# TD8. Variance et Fonctions génératrices II

**Exercice 1.** Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire qui suit :

a) la loi de Bernoulli de paramètre $p$ ;

b) la loi binomiale de paramètre $(n, p)$ ;

c) la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Retrouver ainsi dans chaque cas son espérance et sa variance.

**Exercice 2.** [Somme aléatoire de variable aléatoires, Formule de Wald] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, toutes de même loi, et $N$ une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose que $N$ et $X_n, n \in \mathbf{N}$, sont mutuellement indépendantes. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \text{et } S_0 = 0.$$

a) Montrer que $S_N$ est une variable aléatoire.

b) i) Déterminer la loi de $S_N$, lorsque les $X_k$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$ et $N$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

ii) Déterminer la loi de $S_N$, lorsque les $X_k$ suivent la loi géométrique de paramètre $p$ et $N$ la loi géométrique de paramètre $p'$.

c) On suppose que les variables $X_n$ sont à valeurs dans $\mathbf{N}$.

i) Montrer que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.

ii) Montrer que, si $X_1$ et $N$ sont d'espérance finie, alors $S_N$ est aussi d'espérance finie et vérifie *la première formule de Wald*

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

iii) Montrer que, si $X_1$ et $N$ procèdent un moment d'ordre 2, alors $S_N$ possède aussi un moment d'ordre 2 et vérifie *la seconde formule de Wald*

$$\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X_1)\mathbb{E}(N) + (\mathbb{E}(X_1))^2\mathbb{V}(N).$$

d) On revient au cas général. On suppose que $X_1$ et $N$ sont d'espérance finie, sans supposant que $X_1$ est à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer les deux formules de Wald.

**Exercice 3.** [Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires, sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi définie par

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p,$$

où $p \in [0,1]$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
La suite $(S_n)$ est appelé marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$. On peut imaginer un mobile partant de l'origine et se déplaçant à chaque instant (entier) de 1 ou $-1$, les déplacements successifs étant indépendants. Alors $S_n$ représente la position du mobile au bout de $n$ déplacements.

a) i) Déterminer $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$, pour tout $n$.

ii) On note $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$. Montrer que :

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}.$$

b) Pour tout entier naturel non nul $k$, on note $A_k$ l'événement "le mobile retourne pour la première fois à l'origine au bout $k$ déplacements", c'est à dire

$$A_k = \{S_k = 0\} \cap \Big( \cap_{i=1}^{k-1} \{S_i \neq 0\} \Big).$$

On pose $v_k = \mathbb{P}(A_k)$, pour tout $k \geq 1$ et $v_0 = 0$.

i) Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

$$\mathbb{P}\{S_n = 0\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap A_k).$$

ii) En déduire que, pour tout entier naturel non nul $n$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k.$$

c) On note $g(x)$ la somme de la série entière $\sum v_n x^n$.

i) Montrer que le rayon définissant $g(x)$ est supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\forall x \in ]-1,1[,\ g(x) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)x^2}.$$

ii) Déterminer la probabilité de l'événement $A$ : "il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = 0$".

On suppose dans le reste de l'exercice que $p = \frac{1}{2}$.

d) i) Montrer que l'on peut définir une variable aléatoire $T$ égale au premier indice $n$ non nul pour leque l'événement $\{S_n = 0\}$ est réalisé.

ii) Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n} = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{n 4^n}.$$

iii) La variable $T$ est-t-elle d'espérance finie ?

e) i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}.$$

ii) Démontrer que la probabilité que le mobile soit à l'origine à l'issue des $2n$ premiers déplacements est égal à la probabilité qu'il ne soit jamais à l'origine à l'issue d'aucun des $2n$ premiers dépalcements. En déduire $\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \cdots, S_{2n} > 0)$.

* * **

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On désigne $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On muni $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on dit que $\sigma(i)$ est un maximum (resp. minimum) provisoire de $\sigma$ si

$$\sigma(i) = \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}, \qquad (\text{resp. } \sigma(i) = \min\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i)\}).$$

On désigne par $X_n$ (resp. $Y_n$) les variables aléatoires représentant le nombre de maximums (resp. minimums) provisoires des permutations de $[\![1, n]\!]$.

a) Montrer que $X_n$ et $Y_n$ ont même loi.

b) i) Déterminer la loi de $X_3$, son espérance, et sa variance.

ii) Déterminer la loi du couple $(X_3, Y_3)$ et sa covariance.

c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $g_n$ la fonction génératrice de $X_n$.

i) Pour $1 \leq k \leq n$, on note $Z_k$ la variable indicatrice de l'événement « $\sigma(k)$ est un maximal provisoire ». Montrer que les variables $Z_1, \ldots, Z_n$ sont indépendantes.

ii) Exprimer $X_n$ en fonction de $Z_1, \ldots, Z_n$. En déduire $g_n$.

iii) En déduire $\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = n)$.

iv) Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

**Exercice 5.** [Modèle de Glaton-Watson] On observe des virus qui se reproduisent tous selon la meme loi avant de mourir : un virus donne naissance en un journée à $X$ virus, où $X$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathbb{P}(X = k) = p_k$. On suppose $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 < 1$. On note $f$ la fonction génératrice de $X$.
On part au jour zéro de $X_0 = 1$ virus. Au premier jour, on a donc $X_1$ virus, où $X_1$ suit la loi de $X$ ; chacun de ces $X_1$ virus évolue alors indépendamment des autres virus et se reproiduit selon la même loi avant de mourir : cela conduit à avoir $X_2$ virus au deuxième jour ; et le processus continue de la sorte. On note $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

a) Calculer $u_0, u_1$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

d) Que peut-on dire de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Discuter selon la valeur de $\mathbb{E}(X)$. Interpréter le résultat.