I a) Soit $P \in GL_m(\mathbb{R})$ écrite par blocs :

$$P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ CA^{-1} & -I_{m-r} \end{pmatrix}$$

Alors $P\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & CA^{-1}B - D \end{pmatrix}$

$rg\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = r \iff rg\left(P\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = r \iff CA^{-1}B - D = 0$, car A est inversible.

I b) Soit $U = \left\{ M \in X_r,\ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ A \in GL_r(\mathbb{R}) \right\}$

D'après a), l'application

$\varphi : Gl_r(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times M_{m-r,r}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\varphi(A, B, C) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

est une immersion injective propre dont l'image est U.

Reste à écrire X_r comme union de U_{IJ}, où I et J sont des sous-ensembles de cardinal r de $\{1, \dots, m\}$ et $\{1, \dots, n\}$ respectivement correspondant aux mineurs non-nuls des matrices de X_r, et $U_{IJ} = P_I \cdot U \cdot Q_J$ pour certaines matrices de permutation P_I et Q_J.

mardi 18 janvier 2022 14:39

D'après la Prop 3.2 du cours, X_r est une variété de dim $r^2 + r(m-r) + r(n-r)$
$= r(m+n-r)$.

II. f est propre car $f^{-1}(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,\sqrt{r})}$. En fait $f(z) = z^2$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et les polynômes sont propres.

Pour calculer le degré on applique la Prop 17.7 :

$$J(f)_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

donc $(0,0)$ est le seul pt critique, et $(0,0)$ la seule valeur critique, et $\mathrm{Jac}(f) > 0$ en tout point régulier. Chaque valeur régulière a 2 préimages, donc le degré est $1+1 = 2$.

III a) Soient $x \neq y$ avec $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Si $d\varphi_x \neq 0$, on considère une carte locale U autour de x et V autour de y avec $U \cap V = \emptyset$ (sép séparé) et on construit un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ avec $\mathrm{supp}(X) \subset U$ et $X_x \notin \mathrm{Ker}\, d\varphi_x$. Alors $d\varphi_y(X) = 0$, $d\varphi_x(X) \neq 0$, donc si X est φ-lié à Y, $Y_{f(x)} \neq 0$, $Y_{f(y)} = 0$, contradiction car $f(x) \neq f(y)$.

Sans l'hypothèse $d\varphi_x \neq 0$ (oubliée dans l'énoncé) l'exercice n'est pas vrai, car si $\varphi = cte$, tout $X \in \mathfrak{X}(M)$ est φ-liè à $0 \in \mathfrak{X}(N)$.

III b) Si X φ-lié à Y et $f \in C^\infty(N)$, pour tout $x \in M$ on a :

$$X(\varphi^* f)_x = X(f \circ \varphi)_x = d(f \circ \varphi)_x (X_x)$$
$$= df_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x(X_x) = df_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)})$$
$$= Y(f)_{\varphi(x)} = \varphi^*(Y(f))_x, \text{ donc } X(\varphi^* f) = \varphi^* Y(f)$$

Réciproquement, si $X(\varphi^* f) = \varphi^*(Y(f))$ $\forall f$, les égalités précédentes montrent que pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$ et $x \in M$, $df_{\varphi(x)}(d\varphi_x(X_x) - Y_{\varphi(x)}) = 0$. On fixe $x \in M$

mardi 18 janvier 2022 15:25

et on choisit f égale aux coordonnés x_i d'une carte autour de $\varphi(x)$ dans N.

Ceci montre que $d\varphi_x(X_x) - Y_{\varphi(x)}$ est dans le noyau des différentielles des dx_i, donc est 0.

III c). Si X est φ-lié à Y et X' φ-lié à Y', pour toute $f \in C^\infty(N)$ on a d'après b) :

$$
\begin{aligned}
[X,X'](\varphi^* f) &= X(X'(\varphi^* f)) - X'(X(\varphi^* f)) \\
&= X(\varphi^*(Y'(f))) - X'(\varphi^*(Y(f))) \\
&= \varphi^*(Y(Y'(f))) - \varphi^*(Y'(Y(f))) \\
&= \varphi^*([Y,Y'](f))
\end{aligned}
$$

donc $[X,X']$ est φ-lié à $[Y,Y']$ d'après la réciproque de b).

IV a) Pour $n=1$, $\mathbb{R}^2 \setminus pt$ a le même type d'homotopie que S^1, donc

$$
H^p(\mathbb{R}^2 \setminus pt) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, 1 \\ 0 & p \geq 2. \end{cases}
$$

On montre par récurrence que :

$$H^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=0 \\ \mathbb{R}^n & p=1 \\ 0 & p \geq 2. \end{cases}$$

On suppose $n \geq 2$, et le résultat vrai pour $n-1$. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, et $V = B(p_n, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit pour que $p_i \notin V \ \forall i = 1, \dots, n-1$.

Alors $U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, $U \cap V = B(p_n, \varepsilon) \setminus \{p_n\}$ a le type d'homotopie de S^1, donc la suite exacte de Mayer-Vietoris donne :

$$0 \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R} \text{ (convexe)}}}{H^0(U \cup V)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^2 \text{ (convexes)}}}{H^0(U) \oplus H^0(V)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^0(U \cap V)}$$

$$\to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^{n-1} \text{ (réc)}}}{H^1(U \cup V)} \to \underset{\substack{\| \\ H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})}}{H^1(U) \oplus H^1(V)} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}}}{H^1(U \cap V)}$$

$$\to \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ (réc)}}}{H^2(U \cup V)} \to \underset{\substack{\| \\ H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})}}{H^2(U) \oplus H^2(V)} \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{H^2(U \cap V)}$$

ce qui ~~prouve~~ donne que $H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) = 0$ et en comptant les dimensions :

$$0 = 1 - 2 + 1 - (n-1) + \dim(H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\})) - 1$$

IV b) On peut appliquer 2 fois M-V ou plus simplement remarquer que $\mathbb{R}^3 \setminus X = \mathbb{R} \times (S^2 \setminus \{6 \text{ points}\})$ a le type d'homotopie de $S^2 \setminus 6$ points $= \mathbb{R}^2 \setminus 5$ points, et on conclut par a).

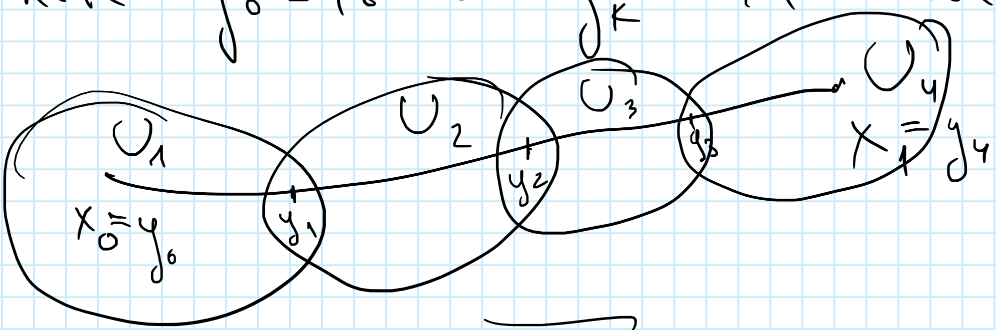
IV c) Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, $R > |x_0|, |x_1|$, ρ une fc C^∞ à support compact avec $\rho(p) = 1 \;\forall p \in B(0,R)$ et $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, $X_p = (x_1 - x_0)\,\rho(p)$.

Comme X est à support compact, son flot φ_t est défini pour tout temps t, et $\varphi_t(p) = p \;\forall p \in B(0,R)^c, \forall t \in \mathbb{R}$.

La courbe $c(t) = x_0 + t(x_1 - x_0)$ est courbe intégrale de X passant par x_0 : pour tout $t \in [0,1]$ car $c(0) = x_0$ et $c'(t) = x_1 - x_0 = X_{c(t)} \;\forall t \in [0,1]$ puisque pour $0 \leq t \leq 1$, $c(t) \in B(0,R)$ donc $\rho(c(t)) = 1$. Ceci montre que $\varphi_t(x_0) = x_0 + t(x_1 - x_0) \;\forall t \in [0,1]$, donc φ_1 est le difféomorphisme cherché

IV d) On relie x_0 et x_1 par un chemin continu $c : [0,1] \to M$. Par compacité de l'image, on peut recouvrir $c([0,1])$ par un nombre fini d'ouverts de l'atlas $U_1, \dots, U_K$, difféomorphes à $\mathbb{R}^n$ qu'on peut numéroter de sorte que $x_0 \in U_1$, $x_1 \in U_K$ et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ $\forall i$ entre 1 et $K-1$. Soit $y_i \in U_i \cap U_{i+1}$.

On note $y_0 = x_0$ et $y_K = x_1$. Par exemple :



Pour chaque $i \in \overline{1, K}$, il existe d'après c) un difféomorphisme f_i de U_i avec $f_i(y_i) = y_{i+1}$ et tq. $f_i(x) = x$ pour tout x en dehors d'un compact K_i contenu dans U_i. On prolonge f_i en un difféomorphisme g_i de M par l'identité en dehors de U_i.

Alors $g_K \circ g_{K-1} \circ \dots \circ g_1$ convient.

mardi 18 janvier 2022 17:39

IV e) Si $\mathbb{R}^2 \setminus Z_1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus Z_2$

$\Rightarrow H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Z_1) = H^1(\mathbb{R}^2 \setminus Z^2)$

$\overset{b)}{\Rightarrow} \operatorname{card} Z_1 = \operatorname{card} Z_2$

Réciproquement, on raisonne par récurrence, en utilisant d) !

V a1) Soient $U_0, U_1 \subset \mathbb{C}P^1$ les ouverts de l'atlas standard,

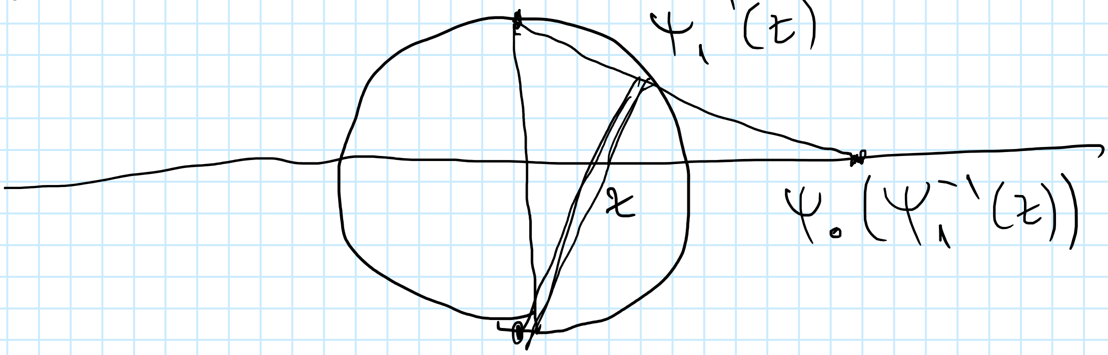
$U_0 = \{z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$,

$$\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, \quad [z_0 ; z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} \qquad \varphi_1(U_1) \to \mathbb{C}, \quad [z_0 ; z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1}$$

Le changement de carte est

$$\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto \frac{1}{z}.$$

Soient maintenant les projections stéréographiques $\psi_0 : S^2 \setminus (0,0,1) \to \mathbb{R}^2$, $\psi_1 : S^2 \setminus (0,0,-1) \to \mathbb{R}^2$. Le changement de carte $\psi_0 \circ \psi_1^{-1}$ se calcule sur un dessin ainsi :



(j'ai dessiné un plan de coupe vertical passant par z, et $(0,0,\pm 1)$),

Un raisonnement élémentaire donne $\psi_0 \psi_1^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$

On a donc $\psi_0 \circ \psi_1^{-1} = \overline{\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}}$ sur $\mathbb{C}^*$.

On définit alors $f : \mathbb{C}P^1 \to S^2$

par $f|_{U_0}(x) = \psi_0^{-1}(\overline{\varphi_0(x)})$

$f|_{U_1}(x) = \psi_1^{-1}(\varphi_1(x))$

Sur l'intersection $U_0 \cap U_1$ on a

$\psi_0^{-1}(\overline{\varphi_0(x)}) = \psi_1^{-1}(\varphi_1(x))$ car

si on note $x = \varphi_1^{-1}(z)$, $\psi_1^{-1}(\varphi_1(x)) = \psi_1^{-1}(z)$

et $\psi_0^{-1}(\overline{\varphi_0(x)}) = \psi_0^{-1}(\overline{\varphi_0(\varphi_1^{-1}(z))}) = \psi_0^{-1}(\psi_0 \circ \psi_1^{-1}(z))$

$= \psi_1^{-1}(z)$. Donc f est bien défini

V. a) Par IV d) on peut supposer $x = [0 : \dots : 0 : 1]$. Soit

$$j : \mathbb{C}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n \setminus \{x\}$$
$$[z_0 : \dots : z_{n-1}] \longmapsto [z_0 : \dots : z_{n-1} : 0]$$

(bien définie car si on change de représentant, l'image ne change pas)

et $r : \mathbb{C}P^n \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$

$$[z_0 : \dots : z_n] \longmapsto [z_0 : \dots : z_{n-1}]$$

(bien défini car $z_0, \dots, z_{n-1}$ ne sont pas tous nuls, sinon $[z_0 : \dots : z_n]$ serait égal à x)

On a $r \circ j = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ et $j \circ r$ homotope à $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}P^n \setminus x}$ par :

$$F(t, [z_0 : \dots : z_n]) = [z_0 : \dots : z_{n-1}, t z_n]$$

V b) On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on applique V a) et la cohomologie de la sphère.

mardi 18 janvier 2022 18:05

Soit $n \geq 2$ et le résultat vrai pour $n-1$. On prend deux ouverts

$U = \mathbb{C}P^n \setminus \{x\} \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ d'après Ja 2)

$V = U_n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid z_n \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n$

Alors $U \cup V = \mathbb{C}P^n$, $U \cap V = \mathbb{C}^n \setminus 0 \simeq S^{2n-1}$.

Ecrivons une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$H^{p-1}(U \cap V) \to H^p(\mathbb{C}P^n) \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(U \cap V)$$

pour p entre 2 et $2n-2$, les espaces de droite et de gauche sont nuls, donc

$$H^p(\mathbb{C}P^n) = H^p(U) \oplus H^p(V) = H^p(U) = H^p(\mathbb{C}P^{n-1})$$

$$\overset{HR}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ \mathbb{R} & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$$

Pour $p = 0$, $H^0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$ par connexité.

Pour $p = 1$, la suite exacte de MV donne :

$$0 \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(\mathbb{C}P^n)}} \to \underset{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(U) \oplus H^0(V)}} \to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(U \cap V)}} \to H^1(\mathbb{C}P^n)$$

$$\to \underset{0 \text{ par } HR}{\underset{\parallel}{H^1(U) \oplus H^1(V)}}$$

donc en comptant les dimensions, $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0$

mardi 18 janvier 2022 19:13

Enfin, $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$ car $\mathbb{C}P^n$ est compact, connexe, et $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n)$ est nul par dualité de Poincaré.

V c). Dans la suite exacte de MV :

$$0 = H^1(U \cap V) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^n) \to H^2(U) \oplus H^2(V) \to$$

$$\longrightarrow H^2(U \cap V) = 0,$$ on trouve que $\bar{i} : H^2(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^n \setminus \{x\})$ est un isomorphisme, où i est l'inclusion de $\mathbb{C}P^n \setminus \{x\}$ dans $\mathbb{C}P^n$. Si on note f l'inclusion de $\mathbb{C}P^{n-1}$ dans $\mathbb{C}P^n \setminus \{x\}$ définie au V a2), on a vu que $\bar{f}$ est un isomorphisme en cohomologie, donc si on note j l'inclusion de $\mathbb{C}P^{n-1}$ dans $\mathbb{C}P^n$, $j = f \circ i$, donc $\bar{j} = \bar{i} \circ \bar{f}$ est un isomorphisme de $H^2(\mathbb{C}P^n)$ vers $H^2(\mathbb{C}P^{n-1})$.

(on a supposé $n \geq 2$, sinon $H^1(U \cap V) \neq 0$).

VI a) $H^n(S^n \times S^n) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(S^n) \otimes H^q(S^n)$

$= H^0(S^n) \otimes H^n(S^n) \oplus H^n(S^n) \otimes H^0(S^n)$

$= H^n(S^n) \oplus H^n(S^n)$, par Künneth,

l'isomorphisme étant donné par

$\overline{p_1} + \overline{p_2} : H^n(S^n) \oplus H^n(S^n) \to H^n(S^n \times S^n)$

$(x, y) \longmapsto \overline{p_1}(x) + \overline{p_2}(y)$.

De même, $H^{2n}(S^n \times S^n) = \bigoplus_{p+q} H^p(S^n) \otimes H^p(S^n)$

$= H^n(S^n) \otimes H^n(S^n)$

(seul terme non-nul de la somme)

donc l'application

$H^n(S^n) \otimes H^n(S^n) \longrightarrow H^{2n}(S^n \times S^n)$

$(x \otimes y) \longmapsto \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(y)$

est un isomorphisme, en particulier si x est un générateur de $H^n(S^n) \simeq \mathbb{R}$, $\overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x) \neq 0$ dans $H^{2n}(S^n \times S^n)$.

VI b) Supposons l'existence de $f : S^n \times S^n \to S^n$ et de $e \in S^n$ t.q. $f(e,p) = f(p,e) = p$ $\forall p \in S^n$ (càd une opération avec élément neutre). On regarde le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[dr, "i_1"] & & S^n \\
& S^n \times S^n \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_2"'] & S^n \\
S^n \arrow[ur, "i_2"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

où $i_1(p) = (p, e)$ $\quad i_2(p) = (e, p)$

Par hypothèse on a $f \circ i_1 = f \circ i_2 = id_{S^n}$

donc $\bar{i}_1 \circ \bar{f} = \bar{i}_2 \circ \bar{f} = Id_{H^n(S^n)}$

Si x est un générateur de $H^n(S^n)$, on a d'après $\underline{\mathrm{VI}}(a)$ $\bar{f}(x) = a\bar{p}_1(x) + b\bar{p}_2(x)$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. (*)

Comme $p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2 = Id_{S^n}$ et $p_1 \circ i_2 = p_2 \circ i_1 =$ constante, on a $\bar{i}_1 \circ \bar{p}_1 = \bar{i}_2 \circ \bar{p}_2 = id_{H^n(S^n)}$ et $\bar{i}_1 \circ \bar{p}_2 = \bar{i}_2 \circ \bar{p}_1 = 0_{H^n(S^n)}$

On applique $\bar{i}_1$ et $\bar{i}_2$ à (*) et on trouve $x = a\bar{i}_1\bar{p}_1(x) + b\bar{i}_1\bar{p}_2(x) = ax$, donc $a = 1$, et de même $b = 1$, c'est à dire

$$\overline{f}(x) = \overline{p_1}(x) + \overline{p_2}(x).$$

On a alors, comme $x \wedge x \in H^{2n}(S^n) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{f}(x \wedge x) = \overline{f}(x) \wedge \overline{f}(x) \\
&= \left(\overline{p_1}(x) + \overline{p_2}(x)\right) \wedge \left(\overline{p_1}(x) + \overline{p_2}(x)\right) \\
&= \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_1}(x) + \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x) + \overline{p_2}(x) \wedge \overline{p_1}(x) \\
&\quad + \overline{p_2}(x) \wedge \overline{p_2}(x). \\
&= \overline{p_1}(\underbrace{x \wedge x}_{=0}) + \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x) + (-1)^{n^2} \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x) \\
&\quad + \overline{p_2}(\underbrace{x \wedge x}_{=0}) \\
&= \left(1 + (-1)^n\right) \overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x).
\end{aligned}$$

Comme $\overline{p_1}(x) \wedge \overline{p_2}(x) \neq 0$, n doit être impair.