Théorie des Groupes et Algèbre Lie

Classe sino-française, USTC

Responsables du cours :

Prof. **Adrien Boyer** et Prof. **Jiaogen ZHANG**

D'après un polycopié de **Xiao LI**

Avril 2022 -Juin 2022

Référence :

1. Introduction à la théorie des Groupes de Lie classiques, Rached Mneimne Frédéric Testard
2. Lie Groups beyond an Introduction, Anthony W. Knapp

Table des matières

1 Autour de $GL_n(k)$

Dans cette section, on considère seulement des cas où $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$.

1.1 Analyse et géométrie sur $GL_n(k)$

Définition 1.1. Munissons l'espace vectoriel de dimension finie $M_n(k)$ d'une norme $||\cdot||$, alors $(M_n(k), ||\cdot||)$ est un espace normé, donc topologique.

Proposition 1.2. *$GL_n(k) = \{A \in M_n(k)$ inversibles$\} \subset M_n(k)$ est un ouvert de $M_n(k)$.*

Démonstration. $A \in GL_n(k) \Leftrightarrow \det A = 0$, ainsi $GL_n(k)$ est l'image de réciproque par le det de $K\backslash\{0\}$. On a donc $A \mapsto \det A$ est continue car

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \text{polynôme en les coefficients } (a_{i,j})_{i,j}$$

□

Proposition 1.3. *Les applications suivantes sont continues.*

1. $(A, B) \in GL_n(k) \times GL_n(k) \mapsto AB \in GL_n(k)$
2. $A \in GL_n(k) \mapsto A^{-1} \in GL_n(k)$

Démonstration. Prenons $(A_n, B_m) \xrightarrow{n,m\to\infty} (A, B)$ et choisissons la norme sur $M_n(k)$ vérifie $||AB|| \leq ||A|| ||B||$. On a

$$\begin{aligned} ||AB - A_nB_m|| &= ||AB - A_nB + A_nB - A_nB_m|| \leq ||(A - A_n)B|| + ||A_n(B - B_m)|| \\ &\leq ||(A - A_n)|| \cdot ||B|| + ||A_n|| \cdot ||(B - B_m)|| \to 0 \end{aligned}$$

Pour la continuité de l'application $A \mapsto A^{-1}$, on a

$$^{t}Com(A) \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Ainsi $A \mapsto A^{-1} = \frac{^{t}Com(A)}{\det(A)}$ est continue. □

Remarque 1.4. On dit que $(GL_n(k), \cdot)$ est un groupe topologique.

Proposition 1.5. *$GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$.*

Démonstration. $A \in M_n(k)$ mais pas dans $GL_n(k)$. Considérons ses valeurs propres non nulles : $\lambda_1 \cdots, \lambda_p$ $(p \leq n)$.

Soit λ_{i_0} telle que $|\lambda_{i_0}| = \min_{i\in\{1,2,\cdots,p\}} |\lambda_i| > 0$. Considérons alors $A_n = A - \frac{1}{n}Id$, si n assez grand, on a $\det(A_n - \frac{1}{n}Id) \neq 0$ et $A - \frac{1}{n}Id \xrightarrow{n\to+\infty} A$. □

Remarque 1.6. La densité de $GL_n(k)$ dans $M_n(k)$ est varie pour des corps k bien plus généreux (topologie de Zariski).

Application 1.7. Montrons que le polynôme caractéristique de AB est le même que celui de BA, pour $A, B \in M_n(k)$.

1. Si $A \in GL_n(k)$, on a

$$\chi_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda Id) = \det(ABAA^{-1} - \lambda AA^{-1}) = \det(A)\chi_{BA}(\lambda)\det(A^{-1}) = \chi_{BA}(\lambda).$$

2. Si $A \in M_n(k)$. Pour B fixé dans $M_n(k)$, on a

$$\chi_{A_nB}(\lambda) = \chi_{BA_n}(\lambda) \quad \forall A_n \in GL_n(k).$$

Or pour B et $\lambda \in k$ étant fixé dans l'application

$$A \mapsto \chi_{AB}(\lambda) - \chi_{BA}(\lambda)$$

est continue et est nulle sur un sous ensemble dense $GL_n(k)$. Donc elle est nulle sur $M_n(k)$.

On en déduit que $\text{Spectre}(AB) = \text{Spectre}(BA)$: ensemble des valeurs propres.

Proposition 1.8. *Centre de $GL_n(k)$, $Z(GL_n(k)) := \{A \in GL_n(k) | AB = BA\ \forall B \in GL_n(k)\} = k^*$.*

Démonstration. On fait dans le cas $k = \mathbb{R}$.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ diagonale et que $AB = BA$ pour tout $B \in GL_n(\mathbb{R})$, ainsi $A = \lambda Id$ pour un certain λ.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ générale. D'une part, si $A = \lambda\,\mathrm{id}$, alors A commute avec tout $B \in \mathrm{GL}_n(k)$. D'autre part, on a

$$A \cdot (I_n + E_{i,j}) = (I + E_{i,j}) \cdot A$$

donc ceci conclut que A est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux. Ainsi que $A = \lambda I$ pour un certain λ. □

Théorème 1.9 (Décomposition Polaire)**.** *Etant donnée $M \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.*

De plus

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$$

est homéomorphisme .

Où $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | {}^tAA = I_n\}$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), {}^txAx > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

Proposition 1.10. *$O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Choisir une norme adéquate à la situation $||A||_2 := \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$. C'est une norme et si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $||A||_2 = n$. Donc $O_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ est borné. De plus $O_n(\mathbb{R})$ est fermé, ainsi compact. $\square$

Démonstration du théorème 1.9 . `Existence de la décomposition polaire.` Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM = PDP^t$ où $D = \mathrm{Diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ et $\mu_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc on peut définir $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\mu_1}, \cdots, \sqrt{\mu_n})$. Alors

$${}^tMM = PDP^t = P\Delta \cdot \Delta P^t = P\Delta P^t \cdot P\Delta P^t =: S \cdot S = S^2.$$

Posons $O = MS^{-1}$ et donc ${}^tOO = S^{-1t}MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $M = OS$ et O est orthogonale et S est définitivement positive.

`Unicités:` Supposons $M = O_1S_1 = O_2S_2$. On a ${}^tMM = S_1^2$ et ${}^tMM = S_2^2$ ainsi que $S_1^2 = S_2^2$.

Idée : Si on montre que S_2 commute à S_1 alors S_2 et S_1 sont simultanément diagonalisable.

Donc il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle $S_2 = QDQ^t$ et $S_1 = QD'Q^t$, et donc $D = D'$.

But : Montrons que S_2 commute à S_1. En fait on va montrer que $S_2 = R(S_1)$ où $R \in \mathbb{R}[X]$.

${}^tMM = PDiag(\mu_1, \cdots, \mu_n)P^t = PDP^t$.

Considérer polynôme d'interpolation de Lagrange de telle sorte que $R(\mu_i) = \sqrt{\mu_i}$.

$$S_1 = PR(D)^tP = R(PD^tP) = R(S_2^2)$$

Alors S_1 et S_2 commute.

Montrons l'homéomorphisme : Puisque on a déjà une bijection par l'unicité de la décomposition polaire.

$$O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R})$$

Il reste à montrer que $M \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto (O_M, S_M) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ est continue. Si M_p est une suite de $GL_n(\mathbb{R})$, et $M_p = O_p S_p$ par quitter à extraire on peut supposer que $O_p \to O_\infty \in O_n(\mathbb{R})$ car $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Par hypothèse, $M_p \to M_\infty \in GL_n(\mathbb{R})$ et $O_p^{-1} M_p = S_p$ donc $S_p \to O_\infty^{-1} M_\infty = S_\infty$.

Ainsi $M_\infty = O_\infty (O_\infty^{-1} M_\infty) = O_\infty S_\infty$ par l'unicité de la décomposition polaire.

On a que $M_p \xrightarrow{p\to\infty} M_\infty$ implique $(O_p, S_p) \xrightarrow{p\to\infty} (O_\infty, S_\infty)$ d'où la continuité.

$\square$

2 Action des Groupes et Groupes topologiques

2.1 Rappels sur les actions de groupes

Soient G un groupe et X un ensemble, $\alpha : G \times X \to X$, $\alpha(g,x) = g.x$ vérifie $gh.x = g.(h.x)$ et $e.x = x$, $\forall x \in X$.

Proposition 2.1. *On a une bijection* $G/_{G_x} \to Orb(x)$ *pour tout* $x \in X$.

où $G_x = \mathrm{Stab}(x)$ *sous groupe de* G *et* $Orb(x) = \{g.x, g \in G\}$.

Exemples 2.2.
1. G agit sur G par $g.h = gh$ est une action.
2. G agit sur G par $g.h = hg^{-1}$ est une action.
3. G agit sur G par $g.h = ghg^{-1}$ est une action.
4. G agit sur $\mathbb{S}(G) = \{\text{sous groupe de } G\}$ par $g = gHg^{-1}$ est une action.

Définition 2.3. On dit qu'une action est transitive si $\forall x, y \in X$, $\exists g \in G$, $gx = y$.

On dit qu'une action est n-transitive si $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in X \times \cdots \times X$ et $(y_1, \cdots, y_n) \in X \times \cdots \times X$, $\exists g \in G$ t.q. $gx_i = y_i$ $\forall i$.

Exemples 2.4.
1. $GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $\{\text{bases de } \mathbb{R}^n\}$ est une action transitive.
2. $PGL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une action 3-transitive.

2.2 Action de groupes topologiques

Définition 2.5. On dit que $(G, \cdot)$ est un groupe topologique, si G est un espace topologique et les applications suivantes sont continues.

1. $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$.
2. $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$.

Exemple 2.6. Il est facile à vérifier que $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$, $(\mathbb{Z}, +)$ sont groupes topologiques.

Définition 2.7. On dit que action G sur X est continue, si $\alpha : G \times X \to X$ est continue pour la topologie produit sur $G \times X$.

Autrement dit, on a $G \to Aut(X) = \text{Homéo}(X), g \mapsto \alpha(g, \cdot)$.

Proposition 2.8. *On se donne $\alpha : G \times X \to X$, X espace topologique séparé et G groupe topologique.*

1. *$\forall g \in G$, $\alpha(g, \cdot)$ est un homéomorphisme de X.*
2. *$\forall x \in X$, $\text{Stab}(x) < G$ est un sous groupe fermé.*
3. *$\forall x \in X$, $\alpha(\cdot, x)$ est continue sur $G \to X$.*

Démonstration. Par définition, soit $x \in X$, $\text{Stab}(x) := \{g \in G, \alpha(g, x) = x\} = \alpha(\cdot, x)^{-1}(\{x\})$ est l'image réciproque de $\{x\}$, ainsi fermé.

Pour $g \in G$, $\alpha(g, \cdot)$ est continue et bijective, $\alpha(g^{-1}, \cdot)$ est l'application réciproque qui est continue. Donc $\alpha(g, \cdot)$ est homéomorphisme. □

2.3 Topologie quotient

Soit $H < G$ groupe topologique. Alors l'application canonique $\pi : G \to {}^{G}/_{H}$ définit une topologie sur ${}^{G}/_{H}$.

Définition 2.9. O ouvert de ${}^{G}/_{H}$ si et seulement si $\pi^{-1}(O) \subset G$ est ouvert.

La collection des $\{O \subset {}^{G}/_{H}$, t.q. O satisfait 2.9$\}$ est une topologie sur ${}^{G}/_{H}$, c'est la topologie quotient.

Remarque 2.10. Les ouverts de G de la forme $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est ouvert de ${}^{G}/_{H}$ s'appellent les saturés(完备的 , 饱和的) ($\pi^{-1}(\mathcal{U})$ est le saturé de $\mathcal{U}$).

Proposition 2.11.
1. *π est continue (pour la topologie quotient) et la topologie quotient est la topologie plus fine qui rend π continue.*
2. *π est une application ouverte.*

3. *Si $f : G \to Y$ est continue, si f est bien définie sur ${}^{G}/_{H}$ (i.e. $\exists \overline{f}$ t.q. $f = \overline{f} \circ \pi$. Alors $\overline{f}$ est continue de ${}^{G}/_{H} \to Y$.*

Démonstration. 1. Soit τ une topologie telle si $O \in \tau$ alors $\pi^{-1}(O)$ est continue. Ceci implique que $O \in$topologie quotient. Donc topologie quotient est la topo plus fine.

2. Montrons que π est ouverte i.e. si $V \subset G$ ouvert, alors $\pi(V)$ est un ouvert dans ${}^{G}/_{H}$. Montrons que $\pi^{-1}(\pi(V))$ est ouvert.

   Fait : $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{h\in H} V_h$, principal de translation.

   Fixons $h \in G$, $\varphi_h : x \in G \mapsto xh$, φ_h est homéomorphisme. Donc φ_h est ouvert.

3. $\overline{f}$ est continue $\Leftrightarrow \overline{f}^{-1}(W)$ ouvert de ${}^{G}/_{H}$ où W ouvert de ${}^{G}/_{H}$ $\Leftrightarrow \pi^{-1}(\overline{f}^{-1}(W))$ ouvert de $G \Leftrightarrow \overline{f}^{-1}$ ouvert de $G \Leftrightarrow f$ est continue.

□

2.4 Propriétés des groupes topologiques

Proposition 2.12. *Soient G un groupe topologique et $H < G$ un sous groupe. Alors*

1. *Si $H < G$ est ouvert, alors H est fermé.*
2. *Si G est séparé, alors H fermé ssi ${}^{G}/_{H}$ est séparé.*
3. *Si ${}^{G}/_{H}$ est séparé, alors π envoie le compact à compact.*

Remarque 2.13. Si G est compact, alors ${}^{G}/_{H}$ est compact.

Pour le 3ème point, soient $G = (\mathbb{R}, +)$ et $H = (\mathbb{Q}, +)$ alors ${}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un espace topologique séparé.

Démonstration. 1. Soit $H < G$ ouvert. Montrons que $G\backslash H$ est ouvert.

   On a
   $$G\backslash H = \bigcup_{g\in G\backslash H} \underbrace{gH}_{ouvert}$$
   où gH est ouvert par principe de translation. Donc $G\backslash H$ est ouvert ainsi que H est fermé.

2. $\Rightarrow$: Prenons $g, g' \in G$ tels que $\pi(g) \neq \pi(g') \Leftrightarrow gH \neq g'H$, donc $g^{-1}g' \in G\backslash H$ et $G\backslash H$ est ouvert. Alors on pose U est un ouvert contenu dans $G\backslash H$ et $g^{-1}g' \in U$.

   Considérons la fonction $f : G \times G \to G, (x, y) \mapsto xg^{-1}g'y$ qui est continue .

Comme U est ouvert, on a que $f^{-1}(U)$ est ouvert de $G \times G$ et $(e,e) \in f^{-1}(U)$, donc il existe V_1, V_2 ouverts, t.q. $(e,e) \in V_1 \times V_2 \subset f^{-1}(U)$.

Considérons $W = (V_1 \cap V_2) \cap (V_1 \cap V_2)^{-1}$, on a $W = W^{-1}(g \in W$ ssi $g^{-1} \in W)$.

On a $f(W \times W) \cap H = \emptyset \Leftrightarrow Wg^{-1}g'W \cap H = \emptyset \Leftrightarrow gWH \cap g'WH = \emptyset$.

Puisque $gWH \subset G$ est ouvert saturé, on a $\pi(gWH) \cap \pi(g'WH) = \emptyset$.

Réciproquement, si ${}^{G}\!/_{H}$ séparé, on a $\{eH\}$ fermé $\Rightarrow \pi^{-1}(\{eH\}) = \pi^{-1}(\{e\}) = H$ fermé.

$\square$

Proposition 2.14. *Soient G groupe topologie séparé et $H < G$ sous groupe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *H est ouvert.*
2. *e est intérieur à H.*
3. *${}^{G}\!/_{H}$ est discret.*

Démonstration. (1)$\Leftrightarrow$ (2) est facile.

Montrons (1) $\Rightarrow$ (3) Si H est ouvert $\Rightarrow \pi(H)$ est ouvert. De plus $\pi(H) = {}^{G}\!/_{H} \setminus (\pi(G \backslash H))$ est fermé. Donc $\{H\}$ dans ${}^{G}\!/_{H}$ est à la fois ouvert et fermé. Faire de même $\{gH\}$ par translation, $\forall g \in G$, $\{gH\}$ est à la fois ouvert et fermé.

(3)$\Rightarrow$(1) : si ${}^{G}\!/_{H}$ est discret, alors $\{H\}$ ouvert et fermé. Donc $\pi^{-1}(\{H\}) = H$ est ouvert dans G. $\square$

Exemple 2.15. Posons $G = O_n(\mathbb{R})$ et $H = SO_n(\mathbb{R})$, alors ${}^{O_n(\mathbb{R})}\!\Big/_{SO_n(\mathbb{R})} = \{1, -1\}$ est discret.

Proposition 2.16. *Si $H < G$, supposons H est discret. Alors H est fermé.*

Proposition 2.17. *Si G groupe topologique, $G_0 \subset G$ composante connexe et contient e. Alors $G_0 \subset G$ est fermé, G_0 est un sous groupe distingué.*

Proposition 2.18. *L'adhérence de $H < G$ est un sous groupe de G.*

2.5 Théorème d'homéomorphismes

Quand peut on dire qu'on a un homéomorphisme de ${}^{G}\!/_{G_x} \simeq G \cdot x$? (En général, faux)

Où $\mathrm{Stab}(x) = G_x$ et $\mathrm{Orb}(x) = G \cdot x$.

Présentons deux cas où on a un homéomorphisme.

Si G est un groupe topologique compact

Proposition 2.19. *Soient X espace topologique séparé, G groupe topologique compact et $\alpha : G \times X \to X$ continue.*

Alors ${}^{G}/_{G_x} \simeq G \cdot x$ est un homéomorphisme pour tout x.

Démonstration. Soit $x \in X$, considérons $\alpha(\cdot, x) : {}^{G}/_{G_x} \to G \cdot x$ est continue. On a G_x fermé ainsi ${}^{G}/_{G_x}$ est compact et séparé.

De plus, $\alpha(\cdot, x)$(compact) est compact.

Ainsi $\alpha(\cdot, x) : {}^{G}/_{G_x} \to G \cdot x$ continue, bijection et l'image d'un fermé est fermé. $\Rightarrow \alpha(\cdot, x)$ est aussi ouverte.

On a $\alpha(\cdot, x)$ qui est continue, bijective et ouverte, ceci conclut que $\alpha(\cdot, x)$ est homéomorphisme. □

Théorème d'homéomorphisme pour les actions transitives

Définition 2.20 (localement compact)**.** Soit X espace topologique séparé. On a dit que X est localement compact si tout point de X possède un voisinage compact.

Définition 2.21 (Dénombrable à l'infinie)**.** On dit que X espace topologique et dénombrable à l'infinie (En Anglais : second countable). Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ où $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compact.

Théorème 2.22. *Pour $\alpha : G \times X \to X$ une action continue et transitive. On suppose que G est localement compact et dénombrable à l'infini et X est localement compact(espace de Baire).*

Alors $\forall x \in X$, ${}^{G}/_{G_x} \simeq G \cdot x$ est un homéomorphismes.

Exemple 2.23. $GL_n(\mathbb{R})$ satisfait les hypothèses : localement compact dénombrable à l'infini.

Définition 2.24 (Espace homogène)**.** Si G groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini, et G agit continuellement et transitivement sur X. Alors on dit que X est un espace homogène.

Remarque 2.25. Si X homogène, alors on a $X \simeq {}^{G}/_{H}$, $H < G$ fermé.

Si $H < G$ fermé, alors on a G agit sur ${}^{G}/_{H}$ et ${}^{G}/_{H}$ est un espace homogène.

Démonstration du théorème. Fixons $x \in X$. Montrons que $\varphi_x(\cdot) = \alpha(\cdot, x)$ est un homéomorphisme (bijective, continue, ouvert). Donc il suffit de montrer que φ_x est ouvert.

Soit $U \subset G$ un ouvert, on veut que $\varphi_x(U) = U \cdot x$ soit ouvert.

Soit $g \in U$, montrons que $g.x$ est intérieur à $U.x$(ssi x est intérieur dans $g^{-1}U \cdot x$).

Comme $e \in g^{-1}U$ et G localement compact, alors il existe V compact tel que $e \in V \subset g^{-1}U$. Par continuité du produit, il existe $W \ni e$ compact t.q. $e \in W^2 \subset U$ et on peut supposer $W = W^{-1}$. De plus pour $\forall h \in G$, on a hW est un voisinage de h.

Si K est compact et est contenu dans G, on a $K = \bigcup_{k \in K} kW$. Par compacité, il existe un recouvrement fini, $K = \bigcup_{fini\ k} kW$.

De plus G est dénombrable à l'infini, $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, donc $\exists (g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} g_i W$.

Action transitive : $X = G.x = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overbrace{g_i W x}^{\text{fermé}}$.

X espace de Baire $\Rightarrow \exists i_0$ t.q. $g_{i_0} W x$ est un fermé d'intérieur non vide.

Comme $g_{i_0} W_x$ fermé d'intérieur non vide, $\exists w \in W$ t.q. $g_{i_0} w x \in (g_{i_0} W x) \subset g_{i_0} W x$. $\Rightarrow$ $w^{-1} W x \ni x \Rightarrow W^2 x \ni x \Rightarrow g^{-1} U x \supset W^2 x \ni x$. $\square$

3 Représentations adjointes et l'application exponentielle

3.1 Représentations Adjointes

Si G est un groupe, prenons $g \in G$ quelconque. L'application $\theta : x \in G \mapsto gxg^{-1} \in G$ est un automorphisme qui est intérieur. $\theta \in \mathrm{Int}(G) < \mathrm{Aut}(G)$.

Prenons $G = GL_n(\mathbb{R})$, soit $g \in GL_n(\mathbb{R})$. Considérons $\rho(g)M = gMg^{-1}$ où $M \in M_n(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned} \rho : GL_n(\mathbb{R}) &\to GL(V) \\ g &\mapsto \rho(g) \end{aligned}$$

où $V = M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.1. *ρ est un morphisme de groupes, autrement dit ρ est une représentation de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $V = M_n(\mathbb{R})$.*

Rappel 3.2 (Rappel sur le calcul diff)**.** *Considérons*

$$\begin{aligned} i : GL_n(\mathbb{R}) &\to GL_n(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Calculons la différentiel de i en $g \in G = GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $Di(g) \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})) = \{applications\ linéaires\}$.

$$i(g+h) = i(g) + Di(g) \cdot h + o(||h||)$$

Fait :$Di(g).h = -g^{-1}hg^{-1}$, $h \in M_n(\mathbb{R})$.

Calculons la différentielle de

$$\rho : GL_n(\mathbb{R}) \to GL(V) = \mathrm{End}(V).$$

On a $D\rho(g) \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathrm{End}(V))$

Pour $h \in M_n(\mathbb{R})$ et $X \in V = M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \rho(g+h)X &= (g+h)X(g+h)^{-1} = (g+h)X(g(1+g^{-1}h))^{-1} \\ &= (g+h)X(id + g^{-1}h)^{-1}g^{-1} \\ &= (g+h)X(id - g^{-1}h + o(||h||))g^{-1} \\ &= (g+h)X(g^{-1} - g^{-1}hg^{-1} + o(||h||)) \\ &= gXg^{-1} + \underbrace{hXg^{-1} - gXg^{-1}hg^{-1}}_{D\rho(g).h(X)} + o(||h||) \end{aligned}$$

Proposition 3.3.

$$\begin{aligned} D\rho(Id) : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathrm{End}(V) \\ h &\mapsto D\rho(Id).h \end{aligned}$$

où $D\rho(Id).h : X \in V \mapsto h.X - X.h \in V$.

On utilise la notation : $h.X - X.h = [h, X]_{M_n(\mathbb{R})}$, crochet de Lie sur $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3.4. *Les propriétés de* $[\cdot, \cdot]$ *sur* $M_n(\mathbb{R})$

1. $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, $[X, Y] = [Y, X]$.
2. $[X, X] = 0$.
3. *Identité de Jacobi* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Sur l'algèbre $\mathrm{End}(V)$, on définit le crochet suivant : $f, g \in \mathrm{End}(V)$, on pose $[f, g]_{\mathrm{End}(V)} = f \circ g - g \circ f$.

On a en fait :

$$\begin{array}{rccc} D\rho(Id) : (M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{M_n(\mathbb{R})}) & \xrightarrow{ad} & (\mathrm{End}(V), [\cdot, \cdot]_{\mathrm{End}(V)}) \\ X & \mapsto & [X, \cdot]_{M_n(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Notations : Représentations Adjointes $\rho(g) = Ad(g)$ et $D\rho(Id)(X) = ad_X$

Proposition 3.5. $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$, *on a*

$$ad_{[X,Y]_{M_n(\mathbb{R})}} = [ad_X, ad_Y]_{\mathrm{End}(V)}$$

morphisme des algèbres $(M_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{M_n(\mathbb{R})})$ *et* $(\mathrm{End}(V), [\cdot, \cdot]_{\mathrm{End}(V)})$.

3.2 L'application exponentielle

Sur $M_n(k)(k = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ muni d'une norme matricielle ($||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$), on définit pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

En fait la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ converge sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Ou une autre façon de le dire : C'est converge normale de la série $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$ sur tout compact de $M_n(k)$.

Théorème 3.6. *Les propriétés fondamentales de l'exponentielle :*

1. *$\forall A$, $\exp(A)$ est un polynôme en A.*
2. *Si $A, B \in M_n(k)$ telles que $AB = BA$. Alors on a*

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

3. *Si $A = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = Diag(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n})$.*
4. *$\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^t(\exp(A)) = \exp({}^tA)$.*
5. *$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, ${}^*(\exp(A)) = \exp({}^*A)$.*
6. *$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(X))$*
7. *La différentielle en $0_{M_n(k)}$ est l'identité.*

Démonstration. Tout est à faire en exercice, mais on donne la preuve du point 7.

On sait que $\mathrm{Dexp}(A) \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

En $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$, on a

$$\exp(0+h) = Id + H + o(||H||).$$

Par définition, ainsi $Dexp(0).H = H$, $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$. Donc $Dexp(0) = id_{M_n(\mathbb{R})}$. □

Définition 3.7. Un sous groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$ est un morphisme $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to GL_n(\mathbb{R})$.

Exemple 3.8. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi_X(t) = e^{tX}$ est bien un sous-groupe à un paramètre. En fait tous les sous groupes à un paramètre sont de cette forme.

Proposition 3.9. *L'application $X \in M_n(\mathbb{R}) \to \varphi_X \in \{$sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})\}$ est une bijection.*

De plus X s'appelle le générateur infinitésimal(无限小的 *) du sous-groupe à un paramètre.*

Démonstration. D'abord $X \in M_n(\mathbb{R}) \to \varphi_X$ est bien définie par le théorème sur exp.

`Injective` : Si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors on calcule la différentielle en $t = 0$,

$$X = \frac{d(e^{tX})}{dt}|_{t=0} = \frac{d(e^{tY})}{dt}|_{t=0} = Y.$$

`Surjective` : Soit φ un sous-groupe à un paramètre, ainsi $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ et $\varphi(0) = id$ et φ est C^1. Alors on a

$$\varphi'(s+t) = \frac{d\varphi(s+t)}{dt} = \varphi(s)\varphi'(t),$$

donc

$$\varphi'(s+t) = \varphi(s)\varphi'(t), \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Prendre $t = 0$, on a que $\varphi'(s) = \varphi(s)\varphi'(0)$ et $\varphi(0) = \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{R})}$. Posons $X = \varphi'(0) \in M_n(\mathbb{R})$, alors on a $\varphi(t) = e^{tX}$ qui est l'unique solution de

$$\begin{cases} \varphi'(s) = \varphi(s)X \\ \varphi(0) = \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{R})} \end{cases}$$

□

Proposition 3.10. *Lien entre représentation Adjointes et l'application* exp.

$\forall X \in M_n(\mathbb{R})$, *on a*

$$\mathrm{Ad}(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}_X)$$

.

Démonstration. Considérons $V = M_n(\mathbb{R})$ et

$$\varphi(t) = Ad(\exp(tX)), \varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$$
$$\psi(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}_X), \psi : \mathbb{R} \to GL(V)$$

φ et ψ sont deux sous groupes à un paramètre.

$\varphi(t) = f \cdot g(t)$ avec $g(t) = \exp(tX)$ et $f(A) = \mathrm{Ad}(A)$

Donc $\varphi'(t)|_{t=0} = Df(g(t))g'(t)|_{t=0} = Df(Id).X = D\,\mathrm{Ad}(Id).X = ad_X$

De plus, $\psi'(0) = ad_X$, comme φ et ψ 2 sous groupes à un paramètre tels que $\varphi'(0) = \psi'(0)$, $\Rightarrow Ad(t\exp(X)) = \exp(t\,\mathrm{ad}_X)$, $\forall t$. Ainsi que $Ad(\exp(X)) = \exp(\mathrm{ad}_X)$ quand $t = 1$. □

4 Variété

Liste des groupes de Lie :

1. $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, *), GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
2. $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.
3. $O(p,q) = \{X \in M_n(\mathbb{R}), {}^tXI_{p,q}X = I_{p,q}\}$ avec $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\}$.

4. $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(p+q,\mathbb{R})$.
5. $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$.

4.1 Variétés et sous-variétés

Variétés M un espace topologique, séparé

carte un carte (U,φ) de M est une donnée $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme.

Atlas C'est un collection de carte $(U_i,\varphi_i)_{i\in I}$ avec I un certain ensemble tel que $M = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Un Atlas $C^k(k \in \{1,2,\cdots,+\infty\})$ est un atlas où les changements de cartes sont C^k.

Changement de cartes Soient U_i et U_j pour $i,j \in I$, $i \neq j$ telles que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Alors la fonction de transition entre $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est C^k.

Définition 4.1. Une variété C^k M de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé avec un atlas de classe C^k.

Remarque 4.2. La donnée de l'atlas C^k est aussi ce qu'on appelle une structure différentielle C^k sur M.

Remarque 4.3. Soit une carte (U,φ) de M topologique et connexe. On a $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme.

En fait n ne dépend pas de la carte (U,φ).

Exemples 4.4. $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Définition 4.5. Soient $(M,\mathcal{A})$ une variété C^k de dim n et $(N,\mathcal{B})$ une variété C^k de dim p.

On définit la variété produit $M \times N$ équipe de l'atlas $(U_i \times V_j)_{i\in I, j\in J}$ et des cartes $\varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \varphi_i(U_i) \times \psi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^{n+p}$. Pour tout i,j, il est facile de vérifier que le changement de cartes sont C^k.

Définition 4.6 (Morphisme de variétés)**.** On dit que $f : M \to N$ est C^k en $x \in M$ si, avec $y = f(x)$ il existe $U \ni x$ où U ouvert de l'atlas $\mathcal{A}$ de M et $V \ni y$ où V ouvert de l'atlas $\mathcal{B}$ de N t.q. $f(U) \subset V$ et telle que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^P$ est C^k.

Proposition 4.7. *La définition de $f : M \to N$ est C^k en $x \in M$ ne dépend pas la choix des cartes.*

Définition 4.8. On dit que f est C^k de M à N, si f est C^k en tout point de M.

Définition 4.9 (Groupe de Lie)**.** Soit G un groupe, on dit que G est un groupe de Lie. Si G est un variété différentielle de classe C^k telle que $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ est C^k et $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ est C^k.

Remarque 4.10. En particulier pour le cas $k = 0$, c'est la définition de groupe topologique.

4.2 Sous-variété(réelles)

Définition 4.11. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension n si $\forall x \in M$, $\exists U_x$ voisinages ouverts et $0 \in V \subset \mathbb{R}^N$ et φ un difféomorphisme vérifie que $\varphi : U_x \xrightarrow{\sim} V$ et tel que

$$U_x \cap M = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^n \times 0_{N-n})).$$

Proposition 4.12. *Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété de dimension n, C^k. Alors*

1. *M est elle même une C^k variété.*
2. *$M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ l'inclusion naturelle est un morphisme de variétés.*

Démonstration. (Exercice) □

Proposition 4.13. *Soient $f : M \subset \mathbb{R}^{N_1} \to N \subset \mathbb{R}^{N_2}$, 2 sous-variétés avec $\dim M = p$, $\dim N = q$, et f est C^k comme application de $\mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$.*

Alors $f|_M$ est C^k.

Théorème 4.14 (Définitions équivalentes des sous-variétés(réelles))**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

Redressement *$M \subset \mathbb{R}^N$ est une sous-variété de dimension n.*

Submersion *$\forall x \in M$, $\exists U_x \subset \mathbb{R}^N$ et $f : U_x \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^{N-n}$ est une submersion en x t.q.*

$$U_x \cap M = f^{-1}(0).$$

Graphe *$\forall x \in M$, $\exists U_x \subset \mathbb{R}^N$, $\exists V \subset \mathbb{R}^n$ et $f : V \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^{N-n}$ t.q.*

$$U_x \cap M = \mathrm{graphe}(f) = \{(x, f(x)), x \in V\}.$$

Immersion *$\forall x \in M$, $U_x \subset \mathbb{R}^N$ et $V \ni 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec homéomorphisme $\varphi : V \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^N$, $\varphi(0) = x$, φ immersion en 0, $\varphi : V \xrightarrow{\sim} U_x \cap M$.(notion de paramètrage).*

4.3 Théorème du rang constant

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application C^k. Considérons sa différentielle en $x \in \Omega$, ou plutôt la jacobienne

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq N} \in M_{p,N}(\mathbb{R}).$$

Considérons $r(x) = \mathrm{rg}(Df(x)) = \dim \mathrm{Vect}\{Df_i(x), 1 \leq i \leq p\}$. On a $\dim(\bigcap_{i=1}^p \ker Df_i(x)) = \mathrm{rg}\, Df(x)$.

Théorème 4.15. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^p$ de rang constant n, alors $\forall y \in f(\Omega)$, $f^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N - r$.*

Application 4.16.
1. $GL_n(\mathbb{R})$ sous variété de dimension n^2.
2. $SL_n(\mathbb{R})$ sous variété de $M_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 1$.
3. $O_n(\mathbb{R})$ sous variété de $M_n(\mathbb{R})$, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Le cas $O_n(\mathbb{R})$ Pour $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I\}$, on définit

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto {}^tAA - I \end{aligned}$$

Ainsi que $f^{-1}(\{0\}) = O_n(\mathbb{R})$. Utilisons submersion du thm 4.14 sur les définitions équivalentes des sous-variétés : pour $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$Df(A).H = {}^tAH + {}^tHA.$$

On réécris

$$Df(A) : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} = \mathbb{R}^{n^2 - \frac{n(n-1)}{2}}$$

de telle sort que f devient une submersion.

En effet, si $M \in S_n(\mathbb{R})$, alors il existe $H = \frac{AM}{2}$ tel que $Df(A).H = M$.

Ainsi f est C^∞, f est une submersion de $O_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, donc $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque 4.17. $\ker Df(A) = \{H | {}^tAH + {}^tHA = 0\} = \{H | {}^tAH = -{}^tHA\}$

1. $\ker Df(I) = \mathbb{A}_n(\mathbb{R})$, les matrices antisymétriques.
2. $\ker Df(A) = A \ker Df(I) = A\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ $(A^{-1} = {}^tA)$.

Remarque 4.18. $A_n(\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie de $O_n(\mathbb{R})$ et $\dim_{\mathbb{R}-ev} \mathbb{A}_n(\mathbb{R}) \simeq \dim_{\text{sous-variété}} O_n(\mathbb{R})$.

4.4 Espaces tangents, Champs de vecteurs, Dérivation

Espace tangent

Définition 4.19. Soient $M \subset \mathbb{R}^N$ une sous-variété de dimension n (C^k ou C^∞) et $x \in M$.

On suppose $\exists \epsilon > 0$, $\gamma_\epsilon :]-\epsilon, \epsilon[\subset \mathbb{R} \to M$ t.q. $\gamma(0) = x$ et $\gamma'_\epsilon(0)$ existe. On les appelle "les chemins γ_ϵ".

On définit T_xM l'espace tangent

$$T_xM = \{\gamma'_\epsilon(0), \gamma_\epsilon \text{ les chemins}\}.$$

Remarque 4.20. Si $M = U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $x \in U$, $T_xU = \mathbb{R}^N$. Par exemple $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ ouvert, alors $T_gGL_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

Regardons $r_i(t) = x + te_i$, où e_i vecteur de bases canoniques de $\mathbb{R}^N$, $i = 1, \cdots, N$. Pour ϵ assez petit, car U est ouvert, $r_i(-]\epsilon, \epsilon[) \subset U$. Et donc $e_1, \cdots, e_N \in \mathbb{R}^N$. Mais pas clair que T_xM est un espace vectoriel.

Théorème 4.21 (Définitions équivalentes de l'espace tangent)**.** *Correspond au théorème4.14 précédent, nous donnons la définition de l'espace tangent sous les définitions de sous-variété différentes.*

Redressement *pour $x \in M$, si $U_x \subset \mathbb{R}^N$, $0 \in V \subset \mathbb{R}^N$, $\varphi : U_x \xrightarrow{\sim} V$, $\varphi(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times 0_{N-n})$. Alors*

$$T_xM = (D\varphi(x))^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0_{N-n}).$$

Submersion

$$T_xM = \ker Df(x)$$

Graphe

$$T_xM = \mathrm{Im}\{v \in \mathbb{R}^n \mapsto (v, Df(0).v)\}$$

Immersion

$$T_xM = Im(D\varphi(0)) = D\varphi(0)(\mathbb{R}^n)$$

Dans le théorème l'espace tangent est un espace vectoriel.

Preuve de 2(submersion). Montrons que $\{\gamma_\epsilon'(0), \gamma_\epsilon \text{les chemins}\} = \ker Df(x)$.

D'une part, soit $\epsilon > 0$, γ_ϵ est sur M, $\forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$ avec $\gamma_\epsilon(0) = x$ et $\gamma_\epsilon(t) \in U_x \cap M$ pour ϵ assez petit. Alors $f \circ \gamma_\epsilon(t) = 0$,

$$0 = (f \circ \gamma_\epsilon)'(t) = Df(\gamma_\epsilon(t))\gamma_\epsilon'(t)$$

Donc $Df(x)\gamma_\epsilon'(0) = 0$, ainsi $\gamma_\epsilon'(0) \in \ker Df(x)$.

D'autre part, on a $T_xM \subset \ker Df(x)$ et $Df(x)$ est surjective, donc $\dim T_xM = \dim \ker Df(x)$.

$\square$

Champs de Vecteurs Soit M une variété C^k, soit $\mathcal{A}$ son atlas avec $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$.

Rappel 4.22. *Le fibre tangent :* $TM = \bigcup_{x\in M}\{x\} \times T_xM$ *est une variété* C^{k-1} *de dimension* $2n$*. Considérons la projection canonique*

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned}$$

alors l'atlas de TM *est donnée par*

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U) &\xrightarrow{\Psi_i} \varphi_i(U) \times \mathbb{R}^n \\ (x, v) &\longmapsto (\varphi_i(x), D\varphi_i(x)v) \end{aligned}$$

C'est facile à vérifier que $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ *sont* C^{k-1}.

Définition 4.23. On dit que X un champ de vecteur C^k sur M si X est une section du fibre tangent C^k, c'est-à-dire que $X : M \xrightarrow{C^k} TM$, $\pi(X(x)) = x$, en fait $X(x) \in T_xM$.

De plus on note $\Gamma^k(M, TM)$ l'ensemble des sections de fibre tangente C^k.

Action des difféomorphismes sur les champs de vecteurs Soient M, N deux variété C^∞. Soit $f \in \mathrm{Diff}(M, N)$.

Poussé en avant un champ de vecteurs : Soit $X \in \Gamma^{\infty}(M, TM)$, on veut définir un champ de vecteur sur N, soit $y \in N$, on définit

$$f_{\star}X(y) = Df(f^{-1}(y))X(f^{-1}(y)) \in \Gamma^{\infty}(N, TN).$$

Remarque 4.24. Soient $\gamma : I \to M$, $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = X(x)$, $f \circ \gamma$ est un chemin sur N associé au point $y = f(x)$. De plus $(f \circ \gamma)'(0) = f_{\star}X(y)$.

Correspondance entre champ de vecteurs et dérivations Localement, dans un carte (U, φ), $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs s'écrit $X \circ \varphi^{-1}(x_1, \cdots, x_n) \in T_xM$, où $(x_1, \cdots, x_n)$ coordonnées de $p \in U$.

Autrement dit, si on pose a_i le champ en retire de coordonnées locales, le champ de vecteurs se réécrit en

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considérons l'application

$$X \longmapsto \delta_X \in \mathrm{Der}(C^{\infty}(U))$$

où

$$\delta_X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Alors δ_X vérifie la loi de Leibniz : $\delta_X(fg) = f\delta_X(g) + \delta_X(f)g$ pour tout $f, g \in C^{\infty}(U)$.

Ceci nous permet d'identifier champ de vecteurs et derivations.

On a vu que localement T_pM a pour base $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{i=1,\cdots,n}$. Donc étant donné $f \in C^{\infty}(U)$, on a

$$(X.f)(x) = (\delta_X \cdot f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Action des difféomorphismes sur les flots associés à un champ de vecteurs Soient $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et ϕ_t^X le flot associé à X. Étant donné un difféomorphisme $f : U \to V$,

alors on a la relation suivante
$$\phi_t^{f_\star X}(f(x)) = f(\phi_t^X(x))$$

Crochet de champs de vecteurs Ensuite, on peut définir le crochet de 2-champs de vecteurs. Pour $X : U \to \mathbb{R}^n$, $Y : U \to \mathbb{R}^n$, se réécrivent localement en

$$X = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

Alors le crochet de X et Y est donné localement par

$$[X,Y](x) := \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}(x) - b_i(x) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \right)_{j=1,2\cdots,n} \in \mathbb{R}^n$$

Retour sur l'action des difféo sur $\Gamma(M,TM)$ Pour $f : M \to N$ difféo local, soit $X \in \Gamma(M,TM)$. Alors $f_*X \in \Gamma(N,TN)$,

$$(f_*X)(y) = Df(f^{-1}(y)).X(f^{-1}(y)).$$

Et on a aussi l'opérateur tirer arrière : Soit $X \in \Gamma(N,TN)$, $f^*X \in \Gamma(M,TM)$,

$$(f^*X)(x) = [Df(x)]^{-1}X(f(x)).$$

D'ailleurs, on a
$$f^*(f_*X) = X.$$

Remarque 4.25. $C^\infty(M)$ peut agir sur $\Gamma(M,TM)$ de la façon suivante

$$(f.X)(x) = f(x)X(x).$$

Ainsi $\Gamma(M,TM)$ est un $C^\infty(M)$-module.

Crochet de champs de vecteurs Localement on avait défini $[X,Y]$. Et à X un champ de vecteurs sur $U \subset \mathbb{R}^n$, on associe δ_X une dérivation sur l'algèbre $C^\infty(U)$. Pour $x \in U$, $h \in C^\infty(U)$, on a

$$\delta_X(h)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial h}{\partial x_i}(x).$$

Où $X = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$ et $\delta_X \in \mathrm{Der}(C^\infty(U))$.

La définition du crochet de $[X, Y]$ correspond à

$$[X, Y] = \delta_X \circ \delta_Y - \delta_Y \circ \delta_X.$$

Proposition 4.26. *Le crochet $[\cdot, \cdot]$ de champs de vecteurs vérifie : $\forall X, Y, Z$*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to U' \subset \mathbb{R}^n$ un difféo, alors $\forall h \in C^\infty(U')$, on a

$$\delta_{f_*X}(h)(y) = \delta_X(h \circ f)(f^{-1}(y)) \quad \forall y \in U'$$

avec $\delta_{f_*X} \in \mathrm{Der}(C^\infty(U'))$.

Corollaire 4.27. *On a*

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$$

Démonstration. (exercices) □

On en déduit que le crochet de champs de vecteur est bien défini sur un variété M.

Dérivée de Lie Soient $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, on pose la dérivée de Y le long de X par

$$\mathcal{L}_X(Y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\phi_{-t}^X\right)_* Y.$$

Proposition 4.28. *On a $[X, Y] = \mathcal{L}_X(Y)$.*

Théorème 4.29 (Sens géométrie)**.**

$$[X, Y] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \phi_t^X$$

Remarque 4.30. La définition avec f_* pousser en avant. Il y a une définition équivalente avec "tirer en arrière " (cf. TD3)

5 Groupe de Lie

Rappel 5.1 (Groupe de Lie)**.** *Soit G un groupe, on dit que G est un groupe de Lie. Si G est un variété différentielle de classe C^k telle que $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ est C^k et $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ est C^k.*

5.1 Champs de vecteurs et plan tangents

Soit G un groupe de Lie C^∞. Soit $g \in G$ et on pose

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

On a $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ et L_g est un difféomorphisme.

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \lambda_g : C^\infty(G) &\longrightarrow C^\infty(G) \\ h &\longmapsto h \circ L_g^{-1} \end{aligned}$$

autrement dit pour $g, x \in G$, on a

$$\lambda_g(h)(x) = h(g^{-1}x).$$

Remarque 5.2. On pourrait considérer $R_g(x) = xg$ et faire le théorème qui suit à droite.

Définition 5.3. Un champs $X \in \Gamma(G, TG)$ est invariant à gauche si pour $\forall g \in G$

$$DL_g(e)X(e) = X(g)$$

Notons ${}^G\Gamma(G, TG) \subset \Gamma(G, TG)$ l'ensemble des champs de vecteurs invariant à gauche.

Proposition 5.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $X \in {}^G\Gamma(G, TG)$.

2. *$\forall g, x \in G$, on a $DL_g(x)X(x) = X(gx)$.*
3. *$(L_g)_* X = X$.*

Démonstration. Montrons que $1 \Rightarrow 2$. On a

$$\begin{aligned} DL_g(x).X(x) &= DL_g(x)(DL_x(e)X(e)) \\ &= D(L_g \circ L_x)(e)X(e) \\ &= D(L_{gx})X(e) \\ &= X(gx). \end{aligned}$$

Montrons que $1 \Rightarrow 3$. Pour $\forall x \in G$

$$\begin{aligned} ((L_g)_*)X(x) &= DL_g(L_g^{-1}(x))X(L_g^{-1}(x)) \\ &= DL_g(g^{-1}x)X(g^{-1}x) \\ &= X(x). \end{aligned}$$

□

En terme de dérivation on a la proposition suivante :

Proposition 5.5. *Soit $X \in {}^G\Gamma(G, TG)$. Alors sur $C^\infty(G)$, on a*

$$\delta_X \circ \lambda_g = \lambda_g \circ \delta_X.$$

Démonstration. On a pour $h \in C^\infty(G)$, on a $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} (\delta_X \circ \lambda_{g^{-1}})(h)(x) &= \delta_X(h \circ L_g)(x) \\ &= D(h \circ L_g)(x)X(x) \\ &= Dh(L_g(x))DL_g(x)X(x) \\ &= Dh(gx)DL_g(x)X(x) \\ &= Dh(gx)X(gx) = \lambda_{g^{-1}} \circ \delta_X(h)(x) \end{aligned}$$

□

Notons ${}^G\operatorname{Der}(C^\infty(G))$ les dérivations sur G invariantes à gauche.

`But` : définir l'algèbre de Lie de G.

Soit $X \in T_eG$ (Un vecteur mais pas champs de vecteurs) . On définit le champs de vecteurs

$$\begin{aligned} v_X : G &\longrightarrow TG \\ g &\longmapsto DL_g(e).X \in T_g(G) \end{aligned}$$

Alors $v_X \in {}^G\Gamma(G, TG)$ est un champ de vecteurs invariant à gauche.

Proposition 5.6. *L'application*

$$\begin{aligned} T_eG &\longrightarrow {}^G\Gamma(G, TG) \\ X &\longmapsto v_X \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel et de plus via $\Gamma(G, TG) \simeq \mathrm{Der}(C^\infty(G))$, *on a*

$$T_eG \simeq {}^G \, \mathrm{Der}(C^\infty(G)).$$

Démonstration. (En exercice TD3) □

Ainsi T_eG peut être muni du crochet de Lie : $\forall X, Y \in T_eG$, alors

$$[X, Y]_{T_eG} = [\delta_{v_X}, \delta_{v_Y}] = [v_X, v_Y].$$

Définition 5.7 (Une algèbre de Lie)**.** $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie si

1. $\mathfrak{g}$ est un k-espace vectoriel
2. si $\mathfrak{g}$ est muni d'une application bilinéaire

   $$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

   qui vérifie

   (a) $[X, X] = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

   (b) $\forall X, Y, Z$, $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Proposition 5.8 (Prop-Def)**.** $\mathfrak{g} = (T_eG, [\cdot, \cdot])$ *est une algèbre de Lie qui s'appelle l'algèbre de Lie de* G *et telle que* $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ *(en tant que variété).*

5.2 Cas de $GL_n(\mathbb{R})$

On a vu que

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$$

un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$. La carte $(GL_n(\mathbb{R}), id_{M_n(\mathbb{R})})$ suffit pour $GL_n(\mathbb{R})$ variété C^∞ de dimension n^2. On a $T_eG = M_n(\mathbb{R})$. De plus

$$L_g(A) = gA$$

et

$$DL_g(A)H = gH \quad \forall H \in M_n(\mathbb{R}) \ et \ g, A \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Donc $DL_g(A)$ est la multiplication par g sur $M_n(\mathbb{R})$.

Description des champs de vecteurs invariants à gauche sur $T_{Id}G$ Par l'application

$$A \in M_n(\mathbb{R}) = T_{Id}G \longmapsto v_A, \quad v_A(g) = DL_g(Id).A = gA.$$

On a ${}^G\Gamma(G, TG) = \{g \in G \mapsto gA, A \in M_n(\mathbb{R})\}$.

Flot associé à v_A, noté ϕ_t^A :

$$\phi_t^A(g) = ge^{tA}$$

En posons $c(t) = ge^{tA}$, on a $c(0) = g$ et $c'(t) = v_A(c(t))$ car

$$c'(t) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} ge^{tA} = ge^{t_0A}\frac{d}{dt}|_{t=t_0} ge^{(t-t_0)A} = ge^{t_0A}A = v_A(c(t_0)).$$

Donc par l'unicité du flot, on a $\phi_t^A(g) = ge^{tA}$.

Dérivée de Lie Soient $A, B \in T_{Id}G = M_n(\mathbb{R})$. Calculons :

$$[A, B](Id) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \left(\phi_{-t}^A\right)_* v_B(Id).$$

Par définitions,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\phi_{-t}^{A}\right)_{*}v_B(Id) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}D\phi_{-t}^{A}\left(\phi_t^A(Id)\right)v_B(\phi_t^A(Id))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{tA}Be^{-tA}\right) = AB-BA=[A,B]\end{aligned}$$

5.3 L'exponentielle

Soient G groupe de Lie et T_eG son algèbre de Lie. Pour un champ invariant à gauche $X \in T_e(G)$ et $X(g) = DL_g(e)X$.

Définition 5.9. Un groupe à paramètre de G est un morphisme de groupe de Lie de $\mathbb{R} \to G$.

Théorème 5.10. *Soit $X \in T_eG$ un vecteur. Soit $v_X \in {}^G\Gamma(G,TG)$. Alors le flot associé à v_X, noté ϕ_t^X, est défini pour $\forall t \in \mathbb{R}$(i.e. v_X est un champ complet) et*

$$\phi_t^X(g) = g\phi_t^X(e) \quad \forall t \in \mathbb{R}, g \in G$$

Par conséquent $\alpha_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_t^X(e)$ est un sous-groupe à un paramètre de G.

Et réciproquement si θ est un sous-groupe à paramètre alors $\theta = \alpha_X$ pour $X = \theta'(0)$.

Donc on a bijection entre vecteurs de T_eG et sous-groupe à un paramètre de G.

$$X \longleftrightarrow \alpha_X$$

Démonstration. Considérons le flot

$$(t,g) \in \mathbb{R} \times G \longmapsto \phi_t^X(g) \in G.$$

Soit $I = I_e$ le domaine de définition maximale de la course intégrale $\alpha : t \mapsto \phi_t^X(e)$. Alors I est ouvert et contient 0. On veut $I = \mathbb{R}$ et $\phi_t^X(g) = g\phi_t^X(e)$.

Soit $s \in I$, posons $g = \alpha(s)$. Définissons $\beta(t) = g\alpha(t-s)$, $t - s \in I \Leftrightarrow t \in s + I$. Alors on a $\beta(s) = g = \alpha(s)$ et

$$\begin{aligned}\beta'(t) = (L_g \circ \alpha)'(t-s) &= DL_g(\alpha(t-s)) \cdot \alpha'(t-s)\\ &= DL_g(\alpha(t-s))X(\alpha(t-s))\\ &= X(g\alpha(t-s)) = X(\beta(t)).\end{aligned}$$

Ainsi que $\alpha = \beta$, donc on a $I = I + s$ pour tout $s \in I$, donc $I = \mathbb{R}$.

Ensuite, $\beta(t) = g\alpha(t)$ qui est la courbe intégrale de $\begin{cases} \beta(0) = g \\ \beta'(t) = X(\beta(t)) \end{cases}$, donc

$$\beta(t) = \phi_t^X(g) \; et \; \alpha(t) = \phi_t^X(g)$$

Ceci conclut que $\phi_t^X(g) = g\phi_t^X(g)$.

On pose pour tout $X \in T_eG$, $\alpha_X(s) = \phi_s^X(e)$, par la propriété du flot, on a

$$\alpha_X(s+t) = \phi_{s+t}^X(e) = \alpha_X(s)\alpha_X(t).$$

Soit θ un sous-groupe à un paramètre de G, on a

$$\theta(t+s) = \theta(t)\theta(s) = L_{\theta(t)}(\theta(s)).$$

On veut montrer que $\theta'(t) = X(\theta(t))$ et $\theta(0) = e$.

$$\begin{aligned} X(\theta(t)) &= DL_{\theta(t)}(e)X = DL_{\theta(t)}(\theta(s)|_{s=0})\theta'(s)|_{s=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\theta(t+s)\right)_{s=0} = \theta'(t). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.11. *$X \in T_eG$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha_{tX}(1) = \alpha_X(t)$.*

Définition 5.12 (Application Exponentielle)**.** Soit $X \in T_eG$, on définit $\exp(X)$ comme $\alpha_X(1)$.

Rappel 5.13.

$$X \in \mathrm{Lie}(G), v_X \in {}^G\Gamma(G, TG), \phi_t^X(g) = g\phi_t^X(e)$$

Le champ était complet car $t \mapsto \phi_t^X(g)$ est défini sur $\mathbb{R}$ entier.

Définition 5.14. L'application exponentielle

$$\begin{aligned} \exp : \mathrm{Lie}(G) &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \phi_1^X(e) \end{aligned}$$

Remarque 5.15. En posant $G = GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Lie}(G) = M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\phi_t^X(g) = ge^{tX} \quad X \in M_n(\mathbb{R}), g \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Dans ce cas, $\exp(X) = \phi_1^X(e) = e^X$, il s'agit de l'exponentielle de matrice naturelle.

Notion
$$\alpha_X(t) = \phi_t^X(e)$$

Remarque 5.16. Calculons que

$$\alpha_X(t+s) = \phi_{t+s}^X(e) = \phi_s^X(\phi_t^X(e)) = \alpha_X(t)\alpha_X(s)$$

Ainsi on sait que : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \alpha_X(t) \end{array}$ est un sous-groupe à un paramètre.

Théorème 5.17. *Propriétés de Exp*

1. $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ *est* C^∞.
2. $D(\exp)(0) = \mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(G)}$ *est donc* exp *est un difféo de*

$$U_0 \subset \mathrm{Lie}(G) \to V_e \subset G,$$

où U_0 *est voisinage de* $0_{\mathrm{Lie}(G)}$ *et* V_e *est voisinage de* e.

3. *Le sous-groupe engendré par* V_e *est égale à* $G^0 \subset G$*, la composante connexe de* G*.*

Démonstration. 1)La régularité de exp provient de la régularité du flot par rapport aux conditions initiales dans la théorie des équations différentielles :

Rappel 5.18. *Considérons l'application* C^∞

$$\begin{aligned} F : \Lambda \times U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\longmapsto F(\lambda, x) \end{aligned}$$

Problème de Cauchy : trouvons $\varphi : D \subset \Lambda \times \mathbb{R} \to U$ *t.q.*

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, 0) = 0 \\ \frac{d\varphi}{dt}(\lambda, t) = F(\lambda, \varphi(\lambda, t)) \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assume que $\varphi : D \subset \Lambda \times \mathbb{R} \to U$ et que φ est C^∞.

Utilisation : Considérons $M = \mathrm{Lie}(G) \times G$ et définissons

$$F(X, g) = (0, DL_g(e)X)$$

Ensuite la solution est $\phi_t^F(X, g) = (X, ge^{tX})$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que $\phi_t^F(\cdot, g)$ est C^∞, $\forall g \in G, t \in \mathbb{R}$. On choisi $g = e$ et $t = 1$, on obtient la régularité de $\phi_1^F(X, e)$.

On définit l'application i et p qui sont C^∞ par la manière naturelle

$$\begin{aligned} i &: \mathrm{Lie}(G) \hookrightarrow \mathrm{Lie} \times e \times \mathbb{R} \subset \mathrm{Lie}(G) \times G \\ p &: \mathrm{Lie}(G) \times G \to G. \end{aligned}$$

Donc $\exp(X) = p\ \phi_1^F(i(X))$ qui est C^∞.

2) Montrons $D\exp(0_{\mathrm{Lie}(G)}) = id$. Si $c : \mathbb{R} \to \mathrm{Lie}(G)$ un chemin C^∞ alors on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(c(t)) = D\exp(c(0))c'(0)$$

Prenons $c(t) = tX$, $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on obtient

$$D\exp(0).X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tX) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t^X(e) = X$$

Donc

$$D\exp(0) = \mathrm{id}_{\mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))}$$

Ainsi, $D\exp(0)$ est invisible. Alors par le théorème d'inversion locale, il existe $U \subset \mathrm{Lie}(G)$ et $V \subset G$ ouverts t.q. exp réalise un difféo de $U \to V$. □

Remarque 5.19. De plus le sous-groupe engendré par U_e égale composante connexe de G(cf. exercices groupes topologiques TD2).

Remarque 5.20. En générale, l'application exp n'est ni injective ni surjective :

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$, pas injective.
2. $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to GL_2^+(\mathbb{R})$, pas surjective.
   Si $g = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors il n'existe pas de $M \in M_2(\mathbb{R})$ t.q. $\exp(M) = g$.

Théorème 5.21 (Fonctorialité). *Soit $\varphi : G \to M$ morphismes de groupes de Lie. Notons* $\mathrm{Lie}(G)$ *et* $\mathrm{Lie}(H)$ *les algèbres de Lie associé. Alors le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "D\varphi(e)"] & \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

C'est-à-dire que $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(D\varphi(e)X)$$

Démonstration. Considérons pour $X \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\alpha : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \varphi(\exp(tX)).$$

On a α est C^∞ parce que φ morphisme de groupe est C^∞ et exp est C^∞. De plus $\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s)$. Ainsi α sous à un paramètre de H. D'après la correspondance $X \in Lie(G) \leftrightarrow \alpha_X$ sous groupe à un paramètre. Par $\alpha'(t) = D\varphi(e^{tX})D\exp(tX).X$, on a $\alpha'(0) = D\varphi(e)D\exp(0).X$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\exp_G(tX)) = \exp_H(D\varphi(e).tX)$$

Prenons $t = 1$, $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(D\varphi(e).X).$$

□

5.4 Action adjointe

Action de G sur une variété M On dit μ est une action de G sur une variété M si $\mu : G \times M \to M$ est C^∞, et $x \in M \to \mu_g(x) = \mu(g,x)$ est un difféo pour tout $g \in G$. Et $\mu_g^{-1} = \mu_{g^{-1}}$. (donc $\mu_{g^{-1}}$ est aussi un difféo)

Proposition 5.22. *Soit $p \in M$ un point fixe sous l'action de G (i.e. $\mu(g,p) = p$, $\forall g \in G$)*

Alors $D\mu_g \in GL(T_pM)$ *et en fait on a*

$$g \longmapsto D\mu_g(p) \in GL(T_pM)$$

est une représentation de G *qui est* C^∞*.*

Démonstration. Par définitions on a $D\mu_g(p) : T_pM \longrightarrow T_{g.p}M = T_pM$ et $D\mu_e(p) = id_{GL(T_pM)}$. Comme μ_g difféo, on a $D\mu_g(p) \in GL(T_pM)$ et

$$D\mu_{g.h}(p) = D(\mu_g \circ \mu_h)(p) = D\mu_g(\mu_h(p))D\mu_h(p) = D\mu_g(p)D\mu_h(p).$$

Alors $g \mapsto D\mu_g(p)$ est un morphisme. On a bien une représentation $G \to GL(T_pM)$.

Ensuite, vérifions que $g \mapsto D\mu_g(p)$ est C^∞ localement : Soit V_p un voisinage de p. En terme de coordonnées locales $(g,x) \mapsto \mu_g(x) = (f_1(g,x), \cdots, f_n(g,x))$. Dans la base de T_pM donnée par $\mathcal{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, on obtient pour les coefficients matriciels de $D\mu_g(p)$,

$$g \mapsto \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g,x)\right)_{i,j=1,\cdots,n} = Matrice_{\mathcal{B}}(D\mu_g(p))$$

qui sont C^∞. $\square$

Action adjointe L'action G sur $M = G$, $\mu(g,x) = gxg^{-1} = \mathrm{Int}_g(x)$. Le point $e \in G$ est fixé par tout $g \in G$: $Int_g(e) = e$. Par ce qui précèdent,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow GL(\mathrm{Lie}(G)) \\ g &\longmapsto D\,\mathrm{Int}_g(e) \end{aligned}$$

est une représentation C^∞, noté *Ad.*

Lemme 5.23. *Soient* $g \in G$*,* $X \in \mathrm{Lie}(G)$*, on a* $\forall t \in \mathbb{R}$ *:*

$$ge^{tX}g^{-1} = \mathrm{Int}_g(e_G^{tX}) = \exp_G(t\,\mathrm{Ad}(g)X).$$

Démonstration. Utilisons la fonctorialité :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Int}_g} & G \\ {\scriptstyle \exp_G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp_G} \\ \mathrm{Lie}(G) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}(g)} & \mathrm{Lie}(G) \end{array}$$

$$\mathrm{Int}_g(\exp_G(tX)) = \exp_G(t\,\mathrm{Ad}(g)X).$$

□

Notion-Définitions :

1. Centre de G : $Z(G) = \{g \in G, gh = hg\ \forall h \in G\}$.
2. Centre d'un algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, [X,Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$.
3. On définit

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto \mathrm{ad}(X) := [X, \cdot] \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{ad}(X).Y = [X,Y]$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$.

4. On a d'autre part : $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathrm{Lie}(G))$, $D\,\mathrm{Ad}(e) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G))$.

Question : $D\,\mathrm{Ad}(e) = ad$? (Réponse : oui)

Théorème 5.24. *1.* $D\,\mathrm{Ad}(e) = \mathrm{ad}$ *(i.e.* $D\,\mathrm{Ad}(e)X.Y = [X,Y]\ \forall X, Y \in \mathrm{Lie}(G)$*)*

2. $\mathrm{Ad}(\exp_G(X)) = \exp_{GL(\mathrm{Lie}(G))}(\mathrm{ad}(X))$.

3. Si G connexe, $\ker(\mathrm{Ad}) = Z(G)$ *et* $\mathrm{Lie}(Z(G)) = \ker(\mathrm{ad}) = Z(\mathrm{Lie}(G))$.

Démonstration. 1. Notons $\tilde{\mathrm{ad}} = D\,\mathrm{Ad}(e)$, soit $X \in \mathrm{Lie}(G)$, on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\,\mathrm{Ad}(\exp(tX)) = D\,\mathrm{Ad}(e).X = \tilde{\mathrm{ad}}(X).$$

Ensuite, pour tout $Y \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$\tilde{\mathrm{ad}}(X).Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}\,\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y$$

Soit $f \in C^\infty(G)$, alors f est C^∞ au voisinage de e, donc

$$\tilde{\mathrm{ad}}(X)Y.f(e) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\,\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y.f(e)$$

`Observation` Pour $Z \in \mathrm{Lie}(G)$,

$$(Z.f)(g) = Df(g).Z(g) = Df(g)DL_g(e)Z(e) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(ge^{tZ}).$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y.f(e) &= \frac{d}{ds}|_{s=0} f(\exp(s\,\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y)) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0} f(\exp(\mathrm{Ad}(\exp(tX))sY)) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0} f(\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX))\end{aligned}$$

Soit $F(t,s) = f(e^{tX}e^{sY}e^{-tX}) = H \circ i(t,x)$, où $i(t,s) = (t,s,-t)$ et $H(t_1,s,t_2) = f(e^{t_1}e^{s}e^{t_2})$.

On a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{ad}}(X).Y.f(e) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}|_{(0,0)} F(t,s) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}|_{(0,0)} f(e^{tX}e^{sY}) - f(e^{sY}e^{tX}) \\ &= X.Y.f(e) - Y.X.f(e) = [X,Y]f(e) = \mathrm{ad}(X).Y.f(e)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{ad} = D\,\mathrm{Ad}(e)$

2. Fonctorialié

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G)) \\ {\scriptstyle \exp_G}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp_{\mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))}} \\ \mathrm{Lie}(G) & \xrightarrow{D\,\mathrm{Ad}(e)} & \mathrm{End}(\mathrm{Lie}(G)) \end{array}$$

Donc $\mathrm{Ad}(\exp_G(X)) = \exp_{\mathrm{GL}}(\mathrm{ad}(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}(X))^n$.

3. Résultat admis : Soit $\varphi : G \to H$ morphisme de groupes de Lie, alors $\ker\varphi < G$ est sous groupe de Lie de G et $\mathrm{Lie}(\ker\varphi) = \ker(D\varphi(e))$.

Ici on pose $\varphi = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ et utilise le résultat ci-dessus, on a $\ker\mathrm{Ad} = Z(G)$ et

$$\mathrm{Lie}(Z(G)) = \ker D\varphi(e) = \ker D\varphi(e) = \ker(\mathrm{ad}) = Z(\mathrm{Lie}(G)).$$

Preuve $\ker\mathrm{Ad} = Z(G)$: D'abord $Z(G) \subset \ker\mathrm{Ad}$ car $\mathrm{Int}_g = \mathrm{id}$ pour $g \in Z(G)$. Donc $\mathrm{Ad}|_{Z(G)} = \mathrm{id}$. D'autre part, $\forall X \in \mathrm{Lie}(G), g \in \ker\mathrm{Ad}$, on a

$$g\exp_G(X)g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}(g)X) = \exp(X)$$

Donc g commute à $\exp_G(\mathrm{Lie}(G))$ qui engendre G puisque G est connexe. Alors $g \in Z(G)$.

□

5.5 Sous-groupes de Lie

Un des buts : Théorème de Cartan-Von Neumann.

Définition 5.25 (Sous-groupe de Lie)**.** Soient G groupe de Lie et $H < G$ sous groupe. On dit que K est un sous-groupe de Lie de G si

1. H est muni d'une structure de groupe de Lie.
2. L'inclusion $H \hookrightarrow G$ est un morphisme de groupe de Lie.

Remarque 5.26*.* Une autre façon de le dire : (H, τ) où $\tau : H \to G$ est l'immersion injective. On dit que $(H, \tau) \simeq (H', \tau')$ s'il existe $\varphi : H \to H'$ un isomorphisme de groupe de Lie t.q. $\tau \circ \varphi = \tau$. Alors définition $H < G$ sous-groupe de Lie coïncide avec $[(H, \tau)]$

G groupe de Lie. $H < G$ un sous-groupe. À quelle condition H est un sous-groupe de Lie ?

Exemples 5.27. Dans $GL_n(\mathbb{R})$ vous connaissez : $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$, ou bien encore $SL_n(\mathbb{R})$.

Exemples 5.28.

$$\begin{array}{c} D_\alpha := \{(t, \alpha t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset (\mathbb{R}^2, +) \\ \downarrow \exp \\ H_\alpha = \{(e^{it}, e^{i\alpha t}) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset S^1 \times S^1 \end{array} .$$

α un paramètre, H_α sous-groupe du groupe de Lie $(S^1 \times S^1, \times)$.

H_α n'est pas un sous-groupe de Lie si α est irrationnel. En effet, H_α est dense dans $S^1 \times S^1$ (H_α n'est pas du tout fermé !) et n'a pas de structure de variétés.

Rappel de la définition d'un sous-groupe de Lie

Définition 5.29. Soit G un groupe de Lie. Soit H un sous-groupe de G. H est un sous-groupe de Lie si

1. H est aussi d'une structure de groupe de Lie ;
2. $H \hookrightarrow G$ (inclusion) morphisme de variétés.

Définition 5.30. (deuxième définition) Soit H un groupe et G un groupe de Lie. Si $\exists \tau : H \to G$ une immersion et si de plus τ est injective, alors H est un sous-groupe de Lie de G.

On a $(H,\tau) \simeq (H',\tau')$ si $\varphi : H \xrightarrow{\sim} H'$ tel que $\tau' \circ \varphi = \tau$.

Théorème 5.31. *(admis) G groupe de Lie et soit $\mathfrak{h} \subset Lie(G)$. Alors $\exists! H < G$ sous-groupe de Lie de G connexe tel que $Lie(H) = \mathfrak{h}$.*

Proposition 5.32. *G un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = Lie(G)$, et $\mathfrak{h} \subset Lie(G)$. Supposons H sous-groupe de Lie de G tel que $Lie(H) = \mathfrak{h}$. Alors H est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook] & G \\ \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp_H"] \arrow[r, hook] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp_G"'] \end{tikzcd}$$

Donc $H \supset \exp(\mathfrak{h})$, est alors $H =< \exp(\mathfrak{h}) >$ par la connexité. □

Exemples 5.33. $(S^1, \times) \subset (\mathbb{C}^*, \times)$. $\mathfrak{g} = \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ et $\exp : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}^*$. $S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z\bar{z} = 1\}$ et $Lie(S^1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 0\}$.

Corollaire 5.34. *G un groupe de Lie, $\mathfrak{h} \subset Lie(G)$, $K \subset G$ groupe de Lie tel que $Lie(K) = \mathfrak{h}$. Alors, $K^\circ =< \exp(h) >$. En particulier, si G est connexe et $Lie(K) = \mathfrak{g}$, alors, $G = K$.*

5.6 Théorème de Cartan - Von Neumann

Théorème 5.35. *Soit G un groupe de Lie. $H < G$ un sous-groupe fermés. Alors H est un sous-groupe de Lie de G et $\mathfrak{h} := Lie(H) = \{X \in Lie(G) \mid e^{tX} \in H,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. Le but : montrer qu'il existe U voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$, V voisinage ouvert de $e \in G$, et $\psi : \mathfrak{h} \to V$ difféomorphisme tel que $\psi(U \cap \mathfrak{h}) = V \cap H$.

Il y a 3 étapes :

Lemme 5.36. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathfrak{g} = Lie(G)$ tel que $X_n \to 0$ et $\exp(X_n) \in H$ et $\frac{X_n}{\|X_n\|} \to u \in \mathfrak{g}$. Alors, $\exp(tu) \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (autrement dit $u \in \mathfrak{h}$).*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. On va trouver $k_n(t) \in \mathbb{N}$ tel que $k_n X_n \to tu$, quand $n \to +\infty$: considérons $\frac{t}{\|X_n\|} = t_n$, posons $k_n = E(t_n)$ (partie entière) et $t'_n = t_n - k_n \in [0,1[$. On a une observation : $t'_n X_n \to 0$, car $X_n \to 0$. Ainsi $k_n X_n \to tu$ quand $n \to +\infty$. Donc $\exp(k_n X_n) = \underbrace{\exp(\alpha_n) \cdots \exp(\alpha_n)}_{k_n \ fois}$ et donc $\exp(tu) \in H$ (exp continue)

□

Lemme 5.37. $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp(tX) \in H, \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g} = Lie(G)$.

Démonstration. Si $X \in \mathfrak{h}$, alors $sX \in h$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Prenons $X, Y \in h$ et montrons que $X + Y \in h$. exp est un difféomorphisme local :$\underset{\mathfrak{g}}{\underset{\cap}{\mathfrak{h}_0}} \to \underset{G}{\underset{\cap}{V_e}}$ avec réciproque, notée log : $V_e \to \mathfrak{h}_0$ telle que $\log \exp(X) = X$, $\forall X \in \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}$. $D\log(e) = id$.

Supposons $X + Y \neq 0$. Soit $\exp(sX)\exp(tY)$ avec $s, t \in I =]-\varepsilon, \varepsilon[$, ε petit. Considérons $\psi(t) = \log(\exp(tX)\exp(tY))$. $\psi'(t) \neq 0$ pour $t \neq 0$. On a

$$\exp(\psi(t)) \in H, \ \psi'(0) = X + Y$$

et

$$\psi(t) = t(X + Y) + O(t^2).$$

(voir ex0 TD :$\mu : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, $D\mu(e, e)(H, K) = H + K$.) Prenons $t_n \to 0$ ($t_n \in I$). On a $\psi(t_n) \to 0$ dans $\mathfrak{h}_0$. Posons $z_n = \psi(t_n)$, $\exp(z_n) \in H$. De plus $\frac{z_n}{t_n} \to X + Y$ et alors $\frac{z_n}{\|z_n\|} \to \frac{X+Y}{\|X+Y\|}$.

Par lemme 5.36 on a $\exp(tu) \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Soit $u = \frac{X+Y}{\|X+Y\|}$, alors $X + Y \in \mathfrak{h}$. □

Lemme 5.38. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ *pour un certain espace vectoriel. On peut choisir un voisinage* $W_\mathfrak{m} \ni 0$ *de* $\mathfrak{m}$ *tel que* $e^{W_\mathfrak{m}} \cap H = \{e\}$.

Démonstration. Si ce n'est pas le cas : $\exists (Y_k)$ de $\mathfrak{m}$ telle que $0 \neq Y_k \to 0$ et $e \neq \exp(Y_k) \in H$ (exp difféomorphisme local). Considérons $X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|} \in \mathfrak{m}$, dans la sphère unité, compacte, X_k a une valeur d'adhérence X dans la sphère unité. Par lemme 1 on a vu que $e^{tX} \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors $X \in \mathfrak{h}$. Finalement $X \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ alors $X = 0$. Impossible ! Ainsi $\exists W_\mathfrak{m}$ voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{m}$ tel que $\exp(W_\mathfrak{m}) \cap H = \{e\}$. □

On est prêt à montrer qu'on a une structure de sous-variété

$$\begin{aligned} \psi : \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} &\longrightarrow G \\ (X, Y) &\longmapsto \exp(X + Y). \end{aligned}$$

ψ est difféomorphisme local parce que $\exists U_{\mathfrak{h}}$, $U_{\mathfrak{m}}$ et $V_e \ni e$ tel que $\psi : U_{\mathfrak{h}} \times U_{\mathfrak{m}} \to V_e$ difféomorphisme. Sinon considérer $U_{\mathfrak{m}} \cap W_{\mathfrak{m}} \subset W_{\mathfrak{m}}$. Alors $\exp(U_{\mathfrak{m}} \cap W_{\mathfrak{m}}) \cap H = \{e\}$.

On a $\exp(U_{\mathfrak{h}} \times \{0\}) \subset V_e \cap H$. Et réciproquement, $h \in V_e \cap H$ où

$$h = \exp(X) \exp(Y) \in \exp(\mathfrak{h}) \exp(U_{\mathfrak{m}})$$

et

$$\underset{\in H}{\exp(-X)h} = \underset{\in \exp(U_{\mathfrak{m}})}{\exp Y}.$$

Comme $\exp(Y) \in \exp(U_{\mathfrak{m}}) \cap H = \{e\}$, on a $Y = 0$. Alors $V_e \cap H = \exp(U_{\mathfrak{h}} \cap \{0\}_{\mathfrak{m}}) = \psi(\underset{\mathfrak{h}}{\underset{\cap}{U_K}} \times \{0_{\mathfrak{m}}\})$. Donc, au voisinage de e, H est une sous-variété de dimension : $\dim \mathfrak{h}$.

Pour conclure, en utilisant $L_h : x \in G \mapsto hx \in G$, $h \in H$ (C^∞ difféomorphisme) transporter la structure de sous-variété de $V_e \cap H$ sur tout $V_h \cap H$. Enfin :$f(t) = e^{tX} \in \mathfrak{h}$, $X \in H$, alors $f(s) = e$ et $f'(s) = X$, donc $\mathfrak{h} \subset Lie(H)$, et $\mathfrak{h} = Lie(H)$ comme ils ont la même dimension. $\square$

Corollaire 5.39. *Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie de G.*

Corollaire 5.40. *Soit $G \overset{C^\infty}{\curvearrowright} M$ variété, G groupe de Lie. Alors $Stab(p)$, $p \in M$ est un sous-groupe fermé de G et ainsi un sous-groupe de Lie de G.*

Question : $H < G$, $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Que pourriez-vous dire de $\overline{H}$?(facile...) Oui, c'est un sous-groupe de Lie !

Retour :

$$\{(t, t\alpha), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\exp} \{(e^{it}, e^{it\alpha}), t \in \mathbb{R}\}$$

qui met une structure de groupe de Lie sur H_α (même si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$).

Retour sur la fonctorialité : $\varphi : G \to H$ morphisme entre deux groupe de Lie. On a

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "D\varphi(e)"] & \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

On a démontré que $\forall X \in \mathrm{Lie}(G)$

$$\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(D\varphi(e)X).$$

Sur $D\varphi(e) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$, on voudrait que ce soit un morphisme d'algèbre de Lie.

But :Montrons que dans la fonctionnalité, $D\varphi(e)$ est un morphisme d'algèbre de Lie.

Variétés : Prenons $\varphi : M \to N$ C^∞ un morphisme de variété. Soient $X \in \Gamma(M, TM)$ et $Y \in \Gamma(N, TN)$.

Définition 5.41. On dit que X et Y sont φ-liées si

$$Y(\varphi(m)) = D\varphi(m)X(m)$$

En terme de dérivation : pour $f \in C^\infty$

$$Y(f)(\varphi(m)) = Df(\varphi(m)).Y(\varphi(m)) = Df(\varphi(m))D\varphi(m)X(m) = D(f \circ \varphi)(m)X(m)$$

Proposition 5.42. *Soient $X_1, X_2 \in \Gamma(M, TM)$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(N, TN)$. Supposons que (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont $\varphi-$liés. Alors $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ sont $\varphi-$liés*

Démonstration. On veut montrer que $D\varphi(m).[X_1, X_2](m) = [Y_1, Y_2](\varphi(m))$. Utilisons les dérivations : pour $f \in C^\infty(N)$, on a :

$$\begin{aligned} D\varphi(m)[X_1, X_2](f) &= Df(\varphi(m))D\varphi(m)[X_1, X_2](m) = [X_1, X_2]_m(f \circ \varphi) \\ &= X_1(m)X_2(f \circ \varphi) - X_2(m)X_1(f \circ \varphi) \\ &= X_1(m)Y_2(f) \circ \varphi - X_2(m)Y(f) \circ \varphi \\ &= D\varphi(m).X_1(m).Y_2(f) - D\varphi(m)X_2(m)Y_1(f) \\ &= Y_1(\varphi(m))Y_2(f) - Y_2(\varphi(m))Y_1(f) = [Y_1, Y_2]_{\varphi(m)}(f). \end{aligned}$$

$\square$

On spécialise la proposition précédente aux groupe de Lie.

Proposition 5.43. *$\varphi : G \to H$, morphisme de groupes de Lie. Alors $D\varphi(e)$ est morphisme d'algèbre de Lie.*

Démonstration. Soient $X_1, X_2 \in {}^G\Gamma(G, TG)$. Définissons $Y_1(e) = D\varphi(e)X_1(e)$, $Y_2(e) = D\varphi(e)X_2(e)$. Considérons donc $Y_1, Y_2 \in {}^H\Gamma(H, TH)$.

Observation : (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) sont φ-liées.

En effet :

$$\begin{aligned} Y_1(\varphi(g)) &= DL_{\varphi(g)}(e)Y_1(e_H) \\ &= DL_{\varphi(g)}(e)D\varphi(e)X_1(e) \\ &= D(L_{\varphi(g)} \circ \varphi)(e)X_1(e) \\ &= D(\varphi \circ L_g)(e)X_1(e) \\ &= D\varphi(g)X(g). \end{aligned}$$

De même pour Y_2 et X_2. Alors par la proposition précédente, on a

$$D\varphi(e_G)[X_1, X_2](e_G) = [Y_1, Y_2]\underset{(e_G)}{\varphi\, e_H} = [D\varphi(e)X_1, D\varphi(e)X_2]$$

Ceci conclut que c'est un morphisme d'algèbre de Lie. Donc finalement :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] & H \\ \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "D\varphi(e)"] & \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

□

Etant donnée : $\varphi : G \to H$ implique que $D\varphi(e) : \mathrm{Lie}(G) = T_eG \to \mathrm{Lie}(H) = T_eH$.

1. $D\varphi(e)$ morphisme de $\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$.
2. $\varphi(\exp_G(X)) = \exp_H(D\varphi(e)X)$.

Question : Si $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbre de Lie. Est-ce qu'il existe $\varphi : G \to H$ morphisme de groupe de Lie tel que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$ et $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$, de plus $D\varphi(e) = \Phi$?

Théorème 5.44. *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes connexes. Soient* $\mathrm{Lie}(G)$ *et* $\mathrm{Lie}(G_2)$ *leur algèbre de Le et* $\Phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$ *morphisme. Alors*

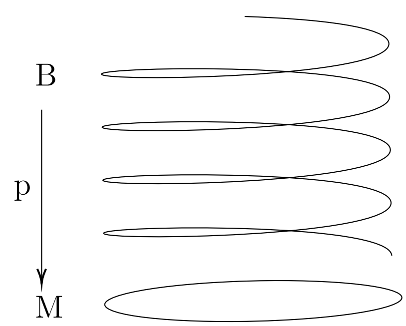
1. *Il existerait au plus un morphisme* $\sigma : G_1 \to G_2$ *tel que* $D\sigma(e) = \Phi$.
2. *Si* G_1 *est simplement connexe alors* $\exists!$ *morphisme* $\sigma : G_1 \to G_2$ *tel que* $D\sigma(e) = \Phi$.

6 Revêtement de groupes de Lie

6.1 Rappels sur les revêtements

Définition 6.1. Soit M une variété C^∞(resp. topologique). On dit que $(\mathcal{B}, p)$ est un revêtement de M si

1. $p : \mathcal{B} \to M$ C^∞(resp. continue) surjective où $\mathcal{B}$ est une variété telle que
2. $\forall x \in M$, $\exists V_x \subset M$ t.q. $p^{-1}(V_x) = \coprod_{i \in I} U_i$ où $(U_i)_{i \in I}$ ouverts de $\mathcal{B}$ et $p : U_i \to V_x$ est C^∞ difféo(resp. homéomorphisme).



Remarque 6.2. On peut aussi voir comme dans la cadre topologique : $\exists F$ discrète, $\exists \varphi_{V_x}$ homéomorphisme t.q. $\varphi_{V_x} : p^{-1}(V_x) \to V_x \times F$ avec $proj_{V_x} \circ \varphi_{V_x} = p$.

En particulière, si $M = V_x$ et $\mathcal{B} = V_x \times F$ est un revêtement trivial.

Exemple 6.3. 1. $: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est un revêtement et $F = \mathbb{Z}$.

2. $: \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ z & \longmapsto & z^n \end{array}$ est un revêtement. Exercice : trouver F ?

Définition 6.4. Un morphisme de revêtement est une application f C^∞(continue) avec $p_2 \circ f = p_1$.

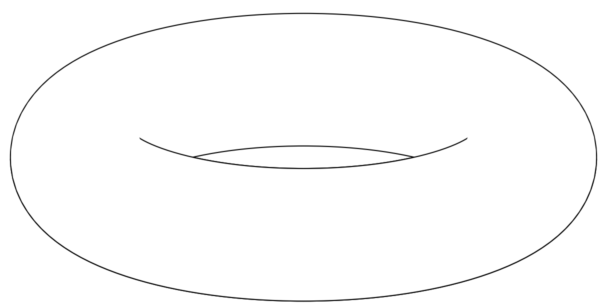
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Définition 6.5. Soit M une variété C^∞(topologique) et $x_0 \in M$, point choisi. Alors (M, x_0) une variété pointé : un lacet de (M, x_0) est une application $\gamma : [0,1] \to M$ C^∞(continue) avec $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$.

Définition 6.6 (Homotopie)**.** On dit que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ (γ_1 homotopie à γ_2) si $\exists h : [0,1] \times [0,1] \to M$ continue t.q. $h_t(s)$ où $h_0(s) = \gamma_1(s)$ et $h_1(s) = \gamma_2(s)$. $\forall t \in]0,1[$, $h_t(\cdot)$ est un lacet, c'est-à-dire $h_t(0) = h_t(1) = x_0$.

h_t déformation continue de lacet.

Exercice 6.7. Lacets non homotopes.Soient γ_1 le cercle horizontal de torus et γ_2 le cercle longitudinal. Alors γ_1 et γ_2 ne sont pas homotopes. On ne peut pas passer de γ_1 à γ_2 par une déformation continue de chemins !



Définition 6.8. $\Pi_1(M, x_0) := \{\text{lacets sur } (M, x_0)\}/\sim$. $\sim$: homotopie.

$\Pi_1(M, x_0)$ a une structure de groupe : composition des chemins : $\gamma_1 * \gamma_2(s)$.

Proposition 6.9. $(\Pi_1(M, x_0), *)$ *est un groupe.*

Démonstration. Idées pour la démonstration : avant tout il faut vérifier que si $\gamma_1 \sim \alpha_1$ et $\gamma_2 \sim \alpha_2$ alors $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \alpha_1 * \alpha_2$. L'élément neutre : $e = e(s) \equiv x_0$. Loi associative : $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) = (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ et $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1-s)$. □

Exercice 6.10. $\Pi_1(\mathbb{R}^2, x_0) = \{e\}$, $\Pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\Pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$, $\Pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) = \mathbb{Z}^2$

Définition 6.11. On dit que M est simplement connexe si $\Pi_1(M) = \{e\}$.

Remarque 6.12. Si M est connexe par arcs alors $\Pi_1(M, x_0) \simeq \Pi_1(M, x_1)$ est isomorphisme. Dans ce cas $\Pi_1(M, x_0) = \Pi_1(M)$.

Notion encore plus forte : Espace contractile.

Définition 6.13. $\exists f : [0,1] \times M \to M$ t.q. $f(1,0) = \mathrm{id}_M$ et $f(0,\cdot) \equiv m_0 \in M$ constant.

Alors M contrate en un point.

Exemple 6.14. M est un $\mathbb{R}$-e.v. f : $\begin{array}{ccc} [0,1] \times M & \longrightarrow & M \\ (t,v) & \longmapsto & tV \end{array}$ permet de montrer que M est contractile.

On a M contractile $\Rightarrow$ M connexe par arcs et M simplement connexe.

Théorème 6.15 (Admis)**.** *Soit M une variété connexe. Alors $\exists! \tilde{M}$ (à iso près) revêtement et $p : \tilde{M} \to M$ t.q. $\tilde{M}$ est simplement connxex.*

Théorème 6.16 (Relèvement des applications)**.** *Si $p : X \to B$ est un revêtement, pour tout espace topologique Y localement connexe par arcs et simplement connexe, pour toute application continue $f : Y \to B$, pour tous les $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $p(x) = f(y)$, il existe un et un seul relèvement $f : Y \to X$ de f tel que $f(y) = x$.*

En particulier si $X = \widetilde{B}$ le revêtement universel de B.

Proposition 6.17. *Si M est simplement connexe alors $\tilde{M}$ est trivial. (Revêtement $M \times F \to M$)*

Remarque 6.18 (hors programme)*.* Soit (X, d) est un espace métrique. Si $\Gamma < \mathrm{Iso}(X, d)$ groupe discrète d'isométries qui agit "proprement discrètement", alors $p : X \to X/\Gamma$ est un revêtement.

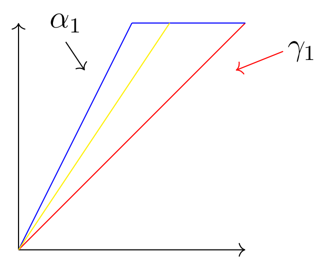
6.2 Revêtement de groupes de Lie

Proposition 6.19. *Si G est un groupe de Lie, alors $\Pi_1(G, e)$ est commutatif.*

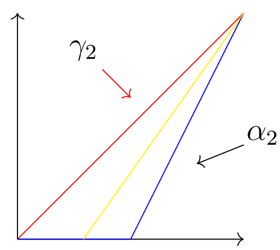
Démonstration. Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to G$ deux lacets dans G. Considérons $\gamma(s) = \gamma_1(s)\gamma_2(s)$.

D'abord on démonte que $\gamma \simeq \gamma_1 * \gamma_2$. En effet, on définit $\alpha_1(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ e_G & \end{cases}$.

Alors on a $\alpha_1 \sim \gamma_1$ où $h^{(1)} : [0,1]\times[0,1] \to G$ est donné par $h_t^{(1)}(s) = \begin{cases} \gamma_1(\frac{s}{1-\frac{t}{2}}) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e_G & \end{cases}$.



De même, on définit $\alpha_2(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \\ e_G & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ et on obtient $\alpha_2 \sim \gamma_2$ qui est assuré par $h_t^{(2)}(s) = \begin{cases} \gamma_2((t+1)(s-1)+1) & 1 - \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1 \\ e & s \leq 1 - \frac{1}{1+t} \end{cases}$.



Donc, on en déduit que $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \sim \alpha_1 \cdot \alpha_2$ en effet $h_t(s) = h_t^{(1)}(s)h_t^{(2)}(s)$. Il s'en suit que

$$[\gamma] = [\gamma_1 \cdot \gamma_2] = [\alpha_1 \cdot \alpha_2] = [\alpha_1 * \alpha_2] = [\alpha_1] * [\alpha_2] = [\gamma_1] * [\gamma_2].$$

On en déduit que $[\gamma^{-1}] = [\gamma]^{-1}$. Considérons alors

$$h(t,s) = \gamma_2(st)\gamma_1(s)\gamma_2^{-1}(st)$$

qui vérifie $h(0,s) = \gamma_1(s)$ et $h(1,s) = \gamma_2(s)\gamma_1(s)\gamma_2^{-1}(s)$. Donc on a $[\gamma_1] = [\gamma_2\gamma_1\gamma_2^{-1}] = [\gamma_2][\gamma_1][\gamma_2]^{-1}$ qui conclut que $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_2][\gamma_1]$. □

Théorème 6.20 (Caractérisation d'un revêtement de groupe de Lie)**.** *Soit $p : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie avec G et H connexes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *p est un revêtement.*
2. *p est surjective et $\ker p < Z(G)$ est discret.*

3. *$Dp(e_G)$ est un isomorphisme.*

Remarque 6.21. En d'autres termes : les revêtements d'un groupe de Lie, se décrivent comme $G = \tilde{H}$ vérifiant

$$\ker p \hookrightarrow G \xrightarrow{p} H$$

où $\ker p$ est un sous-groupe distingué de $\tilde{H}$ et est discret. Donc on a aussi un isomorphisme de groupe suivant :

$$H \simeq \tilde{H}/\ker p\,.$$

Remarque 6.22. Dans le cas où $\tilde{H}$ est le revetement universel de H, on a

$$\tilde{H}/\pi_1(H,e) \simeq H$$

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $V_{e_H} \subset H$ un voisinage ouvert de H. Ecrivons $p^{-1}(V_{e_H}) = \coprod_{i\in I} U_i$, U_i ouvert de G. Donc $\exists! i_0$ t.q. $e_G \in U_{i_0}$. Or d'après la définition d'un revêtement $p|_{U_{i_0}} : U_{i_0} \to V_{e_H}$ est un difféo. Donc $\ker p \cap U_{i_0} = \{e_G\}$. Alors $\ker p$ est discret(tous les points de $\ker p$ sont isolés).

Montrons que $\ker p \subset Z(G)$: Prenons $x \in \ker p$. Considérons $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \ker p \\ g & \longmapsto & gxg^{-1} \end{array}$. Alors $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker p$ qui est discret, comme G connxe et φ continue. Donc $\operatorname{Im}\varphi$ est connexe dans $\ker p$ discret. Alors on a $\operatorname{Im}\varphi = \{x\}$ qui nous dit que $gx = xg$ pour tout $g \in G$. Donc $x \in Z(G)$ et donc $\ker p$ est distingué.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Montrons que $Dp(e_G)$ est un isomorphisme.

1. $Dp(e_G)$ est injective : Par l'absurde si $\ker Dp(e_G) \neq \{0\} \Rightarrow D \subset \ker Dp(e_G)$, D une certaine droite vectorielle.

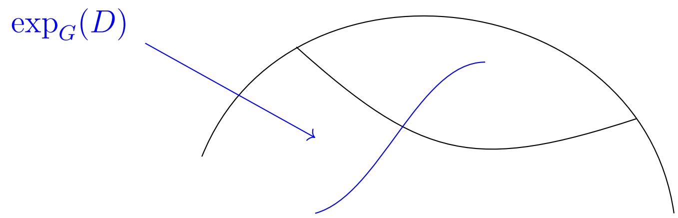
   Utilisons la fonctorialité !

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] & H \\ \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "Dp(e)"] & \mathrm{Lie}(H) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

   Si $x \in D$, alors $\exp_H(Dp(e)x) = p(\exp_G(x)) = e_H$. Alors

$$\exp_G(D) \subset \ker p$$

   Mais $\ker p$ est discret et $\exp_G(D)$ est un courbe non constants. Donc $Dp(e_G)$ est injective.



2. Surjectivité : H étant connexe, $H =< \exp_H(V_0) >$ où V_0 voisinage de $\operatorname{Lie} H$ de 0. On pose $V_{e_H} = \exp_H(V_0)$. Comme par hypothèse p est surjective, il existe $U_{e_G} \subset G$ t.q. $p(U_{e_G}) \supset V_{e_H}$. Quitte à changer V_{e_H} et U_{e_G} on peut supposer qu'il exsite $W_0 \subset \operatorname{Lie}(G)$ assez petit de 0 t.q.

$$\exp_G : W_0 \to U_{e_G}$$

est un C^∞ difféo.

On a alors : $\forall v \in V_{e_H}, \exists u \in U_{e_G}$ t.q. $p(u) = v. \Rightarrow \forall v \in V_{e_H}, \exists x \in W_0$ t.q. $p(\exp_G(x)) = v. \Rightarrow \forall v \in V_{e_H}, \exists x \in W_0$ t.q. $\exp_H(Dp(e)x) = v$.

Or

$$H =< \exp_H(V_{0_{\operatorname{Lie}(H)}}) >=< \exp_H(Dp(e)W_0) >=< \exp_H(Dp(e)\mathfrak{g}) > .$$

Ici on a $Dp(e)\mathfrak{g} \subset \operatorname{Lie}(H)$ et H est connexe. Donc H est uniquement déterminé par $\operatorname{Lie}(H)$. Alors on a

$$\operatorname{Lie}(H) = Dp(e)\mathfrak{g}$$

Donc $Dp(e)$ est surjective ! Ainsi $Dp(e) : \operatorname{Lie}(G) \to \operatorname{Lie}(H)$ est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Prenons $W_0 \subset \operatorname{Lie}(G)$ voisinage assez petit tel que $\exp_G : W_0 \to \exp_G(W_0)$ est difféo. On a

$$\begin{aligned} & p(\exp_G(W_0)) = \exp_G(Dp(e)W_0) \\ \Rightarrow\quad & p \circ \exp_G = \exp_G \circ Dp(e) \quad \text{sur} W_0. \\ \Rightarrow\quad & p = \exp_G \circ Dp(e) \exp_G^{-1} \quad \text{sur} \exp_G(W_0). \end{aligned}$$

Alors p est un difféo local de $U_{e_G} \to V_{e_H} \subset H$.

On en déduit que $\ker p \cap U_{e_G} = \{e_G\}$ car p difféo. Donc $\ker p$ est discret. Il s'en suite que

$$p^{-1}(V_{e_H}) = \coprod_{x \in \ker p} U_{e_G} x.$$

De plus par H est connexe $H = \bigcup_{n\geq 0} V_{e_H}^n = \bigcup_{n \geq 0} p(U_{e_H}^n)$. Donc p est surjective. Alors $p : G \to H$ est bien un revêtement. □

Exemples 6.23. 1. $SU(2)$ est un revêtement universel de $SO(3)$ puisque $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ est simplement connexe.

2. Comprendre revêtements universels de $SL_2(\mathbb{R})$.

Théorème 6.24. *Soient G_1 et G_2 deux groupe de Lie connexes et $\Phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$. Alors on a*

Unicité *Il existe au plus un $\varphi : G_1 \to G_2$ t.q. $D\varphi(e) = \Phi$. Plus précisément si on a l'existence alors on obtient unicité immédiatement et*

$$\mathrm{Lie}(\ker \varphi) = \ker D\varphi(e) = \ker \Phi.$$

Existence *Si G simplement connexe alors $\exists! \varphi : G_1 \to G_2$ morphisme de groupe de Lie tel que $D\varphi(e) = \Phi$.*

Démonstration. Considérons $G_1 \times G_2 = G$. Alors $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(G_1) \oplus \mathrm{Lie}(G_2)$ et $Graphe(\Phi) = \{(x, \Phi(x)), x \in \mathrm{Lie}(G)\} \subset \mathrm{Lie}(G)$ a une structure d'algèbre de Lie suivant.

$$[(x_1, \Phi(x_1)), (x_2, \Phi(x_2))] = ([x_1, x_2], [\Phi(x_1), \Phi(x_2)]) = ([x_1, x_2], \Phi([x_1, x_2])).$$

Donc $Graphe(\Phi)$ est un sous algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}(G)$ on le note $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(G)$. Alors $\exists! H$ connexe t.q. $H = \exp(\mathfrak{h})$ où H est un sous-groupe de Lie de G et $\tau : H \hookrightarrow G$ une immersion injective. On trouve que $D\tau(e) = (\mathrm{id}, \Phi)$.

Unicité Si $\varphi : G_1 \to G_2$ et $D\varphi(e) = \Phi$ considérons $\overline{\varphi} : \begin{array}{ccc} G_1 & \longrightarrow & G_1 \times G_2 \\ x & \longmapsto & (x, \varphi(x)) \end{array}$, alors sa dérivation $D\overline{\varphi}(e) = (\mathrm{id}_{\mathrm{Lie}(G)}, \Phi) = D\tau(e)$. $\Rightarrow \overline{\varphi} : G_1 \to G_1 \times G_2$ une immersion injection et $\mathrm{Lie}\,\overline{\varphi}(G_1) = \mathfrak{h}$. Parce que G_1 et H sont sous groupes de Lie avec la même l'algèbre de Lie, alors $G_1 \simeq H$. De plus il existe $\psi : G_1 \xrightarrow{iso} H$ t.q. $\tau \circ \psi = \overline{\varphi}$.

Montrons : $\ker \varphi$ est un sous-groupe de Lie de G_1 et $\mathrm{Lie}(\ker \varphi) = \ker \Phi$.

On a $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{e_{G_2}\})$. On rappelle que $\varphi \circ L_g = L_{\varphi(g)}$ et

$$D\varphi(g) \circ DL_g(e) = DL_{\varphi(g)}(e) \circ D\varphi(e).$$

Puisque $DLg(e)$ et $DL_{\varphi(g)}(e)$ sont inversibles, on sait que $Rg(D\varphi(g))$ est constant $\forall g \in G$. Donc $\ker\varphi$ est un sous groupe de Lie de G_1 de dimension $= \dim \mathrm{Lie}(G_1) - \mathrm{rang}(D\varphi(e))$ et $\mathrm{Lie}(\ker\varphi) \subset \ker D\varphi(e)$. (car $\varphi(\exp_{G_1}(X)) = \exp_{G_2}(D\varphi(e)X)$). Alors on a

$$\dim \mathrm{Lie}(\ker\varphi) = \dim\ker D\varphi(e).$$

Ceci conclut que

$$\mathrm{Lie}(\ker\varphi) = \ker D\varphi(e).$$

Existence Construisons φ lorsque on suppose G_1 simplement connexe. On a $p_1 : G_1 \times G_2 \to G_1$. Posons $\Pi = p \circ \tau : H \to G_1$. Alors on a

$$D\Pi(e) = Dp_1(\tau(e))D\tau(e) = p_1 \circ D\tau(e) = p_1 \circ (id_{\mathrm{Lie}(G)}, \Phi) = id_{\mathrm{Lie}(G)}.$$

Donc Π est un difféo au voisinage de e_H. $\Pi : U_{e_H} \to V_{e_{G_1}} \subset G$ un difféo. Par connexité, on a $\Pi(H) = G_1$.

Et donc $\Pi : H \to G$ est un revêtement. Or G_1 simplement connexe donc Π est un homéomorphisme (en fait un difféo car $D\Pi(e) = \mathrm{id}$).

$$\begin{tikzcd}
Graphe(\Phi) \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & H \arrow[d, hook, "\tau"] \\
\mathrm{Lie}(G_1) \times \mathrm{Lie}(G_2) & G_1 \times G_2
\end{tikzcd}$$

$$\Pi : H \xrightarrow{\tau} G_1 \times G_2 \xrightarrow{p_1} G_1, \quad \Pi = p_1 \circ \tau.$$

Alors Π est un difféo sur tout H. Posons $\varphi = p_2 \circ \tau \circ \Pi^{-1} : G_1 \to G_2$ où $p_2 : G_1 \times G_2 \to G_2$. On a que $D\varphi(e) = \Phi$ (et $D\Pi(e) : \mathrm{Lie}(H) \to \mathrm{Lie}(G_1)$). Ainsi φ est défini de manière unique. $\square$

6.3 Application aux représentations

Rappels sur les théorèmes fondamentaux (théorèmes de Lie)

Théorème 6.25. *Si G est un groupe de Lie, soit* $\mathrm{Lie}(G)$ *l'algèbre de Lie de G. Il y a une bijection entre sous groupe connexes H et sous algèbres de Lie* $\mathfrak{h} \subset \mathrm{Lie}(G)$.

Théorème 6.26. *Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie tels que G_1 connexe et simplement connexe. Alors on a la correspondance de morphismes de groupe de Lie et morphismes d'algèbre de Lie.*

$$\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(G_1), \mathrm{Lie}(G_2)).$$

Autrement dit :

- *Pour $\varphi : G_1 \to G_2$, alors $D\varphi(e) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Lie}(G_1), \mathrm{Lie}(G_2))$.*
- *Pour $\Phi : \mathrm{Lie}(G_1) \to \mathrm{Lie}(G_2)$, alors il existe unique $\varphi : G_1 \to G_2$ t.q. $D\varphi(e) = \Phi$.*

Remarque 6.27. Il y a un 3ème théorème de Lie qui est le suivant :

Théorème 6.28. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle ou complexe de dimension finie. Alors il existe un groupe de Lie G telle que* $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$.

Structure réelle et complexe Comme on va s'intéresser aux représentations, il se trouve que lorsqu'on considère des représentations sur un $\mathbb{C}$-ev, la théorème est plus satisfaisant. Une représentation de G(un groupe de Lie) est la donnée de $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ un morphisme de groupe de Lie, dans ce cas là $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ est un groupe de Lie.

Pour l'instant on va s'intéresser aux représentations de dimensions finies.

Lemme 6.29. *Pour $n = \dim V$, on a*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$$

On a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie réel.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, soient $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$. Soit J la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui désigne par : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & iz \end{array}$, multiplication par i. Alors $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ écrit dans $\mathcal{B}$ alors $MJ = JM$.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), MJ = JM\} = \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}.$$

C'est une sous-variété réelle de dimension $2n^2$.

Son algèbre de Lie est

$$M_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}), XJ = JX\} = \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, A, B \in M_n(\mathbb{R})\}.$$

□

Structure complexe des algèbres de Lie réelles Si on considère une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, alors sa complexification s'écrit $\mathfrak{g}_\mathbb{R} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C} = \mathfrak{g}_\mathbb{R} \oplus i\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ avec le crochet de Lie suivant.

$$[x + iy, x' + iy']_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}} = ([x, x']_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}} - [y, y']_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}) \oplus i([y, x']_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}} + [x, y']_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}).$$

Exercice 6.30.

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) \bigoplus iM_n(\mathbb{R}) &\simeq M_n(\mathbb{C}) \\ A \oplus iB &\longmapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lemme 6.31. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle et soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ sa complexification. Si*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$$

est une représentation de $\mathfrak{g}$ complexe, alors il existe une unique structure de représentation complexe de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. On la note $\rho_\mathbb{C}$.

Autrement dit : se donner un représentation de $\mathfrak{g}$ complexe c'est la même chose que se donner un représentation complexe de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathrm{Rep}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \\ \rho &\rightsquigarrow \rho_\mathbb{C} \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V) = \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$. On l'étend à $\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$ par $\rho(x \oplus iy) :=$

$\rho(x) + i\rho(y)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. Vérifier que ρ est $\mathbb{C}$ linéaire et que

$$[\rho(a), \rho(b)]_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)} = \rho([a, b]_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}).$$

□

Théorème 6.32. *Si G est connexe, simplement connexe, alors*

$$\begin{array}{rccc} \rho_* : & Rep(G) & \longrightarrow & Rep(\mathrm{Lie}(G)) \\ & \rho & \longmapsto & D\rho(e) \end{array}$$

est une bijection. ou mieux : c'est une équivalence de catégories !

Remarque 6.33. conséquences de théorème 6.26 de Lie.

Démonstration. **Injectivité** Si $\rho, \rho' : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $D\rho_{\mathbb{C}}(e) = D\rho'_{\mathbb{C}}(e)$ sur s$\mathbb{C}$. Alors $D\rho(e) = D\rho'(e)$ en tant que morphisme de $Lie(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors il existe au plus $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ t.q. $D\rho(e) = D\rho'(e)$. $\Rightarrow \rho = \rho'$.

Surjectivité Soit $\Phi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On peut la restreindre dans la partie réelle de $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}_{\mathbb{R}}(G) \oplus i\,\mathrm{Lie}_{\mathbb{R}}(G)$, on a $\Phi : \mathrm{Lie}_{\mathbb{R}}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors $\exists! \varphi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ t.q. $D\varphi(e) = \Phi$.

□

7 Théorie des représentations des algèbres de Lie

7.1 Rappels sur les représentations

On dit que $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ ou $\rho : \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est une représentation de groupe de Lie ou algèbre de Lie sur V de dimension finie, $\mathbb{C}$-espace vectoriel si ρ est un homomorphisme.

Remarque 7.1. Pour une représentation d'algèbre de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, il faut satisfaire que ρ est linéaire, morphisme d'algèbre et de plus

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]_{\mathrm{End}} = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

Opération sur représentations, définitions

1. Sous représentation : $W \subset V$ est une sous-représentation ssi $\rho(g)W \subset W$, $\forall g \in G$ ou $\rho(x)W \subset W$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

   Exercice 7.2 (Observation)**.** Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, $D\rho(e) : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors W stable par ρ ssi W stable par $D\rho(e)$.

2. Représentation quotient : si W stable par ρ alors on peut considérer le représentation quotient $\overline{\rho} : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}({}^{V}\!/\!_{W})$ où $\overline{\rho}(g)(v+W) = \rho(g)v + W$.
3. Somme direct opérations sur les représentations des groupes et algebres : Soit (ρ, V) et (σ, W) deux représentations, alors somme direct

$$(\rho \oplus \sigma)(g).v \oplus w = \rho(g)v \oplus \sigma(g)w$$

4. Produit tensoriel : il est différent pour le groupe de Lie et l'algèbre de Lie.
   — pour G un groupe deLie, on a naturellement

$$(\rho \otimes \sigma)(g).v \otimes w = \rho(g)v \oplus \sigma(g)w.$$

   — Pour $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{g}$

$$(\rho \otimes \sigma)(X).v \otimes w = \rho(X)v \oplus w + v \otimes \sigma(X)w$$

   Preuve pour le cas Lie(G)*.* On a $(\rho \circ \gamma)'(0) = D\rho(e)\gamma'(0) = D\rho(e)X$ pour un chemin qui vérifie $\begin{cases} \gamma(0) = e \\ \gamma'(0) = X \in \mathrm{Lie}(G) \end{cases}$. Alors on peut obtenir

$$\begin{aligned} D\rho(e)(X)(v \otimes w) &= (\rho \circ \gamma)'(0)(v \otimes w) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \rho \circ \gamma(t)v \otimes \rho \circ \gamma(t)w \\ &= (rho \circ \gamma)'(0)v \otimes (\rho \circ \gamma)(0)w + (\rho \circ \gamma)(0)v \otimes (\rho \circ \gamma)'(0)w \\ &= (D\rho(e)X)v \otimes w + v \otimes (D\rho(e)X)w. \end{aligned}$$

   □

5. Représentation contragradiente(Représentation duale) : D'abord on considère le groupe de Lie. si $\rho : G \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ une représentation, on veut définir une représentation canonique sur V^*. Soit un élément de V^* sera noté $< \cdot, v >= v^*$.

On désigne $\tilde{\rho}$ une représentation contregradients qui vérifie

$$< \rho(g)v, \tilde{\rho}(g)w >= (\tilde{\rho}(g)w)^*(\rho(g)v) = w^*(v) =< v, w > .$$

Donc on a

$$\tilde{\rho}(g) = {}^t\rho(g^{-1}).$$

Ensuite, pour l'algèbre de Lie : On pose encore $\begin{cases} \gamma(0) = e \\ \gamma'(0) = X \end{cases}$, considérer $\frac{d}{dt}|_{t=0}\rho \circ \gamma(t)$.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|_{t=0} < \rho \circ \gamma(t)v, \tilde{\rho} \circ \gamma(t)w >=< v, w > \\ \Rightarrow &< D\rho(e)Xv, w > + < v, D\tilde{\rho}(e)Xw >= 0 \\ \Rightarrow &D\tilde{\rho}(e).X = -{}^t(D\rho(e)X). \end{aligned}$$

7.2 Irréductibilité

Notion identique par groupes de Lie, algèbres de Lie.

Définition 7.3. $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ ou $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ est semi-simple si $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ où chaque V_i est irréductible. c'est-à-dire que V se décompose en irréductible.

Exercice 7.4. Si G est fini. Alors toute représentation est semi-simple.

Définition 7.5. Deux représentations (ρ, V) et (σ, W) sont isomorphes s'il existe $I : V \to W$ inversible t.q.

$$\sigma(g) \circ I(v) = I \circ \rho(g)v, \quad \forall v \in V, g \in G.$$

De même pour l'algèbre de Lie.

Ici, on appelle I un entrelaceur(交织).

On désigne $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$) l'ensemble des entrelaceurs $V \to W$.

Questions concernantes G et $\mathrm{Lie}(G)$

1. Classifier les représentations de G et $\mathrm{Lie}(G)$.
2. Étant donné V, écrire $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ en somme direct.

3. Pour quel groupe G, tous les représentations sont semi-simple ?

Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $A : V \to V$ t.q. $A\rho(g) = \rho(g)A$. Soit λ une valeur propre de A, alors V_λ, le sous espace propre associé à A, est une sous représentation de ρ.

Ainsi si A est diagonalisable, alors $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} V_\lambda$ et V est semi-simple.

Lemme 7.6 (lemme de Schur)**.** *On énonce le lemme de Schur au cas de représentation de groupe de Lie mais c'est pareil pour l'algèbre de Lie.*

1. *Si (ρ, V) est irréductible alors $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}$. C'est-à-dire que si $A\rho(g) = \rho(g)A$, $\forall g \in G$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $A = \lambda \cdot \mathrm{id}$.*
2. *Si V et W sont irréductibles et non isomorphes, alors $\mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$.*

Proposition 7.7. *Si G est commutatif (Resp. $\mathfrak{g}$ est commutative) alors toute représentation irréductible est de dimension 1.*

Vous avez vu que toutes représentations de G groupe fini est semi-simple. Il en est de même pour les groupes compacts. Si (ρ, V) est une représentation de G compact alors $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ où les V_i sont de dimension finie.

7.3 Représentations de $\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))$

Classification des représentations irréductibles complexes de dimension finie

Théorème 7.8. *Toute représentation de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$ est semi-simple.*

Démonstration.

1. On a que $\mathrm{Lie}(SU(2)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))$. Donc
$$\mathrm{Rep}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Lie}(SU(2))) = \mathrm{Rep}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))).$$
2. $SU(2)$ est connexe, simplement connexe et compact. A l'aide du théorème d'équivalence des catégories(cf. Thm 6.32) :
$$\mathrm{Rep}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))) = \mathrm{Rep}_G(SU(2)).$$
3. Or $SU(2)$ compact, donc toute représentation est semi-simple. Donc toute représentation de $SL_2(\mathbb{C})$ est semi-simple.

□

On se propose de classifier les représentations de dimension finie.

Rappel 7.9. *On a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{Vect}(e, f, h)$ *où*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$[h, f] = -2f, \quad [h, e] = 2e, \quad [e, f] = h.$$

Se donner une représentation $\rho : \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{End}(V)$ *d'algèbre de Lie. C'est pareil la même chose que se donner un* $\mathfrak{g}$*-module* V*. En effet une représentation* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *sur* V *donne une structure de* $\mathfrak{g}$ *module à* V *par* $x.v := \rho(x)v$ *pour* $x \in \mathfrak{g}, v \in V$*.*

Alors on peut vérifier $0.v = \rho(0)v = v$, $(x + y).v = \rho(x + y)v = \rho(x)v + \rho(y)v = x.v + y.v$ *et* $[x, y].v = \rho([x, y])v = [\rho(x), \rho(y)]v = \rho(x)\rho(y)v - \rho(y)\rho(x)v = xyv - yxv$

On notera pour $x \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\rho(x)v = x.v$ ou même xv.

Définition 7.10. Soit V une représentation de $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$. Un vecteur $v \in V$ est de **poids** $\lambda \in \mathbb{C}$ si $h.v = \lambda v$.

On note $V_\lambda = \{v \in V, v \text{ a un poids } \lambda\}$.

Lemme 7.11. *On a*

$$eV_\lambda \subset V_{\lambda+2}, \quad fV_\lambda \subset V_{\lambda-2}$$

.

Démonstration. Soit $v \in V_\lambda$. Considérons $e.v \in V$ et $f.v \in V$.

$$h.(e.v) = ([h, e] + eh).v = 2e.v + eh.v = (2 + \lambda)e.v.$$

Donc $e.v \in V_{\lambda+2}$.

Et de même :

$$h.(f.v) = ([h, f] + fh).v = -2f.v + fh.v = (-2 + \lambda)f.v.$$

Donc $f.v \in V_{\lambda-2}$. □

Proposition 7.12. *Soit* $\rho : \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \to \mathrm{End}(V)$ *une représentation, alors* V *est un module sur* $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ *de dimension finie qui se décompose*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Sp(h)} V_\lambda.$$

où $Sp(h)$ *spectre de* h*, c'est l'ensemble des valeurs propres de* $\rho(h) \in \mathrm{End}(V)$*.*

Démonstration. On sait que toutr représentation V se décompose en somme de représentation irréductible de dim finie. Il suffit de prouver la proposition pour V irréductible.

Considérons $V' = \sum_{\lambda \in Sp(h)} V_\lambda$. On a de plus que si $\lambda \neq \mu$ alors $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$. Ainsi V' se réécrit comme somme direct $V' = \bigoplus_{\lambda \in Sp(h)} V_\lambda$.

Mais par le lemme 7.11 on sait que e, f, h préserve V'. Donc V' est une sous représentation de V, donc $V' = V$ car V est irréductible.

□

Définition 7.13. On dit que λ est de plus haut poids s'il est maximal au sens où $Re(\lambda) \geq Re(\mu)$ pour $\forall \mu$ une autre poids.

Lemme 7.14. *Soit* $v \in V_\lambda$ *de poids maximal. Alors on a :*

1. $e.v = 0$.
2. *Définissons* $v^k = \frac{1}{k!} f^k.v \in V$*. Alors*

$$\begin{cases} h.v^k = (\lambda - 2k).v^k \\ f.v^k = (k+1)v^{k+1} \\ e.v^k = (\lambda - k + 1)v^{k-1} \end{cases}$$

Démonstration. Pour 1 : soit $v \in V_\lambda$ de poids maximal. Alors $e.v \in V_{\lambda+2}$ et in a un vecteur de poids plus grand que λ! Ce n'est pas possible car λ poids maximal. Donc $e.v = 0$.

Pour 2 : $h.v = (\lambda - 2).v$ pour $k = 1$ (lemme 7.11). Ensuite on le démontre par récurrence, s'il est vraie pour k, alors

$$\begin{aligned} h.v^{k+1} &= \frac{1}{k+1}(h.f).v^k = (fh - 2f).v^k \\ &= \frac{1}{k+1} f.(\lambda - 2k)v^k - \frac{2}{k+1} f.v^k = (\lambda - 2k - 2)v^{k+1} \end{aligned}$$

Montrons $ev^k = (\lambda - k + 1)v^{k-1}$: Pareillement, on le démontre par récurrence sur k, s'il est varie pour k, alors

$$\begin{aligned} ev^{k+1} &= \frac{1}{k+1}(ef)v^k = \frac{1}{k+1}(fe+h)v^k = \frac{1}{k+1}fev^k + \frac{1}{k+1}hv^k \\ &= f\frac{\lambda-k+1}{k+1}v^{k-1} + \frac{\lambda-2k}{k+1}v^k = (\lambda-k+1)\frac{k}{k+1}v^k + \frac{\lambda-2k}{k+1}v^k = (\lambda-k)v^k. \end{aligned}$$

L'idée : prendre $v \in V$ de plus haut poids de h. Donc Vect$\{f^k v, k \in \mathbb{N}\}$ une base qui permet de construire des représentations irréductibles.

□

Observation : $\{v^k, k \in \mathbb{N}\}$ libre. En effet les v^k seront des vecteurs propres de h associés aux valeurs propres $\lambda - 2k$.

On se donne V une représentation de dimension finie de Lie$(SL_2(\mathbb{C}))$. Soit λ plus haut poids et $v \in V_\lambda$ associé, c'est-à-dire que $h.v = \lambda v$.

Étudions $M_\lambda = \text{Vect}\{v^0, v^1, \cdots, v^k, \cdots\}$. Pour cela considérons un vecteur $v \in V$ pas forcement de dimension finie. Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} h.v^k &= (\lambda - 2k)v^k \\ f.v^k &= (k+1)v^{k+1} \\ e.v^k &= (\lambda - k + 1)v^{k-1} \end{aligned}$$

Alors

1. M_λ est une représentation de Lie$(SL_2(\mathbb{C}))$.
2. Toute V de dimension finie contenant V_λ où λ plus haut poids s'écrit $V = {}^{M_\lambda}/_{W}$ où W sous représentation de M_λ de Lie $SL_2(\mathbb{C})$.

Démonstration. Lie$(SL_2(\mathbb{C})) = \text{Vect}\{e, f, h\}$. Par hypothèses : $e.v, f.v, h.v \in M_\lambda$, $\forall v \in M_\lambda$ et de plus $[h,f].v, [h,e].v, [e,f].v \in M_\lambda$. Donc M_λ est bien une représentation.

Ensuite il suffit de vérifier que $[e,f]v^k = e.(f.v^k) - f.(e.v^k)$:

$$[e,f]v^k = (ef - fe).v^k = h.v^k = (\lambda - 2k)v^k$$

et

$$\begin{aligned} e.(f.v^k) - f.(e.v^k) &= e((k+1)v^{k+1}) - f(\lambda - k + 1)v^{k-1} \\ &= (\lambda - k+1)(k+1)v^k - k(\lambda - k + 1)v^k = (\lambda - 2k).v^k. \end{aligned}$$

On a bien une représentation d'algèbre de Lie.

Ensuite, $\begin{array}{rccc} \varphi : & M_\lambda & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & v \end{array}$ Si $\dim V$ est finie alors il existe n t.q. $v^k = 0$, $\forall k \geq n$, $v^{n-1} \neq 0$.

Ainsi $V = \mathrm{Vect}\{v^0, \cdots, v^{n-1}\}$ et $V \simeq {}^{M_\lambda}/_{\ker \varphi}$ où $\ker\varphi$ est une sous représentation. $\square$

Théorème 7.15. *Définissons* $V_n = \mathrm{Vect}\{v^0, v^1, \cdots, v^n\}$*,* $\dim V_n = n+1$ *et on suppose*

$$\begin{cases} h.v^k = (n-2k)v^k \\ f.v^k = (k+1)v^{k+1} \text{ si } k < n, \quad f.v^k = 0 \text{ sinon} \\ e.v^k = (n-k+1)v^{k-1}, \qquad ev^0 = 0 \end{cases}$$

Alors

1. V_n *est une représentions irréductible de* $\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))$*.*
2. $V_n \not\simeq V_m$ *non isomorphes pour* $m \neq n$*.*
3. *Si* V *est irréductible et de dimension finie alors* $V \simeq V_n$ *pour un certain* n*.*

Démonstration. 1. Considérons $M_\lambda = \mathrm{Vect}\{v^0, v^1, \cdots\}$.

Si $\lambda = n$, considérons alors on pose $M' = \mathrm{Vect}\{v^{n+1}, v^{n+2}, \cdots\} \subset M_\lambda$. En fait M' est une sous représentation de M_λ d'après les relations : pour $v^k \in M' \subset M_\lambda$ on a

$$\begin{aligned} &h.v^k = (n-2k)v^k \in M' \\ &e.v^k = 0 \text{ si } k = n+1, \text{ et } \quad e.v^k \in \mathrm{Vect}(v^{k-1}) \subset M' \text{ si } k > n+1 \\ &f.v^k \in M' \end{aligned}$$

De plus ${}^{M_n}/_{M'}$ de dimension finie et isomorphe à $\mathrm{Vect}\{v^0, \cdots, v^n\}$.

Vérifions que V_n est irréductible : chaque v^i pour $0 \leq i \leq n$ est cyclique au sens où $\rho(\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C})))v^i = V_n$ car e, f, h permettent de récupérer tous les v^k pour $0 \leq k \leq n$.

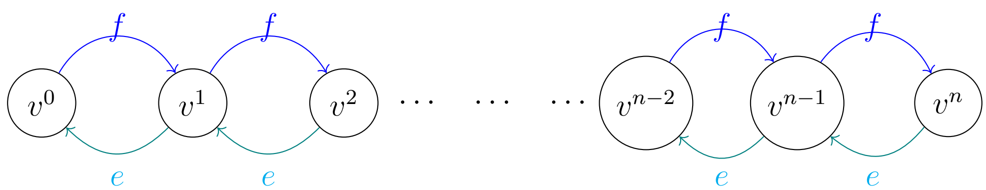
2. V_n et V_m ne sont pas isomorphes car $\dim V_n \neq \dim V_m$.

3. Soit V irréductible de dimension $n+1$. Soit $v \in V_\lambda$ un vecteur de plus haut poids (il existe toujours car on travaille sur $\mathbb{C}$) Alors l'espace $\mathrm{Vect}\{v^0, \cdots, v^k, \cdots\}$ est de dimension finie. Soit $n = \max\{i, v^i \neq 0 \ et \ v^{i+1} = 0\}$, chaque v^i vecteur propre de n, donc $\{v^0, \cdots, v^n\}$ est une base de V.

Montrons que λ est entier : on a $ev^{n+1} = 0$ par définition de n, mais $ev^{n+1} = (\lambda - n)v^n$ car $v \in V_\lambda$ de plus haut poids. Donc $\lambda = n$.

□

Transcription des représentations : $V_n = \mathrm{Vect}\{v^0, \cdots, v^n\}$.



On a avait classifié les représentations irréductibles de $\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C})) = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}(SU(2))$.

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ = algèbre de dimension 3 engendré par $\{e, f, h\}$ avec $[e, f] = h$ et $[h, e] = 2e$ et $[h, f] = -2f$.

7.4 L'algèbre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Réalisation concrète des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$: $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Considérons $A = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$, $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini. Soit

$$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) = \{D : A \to A, \ \text{linéaire t.q. } D(ab) = aD(b) + D(a)b\} \tag{7.1}$$

Observation : $D(1) = 0$, $D(\mathbb{C}.1) = 0$.

$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ algèbre de Lie. En fait $(\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A), [,])$ est une algèbre de Lie.

$$[f, g] := [f, g]_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)} = f \circ g - g \circ f$$

vérifier que $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ verifie 7.1 .

Exemples de dérivation sur $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$: $\partial_i : P \mapsto \frac{\partial P}{\partial X_i}$.

Proposition 7.16. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A) & \longrightarrow & A^n \\ & D & \longmapsto & (D(X_1), \cdots, D(X_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme de A-module. Ainsi $(\partial_i)_{i=1,\cdots,n}$ *est une base de* $Der_{\mathbb{C}}(A)$ *et* $\forall D \in Der_{\mathbb{C}}(A)$, $\exists!(P_1, \cdots, P_n) \in A^n$ *tel que*

$$D = P_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + \cdots + P_n \frac{\partial}{\partial X_n}.$$

Démonstration. Exo □

Définition 7.17. L'anneau des opérateurs différentiels de $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ est le sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ qui est engendré par $X_1, \cdots, X_n, \partial_1, \cdots, \partial_n$. Autrement dit on va le noter

$$\mathrm{Diff}(A) = \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n, \partial_1, \cdots, \partial_n].$$

De plus $\mathrm{Diff}(A)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre et $[X_i, X_j] = 0 = [\partial_i, \partial_j]$ et $[\partial_i, X_j] = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ comme crochet de Lie de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$.

Remarque 7.18. On regarde l'élément de A comme l'élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ par multiplication

$$\begin{aligned} A &\hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A) \\ P &\longmapsto m(P) \end{aligned}$$

où $m(P) : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ Q & \longmapsto & PQ \end{array}$ linéaire.

Application 7.19. Ecrivons

$$\mathbb{C}[X, Y] \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}_n[X, Y]$$

où $\mathbb{C}_n[X, Y] = \{$les polynômes homogènes de degré $n\}$.(Tout $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, on peut écrire $P = \sum_{n=0}^{N} P_n$ où P_n homogènes de degrés n). D'ailleurs,

$$\mathbb{C}[X, Y] = \mathrm{Vect}\{Y^n, , Y^{n-1}X, \cdots, YX^{n-1}, X^n\}$$

Donc$\dim \mathbb{C}_n[X, Y] = n + 1$.

Proposition 7.20. Idée : Faisons agir $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}_n[X,Y]$.

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}[X,Y]) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \\ e &\longmapsto Y\frac{\partial}{\partial X} \\ f &\longmapsto X\frac{\partial}{\partial Y} \\ h &\longmapsto Y\frac{\partial}{\partial Y} - X\frac{\partial}{\partial X} \end{aligned}$$

est une représentation d'algèbre de Lie. De plus, $\rho(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))V_n \subset V_n$.

Démonstration. Il suffit de vérifier

$$\begin{aligned} [\rho(e), \rho(f)] &= \rho([e,f]) = \rho(h) \\ [\rho(e), \rho(h)] &= \rho([e,h]) = -2\rho(e) \\ [\rho(f), \rho(h)] &= \rho([f,h]) = 2\rho(f) \end{aligned}$$

De plus montrer que $\rho(V_n) \subseteq V_n$ et vérifier que $v^k = Y^{n-k}X^k$ vérifie les relations $\rho(h)v^k = (n-2k)v^k$, $\rho(f)v^k = (k+1)v^{k+1}$, $\rho(e)v^k = (n+1-k)v^{k-1}$. Thm des cours précédent nous dit que V_n est irréductible. □

Remarque 7.21. $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ définie précédemment agit par dérivation sur $P \in \mathbb{C}[X,Y]$. C'est-à-dire que $\rho(X)(PQ) = (\rho(X)P)Q + P(\rho(X)Q)$.

8 Structure des algèbres de Lie

8.1 Rappels sur les idéaux de $\mathfrak{g}$ une algèbre de Li

Définition 8.1. $I \subset \mathfrak{g}$ est un idéal si $[X,A] \in I$ $\forall X \in \mathfrak{g}, A \in I$.

Remarque 8.2. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{a}}$ a une structure d'algèbre de Lie.

Notation : Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ deux sous-espace vectoriels. Alors on peut définir le crochet de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$,

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] := \mathrm{Vect}\{[a,b], a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}.$$

Si $X \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, alors $X = \sum_{\text{finie}} [a_i, b_i]$.

Proposition 8.3. *Si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ sont 2 idéaux alors : $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ et $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ sont des idéaux.*

Démonstration.

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]] \subseteq [[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}]] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}].$$

□

Par exemple : $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ est un idéal. En fait une source d'idéaux sont les noyaux de $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ morphisme d'algèbre de Lie. Ici, on peut trouver que $Z(\mathfrak{g}) = \ker \mathrm{ad}$ où $\mathrm{ad} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ X & \longmapsto & \mathrm{ad}_X \end{array}$.

L'idéaux dérivé : On définit $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Remarque 8.4. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = 0$. (en particulier si $\dim \mathfrak{g} = 1$.)

Observation fondamentale : $\mathfrak{g} / [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est abélienne ! En effet :

$$\begin{aligned} [X + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], Y + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] &= [X, Y] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ [Y + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], X + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] &= [Y, X] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \end{aligned}$$

Or $[X, Y] - [Y, X] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc $[X + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], Y + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = [Y + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], X + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$.

Résultat général :

$$\text{Idéaux de } \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \longleftrightarrow \text{Idéaux de } \mathfrak{g} \text{ qui contiennent } \mathfrak{a}$$

Lemme 8.5. *Si $I \subset \mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}/I$ abélien si et seulement si $I \supseteq \mathcal{D}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. $\mathfrak{g}/I$ abélien ssi $[X, Y] + [I, I] = [Y, X] + [I, I]$ ssi $[X, Y] \in [I, I] \subseteq I$. Alors on a bien que $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) \subset I$. □

Exercice 8.6. À faire en TD

$$\mathcal{D}(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{D}(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}))$$

Remarque 8.7. Idéaux caractéristiques : Considérons $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Si $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ on a

$$D[X, Y] = [D(X), Y] + [X, D(Y)].$$

On dit que $I \subset \mathfrak{g}$ est caractéristique si $D(I) \subseteq I$. Par exemple, $Z(\mathfrak{g})$ est stable par D, $\mathcal{D}(g)$ est stable par D.

Proposition 8.8. *Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ deux idéaux et $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$. On a :*

$$\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$$

Alors

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{a} = \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \,.$$

8.2 Algèbre de Lie résoluble

Définition 8.9 (la série dérivée)**.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On a $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et

$$\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^n(\mathfrak{g})], \forall n \geq 0$$

Remarque

- $\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) \cdots$.
- $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$.
- $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \big/ \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})$ est abélien.

Définition 8.10. On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble (solvable) s'il existe une suite finie de sous-algèbres :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n+1} = \{0\}$$

telle que

1. $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$.
2. $\mathfrak{g}_i \big/ \mathfrak{g}_{i+1}$ est abélien. ($[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$.)

Proposition 8.11. *$\mathfrak{g}$ est résoluble ssi $\exists n \in \mathbb{N}$ telle que $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n+1} = \{0\}$, alors par récurrence on obtient que $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}_i$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$. Alors $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$.

D'autre part, si $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$, alors $\mathfrak{g} \supseteq \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \supseteq \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ est une suite qu'on veut. $\square$

Exemple 8.12. Reprenons $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ définie par $\mathfrak{a} = \mathrm{Vect}(e, h)$. Alors $[h, e] = 2e$. Donc $\mathcal{D}(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}.e$ et $\mathcal{D}^2(\mathfrak{a}) = 0$. Ainsi $\mathfrak{a}$ est résoluble.

Exemple 8.13 (Contre-exemple)**.** $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h$. Alors $\mathcal{D}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ donc $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ n'est pas résoluble.

Lemme 8.14. *Soit $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ morphisme d'algèbre de Lie surjective, $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$. Alors $\pi(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}')$, $\forall i$.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur i. Si $i = 0$, $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$. Supposons que $\pi(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}')$. D'abord si $X, Y \in \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$, $\pi[X, Y] = [\pi(X), \pi(Y)]$, donc $\pi(\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}')$.

Montrons d'autre l'inclusion : $\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}') \subseteq \pi(\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}))$. Par

$$\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}') = \mathrm{Vect}\{[a, b], a, b \in \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}')\} = \mathrm{Vect}\{[a, b], a, b \in \pi(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}))\}.$$

Donc $[a, b] = [\pi(x), \pi(y)] = \pi([x, y])$ avec $x, y \in \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$. Ainsi que $\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}') \subseteq \mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$. □

Proposition 8.15. *Stablilité de la notion d'algèbre de Lie résoluble*

1. *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors*
   - *tout sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est résoluble.*
   - *tout quotient $\mathfrak{g}/_I$ est résoluble.*
2. *Comme $I \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/_I$ si I et $\mathfrak{g}/_I$ sont résolubles, alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.*

Démonstration.
1. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, alors $\mathcal{D}^i(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})$, donc $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$, donc $\mathfrak{h}$ est résoluble.

   Si $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/_I$. On a vu que $\pi(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^i(\mathfrak{g}/_I)$. Donc $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}/_I) = \pi(\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g})) = \pi(0) = 0$. Donc $\mathfrak{g}/_I$ est résoluble.
2. $$I \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/_I$$

   Par l'hypothèse, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}/_I) = 0$ et $\mathcal{D}^q(I) = 0$. Par $\pi(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}^p(\mathfrak{g}/_I) = 0$, on a $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) \subset I$. Donc $\mathcal{D}^q(\mathcal{D}^p(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}^q(I) = 0$. Ceci conclut que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

□

8.3 Définition du radical

Définition 8.16 (Radical)**.** On appelle radical de $\mathfrak{g}$ le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$.

En fait si $\mathfrak{a}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ de dimension finie tel que $\mathfrak{a}$ a une dimension maximale. Soit b un autre idéal résoluble, considérons

$$\mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to {}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}/_{\mathfrak{a}} \simeq {}^{\mathfrak{b}}/_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}$$

Donc $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est résoluble et $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ car $\dim \mathfrak{a}$ maximale en tant que idéal résoluble ($\dim \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \leq \dim \mathfrak{a}$).

On peut donc définir le plus grand idéal résoluble d'une algèbre $\mathfrak{g}$ de dimension finie.

Proposition 8.17. *L'algèbre* $\mathfrak{g}\big/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *a elle-même un radical=0 !*

Remarque : $\mathfrak{g}\big/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *n'a pas d'idéaux résolubles.*

Démonstration. Si $\overline{I}$ idéal de $\mathfrak{g}\big/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, alors I est un idéal de $\mathfrak{g}$ t.q. $I \supset \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Donc

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow I \longrightarrow I\big/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \overline{I}.$$

Si $\overline{I}$ est résoluble, alors I est résoluble et est contenue dans $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ donc $\overline{I} = 0$. □

8.4 Algèbre de Lie nilpotente

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie.

Définition 8.18 (Serie centrale)**.** Posons $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^1(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et

$$\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})], \quad \text{pour tout } i \geq 0.$$

Remarque 8.19.

1. Avec ces notations, on a

$$[\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{C}^j(\mathfrak{g})] \subseteq \mathcal{C}^{i+j}(\mathfrak{g}).$$

2. Le lien avec $\mathcal{D}^n(\mathfrak{g})$: si $n = 2$, $\mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subseteq [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \mathcal{C}^3(\mathfrak{g})$. Ensuite on peut montrer par récurrence que

$$\mathcal{D}^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g})$$

Définition 8.20. $\mathfrak{g}$ est nilpotent si $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$.

Remarque 8.21.

1. Abélien $\Rightarrow$ nilpotent, par exemple $Z(\mathfrak{g})$ est nilpotent.
2. Nilpotent $\Rightarrow$ Résoluble
3. Résoluble $\not\Rightarrow$ Nilpotent

Proposition 8.22. *Supposons $\mathfrak{g}$ nilpotente, alors*

— *toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est nilpotente.*

— *tout quotient $\mathfrak{g}/_I$ est nilpotent pour I idéal de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Exo, voir prop analogue pour le cas résoluble. □

La réciproque de cette proposition est fausse. En effet, $\mathfrak{sl}_2$ est engendré par e, f, h tels que

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f.$$

Considérons $\mathfrak{b} = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h$, $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathbb{C}e$ est abélien. On a alors

$$I \hookrightarrow \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{b}/_I$$

où $I = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. Ici, $I = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ et $\mathfrak{b}/_I$ sont abéliens donc nilpotents. Mais $\mathfrak{b}$ n'est pas nilpotent parce que $[\mathfrak{b}, [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]] = \mathbb{C}e$ et donc $\mathcal{C}^i(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}e$, $\forall i \geq 2$. Mais il faut remarquer que $\mathfrak{b}$ est résoluble.

Proposition 8.23. *Soit $I \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Si $I \hookrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/_I$ avec I et $\mathfrak{g}/_I$ nilpotentes. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Démonstration. Par définition, $\exists n$ t.q. $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}/_I) = 0$. Alors $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) \subseteq I \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Donc $\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$. □

Application 8.24. La représentation adjointe

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad} : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ad}(x) \end{array}$$

On rappelle que $\ker \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{g})$. On a $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}\Big/Z(\mathfrak{g})$. Donc, d'après ce qui précèdent, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ nilpotente ssi $\mathfrak{g}$ nilpotente.

Remarque 8.25. — Les idéaux $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})$ sont des idéaux caractéristiques.

— On a $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g})\big/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est un idéal central de $\mathfrak{g}\big/\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.

Exercice 8.26. Une algèbre de Lie nilpotente :

1. $\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$ sous-algèbre de Lie de $M_2(\mathbb{R})$ qui est abélien ainsi niplotente.
2. $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq M_3(\mathbb{R})$ n'est pas abélien mais nilpotent. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$, donc $\mathcal{C}^3(\mathfrak{g}) = 0$.
3. Plus généralement, les matrices triangulaires supérieures sont nilpotents.

Proposition 8.27. *Soient*

$$\mathfrak{b}_n = \{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \text{ matrices triangulaires supérieures diagonale a priori non nul.}\}$$

$$\mathfrak{a}_n = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ matrices triangulaires supérieures avec 0 sur les diagonales.}\}$$

Alors

1. $[\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n] = \mathfrak{a}_n$.
2. $\mathfrak{a}_n$ *est nilpotente.*
3. $\mathfrak{b}_n$ *est résoluble.*

Théorème d'Engel et théorème de Lie

Définition 8.28. Soit V un espace vectoriel de dimension d. Un drapeau de V est la donnée :

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_d = V$$

Soit $u \in \mathrm{End}(V)$. S'il vérifie $u(V_i) \subset V_i$, $\forall i = 0, \cdots, d$, alors on dit que u stabilise le drapeau de V.

On peut se placer dans une base adaptée ai drapeau : $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_d)$ telle que $(e_1, \cdots, e_i)$ est une base de V_i, $\forall i = 0, \cdots, d$. Et alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

De plus si $u(V_i) \subseteq V_{i-1}$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 8.29. *Soit $x \in \mathrm{End}(V)$ où V espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathrm{ad}(x) : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ telle que $\mathrm{ad}(x)y = x \circ y - y \circ x$ vérifie la prop suivante :*

x nilpotent en tant qu'endomorphisme de $V \Rightarrow \mathrm{ad}(x)$ nilpotent en tant qu'endomorphisme de $\mathrm{End}(V)$.

Démonstration. $\mathrm{ad}(x) = L_x - R_x$ où $L_x(y) = xy$ et $R_x(y) = yx$. On a $L_xR_x = R_xL_x$. Donc $(\mathrm{ad}(x))^m = (R_x - L_x)^m = \sum_{k=0}^{m} R_x^{m-k}L_x^k$. Pour m assez grand $m = 2n+1$ où $x^n = 0$, donc $(\mathrm{ad}(x))^m = 0$. □

Théorème 8.30 (Engel)**.** *Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ telle que $\rho(x)$ est nilpotent $\forall x \in \mathfrak{g}$.*

1. *Alors $\exists v \in V$ t.q. $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.*
2. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de V dans laquelle $\rho(\mathfrak{g})$ est constituée de notions triangulaires supérieurs avec 0 sur diagonales.*

Remarque 8.31.
1. On sait que le point 2 est équivalent à « $\exists$ drapeau de V t.q. $u(V_i) \subseteq V_i$. »
2. Il se trouve que si $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\rho(x)$ est nilpotent alors $\rho(\mathfrak{g})$ est nilpotente.
3. En résumé, on aura : $\mathfrak{g}$ nilpotente $\Leftrightarrow \forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ est nilpotente.

Démonstration. Pour le point 1, $\exists v \in V$ t.q. $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

On le fait par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$:

Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\mathfrak{g} = \mathbb{C}x_0$. On a que $\rho(x_0)$ nilpotent $\Rightarrow \ker \rho(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists v \in V \neq 0$ t.q. $\rho(x_0)v = 0$ alors $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Récurrence : Soit $\mathfrak{g}$ de dimension d. Supposons que toute sous-algèbre de dimension maximale $< d = \dim \mathfrak{g}$ vérifie que toute représentation de dimension finie (ρ, V) de $\mathfrak{h}$ admet un vecteur v tel que $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{h}$.

Considérons ad : $\mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ s'étreindre à $\mathfrak{h}$. Par ad préserve $\mathfrak{h}$, donc

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

encore une représentation de $\mathfrak{h}$. Si $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent sur $\mathfrak{g}$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$, donc $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Par l'hypothèse à $\mathfrak{h}$, il existe $v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Donc $\exists x_0 \in \mathfrak{g}$, qui n'est pas dans $\mathfrak{h}$ tel que $[x_0, y] \in \mathfrak{h}$, $\forall y \in \mathfrak{h}$. Or $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x_0 \subseteq \mathfrak{g}$, $\Rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}x_0 = \mathfrak{g}$ et en déduit que $\mathfrak{h}$ idéal de $\mathfrak{g}$.

Considérons $W = \{v \in V, \rho(h)v = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\} \subseteq V$ et montrons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x_0$ stabilise W.

On a $\rho(x_0)w \in W$ parce que

$$\rho(y)\rho(x_0)w = [\rho(y), \rho(x_0)]w + \rho(x_0)\rho(y)w = \rho(\underbrace{[y, x_0]}_{\in \mathfrak{h}})w = 0.$$

Ainsi $\rho(x_0)|_W$ est bien défini, alors il existe $w_0 \in W$ t.q. $\forall x \in \mathbb{C}x_0$, $\rho(x)w_0 = 0$ et $\rho(\mathfrak{h})w_0 = 0$. Donc $\rho(\mathfrak{g})w_0 = 0$.

Ainsi si $\rho(x)$ est nilpotent $\forall x \in \mathfrak{g}$, alors $\exists v \in V$ t.q. $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Conclusion de la preuve, on démontre le point 2 par récurrence sur $\dim V$.

Si $\dim V = 1$, alors $\rho(\mathfrak{g})v = 0$, donc rien à faire. Si pour $\dim V = n$, $\rho(\mathfrak{g}) \subset \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.

Soit (ρ, V) de dimension $n+1$. Or, on sait qu'il existe v t.q. $\rho(x)v = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Soit $D = \mathrm{Vect}(v)$. Alors $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V/D)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a V/D est un drapeau avec une base adaptée telle que $\overline{\rho}(x)V_i \subset V_{i-1}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Définir alors $\widetilde{V_i} = V_i \oplus D$ et on obtient donc drapeau de V où $\dim V = n+1$ t.q. $\rho(x)\widetilde{V_i} \subset \widetilde{V}_{i-1}$. Donc $\rho(x)$ est une matrices triangulaires supérieures avec 0 sur la diagonale.

□

Théorème de Lie

Théorème 8.32. *Soit $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie résoluble, soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors*

1. *$\exists v \in V$ et $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ t.q. $\rho(x)v = \lambda(x)v$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.*

2. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(\rho(x)) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

Démonstration. Par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$: Si $\dim \mathfrak{g} = 1$, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Alors si on pose $A = \rho(x_0)$ donc $\rho(x) = \mu\rho(x_0)$ pour $x = \mu x_0 \in \mathfrak{g}$. Puisque A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, alors il existe $\mathcal{B}$ de V telle que $Mat_{\mathcal{B}}(\rho(x)) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

Hypothèse de récurrence : Supposons que 2 est vraie pour tout $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ mais $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ et tout $\rho : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

Par $\mathfrak{g}$ résoluble, alors $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subseteq \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ un sous algèbre telle que $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h} \supseteq \mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Alors $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$, donc $\mathfrak{h}$ est un idéal. Donc $\mathfrak{h}$ algèbre résoluble, on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $W = \{v \in V, \exists \mu \in \mathfrak{h}^*, \forall y \in \mathfrak{h}, \rho(y)v = \mu(y)v\} \subseteq V$.

But : Vérifier que $\rho(x)W \subseteq W$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Soient $y \in \mathfrak{h}$ et $x \in \mathfrak{g}$, pour tout $w \in W$, on a

$$\rho(y)\rho(x)w = \rho([y, x])w + \rho(x)\rho(y)w = \mu([y, x])w + \mu(y)\rho(x)w.$$

Si $\mu([y, x]) = 0$(Par le lemme 8.33), alors on a $\rho(y)\rho(x)w = \mu(y)\rho(x)w$, ainsi que $\rho(x)W \subseteq W$, $\forall x \in \mathfrak{g}$.

Donc par l'hypothèse de récurrence à l'algèbre $\mathbb{C}x_0$, on sait qu'il existe $w_0 \in W$, $\rho(x_0)w_0 = t_0 w_0$ pour $t_0 \in \mathbb{C}$. Définir $\lambda : \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x_0 = \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ t.q. $\lambda|_{\mathfrak{h}} = \mu$ et $\lambda(x_0) = t_0$. Alors $\rho(z)w_0 = \lambda(z)w_0$.

Pour le point 2 : Même raisonnement que le théorème de Engel. On le fait par récurrence sur $\dim V$. S'il est vari pour $\dim V = n$. Pour $\dim V = n + 1$, le point 1 nous donne qu'il existe $v \in V$ et $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ t.q. $\rho(x)v = \lambda(x)v$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Ensuite, considérons $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V/D)$ où $D = \mathrm{Vect}(v)$ puis même conclusion. □

Dans le théorème de Lie, il manquait le lemme suivant pour terminer la preuve.

Lemme 8.33. *Soit* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *idéal. Supposons* $\exists v \in V$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *t.q.* $\rho(h)v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}$. *Alors on a* $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{g}$, considérons le plus petit entier n tel que

— $(v, \rho(x)v, \rho^2(x)v, \cdots, \rho^{n-1}(x)v, \rho^n(x)v)$ soit liée.

— $(v, \rho(x)v, \rho^2(x)v, \cdots, \rho^{n-1}(x)v)$ soit libre.

Posons $W_i = \mathrm{Vect}(v, \rho(x)v, \rho^2(x)v, \cdots, \rho^i(x)v)$ et $W_{-1} = 0$ et $W_0 = \mathrm{Vect}(v)$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Par récurrence sur i montrons que $\rho(y)\rho^i(x)v \in \lambda(y)\rho^i(x)v + W_{i-1}$.

Pour $i = 0$, $\rho(y)v = \lambda(y)v$, $\forall y \in \mathfrak{h}$.

Supposons la propriété varie pour i, alors

$$\rho(y)\rho^{i+1}(x)v = \rho(y)\rho(x)\rho^i(x)v = \rho([y,x])\rho^i(x)v + \rho(x)\rho(y)\rho^i(x)v$$

car $\rho(y)\rho^i(x)v \in \lambda(y)\rho^i(x)v + W_{i-1}$ et $[y, x] \in \mathfrak{h}$, donc

$$\begin{aligned}\rho([y,x])\rho^i(x)v + \rho(x)\rho(y)\rho^i(x)v &\in \lambda([y,x])\rho^i(x)v + \lambda(y)\rho^{i+1}(x)v + \rho(x)W_{i-1} \\ &\subseteq \lambda(y)\rho^{i+1}(x)v + W_i\end{aligned}$$

Maintenant, on a $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x$ stabilise W_{n-1} car $\rho(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x)W_{n-1} \subseteq W_{n-1}$.

La matrice de $\rho(y)$ dans $(v, \rho(x)v, \rho^2(x)v, \cdots, \rho^{n-1}(x)v)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda(y) & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda(y) \end{pmatrix}$.

Donc

$$\mathrm{Tr}(\rho(y)) = n\lambda(y).$$

De plus la matrice de $\rho(x)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\forall x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{h}$.

$$n\lambda([x,y]) = \mathrm{Tr}(\rho([x,y])) = \mathrm{Tr}([\rho(x), \rho(y)]) = 0$$

Ainsi que $\lambda[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$. □

Conséquences du théorème de Lie

Proposition 8.34. *Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ résoluble. Si ρ est irréductible alors ρ est de dimension 1.*

Démonstration. En effet, $\exists v \neq 0$ t.q. $\rho(x)v = \lambda(x)v$. Alors $D = \mathrm{Vect}(v) \subset V$. Alors $\rho|_D$ est une représentation irréductible de dimensionnement 1. Donc ρ irréductible, ainsi que $\dim V = 1$.

□

Proposition 8.35. *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors il existe une suite d'idéaux tels que*

$$\mathfrak{g} = I_n \supseteq I_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq I_1 \supseteq I_0 = \{0\}$$

qui vérifient : ${}^{I_{i+1}}\!/_{I_i}$ sont de dimension 1.

Idée du preuve. Considérons $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Théorème de Lie nous dit que $\exists v \in \mathfrak{g}$ t.q. $\mathrm{ad}(x)v = \lambda(x)v$. Alors $\mathrm{Vect}(v) \subseteq \mathfrak{g}$ est un idéal de dimension 1 parce que $\mathrm{ad}(x)v = [x, v] \in \mathrm{Vect}(v)$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Ensuite, on le démontre par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. □

Proposition 8.36. *$\mathfrak{g}$ résoluble ssi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.*

Démonstration. "$\Leftarrow$" :

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow {}^{\mathfrak{g}}\!\Big/_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$$

On sait que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente donc résoluble et ${}^{\mathfrak{g}}\!\Big/_{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ est abélien donc résoluble. Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

"$\Rightarrow$" Considérons $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Par théorème de Lie, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)$ se présente comme triangulaire supérieure

$$\mathrm{ad}(x) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Alors pour $y \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a $\mathrm{ad}(y)$ se représente dans une base donnée par le théorème de Lie : $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\forall y \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}(y)$ est alors un endomorphisme nilpotent, donc $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ est nilpotente.

□

9 Algèbre de Lie semi-simples, Forme de Killing

9.1 Algèbre de Lie simple et semi-simple

Définition 9.1. On dit que $\mathfrak{g}$ est simple si

1. $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne.
2. seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

Définition 9.2. On dit que $\mathfrak{g}$ est semi-simple si elle ne contient pas d'idéaux résolubles.($\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéaux abéliens)

Remarque 9.3. En particulier si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors $Z(\mathfrak{g}) = 0$.

Proposition 9.4. $\mathfrak{g}$ *est simple, alors* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Démonstration. Soit $I \subseteq \mathfrak{g}$ résoluble non nul, alors $I = \mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}$ simple. Alors $\mathcal{D}(I) \subsetneq I$ car I résoluble alors $\mathcal{D}(I) = 0$ donc I abélien. Ainsi $I = 0$ contradiction. $\square$

Exercice 9.5. $\mathfrak{sl}_2$ est une algèbre de Lie simple.

On a aussi que $\mathfrak{g}$ est semi-simple ssi $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

Proposition 9.6.

1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie, alors* $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ *est une algèbre de Lie semi-simple.*
2. *Si* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ *est idéal résoluble et tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ *est semi-simple alors* $\mathfrak{b} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Soit $I \subset \mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ un idéal résoluble. Alors il se relève en $\widetilde{I} \subseteq \mathfrak{g}$ un idéal qui contient $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. On a alors

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \widetilde{I} \longrightarrow \widetilde{I}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = I$$

Puisque $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ et I sont résoluble, alors $\widetilde{I}$ est résoluble. Donc $\widetilde{I} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ ainsi $I = 0$.

$\square$

On notera le théorème de structure suivant, du à Levi.

Théorème 9.7. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, alors*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_{ss}$$

où $\mathfrak{g}_{ss}$ *est algèbre de Lie semi-simple. C'est une décomposition d'espace vectoriel et d'algèbre de Lie. En fait* $\mathfrak{g}_{ss} \subset \mathfrak{g}$ *n'est pas un idéal de* $\mathfrak{g}$ *à priori.*

Définition 9.8 (Produit direct et somme d'algèbre de Lie)**.** Soient $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ et $(\mathfrak{g}_2, [,]_2)$ deux algèbres de Lie. Alors $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ a une structure d'algèbre de Lie avec

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2} = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]).$$

Notion : $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ pour $(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2, [,]_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2})$.

Proposition 9.9. *Soient* $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ *des algèbres de Lie simple. Considérons*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n.$$

Alors tout idéal de $\mathfrak{g}$ *est s'écrit comme* $\mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_p}$ *pour un certain* p.

Conséquences

1. Les $\mathfrak{g}_i$ sont des idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ car $\mathfrak{g}_i$ est simple.
2. $\mathfrak{g}$ ne contient alors pas d'idéaux résolubles.
3. En fait $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Il se trouve que sur un corps ($\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$) de caractère nul. Alors $\mathfrak{g}$ semi-simple $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ pour les $\mathfrak{g}_i$ simple.

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. On a $\forall x_i \in \mathfrak{g}_i \backslash \{0\}$. On a que $[\mathfrak{g}_i, x_i] \subseteq \mathfrak{g}_i$, l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_i, x_i]$ est $\mathfrak{g}_i$ car $\mathfrak{g}_i$ simple($Z(\mathfrak{g}_i) = 0$).

Considérons $I \subseteq \mathfrak{g}$ et soit $\pi_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ la projection. Soit j un indice tel que $\pi_j(I)$ non nul. Donc dire qu'il existe $x \in I$ t.q. $\pi_j(x)$ non nul, x s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec x_j non nul.

Donc $[\mathfrak{g}_j, x] = [\mathfrak{g}_j, x_j] \in \mathfrak{g}_j$. Donc l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_j, x_j]$ est contenue dans I. Ainsi $\mathfrak{g}_j \subseteq I$.

Soit $A = \{j \in \{1, \cdots, n\}, t.q.\ \pi_j(I) \neq 0\}$. Alors on a :

$$I = \bigoplus_{j \in A} \mathfrak{g}_j.$$

De plus $[I, I] = I$ car $[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_j$. Donc I n'est pas résoluble. □

9.2 Forme de Killing

Une forme bilinéaire :

$$\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

On dit que ϕ est invariante si $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$\phi([x,y],z) + \phi(x,[z,y]) = 0 \Leftrightarrow \phi([x,y],z) = \phi(x,[y,z]) \Leftrightarrow \phi(\mathrm{ad}(x)y,z) = \phi(x,\mathrm{ad}(y)z).$$

Exemple 9.10. Dans $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$, $\phi(X,Y) = \mathrm{Tr}(XY)$.

Vérifions l'invariance

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([X,Y],Z) &= \mathrm{Tr}(XYZ - YXZ) = \mathrm{Tr}(XYZ) - \mathrm{Tr}(YXZ)\\ \mathrm{Tr}(X,[Y,Z]) &= \mathrm{Tr}(XYZ - XZY) = \mathrm{Tr}(XYZ) - \mathrm{Tr}(XZY)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Tr}([X,Y],Z) = \mathrm{Tr}(X,[Y,Z])$. L'invariance de ϕ permet aux $I \subseteq \mathfrak{g}$ idéaux de bien se comporter :

Lemme 9.11. *Soit $\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ invariante. Si $I \subseteq \mathfrak{g}$ idéal. Alors*

$$I^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g}, \phi(x,y) = 0, \forall y \in I\}$$

est également un idéal de $\mathfrak{g}$.

En particulier, $\ker\phi$ est un idéal puisque $\ker\phi = \{x \in \mathfrak{g}, \phi(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

Remarque 9.12. Si $\mathfrak{g}$ est simple et $\phi \neq 0$ alors $\ker\phi = 0$. Autrement dit ϕ non dégénérée.

Attention : soit $I \subseteq \mathfrak{g}$ et ϕ non dégénérée. Alors $I \oplus I^{\perp} = \mathfrak{g}$ est faux en général.

Observation : $I \cap I^{\perp}$ idéal abélien.

Soit $x, y \in I \cap I^{\perp}$. Alors $\phi([x,y],z) = \phi(x,[z,y]) = 0$, $\forall z \in \mathfrak{g}$. Donc $[x,y] \in \ker\phi$. ϕ non dégénérée, donc $[x,y] = 0$, $\forall x, y \in I \cap I^{\perp}$. Alors $I \cap I^{\perp}$ est abélien.

Remarque 9.13. Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors $I \cap I^{\perp} = \{0\}$ car $\mathfrak{g}$ n'a pas idéal résoluble.

Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On considérons alors : $K_\rho : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ définie par $K_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho(x) \cdot \rho(y))$.

Proposition 9.14. *K_ρ est bilinéaire symétrique invariante.*

Démonstration.

$$K_\rho([x,y],z) = \mathrm{Tr}(\rho([x,y])\cdot\rho(z)) = \mathrm{Tr}([\rho(x),\rho(y)],\rho(z)) = \mathrm{Tr}(\rho(x),[\rho(y),\rho(z)]) = K_\rho(x,[y,z])$$

□

Définition 9.15. La forme de Killing est K_ρ pour $\rho : \mathfrak{g} \xrightarrow{\mathrm{ad}} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ représentation adjointe, noté $K_\mathfrak{g}$.

Théorème 9.16. $\mathfrak{g}$ *est résoluble ssi* $K_\mathfrak{g}([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{g}) = 0$.

Théorème 9.17 (Cartan)**.** $\mathfrak{g}$ *semi-simple ssi* $K_\mathfrak{g}$ *non dégénérée.*

La forme de Killing par rapport aux idéaux :

Proposition 9.18. *Soit* $I \subseteq \mathfrak{g}$ *un idéal. Alors*

1. $K_I = K_\mathfrak{g}|_I$.
2. *Si* I *est abélien, alors* $I \subseteq \ker K_\mathfrak{g}$.
3. *Si* $K_\mathfrak{g}$ *non dégénérée, alors* $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal résoluble. De plus* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ *avec* $\mathfrak{g}_i$ *simple. Donc* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Démonstration.

1. Écrivons $\mathfrak{g} = I \oplus V$ où $I \subseteq \mathfrak{g}$ idéal. Alors pour $x \in I$, $\mathrm{ad}(x)$ s'écrit dans une base adaptée à $I \oplus V$, $\mathrm{ad}(x) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ où A est la matrice de $\mathrm{ad}(x)|_I$.

   De même pour $y \in \mathfrak{g}$, on a $\mathrm{ad}(y) = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, $\mathrm{ad}(y)|_I = B$.

   Ainsi $\forall x, y \in I$,

   $$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = \left(\begin{array}{c|c} AB & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)|_I\,\mathrm{ad}(y)|_I) = K_I(x,y).$$

2. Si I est abélien. Soit $x \in I$. $\mathrm{ad}(x) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Alors $\forall z \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x),\mathrm{ad}(z)) = 0$.

   Donc $K_\mathfrak{g}(x,z) = 0$, $\forall z \in \mathfrak{g}$. Ainsi $x \in \ker K_\mathfrak{g}$ et $I \subseteq \ker K_\mathfrak{g}$.

3. Si $K_\mathfrak{g}$ non dégénérée, alors $\mathfrak{g}$ n'ai pas d'idéals abélien, donc $\mathfrak{g}$ est semi-simple par le lemme suivant (lemme 9.19).

   Ensuite, montrons que $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{g}_i$ où $\mathfrak{g}_i$ algèbre de Lie simple.

Recurrence sur $\dim \mathfrak{g}$. Si vraie pour $\dim \mathfrak{g} = n-1$. Soit $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}$ l'idéal minimal. Considérons $\mathfrak{g}_1^\perp = \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. On a vu que $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}$ est abélien. Par 2 on a $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h} = 0$. Donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1^\perp$ avec $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = 0$.

Ensuite, $\mathfrak{g}_1$ est simple car tout $V \subseteq \mathfrak{g}_1$ idéal non nul de $\mathfrak{g}_1$, alors $[V, \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{h}] = [V, \mathfrak{g}_1] \subseteq V$. Donc V est un idéal de $\mathfrak{g}$. Mais par minimalité de $\mathfrak{g}_1$, on a $V = \mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{g}_1$ est simple. De plus $K_\mathfrak{h} = K_\mathfrak{g}|_\mathfrak{h}$ est non dégénérée. Donc cela nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur $\mathfrak{h}$ et de finir la démonstration. Ainsi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

De plus comme tous les $\mathfrak{g}_i$ sont simples et que les idéaux de $\mathfrak{g}$ se décrivent comme $\bigoplus\limits_{finie} \mathfrak{g}_i$, donc les idéaux ne sont pas résolubles !

Finalement $K_\mathfrak{g}$ non dégénérée $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ semi-simple.

□

Lemme 9.19. *Soit $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie, $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux résoluble ssi $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux abéliens.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ a un idéal résoluble $I \subseteq \mathfrak{g}$. Soit n le plus grand entier tel que $\mathcal{D}^n(I) \neq 0$. Donc $\mathcal{D}^{n+1}(I) = 0$. Donc $\mathcal{D}^n(I)$ est abélien et c'est un idéal de I.

Montrons que $\mathcal{D}^n(I)$ est en fait un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit $\forall x \in \mathfrak{g}$. Considérons $\mathrm{ad}(x)|_I : I \to I$ (bien définie). Il s'agit d'une dérivation de I ! Elle préserve les sous-espace caractéristiques ! Donc $\mathrm{ad}(x)|_I$ préserve $\mathcal{D}^n(I) \subseteq I$, donc $\mathcal{D}^n(I)$ est abélien idéal de $\mathfrak{g}$. □

Les caractérisations à l'aide de $K_\mathfrak{g}$ sont :

Théorème 9.20. *$\mathfrak{g}$ résoluble ssi $K_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. (i.e. $\mathfrak{g} \perp \mathcal{D}(\mathfrak{g})$)*

Remarque 9.21. $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$, telle que $\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\}$, $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \{\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, alors $\mathrm{Tr}(xy) = 0$.

Démonstration. Si $\mathfrak{g}$ résoluble, par théorème de Lie, $\exists \mathcal{B}$ telle que pour $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathfrak{g})$, on a

$$Mat_\mathcal{B}(\mathrm{ad}(x)) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Si $y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $\mathrm{ad}(y)$ dans $\mathcal{B}$ se présente dans la forme $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$.

Plus difficile : montrons que si $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall y \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$. Alors $\mathfrak{g}$ résoluble.

Utiliser la décomposition de Jordan (Dunford)

Théorème 9.22. *Soient $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ où V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors il existe un unique couple (u_s, u_n) t.q. $u = u_s + u_n$ où $u_s u_n = u_n u_s$ et u_s diagonalisable (u_s semi-simple dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$) et u_n nilpotente.*

Théorème 9.23. *Soit* $\mathrm{ad}(u) : \begin{array}{ccc} \mathrm{End}_C(V) & \longrightarrow & \mathrm{End}_C(V) \\ x & \longmapsto & u \circ x - x \circ u \end{array}$. *Alors*

$$\mathrm{ad}(u) = \mathrm{ad}(u)_s + \mathrm{ad}(u)_n = \mathrm{ad}(u_s) + \mathrm{ad}(u_n).$$

De plus $\mathrm{ad}(u_s) = P(\mathrm{ad}(u))$ *où P est un polynôme de $X\mathbb{C}[X]$ ($P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(0) = 0$).*

Remarque 9.24. Alexander Kirillov, An introduction to Lie groups and Lie algebras, Section 5.9 Jordan Decomposition .

On a vu que $\mathfrak{g}$ résoluble ssi $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nilpotente. Par le théorème d'Engel il suffit de montrer que $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent pour $x \in \mathfrak{g}$. Supposons $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$(considérons la représentation adjointe $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$). Pour cela, $x = x_s + x_n$.

On a d'une part :

$$\mathrm{Tr}(x\overline{x_s}) = \sum_{fini} |\lambda_i|^2$$

où λ sont les valeurs propres de x_s (ou les valeurs propres de x).

Prenons $x \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, x combinaison linéaire de $[y_i, z_i]$, $y_i, z_i \in \mathfrak{g}$. On a d'autre part alors

$$\mathrm{Tr}(x\overline{x_s}) = \sum_{i\ finie} \mathrm{Tr}([y_i, z_i]\overline{x_s}) = -\sum_{i\ finie} \mathrm{Tr}(y_i, \underbrace{[\overline{x_s}, z_i]}_{\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}) = 0$$

Or par la décomposition de Jordan, on sait que $[\overline{x_s}, z_i] = \mathrm{ad}(x_s)z_i = P(\mathrm{ad}(x))z_i \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

Donc $\sum\limits_{finie} |\lambda_i|^2 = 0$, alors toutes les valeurs propres de x sont nulls, ainsi $x = x_n$ et x est nilpotent. Par le théorème d'Engel on a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ nilpotent ainsi que $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Pour conclure clairement :

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) & \\
0 \arrow[r] & Z(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[u, hook] \arrow[d, Rightarrow] & 0 \\
 & \text{Résoluble} & \text{Résoluble} & \text{Résoluble} &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Théorème 9.25 (Cartan)**.** *$\mathfrak{g}$ semi-simple ssi $K_{\mathfrak{g}}$ non dégénérée*

Démonstration du critère de Cartan. On a vu que $K_{\mathfrak{g}}$ non dégénérée, donc $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Montrons que $K_{\mathfrak{g}}$ non dégénérée si $\mathfrak{g}$ semi-simple. Considérons

$$\mathfrak{h} = \ker K_{\mathfrak{g}} = \{x \in \mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

On a $K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g}$. Alors on a bien que $K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathfrak{h}, y \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$, donc $\mathfrak{h}$ résoluble. C'est impossible car $\mathfrak{g}$ semi-simple sauf si $\mathfrak{h} = 0$.

$\square$

Remarque 9.26. On a supposé $k = \mathbb{C}$. Ceci reste vrai pour $k = \mathbb{C}$. Justifions cela.

9.3 Extension et restriction aux scalaires

Soit $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ extension algébrique clos. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une algèbre de Lie réelle. Alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est complexification de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ avec

$$[x \oplus iy, x' \oplus iy']_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}} = ([x, x'] - [y, y']) \oplus i([x, y'] + [y, x']).$$

Lemme 9.27. *$K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ non dégénérée ssi $K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}}$ non dégénérée.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On a aussi que $(e_1, \cdots, e_n) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ reste une base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-ev. ($\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$). Donc $Mat_{\mathcal{B}}(K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}) = Mat_{\mathcal{B}}(K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}})$ ainsi même déterminant. Donc $K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ non dégénérée ssi $K_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}}$ non dégénérée.

Finalement par le critère de Cartan : $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ semi-simple ssi $\mathfrak{g}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ semi-simple.

$\square$

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ une algèbre de Lie complexe. Par exemple prenons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Considérons $\mathrm{Vect}_\mathbb{R}(e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n) \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Notons $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ algèbre de Lie de dimension $2n$, si $\dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}_\mathbb{C} = n$. $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ est la restriction aux scalaires de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$.

Proposition 9.28. *Soit* $K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \times \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *et soit* $K^\mathbb{R} : \mathfrak{g}_\mathbb{R} \times \mathfrak{g}_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Alors* $K^\mathbb{R} = 2\,\mathrm{Re}\, K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ *et* $\ker K^\mathbb{R} = \ker K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ base de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Alors la $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ donnée par

$$\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n).$$

Soit $Mat_\mathcal{B}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = A = B + iC$ dans $M_n(\mathbb{C})$, alors

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$

Donc on a

$$K^\mathbb{R}(x, y) = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}_0}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 2\,\mathrm{Tr}(B) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(A)) = 2\,\mathrm{Re}(K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}).$$

On a immédiatement $\ker K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}} \subseteq \ker K^\mathbb{R}$. Réciproquement si $x \in K^\mathbb{R}$, donc $\forall y \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, $K(x, y) = 2\,\mathrm{Re}(K(x, y)) = 0$. Or $\mathrm{Im}(K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(x, y)) = -\,\mathrm{Re}\, K^\mathbb{R}(x, iy) = \frac{1}{2}(K^\mathbb{R}(x, iy) = 0$. Donc $\mathrm{Re}(K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(x, y)) = \mathrm{Im}(K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(x, y)) = 0$ ainsi $\ker K^\mathbb{R} \subseteq \ker K_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$. $\square$

9.4 Forme réelle

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ une algèbre de Lie complexe.

Définition 9.29. $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ si c'est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^\mathbb{R}$ telle que

$$\mathfrak{g}_0 \times \mathbb{C} \xrightarrow{bijection} \mathfrak{g}$$

Autrement dit si $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Vect}_\mathbb{R}(e_1, \cdots, e_n)$, alors $\mathrm{Vect}_\mathbb{C}(e_1, \cdots, e_n) = \mathfrak{g}_\mathbb{C}$, avec $e_i \in \mathfrak{g}_0$.

Exemple 9.30 ($\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$)**.** Reprenons $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par e, f, h telles que $[e, f] = h$ et $[h, e] = 2e$ et $[h, f] = -2f$.

Une réalisation matricielle est donnée par

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \in M_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{C}).$$

Considérons $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e, f, h) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ car $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e, f, h) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

D'ailleurs on peut également considérer dans $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ la base $(e - f, ih, i(e + f))$. Notons là (x', y', z').

C'est encore une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x', y', z')$. Sa forme réelle associée est $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(x', y', z') = su(2) = \mathfrak{g}_1$. En fait, il se trouve que $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ ne sont pas isomorphes ! (Il suffit de calculer la forme de Killing associée.)

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \arrow[dl, "{(e,f,h)}"'] \arrow[dr, "{(x',y',z')}"] & \\
\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \arrow[rr, phantom, "\underset{\text{en tant que } \mathbb{R}\text{-algèbre de Lie}}{\not\simeq}"] & & \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{su}(2)
\end{tikzcd}$$

En résumé :

$\mathfrak{g}_0$ une R-algebre de Lie	$\mathfrak{g}$ une algebre de Lie complexe
$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$	$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ une forme réelle

Alors $\quad \mathfrak{g}_0$ semi-simple $\Longleftrightarrow \mathfrak{g}$ semi-simple $\Longleftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ semi-simple

Donc il suffit de étudier les algèbres de Lie semi-simple complexe !

10 Élément semi-simple et sous-algèbre torales

Vers la classification des algèbres de Lie semi-simples complexes.

On dit que $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ est semi-simple si A diagonalisable $\Leftrightarrow V = \bigoplus_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)} V_{\lambda_i}$.

Exemple 10.1. $\mathrm{ad}(h) \in \mathrm{End}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ est semi-simple parce que $\mathrm{ad}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 10.2. On dit que $x \in \mathfrak{g}$ est semi-simple si $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

On dit que $x \in \mathfrak{g}$ est nilpotent si $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ est nilpotent.

Remarque 10.3. Pour la représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors $Z(\mathfrak{g}) = 0$ donc ad est injective.

Théorème 10.4. *Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple alors tout $x \in \mathfrak{g}$ se décompose de manière unique*

$$x = x_s + x_n$$

avec $[x_s, x_n] = 0$, x_s semi-simple et x_n nilpotent.

Démonstration. **Unicité** Si $x = x_s + x_n = x'_s + x'_n$, alors $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n) = \mathrm{ad}(x'_s) + \mathrm{ad}(x'_n)$. Par l'unicité de la décomposition de Jordan appliquée à $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, on a $\mathrm{ad}(x_s) = \mathrm{ad}(x'_s)$. Alors $\mathrm{ad}(x_s - x'_s) = 0$, ainsi $x_s - x'_s \in Z(\mathfrak{g}) = 0$ par $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Donc $x_s = x'_s$.

Existence Soit $x \in \mathfrak{g}$. Considérons $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, alors

$$\mathfrak{g} = \bigoplus \ker(\mathrm{ad}(x) - \lambda_i \,\mathrm{id})^{n_{\lambda_i}} = \bigoplus \mathfrak{g}_{\lambda_i}$$

où $\mathfrak{g}_{\lambda_i} = \ker(\mathrm{ad}(x) - \lambda_i \,\mathrm{id})^{n_{\lambda_i}}$ sont les sous-espaces caractéristiques.

On a aussi que $(\mathrm{ad}(x) - \lambda_i \,\mathrm{id})^N|_{\mathfrak{g}_{\lambda_i}} = 0$ pour N assez grand.

Lemme 10.5. *Pour $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}(x))$, on a*

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}.$$

Démonstration. Soit $y, z \in \mathfrak{g}_\lambda \times \mathfrak{g}_\mu$, alors

$$\mathrm{ad}(x)[y, z] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]$$

On a
$$(\mathrm{ad}(x) - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})[y, z] = [(\mathrm{ad}(x) - \lambda\,\mathrm{id})y, z] + [y, (\mathrm{ad}(x) - \mu\,\mathrm{id})z].$$

Donc par récurrence, on a

$$(\mathrm{ad}(x) - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})^n[y, z] = \sum_{k=0}^{n}[(\mathrm{ad}(x) - \lambda\,\mathrm{id})^k y, (\mathrm{ad}(x) - \mu\,\mathrm{id})^{n-k} z]$$

Si on prend $n > \dim \mathfrak{g}_\lambda + \dim \mathfrak{g}_\mu$, alors $(\mathrm{ad}(x) - (\lambda+\mu)\,\mathrm{id})^n[y, z] = 0$, donc $[y, z] \in \ker(\mathrm{ad}(x) - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})^n \subseteq \ker(\mathrm{ad}(x) - (\lambda + \mu)\,\mathrm{id})^{n_{\lambda+\mu}} = \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$. □

Conséquence : $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)_s + \mathrm{ad}(x)_n$.

Grâce au lemme on peut définir

$$\mathrm{ad}(x)_s|_{\mathfrak{g}_\lambda} = \lambda \cdot \mathrm{id}\,.$$

Alors $\mathrm{ad}(x)_s : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ definit une dérivation parce que

$$[\mathrm{ad}(x)_s y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)_s z] = \lambda[y, z] + \mu[y, z] = (\lambda + \mu)[y, z] = \mathrm{ad}(x)_s[y, z].$$

Ensuite, il faut faire attention à l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto [x, \cdot] = \mathrm{ad}(x) \end{aligned}$$

□

Rappel 10.6. *On avait défini les éléments nilpotents et semi-simples $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple.*

On a vu que tout élément de $\mathfrak{g}$ se décompose en $x = x_s + x_n$ où x_s semi-simple et x_n nilpotent.

Un argument de la décomposition de Jordan (Dunford) reposait sur le fait que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ad} : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ad}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbre de Lie où $\mathrm{ad}(x)[y, z] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]$ donc $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Définition 10.7. Soient $\mathfrak{g}$ semi-simple complexe et $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ une sous-algèbre. On dit que h est torale si

1. $\mathfrak{h}$ ne contient que des éléments semi-simples.
2. $\mathfrak{h}$ est abélienne.

Remarque 10.8. On sait qu'il en existe : en effet si tous les éléments x de $\mathfrak{g}$ qui s'écrivent $x = x_s + x_n$ ont $x_s = 0$, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente par thm d'Engel. Or $\mathfrak{g}$ semi-simple non nul, c'est impossible.

Ainsi il existe $x \in \mathfrak{g}$ avec la partie semi-simple non nulle donc $\mathbb{C}x_s \subseteq \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre torale oùad$(x_s) = P(\mathrm{ad}(x))$.

Remarque 10.9. Vous pouvez trouver une définition d'algèbre torale sans la condition 2(hypothèse Adeline). Ii se trouve que 2 est automatique. On peut montrer qu'une algèbre torale avec la condition 1 implique qu'elle est abélienne.

Théorème 10.10. $\mathfrak{g}$ *algèbre de Lie semi-simple complexe. Soit* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie torale.* $\mathfrak{g}$ *est munie de la forme de Killing* $K_{\mathfrak{g}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))$ *qui est non dégénérée. Alors*

1. $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$.
2. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
3. *Si* $\alpha + \beta \neq 0$ *alors* $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$.
4. $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$, $K_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{C}$ *est non dégénérée.*

où $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(h)x = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ *est la généralisation de espace propres (espace de poids* α *associé à la représentation adjointe de* $\mathfrak{h}$*) pour* $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ *une forme bilinéaire.*

Exemple 10.11. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e, f, h)$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h \subseteq \mathfrak{g}$, alors On a

$$\mathfrak{g}_2 = \mathbb{C}e, \quad \mathfrak{g}_{-2} = \mathbb{C}f.$$

Démonstration. 1. Soit $h \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, alors h est semi-simple donc $\mathrm{ad}(h)$ est diagonalisable. Alors $(\mathrm{ad}(h))_{h \in \mathfrak{h}}$ est une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux ainsi elles sont simultanément diagonalisables. Il existe une décomposition de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

telle que $\begin{cases} \mathrm{ad}(h)x = \alpha_h x \\ x \in \mathfrak{g}_{\alpha_h} \end{cases}$, α_h est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{g}$ est de dimension finie $\mathfrak{g}_\alpha$ est nulle sauf un nombre fini de α. Notons $R = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ avec $\alpha_i \neq 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$ et remarque que $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g}, [x, h] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ qui contient $\mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est abélien. Ainsi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{g}_{\alpha_i}.$$

2. Soient $y \in \mathfrak{g}_\alpha$, $z \in \mathfrak{g}_\beta$. On a alors

$$\mathrm{ad}(x)[y, z] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z] = \alpha[y, z] + \beta[y, z] = (\alpha + \beta)[y, z].$$

Ainsi

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

3. Par l'invariance de forme de Killing on a

$$0 = K_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)y, z) + K_{\mathfrak{g}}(y, \mathrm{ad}(x)z) = (\alpha + \beta)K_{\mathfrak{g}}(x, y).$$

Si $K_{\mathfrak{g}}(x, y) \neq 0$, alors $\alpha + \beta = 0$.

Donc on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \overset{\perp}{\oplus} \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ pour $K_{\mathfrak{g}}$.

4. $K_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \longmapsto K_{\mathfrak{g}}(x, y)$.

$$\{x \in \mathfrak{g}_\alpha, K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}\} = 0 = \{y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, K_{\mathfrak{g}}(x, y) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}_\alpha\}$$

□

Remarque 10.12. Centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est défini par $\mathfrak{g}_0 = \{x \in \mathfrak{g}, [x, h] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Proposition 10.13. *Si $x \in \mathfrak{g}$, $\alpha \neq 0$. Alors $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent.*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{g}_{\alpha_i}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{ad}(x)^m(\mathfrak{g}_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{\beta+m\alpha}$.

Comme $(\beta + m\alpha)_{m\in\mathbb{N}}$ racines deux à deux distinctes, il existe m_0 t.q. $\beta + m_0\alpha = 0$ car $R = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ est fini. Donc $\mathrm{ad}(x)^{m_0} = 0$ ainsi x est nilpotent.

□

Définition 10.14. Soient $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

On dit que $\mathfrak{h}$ est sous-algèbre de Cartan si $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g}, [x, h] = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\}$.

Remarque 10.15. Si $\mathfrak{h}$ abélienne alors $\mathfrak{h} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

Exemple 10.16. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}), \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Considérons $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{h} = \{Diag(t_1, \cdots, t_n), t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 0\}$. Alors on a

1. $\mathfrak{h}$ est semi-simple.
2. $\mathfrak{h}$ est abélien.

Il faut vérifier que $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}$. En fait si $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ telle que $xh = hx$, x doit commuter avec des matrices diagonales donc les valeurs propres sont distinctes, ainsi x doit être diagonalisable. Alors $x \in \mathfrak{h}$ et $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

Problème : Existe t-il des sous algèbre de Cartan dans $\mathfrak{g}$ semi-simple ?

Théorème 10.17. *Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soit $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ torale maximale (*$\dim \mathfrak{h}$ *maximale).*

Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan et de plus

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $R = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subseteq \mathfrak{h}^*$.

Démonstration. On veut montrer que $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{h}$.

Étape 1 : Soit $x \in \mathfrak{g}_0$. On écrit $x = x_s + x_n$. En fait $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$ car $\mathrm{ad}(x_s) = P(\mathrm{ad}(x))$ où $P \in X\mathbb{C}[X]$ un polynôme sans termes constants. Or $[x, h] = \mathrm{ad}(x)h = 0$ pour $x \in \mathfrak{g}_0$, $h \in \mathfrak{h}$. Donc $[x_s, h] = \mathrm{ad}(x_s)h = 0$ ainsi $x_s \in \mathfrak{g}_0$ et $x_n = x - x_s \in \mathfrak{g}_0$.

Étape 2 : Soit $x_s \in \mathfrak{g}_0$ semi-simple. $\mathrm{ad}(x_s)\,\mathrm{ad}(h) = \mathrm{ad}(h)\,\mathrm{ad}(x_s)$ pour $\forall h \in \mathfrak{h}$. Considérons alors $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x_s$ est torale (abélienne et torale), or $\mathfrak{h}$ est maximale, donc $x_s \in \mathfrak{h}$. Ainsi tous les éléments semi-simples de $\mathfrak{g}_0$ sont dans $\mathfrak{h}$.

Étape 3 : $\mathfrak{g}_0$ est nilpotente. Soit $x \in \mathfrak{g}_0$, $x = x_s + x_n$ la décomposition de Jordan. On sait que $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$ et $x_s \in \mathfrak{h}$. Or pour $h \in \mathfrak{h}$, on a $[h, \mathfrak{g}_0] = 0$. Donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x_n)$ où $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x) \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$. Donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_0}(x)$ est nilpotent pour $\forall x \in \mathfrak{g}_0$. Par le théorème d'Engel, $\mathfrak{g}_0$ est nilpotente.

Étape 4 : Si $x \in \mathfrak{g}$, on a $x = x_s + x_n$ et $x_s \in \mathfrak{h}$. Si on montre que $x_n = 0$, alors on a gagné $x = x_s \in \mathfrak{h}$. On sait que $\mathrm{ad}(x_n)$ est nilpotent. De plus $\mathfrak{g}_0$ est commutative.(assez difficile, il faut le montrer. Mais par remarque 10.18, la démonstration ici reste en marche.) On a $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x_n)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$ pour $y \in \mathfrak{g}_0$ car $\mathrm{ad}(y)$ est une matrice triangulaire supérieure dans une certaine base.

Donc $K_{\mathfrak{g}}(x_n, y) = 0$ pour $\forall y \in \mathfrak{g}_0$. Alors on obtient

$$x_n \in \mathfrak{g}_0^{\perp} \cap \mathfrak{g}_0.$$

Or $K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0}$ est non dégénérée (exo), donc $x_n = 0$.

Ainsi toute algèbre de Lie semi-simple a une sous algèbre de Cartan. □

Remarque 10.18. Montrer que $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_0) = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$. Soit $n \geq 2$ le plus petit entier tel que $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0) \neq 0$. Alors $[\mathfrak{g}_0, \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0)] = \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g}_0)$ est un idéal central non nul.

Soit $z \in \mathcal{C}^n(\mathfrak{g}_0) \subseteq [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, $z \neq 0$, on s'écrit $z = z_s + z_n$ par la décomposition de Jordan.

Fait : $z_n \neq 0$. $z_n = P(\mathrm{ad}(z))$ avec $P \in X\mathbb{C}[X]$. On a $\mathrm{ad}(z)(\mathfrak{h}) = 0 = \mathrm{ad}(z)(\mathfrak{g}_0)$ Alors $\mathrm{ad}(z_n)(\mathfrak{h}) = \mathrm{ad}(z_n)(\mathfrak{g}_0) = 0$ donc $z_n \in Z(\mathfrak{g}_0)$.

Montrons que $z_n \neq 0$. Si $z = z_s \in \mathfrak{h}$ alors on avait $z = \sum_{fini} [x_i, y_i]$ avec $x_i, y_i \in \mathfrak{g}_0$. Pour $\forall h \in \mathfrak{h}$,

$$K_{\mathfrak{g}}(z, h) = \sum_i K_{\mathfrak{g}}([x_i, y_i], h) = \sum_i K_{\mathfrak{g}}(x_i, [y_i, h]) = 0$$

Donc $z = z_s \perp \mathfrak{h}$, mais c'est impossible car $z \in \mathfrak{h}$.

Avant de continuer comprendre la décomposition sur un exemple : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

$$\mathfrak{h} = \{\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{pmatrix}, h_1 + h_2 + h_3 = 0\} \subseteq \mathfrak{g}$$

et $\mathfrak{h} = C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Cartan. Définissons $e_i^* \in \mathfrak{h}^*$ par

$$\begin{array}{rccc} e_i^* : & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & h_i \end{array}.$$

Étudions $\mathrm{ad}(h)$, $h \in \mathfrak{h}$: on a $\mathrm{ad}(h)E_{i,j} = (h_i - h_j)E_{i,j} = (e_i^* - e_j^*)(h)E_{i,j}$.En posant $R = \{e_i^* - e_j^*, i \neq j\}$.

Remarque 10.19. $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}e_1^* \oplus \mathbb{C}e_2^* \oplus \mathbb{C}e_3^* \big/ \mathbb{C}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$ est de dimension 2 et $R \subseteq \mathfrak{h}^*$.

On a une dualité $\mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ une identification est donnée par $K_{\mathfrak{g}}^{\natural} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}^* \\ h & \longmapsto & K_{\mathfrak{g}}(h, \cdot) \end{array}$.

Ainsi toute $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ se représente par un $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha = K^{\natural}(H_\alpha)$ (i.e. $\alpha(\cdot) = K_{\mathfrak{g}}(\cdot, H_\alpha)$).

Lemme 10.20. *Soit $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. ($\mathfrak{g}_\alpha^* = \mathfrak{g}_{-\alpha}$). On a $[e_\alpha, f_\alpha] = K_{\mathfrak{g}}(e_\alpha, f_\alpha) H_\alpha$, on a normalisation près $[e_\alpha, f_\alpha] = H_\alpha$.*

Démonstration. Définissons $h_\alpha = \frac{2H_\alpha}{\alpha(H_\alpha)}$. Il existe $f_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$ t.q. $[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha$, alors $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$ engendre une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

□

Théorème 10.21. *Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, où $R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ s'appelle le système des racines.*

1. *R engendre $\mathfrak{h}^*$ et $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ engendre $\mathfrak{h}$.*
2. *$\forall \alpha$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.*
3. *$\forall \alpha, \beta \in R$, $\beta(h_\alpha) = \frac{2K_{\mathfrak{g}}(\alpha,\beta)}{K_{\mathfrak{g}}(\alpha,\alpha)}$ est un entier.*
4. *Définissons $\delta_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$, $\delta_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha$. Si $\alpha, \beta \in R$, alors $\delta_\alpha(\beta) \in R$.*
5. *Si $\alpha \in R$, alors seulement α ou $-\alpha$ appartient à R, $n\alpha \notin R$.*
6. *$V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_{2,\alpha}$*
7. *$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.*