中国科学技术大学数学科学学院

2019学年秋季学期期末考试试卷

■A 卷　　　□B 卷

课程名称　代数（I）　　　课程编号　001661

姓名__________　　　学号__________　　　学院__________

题号	1	2	3	4	总分
得分					

习题之中如果某一步不会做（但若能猜到结果），之后的步骤可以直接利用该步结果做之后的步骤，之后步骤如果正确仍可以得分。法国式考试：满分20分，10分及格。按小问数目大概可以猜出基本是每问1 分，偶尔有0.5分或2分的。

用法语答卷额外赠送1分！

得分	

习题1.

1. 设E为有限维向量空间，$f \in \mathcal{L}(E)$为自同态而且满足$f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0$，求证$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$。
2. 设(e_1, e_2, e_3)为E的一组基，令$f \in \mathcal{L}(E)$使得$f(e_1) = e_1 - e_3; f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3; f(e_3) = 2e_1 + 4e_3$。求证$f$满足上题的条件。
3. 具体计算$\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$。
4. 不计算$\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E)$，直接求其维数。

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0$, montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(e_1) = e_1 - e_3; f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3; f(e_3) = 2e_1 + 4e_3$. Montrer que f vérifie l'hypothèse de la question précédente.
3. Calculer $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.
4. Donner la dimension de $\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

装订线 答题时不要超过此线

得分	

习题2.

本题中承认上课没有详细证明的结论：若K是域，则多项式环$K[t]$是唯一因子分解环，即任何非常数首一多项式可以唯一分解为首一不可约多项式的乘积。

1. 考虑$\alpha \in \mathbb{C}$，若α是某个非零首一多项式$P \in \mathbb{Q}[t]$的根，则称α为代数数。求证此时存在P的一个首一不可约因子Q以α为根。

2. 求证若α是某$\mathbb{Q}$系数首一不可约多项式的根，则该多项式是唯一的。把上一问中得到的唯一的Q记为Q_α，并证明Q_α是以α为根的所有非零多项式之中次数最低的。

3. 考虑$\alpha \in \mathbb{C}$，令F是包含α的$\mathbb{C}$的子域。求证若F作为$\mathbb{Q}$向量空间是有限维的，那么α是代数数。

4. 反过来，假设$\alpha \in \mathbb{C}$是代数数。

   (a) 令F是包含α的$\mathbb{C}$和$\mathbb{Q}$的最小子环，求证
   $$F = \{f(\alpha) \in \mathbb{C} | f \in \mathbb{Q}[t]\}，$$
   把它记作$\mathbb{Q}[\alpha]$。

   (b) 求证$\mathbb{Q}[\alpha]$作为$\mathbb{Q}$向量空间是有限维的，并且$\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\alpha] = \mathrm{deg}Q_\alpha$。

   (c) 求证$\mathbb{Q}[\alpha]$是域，即若多项式$f \in \mathbb{Q}[t]$使得$f(\alpha) \neq 0$则$f(\alpha)$在$\mathbb{C}$中的逆在$\mathbb{Q}[\alpha]$ 中。（从而它是$\mathbb{C}$中包含α的最小域。）

5. 令$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$，求出$\mathbb{Q}[\alpha]$作为$\mathbb{Q}$向量空间的维数并给出一组具体的基。

Dans cet exercice, on admet l'énoncé suivant. Soit K un corps (commutatif), alors $K[t]$ est un anneau factoriel: tout polynôme unitaire non constant peut être décomposé uniquement comme un produit de polynômes unitaires irréductibles.

1. Considérons $\alpha \in \mathbb{C}$, si α est une racine d'un certain polynôme unitaire non nul $P \in \mathbb{Q}[t]$, on dit que α est un nombre algébrique. Montrer qu'il existe un facteur irréductible unitaire Q de P tel que $Q(\alpha) = 0$.

2. Montrer que si α est une racine d'un certain polynôme irréductible unitaire à coefficients rationnels, alors un tel polynôme est unique. On désigne le polynôme Q uniquement obtenu dans la question précédente par Q_α, montrer que Q_α est du plus petit degré parmi les polynômes non nuls ayant α comme une racine.

3. Considérons $\alpha \in \mathbb{C}$, soit F un sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant α. Montrer que si le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel F est de dimension finie, alors α est un nombre algébrique.

4. Réciproquement, supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre algébrique.

   (a) Soit F le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant α et $\mathbb{Q}$, montrer que $F = \{f(\alpha) \in \mathbb{C} | f \in \mathbb{Q}[t]\}$, on le note par $\mathbb{Q}[\alpha]$.

   (b) Montrer le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$ est de dimension finie, et de plus $\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}[\alpha] = \mathrm{deg}Q_\alpha$。

   (c) Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps (commutatif), autrement dit si le polynôme $f \in \mathbb{Q}[t]$ vérifie $f(\alpha) \neq 0$ alors l'inverse de $f(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$ se trouve dans $\mathbb{Q}[\alpha]$. (Alors il est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant α.)

5. Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, donner la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\alpha]$ et donner une base explicite.

得分	

习题3.

1. 设$P(X) \in \mathbb{C}[X]$，并且$P(X+1) = P(X)$。求证$P(X)$ 为常值多项式。
2. 设$R(X) \in \mathbb{C}(X)$，并且$R(X+1) = R(X)$。求证$R(X)$ 为常值有理函数。
3. 在$\mathbb{C}$中求有理分式$\dfrac{-X^5 - X^4 - X + 3}{X^4 + X^2}$的简单分式（部分分式）分解。
4. 从上一问中导出$\mathbb{R}$中的简单分式（部分分式）分解。

1. Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que $P(X)$ est un polynôme constant.
2. Soit $R(X) \in \mathbb{C}(X)$ telle que $R(X+1) = R(X)$. Montrer que $R(X)$ est une fraction rationnelle constante.
3. Avec coefficients dans $\mathbb{C}$, donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{-X^5 - X^4 - X + 3}{X^4 + X^2}$.
4. En déduire sa décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$.

得分	

习题4.

对于$\mathbb{R}^3$ 中的一些过原点的直线$L_i(1 \leq i \leq n)$，如果这些直线中任意三条都不共面，我们就称$\{L_i | 1 \leq i \leq n\}$ 为$\mathbb{R}^3$ 中处于一般位置的过原点直线族。

1. 设$\{L_i | 1 \leq i \leq 4\}$ 为$\mathbb{R}^3$ 中处于一般位置的过原点直线族，求证$\mathbb{R}^3$中存在一族向量(e_1, e_2, e_3, e_4)，使得以下三条同时被满足：
   - $\forall 1 \leq i \leq 4$，$L_i = \mathbb{R}e_i$；
   - (e_1, e_2, e_3) 是$\mathbb{R}^3$ 的一组基；
   - $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$。
2. 设$\{L_i | 1 \leq i \leq 4\}$ 和$\{L'_i | 1 \leq i \leq 4\}$ 为$\mathbb{R}^3$ 中两个处于一般位置的过原点直线族，求证存在$\mathbb{R}^3$ 上的可逆线性变换$\varphi \in GL_3(\mathbb{R})$，使得$\forall 1 \leq i \leq 4$，$\varphi(L_i) = L'_i$。
3. 假设上一问中存在两个满足条件的可逆线性变换$\varphi, \psi \in GL_3(\mathbb{R})$，求证存在非零实数$\lambda \in \mathbb{R}^*$，使得$\psi = \lambda\varphi$。
4. 从上述几问中总结出一个关于射影平面$\mathbb{P}^2$的定理。
5. 尝试陈述关于更高维射影空间$\mathbb{P}^n$的结论。（不要求给出证明。）

Pour une famille de droites vectorielles $L_i (1 \leq i \leq n)$ de $\mathbb{R}^3$, on dit que elle sont à position générale dans $\mathbb{R}^3$ si toutes les trois droites ne sont pas coplanaires.

1. Soit $\{L_i | 1 \leq i \leq 4\}$ une famille de droites vectorielles à position générale dans $\mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^3$ telle que:
   - $\forall 1 \leq i \leq 4$, $L_i = \mathbb{R}e_i$;
   - (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$;
   - $e_4 = e_1 + e_2 + e_3$.
2. Soient $\{L_i | 1 \leq i \leq 4\}$ et $\{L'_i | 1 \leq i \leq 4\}$ deux familles de droites vectorielles à position générale dans $\mathbb{R}^3$, montrer qu'il existe une application linéaire inversible $\varphi \in GL_3(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\forall 1 \leq i \leq 4$, $\varphi(L_i) = L'_i$.
3. Supposons qu'il existe deux telles applications linéaires $\varphi, \psi \in GL_3(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
4. En résumant les questions précédentes, énoncer un résultat concernant le plan projectif $\mathbb{P}^2$.
5. Essayer d'énoncer une généralisation pour l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ sans donner de preuve.