2023 Differential Geometry- TD 6

1. (Théorie des enveloppes)
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ une famille de fonctions C^∞ définies sur le plan que l'on écira $f(\lambda, x, y)$. On suppose que pour tout (λ, x, y) annulant f, l'une des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x, y)$ est non nulle.

   (a) Montrer que l'ensemble $C_\lambda = \{(x, y) \mid f(\lambda, x, y) = 0\}$ est une sous-variété de dimension 1 (i.e. une courbe régulière plongée).

   (b) Montrer que la tangente à C_λ en (x_0, y_0) est donné par l'équation

$$(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} f(\lambda, x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} f(\lambda, x_0, y_0) = 0$$

   (c) Écrire des hypothèses suffisantes pour que l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \exists\lambda,\ f(\lambda, x, y) = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda, x, y) = 0\}$$

   définisse une courbe C^∞ notée Γ

   (d) Montrer sous les hypothèse précédentes, qu'en chacun de ses points, la courbe Γ est tangente à une des courbes C_λ. On appelle Γ l'**enveloppe** de la famille de courbes C_λ.

Examples

1. Fig1: the envelope of a family of circles centered at $(C, C) \in \mathbb{R}^2$
2. Fig2: the envelope of a family of ellipses defined by the equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 + b^2 = 1$$

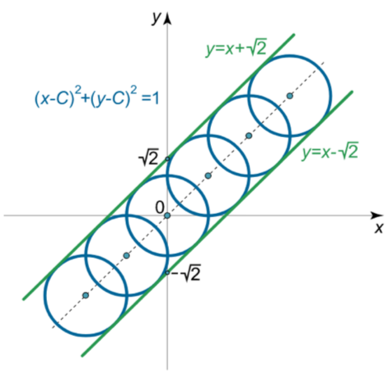


Fig1

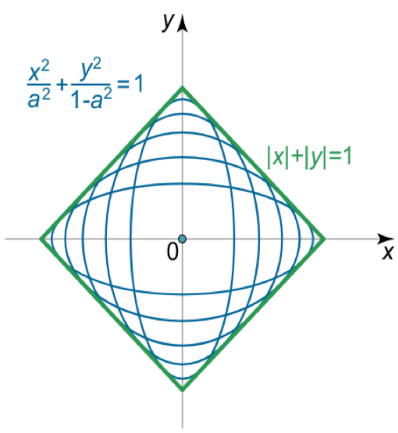


Fig2

2. Espace projectif

L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. On va le munir d'une structure de variété de dimension n. Chaque point $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ définit une droite (celle qui le contient), notée $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Ainsi, $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] = [x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star, (x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on note $U_i := \{x \in \mathbb{RP}^n,\ x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \text{ avec } x_i \neq 0\}$. On définit des fonctions $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ par

$$f_i([x_0 : \ldots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{RP}^n$ d'une structure de variété C^∞ (et même analytique) compacte de dimension n.

3. Fibration de Hopf, premiers pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & [x_0 : \ldots : x_n] \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local surjectif.

4. Exemples de plongements

(1) – Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2)$ est un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

(2) – Soit $m, n \geqslant 1$ des entiers. Montrer que le produit d'espaces projectifs $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$ se plonge dans $\mathbb{RP}^{(m+1)(n+1)-1}$ via l'application qui au couple $([x_0 : \ldots : x_m], [y_0 : \ldots : y_n])$ associe le point de coordonnées homogènes $[x_i y_j]_{0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n}$.

Exercice 5 (Courbes en polaire) — Soit $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$ une courbe paramétrée en polaire. Montrer que sa vitesse et sa coubure sont données par

$$|\dot\gamma| = \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2} \qquad \kappa = \frac{\rho^2 + 2\dot\rho^2 - \rho\ddot\rho}{(\rho^2 + \dot\rho^2)^{3/2}}$$

Déterminer ces quantités dans le cas où $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

2 ($\mathbb{RP}^n$)

- $x \in U_i$, we can write $x = [x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n]$

  then $U_i \cong \mathbb{R}^n$. $\quad f_i : [x_0, \ldots x_n] = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots \frac{x_n}{x_i}\right)$

  $$= (x_0, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

  is the identity map. so f_i is bijective.

- consider $f_1 \circ f_0^{-1}$

  $$f_0([x_0, \ldots x_n]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots \frac{x_n}{x_0}\right)$$

  $$f_1([x_0, \ldots x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}\right)$$

  on $f_1(U_1) \cap f_0(U_0) = \{ y \in \mathbb{R}^n, y_1 \neq 0 \}$

  $f_1 \circ f_0^{-1}(y_1, \ldots y_n) = \left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \ldots \frac{y_n}{y_1}\right)$ $\quad C^\infty$ diffeom.

  td $(U_i, f_i)_{i=1,\ldots n}$ define a C^∞ atlas.

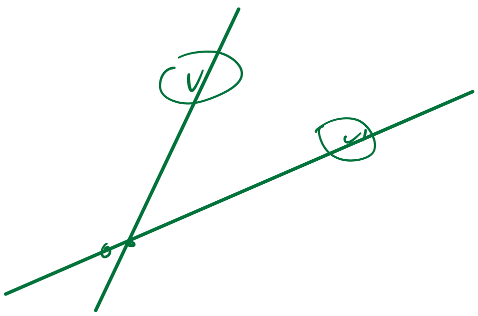
- as $i=1..n$ 有限. 故 the topology has a countable basis,
- $\mathbb{RP}^n$ is Hausdorff. $\forall x \neq x' \in \mathbb{RP}^n$.

  取 $v \neq v' \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. with $[v] = x$, $[v'] = x'$

  $\Rightarrow \exists$ open $V, V' \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$, $v \in V$, $v' \in V'$

  $\forall w \in V$. $w' \in V'$

  we have $[w] \neq [w']$



- compact. $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{RP}^n$ is continue. and the restriction of p on S^n is surjective so. $\mathbb{RP}^n = p(S^n)$ is compact.

3. $S^n \to \mathbb{R}P^n$

$(x_0, \; x_n) \longmapsto [x_0 : \cdot \; : x_n)$ is C^∞ local diffeom. surjective

① surjective ✓

② $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{R}P^n$. $(x_0 .. \; x_n) \longmapsto [x_0 : \cdots : x_n]$

Claim: p is a submersion C^∞. and $\ker dp|_x = \mathbb{R}x$

For $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. $\exists \; i = 1 .. \; n$. s.t $x_i \neq 0$

$U_i = \{ [x_0 .: \; : x_n] \in \mathbb{R}P^n, \; x_i \neq 0 \}$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $[x_0 : \cdot : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i} \ldots \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \; . \frac{x_n}{x_i} \right)$

(U_i, φ_i) is a local chart at x.

$\varphi_i \circ p : \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_0 .. \; x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \; . \; \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \; \frac{x_n}{x_i} \right)$

$$\frac{\partial (\varphi_i \circ p)}{\partial x_j} = \left(0, \cdot \; 0, \frac{1}{x_i}, 0 .. \; 0 \right)$$

where $\frac{1}{x_i}$ is at j for $j \leq i-1$

at $j-1$ for $j \geq i+1$

so. $\operatorname{rank} (d (\varphi_i \circ p)) = n$, $\varphi_i \circ p$ is a submersion.

an p is constant on $\mathbb{R}x$. so. $\ker (dp|_x) = \mathbb{R}x$

4. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $\qquad f'(x) = (1, x)$

$x \mapsto (x, x^2)$ $\qquad$ so f is an immersion

f is also injective and proper. so f is an embedding

(2) $f: \mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^{(m+1)(n+1)-1}$

$([x_0 : \cdots : x_m], [y_0 : \cdots : y_n]) \longmapsto [x_i y_j]_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n}}$

- f is injective

if $(x_0, \ldots x_m)$. $(y_0, \ldots y_n)$. $\to [x_i y_j]$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
$(x_0', \ldots x_m')$ $(y_0', \ldots y_n')$ $\to [x_i' y_j']$

$\text{则}\,|\; x_i y_j = \lambda x_i' y_j'$ all i, j

设 $x_1 y_1 = \lambda x_1' y_1' \neq 0$ then $x_1 = \lambda \frac{y_1'}{y_1} x_1'$

由 $x_i y_1 = \lambda x_i' y_1' \Rightarrow x_i = \frac{\lambda y_1'}{y_1} x_i'$, so. $x \,//\, x'$,

类似 $y \,//\, y'$. so. f is injective

- f is an immersion.

$f([1, x_1, \ldots x_m], [1, y_1, \ldots y_n]) = (1 : (x_i) : (y_j) : (x_i y_j))$

f has the form $f(x, y) = (x, y, F(x, y))$

so df is injective

- f is proper as $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{R}P^n$ is compact

Exercice 5 (Courbes en polaire) — Soit $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$ une courbe paramétrée en polaire. Montrer que sa vitesse et sa coubure sont données par

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \qquad \kappa = \frac{\rho^2 + 2\dot{\rho}^2 - \rho\ddot{\rho}}{(\rho^2 + \dot{\rho}^2)^{3/2}}$$

Déterminer ces quantités dans le cas où $\gamma(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

1. $\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t)e^{it} + i\rho(t)e^{it} = (\dot{\rho}(t) + i\rho(t))e^{it}$

$|\dot{\gamma}(t)|^2 = \dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2$

2. $t = t(s)$, $1 = \left|\frac{dr}{ds}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}}$

$\kappa(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)\cdot\vec{n}(s) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\vec{n} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\cdot\vec{n}\right)\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$

$\kappa = \frac{\det(\dot{r}, \ddot{r})}{|\dot{r}|^3}$

$\dot{r}(t) = (\dot{\rho} + i\rho)(\cos t + i\sin t) = \dot{\rho}\cos t - \rho\sin t + i(\dot{\rho}\sin t + \rho\cos t)$

$\ddot{r}(t) = (\ddot{\rho} + i\dot{\rho})e^{it} + i(\dot{\rho} + i\rho)e^{it} = (\ddot{\rho} - \rho + 2i\dot{\rho})(\cos t + i\sin t)$

$= (\ddot{\rho} - \rho)\cos t - 2\dot{\rho}\sin t + i((\ddot{\rho} - \rho)\sin t + 2\dot{\rho}\cos t)$

$\det(\dot{r}, \ddot{r}) = (\dot{\rho}\cos t - \rho\sin t)\cdot((\ddot{\rho} - \rho)\sin t + 2\dot{\rho}\cos t)$

$- (\dot{\rho}\sin t + \rho\cos t)((\ddot{\rho} - \rho)\cos t - 2\dot{\rho}\sin t)$

$= 2\dot{\rho}^2\cos^2 t - \rho(\ddot{\rho} - \rho)\sin^2 t + (\dot{\rho}(\ddot{\rho} - \rho) - 2\rho\dot{\rho})\sin t\cos t$

$- \rho(\ddot{\rho} - \rho)\cos^2 t + 2\dot{\rho}^2\sin^2 t - (\dot{\rho}(\ddot{\rho} - \rho) - 2\rho\dot{\rho})\sin t\cos t$

$= 2\dot{\rho}^2 - \rho(\ddot{\rho} - \rho)$