

Cours sino-français Hefei, automne 2022
Topologie algébrique - Examen du 6 novembre - Solutions

I.1.a)

Soit $\Pi =]0, +\infty] \times \mathbb{R} \setminus \{(1, 0)\}$ le demi-plan ouvert privé d'un point. On définit:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} \times \Pi &\rightarrow X \\ (\theta, (r, z)) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

L'application f est continue et surjective. Elle est différentiable de jacobien non nul, c'est donc un difféomorphisme local, en particulier une application ouverte. Par passage au quotient on obtient un homéomorphisme

$$\bar{f} : (\mathbb{R} \times \Pi) / \sim \rightarrow X ,$$

où \sim est la relation d'équivalence associée à f (égalité des images). On obtient un homéomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \Pi \cong X$. L'espace quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle S^1 de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z} . Le demi-plan privé d'un point est homéomorphe au plan privé d'un point, de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{Z} . Le groupe fondamental de X (avec n'importe quel point de base) est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Notons que c'est un groupe commutatif.

I.1.b)

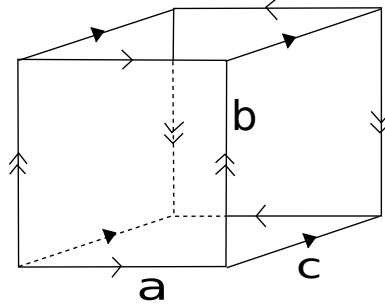
On décompose Y en deux ouverts connexes par arc, d'intersection connexe par arc: $Y = U \cup V$, avec $U = Y \cap \{(x, y, z), x < \frac{7}{4}\}$, $V = Y \cap \{(x, y, z), x > \frac{5}{4}\}$. L'intersection $U \cap V =]\frac{5}{4}, \frac{7}{4}[\times \mathbb{R}^2$ est contractile, donc de groupe fondamental trivial. L'ouvert V est homéomorphe à $P \times S^1$, où P est un demi-plan ouvert; son groupe fondamental est isomorphe à \mathbb{Z} . L'ouvert U est réunion de $U_1 = U \setminus \Delta$ et de $U_2 = \{(x, y, z), x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$. L'espace U_1 est homéomorphe à X , l'espace U_2 est contractile, l'intersection $U_1 \cap U_2$ est homotopie-équivalente au cercle. Le théorème de Van-Kampen calcule $\pi_1(U, *)$ comme quotient de $\pi_1(U_1, *) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. La relation, obtenue avec le méridien de la droite Δ , élimine l'un des générateurs de $\pi_1(U_1, *) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On déduit que le groupe fondamental de U est isomorphe à \mathbb{Z} , et celui de Y est isomorphe au groupe libre à deux générateurs.

I.2)

Le groupe fondamental de Y est non commutatif, alors que celui de X l'est: leurs groupes fondamentaux n'étant pas isomorphes, les espaces X et Y ne sont pas homéomorphes.

II)

En écrivant $S^1 \times S^1$ comme quotient du carré $[0, 1] \times [0, 1]$, on obtient Z comme quotient du cube $K = [0, 1]^3$. Tous les sommets sont identifiés, et les arêtes sont identifiées comme indiqué sur la figure qui suit.



On a une structure de CW-complexe avec

- une cellule de dimension 0: e_0 ,
- trois cellules de dimension 1: a , b et c ,
- trois cellules de dimension 2: e , f , g , de bords orientés respectifs: $aba^{-1}b^{-1}$, $cbc^{-1}b$ et $cac^{-1}a$,
- une cellule de dimension 3: e_3 .

Tous les bords cellulaires sont nuls, sauf $\partial f = 2b$ et $\partial g = 2a$. On déduit les groupes d'homologie:

$$H_0(Z) = \mathbb{Z}, H_1(Z) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(Z) = \mathbb{Z}, H_3(Z) = \mathbb{Z},$$

$$H_n(Z) = \{0\} \text{ pour } n > 3.$$

On peut aussi utiliser le théorème de Mayer-Vietoris. Attention au nombre de composantes de l'intersection et aux signes qui apparaissent dans les morphismes, notamment en raison des identifications dans le quotient.

III.1.a)

Remarquons d'abord que la projection $p : M \rightarrow B$ est ouverte: si V est un ouvert de M et $W = p(V)$, alors $p^{-1}(W) = V \cup \tau(V)$ est ouvert. Il en résulte que les ouverts de B sont les images par p des ouverts de M , ce qui implique que la topologie de B est à base dénombrable.

L'espace M étant séparé, pour tout $x \in M$ on peut trouver des voisinages ouverts disjoints $U \ni x$ et $U' \ni \tau(x)$. Avec $V = U \cap \tau(U') \subset U$ on obtient un voisinage de x qui est disjoint de $\tau(V) = \tau(U) \cap U' \subset U'$. La restriction de p à V définit un homéomorphisme entre V et $p(V) \ni p(x)$. Il en résulte que $p(x)$ est contenu dans un ouvert euclidien: B est localement euclidien.

On s'assure également que B est séparé. C'est une conséquence du fait qu'une variété est un espace normal et donc on peut séparer les fermés disjoints $\{x, \tau(x)\}$, $\{y, \tau(y)\}$ lorsque $p(x) \neq p(y)$, par les ouverts disjoints $V \supset \{x, \tau(x)\}$, $W \supset \{y, \tau(y)\}$. On forme alors les ouverts saturés $V \cap \tau(V)$ et $W \cap \tau(W)$ dont les images sont des

ouverts qui séparent $p(x)$ et $p(y)$. On peut aussi construire élémentairement des voisinages disjoints *saturés* de $\{x, \tau(x)\}$ et $\{y, \tau(y)\}$ en utilisant la séparation des points deux à deux.

En conclusion, B est une variété.

III.1.b)

Si M est une variété orientée de dimension n , cela signifie qu'on a une famille continue de générateurs: $\mu_x \in H_n(M, M - x) = \mathbb{Z}$. Si τ est orientée, alors $\mu_{\tau(x)} = \tau_*(\mu_x)$ et $p_*(\mu_{\tau(x)}) = (p_* \circ \tau_*)(\mu_x) = p_*(\mu_x)$. Ceci justifie la définition du générateur local $\nu_{p(x)} = p_*(\mu_x) \in H_n(B, B - p(x))$, qui donne une famille continue d'orientations locales sur B . En conclusion, B est orientée.

III.2.a)

Le transfert sur les cochaînes est le dual du transfert sur les chaînes modulo 2. Ce dernier étant un morphisme de complexes de chaînes (commute avec le bord), le transfert sur les cochaînes est un morphisme (commute avec le cobord).

Dans le cas des espaces vectoriels, la dualité est exacte. La suite exacte courte pour le transfert modulo 2:

$$0 \rightarrow C_n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow C_n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

donne la suite exacte duale:

$$0 \longrightarrow C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{C^n(p)} C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T} C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

III.2.b)

La suite exacte courte de complexes de cochaînes obtenue dans la question précédente justifie une suite exacte longue en cohomologie:

$$\longrightarrow H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^*} H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

Les morphismes naturels T^* et p^* sont obtenus en passant à la cohomologie. Le connectant β s'obtient comme suit. Etant donné un cocycle $f \in Z^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, notons $\tilde{f} \in C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un relevé. Le cobord $\partial \tilde{f} \in C^{n+1}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est dans l'image de $C(p)$: $\partial \tilde{f} = C^{n+1}(p)(h)$, $h \in C^{n+1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. La cochaîne h est un cocycle et $\beta([f]) = [h]$.

III.2.c)

La caractéristique d'Euler est la somme alternée des nombres de Betti qui sont les rangs de l'homologie. Sa définition nécessite une hypothèse de finitude qui est réalisée pour un CW-complexe fini. Dans ce cas la caractéristique d'Euler est aussi la somme alternée des nombres de Betti modulo 2, définis comme la dimension sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'homologie ou la cohomologie à coefficient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La suite exacte de transfert prouve que $\chi(B) - \chi(X) + \chi(B) = 0$ soit $\chi(X) = 2\chi(B)$.

III.3.a))

Ecrivons le début de la suite exacte longue de transfert dans le cas où X et donc B sont connexes par arc:

$$H^0(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^0(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^*} H^0(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^1(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

Les trois premiers groupes sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, p^* est un isomorphisme. Par exactitude T^* est nul et donc β est injectif: $c_\tau = \beta(1)$ est non nul.

III.3.b))

Si la sphère S^2 avait une involution orientée, alors le quotient B associé serait une surface orientée compacte de caractéristique d'Euler $\chi(S^2)/2 = 1$, ce qui est exclu: toutes les surfaces orientées compactes ont une caractéristique d'Euler paire.

III.3.c))

L'argument précédent avec la caractéristique d'Euler montre que si une surface orientée a une involution libre orientée, alors sa caractéristique d'Euler est multiple de 4, donc son genre est impair. Pour la surface de genre 1, $\Sigma_1 = S^1 \times S^1$, on obtient

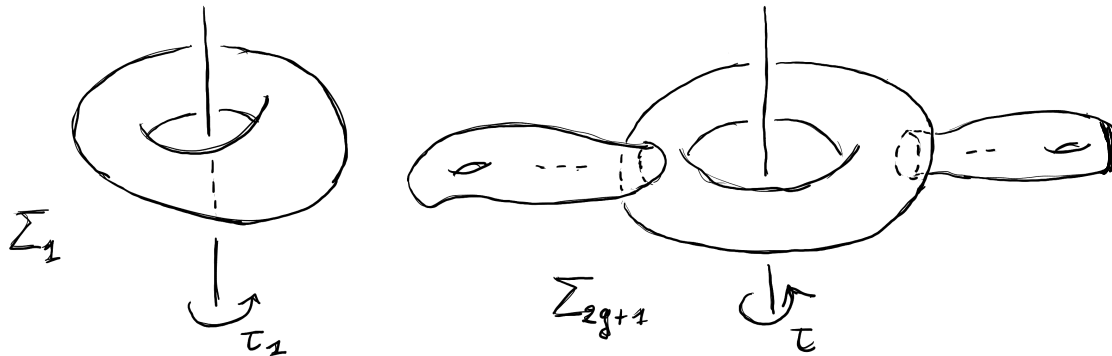


Figure 1: Involution orientée

une involution libre orientée $\tau_1 : (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, -\beta)$. On peut obtenir la surface de genre impair Σ_{2g+1} en enlevant de Σ_1 deux disques ouverts disjoints d et $\tau(d)$ puis en recollant sur les bords deux surfaces de genre g trouées, comme indiqué sur la figure 1. L'involution τ_1 se prolonge en une involution libre orientée $\tau : \Sigma_{2g+1} \rightarrow \Sigma_{2g+1}$, qui échange les deux surfaces recollées.

III.4.a) et b)

Le revêtement d'orientation de P_g , $g \geq 1$, est l'espace des orientations locales (x, ν) , $x \in P_g$, ν générateur de $H_2(P_g, P_g - x)$. On a une involution libre définie par $(x, \nu) \mapsto (x, -\nu)$. Ce revêtement est une surface orientée compacte connexe de caractéristique

d'Euler $2\chi(P_g) = 4 - 2g = 2 - 2(g - 1)$: c'est une surface orientée de genre $g - 1$. Il en résulte que toute surface orientée compacte a une involution non orientée.

III.4.c))

Le quotient de Σ_g par l'involution non orientée τ est une surface B . La surface Σ_g s'identifie au revêtement d'orientation de B via $x \mapsto (p(x), p_*(\mu_x))$, où $p : \Sigma_g \rightarrow S$ est la projection et μ est l'orientation de Σ . Comme Σ_g est connexe, S est non orientable; avec $\chi(B) = 1 - g$ on obtient que B est homéomorphe à P_{g+1} .

On va prouver le théorème de Borsuk-Ulam **pour g pair** par exclusion: s'il n'existe pas de x tel que $f(\tau(x)) = f(x)$, alors $h(x) = \frac{f(\tau(x)) - f(x)}{\|f(\tau(x)) - f(x)\|}$ définit une application $h : \Sigma_g \rightarrow S^1$ qui commutent aux involutions: $h(\tau(x)) = -h(x)$.

On a une application quotient: $\bar{h} : B = \Sigma_g/\tau \simeq P_{g+1} \rightarrow \mathbb{R}P^1$. La suite exacte de transfert étant fonctorielle, on a $\bar{h}^*(c_{(-Id)}) = c_\tau$. Le transfert $T^*(c_{(-Id)})$ est nul, par fonctorialité, l'existence de h implique que $T^*(c_\tau)$ est aussi nul.

On va démontrer que **pour g pair**, $T^*(c_\tau)$ est non nul. Ce qui donne une contradiction et prouve le théorème de Borsuk-Ulam.

Preuve: On présente P_{g+1} comme le quotient du disque encodé par le mot $a_0 a_0 \dots a_g a_g$. On a une structure de CW-complexe sur P_{g+1} avec un sommet s , $g + 1$ cellules de dimension 1 (arêtes) a_i , et une cellule e_2 de dimension 2. Chaque cellule a deux relèvements disjoints dans la surface Σ_g : deux sommets \tilde{s} et $\tau(\tilde{s})$, $2g + 2$ arêtes \tilde{a}_i , $\tau(\tilde{a}_i)$ et deux cellules de dimension 2, \tilde{e}_2 et $\tau(\tilde{e}_2)$.

On va calculer c_τ et $\beta(c_\tau)$ en utilisant le complexe cellulaire. Etant donné que l'orientation change le long des lacets a_i , chacune des arêtes \tilde{a}_i , $\tau(\tilde{a}_i)$ relie les deux sommets. On choisit de noter \tilde{a}_i celle qui va de \tilde{s} à $\tau(\tilde{s})$. Le bord de \tilde{e}_2 s'écrit alors $\tilde{a}_0 \tau(\tilde{a}_0) \dots \tilde{a}_g \tau(\tilde{a}_g)$.

On va d'abord calculer $c_\tau = \beta(1)$ où 1 note la cochaîne $s \mapsto 1$ qui se relève par le transfert en $u : \tilde{s} \mapsto 0$, $\tilde{s} \mapsto 1$. On a alors

$$\langle \partial u, \tilde{a}_i \rangle = 1 = \langle \partial u, \tau(\tilde{a}_i) \rangle .$$

La cochaîne ∂u est l'image de $[a_i \mapsto 1] \in C^1(P_{g+1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Cette dernière cochaîne représente c_τ .

On recommence le procédé pour calculer $\beta(c_\tau)$. Un relevé par le transfert est $v : \tilde{a}_i \mapsto 1$, $\tau(\tilde{a}_i) \mapsto 0$.

On a alors

$$\langle \partial v, \tilde{e}_2 \rangle = \langle u, \partial \tilde{e}_2 \rangle = g + 1 = 1 \text{ (modulo 2)} .$$

Il suit que $\beta(c_\tau)$ est représentée par $[e_2 \mapsto 1]$, ce qui conclut l'argument.