

TD3 : Groupes abéliens de type fini

Exercices \star : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.

Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.

Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : \star

Montrer que les groupes $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 2 : \star

Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p .

Exercice 3 : \star

- a) Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.
- b) Plus généralement, pour tout entier n , combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ?

Exercice 4 :

- a) Le nombre de classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_5 est le même que le nombre de groupes abéliens de cardinal 32 à isomorphisme près. Pourquoi ?
- b) Généraliser au nombre de classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_n .

Exercice 5 : \star

Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre égal à l'*exposant* de G (c'est-à-dire au ppcm des ordres des éléments de G).

Exercice 6 : \star

Soit G un groupe et soient H et K des sous-groupes de G . On suppose que :

- a) $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$;
- b) $HK = G$;
- c) $H \cap K = e$.

Montrer que G est isomorphe à $H \times K$.

Exercice 7 : $\star\star$

Soit K un corps et soit $G \subset K^*$ un sous-groupe fini d'ordre n . On va montrer que G est un groupe cyclique.

- a) Montrer que l'ordre de tout élément de G divise n .
- b) Soit d un diviseur de n et $x \in G$ d'ordre d . Soit H le sous-groupe cyclique de G engendré par x . Montrer que tout élément d'ordre d est dans H .
- c) On note $N(d)$ le nombre d'éléments de G d'ordre d . Montrer que $N(d) = 0$ ou $\varphi(d)$, et que $\sum_{d|n, d>0} N(d) = n$.
- d) Conclure.

En particulier, si p est un nombre premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, et si K est un corps fini, K^* est un groupe cyclique.

Exercice 8 : $\star\star$

Si A est un anneau, on note A^\times le groupe (multiplicatif) des éléments inversibles de A .

- a) Soit G un groupe monogène. Montrer que le groupe des automorphismes de G est en bijection avec l'ensemble des générateurs de G .
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme de groupes $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- c) Soit p un nombre premier impair et soit $\alpha \geq 1$. Quel est l'ordre de $1 + p$ dans $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$? En déduire que $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.
- d) Expliciter $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^\times$ pour $\alpha \geq 1$.
- e) En déduire $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 :

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.

Exercice 10 : ★★

Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 11 : ★★

- a) On considère $H := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a - b \text{ est divisible par } 10\}$. Montrer que H est un sous-groupe de \mathbb{Z}^2 , calculer son rang, en donner une base et décrire le quotient \mathbb{Z}^2/H .
- b) On note H le sous-groupe de \mathbb{Z}^2 engendré par $(2, 5)$, $(5, -1)$ et $(1, -2)$. Déterminer une base de H et décrire le quotient \mathbb{Z}^2/H .
- c) On note H le quotient de \mathbb{Z}^3 par le sous-groupe engendré par les vecteurs $(4, 8, 10)$ et $(6, 2, 0)$. Déterminer la structure du groupe H .

Exercice 12 :

Soit $n \geq 1$. Construire dans \mathbb{R} un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^n .

Exercice 13 :

Soit $n \geq 1$ est un entier. Montrer que tout système libre maximal dans \mathbb{Z}^n est de cardinal n . Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

Exercice 14 :

Soit $e_1 = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter e_1 en une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{Z}^n .

Exercice 15 : ★★

Déterminer les facteurs invariants des matrices suivantes à coefficients dans \mathbb{Z} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 75 & -41 & 13 \\ 19 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 :

- a) Soit G un groupe abélien de type fini et soit $f : G \rightarrow G$ un morphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme. Ceci est-il nécessairement vrai si l'on remplace surjectif par injectif?
- b) Soit G un groupe abélien libre de type fini et soit $f : G \rightarrow G$ un morphisme. Définir le déterminant $\det(f) \in \mathbb{Z}$ de f et montrer que f est injectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, montrer que l'on a $|\text{Coker}(f)| = |\det(f)|$.

Exercice 17 : ★★★

Soient A_1, \dots, A_n des groupes abéliens de type fini et $f_i : A_i \rightarrow A_{i+1}$ des morphismes de groupes. On dit que la suite

$$0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \rightarrow 0$$

est exacte si f_1 est injectif, f_{n-1} est surjectif, et pour tout $1 \leq i \leq n-2$, $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$.
Montrer que si la suite est exacte, alors $\sum_{i=1}^n (-1)^i \text{rang}(A_i) = 0$.

Exercice 18 : ★★

On se propose de redémontrer le théorème de structure des groupes abéliens finis.

On appelle caractère d'un groupe abélien fini G tout morphisme $G \rightarrow \mathbb{C}^*$.

- a) Si H est un sous-groupe d'un groupe abélien fini G , montrer que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G .
- b) Soit G un groupe abélien fini. On note H un sous-groupe de G engendré par un élément de G d'ordre maximal. Montrer que l'on a un isomorphisme $G \cong H \times G/H$.
- c) Conclure.