

## Exercice I

Considérez le système SIR

$$S' = -r \frac{SI}{N}, \quad I' = r \frac{SI}{N} - aI, \quad R' = aI. \quad (1)$$

avec conditions initiales  $S(t=0) = S_0 > 0$ ,  $I(t=0) = I_0 > 0$ ,  $R(t=0) = 0$ .

1. Expliquez ce que représentent  $S$ ,  $I$ ,  $R$ ,  $N$  et les constantes  $a$  et  $r$  dans ce modèle.
2. Montrez que la population totale est constante.
3. Est-ce que le système (1) peut être réduit à un système avec moins d'équations et, si c'est le cas, lequel ?
4. Déterminez les conditions sur  $S_0$  pour avoir une propagation de l'épidémie.
5. Déterminez la valeur maximale de  $I$  pendant l'épidémie.
6. Déterminez le nombre d'individus qui attrapent la maladie pendant l'épidémie.
7. Comment vous devez changer le système (1) pour prendre en compte la naissance et la mort d'individus (en supposant que les nouveaux-nés n'ont pas la maladie mais peuvent l'attraper par la suite) ?
8. Supposez maintenant qu'on peut vacciner à la naissance avec un vaccin complètement efficace pour éviter la maladie donnant une immunité pour le reste de la vie. Comment vous devez changer votre modèle pour prendre en compte que vous vaccinez 80% des nouveaux-nés ?
9. Comment vous devez changer le système (1) de façon à prendre en compte que l'immunité acquise après avoir été malade ne dure pas pour toujours mais seulement, en moyenne, un temps  $T$  ?

## Exercice II

Considérez une tumeur avec deux populations de cellules tumorales notées A et B, dont la dynamique est décrite par le système

$$\begin{cases} \dot{A} = G(A) - aA + bB, \\ \dot{B} = aA - bB - cB, \end{cases} \quad (2)$$

avec

$$G(A) = rA \left( 1 - \left( \frac{A}{K} \right) \right) \text{ pour } A \geq 0, \quad G(A) = 0 \text{ pour } A < 0. \quad (3)$$

et conditions initiales  $A(0) = A^0$  and  $B(0) = B^0$ . La taille de la tumeur est définie comme

$$N(t) = A(t) + B(t).$$

1. En tenant compte de ce que nous avons étudié dans le cours, indiquez à quoi correspondent les populations A et B et ce que représentent les coefficients  $a, b, c, r$  et  $K$  d'un point de vue biologique.
2. Quel est le nom de la loi de croissance  $G$  indiquée. Écrivez aussi l'expression de la loi de Gompertz et expliquez ce que représentent les paramètres.
2. Déterminez les états stationnaires de (2). Lesquels ont un sens biologique ?
3. Montrez (résultat du cours ou argument simples) que la dynamique (2) préserve la monotonie dans le sens

$$\dot{A}(0) > 0, \dot{B}(0) > 0 \implies \dot{A}(t) > 0, \dot{B}(t) > 0 \quad \forall t > 0. \quad (4)$$

4. Démontrez le résultat précédent en utilisant la méthode de Stampacchia.
- 5.a) Comment faudrait-il modifier ce modèle pour prendre en compte l'effet d'une thérapie cytostatique ? Écrivez le modèle correspondant en précisant ce que représentent les nouveaux paramètres.
- 5.b) Déterminez les états stationnaires (biologiquement significatifs) de ce nouveau système et étudiez leur stabilité linéaire.

5.c) Est-ce que, selon ce modèle, ce type de thérapie engendre toujours une réduction de la taille de la tumeur à long terme ? Justifiez votre réponse.

### Exercice III

On considère une population de bactéries dont la densité  $p(x, t)$  au point  $x \in \mathbb{R}$  et à l'instant  $t \geq 0$  est décrite par

$$\partial_t p - D\Delta p = f(p). \quad (5)$$

1.a. De quel type de modèle s'agit-il, et que représentent biologiquement les différents termes de l'équation (5) ?

b. Définissez ce que serait une solution de type onde progressive de (5) .

c. Si les bactéries avaient aussi une réponse chimiotactique à une molécule qui diffuserait (avec une constante de diffusion  $B$ ) et qui serait produite par les bactéries elles-mêmes de façon proportionnelle à leur densité, comment vous devriez modifier le modèle (5) pour le prendre en compte.

2. Considérez le cas particulier

$$\partial_t p - D\Delta p = p(3 - p)(p - \eta), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x, t) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x, t) = 0, \quad (6)$$

où  $0 < \eta < 3$ .

a. Quel est le nom de ce type de modèle ?

b. Est-ce que vous pouvez trouver des solutions décroissantes de type onde progressive (traveling wave) de (6), et est-ce qu'elles sont uniques ?

c. Qu'est-ce que ces solutions décrivent biologiquement et que pouvez vous dire sur leur vitesse de propagation ?

d. Soit  $v(x, t)$  une telle solution. Est-ce que la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(0, t)$$

existe et, si c'est le cas, quelle est sa valeur ? Justifiez votre réponse.

### Exercice IV

1. On considère une maladie à vecteur telle que :

- $H$ , la population totale de humains, et  $V$ , la population totale de vecteurs, sont grandes et sont constantes ;
- la maladie n'influence pas la mortalité des humains ni celle des vecteurs ;
- Le temps moyen de vie des humains est 80 ans et celui des vecteurs est 1 an ;
- la maladie ne donne pas d'immunité pour la suite ;
- Le temps moyen d'infection des humains est de 0.05 ans et celui des vecteurs de 0.1 ans ;
- Les taux d'infection des humains et des vecteurs sont notés  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , respectivement, et on suppose qu'on peut transmettre l'infection immédiatement après être contaminé .

a. Construisez un modèle permettant de décrire la dynamique de cette maladie.

b. Calculez les matrices de transmission et de transition et la valeur de  $R_0$  pour ce modèle.

2. Est-ce que vous vous proposeriez un autre modèle simplifié donnant une bonne approximation si le temps de vie moyen des vecteurs est de 0.02 ans ? Si oui, lequel ?

3. Est-ce que vous proposeriez un autre modèle si le temps d'incubation de la maladie est de 0.02 ans pour les humains ? Si oui, lequel ? Et s'il est de 0.0005 ans ?

4. Supposez maintenant, avec le reste des hypothèses de la partie 1, que pour les humains (mais pas pour les vecteurs) la maladie donne de l'immunité qui dure en moyenne deux ans après la fin de l'état infectieux. Comment devez-vous modifier le modèle de la partie 1 pour le prendre en compte ?