2023 Differential Geometry- TD 16

1\. * ~~15.~~ *Transitivité du groupe des difféomorphismes*

a) Montrer que quels que soient les réels positifs r et r' (avec $r' > r$), et les points x et y dans la boule ouverte $B(0,r)$, il existe un difféomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v(x) = y$ et $v(z) = z$ si $\|z\| > r'$. (Utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.)

b) Soit M une variété. Montrer que tout point $x \in M$ admet un voisinage V satisfaisant à la propriété suivante :
pour tout $y \in V$, il existe un difféomorphisme j de M tel que $j(x) = y$ (on pourra se ramener à a) en utilisant des cartes convenables).

c) Montrer que si M est connexe, le groupe des difféomorphismes opère transitivement sur M.

2\. Si $\dim(E_i)$ sont finies et

$$0 \to E_1 \to E_2 \to \cdots \to E_k \to 0$$

est exacte, alors

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim E_i = 0$$

3\. Invariance du domaine

(1)– Soit $n \geqslant 1$, soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $x \in U$. Montrer que le $(n-1)$-ième groupe de cohomologie de De Rham de $U \setminus \{x\}$ est non trivial, autrement dit

$$H^{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq \{0\}$$

(2)– Soit $n, p \geqslant 1$ avec $n > p$. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

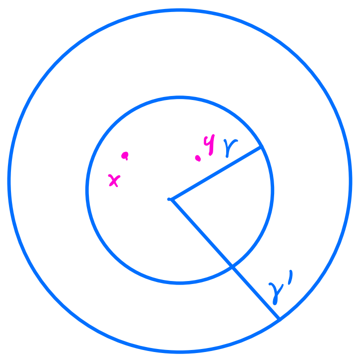
4\. Cohomologie de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points

1– Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les groupes de cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points.

2– Lorsque ces groupes sont non nuls, déterminer des formes différentielles dont les classes de cohomologie en forment une base (d'espace vectoriel).

1

(1):



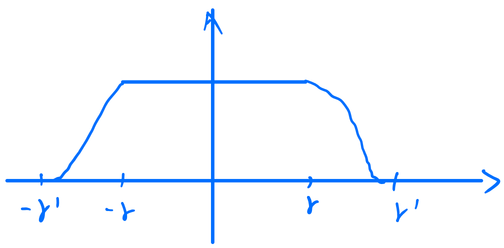
证: $\exists\ \nu$. diffeom of $\mathbb{R}^n$. s.t

$$\nu(x) = y$$

$$\nu(z) = z. \quad |z| > r'$$

$$X = \frac{y-x}{|y-x|}$$ constant vector field on $\mathbb{R}^n$

取 bump function $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\rho = \begin{cases} 1. & \text{in } B(0,r) \\ 0 & \mathbb{R}^n \setminus B(0,r') \end{cases}$



$$\tilde{X} = \rho X$$

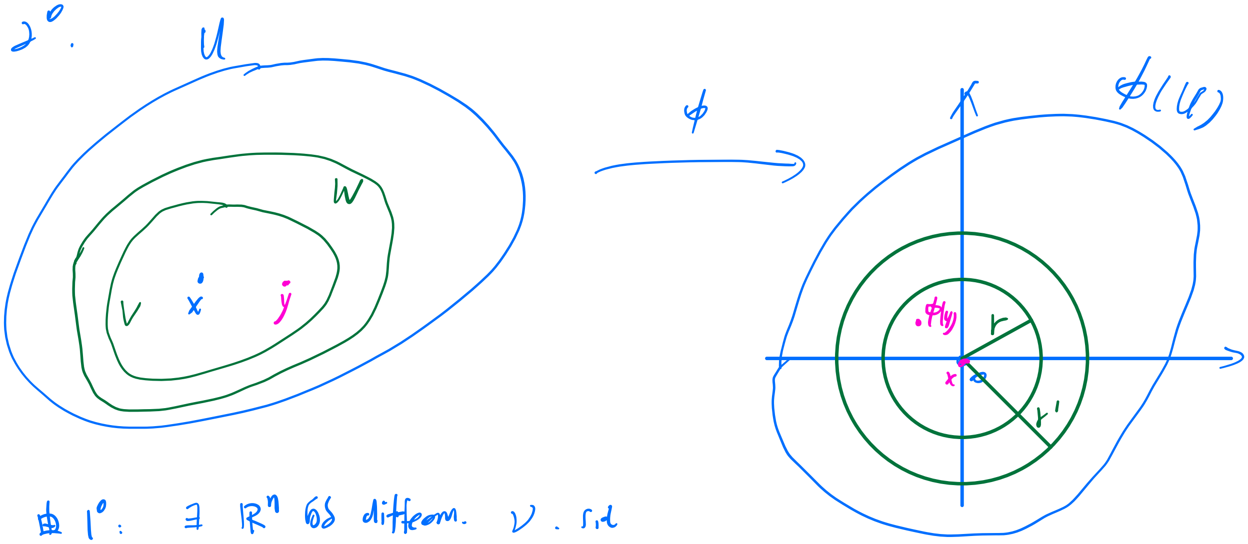
由 $\tilde{X}$ 生成的 flow 记为 φ_t

在 $B(0,r)$. $\varphi_t(x) = \varphi(t,x) = x + tX = x + t\dfrac{y-x}{|y-x|}$

$$\Rightarrow \varphi_{|y-x|}(x) = x + (y-x) = y$$

由于 $\tilde{X} \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus B(0,r')$. $\Rightarrow$ the flow is identity outside of $B(0,r')$.

2°.



由 1°: ∃ $\mathbb{R}^n$ 的 diffeom. ν. s.t

$$\nu(0) = \phi(y)$$

首先定义一个在 U 上的 diffeom. $j = \phi^{-1} \circ \nu \circ \phi : U \longrightarrow U$

$$j(x) = \phi^{-1} \circ \nu(\phi(x)) = \phi^{-1} \circ \phi(y) = y$$

note: $j = id$ on $U \setminus W$

将 j 延拓到整个 M 上, by setting $j(z) = z$ for $z \in M \setminus U$

3°: 定义一个 equivalent relation: $x \sim y$. if ∃ diffeom. $f: M \to M$ s.t $f(x) = y$

对 $\forall x \in M$. ∃ 邻域 V of x. s.t $\forall q \in V$. $q \sim x$

M is divided into disjoint sets $M = \bigcup_i U_i$

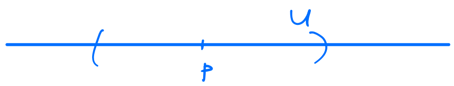
each U_i consists of points. which are $\sim$ to each other.

U_i is open. 由 M connected ⇒ 仅有1个等价类.

□

3.

$n=1$:



$U \setminus p$

$H^0(U \setminus p) \neq 0$

$n \geq 2$: $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. 取 $V = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$.

- $\mathbb{R}^n = U \cup V$. $\quad U \cap V = U \setminus \{p\}$

$$\to \underbrace{H^{n-1}(\underbrace{U \cup V}_{\mathbb{R}^n})}_{=0} \xrightarrow{i_*} H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \xrightarrow{j_*} H^{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \underbrace{H^n(\overset{\mathbb{R}^n}{U \cup V})}_{=0} \to$$

$\Rightarrow$ j_* is bijective.

$$\Rightarrow H^{n-1}(\underbrace{U \cap V}_{U \setminus \{p\}}) = H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V)$$

$$H^{n-1}(V) = H^{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{R}$$

2°: $n > m$. if $\exists$ homeom $f: V \subset \mathbb{R}^m \to U \subset \mathbb{R}^n$ for two open subsets U, V.

取 $B(0,r) \subset V$, 则 $f: B(0,r) \to f(B(0,r))$ 也为 homeom

$\Rightarrow H^{n-1}(B(0,r) \setminus \{0\}) = H^{n-1}(f(B(0,r)) \setminus f(0)) \neq 0$ (由 1°)

$= H^{n-1}(S^{m-1}) = 0$ for $n > m$

4

1°: $p \neq q \in \mathbb{R}^n$. $U = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$. $V = \mathbb{R}^n \setminus \{q\}$.

$U \cap V = \mathbb{R}^n \setminus \{p, q\}$. $U \cup V = \mathbb{R}^n$

For $k=0$, $H^0(\mathbb{R}^n \setminus \{p, q\}) = \mathbb{R}$. ($\because$ 連通性)

For $k \geq 1$, Mayer-Vietoris sequence.

$$\longrightarrow \underbrace{H^k(U \cup V)}_{= H^k(\mathbb{R}^n) = 0} \xrightarrow{i^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j_*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\partial_k} \underbrace{H^{k+1}(U \cup V)}_{} \longrightarrow$$

$$H^{k+1}(U\cup V) = H^{k+1}(\mathbb{R}^n) = 0$$

$\Rightarrow$ j_* is bijective

$$\begin{aligned}
\Rightarrow H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{p, q\}) &= H^k(U \cap V) \\
&= H^k(U) \oplus H^k(V) \\
&= H^k(S^{n-1}) \oplus H^k(S^{n-1}) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq n-1 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{if } k = n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

2°: $\pi: U = \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \to S^{n-1}$

$$x \longmapsto \frac{x-p}{|x-p|}$$

$$\pi_*: H^{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow H^{n-1}(U)$$

$$[w] \longmapsto [\pi^* w]$$

Recall. on S^{n-1}. volume form.

$$w = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$\pi^* w = \frac{1}{|x-p|^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (x-p)_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$