TD8 : Groupe orthogonal (et symplectique)

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$ et E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soit $u : E \to E$ une application (pas forcément linéaire a priori) telle que $u(0) = 0$ et pour tout $x, y \in E$, $q(u(x) - u(y)) = q(x - y)$.

a) Montrer que $u \in \mathrm{O}(E, q)$ (on pourra utiliser une base orthogonale).

b) L'hypothèse $u(0) = 0$ est-elle nécessaire ?

Exercice 2 : $\star$
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

a) Montrer que tout endomorphisme de E admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

b) Soit q une forme quadratique définie positive sur E. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{O}(E, q)$, il existe une base orthonormée e de E, des entiers positifs r, s, t tels que $n = r + s + 2t$ et des réels $\theta_1, \dots, \theta_t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tels que

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_{\theta_t} \end{pmatrix},$$

où R_θ désigne la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

c) En déduire que sous les hypothèses précédentes, $\mathrm{SO}(E, q)$ est connexe par arcs.

Exercice 3 : $\star\star$
Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, de caractéristique différente de 2. Soient $n \geq 1$, $b \in \mathbb{F}_q$ et $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times \setminus \mathbb{F}_q^{\times 2}$. Notons $S(2n, b)$, $S(2n+1, b)$ et $S_\varepsilon(2n, b)$ les nombres respectifs de solutions des équations

$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 = b, \tag{1}$$
$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 + x_{n+1}^2 = b, \tag{2}$$
$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - \varepsilon y_n^2 = b. \tag{3}$$

a) Montrer

$$S(2n, b) = \begin{cases} q^{2n-1} + q^n - q^{n-1} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n-1} - q^{n-1} & \text{si } b \neq 0; \end{cases}$$

$$S(2n+1, b) = \begin{cases} q^{2n} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n} - q^n & \text{si } b \notin \mathbb{F}_q^{\times 2}; \\ q^{2n} + q^n & \text{si } b \in \mathbb{F}_q^{\times 2}; \end{cases}$$

$$S_\varepsilon(2n, b) = \begin{cases} q^{2n-1} - q^n + q^{n-1} & \text{si } b = 0; \\ q^{2n-1} + q^{n-1} & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$$

b) En déduire

$$|\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1),$$
$$|\mathrm{O}_{2n}^{+}(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1),$$
$$|\mathrm{O}_{2n}^{-}(\mathbb{F}_q)| = 2q^{n(n-1)}(q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1).$$

Exercice 4 : $\star\star$
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni de la forme quadratique définie positive $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{SO}(V,f)$ est simple. Soit N un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{SO}(V,f)$.

a) Montrer que si N contient un renversement, alors $N = \mathrm{SO}(V,f)$.

b) Soit N_0 la composante connexe de l'identité de N. Montrer que N_0 est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(V,f)$.

c) Montrer que $N = \{\mathrm{id}\}$ si et seulement si $N_0 = \{\mathrm{id}\}$.

d) Montrer que la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : N_0 &\longrightarrow [-1,1]\\ g &\longmapsto \frac{\mathrm{tr}(g)-1}{2}\end{aligned}$$

est bien définie et continue.

e) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\varphi(g) \leq 0$.

f) Montrer qu'il existe $g \in N_0$ tel que $\varphi(g) = 0$.

g) Conclure.

Exercice 5 : $\star\star$
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 5$ muni de la forme quadratique définie positive $f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2+\dots+x_n^2$. Le but de cet exercice est de montrer que $\mathrm{PSO}(V,f)$ est simple. Soit $\overline{N}$ un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{PSO}(V,f)$ et soit N le sous-groupe de $\mathrm{SO}(V,f)$ lui correspondant.

a) Montrer que si N contient un renversement, alors $\overline{N} = \mathrm{PSO}(V,f)$.

b) Supposons qu'il existe un sous-espace U de V de dimension 3 tel que $N \cap \mathrm{SO}(U, f|_U) \neq \{\mathrm{id}\}$. Montrer qu'alors $\overline{N} = \mathrm{PSO}(V,f)$.

c) Conclure (on pourra considérer le commutateur d'un élément $r \in N \setminus \{\pm\mathrm{id}\}$ ayant un vecteur fixe non nul avec la composée de deux réflexions bien choisies).

Exercice 6 : $\star\star$
On note $\mathbb{Z}_{(2)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels à dénominateur impair. On note $G = \mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$.

a) Montrer que $G \subset \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_{(2)})$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $G_n := \{A \in G : \exists B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_{(2)})\,,\, A = I_3 + 2^n B\}$. Montrer que G_n est un sous-groupe distingué de G.

c) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} G_n = \{I_3\}$.

d) Montrer que $G_1 \subsetneq G$ et que $G_1 \not\subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$.

e) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $G_{n+1} \subsetneq G_n$.

f) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $G_n \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$.

g) Pour tout $n \geq 2$, montrer que $G_n/G_{n+1} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

h) Montrer que $G/G_1 \cong \mathfrak{S}_3$.

i) Montrer que $G_1/G_2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

j) Comparer la structure de $\mathrm{O}_3(\mathbb{Q})$ avec celle de $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 7 : $\star\star\star$

Soient $K = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique impaire et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{P}\Omega_n^{\pm}(K)$ le quotient du groupe dérivé de $\mathrm{O}_n^{\pm}(K)$ par son centre.

a) Déterminer $\mathrm{O}_1(K)$, $\mathrm{SO}_1(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_1(K)$.

b) Montrer que $\mathrm{O}_2^+(K)$ est isomorphe au groupe diédral D_{q-1}. Identifier $\mathrm{SO}_2^+(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_2^+(K)$.

c) En considérant le corps $\mathbb{F}_{q^2}$, montrer que $\mathrm{O}_2^-(K)$ est isomorphe à D_{q+1} et identifier $\mathrm{SO}_2^-(K)$ et $\mathrm{P}\Omega_2^-(K)$.

d) On suppose $n = 3$. On note V le K-espace vectoriel des matrices 2×2 de trace nulle.

  i) Exhiber une base naturelle de V comme K-espace vectoriel.

  ii) Montrer que $\mathrm{GL}_2(K)$ agit naturellement sur V.

  iii) En déduire un morphisme de groupes $\rho : \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_3(K)$ que l'on explicitera.

  iv) Montrer que $Ker(\rho) = K^* I_2$.

  v) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_2(K)$, $\det(\rho(A)) = 1$.

  vi) Vérifier que le déterminant définit une forme quadratique non dégénérée sur V.

  vii) En déduire des isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(K) \cong \mathrm{SO}(V, \det) \cong \mathrm{SO}_3(K)$.

  viii) Montrer que l'on a des isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(K) \times \{\pm 1\} \cong \mathrm{O}(V, \det) \cong \mathrm{O}_3(K)$.

  ix) Montrer que $\mathrm{P}\Omega_3(K) \cong \mathrm{PSL}_2(K)$.

e) On suppose $n = 4$. On note $W := \mathrm{Mat}_2(K)$, et pour tout $M \in W$, on note $Q(M) := \det(M)$.

  i) Montrer que Q est une forme quadratique sur W qui est somme de deux plans hyperboliques.

  ii) Montrer que $\mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_2(K)$ agit naturellement sur W.

  iii) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_2(K)$. Montrer que l'action de (A, B) sur W préserve Q si et seulement si $\det(A) = \det(B)$, et que cette action est triviale si et seulement s'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $A = B = \lambda I_2$.

  iv) En déduire un morphisme de groupes injectif $i : ((\mathrm{SL}_2(K) \times \mathrm{SL}_2(K)) \rtimes K^*) / K^* \to \mathrm{O}(W, Q)$, où l'on explicitera le groupe de gauche.

  v) Montrer que $\langle \mathrm{Im}\,(i), T \rangle = \mathrm{O}(W, Q)$, où $T : W \to W$ est défini par $T(M) := {}^t M$ et décrire $\mathrm{SO}(W, Q)$.

  vi) En déduire que $\mathrm{P}\Omega_4^+(K) \cong \mathrm{PSL}_2(K) \times \mathrm{PSL}_2(K)$ si $|K| > 3$.

  vii) Décrire $\mathrm{P}\Omega_4^+(\mathbb{F}_3)$.

Exercice 8 :

On considère $V = \mathbb{F}_2^6$ muni de la forme bilinéaire $x \cdot y = \sum_{i=1}^6 x_i y_i$. On note $x_0 := (1, \ldots, 1) \in V$.

a) Donner la définition des groupes $\mathrm{Sp}_n(K)$ lorsque K est un corps de caractéristique 2.

b) Montrer que $W := x_0^\perp / \mathbb{F}_2 x_0$ est naturellement muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

c) En déduire un morphisme naturel $\mathfrak{S}_6 \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$.

d) Conclure que $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_6$.

Exercice 9 : $\star\star\star$

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et soit $m \geq 3$. On munit $V = K^{2m}$ de la forme bilinéaire alternée usuelle B ; on note $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ le groupe symplectique correspondant. Soient $s, t \in \mathrm{Sp}_{2m}(K)$ des involutions.

a) Montrer qu'il existe une décomposition $V = E_+(s) \overset{\perp}{\oplus} E_-(s)$, où $E_+(s)$ et $E_-(s)$ désignent les espaces propres de s associées aux valeurs propres 1 et -1, respectivement.

b) En déduire une bijection entre l'ensemble des involutions de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ et l'ensemble des sous-espaces non dégénérés de V.

On dit que l'involution s est de type $(2r, 2m-2r)$ si l'espace $E_+(s)$ est de dimension $2r$. On parle d'*involution extrémale* pour une involution de type $(2, 2m-2)$ ou $(2m-2, 2)$. Dans ce cas-là, on note $E_2(s)$ l'espace $E_\pm(s)$ de dimension 2.

c) En considérant les familles commutatives maximales d'involutions conjuguées dans $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$, montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ envoie une involution extrémale sur une involution extrémale.

On dit que des involutions extrémales s et t forment un *couple minimal* si on a $\dim(E_2(s) \cap E_2(t)) = 1$. Si $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Sp}_{2m}(K)$ est un ensemble d'involutions extrémales, on note $C(\mathcal{S})$ l'ensemble des involutions extrémales qui commutent à tout élément de $\mathcal{S}$.

d) Montrer que s et t forment un couple minimal si et seulement si ($st \neq ts$ et pour tous $s', t' \in C(C(\{s,t\}))$ avec $s't' \neq t's'$ on a $C(C(\{s,t\})) = C(C(\{s',t'\}))$).

e) Déterminer les ensembles maximaux I d'involutions extrémales tels que toute paire d'éléments de I forme un couple minimal ou commute.

Soit $n \geq 3$. Une application $\phi : K^n \to K^n$ est dite semi-linéaire s'il existe un automorphisme de corps $\theta : K \to K$ tel que ϕ soit θ-linéaire, c'est-à-dire :

- On a $\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v')$, pour tous $v, v' \in K^n$.
- On a $\phi(\lambda v) = \theta(\lambda)\phi(v)$, pour tout $v' \in K^n$ et tout $\lambda \in K$.

L'ensemble des applications semi-linéaires inversibles forment un groupe, noté $\Gamma\mathrm{L}_n(K)$ et appelé le groupe des transformations semi-linéaires de K^n.
On admet le théorème fondamental de la géométrie projective, qui est l'énoncé suivant : *soit $\phi : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^n(K)$ une bijection telle que trois points A_1, A_2, A_3 de $\mathbb{P}^n(K)$ sont alignés si et seulement si $\phi(A_1), \phi(A_2), \phi(A_3)$ le sont. Alors il existe un automorphisme de corps $\sigma : K \to K$ et une transformation σ-linéaire $\gamma \in \Gamma\mathrm{L}_{n+1}(K)$ telle que ϕ soit induite par γ.*
On définit enfin $\Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ comme le sous-groupe de $\Gamma\mathrm{L}_{2m}(K)$ des éléments préservant la forme B.

f) Montrer que tout automorphisme de $\mathrm{Sp}_{2m}(K)$ est de la forme $x \mapsto axa^{-1}$ pour un certain élément $a \in \Gamma\mathrm{Sp}_{2m}(K)$.