω est dans classe \mathcal{C}^1 .

Dans une carte locale $(U, \varphi), z = x + iy, \varphi(U) \subseteq \mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$, on écrit $\omega_U = adx + bdy$, avec $a, b \in L^2(\mathbb{D})$. On choisit $\eta: \mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$ à support compact lisse dans \mathbb{D} et on pose $\varphi = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \psi = \frac{\partial \eta}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \omega, d\varphi - *d\psi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{D}} (adx + bdy) \wedge (*d\varphi + d\psi) \\
&= \int_{\mathbb{D}} a(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) \\
&= \int_{\mathbb{D}} a \Delta \eta dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Lemme 2.2.4 (Lemme de Weyl). Soit $a \in L^2(\mathbb{D})$. Si $\int_{\mathbb{D}} a \Delta \eta = 0$ pour toute fonction $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty$, alors a est lisse et $\Delta a = 0$.

Lemme de Weyl $\Rightarrow a$ est lisse. Ce qui fini la démonstration.

Démonstration du lemme de Weyl (régularité des opérateurs elliptiques) Si a est \mathcal{C}^2 , $\Delta a = 0$, alors $\int a \Delta \eta = 0$, $\forall \eta \in \mathcal{C}_c^\infty$. Par Stokes, on a

$$0 = \int a \Delta \eta - \int \eta \Delta a$$

Ceci fini la démonstration pour le cas $a \in \mathcal{C}^2$.

On fixe donc un noyau. Prenons η lisse, $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ telle que $\int \eta = +1$, $\text{supp}(\eta) \subseteq [0, 1]$, η est décroissante. Et on pose $\eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \eta\left(\frac{|z|^2}{\varepsilon}\right)$. On fait la régularisation :

$$a_\varepsilon(z) := (a * \eta_\varepsilon)(z) = \int_{\mathbb{D}} a(x) \eta_\varepsilon(|z - x|) dx$$

définir sur $B(0, 1 - \varepsilon)$, $a_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ par le théorème de la dérivation sous l'intégrale. Pour $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty$, note que

$$\int a_\varepsilon \Delta \theta = \int a(z - x) \eta_\varepsilon(x) \Delta \theta(z) dx dz = 0$$

Par Stokes, $\int a_\varepsilon \Delta \theta = \int \theta \Delta a_\varepsilon = 0 \Rightarrow \Delta a_\varepsilon = 0$, $\forall \varepsilon$.

Astuce : Pour une fonction harmonique, vérifie la propriété de la moyenne :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} a_\varepsilon(z + re^{2i\pi\alpha}) d\alpha = a_\varepsilon(z)$$

Donc $(a_\varepsilon)_{\varepsilon'} = a_\varepsilon$. Mais $(a_\varepsilon)_{\varepsilon'} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon'}$, $a_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} a$. Donc $a = a_{\varepsilon'}$ sur $B(0, 1 - \varepsilon')$, $\forall \varepsilon' > 0$. Prenons $\varepsilon' \rightarrow 0$, on voit a est lisse sur \mathbb{D} presque-partout. \square

2.3 Existence de différentielle harmoniques (et méromorphes)

\mathcal{S} une surface de Riemann connexe. $p \in \mathcal{S}$, (U, φ) une carte centrée en p . On note $z = \varphi(q)$, $q \in U$. Pour simplifier les notations, on identifie z et q , et note $D = \{z < 1\} \equiv \varphi^{-1}(\{|z| < 1\}) = U \subseteq \mathcal{S}$.

Théorème 2.3.1. Pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $u: \mathcal{S} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- 1) u est harmonique dans $\mathcal{S} - \{p\}$.
- 2) $u - \frac{1}{z^n}$ est harmonique dans un voisinage ouvert V de p tel que $\bar{V} \subseteq U$.
- 3) $\int_{\mathcal{S} \setminus \bar{V}} du \wedge \overline{*du} < \infty$.
- 4) $\langle du, df \rangle = \langle du, *df \rangle = 0$, $\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{S})$ telle que $f|_V \equiv 0$.

Rappel. u est harmonique c'est-à-dire $u: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que localement dans une carte $\Delta u = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})u = 0 \Leftrightarrow i\partial\bar{\partial}u = 0 \Leftrightarrow d(*du) = 0$

Avant de montrer le théorème, on voit tout d'abord quelques applications.

Théorème 2.3.2. $p \in \mathcal{S}$, z coordonnées locale en p . Pour tout $n \geq 1$, \exists une 1-forme ω méromorphe sur \mathcal{S} , holomorphe sur $\mathcal{S} \setminus \{p\}$ et $\omega = \frac{dz}{z^{n+1}} + \omega'$ avec ω' holomorphe au voisinage de p .

Démonstration. On applique le théorème 2.3.1 et on pose $\alpha = du$ et $\omega = \frac{\alpha + i*\alpha}{-2n}$. On travaille en coordonnées locales, pour vérifier que ω est holomorphe sur $\mathcal{S} \setminus \{p\}$.

$$\alpha = du = \frac{\partial u}{\partial w}dw + \frac{\partial u}{\partial \bar{w}}d\bar{w}$$

$$\Rightarrow \omega = -\frac{1}{2n}(2\frac{\partial u}{\partial w}dw + 0) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial u}{\partial w}dw$$

Au voisinage de p , $u(z) = \frac{1}{z^n} + h(z)$ avec h harmonique. On a

$$\omega = -\frac{1}{n}\frac{\partial u}{\partial z}dz = -\frac{(-n)}{nz^{n+1}}dz + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)dz = \frac{dz}{z^{n+1}} + \omega'$$

avec ω' holomorphe. Donc $\frac{\partial}{\partial \bar{w}}(\frac{\partial u}{\partial w}) = \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}}u = 0$ □

On obtient de la même façon :

Théorème 2.3.3. Soit $p_1 \neq p_2$, coordonnées holomorphes locales z_1 en p_1 et z_2 en p_2 . Il existe une 1-forme méromorphe ω telle que

- 1) $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S} - \{p_1, p_2\})$,
- 2) $\omega = \frac{dz_1}{z_1} + \omega_1$, ω_1 holomorphe au voisinage de p_1 ,
- 3) $\omega = -\frac{dz_2}{z_2} + \omega_2$, ω_2 holomorphe au voisinage de p_2 .

On voit la preuve un peu plus tard (après la démonstration du théorème 2.3.1).

Remarque. En général, on ne peut pas trouver $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S})$ non nulle. Par exemple, prenons $\mathcal{S} = \hat{\mathbb{C}}$. On montre plus tard.

Corollaire 2.3.4. Toute surface de Riemann connexe admet une fonction méromorphe non constante.

Démonstration. On applique le théorème 2.3.3 deux fois. On choisit p_1, p_2, p_3 trois points distincts. Prenons $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S} - \{p_2\})$ telle que localement $\omega = \frac{dz_2}{z_2} + f_2$, $\omega = -\frac{dz_3}{z_3} + f_3$ avec

f_2, f_3 holomorphes. Et prenons $\omega' \in \Omega^1(\mathcal{S} - \{p_1, p_2\})$ telle que localement $\omega' = \frac{dz_1}{z_1} + f'_1$, $\omega' = -\frac{dz_2}{z_2} + f'_2$ avec f'_1, f'_2 holomorphes. Définit $f = \frac{\omega}{\omega'}$, alors f est une fonction méromorphe. Précisément, dans une carte z , $\omega = h(z)dz$, $\omega' = \hat{h}(z)dz$, avec h, \hat{h} méromorphes. Localement on pose $f = \frac{h}{\hat{h}}$. On peut vérifier que f est méromorphe, non constant et $f(p_2) = -1$, $f(p_1) = 0$, $f(p_3) = \infty$. \square

Démonstration. On choisit $0 < a < 1$.

Idée : On choisit une fonction h à support compact et ayant le bon comportement dans $\{|z| < a\}$, i.e. condition (*), (**). On utilise la factorisation dans 2.2.1 :

$$\mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{H} \oplus E \oplus E^*$$

(*) choix de h . On pose

$$h = \begin{cases} z^{-n} + \frac{\bar{z}^n}{a^{2n}} & |z| \leq a, \\ 0 & |z| > a. \end{cases}$$

Attention : h est discontinue sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$, harmonique sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\} - \{p\}$.

On pose

$$\theta = \begin{cases} h & \text{si } |z| \geq \frac{a}{2}, \\ \text{lisse} & \text{si } |z| < a. \end{cases}$$

Note que θ est discontinue au $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$, et

$$d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| > a, \\ \text{lisse} & \text{si } |z| < a. \end{cases}$$

Donc $d\theta \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S})$. On décompose $d\theta = \alpha + \omega$, avec $\alpha \in E$, $\omega \in E^\perp = E^* \oplus H$.

Lemme 2.3.5. α est lisse dans \mathcal{S} .

Lemme 2.3.6. $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, $\alpha = df$.

Par lemme 2.3.5, $\alpha \in \mathcal{C}^1$, par lemme 2.2.3, $\alpha \in (E^*)^\perp \Rightarrow d\alpha = 0$.

On va poser $u = f - \theta + h$. Dans $\{z : |z| < a\}$, f est lisse, θ est lisse, donc $u = \frac{1}{z^n} + \text{lisse}$. Donc $du = df - d\theta + dh = \alpha - (\alpha + \omega) + dh = -\omega + dh$. Mais $\omega = dh - du$ est lisse dans $\{z : 0 < |z| < a\}$. Aussi $\omega \in E^\perp$, par lemme 2.2.3 on sait $d(*\omega) = 0$. Donc u est harmonique. En effet, comme $df - d\theta = \alpha - d\theta = -\omega$, on sait $d * d(f - \theta) = 0$, donc $f - \theta$ est harmonique sur $\{z : |z| < a\}$. Par définition de h , h est aussi harmonique sur $\{z : |z| < a\}$, donc $u = f - \theta + h$ est harmonique sur $\{z : |z| < a\}$.

Dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$, $\theta = h$, donc $u = f$.

Lemme 2.3.7. $d(*\alpha) = 0$ dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$.

Donc dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$, on a $\Delta u = d(*df) = d(*\alpha) = 0$. Cela montre que u est harmonique dans $\mathbb{C} - \{0\}$ et fini la démonstration.

Il reste à montrer les trois lemmes qu'on pose devant.

1. *Démonstration du lemme 2.3.5* : Localement, dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, on écrit $\alpha = adx + bdy$ avec $a, b \in L^2$. On choisit ρ à support compact lisse réelle et pose

$$\varphi = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x, \quad \psi = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho_y$$

Alors $\varphi_y = \psi_x$, et on a

$$\begin{aligned} \langle d\theta, d\varphi \rangle &= \langle \alpha + \omega, d\varphi \rangle \\ d\varphi \in E &\Rightarrow \langle \alpha, d\varphi \rangle \\ &= \int (adx + bdy) \wedge (-\varphi_y dx + \varphi_x dy) \\ &= \int (a\varphi_x + b\varphi_y) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \alpha, *d\psi \rangle \\ &= \int (adx + bdy) \wedge (\psi_x dx + \psi_y dy) \\ &= \int (a\psi_y - b\psi_x) dx \wedge dy \end{aligned} \tag{*}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle d\theta, d\varphi \rangle &= \int a\varphi_x + b\varphi_y dx \wedge dy \\ &= \int a\varphi_x + b\psi_x dx \wedge dy \\ (*) \Rightarrow &= \int a(\varphi_x + \psi_y) dx \wedge dy \\ &= \int a\Delta\rho dx \wedge dy \end{aligned}$$

De même, $\theta, d\psi = \int b\Delta\rho dx \wedge dy$. Alors dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, $\text{supp}(\rho) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, $d\theta$ est lisse, note $d\theta = \theta_x dx + \theta_y dy$, comme $E \perp E^*$, on a

$$0 = -\langle d\theta, *d\psi \rangle = \int (\theta_x dx + \theta_y dy) \wedge (\psi_x dx + \psi_y dy) = \int \theta_x \psi_y - \theta_y \psi_x dx \wedge dy$$

Donc (on omet $dx \wedge dy$ pour simplifier les notations)

$$\int a \Delta \rho = \langle d\theta, d\varphi \rangle = \int (\theta_x \varphi_x + \theta_y \varphi_y) = \int (\theta_x \varphi_x + \theta_y \psi_x) = \int \theta_x (\varphi_x + \psi_y) = \int \theta_x \Delta \rho$$

Ceci implique $\int (a - \theta_x) \Delta \rho = 0$. De même $\int (b - \theta_y) \Delta \rho = 0$. Par lemme de Weyl 2.2.4, on a $a - \theta_x \in \mathcal{C}^\infty$, $b - \theta_y \in \mathcal{C}^\infty$. Donc dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, $a \in \mathcal{C}^\infty$, $b \in \mathcal{C}^\infty$, c'est-à-dire α est lisse dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$. On va montrer que α est aussi lisse dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$.

Prenons ρ une fonction réelle, lisse, et $\text{supp}(\rho) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$, et note aussi

$$\varphi = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x, \quad \psi = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \rho_y$$

Par le même calcul, on a

$$\int a \Delta \rho = \int_S d\theta \wedge *d\varphi = \int_{|z| < \frac{a}{2}} d\theta \wedge *d\varphi + \int_{|z| > a} d\theta \wedge *d\varphi + \int_{\frac{a}{2} < |z| < a} d\theta \wedge *d\varphi$$

Comme $d\theta|_{|z| > a} \equiv 0$, $d\varphi|_{|z| < \frac{a}{2}} \equiv 0$, $\int a \Delta \rho = \int_{\frac{a}{2} < |z| < a} d\theta \wedge *d\varphi$. par théorème de Stokes, on sait

$$\int_{\frac{a}{2} < |z| < a} d\theta \wedge *d\varphi = - \int_{\frac{a}{2} < |z| < a} \varphi d(*d\theta) + \int_{|z|=a} \varphi *d\theta - \int_{|z|=\frac{a}{2}} \varphi d\theta \quad (**)$$

Comme θ est harmonique dans $\{z \in \mathbb{C} : \frac{a}{2} < |z| < a\}$, $\int_{\frac{a}{2} < |z| < a} \varphi d(*d\theta) = 0$. Ainsi $\varphi|_{|z|=\frac{a}{2}} = 0$, donc $\int_{|z|=\frac{a}{2}} \varphi d\theta = 0$. De plus, on montre que $*d\theta|_{|z|=a} = 0$.

Posons $\gamma(t) = ae^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Par définition, on a $*d\theta = *dh$ dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$. Attention : $d\theta$ est discontinue sur $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$.

$$*d\theta = *dh = *(\frac{-n}{z^{n+1}} dz + \frac{n\bar{z}^{n-1}}{a^{2n}} d\bar{z}) = \frac{in}{2^{n+1}} dz + \frac{inz^{-n-1}}{a^{2n}} d\bar{z}$$

Donc

$$\gamma^*(d\theta) = \frac{in}{a^{n+1}} \cdot \frac{aie^{it}}{e^{i(n+1)t}} dt + \frac{ina^{n-1}e^{-i(n+1)t}}{a^{2n}} dt = \frac{-n}{a^n e^{int}} dt + \frac{ne^{-int}}{a^n} dt = 0$$

Cela montre que $\int a \Delta \rho = 0$. Par lemme de Weyl 2.2.4, a est lisse dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$. De même b est lisse dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, donc α est lisse dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$. Cela fini la démonstration du lemme 2.3.5.

2. *Démonstration du lemme 2.3.6* : On doit démontrer que pour tout courbe simple

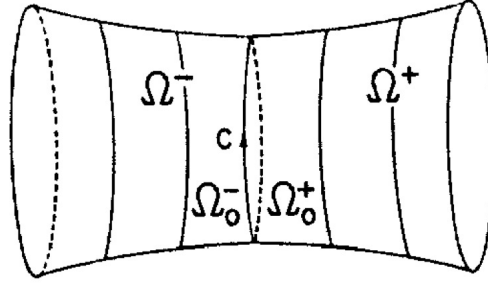
c dans \mathcal{S} , $\int_c \alpha = 0$. Si c'est vrai, on pose simplement $f(q) = \int_p^q \alpha$ et $df = \alpha$.

Soit c une courbe simple dans \mathcal{S} , on prend un nombre fini de cartes locales comme un revêtement de \mathcal{S} . On note Ω cet ouvert composé par l'union des cartes et l'appelle un voisinage collier de c . En prenant Ω assez petit, on peut supposer que Ω est un collier tel que $\Omega \setminus c$ consiste en deux colliers Ω^- , Ω^+ . Prenons une orientation de c , on peut supposer que Ω^- est à la gauche de c . Posons un plus petit voisinage collier Ω_0 (avec correspondant un-bord collier Ω_0^- , Ω_0^+) à coté de c dans Ω . On construit une fonction réelle φ sur \mathcal{S} telle que :

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_0^-, \\ 0 & \text{sur } \mathcal{S} - \Omega^-, \\ \text{lisse} & \text{sur } \Omega^-. \end{cases}$$

Définit une 1-forme de classe \mathcal{C}^∞ :

$$\eta_c = \begin{cases} d\varphi & \text{sur } \Omega \setminus c, \\ 0 & \text{sur } (\mathcal{S} \setminus \Omega) \cup c. \end{cases}$$



On voit que η_c est une 1-forme réelle, fermée, lisse et à support compact. Généralement, η_c n'est pas exacte. On l'appelle *la forme différentielle associée à c*.

Par théorème de Stokes,

$$\int_c \alpha = \int_{\Omega^-} d(\varphi\alpha) = \int_{\Omega^-} \eta_c \wedge \alpha = \langle \alpha, *\eta_c \rangle = 0$$

car $d\alpha = 0$ par lemme 2.3.5.

3. *Démonstration du lemme 2.3.7* : Prenons ρ une fonction lisse telle que $\text{supp}(\rho) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$. Comme ce qu'on a calculé dans (**), on a encore

$$\langle \alpha, d\rho \rangle = \langle d\theta, d\rho \rangle - \langle \omega, d\rho \rangle = \langle d\theta, d\rho \rangle = \langle d\theta, d\rho \rangle_{\frac{a}{2} < |z| < a} = 0$$

Donc $\alpha \in E^\perp$. Par le lemme 2.2.3, on a $d(*\alpha) = 0$ dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{a}{2}\}$.

On a bien montré tous les trois lemmes qu'on a utilisé et cela fini la démonstration du théorème. \square

De même, on montre le théorème 2.3.3. On se ramène au cas où p_1 et p_2 sont dans une même carte, notée $\{z \in \mathbb{C} : |z| < a\}$, par prenant un revêtement ouvert du chemin qui lie p_1 et p_2 . Et on note $z_1 = \varphi(p_1)$, $z_2 = \varphi(p_2)$ leur coordonnées dans ce disque. Notons que dans la démonstration du théorème 2.3.1, on ne dépend pas la forme de h , mais on exige suelement

$$h \text{ est harmonique dans } \{z \in \mathbb{C} : \frac{a}{2} < |z| < a\},$$

et

$$*dh = 0 \text{ dans } \{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}.$$

Alors, on pose une autre forme pour h :

$$h(z) = \begin{cases} \log \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_1 - \frac{a^2}{\bar{z}_1}}{z_2 - \frac{a^2}{\bar{z}_2}} \right| & \text{si } |z| < a, \\ 0 & \text{si } |z| > a. \end{cases}$$

On peut vérifie que h est harmonique dans $\{z \in \mathbb{C} : \frac{a}{2} < |z| < a\}$ et $*dh = 0$ dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a\}$. Posons θ comme avant. On peut encore écrire $d\theta = \alpha + \omega$ avec $\alpha \in E$, $\omega \in E^\perp$. De même, on a α lisse dans \mathcal{S} et $\alpha = df$ pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$. Prenons $u = f - \theta + h$, alors $u - h$ est harmonique. Mais

$$u - h = u - \log |z - z_1| + \log |z - z_2| + \log \left| \frac{z_1 \bar{z} - a^2}{z_2 \bar{z} - a^2} \right|$$

Ici $\log \left| \frac{z_1 \bar{z} - a^2}{z_2 \bar{z} - a^2} \right|$ est harmonique car

$$\partial \bar{\partial} \log |z - z_1|^2 = \partial \bar{\partial} (\log(z - z_1) + \log(\bar{z} - \bar{z}_1)) = 0$$

Donc $u(z) = \log |z - z_1| - \log |z - z_2| + v$ avec v harmonique dans $\{|z| < a\}$. Prenons $\omega = \frac{1}{2} \partial u$ une 1-forme sur \mathcal{S} , alors localement on a

1. $\omega(z) = \frac{1}{2} \partial \log |z - z_1|^2 + \frac{1}{2} \partial v = \frac{1}{2(z - z_1)} dz + \frac{1}{2} \partial v,$
2. $\omega(z) = -\frac{1}{2} \partial \log |z - z_1|^2 + \frac{1}{2} \partial v = \frac{1}{2(z - z_1)} dz + \frac{1}{2} \partial v.$

Ainsi v harmonique $\Rightarrow \partial v \in \Omega^1$, d'où ω la 1-forme voulue.

Chapitre 3

Surfaces de Riemann compacts

Dans ce chapitre, on suppose toujours \mathcal{S} surface de Riemann connexe et compacte.

3.1 Topologie

But : Classification des surfaces de Riemann compacts à homéomorphisme près.

Théorème 3.1.1. Soit \mathcal{S} est homéomorphe à la sphère $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ soit \mathcal{S} est homéomorphe à M_g avec $g \geq 1$. Ici M_g est le polygone à $4g$ cotés recollés le long de ses arêtes (M_g est la somme connexe de g tores).

Démonstration. On construit une triangulation de \mathcal{S} . Et on fait des manipulations topologique pour effacer le plus d'arête possible. \square

Remarque. \mathcal{S} est une surface de Riemann, donc il est facile de construire une triangulation de \mathcal{S} .

Théorème 3.1.2. Une surface de Riemann est canoniquement orientée de telle sorte que pour toute carte holomorphe (U, φ) , $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$ préserve l'orientation (avec \mathbb{C} muni de l'orientation directe).

Exemple 3.1.1. \mathcal{S} ne peut pas être homéomorphe à Bouteille de Klein, $\mathbb{R}P^2$.

Rappel : Une *orientation* sur une variété M est la donnée d'un atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ tel que $\det(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) > 0$, $\forall i, j$. Posons \mathcal{S} surface de Riemann et $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ son atlas holomorphe, alors

$$\det d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = \det d(\varphi_{ij}) = |\varphi'_{ij}|^2 > 0$$

où $\varphi_{ij} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est le changement de carte. Cela montre que une surface de Riemann est toujours orientée.

Théorème 3.1.3. M_g est homéomorphe à M_h si et seulement si $g = h$.

Définition 3.1.1. Soit \mathcal{S} une surface de Riemann connexe compacte. L'unique entier $g \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{S} est homéomorphe à M_g est appelé le *genre* de \mathcal{S} .

Convention. On note $M_0 = S^2$. Le genre de \mathcal{S} est 1 $\Leftrightarrow \mathcal{S}$ est homéomorphe à le tore $S^1 \times S^1$.

Observation. Le genre de \mathcal{S} est 0 si et seulement si \mathcal{S} est biholomorphe à $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Démonstration. Le genre de $\hat{\mathbb{C}}$ est évidemment 0. Si le genre de \mathcal{S} est 0, alors par théorème d'uniformisation, \mathcal{S} est homéomorphe à $\hat{\mathbb{C}}$. \square

Observation. Le genre de \mathcal{S} est 1 si et seulement si \mathcal{S} est biholomorphe à \mathbb{C}/Λ , où $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ un réseau de $(\mathbb{C}, +)$.

Démonstration. \Leftarrow est évident. \Rightarrow : Comme $\mathcal{S} \simeq S^1 \times S^1$, $\pi_1(\mathcal{S}, *) \simeq \mathbb{Z}^2$ un groupe abélien. Par classification des surfaces appliqué à π , la seule surface avec le groupe fondamental abélien non-trivial est M_2 . Donc \mathcal{S} est biholomorphe à \mathbb{C}/Λ . \square

Pour $g \geq 2$, on a vu quelques exemples, par exemple, les compactifications des courbes algébriques : $\{y^2 = P(x)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ avec P sans zéro multiple.

Démonstration. Idée : on calcule $H_1(M_g, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. Pour cela on calcule $\pi_1(M_g, *)$ et utilise le fait $H_1(M_g, \mathbb{Z}) \simeq \text{Ab}(\pi_1(M_g, *))$. Toutes les choses sont déjà faites avec Prof. BLANCHET. \square

3.1.1 Forme d'intersection dans $H_1(M_g, \mathbb{Z})$

Soit a une courbe fermée simple, on lui associe à une 1-forme de classe \mathcal{C}^1 η_a telle que $\forall \alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}^1}^1$, $d\alpha = 0$, on a

$$\int_a \alpha = - \int \alpha \wedge \eta_a = \langle \alpha, *\eta_a \rangle \quad (*)$$

Si a et b sont deux courbes fermées simples, on pose

$$\langle a, b \rangle := \int \eta_a \wedge \eta_b$$

Théorème 3.1.4. La définition ci-dessus ne dépend pas du choix du η_a et η_b vérifiant (*). De plus, \langle, \rangle définit une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénéré sur $H_1(M_g, \mathbb{Z})$.

3.2 Homologie et théorème de Riemann-Hurwitz

C'est l'outil pour calculer le genre d'une surface de Riemann compact.

3.2.1 Triangulation

Définition 3.2.1 (triangulation). Soit \mathcal{S} une surface de Riemann connexe compact. Posons T le triangle dans \mathbb{C} qui est identifié par les trois sommets : $0, 1, e^{\frac{\pi i}{3}}$. Une triangulation \mathcal{T} de \mathcal{S} est la donnée d'applications \mathcal{C}^0 $\mu_i: T \rightarrow \mathcal{S}$ vérifiant les conditions :

- * $\mu_i|_{\bar{T}}$ est un homéomorphisme sur son image, $\forall v \in \mathcal{A}, v|_{]0,1[}$ est un homéomorphisme sur son image.
- * $\cup_i T_i = \mathcal{S}$.
- * Compatibilité : $T_i \cap T_j$ est une union de sommets ou d'arêtes (les paramétrisations coïncident).

où on pose les notations :

- Sommets : $\mathcal{S} = \cup_i \mu_i\{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}\} \subseteq \mathcal{S}$.
- Faces : $\mathcal{F} = \{\mu_i: T \rightarrow \mathcal{S}\} \subseteq \mathcal{C}^\infty(T, \mathcal{S})$.
- Arêtes : pour $v \in \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{S})$, note $v \in \mathcal{A}$, si $v(t) = \mu_i(t)$, ou $v(t) = \mu_i(te^{\frac{i\pi}{3}})$, ou $v(t) = \mu(1 + (e^{\frac{i\pi}{3}} - 1)t)$.

Théorème 3.2.1. (Admis) Toute surface de Riemann (compacte) admet une triangulation (réelle-analytique). Pour tout atlas $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, il existe $\mathcal{T} = \{u_i: T \rightarrow S\}$ tel que $\forall j, \exists i = i(j), T_j = \mu_j(T) \subseteq U_i$. Ici on dit \mathcal{T} est réelle-analytique (\mathcal{C}^∞) si $\forall i, \mu_i: T \rightarrow \mathcal{S}$ est réel-analytique (\mathcal{C}^∞).

3.2.2 Homologie simpliciale

Posons \mathcal{S} une surface de Riemann compacte muni d'une triangulation \mathcal{T} . On met des notations suivantes :

- Δ_n = groupe abélien libre engendré par les faces de dimension n , ici $n \in \{0, 1, 2\}$.
- Δ_0 = fonction de \mathcal{S} à $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\#\mathcal{S}}$.
- Δ_1 = fonction de \mathcal{A} à $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\#\mathcal{S}}$.

Δ_2 = fonction de \mathcal{F} à $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{\#\mathcal{F}}$.

Définition 3.2.2. On pose la complexe

$$\Delta_2 \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1 \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0$$

Posons $e_0 = 0$, $e_1 = 1$, $e_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$, alors $\partial_1[e_0, e_1] = e_1 - e_0$, ici $[e_0, e_1]$ est une arête de T . C'est-à-dire si v une arête de \mathcal{T} , $v: [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$, alors

$$\partial_1 v = v(1) - v(0) \in \Delta_0$$

et $\partial_2 \sigma = [e_0, e_1] + [e_1, e_2] + [e_2, e_0] \in \Delta_1$ pour $\sigma: T \rightarrow \mathcal{S}$. On a bien $\delta_1 \circ \delta_2 = 0$. Et on défini :

$$H_2(\mathcal{T}) = \ker \partial_2$$

$$H_1(\mathcal{T}) = \ker \partial_1 / \text{Im} \partial_2$$

$$H_0(\mathcal{T}) = \Delta_0 / \text{Im} \partial_1$$

Comme Δ_i est groupe abélien libre, on peut supposer que $H_i(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{h_i(\mathcal{T})}$.

Lemme 3.2.2. $h_2(\mathcal{T}) - h_1(\mathcal{T}) + h_0(\mathcal{T}) = \text{rg}(\Delta_2) - \text{rg}(\Delta_1) + \Delta_0 = \#\mathcal{F} - \#\mathcal{A} + \#\mathcal{S}$.

Démonstration. Posons les deux suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow \ker \partial_2 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \text{Im} \partial_2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker \partial_1 \rightarrow \Delta_1 \rightarrow \text{Im} \partial_1 \rightarrow 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 + h_0 &= \text{rg} - \text{rg} \ker \partial_1 + \text{rg} \text{Im} \partial_2 + \text{rg} \Delta_0 - \text{rg} \text{Im} \partial_1 \\ &= \text{rg} \Delta_2 - \text{rg} \Delta_1 + \text{rg} \Delta_0 \end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.3. $H_i(\mathcal{T})$ ne dépend pas de la triangulation choisie.

Démonstration. Reference : Hatcher, Algebraic topology, thm 2.27, et utilisons $H_i(\mathcal{T}) \simeq$ Homologie singulière de poids i . □

Définition 3.2.3. La caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{S} est

$$\chi(\mathcal{S}) = h_2(\mathcal{T}) - h_1(\mathcal{T}) + h_0(\mathcal{T})$$

pour n'importe quelle triangulation \mathcal{T} de \mathcal{S} .

Exemple 3.2.1. $\chi(S^2) = 2$, $\chi(M_g) = 2 - 2g$.

Proposition 3.2.4. Soit s surface de Riemann compacte connexe.

$$\begin{aligned} g = 0, \mathcal{S} &\simeq \hat{\mathbb{C}}, \chi(\mathcal{S}) = 2 > 0 \\ g = 1, \mathcal{S} &\simeq \mathbb{C}/\Lambda, \chi(\mathcal{S}) = 0 \\ g \geq 2, \hat{\mathcal{S}} &\simeq \mathbb{H}, \chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g < 0 \end{aligned}$$

Remarque. Il existe une métrique riemannienne g sur \mathcal{S} à courbe constante de Gauss $\chi(\mathcal{S})$.

Définition 3.2.4 (Intersection en homologie). Soit c courbe fermée simple sur \mathcal{S} , on lui associe à une 1-forme lisse η_c telle que $\forall \alpha \in \mathcal{E}_{c^1}^1(\mathcal{S})$, $d\alpha = 0$, on a

$$\int_c \alpha = - \int \alpha \wedge \eta_c = \langle \alpha, *\eta_c \rangle \quad (*)$$

C'est juste ce qu'on a fait dans la démonstration du lemme 2.3.6. Rappelons que η_c est une 1-forme réelle, fermé, lisse et à support compact.

Définition 3.2.5. Soient a, b deux courbes fermés simples, on défini

$$\langle a, b \rangle := \int \eta_a \wedge \eta_b$$

Lemme 3.2.5. $\langle a, b \rangle$ ne dépend pas du choix de η_a et η_b vérifiant (*).

Démonstration. Soient η_a et η'_a vérifient (*), alors $\eta_a - \eta'_a \in (E^*)^\perp$, par lemme 2.3.6, il existe $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\eta_a = \eta'_a + df$, donc

$$\int \eta_a \wedge \eta_b = \int \eta'_a \wedge \eta_b + \int df \wedge \eta_b = d(f\eta_b) + \int \eta'_a \wedge \eta_b = \int \eta'_a \wedge \eta_b$$

par le fait que $d\eta_b = 0$ et puis utilisons Stokes en considérant $\partial\mathcal{S} = \emptyset$. □

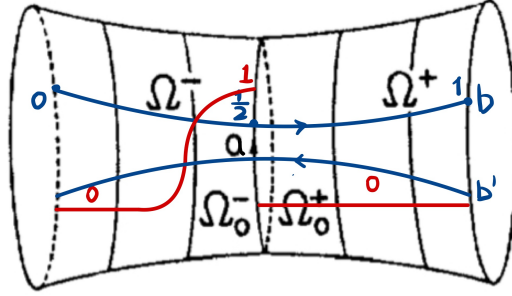
Lemme 3.2.6. $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Supposons a et b intersectent. Sans aucun de généralité, on peut supposer que $\gamma_b(\frac{1}{2}) \in a$. Comme $\eta_a = d\varphi_a$, on sait

$$\int \eta_a \wedge \eta_b = - \int_b \eta_a = - \int_0^{\frac{1}{2}} d\varphi_a = -1 \in \mathbb{Z}$$

Supposons b' un courbe dans l'autre direction qui intersecte aussi avec a , on a

$$\langle \eta_a \wedge \eta_{b'} = - \int_{b'} \eta_a = - \int_{\frac{1}{2}}^0 = 1 \in \mathbb{Z}$$



Cela démontre le lemme 3.2.6 lorsque a et b sont lisse et transverses. Par le théorème de Stokes, on sait que $\int_b \eta_a$ est invariante par homotopie, or toute courbe fermée simple b et homotope à une courbe lisse b^+ , donc

$$\langle a, b \rangle = \int \eta_a \wedge \eta_b = - \int_b \eta_a = - \int_b^+ \eta_a$$

De même, on prend homotopique a à une courbe fermée simple lisse a^+ transverse à b^+ et cela fini la preuve. \square

Théorème 3.2.7. \langle, \rangle définit une forme bilinéaire antisymétrique entière sur $H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$.

Démonstration. Rappelons que :

$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) &= \text{Ab}(\pi_1(\mathcal{S}, *)) \\ &= H_1(\mathcal{T}) \\ &= 1 \text{ groupe d'homologie singulière de } \mathcal{S} \\ &= \text{groupe abélien libre engendré par } \gamma: [0, 1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathcal{S} / \text{homologie} \end{aligned}$$

Si $\sum_i n_i \gamma_i \in H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$ est homotopique à 0 si et seulement si \exists une surface fermée à bord Σ orientée, et $\Gamma: \Sigma \rightarrow \mathcal{S}$ l'application \mathcal{C}^0 tel que $\partial \Sigma = \sum_i n_i \gamma_i$. Si γ est homotopique à γ' , alors $[\gamma] = [\gamma']$ dans $H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$. Soit $\alpha \in H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$ est représentée par une somme de courbes fermés simples lisses disjoints, alor $\alpha = \sum_i n_i \gamma_i$. Posons $\alpha = \sum_i n_i \gamma_i$, les γ_i sont des courbes fermées \mathcal{C}^1 simples disjoints et $\beta = \sum_j m_j w_j$, les w_j sont des courbes

fermées \mathcal{C}^1 simples disjoints, on définit

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \sum_{i,j} n_i m_j \langle \gamma_i, w_j \rangle = \sum_j m_j \int_{\gamma_i} \eta_\beta$$

avec $\eta_\beta = \sum_j n_j \eta_{w_j}$. C'est bien défini car si $\sum_i n_i \gamma_i \simeq 0$, prenons $\Gamma: \Sigma \rightarrow \mathcal{S}$ de classe \mathcal{C}^1 , $\partial\Gamma = \sum_i n_i \gamma_i$, alors

$$\sum n_i \int_{\gamma_i} \eta_\beta = \int_{\partial\Sigma} \Gamma^* \eta_\beta = \int_\Sigma \Gamma^* d\eta_\beta = 0$$

par Stokes. On voit bien \langle, \rangle définit une forme bilinéaire antisymétrique entière sur $H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$ par lemme 3.2.5 et lemme 3.2.6. \square

Exemple 3.2.2. Prenons $a'_1, b'_1, \dots, a'_g, b'_g$ une base de $\text{Ab}(\pi_1(M_g, *)) \simeq H_1(\mathcal{S})$, alors la forme d'intersection dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Formule de Riemann-Hurwitz

Définition 3.2.6. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux surfaces de Riemann compactes connexes, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ une application holomorphe non constante. Rappelons que pour $p \in \mathcal{S}$, on peut trouver, par thm 1.1.1, des carte holomorphe (U, φ) centrée en p et (V, ψ) centrée en $f(p)$ telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^k$$

Ici $k \in \mathbb{N}^*$, note $\text{ord}_p(f) = k$, appelé *le degré local de f en p* .

Théorème 3.2.8 (Riemann-Hurwitz). Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ deux surfaces de Riemann compactes connexes, $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ une application holomorphe non constante, alors

- 1) L'application $q \in \mathcal{S}' \mapsto \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{ord}_p(f)$ est constante.
- 2) $\{p \in \mathcal{S} \mid \text{ord}_p(f) \geq 2\}$ est fini. De plus, on a

$$\chi(\mathcal{S}) = \deg(f) \chi(\mathcal{S}') - \sum_{p \in \mathcal{S}} (\text{ord}_p(f) - 1)$$

cette formule donne $g(s')$ en fonction du genre de \mathcal{S} et des degrés locaux par la formule $\chi(\mathcal{S}) = 2 - 2g(\mathcal{S})$.

Remarque. f est revêtement $\Leftrightarrow \text{ord}_p(f) = 1, \forall p \Leftrightarrow \chi(\mathcal{S}) = \deg(f)\chi(\mathcal{S}')$.

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. □

3.3 Théorie de Hodge des surfaces de Riemann compactes

(Attention : les résultats présentés sont dû à Klein)

Rappel. On pose

$$\mathcal{E}_{C^\infty}^1 \subseteq \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S}) = \{1\text{-forme } \alpha \text{ sur } \mathcal{S}, \int \alpha \wedge \bar{\alpha} < \infty\}$$

L'inclusion est la conséquence du fait que \mathcal{S} est compacte. Posons aussi les 1-formes harmoniques et l'homologie de-Rham :

$$H = \{\alpha \in \mathcal{E}_{L^2}^1(\mathcal{S}), d\alpha = d(*\alpha) = 0\} \subseteq \mathcal{E}_{C^\infty}^1(\mathcal{S})$$

$$H_{dR}^1(\mathcal{S}, \mathbb{C}) = \{\alpha \in \mathcal{E}_{C^\infty}^1(\mathcal{S}), d\alpha = 0\} / \{df, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})\}$$

Théorème 3.3.1. L'application $\alpha \in H \mapsto [\alpha] \in H_{dR}^1$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire.

Démonstration.

Injectivité : Soit $\alpha \in H, [\alpha] = 0$, alors $\alpha = df$ pour f lisse. Donc $0 = d(*\alpha) = d*df \Rightarrow \Delta f = 0$. f est harmonique, donc vérifie la propriété de la moyenne, donc le principe du maximum donc f est constante, $\alpha = 0$.

Surjectivité : on choisit $\alpha \in \mathcal{E}_{C^\infty}^1(\mathcal{S})$ telle que $d\alpha = 0$. Par théorème 2.2.1 de décomposition des classe dans $\mathcal{E}_{L^2}^1$, on peut supposer $\alpha = h + \beta + \gamma$ avec $h \in H$, $\beta \in E$ et $\gamma \in E^*$. Comme $d\alpha = 0$, α lisse, par lemme 2.2.3, donc $\gamma = 0$. Donc $\beta = \alpha - h$ est lisse dans E , par lemme 2.3.6, β est exacte, donc $\exists g \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\beta = dg$. On a donc $\alpha = h + dg$ avec $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, donc $[\alpha] = [h] \in H_{dR}^1(\mathcal{S})$. □

Théorème 3.3.2. L'application

$$H_{dR}^1(\mathcal{S}, \mathbb{C}) \times H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}, (\alpha, c) \mapsto \int_c \alpha$$

est bien définie, et induit un isomorphisme

$$H_{dR}^1(\mathcal{S}, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g}$$

avec g le genre de la surface Riemann \mathcal{S} .

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. \square

Corollaire 3.3.3. $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(\mathcal{S}) = g$. Ici $\Omega^1(\mathcal{S}) := \{1\text{-formes holomorphes sur } \mathcal{S}\}$.

Attention. C'est un résultat très profond, car il relie la structure holomorphe et la topologie ($g = \frac{1}{2} \text{rg} H_1(\mathcal{S}, \mathbb{Z})$).

Démonstration. Une 1-forme $\omega \in H$ si et seulement si $\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2}$ avec $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(\mathcal{S})$, c'est-à-dire

$$H = \Omega^1(\mathcal{S}) \oplus \overline{\Omega^1(\mathcal{S})}$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(H) = 2 \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(\mathcal{S}). H \simeq H_{dR}^1(\mathcal{S}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g}, \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} H = g. \quad \square$$

Définition 3.3.1 (Cohomologie de Dolbeault). Voir la complexe suivante :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^2$$

ici $d = \partial + \bar{\partial}$, on a vu que $d \circ d = 0$. On met une autre complexe :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_{\mathcal{C}^\infty}^2$$

rappelons que $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$. Donc on peut définir des groupes de cohomologie :

$$\bar{\partial} \mathcal{E}^0 \subseteq \mathcal{E}^{0,1} = \{hd\bar{z} \text{ localement}\}$$

$$\bar{\partial} \mathcal{E}^{0,1} = 0$$

$$\bar{\partial} \mathcal{E}^{1,0} \subseteq \mathcal{E}^{1,1} = E^2$$

$$H^{p,q}(\mathcal{S}) = \{\alpha \in \mathcal{E}^{p,q}, \bar{\partial}\alpha = 0\} / \bar{\partial} \mathcal{E}^{p,q-1}(\mathcal{S})$$

$$H^{0,0}(\mathcal{S}) = \{\text{fonctions holomorphes sur } \mathcal{S}\} \simeq \mathbb{C}$$

$$H^{1,1}(\mathcal{S}) = \{2\text{-formes } \omega \text{ sur } \mathcal{S}\} / \bar{\partial} \mathcal{E}^{1,0}$$

Fait. $\omega \in H^{1,1}(\mathcal{S}) \mapsto \int_{\mathcal{S}} \omega \in \mathbb{C}$ cette dualité de Poincaré implique que

$$H^{1,1}(\mathcal{S}) \simeq \mathbb{C}$$

On a de plus

$$H^{1,0}(\mathcal{S}) = \{(1, 0) \text{ formes } \bar{\partial} - \text{fermés}\} = \Omega^1(\mathcal{S})$$

$$H^{0,1}(\mathcal{S}) = \{(0, 1) \text{ formes}/\bar{\partial}\mathcal{C}^\infty.$$

Rappelons que $\alpha \in H$ si et seulement si $\exists \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(\mathcal{S})$ telle que $\alpha = \omega_1 + \bar{\omega}_2$.

Théorème 3.3.4. $\Phi: H \rightarrow H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, $\alpha \mapsto (\alpha^{1,0}, \alpha^{0,1})$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire.

De plus, l'involution $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ sur H induit un isomorphisme de $H^{1,0}$ sur $H^{0,1}$.

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. □

3.4 Corps des fonctions méromorphes

Définition 3.4.1. Soit \mathcal{S} une surface de Riemann compacte, on dit que $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ est une *fonction méromorphe* si et seulement si $\forall p \in \mathcal{S}$, il existe une coordonnées holomorphe local centrée en z tel que $z^k f(z)$ est holomorphe pour un $k \in \mathbb{N}$. Localement, $f(z) = \sum_{j \geq k_0} a_j z^j$ est sa série de Laurent. Si f n'est pas nulle, on peut choisir $k_0 \in \mathbb{Z}$, $a_{k_0} \neq 0$, telle que p est *un pôle* si et seulement si $k_0 < 0$ et note $|k_0|$ l'ordre du pôle. Sinon, $k_0 \geq 0$ et f est holomorphe en p .

Proposition 3.4.1. Fait. $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe, alors l'ensemble des pôles de f , notons J , est fini. La fonction

$$\hat{f}(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \notin J \\ \infty & \text{si } p \in J \end{cases}$$

est une fonction holomorphe de \mathcal{S} dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Démonstration. Si p est un pôle, $f(z) = \frac{g(z)}{z^k}$ avec $k > 0$, g holomorphe et $g(0) \neq 0$. Comme $f(p) = \infty$, on travaille dans la carte de $\hat{\mathbb{C}}$ contenant $\infty: \frac{1}{f(z)} = \frac{z^k}{g(z)}$ est bien holomorphe.

Réciproquement, si $f: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est holomorphe et n'est pas constante égale à ∞ , alors il existe $f_0: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe tel que $f = f_0$ sur $\mathcal{S} - f^{-1}(\infty)$. En effet, comme f n'est pas constante, $f^{-1}(\infty)$ est fini, et $f: \mathcal{S} - f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. On choisit $p \in f^{-1}(\infty)$, dans la carte centrée en l'infinité, $f(z) = \sum_{k \geq k_0 \geq 0} a_k z^k$ avec $a_{k_0} \neq 0$. Dans la carte centrée en 0, $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^{k_0}(a_{k_0} + \dots)}$ bien méromorphe. □

Conclusion. Soit \mathcal{S} surface de Riemann connexe compacte, alors

$$\{\text{fonctions méromorphe } f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}\} \xrightarrow{1:1} \{\text{fonctions holomorphes } f: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ telle que } f \neq \infty\}$$

Définition 3.4.2. On note $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions méromorphes $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$. Comme la proposition 0.3.2, on peut montrer que \mathcal{M} est un corps.

Exemple 3.4.1. Si $\mathcal{S} = \hat{\mathbb{C}}$, alors $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorphe et non constante, f s'écrit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $P \wedge Q = 1$, $\max\{\deg P, \deg Q\} \geq 1$. En particulier,

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}(z)$$

Ici l'isomorphisme est identifié après avoir choisi une coordonnées affine.

Théorème 3.4.2. Soit \mathcal{S} une surface de Riemann connexe et compacte et $f: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorphe non constante. Alors $g \mapsto g \circ f$ est un morphisme de corps. $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ est une extensions finie de $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ de degré $m = \deg(f)$.

Remarque.

1. Il existe des fonctions méromorphes non constantes sur \mathcal{S} .
2. Le théorème est plus précis. En particulier, toute extension finie de $\mathbb{C}(z)$ est isomorphe (en tant que corps) à $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ pour une surface de Riemann connexe compacte \mathcal{S} (Dedind-Weber).
3. On démontrera uniquement $[\mathcal{M}(\mathcal{S}): \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})] \leq \deg(f)$.

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. □

3.5 Groupe des diviseurs

Définition 3.5.1. Un *diviseur* D sur \mathcal{S} est une somme formelle de points

$$D = \sum_{i \in I} n_i(p_i), \quad p_i \in \mathcal{S}, \quad I \text{ fini}, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Et on note $\text{Div}(\mathcal{S})$ l'ensemble des diviseurs sur \mathcal{S} . C'est bien un groupe abélien libre engendré par des points $p \in \mathcal{S}$, avec l'addition définie par : soient $D, D' \in \text{Div}(\mathcal{S})$, note

$D = \sum_i n_i p_i$, $D' = \sum_j n_j p_j$, alors $D + D' := \sum_i n_i p_i + \sum_j n_j p_j$ avec la convention $n(p) + m(p) = (n + m)(p)$. L'application

$$\text{Div}(\mathcal{S}) \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{Z}, (D, p) \mapsto v_p(D)$$

est caractérisé par le fait que

$$D = \sum_{p \in \mathcal{S}} v_p(D)(p)$$

Notons que $\{p \in \mathcal{S} \mid v_p(D) \neq 0\}$ est fini. Posons donc $D = \sum_i n_i p_i$, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Alors $v_{p_i}(D) = n_i$, $v_p(D) = 0$ si $p \notin \{p_i\}$.

Définition 3.5.2 (degré d'un diviseur). Pour $D \in \text{Div}(\mathcal{S})$, notons $D = \sum_{i \in I} n_i(p_i)$, on définit le *degré* de D :

$$\deg(D) = \sum_{i \in I} n_i$$

Remarque. $\deg: \text{Div}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupe abélien surjectif.

Exemple 3.5.1 (diviseur principal). Posons $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ une fonction méromorphe non constante, on peut voir par la proposition 3.4.1 que $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante. Posons

$$\text{div}(f) = \sum_{p \in f^{-1}(0)} \text{ord}_p(f)(p) - \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} \text{ord}_p(f)(p)$$

D est dit *principal* s'il existe $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ non constante telle que $D = \text{div}(f)$.

Observation. Si $D = \text{div}(f)$, alors

$$\begin{aligned} \deg(D) &= \deg(\text{div}(f)) \\ &= \sum_{p \in f^{-1}(0)} \text{ord}_p(f) - \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} \text{ord}_p(f) \\ &= \deg(f) - \deg(f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque.

1. La réciproque est vraie si $\mathcal{S} = \hat{\mathbb{C}}$.
2. La réciproque est fausse dès que $g(\mathcal{S}) \geq 1$.

Définition 3.5.3. Soient $D, D' \in \text{Div}(\mathcal{S})$, on dit que D et D' sont *linéairement équivalents* si $D - D'$ est un diviseur principal (ou zéro), c'est-à-dire que $\exists f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ telle que $D - D' = \text{div}(f)$. On écrit $D \equiv D'$.

Remarque. Si $D \equiv D'$, alors $\deg(D - D') = 0$, donc $\deg(D) = \deg(D')$.

Exemple 3.5.2 (le diviseur canonique). On choisit ω une 1-forme méromorphe sur \mathcal{S} non nulle (on a démontré que $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(\mathcal{S}) = g$), posons

$$K_{\omega} = \sum_{p \in \mathcal{S}} v_p(\omega)(p)$$

si z est une coordonnées locale centrée en p , $\omega(z) = z^k(a + \sum_{j \geq 1} a_j z^j)dz$, $a \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $v_p(\omega) := k$. On sait que $v_p(\omega) < 0$ si et seulement si p est un pôle de ω , et que $v_p(\omega) > 0$ si et seulement si p est un zéro de ω .

Observation. $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S}) \Leftrightarrow p(\omega) \geq 0, \forall p \in \mathcal{S}$.

Observation Si ω, ω' sont deux 1-formes méromorphes non constantes, alors localement $\omega = h(z)dz$, $\omega' = g(z)dz$ et posons $f = \frac{h}{g}$, alors $\frac{\omega}{\omega'} = f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$, et $\forall p \in \mathcal{S}$, $v_p(f) = v_p(\omega) - v_p(\omega')$, ainsi

$$\begin{aligned} K_{\omega} - K_{\omega'} &= \sum_{p \in \mathcal{S}} (v_p(\omega) - v_p(\omega'))(p) \\ &= \sum_{p \in \mathcal{S}} v_p(f)(p) \\ &= \operatorname{div}(f) \end{aligned}$$

Donc K_{ω} et $K_{\omega'}$ sont linéairement équivalents. En particulier, $\deg(K_{\omega}) = \deg(K_{\omega'})$.

Remarque. On parle d'un diviseur canonique et pas du divisuer canonique (car elle est la classe d'équivalence linéaire canonique).

Lemme 3.5.1. $\deg(K_{\omega}) = 2g - 2$.

Démonstration. On va choisir $f: \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ holomorphe non constante. On pose $\omega = df$, ω est holomorphe sur $\mathcal{S} \setminus f^{-1}(\infty)$. Quitte à remplacer f par $\phi \circ f$ avec $\phi \in PGL(2)$, on peut supposer que ∞ n'est pas une valeur critique donc le cardinal de $f^{-1}(\infty)$ est $\deg(f)$.

idée : appliquer Riemann-Hurwitz à f et conduire. Soit $p \in \mathcal{S} \setminus f^{-1}(\infty)$, dans une carte holomorphe centrée en p , t.q. $f(z) = f(0) + z^k$, $k = \operatorname{ord}_p(f)$. On a $\omega = df = kz^{k-1}dz$, et donc $v_p(\omega) = k - 1 = \operatorname{ord}_p(f) - 1$.

$$K_{\omega} = \sum_{v_p(\omega) \geq 1} v_p(\omega)(p) + \sum_{f(p)=\infty} v_p(\omega)(p) = \sum_{v_p(f) \geq 2} (\operatorname{ord}_p(f) - 1)(p) + \sum_{f(p)=\infty} v_p(\omega)(p)$$

Par le lemme suivant, on a $\sum_{f(p)=\infty} v_p(\omega) = -2\#f^{-1}(\infty) = -2\deg(f)$. Pose le degré de K_ω on a

$$\deg(K_\omega) = \sum_{v_p(f) \geq 2} (\text{ord}_p(f) - 1) - 2\deg(f)$$

et par Riemann-Hurwitz on a

$$2 - 2g = \deg(f) \times 2 - \sum (\text{ord}_p(f) - 1)$$

donc $\deg(K_\omega) + 2 - 2g = 0$. □

Lemme 3.5.2. $f \in \mathcal{M}(S)$ et ∞ n'est pas une valeur critique de f , si $f(p) = \infty$, alors $v_p(df) = -2$.

Démonstration. f est un biholomorphisme local en p , donc $f(z) = \frac{1}{z}$ dans une carte locale, et $df = -\frac{1}{z^2}dz$, donc $v_p(df) = -2$. □

Remarque.

1. Si $g = 0$, alors $\deg(K_\omega) = -2$. Posons $\omega = dz$, dans la carte de l'infini, $z' = \frac{1}{z}$, et on a $\omega = d(\frac{1}{z'}) = -\frac{dz'}{z'^2}$.
2. Si $g = 1$, alors $\deg(K_\omega) = 0$. Maintenant, K_ω est principal.
3. Si $g \geq 2$, alors $\deg(K_\omega) = 2g - 2 > 0$. $\exists \omega \in \Omega^1(\mathcal{S})$ avec le nombre des zéros de ω est égal à $2g - 2$ (comptées avec multiplicité).

Terminologie.

- D est un diviseur *effectif* si $v_p(D) \geq 0, \forall p \in \mathcal{S}$. On note $D \geq 0$.
- Si D effectif, alors $\deg(D) \geq 0$ et $\deg(D) = 0 \Leftrightarrow D = 0$. Si $\omega \in \Omega^1(\mathcal{S})$, alors $K_\omega \geq 0$.
- $D \in \text{Div}(\mathcal{S})$, on note

$$H^0(D) = \{f \in \mathcal{M}(\mathcal{S}) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\}$$

Lemme 3.5.3. $H^0(D)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. □

Remarque.

- Par convention, $0 \in H^0(D)$, et $\text{div}(0) = +\infty$.
- Si $D = 0$, alors $H^0(D)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathcal{S} , donc $H^0(D) = \mathbb{C}$.
- Si $\deg(D) < 0$, alors $H^0(D) = \{0\}$. En effet, si $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ telle que $\text{div}(f) + D \geq 0$, alors $0 = \deg \text{div}(f) \geq -\deg(D)$, contradiction.

Lemme 3.5.4. Si D et D' sont deux diviseurs linéairement équivalents, alors $H^0(D) \simeq H^0(D')$.

Démonstration. Voir les notes sur <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/charles.favre/Surfaces%20de%20Riemann-Hefei-2023/>. \square

3.6 Théorème de Riemann-Roch

Théorème 3.6.1. Pour tout $D \in \text{Div}(\mathcal{S})$, l'espace $H^0(D)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On note $h^0(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(D)$ et on a

$$h^0(D) - h^0(K_{\omega} - D) = \deg(D) + 1 - g$$

Ici K_{ω} est un diviseur canonique.

Observation. Prenons $D = K_{\omega}$, alors $h^0(K_{\omega}) = 1 + 2g - 2 + 1 - g = g$. En effet, on peut vérifier que l'application $H^0(K_{\omega}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{S})$, $f \mapsto f\omega$ définit bien un isomorphisme. Donc le théorème de Riemann-Roch appliqué à $D = K_{\omega}$ donne $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(\mathbb{C})$ est finie et égale à g .

Théorème 3.6.2. $p \in \mathcal{S}$, $n \geq 2g$. Il existe une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$ holomorphe sur $\mathcal{S} \setminus \{p\}$ ayant un pôle d'ordre n en p .

Démonstration. Comme $n \geq 2g$,

$$\deg(K_{\omega} - (n-1)p) = 2g - 2 - (n-1) < 0$$

on a $h^0(K_{\omega} - (n-1)p) = 0$, de même $h^0(K_{\omega} - np) = 0$. Par Riemann-Roch, $h^0((n-1)p) = n - g$, $h^0(np) = n + 1 - g$, donc $\exists f \in H^0(np) \setminus H^0((n-1)p)$, alors $f \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$, holomorphe sur $\mathcal{S} - \{p\}$ avec un pôle d'ordre exactement n . \square

Démonstration. 1) $h^0(D) \geq \deg(D) + 1 - g$.

2) $\forall p \in \mathcal{S}$, $\forall D \in \text{Div}(\mathcal{S})$, $h^0(D) \leq h^0(D + (p)) \leq h^0(D) + 1$.

3) $\phi(D) = h^0(D) - h^0(K_\omega - D) - \deg(D)$. $D \leq D' \Rightarrow \phi(D) \leq \phi(D')$.

4) Conclusion : $\phi \equiv 1 - g$.

□