Introduction à la dynamique - Printemps 2024

Commentaires

Commentaires généraux

Il est nécessaire de bien distinguer les propriétés d'irréducibilité : transitivité topologique ; minimalité topologique ; ergodicité ; unique ergodicité ;...

Il faut être **précis sur les théorèmes ergodiques** *employés : Birkhoff dans le cas ergodique ; Birkhoff dans le cas général ; théorème ergodique uniforme ; théorème ergodique sous-additif ;...Ces théorèmes ont des hypothèses et des conclusions spécifiques.*

On rappelle que le **théorème de changement de variable** *usuel a pour énoncé :*

Pour tous ouverts $U, V \subset \mathbb{R}^d$ et tout difféomorphisme $F : U \to V$ et toute fonction mesurable et positive $\phi : V \to \mathbb{R}$, en notant m la mesure uniforme sur $\mathbb{R}^d$

$$\int_V \phi(y)\, dm(y) = \int_U \phi \circ F(x) \cdot |\det DF(x)|\, dm(x).$$

Problème 1 Statistique des fractions continues

(Q1-3)

- Il s'agit de limites pour μ_G-presque partout.
- Le théorème de Birkhoff suppose l'intégrabilité de la fonction qui doit donc être vérifiée (ou obtenue en modifiant cette fonction pour (Q2)).

Problème 2 Automorphismes du tore

(Q1) Le théorème du changement de variable usuel suppose que l'on a un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^d$. Cela rend son application pénible ici, d'où la preuve proposée.

(Q2) Il faut chercher les fonctions invariantes modulo m, on peut se placer dans L^2 et utiliser les séries de Fourier (qui n'existent pas forcément dans L^1). La condition carré-sommable permet de montrer que la fonction est constante pp.

(Q3) Remarque : L'ergodicité n'implique pas la transitivité pour une mesure de support non-total. La transitivité topologique n'implique pas l'ergodicité pour $\mu \in \mathbb{P}(T_A)$ quelconque (exemple : $\mu = \frac{1}{2}(m + \delta_0)$).

(Q4) Deux difficultés : l'ordre de la racine de l'unité peut être > 1 (donc invariance par T_A^n du sous-tore ; il justifier que la projection dans le tore d'un fermé d'intérieur vide de $\mathbb{R}^d$ est encore d'intérieur vide.

Problème 3 Extensions de groupe itérées

(Q1) Comme dans le problème 2, on ne peut pas appliquer le théorème du changement de variable directement.

L'ergodicité des f_i découle de celle de f_d qui est une hypothèse : une extension par un groupe compact d'une dynamique ergodique ou même uniquement ergodique n'est pas forcément ergodique (par exemple si les $h_i \equiv 0$ alors aucun des f_i n'est ergodique). Ne pas confondre avec la propriété de récurrence (tout point dans la fibre d'un point récurrent est récurrent dans une extension par groupe compact).

(Q2) Il faut utiliser le fait que chaque translation est une autoconjugaison topologique et qu'alors $\tau(B(\mu)) = B(\tau_*(\mu))$.

(Q5) La structure de S comme suite d'extensions par groupe compact ne suffit pas à obtenir l'unique ergodicité comme le montre l'exemple de l'identité. Il faut une propriété d'irréductibilité pour conclure. L'ergodicité de (S, m_d) en est une, suffisante d'après les questions précédentes et relativement aisée à établir grâce aux séries de Fourier.

(Q7) On a besoin de la limite pour une orbite précise (celle de X_0), le théorème de Birkhoff est donc insuffisant, on doit utiliser le théorème ergodique uniforme.

Problème 4 Exposant de Lyapunov

(Q2) En général $\|Df^{n+m}(x)\| \leq \|Df^n(f^m x)\| \cdot \|Df^m(x)\|$ et l'inégalité peut être stricte. $\|Df^n(x)\|$ n'est donc pas en général l'exponentielle d'une somme de Birkhoff. On est donc amené à utiliser la notion de processus sous-additif et le théorème de Kingman plutôt que de Birkhoff.

(Q8) En dimension 1 la norme est multiplicative.