TD3. Ensemble dénombrable, Espace probabilité

Exercice 1.

a) Montrer que l'ensemble $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$ des fonctions $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ presque nulles sont dénombrable.

b) Montrer que si A est un ensemble possédant au moins deux éléments, alors $A^{\mathbf{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2.
Montrer que si A est un ensemble au plus dénombrable et B un ensemble infini, alors $A \cup B$ est en bijection avec B.

Exercice 3.

a) Montrer qu'un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ de dimension finie non nulle est dénombrable.

b) Montrer que $\mathbf{Q}[X]$ est dénombrable.

Exercice 4. On appelle *nombre algébrique* tout nombre complex racine d'un polynôme non nulle à coefficients rationnels.

a) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

b) Existe-t-il des réels non algébriques ?

Exercice 5. Soit $(I_a)_{a \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non-vides deux à deux disjoints. Démontrer que A est nécessairement au plus dénombrable.

Exercice 6.

a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dénombrable. (Indication : on pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a, b[\ ;\ |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$.)

b) Qu'en est-il pour une fonction réelle monotone définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 7. Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$.

a) Montrer que l'intersection d'une famille non vide quelconque de tribus sur Ω est encore une tribu.

b) Montrer qu'il existe des tribus sur Ω contenant $\mathcal{F}$, et que l'intersection de toutes ces tribus, qu'on note $\sigma(\mathcal{F})$, est la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{F}$.

c) Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas toujours une tribu.

La tribu $\sigma(\mathcal{F})$ est appelée *tribu engendrée* par $\mathcal{F}$.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et f une application de Ω dans un ensemble Ω'.

a) Montrer que $\mathcal{A}' = \{B \subset \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω'. On l'appelle *tribu image* de $\mathcal{A}$ par f.

b) Montrer que $\mathbb{P}_f : B \in \mathcal{A}' \to \mathbb{P}(f^{-1}(B))$ est une probabilité sur $(\Omega', \mathcal{A}')$. On l'appelle *probabilité image* de $\mathbb{P}$ par f.

Exercice 9. On souhaite démontrer qu'il n'existe pas de probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probabilisé $\big([0,1], \mathcal{P}([0,1])\big)$ telle que,

— pour $0 \leq a < b \leq 1$, $\mathbb{P}([a,b]) = b - a$;

— pour $a \in \mathbf{R}$ et $E \subset [0,1]$ tels que $a + E \subset [0,1]$, on a $\mathbb{P}(E + a) = \mathbb{P}(E)$.

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle probabilité existe.

a) Montrer que $x \sim y$ si $x - y \in \mathbf{Q}$ définie une relation d'equivalence sur $\mathbf{R}$.

b) Considère l'espace quotient $[1/3, 2/3]/_\sim$. Pour chaque classe d'equivalence $c \in [1/3, 2/3]/_\sim$, on choisit $x_c \in [1/3, 2/3]$ tel que $x_c \in c$. On pose

$$X = \{x_c \in [1/3, 2/3] : c \in [1/3, 2/3]/_\sim\}.$$

Pour $r \in \mathbf{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, on pose

$$X_r = \{x + r : x \in X\}.$$

Montrer que

— si $r, r' \in \mathbf{Q} \cap [-1/3, 1/3]$, on a $X_r \cap X_{r'} = \varnothing$,

— $[1/3, 2/3] \subset \bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1/3,1/3]} X_r \subset [0,1]$.

c) Conclure.

Soit $\mathcal{B}$ la tribu sur $[0,1]$ engendrée par $[a,b]$ avec $0 \leq a < b \leq 1$. En théorie de la mesure, on va construire une telle probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}$. La tribu $\mathcal{B}$ est appelée *tribu de Borel*. La probabilité $\mathbb{P}$ est appelée *la mesure de Lebesgue*.