EXAMEN 2 ANALYSE FONCTIONNELLE

GABRIEL DOSPINESCU

Notations et conventions:
• Tous les espaces localement convexes sont sur le corps des scalaires $\mathbb{C}$

• On note X' le dual continu d'un espace localement convexe X. Si X est un Banach, on note B_X sa boule unité fermée.

• Si X est un espace topologique on note $C(X)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to \mathbb{C}$.

Exercice 1

(1) Enoncer les théorèmes du graphe fermé et de Hahn-Banach.
(2) a) Soit X un espace de Banach pour lequel tout fermé borné est compact. Montrer que X est de dimension finie.
b) Est-ce que la conclusion reste vraie si on suppose que X est un espace de Fréchet?

Exercice 2

Soit X un espace vectoriel normé et soit A un sous-ensemble non vide de X tel que $X \setminus A$ soit un sous-espace vectoriel de X. Montrer que A est dense dans X.

Exercice 3

Soient X, Y des espaces de Banach et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
i) T est d'image fermée et injective
ii) Il existe $c > 0$ tel que $||T(x)|| \geq c||x||$ pour tout $x \in X$.

Exercice 4

On munit $C([0, 1])$ de la norme sup $|| \cdot ||_\infty$. Soit $C^1([0, 1])$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ (à valeurs complexes).

(1) Soit $D : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ l'application définie par $D(f) = f'$. Montrer que D est linéaire, de graphe fermé, et pas continue si l'on munit $C^1([0, 1])$ de la norme sup. Que peut-on conclure?
Dans la suite de l'exercice on munit $C([0, 1])$ de la norme $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.
(2) Montrer que $C^1([0, 1])$ est un espace de Banach.
Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $C([0, 1])$ (muni de la norme sup $|| \cdot ||_\infty$). On suppose que $V \subset C^1([0, 1])$.

Date: December 17, 2021.

(3) Montrer que l'application $D : V \to C^1([0,1])$ définie par $D(f) = f'$ est continue.
(4) Montrer que la boule unité de V est compacte.
(5) Montrer que V est de dimension finie.

Exercice 5
Soit X un espace de Banach et soit $(\ell_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X'.

(1) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
 a) On a $\sum_{n\geq 0} ||\ell_n|| < \infty$.
 b) Pour toute suite (x_n) dans X qui converge vers 0, la série $\sum \ell_n(x_n)$ converge.
(2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
 a) On a $\sum_{n\geq 0} ||\ell_n|| < \infty$.
 b) Pour toute suite (x_n) dans X qui converge vers 0 on a

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n(x_0) + \ell_{n-1}(x_1) + ... + \ell_0(x_n) = 0.$$