University of Science and Technology of China
Department of Mathematics

March 4, 2021

Bernhard Keller and Jinxing Xu

China France Mathematics Talent Class
Second year

Algebra

Final Exam

Avertissement : L'utilisation de documents, calculettes ou téléphones n'est pas autorisée. Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de résoudre tous les exercices. Une traduction en anglais des énoncés se trouve à partir de la page 3.

Attention: The use of documents, calculators or telephones is not permitted. In order to obtain a very good grade, it is not necessary to solve all the problems. A English translation of the problems is given starting on page 3.

1) *Questions de cours.* Enoncer les théorèmes suivants (sans démonstration).

   a) Le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.
   b) Le théorème de Feit–Thompson.
   c) Le lemme de Schur et le théorème de Maschke.
   d) Le théorème de Witt.

2) a) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 4 & 11 \\ 13 & 6 & 4 & 11 \\ 13 & 4 & 4 & 9 \\ 22 & 4 & 4 & 18 \end{bmatrix}.$$

   Soit F le sous-groupe de $\mathbb{Z}^4$ engendré par les colonnes de A. Déterminer la structure du groupe quotient $\mathbb{Z}^4/F$. Quelle est sa décomposition en groupes abéliens indécomposables ?

   b) Soit $f : A \to A$ un endomorphisme d'un groupe abélien de type fini. Supposons que f est surjectif. Soit A_t le sous-groupe de torsion de A.

   (i) Montrer que f induit une surjection $\overline{f} : A/A_t \to A/A_t$.
   (ii) Montrer que $\overline{f}$ est un isomorphisme.
   (iii) Montrer que f est un isomorphisme.

3) Monter que tout groupe G d'ordre 495 est résoluble. Indication : on pourra d'abord montrer que G admet un sous-groupe distingué d'ordre 5 ou 11.

4) Soient K un corps de caractéristique différente de deux et V le K-espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans K.

   a) Montrer que l'application $q : V \to K$ qui envoie une matrice M sur $\mathrm{tr}(M^2)$ est une forme quadratique non dégénérée sur V.

b) On définit une action de $Sl_2(K)$ sur V par $P.M = PMP^{-1}$. Montrer que c'est une action par isométries qui préservent le sous-espace W orthogonal à la matrice identité I_2.

c) Montrer que la restriction de q à W est isomorphe à $\langle 1, -1, 2\rangle$.

d) Nous obtenons un morphisme $\mathrm{Sl}_2(K) \to O(W, q|_W)$. Montrer qu'il est surjectif et déterminer son noyau. Indication : on pourra utiliser (sans démonstration) le fait que le groupe orthogonal est engendré par des réflexions.

5) Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et V un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une formée bilinéaire alternée non dégénérée b. Supposons que l'on a $\dim V = 2n$. On se propose de démontrer directement (sans utiliser des générateurs) que tout automorphisme de V qui préserve b est de déterminant 1.

a) Soit V^* le dual de V. Montrer que nous avons un isomorphisme canonique

$$\varphi : \Lambda^2(V^*) \to (\Lambda^2 V)^*$$

qui envoie un éément $v_1^* \wedge v_2^*$ sur la forme qui envoie $v_1 \wedge v_2$ sur le déterminant de la matrice 2×2 aux coefficients $v_i^*(v_j)$, $1 \leq i, j \leq 2$.

b) Montrer qu'il existe un élément β de $\Lambda^2(V^*)$ tel qu'un automorphisme $f : V \to V$ préserve b si et seulement si l'application induite

$$\Lambda^2(f^*) : \Lambda^2(V^*) \to \Lambda^2(V^*), u \wedge v \mapsto f^*(u) \wedge f^*(v)$$

fixe β, c'est-à-dire que $\Lambda^2(f^*)(\beta) = \beta$.

c) Montrer que l'élément $\delta = \beta^{\wedge n}$ de $\Lambda^{2n}(V)$ est une base de $\Lambda^{2n}(V)$. Déduire que pour tout endomorphisme f de V, nous avons $\Lambda^{2n}(f^*)(\delta) = \det(f)\delta$.

d) Déduire que si f est un automorphisme de V qui préserve b, alors nous avons $\det(f) = 1$.

6) Soient G un groupe fini et $Z(G)$ son centre. Soit (V, ρ) une représentation complexe irréductible de G. On se propose de montrer que la dimension de V est divisible par l'ordre de $G/Z(G)$. Soit $m \geq 1$ un entier.

a) Soit G^m le groupe $G \times G \times \cdots \times G$ (m facteurs). On définit $V^{\otimes m} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (m facteurs). Pour $g_1, \ldots, g_m \in G$, on pose

$$\rho_m(g_1, \ldots, g_m) = \rho(g_1) \otimes \cdots \otimes \rho(g_m).$$

Vérifier que ρ_m est une représentation de G^m dans $V^{\otimes m}$ et calculer son caractère χ_m.

b) Pour deux fonctions $f_i : G^{\otimes m} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, rappeler la définition de $\langle f_1, f_2\rangle$. Calculer $\langle \chi_m, \chi_m\rangle$ et déduire que ρ_m est irréductible.

c) Soit $S \subseteq G^m$ le sous-groupe de $Z(G)^m$ formé des m-uplets $(z_1, \ldots, z_m)$ tels que $z_1 \ldots z_m = e$. Montrer que that ρ_m se factorise par une représentation $\overline{\rho}_m$ de G^m/S.

d) Soient z l'ordre de $Z(G)$, n l'ordre de G et d la dimension de V. Déduire que z^{m-1} divise $(n/d)^m$ pour tout entier $m \geq 1$.

e) Montrer que d est divisible par n/z. Indication : on pourra se servir de la fonction $x \mapsto v_p(x)$ qui, à un entier x associe l'entier maximal $y = v_p(x)$ tel que p^y divise x, où p est un nombre premier.

English translation

1) *Questions on the course.* State the following theorems (without proof).

   a) The structure theorem for finitely generated abelian groups.
   b) The Feit-Thompson theorem.
   c) Schur's Lemma and Maschke's theorem.
   d) Witt's Theorem.

2) Show that each group G of order 495 is solvable. Hint: Show first that G has a normal subgroup of order 5 or of order 11.

3) a) Let

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 4 & 11 \\ 13 & 6 & 4 & 11 \\ 13 & 4 & 4 & 9 \\ 22 & 4 & 4 & 18 \end{bmatrix}.$$

   Let F be the subgroup of $\mathbb{Z}^4$ generated by the columns of A. Determine the structure of the quotient group $\mathbb{Z}^4/F$.

   b) Let $f : A \to A$ be an endomorphism of a finitely generated abelian group. Suppose that f is surjective. Let A_t be the torsion subgroup of A.
      (i) Show that f induces a surjection $\overline{f} : A/A_t \to A/A_t$.
      (ii) Show that $\overline{f}$ is an isomorphism.
      (iii) Show that f is an isomorphism.

4) Let K be a field of odd characteristic and V the K-vector space of 2×2-matrices with coefficients in K.

   a) Show that the map $q : V \to K$ taking a matrix M to $\mathrm{tr}(M^2)$ is a non degenerate quadratic form on V.
   b) Let $\mathrm{Sl}_2(K)$ act on V by $P.M = PMP^{-1}$. Show that this is an action by isometries preserving the subspace W orthogonal to the identity matrix I_2.
   c) Show that the restriction of q to W is isomorphic to $\langle 1, -1, 2 \rangle$.
   d) We obtain a morphism $\mathrm{Sl}_2(K) \to O(W, q|_W)$. Show that it is surjective and determine its kernel. Hint: The orthogonal group is generated by reflections (this may be used without proof).

5) Let K be a field of characteristic different from 2 and V a finite-dimensional K-vector space endowed with a non degenerate alternating form b. Suppose $\dim V = 2n$. Our aim is to show directly (without using generators) that each automorphism of V preserving b is of determinant 1.

   a) Let V^* denote the dual of V. Show that we have a canonical isomorphism

$$\varphi : \Lambda^2(V^*) \to (\Lambda^2 V)^*$$

   taking an element $v_1^* \wedge v_2^*$ to the form taking $v_1 \wedge v_2$ to the determinant of the 2×2-matrix with entries $v_i^*(v_j)$, $1 \le i, j \le 2$.

   b) Show that there is an element β of $\Lambda^2(V^*)$ such that an automorphism $f : V \to V$ preserves b if and only if the induced map

$$\Lambda^2(f^*) : \Lambda^2(V^*) \to \Lambda^2(V^*), u \wedge v \mapsto f^*(u) \wedge f^*(v)$$

   fixes β, i.e. $\Lambda^2(f^*)(\beta) = \beta$.

c) Show that the element $\delta = \beta^{\wedge n}$ of $\Lambda^{2n}(V^*)$ is a basis for $\Lambda^{2n}(V^*)$. Deduce that for each endomorphism f of V^*, we have $\Lambda^{2n}(f^*)(\delta) = \det(f)\delta$.

d) Deduce that if f is an automorphism preserving b, then $\det(f) = 1$.

6) Let G be a finite group and $Z(G)$ its center. Let (V, ρ) be an irreducible complex representation of G. Our aim is to show that the dimension of V is divisible by the order of $G/Z(G)$. Let $m \geq 1$ be an integer.

a) Let G^m be the group $G \times G \times \cdots \times G$ (m factors). Define $V^{\otimes m} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (m factors). For $g_1, \ldots, g_m \in G$, define

$$\rho_m(g_1, \ldots, g_m) = \rho(g_1) \otimes \cdots \otimes \rho(g_m).$$

Check that ρ_m is a representation of G^m in $V^{\otimes m}$ and compute its character χ_m.

b) For two functions $f_i : G^{\otimes m} \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, recall the definition of $\langle f_1, f_2 \rangle$. Compute $\langle \chi_m, \chi_m \rangle$ and deduce that ρ_m is irreducible.

c) Let $S \subseteq G^m$ be the subgroup of $Z(G)^m$ consisting of the m-tuples $(z_1, \ldots, z_m)$ such that $z_1 \ldots z_m = e$. Show that ρ_m factors through a representation $\overline{\rho}_m$ of G^m/S.

d) Let z be the order of $Z(G)$, n the order of G and d the dimension of V. Deduce that z^{m-1} divides $(n/d)^m$ for each integer $m \geq 1$.

e) Show that d is divisible by n/z. Hint: Use the function $x \mapsto v_p(x)$ which, with an integer x, associates the maximal integer $y = v_p(x)$ such that x is divisible by p^y, where p is a prime number.