2023 Differential Geometry- TD 5

1. Application C^1 injective

Considérons une application f de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est injective.

1– Montrer que la différentielle de f est de rang m sur un ouvert dense de $\mathbb{R}^m$.

2– En déduire que $m \leqslant n$.

3– La différentielle de f est-elle nécessairement de rang m partout ?

2. Soit P un polynôme homogène à $n+1$ variables sur $\mathbb{R}$ tel que les $\partial_i P$ n'aient aucun zéro commun autre que 0 (par exemple $P(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$). Montrer que l'intersection de la sphère unité et de $P^{-1}(0)$ est une sous-variété.

3. *Groupe pseudo-orthogonal*
Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2.$$

Montrer que l'ensemble des matrices $A \in M_n\mathbb{R}$ telles que $Q(Ax) = Q(x)$ pour tout x est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$.

4 Montrer que l'image d'une immersion injective propre est une sous-variété (propre signifie que l'image réciproque d'un compact est compacte).

5. Équation globale d'une sous-variété

Soit N une sous-variété fermée de M.

1– Soit $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage U_x de x dans M et une fonction C^∞ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ telle que $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

2– Montrer qu'il existe une fonction C^∞ $F : M \to \mathbb{R}$ telle que $N = F^{-1}(0)$.

6. Intersection de sous-variétés

Soit M_0 une variété de dimension d, et M et N deux sous-variétés de M_0 de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = T_xM_0$, alors $M \cap N$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de M_0. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**. La réciproque est-elle vraie ?

- Soit P un polynôme homogène à $n+1$ variables sur $\mathbb{R}$ tel que les $\partial_i P$ n'aient aucun zéro commun autre que 0 (par exemple $P(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^k$). Montrer que l'intersection de la sphère unité et de $P^{-1}(0)$ est une sous-variété.

$$F(x_1 \ldots x_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1 \ , \ P(x_1 \ldots x_n) \right)$$

$$dF = \begin{pmatrix} 2x_1, & 2x_2, & \ldots & 2x_{n+1} \\ \partial_1 P, & \partial_2 P, & \ldots & \partial_{n+1} P \end{pmatrix}$$

$\forall\, x \in S = S^{n+1}(1) \cap P^{-1}(0)$ 不妨设 $x_1 \neq 0$

由 P 为 polynomial, $\underset{0}{\underset{\|}{dP}}(x_1 \ldots x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \partial_i P \cdot x_i$

$$\Rightarrow x_1 \partial_1 P + \sum_{j \neq 1} x_j \partial_j P = 0$$

if $\partial_j P = 0$ for $j \neq 1$, 由条件 $\Rightarrow \partial_1 P \neq 0$

但 $x_1 \neq 0$

$$\Rightarrow P(x_1 \ldots x_{n+1}) \neq 0. \text{ 矛盾、}$$

从而 $\exists\ j \neq 1$. s.t $\partial_j P \neq 0$

从而 $\operatorname{rank}(dF|_x) = 2$, F is submersion

$$P(tx_1, \ldots, tx_n) = t^d P(x_1, \ldots x_n)$$

对 t 求导, $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) = d\, t^{d-1} P(x_1, \ldots, x_n)$

令 $t=1$, $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = d\, P(x_1, \ldots, x_n)$

19. *Groupe pseudo-orthogonal*
Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2.$$

Montrer que l'ensemble des matrices $A \in M_n\mathbb{R}$ telles que $Q(Ax) = Q(x)$ pour tout x est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$.

let $\quad J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$

$Q(x) = x^t J x \quad . \qquad Q(Ax) = (Ax)^t J Ax = x^t A^t J A x$

$Q(Ax) = Q(x) \iff A^t J A - J = 0$

define $\quad f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(n)$

$\qquad\qquad A \longmapsto A^t J A - J$

$\mathbb{R}$!) $Q(n) = f^{-1}(0)$

$$df_A(B) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+tB) - f(A)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((A+tB)^t J (A+tB) - A^t J A \right)$$

$$= A^t J B + B^t J A$$

if S is symmetric and $A \in Q(n)$ $\qquad J^2 = I$

$$df_A\left(\frac{AJS}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(A^t J A J S + S^t J^t A^t J A\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(J^2 S + S^t J^t J\right) = \frac{1}{2}(S + S) = S$$

So df_A is surjective .

Appendix

Theorem 2.26. *Let X and Y be two manifolds of dimensions m and n respectively, and let $f : X \to Y$ be a smooth map, and $x \in X$.*

i) *If $T_x f$ is bijective, there exists an open subset U containing x such that $f_{|U}$ is a diffeomorphism to $f(U)$.*

ii) *If $T_x f$ is injective or surjective, there exists open subsets U containing x and V containing $f(x)$, and charts (U, ϕ) and (V, ψ) such that*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) & \text{if } T_x f \text{ is injective} \\ (x_1, \ldots, x_m) & \text{if } T_x f \text{ is surjective.} \end{cases}$$

Definitions 2.27

a) *A map f from a manifold X to a manifold Y is a* immersion *(resp. a* submersion*) if for every $x \in X$ the linear tangent map is injective (resp. surjective).*

b) *A subset M of a manifold X of dimension n is a p*-dimensional submanifold of X *if for every x in M, there exists open neighborhoods U and V of x in X and 0 in $\mathbf{R}^n$ respectively, and a diffeomorphism*

$$f : U \longrightarrow V \text{ such that } f(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^p \times \{0\}).$$

It is of course the same to say that for every $x \in M$ there exists a chart (U, ϕ), where $x \in U$, such that $\phi(U \cap M)$ is a submanifold of $\mathbf{R}^n$.

4 Montrer que l'image d'une immersion injective propre est une sous-variété (propre signifie que l'image réciproque d'un compact est compacte).

$f: N \longrightarrow M$ proper injective immersion ($\Rightarrow$ embedding)

- proper $\Longrightarrow$ closed

  $U \subset N$ closed, $f(U) \subset M$, $y_n = f(x_n) \in f(U) \to y$

  $\{y_n\} \cup y$ is compact $\xrightarrow{\text{proper}}$ $f^{-1}(\{y_n\} \cup y)$ is compact

  so $x_n \xrightarrow{\text{子序列}} x_\infty \in f^{-1}(\{y_n\} \cup y)$.

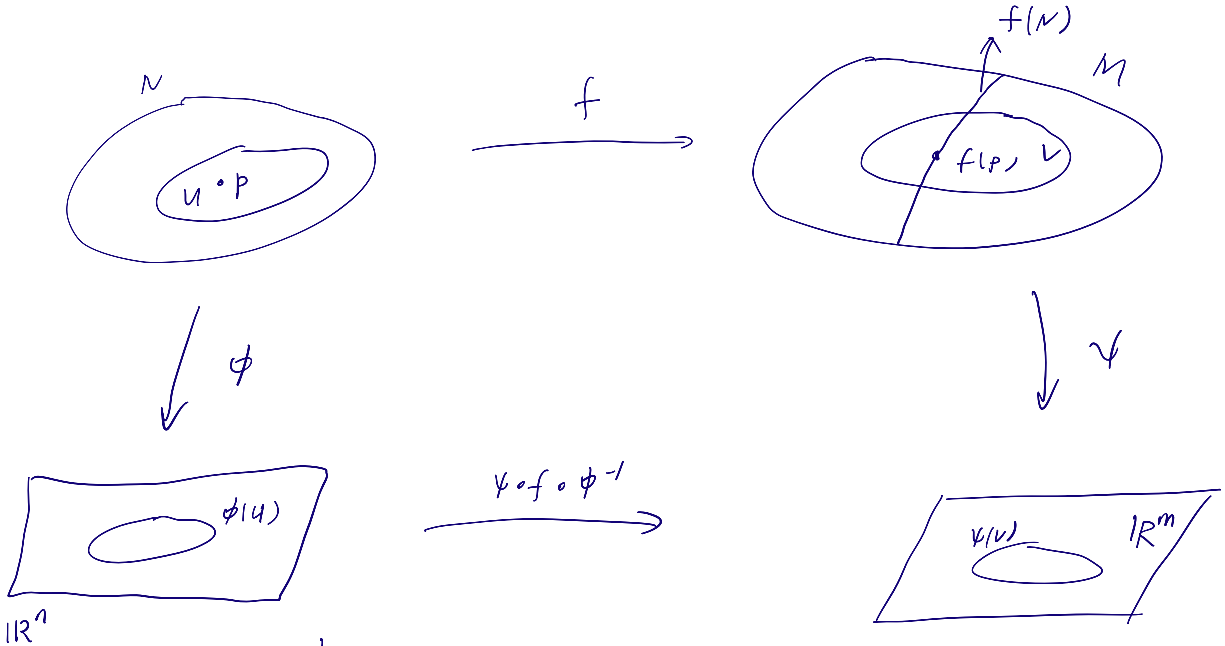
  则 $f(x_n) \longrightarrow f(x_\infty) = y \in f(U)$

- $f: N \to f(N)$ bijective, so. $f^{-1}: f(N) \to N$ 存在

  $\forall\ U \subset N$ closed $\Rightarrow$ $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ is closed

  so f^{-1} is continuous,

  即 $f: N \to f(N)$ bijective, continuous.



$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\big|_{\phi(U)}: (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$

由 $f: N \to f(N)$ bijective continuous.

$f(U)$ is open in $f(N)$

$\Rightarrow \exists\ V' \subset M$ open, s.t $V' \cap f(N) = f(U)$

$V \cap V'$ is open

$(V \cap V') \cap f(N) = V \cap f(U) = f(U)$

$\psi((V \cap V') \cap f(N)) = \psi(f(U))$

$= \psi(V) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$

5. (a) $N^n \subset M^m$ closed submanifold, $x \in M$. show $\exists$ U_x of x

in M and C^∞ $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$ s.t. $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$.

If $x \in N$. then $\exists$ U_x of x in M and submersion $G_x : U_x \to \mathbb{R}^k$

$k = m-n$, s.t $U_x \cap N = G_x^{-1}(0)$. let $F_x = \sum_{i=1}^{k} (G_x^i)^2$

then $F_x : U_x \to \mathbb{R}^+$. 满足 $U_x \cap N = F_x^{-1}(0)$

If $x \notin N$. 由 N closed. $\exists$ U_x of x in M. $U_x \cap N = \phi$.

let $F_x : U_x \to \mathbb{R}$ be a constant $\neq 0$.

we have $U_x \cap N = \phi = F_x^{-1}(0)$

(b) let $\{U_x\}_{x \in M}$. be the open cover in (a) of M.

$\{\rho_x\}_{x \in M}$ be a C^∞ partition of unity associated with $\{U_x\}_{x \in M}$.

put $F = \sum_{x \in M} \rho_x F_x$ with is C^∞ as the sum is locally finite

Check: $N = F^{-1}(0)$

6. $M^m \subset \mathbb{R}^d$. $N^n \subset \mathbb{R}^d$. submanifold

对 $x \in M \cap N$. 由子流形定义. $\exists$ $U \subset \mathbb{R}^d$ of x.

$$F: U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-m}$$

$$G: U \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d-n}$$

$$U \cap M = \{F = 0\}, \quad U \cap N = \{G = 0\}$$

then $U \cap M \cap N = \{(F, G) = (0, 0)\}$.

where $(F, G): U \longrightarrow \mathbb{R}^{2d-m-n}$

- show (F, G) is a submersion at x.

$$\begin{aligned} \dim \ker d(F, G)|_x &= \dim(\ker dF|_x \cap \ker dG|_x) \\ &= \dim(T_xM \cap T_xN) \\ &= m + n - d \end{aligned}$$

Then $\dim \operatorname{Im} d(F, G)|_x = d - (m+n-d) = 2d - m - n$

so. $d(F, G)|_x$ is surjective

So. $M \cap N$ is a submanifold of dim $d - (2d-m-n) = m+n-d$

tangent space at x = $T_xM \cap T_xN$

- 反过来不对: $M \cap M$, 但 $T_xM + T_xM = \mathbb{R}^d$.