分析学 III 参考答案

本答案为参考答案, 如有谬误或有更好的做法, 欢迎同学们指出.

2020 秋-分析学 III 助教 吴天

第 1 周作业（2020 年 9 月 16 日）

1. 找尽可能多的解, 无需证明: $u_{tt}=c^2u_{xx}$, $u(0,t)=u(l,t)=0$, $\forall t>0$.

解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi c}{l}t+\varphi_n)\sin\frac{n\pi}{l}x$, $A_n,\varphi_n\in\mathbb{R}$.

2. 找尽可能多的解, 无需证明: $\Delta u=0$, $x\in\Omega=\{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

解 $u(r,\theta)=C_0+D_0\log r+\sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n+D_nr^{-n})\sin(n\theta+\varphi_n)$, $C_n,D_n,\varphi_n\in\mathbb{R}$.

3. 若 $f\in R[a,b]$, 求证 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$. (求证的意思是求并证明)

证明 先证明 Riemann 定理: 设 $f\in R[a,b]$, $g\in R[0,T)$ 以 T 为周期且有界, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果正确, 答案显然就是 $\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 下证 Riemann 定理:

不妨设 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x=0$, 取 $x_i=a+\frac{j-1}{J}(b-a)$, $j=1,\cdots,J$. 设 $\|f\|_{L^\infty(a,b)},\|g\|_{L^\infty(0,T)}\leqslant M$, $\omega_{j,J}=\sup_{x,y\in[x_{j-1},x_j]}|f(x)-f(y)|$, 显然 $\lim_{J\to\infty}\sum_{j=1}^{J}\omega_{j,J}(x_j-x_{j-1})=0$.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{j=1}^{J}\int_{x_{j-1}}^{x_j}M|f(x)-f(x_{j-1})|\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{f(x_{j-1})}{n}\int_{nx_{j-1}}^{nx_j}g(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant M\sum_{j=1}^{J}\omega_{j,J}(x_j-x_{j-1})+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}M\int_0^T|g(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$: $\limsup_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\sum_{j=1}^{J}\omega_{j,J}(x_j-x_{j-1})$. 令 $J\to\infty$ 即可. □

第 2 周作业（2020 年 9 月 23 日）

1. 假设已知 2π 为周期的连续函数可以用三角多项式一致逼近, 证明 Weierstrass 定理: $f\in C[a,b]$ 可以被多项式一致逼近.

证明 通过伸缩自变量, 不难看初具有正周期的函数都可以由三角多项式一致逼近, 而三角多项式是解析函数, 可以使用它的泰勒展开式的部分和作为多项式来一致逼近. 注意到 f 总可以通过加一个一次函数调整为 $f(a)=f(b)$ 的情况, 因此, 不妨 $f(a)=f(b)$, 这样, 把 f 以 $(b-a)$ 作为周期延拓即可得证. □

2. 设 f 是以 2π 为周期的连续函数, 其 Fourier 系数为 c_n. 证明: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ 是 $\{(x,y):x^2+y^2<1\}$ 上的调和函数.

证明 注意到 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$, 由此可知级数通项都是调和函数. 只需证明级数的通项的二阶导数组

成的级数内闭一致收敛, 以及原函数项级数在某处收敛. 前者使用 Weierstrass 判别法, 后者是显然的. □

3. 这个练习是 Tauber 给出的定理, 它是某一个深刻理论的开端. 证明:

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的 Cesàro 和为 σ, $c_n = o(\frac{1}{n})$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$.

(2) 上述结论在将 Cesàro 和换成 Abel 和的情况下依旧成立.

证明 (1) 记 $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$, $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, $|c_n| < \frac{\varepsilon}{n}$, 则

$$|s_n - \sigma_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(k-1)c_k\right| \leqslant \frac{N(N-1)}{2n}\max_{1\leqslant i\leqslant N}|c_i| + \frac{N-n}{n}\varepsilon.$$

令 $n\to\infty$: $\limsup_{n\to\infty}|s_n - \sigma_n| \leqslant \varepsilon$. 再令 $\varepsilon \to 0$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sigma$.

(2) 显然, $\int_0^1 \frac{\rho^N}{1-\rho}\mathrm{d}\rho$ 是收敛的, 这可以由比较判别法直接得到. $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, $n|c_n| < \varepsilon$ 且当 $1 - \frac{1}{N} < r < 1$ 时, $\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_n r^n - \sigma\right| < \varepsilon$. 取 $r = 1 - \frac{1}{M}$, $M > N$ 为整数, 则

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{M} c_n - \sigma\right| &\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} c_n(1-r^n)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{M} c_n(1-r^n)\right| + \left|\sum_{n=M+1}^{\infty} c_n r^n\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} c_n r^n - \sigma\right| \\
&< \sum_{n=1}^{N}|c_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right] + \sum_{n=N+1}^{M}\frac{n|c_n|}{M} + \sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{n}\left(1-\frac{1}{M}\right)^n + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N}|c_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right] + \varepsilon + \varepsilon\int_0^{1-\frac{1}{M}}\frac{x^M}{1-x}\mathrm{d}x + \varepsilon \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{N}|c_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{M}\right)^n\right] + \frac{M}{M+1}\left(1-\frac{1}{M}\right)^{M+1}\varepsilon + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

令 $M\to\infty$: $\limsup_{M\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{M} c_n - \sigma\right| \leqslant \left(\frac{1}{\mathrm{e}} + 2\right)\varepsilon$. 再令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

附注 证明过程可以使用平均值结论来简化: 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a$.

(1) $\lim_{n\to\infty}(s_n - \sigma_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(k-1)c_k = \lim_{n\to\infty}(n-1)c_n = \lim_{n\to\infty} nc_n = 0$.

(2) $\forall\varepsilon, N$ 同解答中一样, 取 $r = 1 - \frac{1}{N}$, $\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N}|c_n|(1-r^n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|r^n$, 其中

$$\sum_{n=1}^{N}|c_n|(1-r^n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} n|c_n|(1-r) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|c_n| \to 0\ (N\to\infty),$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|c_n|r^n \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{n}r^n < \frac{\varepsilon}{N}\frac{r^{N+1}}{1-r} = \varepsilon\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+1} \to \frac{\varepsilon}{\mathrm{e}}\ (N\to\infty).$$

因此 $\limsup_{N\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} c_n - \sigma\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{e}}$, 再令 $\varepsilon\to 0$ 即可. □

第 3 周作业（2020 年 10 月 1 日）

1. 下面是著名的 Poincaré 不等式.

(1) 设 $f \in C(T\mathbb{T})$ 是分段 C^1 的, $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$. 证明: $\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(t)|^2\mathrm{d}t$, 当且仅当 $f(t) = A\sin\frac{2\pi t}{T} + B\cos\frac{2\pi t}{T}$ 时取等.

(2) 设 f 满足 (1) 的条件, $g \in C^1(T\mathbb{T})$. 证明: $\left|\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f(t)|^2\mathrm{d}t\int_0^T |g'(t)|^2\mathrm{d}t$.

(3) $f \in C^1[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$. 证明: $\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi}\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$, 并说明 $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ 是最佳的.

证明 (1) 直接考察 f 的 Fourier 系数 $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i}nt}{T}\right\}\mathrm{d}t$, 以及 f' 的 Fourier 系数 $c_n' = -\frac{2\pi \mathrm{i}n}{T}c_n$. 代入各自的 Parseval 等式对比即可. 取等条件在于对比的过程中, 唯一放缩出现在

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)\frac{4\pi^2}{T^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)\frac{4\pi^2}{T^2},$$

而这个取等当且仅当只有 c_1 和 c_{-1} 不为 0, 这等价于 $f(t) = A\sin\frac{2\pi t}{T} + B\cos\frac{2\pi t}{T}$.

(2) 取 f 的一个原函数 F, 使得 F 满足所有 (1) 的性质 (主要是 $\int_0^T F(t)\mathrm{d}t = 0$). 使用分部积分之后, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 再对 F 利用 (1) 的结论即可.

(3) 通过平移和伸缩自变量, 不妨 $a = 0$, $b = \pi$. 对 f 作奇延拓, 然后再以 2π 为周期延拓为 $\widetilde{f}$, 则 $\widetilde{f}$ 满足 (1) 在 $T = 2\pi$ 下的所有条件, 结论得证. 最佳常数使用 (1) 的取等函数在 $B = 0$ 的情况下验证即可. □

2. 证明 Dirichlet 积分: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

证明 注意到 0 是 $\csc\frac{t}{2} - \frac{2}{t}$ 的可去奇点, 由 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\csc\frac{t}{2} - \frac{2}{t}\right)\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

其中 $\int_{-\pi}^{\pi}\csc\frac{t}{2}\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = 2\pi$, 结合 $\frac{\mathrm{d}t}{t}$ 是伸缩不变的, 立刻得证. □

3. 使用下面的方法再来计算第 2 题的积分. 置 $I(\alpha) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

(1) 计算 $I'(\alpha)$ 并积分. (2) 计算 $I(\alpha)$, 并取 $\alpha = 0$.

证明 使用 Weierstrass 判别法易知 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 这保证了求导和积分的交换. 直接计算: $I'(\alpha) = -\operatorname{Im}\frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-\alpha)x}}{(\mathrm{i}-\alpha)}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}$. 观察到 $|I(\alpha)| \leqslant \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} \to 0$ $(\alpha\to+\infty)$, 故

$$I(\alpha) = \int_{+\infty}^{\alpha} I'(a)\mathrm{d}a = \int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}a}{1+a^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a,\ a > 0.$$

使用 Abel 判别法, 可以得到 $I(\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 故 $I(0) = \lim_{\alpha\to0^+} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$. □

第 5 周作业（2020 年 10 月 11 日）

1. (Tychonoff 著名反例) 若 $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 定义 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(1) 形式上地验证 u 满足热方程;

(2) 设 $a>0$, 考察 $g(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-t^{-a}}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$ 证明: $\exists\theta\in(0,1)$, 依赖于 a, 使得

$$|g^{(k)}(t)|\leqslant\frac{k!}{(\theta t)^k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^{-a}},\ t>0.$$

(3) 严格证明 u 是具有零初值的热方程的解.

证明 (1) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g^{(n)}(t)\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}g^{(n+1)}(t)\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t).$

(2) 设 $g^{(n)}(t)=f_n(t)\mathrm{e}^{-t^{-a}}$, 则 $f_{n+1}(t)=f_n'(t)+at^{-(a+1)}f_n(t)$. 容易归纳: $f_0(t)=1$, $f_n(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_{n,k}t^{-(ka+n)}$, $\forall n\geqslant 1$, 其中 $c_{n+1,k}=-(ka+n)c_{n,k}+ac_{n,k-1}$, $\forall 1\leqslant k\leqslant n$, $c_{n+1,n+1}=ac_{n,n}$.

取 $\theta=\dfrac{1}{3a+1}$, 可以归纳证明: $|c_{n,k}|\leqslant\dfrac{n!}{2^k k!\theta^n}$. 进而直接代入 $g^{(n)}$ 的表达式即可得到估计.

(3) 利用 (2) 和 Weierstrass 判别法, 检查 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}g^{(n)}(t)\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$ 对 x 和 t 的内闭一致收敛性, 不要忘记检查初值是否满足、能否连续到边即可. 能否连续到边的证明还是个开放问题, 大家可以讨论一下. □

附注 (2) 也可以通过在复平面上取 t 的一个小圆盘 $B_\theta(t)$, 在其圆周上对 $g^{(n)}$ 使用 Cauchy 积分公式, 只需要取 θ 足够小, 以使得 $a\arcsin\theta<\pi$ 即可, 这只需要 θ 与 a 有关就能做到.

2. 回顾我们计算过 $g(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $\widehat{g}(\xi)=\left(\dfrac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2$.

(1) 验证如果 $f(x)=\widehat{g}(x)$, 则 $\widehat{f}(\xi)=g(\xi)$.

(2) 验证 Poisson 求和公式对于 f 同样成立.

证明 (1) 在分布的意义下, $\widehat{f}(\xi)=\widetilde{g}(\xi)=g(-\xi)=g(\xi)$, 这得益于 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$, $g\in C_C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) 对于 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, Poisson 求和公式必定成立. □

附注 上面的做法违背了验证的原则, 使题目平凡化了. (1) 直接计算即可, 可以使用留数定理计算, 它来自于 Rudin《Real and Complex Analysis》练习 10.12. (2) 只需要证明 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n+x)$ 的内闭一致收敛性即可, 通过 Weierstrass 判别法, 这是容易的, 之后考虑该函数项级数的 Fourier 展开就完成了证明. 关于分布理论感兴趣的同学, 在具有一定实分析和泛函分析基础的情况下, 可以参考 Folland《Real Analysis》第八章.

3. 使用 Poisson 求和公式证明 $\mathbb{S}^1$ 上的热核 H_t 与 $\mathbb{R}$ 上的热核 $\mathcal{H}_t$ 满足: $H_t(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}_t(x+n)$.

证明 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}_t(x+n)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathcal{H}}_t(n)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4\pi^2n^2t}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nx}=H_t(x).$ □

第 6 周作业（2020 年 10 月 17 日）

1. 设 E,F 为 Banach 空间, 定义 $E\times F$ 上的范数 $\|(a,b)\|=\max\{\|a\|,\|b\|\}$. 证明: 由这个范数诱导的拓扑就是乘积拓扑.

证明 乘积拓扑显然由 $\|(a,b)\|_2:=\sqrt{\|a\|^2+\|b\|^2}$ 诱导, 而 $\|\cdot\|_2$ 范数与所给范数显然等价. □

附注 以上当然是从范数的高观点角度来看的. 这道题也可以将两种拓扑的拓扑基直接写出来得到证明.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(0,0), & x=0,\ y>0,\\ (x^2\sqrt{y}\cos\frac{1}{x^3},x^2\sqrt{y}\sin\frac{1}{x^3}), & x\neq 0,\ y>0.\end{cases}$ 证明: f 在 $\{(x,y):y>0\}$ 上可微. 求 $\det Jf$.

证明 只需验证 $x=0, y>0$ 处的可微性. $\forall y>0$, u,v 充分小, $|f(u,y+v)|=u^2\sqrt{y+v}\to 0\ (u,v\to 0)$. 因此 f 在 $(0,y)$ 处可微, 且 $\det Jf(0,y)=0$. 直接计算可得

$$\det Jf(x,y)=\begin{vmatrix} 2x\sqrt{y}\cos\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}\sqrt{y}\sin\dfrac{1}{x^3} & \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}\cos\dfrac{1}{x^3} \\ 2x\sqrt{y}\sin\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}\sqrt{y}\cos\dfrac{1}{x^3} & \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}\sin\dfrac{1}{x^3}\end{vmatrix}=\frac{3}{2},\ \forall x\neq 0,\ y>0.$$

3. 回忆 $l^2=\left\{x=(x_n)_{n=0}^{\infty}:\|x\|=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty\right\}$ 是个 Banach 空间. 设 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(0)=0$. 证明: $\Psi:l^2\to l^2$, $\Psi(x)=(\varphi(x_n))_n$ 是 C^1 的.

证明 取 $k=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|\varphi'(x)|<+\infty$, $N\in\mathbb{N}^*$, 使 $\|x_n\|<1$, 如果 $n>N$, 使用中值定理:

$$\|\Psi(x)\|^2\leqslant\sum_{n=1}^{N}(\varphi(x_n))^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}k^2\|x_n\|^2<+\infty,$$

故 $\Psi(l^2)\subset l^2$. 验证 $\Psi'(x)(y)=(\varphi'(x)y_n)_n$: 显然 $\Psi'\in L(l^2)$. 由于 $\varphi\in C^1$, 固定 y, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $\|x-y\|<\delta$ 时, $\|\Psi(x)-\Psi(y)-\Psi'(y)(x-y)\|<\varepsilon\|x-y\|$, 因此 Ψ 可微, 且微分映射为 Ψ'. 显然 Ψ' 连续. □

第 7 周作业（2020 年 10 月 27 日）

1. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 是凸区域, $P,Q\in C^1$ 满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$ (7.1).

(1) 证明: 存在函数 u, 使得 $\nabla u=(P,Q)$.

(2) 什么意义下, u 是唯一的?

(3) 证明: 如果 $\Omega=\{(x,y):0<x^2+y^2<1\}$, P,Q 满足 (7.1), (1) 中的结论可能不对.

(4) (尝试一下, 不做要求) 凸性是必要条件嘛? 是否可以将其减弱?

证明 (1) 固定 $(x_0,y_0)\in\Omega$, 定义 $u(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+Q(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$ 即可, 其中积分路径是直线段. 通过 $\xi=x_0+t(x-x_0)$, $\eta=y_0+t(y-y_0)$ 将曲线积分化为单积分, 直接计算梯度, 并使用分部积分即可得证.

(2) 在模掉常值函数的情况下.

(3) $P(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(4) 不必要, 可以换为 Ω 是单连通域的条件, 即基本群 $\pi_1(\Omega)$ 平凡.

2. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是闭集. 下面给出构造 C^2 函数 f, 满足 $E=f^{-1}(0)$ 的方法.

(1) $r>0$, 定义 $\varphi_r(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqslant r,\\ (r^2-|x|^2)^3, & |x|<r.\end{cases}$ 证明: $\varphi_r\in C^2$, $|\varphi_r'(x)|\leqslant 6r^5$, $|\varphi_r''(x)|<12r^4$.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的稠密子集, $r_n(x)=\operatorname{dist}(x_n,E)$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{1+r_n^6}\varphi_{r_n}(x-x_n)$. 证明: $f\in C^2$, 且 $f\big|_E\equiv 0$, $f\big|_{\mathbb{R}^n\setminus E}>0$.

证明 (1) $\mathrm{D}_i\varphi_r(x)=\begin{cases}0,\\ -6(r^2-|x|^2)^2x_i,\end{cases}$ $\mathrm{D}_{ij}\varphi_r(x)=\begin{cases}0, & |x|\geqslant r,\\ 24(r^2-|x|^2)x_ix_j-6(r^2-|x|^2)^2\delta_{ij}, & |x|<r.\end{cases}$

因此 $|\varphi_r'(x)|\leqslant 6|x|(r^2-|x|^2)^2\leqslant\dfrac{96\sqrt{5}}{125}r^5$. 计算 Hessian 矩阵的特征值:

$$\det(\lambda I_n-\operatorname{Hess}\varphi_r)=(\lambda+6(r^2-|x|^2)^2)^{n-1}(\lambda+6(r^2-|x|^2)(r^2-5|x|^2)),$$

故 $\lambda_{\max} = -6(r^2-|x|^2)(r^2-5|x|^2)$, $\lambda_{\min} = -6(r^2-|x|^2)^2$. 经过讨论: $|\varphi_r''(x)| \leqslant \max|\lambda(\operatorname{Hess}\varphi_r)| \leqslant 6r^4$.

(2) 利用 (1) 的结论, 结合均值不等式和 Weierstrass 判别法即可. □

3. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为非空紧集. 研究 $d(x) := \operatorname{dist}(x, A)$ 的可微性.

(1) 如果 $x \notin A$, 且 $\exists! y \in A$, 使得 $d(x,y) = d(x,A)$. 证明: d 在 x 处可微. ∇d 是什么?

(2) 如果 $x \notin A$, 且存在至少两个 $y \in A$, 满足 $d(x,y) = d(x,A)$. 证明: d 在 x 处不可微.

(3) 当 $x \in A$ 时, $d(x)^2$ 的可微性如何?

证明 (1) $\nabla d(x) = \dfrac{x-y}{d(x)}$. 先证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\xi \in B_\delta(x)$ 时, 如果 η 满足, $|\xi - \eta| = d(\xi)$, 则 $\eta \in B_\varepsilon(y)$.

如若不然, $\exists \varepsilon_0 > 0$, 取 $\lambda = \operatorname{dist}(x, A \backslash B_{\varepsilon_0}(y)) - d(x)$, 由 y 的唯一性知 $\lambda > 0$. $\forall 0 < \delta < \dfrac{\lambda}{2}$, $\exists \xi \in B_\delta(x)$, $\eta \in A \backslash B_{\varepsilon_0}(y)$, 使得 $|\xi - \eta| = d(\xi)$. 因此, $|\xi - \eta| > |x - \eta| - \delta \geqslant d(x) + \lambda - \delta > d(x) + \delta > d(\xi)$, 矛盾!

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 满足上述结论, $\xi \in B_\delta(x)$, 则

$$d(\xi)^2 - d(x)^2 \leqslant |\xi - y|^2 - |x-y|^2 = |\xi|^2 - |x|^2 - 2(\xi - x)\cdot y = 2(x-y)\cdot(\xi - x) + |\xi - x|^2,$$

$$d(\xi)^2 - d(x)^2 \geqslant |\xi - y|^2 - |x-y|^2 - (|\xi - \eta| + |\xi - y|)\varepsilon \geqslant 2(x-y)\cdot(\xi - x) + |\xi - x|^2 - 2|\xi - y|\varepsilon.$$

因此, $\limsup\limits_{\xi \to x} \left| d(\xi) - d(x) - \dfrac{x-y}{d(x)} \cdot (\xi - x) \right| \leqslant \dfrac{|x-y|}{d(x)}\varepsilon$.

(2) 如果 $d(x) = |x - y_1| = |x - y_2|$, 且 d 在 x 处可微. 记 $e_i = \dfrac{y_i - x}{d(x)}$, 显然 $\dfrac{\partial d}{\partial e_i}(x) = -1$, $i = 1, 2$. 取 $e = \dfrac{e_1 - e_2}{|e_1 - e_2|}$, 则 $\dfrac{\partial d}{\partial e}(x) = 0$. 设夹角 $\langle e, e_i \rangle = \theta_i$, 则 $d(x+he)^2 \leqslant |x + he - y_i|^2 = d(x)^2 + h^2 - 2hd(x)\cos\theta_i$, $i = 1, 2$. 由 $\dfrac{\partial d^2}{\partial e}(x) = 0$ 得: $\cos\theta_i = 0$, $i = 1, 2$, 即 e 与 e_1, e_2 均正交, 而它们是共面的单位向量, 这迫使 $e_1 = -e_2$, 这与 $\dfrac{\partial d}{\partial e_1}(x) = \dfrac{\partial d}{\partial e_2}(x) = -1$ 矛盾!

(3) 显而易见, $d(\xi)^2 - d(x)^2 = d(\xi)^2 \leqslant |\xi - x|^2$, 故 d^2 可微, 且 $(\nabla d^2)(x) = 0$, $x \in A$. □

第 8 周作业（2020 年 11 月 2 日）

1. (凸集的分离性) 设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 的两个不交的闭凸集.

(1) 证明: $\exists 0 \neq l \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, 使得 $l\big|_A \geqslant c$, $l\big|_B \leqslant c$.

(2) 证明或者举出反例: (1) 的不等式是严格的.

证明 (1) 取 $C := \{x - y : x \in A, y \in B\}$, 显然 C 是凸集, $0 \notin C$, $\forall r > 0$, $B_r(0)\backslash\{0\} \not\subseteq C$. 因此, 取 $\{x_n\} \subseteq C^c$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 取唯一的 $y_n \in \overline{C}$, 使得 $|x_n - y_n| = \operatorname{dist}(x_n, C)$, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|} = \alpha$. 定义 $l(x) = \langle \alpha, x \rangle$, 则 $l(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \dfrac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|}, y - x_n \rangle \geqslant 0$. 取 $c = \inf\limits_{x \in A} l(x)$, 则 l 和 c 满足要求.

(2) 反例: $A = \{(x,y) : y \geqslant \dfrac{1}{x}, x > 0\}$, $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $l(x,y) = y$, $c = 0$.

2. (1) 若 $\mathrm{e}^z - xyz = 0$, 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 若 $F(x,y,z) = 0$, 证明: $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

(3) 设 $x + y = u + v$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin u}{\sin v}$, 计算 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{x(z-1)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y(z-1)}$.

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=(-\dfrac{F_y}{F_x})(-\dfrac{F_z}{F_y})(-\dfrac{F_x}{F_z})=-1.$

(3) $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\sin u}{\sin u+\sin v}+\dfrac{(u+v)\sin v\cos u}{(\sin u+\sin v)^2} & \dfrac{\sin u}{\sin u+\sin v}-\dfrac{(u+v)\sin u\cos v}{(\sin u+\sin v)^2}\\ \dfrac{\sin v}{\sin u+\sin v}-\dfrac{(u+v)\sin v\cos u}{(\sin u+\sin v)^2} & \dfrac{\sin v}{\sin u+\sin v}+\dfrac{(u+v)\sin u\cos v}{(\sin u+\sin v)^2}\end{pmatrix}.$

3. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 的.

(1) 若 $\det Df(x)\neq 0$, $\forall x\in\Omega$, 证明: f 将任意开集 G 映为开集.

(2) 若在 (1) 的基础上, 再加上 f 是单射的条件, 证明: f 是 C^1 同胚.

证明 (1) $\forall x\in G$, 由 $\det Df(x)\neq 0$ 知: $\exists\delta>0$, 使得 $B_\delta(x)\in G$ 且 $f:B_\delta(x)\to f(B_\delta(x))$ 是同胚, 因而 $f(B_\delta(x))\subset f(G)$ 是 $f(x)$ 的开邻域, 故 $f(G)$ 是开集.

(2) 显然 $f:\Omega\to f(\Omega)$ 是同胚, 结合 C^1 版本的逆映射定理: $Df^{-1}=(Df)^{-1}$. 由于 $\det Df\neq 0$, 故 Df^{-1} 连续, 因而 $f:\Omega\to f(\Omega)$ 是 C^1 同胚. □

第 9 周作业（2020 年 11 月 9 日）

1. 求正交变换群 $O_n\subset M_n(\mathbb{R})$ 在 A 点处的切空间.

证明 正交矩阵如果确定了最后一列的 $n-1$ 个元素, 将会直接决定最后一个元素为有限种可能. 通过正交性和规范性, 倒数第二列只需确定 $n-2$ 个元素即可. 以此类推, 可知 $\dim O_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 综上所述, $\mathrm{T}_AO_n=\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $\forall A\in O_n$. 当然, 这在同构意义下没有问题, 如果我们希望继续深入探究:

记作 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to O_n$ 为 C^1 曲线, 满足 $\gamma(0)=A$, $\gamma'(0)=X\in\mathrm{T}_AO_n$. 另一方面, 在 $\gamma(t)\gamma(t)^T=I_n$ 两侧对 t 求导: $\gamma'(t)\gamma(t)^T+\gamma(t)\gamma'(t)^T=0$. 令 $t=0$: $XA^T+AX^T=0$, 因此 $X=A\mathfrak{S}_n$, 其中 $\mathfrak{S}_n$ 是 n 阶斜对称矩阵全体, 进而 $\mathrm{T}_AO_n\subset A\mathfrak{S}_n$. 由于 $\dim\mathfrak{S}_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 故 $\mathrm{T}_AO_n=A\mathfrak{S}_n$. □

附注 事实上, $\mathfrak{S}_n$ 是李群 O_n 的李代数. 感兴趣的同学可以参考微分流形的教材中关于李群的部分.

2. 设 $c=(c_0,\cdots,c_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, 定义 $P_c(x)=x^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kx^k$. 设对于某个 c, P_c 具有单根 a, 即 $P_c(a)=0$, $(P_c)'(a)\neq 0$.

(1) 证明: 存在 c 的邻域, 使得其中的每个 c', 都满足 $P_{c'}$ 在 a 附近存在唯一单根. 更进一步地, 这个根是 c' 的光滑函数.

(2) 举例说明 $(P_c)'(a)\neq 0$ 对于 (1) 的成立是必要的.

证明 (1) 考察 $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $\varphi(x,y)=P_x(y)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(c,a)=(P_c)'(a)\neq 0$. 由于 $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$, 利用 C^∞-隐函数定理, 存在 c 的邻域 U, $f\in C^\infty(U)$, 使得 $f(c)=a$, $P_x(f(x))=0$, $\forall x\in U$.

(2) $c=0\in\mathbb{R}^2$, $P_c(x)=x^2$ 具有根 $a=0$, 但是 $P_{(\varepsilon^2,0)}(x)=x^2+\varepsilon^2$ 无根.

3. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 的, $\exists a>0$, 使得 $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, 有 $|f(x)-f(y)|\geqslant a|x-y|$. 证明: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 同胚.

证明 所给条件易知 f 是单射, 且任意点处任意方向导数都不为 0, 故 $\det Jf\neq 0$, 进而 f 是开映射. 结合 f 是单射可知 f 是同胚. 而又由 $\det Jf\neq 0$ 可知, f 是 C^1 同胚. □

第 10 周作业（2020 年 11 月 16 日）

1. 设 L 是 $\mathbb{R}^m$ 的子流形, U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集, $f \in C^1(U,\mathbb{R}^m)$. 如果 $\forall a \in U$ 满足 $f(a) \in L$, 就有 $T_{f(a)}L \oplus f'(a)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$, 证明: $f^{-1}(L)$ 是 U 的子流形. 是多少维的呢?

证明 记 $l = \dim L$. $\forall a \in f^{-1}(L)$, 存在 W 为 $f(a)$ 的开邻域, 使得 $\varphi : W \to \mathbb{R}^{m-l}$, $\varphi(f(a)) = 0$, $\operatorname{rank}\varphi'(f(a)) = m-l$, $\varphi^{-1}(\{0\}) = W \cap L$, 则 $\ker\varphi'(f(a)) = T_{f(a)}L$. 置 $\psi = \varphi \circ f$, $V = f^{-1}(W)$, 则 $\psi(a) = 0$, $\psi^{-1}(\{0\}) = V \cap f^{-1}(L)$, 且 $\psi'(a)(\mathbb{R}^n) = \varphi'(f(a)) \circ f'(a)(\mathbb{R}^n) = \varphi'(f(a))(\mathbb{R}^m)$, 其中第二个等号由条件 $T_{f(a)}L \oplus f'(a)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ 保证, 故 $\operatorname{rank}\psi'(a) = m-l$. 因此 $f^{-1}(L)$ 是 U 的 $n-m+\dim L$ 维子流形. $\square$

2. 设 L 和 K 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子流形, 使得 $\forall x \in L \cap K$, 有 $T_xL + T_xK = \mathbb{R}^m$. 证明: $L \cap K$ 是子流形. 是多少维的呢?

证明 设 $\dim L = l$, $\dim K = k$. 由子流形的定义, 存在 U 为 x 的开邻域, $f : U \to \mathbb{R}^{m-l}$, $\operatorname{rank} f'(x) = m-l$, $f^{-1}(0) = L \cap U$; $g : U \to \mathbb{R}^{m-k}$, $\operatorname{rank} g'(x) = m-k$, $g^{-1}(0) = K \cap U$, $f(x) = g(x) = 0$. 定义

$$\phi : K \cap L \cap U \to \mathbb{R}^{m-l} \times \mathbb{R}^{m-k},\ \phi(y) = (f(y), g(y))^T.$$

则 $\phi^{-1}(0) = K \cap L \cap U$. 取 $\{e_1, \cdots, e_{m-l}\}$ 为 $f'(x)(\mathbb{R}^m)$ 的一组基, 由题意, $\ker f'(x) + \ker g'(x) = \mathbb{R}^m$, 因此取 $\{e_{m-l+1}, \cdots, e_{2m-l-k}\}$ 为 $g'(x)(\mathbb{R}^m)$ 的一组基, 继续扩张: $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一组基, 则通过这组基能够看出 $\operatorname{rank}\phi'(x) = 2m-k-l$, 因此 $L \cap K$ 是 $\dim L + \dim K - m$ 维子流形. $\square$

3. 使用最优化理论证明不等式: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$, $x_i > 0$.

证明 研究 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i$ 在 $\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i = \beta$ 限制下的极值. 取 $L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i + \lambda(\prod_{i=1}^n x_i - \beta)$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{n} + \lambda\prod_{i \neq k} x_i = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \prod_{i=1}^n x_i - \beta = 0,$$

因此 $x_i = \sqrt[n]{\beta}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, 此时, $f(x_1, \cdots, x_n) = \sqrt[n]{\beta}$ 只能为最小值, 因为在无穷远处, f 为 $+\infty$. $\square$

4. 置 $\Omega := \{(x,y,z) : x,y,z \geqslant 0;\ x+y+z \leqslant 1\}$, 求 $f(x,y,z) = xy - z^2 + 2x^2 + x + y$ 在 Ω 上的最小值.

解 $\nabla f(x,y,z) = (y+4x+1, x+1, -2z) = 0$, 有: $(x,y,z) = (-1,3,0) \notin \Omega$, 故最小值在边界取得.

$f(0,y,z) = -z^2 + y \geqslant -1$, 在 $(0,0,1)$ 处取等; $f(x,0,z) = 2x^2 + x - z^2 \geqslant -1$ 在 $(0,0,1)$ 处取等; $f(x,y,0) = xy + 2x^2 + x + y \geqslant 0$. 重点考察:

$$g(x,y) := f(x,y,1-x-y) = x^2 - xy - y^2 + 3x + 3y - 1,\ x,y \geqslant 0;\ x+y \leqslant 1.$$

$\nabla g(x,y) = (2x-y+3, -x-2y+3) = 0$, 有: $(x,y) = (-\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$, 故 $g(x,y)$ 的最小值在 $(\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(x, 1-x) : x \in [0,1]\}$ 上取到. $g(0,y) = -y^2 + 3y - 1 \geqslant -1$ 在 $(0,0)$ 处取等; $g(x,0) = x^2 + 3x - 1 \geqslant -1$ 在 $(0,0)$ 处取等; $g(x,1-x) = x^2 + x + 1 \geqslant 1$. 综上所述, $f(x,y,z)$ 在 $(0,0,1)$ 处取得最小值 -1.

第 11 周作业（2020 年 11 月 24 日）

1. 设 M 是 n 维流形. 证明: ∂M 是流形.

证明 $\forall x \in \partial M$, 存在 x 的开邻域 U, 以及微分同胚 $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $\varphi(U \cap \partial M) = V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, 因此

$\widetilde{\varphi} : U \cap \partial M \to \widetilde{V} = \{(v_1, \cdots, v_{n-1}) : (v_1, \cdots, v_n) \in V\}$ 为微分同胚, 因此 ∂M 是 $n-1$ 维子流形. $\square$

2. 3. 记 $B = B_1(0)$, $B_+ = \{x \in B : x_n > 0\}$. 设 $f \in C^1(\overline{B_+})$, 证明: $\exists g \in C^1(B)$, 使得 $g\big|_B \equiv f$.

证明 $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in B_+ \\ -3f(x_1,\cdots,x_{n-1},-x_n)+4f(x_1,\cdots,x_{n-1},-\dfrac{x_n}{2}), & x\in \mathring{B}_- \end{cases}$ 显然是 C^1 延拓. $\square$

附注 一维的证明可以使用更简单的方法, 只需考察 $f^{(i)}(0)=0,\ 0\leqslant i\leqslant k$ 的情况做奇延拓即可, 并且能够顺利证明 C^k 延拓的情况. 至于为何只需考察 $f^{(i)}(0)=0$ 的详细证明, 留作练习. 而在高维情形下, 也可以仿照本题证明中的方法进行 C^k 延拓, 但是可能需要 $k+1$ 项进行构造, 具体构造方式也请大家思考.

4. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 k 维带边流形, $x\in\partial M$. 设 x 附近具有两个局部坐标卡 U_1,U_2, 满足 $h_1:U_i\to V_i$ 是微分同胚, $h_i(U_i\cap M)=V_i\cap\{x_k\geqslant 0, x_j=0, k+1\leqslant j\leqslant n\}$, 其中 V_i 是 0 的开邻域, $i=1,2$. 记 $U=U_1\cap U_2$.

(1) 证明: $h_2\circ h_1^{-1}:h_1(U\cap M)\to h_2(U\cap M)$ 是同胚.

(2*) 证明: $h_2\circ h_1^{-1}\in C^1(\overline{h_1(U\cap M)})$.

证明 (1) 是显然的, 只证明 (2). 由于 $h_2\circ h_1^{-1}\in C^1(h_1(U\cap M))$, 并且 $(h_2\circ h_1^{-1})'$ 能够连续到边, 由第 2、3 题的结论, 知可以延拓到边. $\square$

第 13 周作业（2020 年 12 月 9 日）

1. 设 X 是拓扑空间, 定义 $(x,t)\sim(y,s)$ 在 $X\times[0,1]$ 中等价, 如果 $t=s=0$, 或 $(x,t)=(y,s)$. 商空间叫做 X 上的锥, 记作 CX.

(1) 证明: 如果 X 是 Hausdorff 空间, 那么 CX 也是.

(2) 证明: 如果 $X=\mathbb{S}^1$ 是圆周, 则 CX 是圆盘 $\mathbb{D}^2$.

证明 (1) 只需检查 $(x,0)$ 与 (y,s) 的分离性: $(x,0)\in X\times[0,\dfrac{s}{2})$, $(y,s)\in X\times(\dfrac{s}{2},\dfrac{3s}{2})$. 其余情况, 由 X 和 $[0,1]$ 的 Hausdorff 性可知是平凡的.

(2) 考察圆盘的极坐标 (ρ,θ), 定义双射 $f:\mathbb{D}^2\to CX$, $f(\rho,\theta)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\rho)$, 易知 f 是同胚. $\square$

2. 度量空间 X 是紧的, 当且仅当 $\forall f\in C(X)$, f 有界.

证明 紧致空间的连续像是紧的, 因此必要性显然. 如果 X 非紧, 则 X 不是列紧的, 故 $\exists A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 为闭集, 定义 $f(x_n)=n$, 并由 Tietze 扩张定理, 它可以延拓为 X 上的无界连续函数, 充分性得证. $\square$

3. 设 X 为紧致度量空间, $f:X\to X$ 连续, $d(f(x),f(y))\geqslant d(x,y)$, $\forall x,y\in X$. 证明: $f:X\to X$ 是等距同构.

证明 单射显然, $d(x,y)\geqslant d(f^{-1}(x),f^{-1}(y))$ 知 f^{-1} 连续, 故 $f:X\to f(X)$ 为同胚.

由 X 列紧: $\{f^n(a)\}_{n=1}^\infty$ 必然存在极限点, 设 $\{f^{k_n}(a)\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 列, 则 $\lim\limits_{m,n\to\infty}d(f^{k_m}(a),f^{k_n}(a))=0$, 结合 $d(a,f^{k_m-k_n}(a))\leqslant d(f^{k_m}(a),f^{k_n}(a))$, 知 a 是 $\{f^n(a)\}_{n=1}^\infty$ 的一个极限点.

由 f 是同胚, $f(X)$ 是闭集. 而 $\forall a\in X$, 由刚刚的讨论知 a 是 $f(X)$ 的聚点, 故 $a\in f(X)$, 进而 $f(X)=X$.

定义 $X\times X$ 上的度量 $\widetilde{d}((x,y),(x',y'))=\max(d(x,x'),d(y,y'))$, $g:X\times X\to X\times X$, $g(x,y)=(f(x),f(y))$. 直接验证可知, g 满足与 f 相同的性质: $\widetilde{d}(g(x,y),g(x',y'))\geqslant\widetilde{d}((x,y),(x',y'))$, 故 (a,b) 是 $\{g^n(a,b)\}_{n=1}^\infty$ 的极限点. $\forall\varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\widetilde{d}((a,b),(f^n(a),f^n(b)))<\varepsilon$, 进而

$$d(f(a),f(b))\leqslant d(f^n(a),f^n(b))\leqslant d(f^n(a),a)+d(a,b)+d(b,f^n(b))<d(a,b)+2\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0$: $d(f(a),f(b))=d(a,b)$, $f:X\to X$ 是等距同构. $\square$

第 14 周作业（2020 年 12 月 16 日）

1. 设 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 为可定向光滑曲面, $\vec{v}=(P,Q,R)\in\mathrm{T}\Sigma$, $A\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, Σ' 为 Σ 在 A 下的像, Σ' 的向也取为 Σ 定向在 A 下的像. 尝试定义 $\vec{v}'=(P',Q',R')\in\mathrm{T}\Sigma'$, 使得

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma'}P'\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q'\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R'\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 $\begin{pmatrix}P'\\Q'\\R'\end{pmatrix}=\dfrac{A}{\det A}\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}\circ A^{-1}$. 由单位分解的性质以及 A 是线性变换可知, 不妨考虑只有一个坐标卡的情况, 取曲面 Σ 的一个参数表示 (s,t) 代入, 直接验证答案即可. □

2. 设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱面 $x^2+y^2\leqslant 1$ 内的部分, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}\subset C^{\infty}(\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\})$, 满足 $f_i(x,y)\rightrightarrows f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. 定义 f_i 的图像 $\Sigma_i:=\{(x,y,z):z=f_i(x,y)\}$, 曲面定向取为上法向. 证明:

$$\lim_{i\to\infty}\iint_{\Sigma_i}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 取 $\Sigma_i'=\{(x,y,z):x^2+y^2=1,\ (z-f_i(x,y))(z-f(x,y))\leqslant 0\}$, 定向取为外法向. $V_i=\{(x,y,z):x^2+y^2\leqslant 1,\ (z-f_i(x,y))(z-f(x,y))\leqslant 0\}$, 则

$$\left(\iint_{\Sigma_i}-\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_i'}\right)P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{V_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

利用一致收敛, $\|f_i-f\|_{\infty}<\varepsilon$, $\forall i>N$, 进而 $\mathcal{H}^2(\Sigma_i)<2\pi\varepsilon$, $|V_i|<\pi\varepsilon$, 结论得证. □

第 15、16 周作业（2020 年 12 月 29 日）

1. 对于 (1)(2)(3) 请给出例子, 并证明 (4):

(1) $f\notin C[0,1]$ 不连续, 但是存在 F 使得 $f(x)=F'(x)$, $\forall x\in[0,1]$.

(2) $f\notin C[0,1]$, 且 f 的图像是闭的.

(3) $f\notin C[0,1]$, 且 f 的图像是连通的.

(4) $\forall\alpha\in(0,1]$, 存在 f 为 $[0,1]$ 上的单调连续函数, 但 f 不是 α 阶 Lipschitz 的. 证明: 如果 f 是 α 阶 Lipschitz 的, $\alpha>1$, 那么 f 为常数.

证明 (1) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}+2x\cos\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(4) $f(x)=x^{\frac{\alpha}{2}}$. 如果 $\alpha>1$, $\forall x\in(0,1)$, $|h|$ 充分小, $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant[f]_{\alpha}|h|^{\alpha-1}\to 0\ (h\to 0)$. □

2. 设 $f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$ 非负可积, $\{f_k\}$ 逐点收敛于 f. 证明: 如果 $\liminf\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_k<\infty$, 那么 f 可积, 且 $\displaystyle\int_a^b f\leqslant\liminf_{k\to\infty}\int_a^b f_k$.

证明 设 $g_k=\inf\limits_{n\geqslant k}f_n$, 由于可积函数列 $\{\inf\limits_{k\leqslant n\leqslant M}f_n\}_{M=k}^{\infty}$ 单调递减地趋于 g_k, 由单调收敛定理可知 g_k 可积, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. 再注意到 $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调递增地逐点趋于 f. 注意到 $\int_a^b g_k\leqslant\inf\limits_{n\geqslant k}\int_a^b f_n$, 在两侧令 $k\to\infty$, 并利用单调收敛定理, 有: $\int_a^b f=\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b g_k\leqslant\liminf\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_k$. □

3. (1) 写出 gauge 积分定义的 Cauchy 判别法版本.

(2) 使用上述定义, 证明: 如果 f 在 $[0,2]$ 上可积, 那么在 $[0,1]$ 上也可积.

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$, 存在 γ 为 gauge, 对于任何 γ-fine 的 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}'$, $|S(f,\mathscr{D})-S(f,\mathscr{D}')|<\varepsilon$.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[0,2]$ 上的 gauge γ, 使得对于任何 γ-fine 的 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}'$, $|S(f,\mathscr{D})-S(f,\mathscr{D}')|<\varepsilon$. 定义 $\gamma'(t)=\begin{cases}(0,1), & t\in(0,1),\\ (0,2), & t=1,\\ (1,2), & t\in(1,2),\end{cases}$ $\gamma_1(t)=\gamma(t)\cap\gamma'(t)$, $\forall t\in[0,1]$, $\gamma_2(t)=\gamma(t)\cap\gamma'(t)$, $\forall t\in[1,2]$. 任取 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 是 $[0,1]$ 上 γ_1-fine 的分割, $\mathscr{D}$ 是 $[1,2]$ 上 γ_2-fine 的分割, 则 $\mathscr{D}_1\cup\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}_2\cup\mathscr{D}$ 是 $[0,2]$ 上 γ-fine 的分割, 因此

$$|S(f,\mathscr{D}_1)-S(f,\mathscr{D}_2)|=|S(f,\mathscr{D}_1\cup\mathscr{D})-S(f,\mathscr{D}_2\cup\mathscr{D})|<\varepsilon.\quad\square$$

第 17 周作业（2021 年 1 月 7 日）

1. 证明: $\mathbb{C}P^1$ 是流形, 且微分同胚于 $\mathbb{S}^2$.

证明 设 $U_1=\{[(1,z)]:z\in\mathbb{C}\}$, $U_2=\{[z,1]:z\in\mathbb{C}\}$, $\varphi_j:U_j\to\mathbb{R}^2$, $j=1,2$, 定义为 $\varphi_1([1,z])=(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)$, $\varphi_2([z,1])=(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)$, 因此 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}(x,y)=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(x,y)=(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$, $\forall(x,y)\neq(0,0)$, 进而 $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ 为 $\mathbb{C}P^1$ 的一组坐标卡, $\mathbb{C}P^1$ 是光滑流形. 定义 $f([1,z])=(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1},\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$, $f([0,1])=(0,0,1)$, 容易验证 $f:\mathbb{C}P^1\to\mathbb{S}^2$ 是微分同胚. (本质是球极投影)

2. 在 $F:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^2$, $F(z,w)=(z\overline{w}+w\overline{z},\mathrm{i}w\overline{z}-\mathrm{i}z\overline{w},z\overline{z}-w\overline{w})$ 的帮助下, 证明: $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ 是微分流形, 且商映射 $\pi:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ 是光滑映射.

证明 注意到 $F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z,w))=F(z,w)$, $\theta\in\mathbb{R}$, 可以考察 $\widetilde{F}:\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^2$. 通过 $F(z_1,w_1)=F(z_2,w_2)$ 可知: $z_1\overline{w}_1=z_2\overline{w}_2$ 且 $|z_1|^2-|w_1|^2=|z_2|^2-|w_2|^2$, 进而 $\exists\theta\in\mathbb{R}$, 使得 $(z_2,w_2)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z_1,w_1)$, 因此 $\widetilde{F}$ 是单射.

考虑 $F(z,w)=(a,b,c)\in\mathbb{S}^2$, 有 $|z|^2=\frac{1+c}{2}$, $|w|^2=\frac{1-c}{2}$, $2z\overline{w}=a+\mathrm{i}b$. 通过最后一个等式可知: z,w 的辐角之差为定值, 结合前两个等式, $\widetilde{F}$ 是满射, 进而是双射. 由交换图表, 只需用坐标卡检查 $\widetilde{F}$ 是微分同胚即可:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^3 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \arrow[dl, "\widetilde{F}"] \\ \mathbb{S}^2 & \end{tikzcd}\quad\square$$

3. 设 $M\subset\mathbb{R}^3$ 是 Mobius 带.

(1) 四维流形 $M\times M$ 可定向吗? 为什么?

(2) 如果 M 在 $\mathbb{R}^3$ 中变厚, 变成三维流形 $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}$ 可定向吗? 为什么?

证明 (1) 不可定向. 先在 M 上取一条不保持定向的闭路 γ, 固定另一个 M 上一点 p, 取 $\widetilde{\gamma}(t)=(\gamma(t),p)$, 则 $\widetilde{\gamma}$ 是 $M\times M$ 上不保持定向的闭路.

(2) 可定向. $\mathrm{id}:\widetilde{M}\to\mathbb{R}^3$ 是全局坐标卡, 继承了 $\mathbb{R}^3$ 的可定向性.