TD10 : Produit tensoriel

Exercices $\star$: à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices $\star\star$: seront traités en classe en priorité.
Exercices $\star\star\star$: plus difficiles.

Exercice 1 : $\star$
Soit K un corps, et soient A et B des K-algèbres.

a) Définir une structure de K-algèbre sur $A \otimes_K B$.

b) Montrer que les K-algèbres $K[X] \otimes_K K[Y]$ et $K[X, Y]$ sont isomorphes.

c) Montrer que le morphisme naturel de K-algèbres de $K(X) \otimes_K K(Y)$ vers $K(X, Y)$ est injectif mais non surjectif.

Exercice 2 : $\star$

a) Notons $M_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbf{H}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des quaternions. Montrer que les $\mathbb{C}$-algèbres $M_2(\mathbb{C})$ et $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sont isomorphes.

b) Montrer que $\mathbf{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbf{H}$ est isomorphe à $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : $\star\star$

a) Soient U et V des espaces vectoriels (sur un corps K). On note $U^* = \mathrm{Hom}_K(U, K)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_K V \to \mathrm{Hom}_K(U, V)$. Quelles sont les images des tenseurs décomposés (c'est-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

b) Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie. Que vaut

$$\max_{x \in E \otimes F} \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists (e_1, \ldots, e_n) \in E^n \text{ et } (f_1, \ldots, f_n) \in F^n \,,\, x = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i \right\} ?$$

Exercice 4 :
Soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 5 :
Soit $n \geq 1$ un entier, soit K un corps et soit E un espace vectoriel de dimension n sur K. Montrer que le dual $(\bigwedge^i E)^*$ de $\bigwedge^i E$ est non canoniquement isomorphe à $\bigwedge^{n-i} E$.

Exercice 6 : $\star\star$
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre l'ensemble des applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et l'ensemble des applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Exercice 7 : $\star\star$
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel. Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de E.

a) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est libre dans E.

b) Montrer que l'on a $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement s'il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \ldots, u_r) \neq 0$.

Exercice 8 :
Soit K un corps et soient E et F des K-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

a) Définir une application linéaire “naturelle” $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.

b) Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est $\binom{n}{r}$, et si $n > r$, l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.

Exercice 9 :
Soit K un corps et soient A et B des K-algèbres graduées.

a) Montrer qu'il existe sur $A \otimes_K B$ une structure naturelle de K-algèbre graduée telle que
$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{(\deg b)(\deg a')}(aa' \otimes bb').$$
On note $A \otimes_K^{\mathrm{su}} B$ l'algèbre ainsi obtenue.

b) Soient V et W des espaces vectoriels sur K. Montrer que l'on a un isomorphisme de K-algèbres
$$\bigwedge(V \oplus W) \simeq \bigwedge V \otimes_K^{\mathrm{su}} \bigwedge W.$$

Exercice 10 :
Soit K un corps et soit E un K-espace vectoriel.

a) Supposons E de dimension finie. On note $\bigwedge E = \bigoplus_n \bigwedge^n E$ et on écrit tout élément $z \in \bigwedge E$ sous la forme $z = \sum_{n \geq 0} z_n$. Montrer que $z \in \bigwedge E$ est inversible si et seulement si $z_0 \neq 0$.

b) Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. En déduire une description des inversibles de $\bigwedge E$.

Exercice 11 : $\star\star$
Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $F \subset E$ des corps tels que E est un F-espace vectoriel de dimension n, de base $(1, x_1, \ldots, x_{n-1})$. On suppose l'existence d'un groupe G de cardinal n, composé de F-automorphismes de E, tel que le corps $E^G = \{e \in E \mid \forall g \in G,\ ge = e\}$ est exactement F.

a) Montrer que les éléments de G sont linéairement indépendants.

b) Soit V un E-espace vectoriel, muni d'une action semi-linéaire de G. On définit le sous-F-espace vectoriel des G-invariants par $V^G := \{v \in V \mid \forall g \in G\ gv = v\}$. Prouver que l'application naturelle E-linéaire $\eta : V^G \otimes_F E \to V$ commute à l'action de G.

c) Montrer que η est un isomorphisme.

Exercice 12 : $\star\star$
Soit K un corps.

a) Définir une notion de suite exacte de K-espaces vectoriels.

b) Soit $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ une suite exacte de K-espaces vectoriels. Soit également W un K-espace vectoriel.

   i) Montrer que la suite
   $$0 \to \mathrm{Hom}_K(V_3, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_K(V_1, W) \to 0$$
   est une suite exacte.

   ii) Montrer que la suite
   $$0 \to V_1 \otimes_K W \to V_2 \otimes_K W \to V_3 \otimes_K W \to 0$$
   est une suite exacte.

Exercice 13 :
Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \dots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et telle que s_i est l'identité sur $e_i^\perp$. On appelle G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par les s_i.

a) Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.

b) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k V$ invariant par G est nul (on pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ et en décomposant V en somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal).

c) On suppose que G est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$$\sum_{g \in G} \det(A - g) = |G| \cdot \det(A) \quad \text{et} \quad \sum_{g \in G} \det(\mathrm{Id} - Ag) = |G|.$$

d) En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$, il existe $g \in G$ tel que Ag n'a aucun point fixe non nul.

Exercice 14 : $\star\star\star$
Soient p un nombre premier impair, $r \geq 1$ et $q = p^r$.

a) On note $V_1, V_2 := (\mathbb{F}_{q^2})^2$, et (e_i, f_i) la base canonique de V_i. On munit $V := V_1 \otimes_{\mathbb{F}_{q^2}} V_2$ de la forme bilinéaire symétrique b définie par $b(v_1 \otimes v_2, v_1' \otimes v_2') := b_1(v_1, v_1') b_2(v_2, v_2')$, où b_i est la forme bilinéaire alternée sur V_i telle que $b_i((1,0),(0,1)) = 1$. On pose enfin

$$V' := \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_p}\{e_1 \otimes e_2, f_1 \otimes f_2, \lambda e_1 \otimes f_2 + \overline{\lambda} f_1 \otimes e_2 : \lambda \in \mathbb{F}_{q^2}\} \subset V\,.$$

  i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_p} V' = 4$.

  ii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(V', b)$.

  iii) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_4^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$.

b) On note (e_i) la base canonique de $\mathbb{F}_q^4$ et on note $W := \bigwedge^2(\mathbb{F}_q^4)$.

  i) Quelle est la dimension de W comme $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel ?

  ii) Montrer que W est muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée naturelle f telle que pour tout $\sigma : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma)$, avec par convention $\varepsilon(\sigma) = 0$ si σ n'est pas bijective.

  iii) Montrer que $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$ agit naturellement sur W.

  iv) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SL}_4(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{O}(W, f)$.

  v) En déduire un isomorphisme $\mathrm{P}\Omega_6^+(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_q)$.

c) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée pour la forme sesquilinéaire naturelle sur $X := (\mathbb{F}_{q^2})^4$, et $X' \subset \bigwedge^2 X$ le sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ et $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}$.

  i) Montrer que $\dim_{\mathbb{F}_q} X' = 6$.

  ii) Montrer que X' est muni d'une forme bilinéaire symétrique f telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}_4$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_{q^2}$,

$$f(\lambda e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\lambda} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}, \mu e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)} + \overline{\mu} e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}) = \lambda \overline{\mu} + \overline{\lambda} \mu\,.$$

  iii) Construire un morphisme de groupes $\mathrm{SU}_4(\mathbb{F}_{q^2}) \to \mathrm{O}(X', f)$.

  iv) En déduire un isomorphisme de groupes $\mathrm{P}\Omega_6^-(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$.

Exercice 15 : $\star\star\star$
Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$, V un K-espace vectoriel de dimension n et q une forme quadratique sur V.

a) On note $I(q)$ l'idéal bilatère de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme $v \otimes v - q(v)$ pour $v \in V$. On pose $C(q) := T(V)/I(q)$. Montrer que $C(q)$ est une K-algèbre, canoniquement isomorphe à $\bigwedge V$ comme K-espace vectoriel, et admettant une décomposition $C(q) = C(q)^+ \oplus C(q)^-$ définie par le degré des éléments de $T(V)$.

b) Vérifier $C(q)^+$ est une sous-algèbre de $C(q)$.

c) Montrer que $\dim_K C(q) = 2^n$ et donner une base de $C(q)$ comme K-espace vectoriel.

d) Montrer que V se plonge naturellement dans $C(q)$.

e) Calculer $C(q)$ lorsque $K = \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq 2$. Généraliser au cas où K est quelconque et $\dim_K(V) \leq 1$.

f) Calculer le centre de $C(q)$.

g) On note $\alpha := \mathrm{id}_{C(q)^+} \oplus -\mathrm{id}_{C(q)^-} \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ et pour tout $x \in C(q)^\times$, $\rho_x \in \mathrm{End}_K(C(q))$ défini par $\rho_x : z \mapsto \alpha(x) z x^{-1}$. Montrer que cela définit un morphisme de groupes $\rho : C(q)^\times \to \mathrm{GL}_K(C(q))$.

h) On note $\Gamma(V, q) := \{x \in C(q)^\times : \rho_x(V) \subset V\}$. Montrer que $\Gamma(V, q)$ contient les vecteurs non isotropes de (V, q).

i) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Ker}(\rho) = K^*$.

j) Montrer qu'il existe un unique $t \in \mathrm{GL}_K(C(q))$ tel que $t_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $t(xy) = t(y)t(x)$ pour tout $x, y \in C(q)$.

k) Pour tout $x \in C(q)$, on pose $\overline{x} := t(\alpha(x))$. Montrer que la formule $N(x) := x\overline{x}$ définit une application $N : C(q) \to C(q)$ induisant un morphisme de groupes $N : \Gamma(V, q) \to K^*$.

l) On suppose q non dégénérée. Montrer que $\mathrm{Im}\,(\rho) = \mathrm{O}(V, q)$.

m) On suppose q non dégénérée. Montrer que l'on dispose d'un morphisme naturel $\theta : \mathrm{O}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$.

n) On suppose q non dégénérée et isotrope. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjectif.

o) On suppose q non dégénérée. On note $\mathrm{Pin}(V, q) := \mathrm{Ker}(N) = \{g \in \Gamma(V, q) : N(g) = 1\}$ et $\mathrm{Spin}(V, q) := \{g \in \mathrm{Pin}(V, q) : \det(\rho(g)) = 1\}$. Montrer que l'on a des suites exactes de groupes :

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Pin}(V, q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{O}(V, q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2$$

et

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Spin}(V, q) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}(V, q) \xrightarrow{\theta} K^*/(K^*)^2 .$$

p) On suppose $K = \mathbb{R}$ et q non dégénérée et non définie. Montrer que $\theta : \mathrm{SO}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$ est surjective.

q) Montrer les isomorphismes suivants : $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_5(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_6(\mathbb{C}) \cong \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, ainsi que $\mathrm{Spin}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}_1(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_3(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Spin}_4(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$.