TD7 : formes quadratiques

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Décomposer sous forme de combinaison linéaire de carrés les formes quadratiques réelles suivantes ; en déduire leur signature et leur rang.

a) $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$.
b) $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
d) $f(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$.
e) $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$.
f) $f(A) = \mathrm{tr}(A^2)$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
g) $f(A) = \mathrm{tr}({}^tAA)$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
h) $f(A) = \mathrm{tr}(A)^2$, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :
Soit $n \geq 1$ et soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \qquad \text{et} \qquad f(P) = B(P,P).$$

a) Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
b) La forme f a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?
c) Calculer la matrice de f dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
d) Pour $n = 2$, déterminer la signature de f. La forme f est-elle positive ? Négative ?

Exercice 3 : $\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Soit P un K-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme quadratique f. Quelles sont valeurs possibles pour le nombre de droites isotropes de f ? Donner un exemple dans chaque cas.

Exercice 4 : $\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et f' des formes quadratiques sur E vérifiant $f^{-1}(0) = (f')^{-1}(0)$.

a) Supposons K algébriquement clos. Montrer qu'il existe $a \in K^\times$ tel que l'on ait $f' = af$.
b) Donner un contre-exemple pour $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : $\star\star$
Soit K un corps de caractéristique différente de 2, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit H un hyperplan de E. Soient de plus f une forme quadratique non dégénérée sur E et u un élément de $\mathcal{O}(E, f)$ vérifiant $u_{|H} = \mathrm{id}_H$.

a) Si $f_{|H}$ est non dégénérée, montrer que u est soit l'identité, soit la réflexion orthogonale d'hyperplan H.

b) Si $f_{|H}$ est dégénérée, montrer que u est l'identité.

Exercice 6 :
Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique

$$f(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

de forme bilinéaire b. Un sous-espace F de E est dit *elliptique* si $f_{|F}$ est définie négative, *hyperbolique* si $f_{|F}$ est de signature $(1, m)$ avec $m \geq 1$ et *parabolique* si F est isotrope.

a) Soit F un sous-espace de dimension au moins 2 tel qu'il existe $x \in F$ avec $f(x) > 0$. Montrer que F est hyperbolique.

b) Soit F un sous-espace elliptique de dimension au plus $n-1$. Montrer que $F^{\perp}$ est hyperbolique.

c) Soit F un sous-espace parabolique. Montrer que $f|_F$ est de rang $\dim F - 1$.

Exercice 7 : ⋆⋆
Soient $p \neq q$ deux nombres premiers impairs. On note $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'entier qui vaut 1 si p est un carré modulo q et -1 sinon. On note $S := \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p : \sum_i x_i^2 = 1\}$.

a) Montrer que $\left(\frac{q}{p}\right) \equiv q^{\frac{p-1}{2}}$ $[p]$.

b) En considérant une action de groupe, montrer que $|S| \equiv 1 + \left(\frac{p}{q}\right)$ $[p]$.

c) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{F}_q^p$ dans laquelle la forme quadratique $\sum_i X_i^2$ admet pour matrice $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (-1)^{\frac{p-1}{2}}\right)$.

d) En déduire que $|S| = q^{\frac{p-1}{2}}(q^{\frac{p-1}{2}} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}})$.

e) Conclure que $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ (c'est la loi de réciprocité quadratique).

Exercice 8 : ⋆⋆⋆
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés. On considère la forme quadratique $f(x, y, z) := ax^2 + by^2 + cz^2$ sur $\mathbb{Q}^3$.

a) À quelle condition sur a, b, c la forme f est-elle isotrope sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose $a, b > 0$ et $c = -1$ et on note d le pgcd de a et b. Montrer que la forme quadratique f est isotrope sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites
   i) a est un carré modulo b.
   ii) b est un carré modulo a.
   iii) $-\frac{ab}{d^2}$ est un carré modulo d.

c) On suppose désormais a, b, c deux-à-deux premiers entre eux. Montrer que f est isotrope sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si f est isotrope sur $\mathbb{R}$ et les trois conditions suivantes sont satisfaites
   i) $-ab$ est un carré modulo c.
   ii) $-ac$ est un carré modulo b.
   iii) $-bc$ est un carré modulo a.

d) Sous les hypothèses de la question c), montrer que f est isotrope sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si f est isotrope sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre premier p, pour tout entier $m \geq 1$, il existe $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ non tous divisibles par p tels que $f(x, y, z) \equiv 0$ $[p^m]$.

e) Vérifier que dans l'équivalence précédente, il suffit de prendre $p | abc$ et $m = 2$.

f) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{Q}^3$. Donner un algorithme permettant de décider si q est isotrope.

Exercice 9 : $\star\star\star$

Soit K un corps. On définit son niveau $s(K) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et, si la caractéristique de K n'est pas 2, son u-invariant $u(K) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par

$$s(K) := \inf\{n \geq 1 \mid \exists (x_1, \dots, x_n) \in K^n \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\}$$

et

$$u(K) := \sup\{\dim(q) : q \text{ forme quadratique anisotrope sur } K\}\,,$$

avec la convention que l'infimum de l'ensemble vide est ∞.

a) Montrer que $u(K) \geq s(K)$.

b) Calculer $s(K)$ et $u(K)$ si K est algébriquement clos.

c) Donner un exemple de corps K avec $s(K) = \infty$ et un exemple avec $u(K) = \infty$ et $s(K) < \infty$.

d) Montrer que des corps isomorphes ont même niveau et même u-invariant. Les réciproques sont-elles vraies ?

e) Montrer que le niveau d'un corps fini est égal à 1 ou 2. Montrer que le u-invariant d'un corps fini vaut 2.

f) Montrer l'égalité $s(K) = s(K(X))$.

On suppose désormais que K de caractéristique différente de 2. Pour $n \geq 1$, on considère la forme quadratique

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

g) Montrer que f_n admet un vecteur isotrope si et seulement si on a $s(K) \leq n - 1$.

h) Supposons $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ non nul, il existe une matrice T_x de première ligne $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant

$$ {}^tT_x T_x = T_x {}^tT_x = f_n(x_1, \dots, x_n) I_n.$$

i) En déduire que l'ensemble des sommes non nulles de 2^k carrés d'éléments de K est un groupe multiplicatif.

j) Montrer que le niveau d'un corps est soit infini, soit une puissance de 2.