Chapter 1

Compléments de topologie

1.1 Notions de base

On rappelle brièvement les notions de base de topologie (voir par exemple Bourbaki, Topologie générale I).

Définition 1.1.1. Une topologie sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X,

a) qui contient $\emptyset$ et X,
b) qui est stable par réunion,
c) qui est stable par intersection finie.

$(X, \mathcal{T})$ est alors appelé un espace topologique.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont les *ouverts*, leurs complémentaires sont les *fermés*. Un *voisinage* d'un points x (respectivement de $A \subset X$) est un sous-ensemble qui contient un ouvert contenant x (respectivement A). L'*intérieur* de $A \subset X$ est le plus grand ouvert contenu dans A, il est noté $\mathring{A}$. L'*adhérence* de $A \subset X$ est le plus petit fermé contenant A, il est noté $\overline{A}$.

Exemples 1.1.2. a) La topologie grossière: $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

b) La topologie discrète: $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.
c) La topologie $\mathcal{T}_d$ définie par une distance d: les ouverts sont les réunions de boules ouvertes $B(x, r)$.
d) Etant donnée une topologie $\mathcal{T}_X$ sur X, la topologie induite sur $Y \subset X$:

$$\mathcal{T}_Y = \{V \cap Y,\ V \in \mathcal{T}_X\}\ .$$

On dit que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est une sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T}_X)$.
e) La réunion disjointe (somme) de deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ notée $Z = X \amalg Y$. Z est la réunion ensembliste de X et Y; les ouverts sont les réunions d'un ouvert de X avec un ouvert de Y.

Définition 1.1.3. Un base pour la topologie $\mathcal{T}$ sur X est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tel que tout ouvert $V \in \mathcal{T}$ s'écrit comme réunion d'élément de $\mathcal{B}$.

Proposition 1.1.4. *Il existe une topologie de base $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ si et seulement si*
a) X est réunion d'élément de $\mathcal{B}$, et
b) l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Dans les conditions ci-dessus, la topologie définie par $\mathcal{B}$ est unique: la topologie de base $\mathcal{B}$.

Exemples 1.1.5. a) Les boules ouvertes forment une base pour la topologie d'un espace métrique.
b) Etant donnés deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, les produits d'ouverts $V \times W$, $V \in \mathcal{T}_X$, $W \in \mathcal{T}_Y$ forme une base pour la *topologie produit.*

Définition 1.1.6. a) Etant donnés deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, l'application $f : X \to Y$ est *continue* si et seulement si l'image inverse de tout ouvert $W \in \mathcal{T}_Y$ est un ouvert: $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$.
b) f est un *homéomorphisme* si et seulement si f est bijective continue et f^{-1} est continue.
c) f est un *plongement* si et seulement si f définit un homéomorphisme entre X et $f(X)$ muni de la topologie induite par Y.
d) f est *ouverte* (respectivement *fermée*) si et seulement si l'image de tout ouvert (respectivement tout fermé) est un ouvert (respectivement un fermé).

Remarque 1.1.7. Dans la définition a), par passage au complémentaire, on peut remplacer ouvert par fermé.

Remarque 1.1.8. Une bijection continue n'est pas nécessairement un homéomorphisme.

Définition 1.1.9. a) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *connexe* si et seulement si les seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et X.
b) Un espace topologique est *séparé* si et seulement deux éléments distincts quelconques de X sont contenus dans des ouverts disjoints (la topologie sépare les points). En particulier les points sont fermés.
c) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *régulier* si et seulement s'il est séparé et pour tout fermé F et tout point $x \notin F$, il existe des ouverts disjoints qui séparent F et x.
d) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est *normal* si et seulement s'il est séparé et pour toute paire de fermés disjoints F et F', il existe des ouverts disjoints qui séparent F et F'.
e) Un espace *compact* est un espace topologique qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue:

(BL) de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

f) Une *partie compacte* d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace qui est compact (pour la topologie induite).

Remarques 1.1.10. Dans la littérature en français la définition de compact demande que l'espace soit en plus séparé, on dit alors quasi-compact si on ne veut pas préciser que l'espace est séparé.

Proposition 1.1.11. *Un espace topologique est compact si et seulement si pour toute intersection d'une famille de fermés qui est vide, il existe une sous-famille finie d'intersection vide.*

Etant donnée une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'un espace métrique X, l'ensemble de valeurs d'adhérence est l'intersection des fermés $A_n = \overline{\{x_k,\ k \geq n\}}$. Un élément $l \in X$ est valeur d'adhérence si et seulement s'il existe une sous-suite qui converge vers l.

Théorème 1.1.12 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Un espace métrique X est compact si et seulement si toute suite de points de X admet une sous-suite convergente.*

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

Remarques 1.1.13. 1. Tout espace normal est régulier.
2. Tout espace métrique est normal.

Proposition 1.1.14. *a) Dans un espace séparé les compacts sont fermés.*
b) Les sous-ensembles fermés d'un compact sont compacts.
c) L'image continue d'un compact est compacte.
d) Le produit de deux compacts est compact pour la topologie produit.

La proposition suivante est très utile dans la construction d'homéomorphismes.

Proposition 1.1.15. *Toute application continue injective d'un espace compact dans un espace séparé est un plongement, en particulier toute application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

Exercices 1.1.16.

1. Démontrer a),b) et c) de la proposition précédente.

2. Démontrer que si Y est un sous-espace d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ les ouverts de Y pour la topologie induite sont ouverts dans X.

3. Formuler et démontrer un résultat analogue lorsque Y est fermé dans X.

4. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour $x \in X$ on note $\mathcal{C}(x)$ la réunion de toutes les partie connnexes de X qui contiennent x.

   (a) Formuler soigneusement ce qu'est une partie connexe de X.

(b) Démontrer que $\mathcal{C}(x)$ est une partie connexe de X (on l'appelle la composante connexe de x).

(c) Démontrer que pour $x \neq y$, on a soit $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$, soit $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$

5. Démontrer que l'adhérence d'une partie connexe est connexe.
6. Soit Y le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ et de $\{0\} \times [-1, 1]$. Est-ce que Y est une partie connexe ?
7. Démontrer que la topologie produit sur $X \times Y$ est la topologie la moins fine (minimum d'ouverts) pour laquelle les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.
8. Etant donnés deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, démontrer que si X est compact la seconde projection $q : X \times Y \to Y$ est fermée.

1.2 Espaces localement compacts

Définition 1.2.1. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est localement compact si et seulement si tout point admet un voisinage compact.

Exemple 1.2.2. L'espace $\mathbb{R}^n$ est localement compact.

Théorème 1.2.3 (Compactification)**.** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé localement compact. Alors il existe un espace compact séparé $\widehat{X}$ qui contient X comme sous-espace et tel que $\widehat{X} \setminus X$ est formé d'un seul point habituellement noté ∞.*

Exercice 1.2.4. 1. Démontrer que $\widehat{\mathbb{R}}^n$ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}^n$ de rayon 1 dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Utiliser la *projection stéréographique*.
2. Soit X est un espace topologique séparé compact et $a \in X$. Démontrer que $Y = X \setminus \{a\}$ est localement compact et que son compactifié $\widehat{Y}$ est homéomorphe à X.

1.3 Espaces quotients

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X. On note $p : X \to \widetilde{X} = X/\sim$ la projection sur l'ensemble quotient.

Proposition 1.3.1. *$\widetilde{\mathcal{T}} = \{W \subset \widetilde{X},\ p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}$ définit une topologie sur $\widetilde{X}$. Cette topologie est la plus fine (a le maximum d'ouvert) parmi celles pour lesquelles l'application p est continue.*

$(\widetilde{X}, \widetilde{\mathcal{T}})$ est appelé l'espace topologique quotient de $(X, \mathcal{T})$ par la relation $\sim$.

Exemples 1.3.2.

1. L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est l'ensemble des droites de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$. Il s'identifie au quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la colinéarité: $u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \; v = \lambda u$.
2. Pour $A \subset X$, X/A est le quotient qui identifie tous les points de A.
3. Pour $A \subset X$ et $f : A \to Y$ continue, $Y \cup_f X$ est le quotient de $Y \amalg X$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications de a avec $f(a)$, pour tout $a \in A$.
4. $[0, 2] \times [0, 1]$ quotienté par $(0, t) \sim (2, t)$ est homéomorphe au cylindre $S^1 \times [0, 1]$.
5. $[0, 2] \times [0, 1]$ quotienté par $(0, t) \sim (2, 1 - t)$ s'appelle la bande de Mobius.
6. $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ quotienté par $(x, 0) \sim (x, 1)$ pour $x \neq 0$ est un espace non séparé.

Proposition 1.3.3. *a) Si $f : X \to Y$ est une application continue compatible avec la relation d'équivalence $\sim$ sur X, alors l'application quotient $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ est continue.*
b) Si f est ouverte (resp. fermée), alors $\widetilde{f}$ l'est aussi.

Exercices 1.3.4.

1. Si X est un espace topologique régulier et $A \subset X$ est fermé, alors X/A est séparé.
2. Si A est une partie compacte d'une espace topologique séparé X, alors X/A est séparé.
3. Notation: $\mathbf{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ est la boule unité, $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est la sphère unité.
   Montrer que $\mathbf{D}^n/\mathbf{S}^{n-1}$ est homéomorphe à $\mathbf{S}^n$.

Soit X un espace topologique. Une application $f : X \to Y$ définit sur X une relation d'équivalence: définie par l'égalité des images. On note $X/\mathcal{R}_f$ l'espace topologique quotient.

Définition 1.3.5. Une application continue $f : X \to Y$ est une application quotient si et seulement si elle induit un homéomorphisme $X/\mathcal{R}_f \approx Y$.

Proposition 1.3.6. *a) Si f est ouverte (resp. fermée) et surjective, alors f est une application quotient.*
b) Si f est surjective, X compact et Y séparé, alors f est une application quotient.

Exemple 1.3.7. Soit Y le quotient de la sphère $\mathbf{S}^n$ par l'antipodie: x est identifié à $-x$. Alors l'application $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto Y$, qui associe à x la classe de $\frac{x}{||x||}$ est une application quotient.

Proposition 1.3.8. *L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est séparé et compact.*

1.4 Variétés topologiques

Définition 1.4.1. Un espace topologique est *localement euclidien* de dimension n si et seulement si tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$; un tel homéomorphisme est appelé une *carte*.

Définition 1.4.2. Un espace topologique est à base dénombrable si et seulement si sa topologie admet une base dénombrable.

On va s'intéresser aux espaces à base dénombrable.

Proposition 1.4.3. *a)* $\mathbb{R}^n$ *est à base dénombrable.*
b) Un espace localement euclidien compact est à base dénombrable.
c) Un espace localement euclidien qui est réunion dénombrable de compacts est à base dénombrable.

Définition 1.4.4. Une variété topologique de dimension n est un espace séparé à base dénombrable localement euclidien de dimension n.

On montrera que la dimension est bien définie: une variété de dimension n n'est pas homéomorphe à une variété de dimension $m \neq n$. Une variété de dimension 0 est un espace discret dénombrable. Une variété de dimension 1 est appelée une courbe; une variété de dimension 2 est appelée une surface.

Pour démontrer qu'un espace séparé est une variété, il suffit de le recouvrir avec un ensemble fini ou dénombrable de cartes. Un ensemble de cartes qui couvrent une variété s'appelle un *atlas*.

Exemples 1.4.5. a) La sphère $\mathbf{S}^n$.
b) L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$, défini comme le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par la relation de colinéarité.

1.5 Variétés à bord

Définition 1.5.1. a) Un espace topologique est *localement euclidien* à bord de dimension n si et seulement si tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n_+ = [0, \infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$.
b) Une variété topologique à bord de dimension n est un espace séparé à base dénombrable localement euclidien à bord de dimension n.

On définit le bord ∂M d'une variété M comme l'ensemble des points x qui n'ont pas de voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. On démontrera (avec l'homologie) que le bord de M est formé des points qui par une carte sont envoyés dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. On admet provisoirement ce résultat:

Théorème 1.5.2. *Soit $\phi : V \to W \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ une carte de la variété à bord X. Pour $x \in V$, on a:*

$$x \in \partial X \Leftrightarrow \phi(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} .$$

Proposition 1.5.3. *Le bord d'une variété de dimension n est une variété de dimension $n-1$.*

Exemple 1.5.4. La boule $\mathbf{D}^n$ est une variété de bord $\mathbf{S}^{n-1}$.

Etant donné deux variétés à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un homéomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Un collier pour une variété à bord M est un plongement $c : ([0,1[\times \partial M, \{0\} \times M) \to (M, \partial M)$. On dit alors que (M, c) est une variété à collier (ou à bord épaissi).

Théorème 1.5.5. *Etant donné deux variétés à collier (M_1, c_1) et (M_2, c_2) de dimension n, le recollement avec un homéomorphisme $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ est une variété.*