Chapter 5

Homologie: calcul et applications

5.1 Premières applications

Théorème 5.1.1 (Invariance de la dimension). *Pour $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.*

Proposition 5.1.2 (Caractérisation du bord). *Soient M une variété à bord de dimension n et x un point de M, alors:*
$x \in M - \partial M \iff H_n(M, M-x) \simeq \mathbb{Z}$,
$x \in \partial M \iff H_n(M, M-x) \simeq \{0\}$.

Lemme 5.1.3. *Si on a une carte locale en x:*

$$\phi : (U, x) \to (V, \phi(x)),\ V \subset [0, +\infty[\times \mathbb{R}^{n-1} \ ,$$

alors x est dans le bord de M si et seulement si $\phi(x)$ appartient à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Proposition 5.1.4. *Il n'existe pas de rétraction de D^n sur son bord.*

Théorème 5.1.5 (Point fixe de Brower). *Toute application continue $f : D^n \to D^n$ a au moins un point fixe.*

5.2 Théorie du degré

Définition 5.2.1. Soit $n \geq 1$. Une application continue $f : S^n \to S^n$ induit un endomorphisme f_* de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$. Le degré de f est défini par:

$$\forall z \in H_n(S^n)\ ,\ f_*(z) = \deg(f)\ z\ .$$

Proposition 5.2.2. *Le degré d'une isométrie $f \in O_n(\mathbb{R})$ est égal à son déterminant.*

Corollaire 5.2.3. *Pour n pair, l'application antipode, $-Id_{S^n}$, n'est pas homotope à l'identité.*

Corollaire 5.2.4. *Pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, n pair, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = -x$.*

Corollaire 5.2.5. *Pour $n > 0$ pair, il n'existe pas de champ de vecteurs tangents non nuls sur la sphère S^n, c'est à dire il n'existe pas d'application continue $X = [x \to X_x]$ de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ avec X_x orthogonal à x pour tout x.*

5.3 Homologie cellulaire

Définition 5.3.1. Soit X un espace topologique, on dit que X est obtenu à partir de $A \subset X$ par attachement de cellules de dimension n si et seulement s'il existe des applications

$$(\Phi_i, \phi_i) : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A), \quad i \in I \ ,$$

telles que l'application induite par l'inclusion de A et $\Phi = \amalg_{i \in I} \Phi_i$,

$$A \cup_\phi \amalg_{i \in I} D_i^n \to X \ , \phi = \amalg_{i \in I} \ \phi_i \ ,$$

est un homéomorphisme.

Définition 5.3.2. Un CW-complexe est un espace topologique X muni d'une filtration

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

par des sous-espaces fermés de réunion X, telle que:

1. X^0 est un espace discret;
2. Pour $n \geq 1$, X^n est obtenu à partir de X^{n-1} par attachement de cellules de dimension n;
3. X a la topologie faible définie par les X^n: $F \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout n, $F \cap X^n$ est fermé.

Le sous-espace X^n est le n-squelette. Les composantes connexes de $X^n \backslash X^{n-1}$ sont les n-cellules ouvertes. Dans CW, W est pour *Weak* (weak topology = topologie faible), et le C est pour *Closure finite*: l'adhérence de chaque n-cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules du (n-1)-squelette.

Les CW-complexes forment une catégorie avec comme morphismes les applications continues filtrées,

$$f : X \to Y \ , \ \forall n \ f(X^n) \subset Y^n \ .$$

Théorème 5.3.3 (Théorème préparatoire). *Soit $X = (X^n)_{n\geq 0}$ un CW-complexe de n-squelette X^n.*
a) Pour tout $n \geq 0$, $H_k(X^n, X^{n-1})$ est nul pour k distinct de n, et $H_n(X^n, X^{n-1})$ est un groupe libre de base indexée par les cellules de dimension n.
b) Si on a une famille d'applications d'attachement des cellules:

$$(\Phi_j, \phi_j) : (D^n, S^{n-1}) \to (X^n, X^{n-1}),\ j \in J_n \ ,$$

alors les $(\Phi_j)_*([D^n])$, $j \in J_n$, forment une base de $H_n(X^n, X^{n-1})$, de plus un reparamétrage de la cellule change ce générateur par un signe qui est le degré du reparamétrage (positif pour un reparamétrage orienté, négatif sinon).

Une orientation d'une cellule est une application d'attachement à reparamétrage orienté près.

Définition 5.3.4. Le complexe cellulaire $C^{\mathrm{cell}}(X)$ est le groupe abélien libre de base les cellules orientées, avec la graduation donnée par la dimension (le groupe $C^{\mathrm{cell}}_n(X)$ est isomorphe à $H_n(X^n, X^{n-1})$).

Le bord $\partial^{\mathrm{cell}}_n : C^{\mathrm{cell}}_n(X) \cong H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_n(X^{n-1}, X^{n-2}) \cong C^{\mathrm{cell}}_{n-1}(X)$ est obtenu en composant le bord de la paire (X^n, X^{n-1}) avec le morphisme d'inclusion.

Proposition 5.3.5. *$(C^{\mathrm{cell}}(X), \partial^{\mathrm{cell}}_n)$ est un complexe de chaîne.*

Théorème 5.3.6. *Pour tout CW-complexe $X = (X^n)_{n\geq 0}$ on a un isomorphisme gradué canonique*

$$H^{\mathrm{cell}}_*(X) \cong H_*(X) \ .$$

Lemme 5.3.7. *a) Pour tout $k > n$, $H_k(X^n)$ est nul.*
b) Pour $k < n$, l'inclusion induit un isomorphisme $H_k(X^n) \to H_k(X^{n+1})$.
c) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme injectif $H_n(X^n) \to C^{\mathrm{cell}}_n(X)$ d'image le sous-groupe des cycles cellulaires: $Z^{\mathrm{cell}}_n(X)$.
d) Pour tout n, l'inclusion induit un morphisme surjectif

$$Z^{\mathrm{cell}}_n(X) \approx H_n(X^n) \to H_n(X^{n+1})$$

de noyau le sous-groupe des bords cellulaires: $B^{\mathrm{cell}}_n(X)$.

On obtient a) avec l'exactitude et une récurrence fini sur n, b) avec l'exactitude, c) et d) en chassant dans le bon diagramme. On prouve ensuite le théorème en utilisant d) et b), puis la limite inductive si le complexe cellulaire a des cellules dont les dimensions ne sont pas bornées.

Le lemme précédent prouve le théorème dans le cas où la filtration est stationnaire: X est égal à l'un de ces squelettes. Pour un CW-complex qui a des cellules arbitrairement grandes, on utilise la proposition suivante.

Proposition 5.3.8. *L'homologie d'un CW-complexe $X = (X^n)_{n\geq 0}$ est égale à la limite inductive (limite directe) des homologies de ses squelettes.*

Voir l'appendice D dans le livre de Bredon pour les généralités sur les limites inductives. La proposition est conséquence des propriétés suivantes des CW-complexes, cf ch4, Prop. 8.1 dans le livre de Bredon.

Proposition 5.3.9. *Soit $X = (X^n)_{n\geq 0}$ un CW-complexe.*

1. *Si $A \subset X$ a au plus un point dans chaque cellule ouverte, alors A est fermé et discret.*

2. *Si $C \subset X$ est compact, alors C ne rencontre (n'intersecte non trivialement) qu'un nombre fini de cellules ouvertes.*

3. *Chaque cellule est contenue dans un sous-complexe fini.*

Remarque 5.3.10. Les CW-complexes sont des espaces normaux, donc séparés (Hatcher Annexe A.3).

Nombres de Betti et caractéristique d'Euler

Définition 5.3.11. a) Les nombres de Betti d'un espace topologique X sont les rangs des groupes d'homologie: $b_k(X) = \mathrm{rk}(H_k(X))$.
b) La caractéristique d'Euler d'un espace topologique X est la somme alternée de ses nombres de Betti, lorsque cette somme est finie: $\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X)$.

Proposition 5.3.12. *La caractéristique d'Euler d'un CW-complexe fini est la somme alternée du nombre de cellules dans chaque dimension:*

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \mathrm{rk}(C_k^{\mathrm{cell}}(X)) \ .$$

Remarque 5.3.13. L'homologie cellulaire, étant égale à l'homologie singulière, est un invariant topologique. Les complexes simpliciaux, qui sont définis de manière combinatoire, ont une homologie dite simpliciale. La réalisation géométrique d'un complexe simplicial par recollement de simplexes est un cas particulier de CW-complexe. Pour ceux-ci, l'homologie simpliciale est la même que l'homologie cellulaire. L'homologie simpliciale est par conséquent un invariant topologique.

5.4 Homologie des variétés et orientation

Définition 5.4.1. Une orientation locale en x d'une variété topologique M de dimension n est un générateur de l'homologie locale: $\mu_x \in H_n(M, M - x) \simeq \mathbb{Z}$.

On définit le revêtement d'orientation $\widetilde{M}$ d'une variété topologique M comme l'ensemble des (x, μ_x) où $x \in M$ et μ_x est une orientation locale en x. On a une application surjective $p : \widetilde{M} \to M$ où chaque point x a 2 antécédents: (x, μ_x) et $(x, -\mu_x)$.

Pour chaque disque fermé D contenu dans un ouvert V homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, on choisit un générateur μ_D de $H_n(M, M \setminus D) \simeq \mathbb{Z}$. On note alors $\mathcal{V}(D, \mu_D) \subset \widetilde{M}$ l'ensemble des $(x, (i_x)_*(\mu_D))$, $x \in \mathring{D}$. Ici $i_x : (M, M \setminus D) \to (M, M \setminus x)$ est l'inclusion. On munit $\widetilde{M}$ de la topologie qui a les $\mathcal{V}(D, \mu_D)$ comme base d'ouverts. On note que chaque point $x \in M$ a un voisinage $\mathring{D}$ qui donne lieu a une trivialisation: $p^{-1}(\mathring{D}) = \mathcal{V}(D, \mu_D) \amalg \mathcal{V}(D, -\mu_D)$ autrement dit $p : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement à deux feuilles (ou revêtement double).

Définition 5.4.2. a) Une orientation d'une variété topologique M est une famille continue d'orientations locales, $(\mu_x)_{x \in M}$, ce qui veut dire une section du revêtement d'orientation.
b) Une orientation de la variété topologique M le long du compact $K \subset M$ est une famille continue d'orientations locales, $(\mu_x)_{x \in K}$.

Exemples 5.4.3.

1. Pour tout n, l'espace $\mathbb{R}^n$ est orienté avec la famille μ_x obtenue en utilisant la translation t_x: $\mu_x = (t_x)_*(\mu_0)$.
2. Pour tout $n > 0$, la sphère S^n est orientée par $\mu_x = \rho_x(\mu)$, où μ est générateur de $H_n(S^n)$, et ρ_x est induit par l'inclusion.
3. Le revêtement d'orientation est orienté en prenant $\mu_{(x, \mu_x)} = \mu_x$ comme générateur de l'homologie locale $H_n(\widetilde{M}, \widetilde{M} - (x, \mu_x)) \cong H_n(M, M - x))$.

Proposition 5.4.4. *Une variété M est orientable si et seulement s'il existe un* atlas *dont les changements de carte respectent l'orientation de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 5.4.5. *Soit M une variété topologique compacte de dimension n.*
a) $H_k(M)$ est nul pour tout $k > n$.
b) Si $\nu \in H_n(M)$ est telle que $(i_x)_*(\nu) = 0$ pour tout $x \in M$, alors $\nu = 0$.
c) Si $(\mu_x)_{x \in M}$ est une orientation de M, alors il existe une unique classe $\mu_M = [M] \in H_n(M)$ telle que, pour tout $x \in M$, $(i_x)_*(\mu_M) = \mu_x$.

La classe $\mu_M = [M]$ est appelée la classe fondamentale M. Ce théorème est contenu dans la proposition suivante.

Proposition 5.4.6. *Soit M une variété de dimension n, et K un compact de M.*
a) $H_k(M, M - K)$ est nul pour tout $k > n$.
b) Si $\nu \in H_n(M, M \setminus K)$ est telle que $(i_x)_*(\nu) = 0$ pour tout $x \in K$, alors $\nu = 0$.
c) Si $(\mu_x)_{x \in K}$ est une orientation sur K, alors il existe $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$ (unique d'après b) tel que pour tout $x \in K$, $(i_x)_*(\mu_K) = \mu_x$.

Remarque 5.4.7. Dans b), la nullité ou non de $(i_x)_*(\nu)$ est localement constante, il suffit donc de tester un point x pour chaque composante connnexe de K.

Exercice 5.4.8. Soit M une variété connexe.

1. Montrer que M est orientable si et seulement si $\widetilde{M}$ n'est pas connexe.
2. Démontrer que si M est non orientable, alors pour $\nu \in H_n(M)$ et $x \in M$, $(i_x)_*(\nu) = -(i_x)_*(\nu)$.
3. En déduire que pour M non orientable on a $H_n(M) = 0$.

Théorème 5.4.9. *Soit M est une variété compacte connexe.*
a) Si M est orientable alors $H_n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientations de M et les générateurs de $H_n(M)$.
b) Si M est non orientable, alors $H_n(M)$ est nul.

Cas à bord

Une orientation d'une variété à bord M est une orientation de $M \setminus \partial M$.

Théorème 5.4.10. *Soit M une variété compacte à bord.*
a) Si M est orientée, alors il existe une unique classe $\mu_M = [M] \in H_n(M, \partial M)$ tel que, pour tout $x \in M - \partial M$, $\rho_x([M]) = \mu_x$.
b) Si M est connexe et orientable, alors $H_n(M, \partial M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientations de M et les générateurs de $H_n(M)$.
c) Si M est non orientable, alors $H_n(M, \partial M) = 0$.

Exercice 5.4.11. a) Montrer que si M est une variété compacte orientée à bord de classe fondamentale $[M]$, alors $\partial[M] \in H_{n-1}(\partial M)$ définit une orientation de ∂M.
b) Montrer que les restrictions au bord de cartes orientées de M à valeurs dans les ouverts de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ sont des cartes orientée de ∂M.

5.5 Complément sur le degré

Définition 5.5.1. Si $f : M \to N$ est une application continue entre des variétés orientées compactes de même dimension, le degré de f est défini par: $f_*([M]) = \deg(f)\,[N]$.

Définition 5.5.2. a) Pour une application continue $f : M \to N$ entre des variétés orientées de même dimension, on dit que $x \in M$ est un point régulier si et seulement si f est un homéomorphisme local en x, c'est à dire un homéomorphisme entre un voisinage ouvert de x et un voisinage ouvert de $y = f(x)$.
b) Un point $y \in N$ est une valeur régulière si et seulement si tous ses antécédents sont réguliers.

Théorème 5.5.3. *Si y est une valeur régulière d'une application continue entre des variétés orientée compactes de même dimension, alors y a un nombre fini d'antécédents, et:*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f) \ .$$

En particulier, si f n'est pas surjective le degré est nul.

Proposition 5.5.4. *Soit $f : M \to M'$ une application continue entre des variétés orientées compactes de même dimension. S'il existe des cartes locales*

$$\phi : (U, x) \to (V, 0) \ , \psi : (U', x) \to (V', 0) \ ,$$

compatibles avec les générateurs orientés dans lesquelles l'expression de f est un difféomorphisme, alors le degré local est donné par le signe du déterminant jacobien.

5.6 L'invariance du domaine

Théorème 5.6.1 (Théorème du complémentaire). *a) Pour tout plongement $h : D^k \to S^n$, on a $\widetilde{H}_*(S^n \setminus h(D^k)) = 0$.*

b) Pour tout plongement $h : S^k \to S^n$, $k < n$, on a $\widetilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si i=n-k-1,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Théorème 5.6.2. *Tout plongement d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ a une image ouverte.*

5.7 Homologie avec coefficients, théorème de Borsuk-Ulam

On définit l'homologie à coefficients dans un anneau commutatif Λ, $H_*(X, \Lambda)$, avec le complexe $C(X, \Lambda)$ qui est un Λ-module libre de base les simplexes singuliers. On va particulièrement s'intéresser au cas $\Lambda = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5.7.1. Déterminer l'homologie $H_*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Le transfert

Soit X un espace topologique et $\tau : X \to X$ une involution continue sans point fixe (involution libre). On a alors un espavce quotient $B = X/\tau$ qui identifie x à $\tau(x)$ (l'application quotient $p : X \to B$ est un revêtement à deux feuilles). Le transfert donne une relation entre l'homologie de X et l'homologie de B avec coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'application de transfert est le morphisme de chaîne $t : C(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui associe à un simplexe σ la somme de ses deux relevés: $t(\sigma) = \widetilde{\sigma} + \tau(\widetilde{\sigma})$.

Théorème 5.7.2. *a) Il existe une suite exacte longue de transfert*

$$\dots \to H_n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \dots$$

où les applications sont données respectivement par le transfert, l'inclusion et le connectant déduit de le suite exacte courte de complexes de chaînes.
b) Cette suite exacte est naturelle pour les applications continues équivariantes (qui commutent aux involutions).

Théorème 5.7.3. *Pour $k < n$, il n'existe pas d'application antipodale $f : S^n \to S^k$.*

Théorème 5.7.4 (Borsuk-Ulam)**.** *Pour tout application continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$.*