Théorie des distributions

Classe sino-française, USTC

Responsables du cours :

Prof. **Pierre FIMA**

D’après un polycopié de

WANG Zheng et *TAO Leyan*

Novembre 2023 – Janvier 2024

Introduction à la théorie des distributions

Motivations : Introduit dans 40s par Laurent Schwartz pour fournir un cadre formel à la résolution des équations aux dérivées partielles. Le principal problème du calcul différentiel est l'existence de fonctions non différentiables.

La théorie des distributions étant le calcul différentiel aux fonctions non différentiables telles que les fonctions L^p mais aussi mesures de Radon. Par exemple, formellement $\mathbb{1}'_{\mathbb{R}_+} = \delta_0$.

Plan du Cours

Ch1. L'espace des fonctions test

-Rappels sur les espaces vectoriels topologiques localement convexes (evtlc)

-Limites inductives d'evtlc

-Espaces LF

-Les fonctions test

Ch2. Distribution

-Généralités

-Le calcul des distributions (restriction, recollement, dérivation, multiplication, changement de variables)

-distributions à support compact, dérivation/intégration sous le crochet de dualité

-convolution

-produit tensoriel

Ch3. Distributions tempérées et l'analyse de Fourier

Ch4. Applications aux EDP

Table des matières

Chapitre 1

L'espace des fonctions test

Note : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. N un entier $\geqslant 1$. λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. $L^P(\mathbb{R}^N) = L^P(\mathbb{R}^N, \lambda)$ où $p \geqslant 1$. EV = espace vectoriel.

1.1 Espaces vectoriels topologiques localement convexe

Généralités : Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de semi-normes sur le $\mathbb{K}$-EV E. La topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ définie par $\mathcal{P}$ est la topologie sur E engendrée par

$$\{B_p(x,\varepsilon)\colon p \in \mathcal{P}, x \in E, \varepsilon > 0\} \text{ où } B_p(x,\varepsilon) = \{y \in E\colon p(x-y) < \varepsilon\}.$$

Une base de $\tau_{\mathcal{P}}$-voisinages de $x \in E$ est

$$\{\bigcap_{p\in\mathcal{S}} B_p(x,\varepsilon)\colon \varepsilon > 0, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \text{ sous-ensemble fini}\}.$$

Proposition 1.1.1. (cf. Poly. Dospinescu, section 5)

Soit E un $\mathbb{K}$-EV avec la topologie $\tau_{\mathcal{P}}$.

1) E est un espace vectoriel topologique.
2) Si F est un evt et $f\colon F \to E$ est linéaire, alors F est continue si et seulement si $p \circ f\colon F \to \mathbb{R}$ est continue, $\forall p \in \mathcal{P}$.
3) Une semi-norme q sur E est continue si et seulement si $\exists c > 0$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ fini, tels que $q(x) \leqslant c \cdot \max\{p(x)\colon p \in \mathcal{S}\}$.
4) Une suite $(x_n)_n$ dans E converge vers $x \in E$ si et seulement si la suite réelle $(p(x_n - x))_n$ converge, $\forall p \in \mathcal{P}$.

5) Une suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ dans E est de Cauchy si et seulement si $p(x_n)$ est de Cauchy, $\forall p \in \mathcal{P}$.

6) Si $\mathcal{P}$ est séparante ($\bigcap_{p\in\mathcal{P}} \ker p = \{0\}$), alors $\tau_{\mathcal{P}}$ est séparée.

7) Si $\mathcal{P}$ est au plus dénombrable, alors $\tau_{\mathcal{P}}$ est métrisable.

Définition 1.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-EV, une partie $A \subseteq E$ est dite

· *convexe* : si $\forall a, b \in A$, $\forall t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in A$.

· *ronde* : si $\forall a \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1$, $\lambda a \in A$.

· *absorbante* : si $E = \bigcup_{t>0} tA$.

Noter $\mathcal{C}_E = \{A \subseteq E \colon A$ convexe, ronde, absorbante$\}$.

Lemme 1.1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-EV.

1) Si $A \subseteq E$ est ronde et absorbante, alors $\forall x \in E$, $\exists t > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant t \Rightarrow x \in \lambda A$.

2) $\mathcal{C}_E$ est stable par intersections finies.

3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, $A \subseteq \mathcal{C}_E$, on a $\lambda A \in \mathcal{C}_E$.

4) Si F $\mathbb{K}$-EV et $f \colon E \to F$ est linéaire, alors $A \in \mathcal{C}_F \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{C}_E$.

5) Si $\forall i \in I$, A_i ronde et l'une des A_i est absorbante, alors $Conv(\bigcup_{i\in I} A_i) \in \mathcal{C}_E$.

6) $\mathcal{C}_E$ est stable par union croissante : $(I, \leqslant)$ ensemble ordonné filtrant ($\forall i, j \in I$, $\exists k \in I$, $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$), $\forall i \in I$, $A_i \in \mathcal{C}_E$ et $i \leqslant j \Rightarrow A_i \subseteq A_j$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}_E$.

Démonstration. 1) Si $x \in E$, A absorbante, alors $\exists t > 0$, $t^{-1}x \in A$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant t$, pour $\mu = \lambda^{-1}t \in \mathbb{K}$, A ronde et $|\lambda| \leqslant 1$, $t^{-1}x \in A$ implique $\mu t^{-1}x = \lambda^{-1}x \in A$, donc $x \in \lambda A$.

2) Il est facile de vérifier qu'une intersection de parties convexes (resp. rondes) est convexe (resp. ronde). Maintenant soit $A, B \in \mathcal{C}_E$, alors il suffit de montrer que $A \cap B$ est absorbante. Soit $x \in E$, par (1), $\exists t_1, t_2 > 0$ tels que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant t_1 \Rightarrow x \in \lambda A$, $|\lambda| \geqslant t_2 \Rightarrow x \in \lambda B$. Avec $t = \max(t_1, t_2)$, on a $x \in tA \cap tB = t(A \cap B)$.

3) Soit $A \in \mathcal{C}_E$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, il est clair que λA est convexe et ronde. Soit $x \in E$, par (1), $\exists s > 0$, tel que $x \in \mu A$, $\forall |\mu| \geqslant s$. Poser $t = \frac{s}{|\lambda|} > 0$, on a $|t\lambda| = s$, donc $x \in t\lambda A \Rightarrow \lambda A$ absorbante.

4) Facile. Il faut noter que si $A \in \mathcal{C}_E$, il n'est pas nécessaire que $f(A) \in \mathcal{C}_F$.

5) Soit $A = Conv(\bigcup_{i\in I} A_i)$, alors A est automatiquement convexe. Soit $i_0 \in I$ tel que A_{i_0} est absorbante, alors $A_i \subseteq A \Rightarrow A$ est aussi absorbante. Soit $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1$, alors $\exists n \neq 1$, $s_1, \ldots, s_n \in [0,1]$, et $a_1 \in A_{i_1}, \ldots, a_n \in A_{i_n}$ tels que $a = \sum_{k=1}^n s_k a_k$, alors $\lambda a = \sum_{k=1}^n s_k \lambda a_k$. A_{i_k} ronde $\Rightarrow \lambda a_k \in A_{i_k}$, et A convexe $\Rightarrow \lambda a \in A$.

6) Conséquence directe de 5) car une union croissante de parties convexes est toujours convexe. $\square$

Remarque. Si p est une semi-norme sur E, alors $B_p(x,\varepsilon)$ est convexe, ronde, absorbante.

Proposition 1.1.3. (c.f. Poly. Dospinescu, section 5)

Soit E un evt, il y a des équivalence :

i) E est localement convexe (admet une base de voisinages convexes de 0).

ii) Il existe une base de voisinage convexe, rond et absorbant de 0.

iii) La topologie sur E est définie par une famille de semi-normes.

Définition 1.1.2. Un evtlc est appelé *espace de Fréchet* lorsque sa topologie est métrisable complète.

Exemple 1.1.1. Exemples d'espaces de Fréchet.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert, $f\colon \Omega \to \mathbb{K}^N,\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))$.

Pour $m \geqslant 1$, on sait que f est de classe C^m sur Ω si et seulement si toutes les dérivées partielles d'ordre m des fonctions $f_1, \ldots, f_N$ existent et sont continues. f est C^∞ sur Ω si f est de classe C^m, $\forall m \geqslant 1$.

On note :

· $C^m(\Omega, \mathbb{K}^N) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{K}^N$ de classe C^m sur $\Omega\}$. Ici $m \geqslant 1$ ou $m = +\infty$.

· $C^0(\Omega, \mathbb{K}^N) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue$\}$.

· $C^m(\Omega) = C^m(\Omega, \mathbb{C})$.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice, la longueur de α est $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Pour $f \in C^m(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leqslant m$, on note $\partial^\alpha f \in C^0(\Omega)$ est

$$\partial^\alpha f = (x \mapsto \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N}(x)).$$

Si l'un des $\alpha_i = 0$, alors le terme $\partial^{\alpha_i} x_i$ n'apparait pas.

Définition 1.1.3. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert. Une suite de compacte $(K_n)_n$ est dite Ω-*adaptée* si $\Omega = \bigcup_n K_n$ et $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$.

Lemme 1.1.4. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert

1) Il existe une suite Ω-adaptée.

2) $\forall (K_n)_n$ Ω-adaptée, $\forall K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact, si $K \subseteq \Omega$ alors $\exists n$ tel que $K \subseteq K_n$.

Démonstration. 1) Fixer un norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^N$. On rappelle que $\forall A \subseteq \mathbb{R}^N$, l'application

$$\mathbb{R}^N \to [0, +\infty[,\ x \mapsto d(x, A) = \inf\{\|x - a\|\colon a \in A\}$$

est 1-Lip, et $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$. Donc, pour $n \geqslant 0$, prend

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n+1} \text{ et } \|x\| \leqslant n+1\}.$$

Alors K_n est borné, fermé donc compact, et il est clair que $K_n \subseteq \Omega$.

De plus, on a bien $K_n \subseteq O_n = \{x : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+2} \text{ et } \|x\| \leqslant n+2\} \subseteq K_{n+1}$. Comme O_n est ouvert, on a $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$.

Maintenant, soit $x \in \Omega$, $d(x, \Omega^c) > 0$ et donc pour $n = E(\max\{\frac{1}{d(x, \Omega^c)}, \|x\|\})$, on a $x \in K_n \Rightarrow \Omega = \bigcup_n K_n$.

2) Si $(K_n)_n$ est Ω-adaptée et $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact, et $K \subseteq \Omega = \bigcap_n \mathring{K}_n$. Par compacité, $\exists m$ tel que $K \subseteq \mathring{K}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathring{K}_m \subseteq K_{m+1}$. □

Pour K compact et $K \subseteq \Omega$, on pose

$$p_{0,K} : C^0(\Omega) \to [0, +\infty[,\ p_{0,K}(f) = \sup\{|f(x)| : x \in K\}.$$

C'est une semi-norme sur $C^0(\Omega)$. Soit τ_0 la topologie sur $C^0(\Omega)$ définie par la famille de semi-norme $\mathcal{P}_0 = \{p_{0,K} : K \text{ compact},\ K \subseteq \Omega\}$.

Corollaire 1.1.5. Pour toute suite $(K_n)_n$ Ω-adaptée, la topologie τ_0 est egale à la topologie définie par $\{p_{0,K_n} : n \geqslant 0\}$ et $(\mathcal{C}^0(\Omega), \tau_0)$ est un espace de Fréchet.

Démonstration. c.f. Poly. Dospinescu. □

Si $m \geqslant 1$, K compact, $K \subseteq \Omega$, on prend

$$p_{m,K} : C^m(\Omega) \to [0, +\infty[,\ p_{m,K}(f) = \sup\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K, |\alpha| \leqslant m\}$$

semi-norme. τ_m est la topologie sur $C^m(\Omega)$ définie par $P_m = \{p_{m,K} : K \text{ compact } K \subseteq \Omega\}$.

Si $m = +\infty$, τ_∞ est la topologie sur $C^\infty(\Omega)$ définie par

$$P_\infty = \{p_{m,K} : K \text{ compact } K \subseteq \Omega, m \geqslant 1\}.$$

Corollaire 1.1.6. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $(C^m(\Omega), \tau_m)$ est un espace de Fréchet, τ_m est la même topologie que celle induite par (pour $m < +\infty$) $\{p_{m,K_n} : n \geqslant 1\}$.

1.2 Limites inductives d'evtlc

Théorème-Définition 1.2.1 (Topologie inductive)**.** Soit $\{(E_t, \tau_t), t \in T\}$ une famille d'evtlc et E un $\mathbb{K}$-EV. $\forall t \in T$ on fixe une application linéaire $g_t \colon E_t \to E$. L'ensemble des topologies τ sur E telles que :

- (E, τ) est un evt,
- $\mathcal{B} := \{O \in \mathcal{C}_E \colon \forall t \in T,\ g_t^{-1}(O)$ est un voisinage de 0 dans $(E_t, \tau_t)\}$ est une base de voisinage de 0 pour τ

est non-vide et admet un maximum (pour l'ordre $\tau \leqslant \tau' \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau'$). Ce maximum est noté τ_{ind} et appelé *la topologie inductive* sur E relativement à $\{(E_t, \tau_t, g_t) \colon t \in T\}$.

Avec cette définition, on a

1) (E, τ_{ind}) est localement convexe et g_t est continue, $\forall t \in T$.
2) Si τ est une topologie sur E telle que (E, τ) est un evtlc et g_t est continue, $\forall t \in T$, alors $\tau_{ind} \subseteq \tau \Rightarrow \tau_{ind} = \tau$.
3) Si F est un evtlc, et $f \colon E \to F$ est linéaire, alors f est continue si et seulement si $f \circ g_t \colon E_t \to F$ est continue, $\forall t \in T$.

Démonstration. Par le Lemme 1.1.2, la linéarité des g_t et la continuité de $E_t \to E_t,\ x \mapsto \lambda^{-1}x,\ \forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$, on a

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \forall O \in \mathcal{B},\ \lambda O \in \mathcal{B}$.

Poser pour $x \in E$,

$$\mathcal{V}(x) := \{V \subseteq E \colon \exists O \in \mathcal{B},\ O \subseteq V - x\},$$

$$\tau_{ind} := \{U \subseteq E \colon \forall x \in U,\ U \in \mathcal{V}(x)\}.$$

Soit τ une topologie sur E telle que $\mathcal{B}$ soit une base de voisinages de 0 et notons $V_\tau(x)$ l'ensemble des τ-voisinages de x. Alors $V_\tau(0) \subseteq \mathcal{V}(0)$, et $\forall x \in E$, $V_\tau(x) = \{v + x \colon v \in V_\tau(0)\} \subseteq \mathcal{V}(x)$. Ainsi $\tau \subseteq \tau_{ind}$.

Vérifions que τ_{ind} est une topologie.

· il est clair que $\varphi, E \in \tau_{ind}$.

· Pour montrer que τ_{ind} est stable pour intersection finies, il suffit de montrer que $\mathcal{V}(x)$ l'est, $\forall x \in E$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersections finies car $(x + U) \cap (x + V) = x + (U \cap V)$, mais $\mathcal{B}$ est stable par intersections finies car $\mathcal{C}_E$ l'est (Lemme 1.1.2) et que l'ensemble des voisinages d'un point l'est aussi.

Notons que

(ii) $\forall x \in E,\ \forall A \subseteq B \subseteq E,\ A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x)$.

En effet, si $A \in \mathcal{V}(x)$, $\exists O \in \mathcal{B}$ tel que $O \subseteq A - x \subseteq B - x$ donc $B \in \mathcal{V}(x)$.

Montrons que τ_{ind} est stable par union.

$\forall i \in I$, soit $U_i \in \tau_{ind}$. Soit $x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Soit $i_0 \in I$, tel que $x \in U_{i_0}$ et $U_{i_0} \in \tau_{ind}$, on a $U_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$, et comme $U_{i_0} \subseteq U$, par (ii) on a $U \in \mathcal{V}(x)$. Ainsi $U \in \tau_{ind}$.

Notons que

(iii) $\forall O \in \mathcal{B}$, $\exists V \in \mathcal{B}$, $V + V \subseteq O$.

En effet, par convexité de O, on a $\frac{1}{2}O + \frac{1}{2}O \subseteq O$, et (i) $\Rightarrow V := \frac{1}{2}O \in \mathcal{B}$.

Montrons que $\forall x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des τ_{ind}-voisinages de x. Soit $x_0 \in E$ et $O \subseteq E$ un τ_{ind}-voisinage de x_0, alors $\exists U \in \tau_{ind}$ tel que $x_0 \in U \subseteq O$ et $U \in \tau_{ind} \;\Rightarrow \forall x \in U, U \in \mathcal{V}(x)$. En particulier, $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et comme $U \subseteq O$, par (ii) on a $O \in \mathcal{V}(x_0)$.

Réciproquement, soit $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et montrons que U est un τ_{ind}-voisinage de x_0. Poser $W := \{x \in U \colon U \in \mathcal{V}(x)\}$, alors $x_0 \in W \subseteq U$. Il suffit de montrer que $W \in \tau_{ind}$. Soit $x \in W$, alors $x \in U$ et $U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, O \in \mathcal{B}$ tel que $O \subseteq U - x$. (iii) $\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{B},\ V + V \subseteq O$. Comme $0 \in V$, on a $V + x \subseteq V + V + x \subseteq O + x \subseteq U$. Soit $y \in V + x$, alors $y \in U$, et $V + y \subseteq V + V + x \subseteq O + x \subseteq U$. Donc $V \in \mathcal{B}$ et $V \subseteq U - y$. Par définition on a $U \in \mathcal{V}(y)$. Ainsi $V + x \subseteq W$. Comme $V \in \mathcal{B}$, $V + x \subseteq \mathcal{V}(x)$, (ii)$\Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$, ainsi $W \in \tau_{ind}$ et U est un τ_{ind}-voisinage de x_0. Ainsi $\mathcal{V}(0)$ est l'ensemble des τ_{ind}-voisinages de 0 et donc par construction de $\mathcal{V}(0)$, $\mathcal{B}$ est une base voisinage de 0 pour τ_{ind}.

Ainsi, par linéarité, la continuité des $g_t \colon E_t \to E,\ \forall t \in T$ est évidente. La continuité de $E \times E \to E,\ (x, y) \mapsto x + y$ est conséquence de (iii).

Vérifions que $m \colon \mathbb{K} \times E \to E,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue. Soit $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$, soit $O \in \mathcal{B}$ et $m(\lambda_0, x_0) \in O$. Par convexité de O, on a $V \in \mathcal{B}$ tel que $V + V + V \subseteq O$ (pour $V = \frac{1}{3}O$). Par le lemme 1, $\exists \rho > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leqslant \rho$, on a $\lambda x_0 \in V$. On peut supposer que $\rho \leqslant 1$.

· Si $\lambda_0 = 0$, on pose

$$U := \{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leqslant \rho\} \times (V + x_0)$$

Alors U est un voisinage de $(0, x_0)$, et $m(U) = \{\lambda v + \lambda x_0 \colon v \in V, |\lambda| \leqslant \rho\} \subseteq V + V \subseteq O$.

· Si $\lambda_0 \neq 0$, poser $s = \min\{\rho, |\lambda_0|\}$ (donc $0 < s \leqslant 1$), et on pose

$$U := \{\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| \leqslant s\} \times (|\lambda_0|^{-1} V + x_0)$$

Alors U est un voisinage de (λ_0, x_0) et $m(U) = \{(\lambda - \lambda_0)|\lambda_0|^{-1}V + \lambda_0|\lambda_0|^{-1}V + (\lambda - \lambda_0)x_0 + \lambda_0 x_0\} \subseteq V + V + V + \lambda_0 x_0 \subseteq O + \lambda_0 x_0$. Ainsi m est continue en (λ_0, x_0).

D'où on a montré 1).

Pour 2), Soit $\mathcal{B}'$ une τ-base de voisinage de 0 tel que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C}_E$. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, mais c'est évident car les g_t sont τ-continues.

Pour 3), on suppose F un evtlc et $f\colon E \to F$ linéaire avec $f \circ g_t$ continue, $\forall t \in T$. Soit $U \in \mathcal{C}_F$ un voisinage de $0 \in F$ (Il suffit de traiter le cas où $U \in \mathcal{C}_F$ car les voisinages ronds, convexes et absorbants font bien une base topologique d'un evtlc). Par le Lemme 1.1.2 et la linéarité, $O = f^{-1}(U) \in \mathcal{C}_E$. $O \in \mathcal{B}$ car $f \circ g_t$ est continue, $\forall t \in T$. Donc F est τ_{ind}-continue. □

Définition 1.2.1. Soit E un $\mathbb{K}$-EV et $(E_n)_n$ une suite croissante de sous espaces vectoriels de E tels que $E = \cup_{n\geqslant 0} E_n$. On suppose que $\forall n \geqslant 0$, (E_n, τ_n) est un espace de Fréchet et $\tau_{n+1}|_{E_n} = \tau_n$. L'evtlc (E, τ_{ind}) où τ_{ind} est la topologie inductive sur E relativement à la famille (E_n, τ_n, ι_n) où $\iota_n\colon E_n \to E$ est l'inclusion est appelé un *espace LF*. Il est noté

$$(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n).$$

Une base de voisinage de 0 dans (E, τ) est

$$\mathcal{B} = \{O \in \mathcal{C}_E \colon O \cap E_n \text{ est un voisiange de } 0 \text{ dans } E_n, \forall n\}.$$

Rappel. Une partie $B \subseteq F$ un evt est dite *bornée* si $\forall$ voisinage U de 0, $\exists \rho > 0$ tel que $B \subseteq tU$, $\forall t > \rho$.

Lemme 1.2.2. Soit E un evtlc, $E_0 \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Pour tout $U_0 \in \mathcal{C}_{E_0}$ voisinage de 0 (pour la topologie restreinte de E à E_0), $\exists U \in \mathcal{C}_E$ voisinage de 0 dans E tel que $U_0 = U \cap E_0$. Si on suppose de plus que E est séparé et E_0 est fermé, alors si $x_0 \in E \backslash U_0$, on peut trouver un tel U tel que $x_0 \notin U$.

Démonstration. Soit $U_0 \in \mathcal{C}_{E_0}$ voisinage de 0 dans E_0, alors $\exists V \subseteq E$ voisinage de 0 tel que $U_0 = V \cap E_0$. Comme E est localement convexe, $\exists W \in \mathcal{C}_E$ voisinage de 0 tel que $W \subseteq V$. Soit $U = Conv(W \cup U_0)$. Par Lemme 1.1.2, $U \in \mathcal{C}_E$ et c'est un voisinage de 0 dans E. Montrons que $U_0 = U \cap E_0$. Par convexité de W et U_0 on a $U = \{ta + (1-t)b \colon a \in U_0, b \in W, t \in [0,1]\}$. Soit $x \in U \cap E_0$, écrire $x = ta + (1-t)b$, où $a \in U_0, b \in W, t \in [0,1]$. Si $t = 1$ alors $x \in U_0$. Si $0 \leqslant t < 1$, alors $b = (1-t)^{-1}(x - ta) \in E_0$ car $x, a \in E_0$, donc $b \in W \cap E_0 \subseteq V \cap E_0 = U_0$. Comme $a, b \in U_0$ et U_0 est convexe, $x \in U_0$. Donc $U \cap E_0 \subseteq U_0$, et l'autre inclusion est clair.

Soit maintenant $x_0 \in E \backslash U_0$. On peut supposer $x_0 \notin E_0$, sinon $x_0 \notin U$ et U convinet. Soit $\psi\colon E \to E/E_0$ la surjection linéaire canonique. Rappèle que la topologie quotient sur E/E_0 est $\{O \subseteq E/E_0 \colon \psi^{-1}(O) \text{ est ouvert dans } E\}$. E/E_0 est un evt. Comme E est séparé et E_0 est fermé, la topologie quotient est séparée, et comme E est localement convexe, E/E_0 l'est aussi. Ainsi, comme $\psi(x_0) \neq 0$, $\exists \Omega \in \mathcal{C}_{E/E_0}$ voisinage de 0 dans

E/E_0 tel que $\psi(x_0) \notin \Omega$. Poser $O = \psi^{-1}(\Omega)$, alors $O \in \mathcal{C}_E$ par linéarité de ψ et Lemme 1.1.2, c'est un voisinage de E par continuité de ψ. De plus $x_0 \notin O$ et $E_0 \subseteq O$. Poser $U' = O \cap U$ où U est le voisinage avant. $U' \in \mathcal{C}_E$ par Lemme 1.1.2, et on a bien $x_0 \notin U'$. Comme $U_0 = U \cap E_0$ et $E_0 \subseteq O$, on a $E_0 \cap U' = U_0$. $\square$

Théorème 1.2.3. Soit $(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n)$ un espace LF.

1) $\forall n \geqslant 0$, $\tau|_{E_n} = \tau_n$.
2) (E, τ) est séparé et $\forall n$, E_n est fermé dans E.
3) $B \subseteq E$ est bornée si et seulement si $\exists n$ tel que $B \subseteq E_n$ et B est bornée dans E_n.
4) (E, τ) est complet.

Démonstration. 1) Soit $O \in \tau|_{E_n}$, il existe $U \in \tau$ tel que $O = U \cap E_n = \iota_n^{-1}(U)$ où $\iota_n \colon E_n \to E$ est l'inclusion. Par Théorème 1.2.1, sur la topologie inductive les ι_n sont τ-continues. donc $O \in \tau_n$. Montrons l'inclusion réciproque. Par locale convexité, il suffit de montrer que tout τ_n-voisiange convexe, rond et absorbant de 0 est un τ_{E_n}-voisinage de 0. Fixer $U_n \in \mathcal{C}_{E_n}$ un τ_n-voisinage de 0. On construit par récurrence une suite $(U_m)_{m \geqslant n}$ telle que

· $\forall m \geqslant n,\ U_m \in \mathcal{C}_{E_m}$ est un τ_m-voisinage de 0,
· $\forall m \geqslant n$, $U_{m+1} \cap E_m = U_m$ et $U_m \cap E_n = U_n$.

Pour $m = n$, on prend simplement U_n. Si $m \geqslant n$ et $U_m \in \mathcal{C}_{E_m}$ est τ_m-voisinage de 0 tel que $U_m \cap E_n = U_n$, alors comme $E_m \subseteq E_{m+1}$ sous-espace et $\tau_{m+1}|_{E_m} = \tau_m$, on peut appliquer le Lemme 1.2.2 et on obtient $U_{m+1} \in \mathcal{C}_{m+1}$ un τ_{m+1}-voisinage de 0 tel que $U_{m+1} \cap E_m = U_m$. Comme $E_n \subseteq E_m$, on a $U_{m+1} \cap E_n = U_m \cap E_n = U_n$. Montrons que $(U_m)_{m \geqslant n}$ ainsi construite satisfait aussi (par une récurrence immédiate) :

· $\forall m \geqslant n,\ \forall k \geqslant 0,\ U_{m+k} \cap E_m = U_m$.

En particulier, la suite $(U_m)_{m \geqslant n}$ est croissante. Posons $U = \bigcup_{k \geqslant n} U_k$, on a pour $\forall m \geqslant n$:

$$\begin{aligned} U \cap E_m &= \Big(\bigcup_{n \leqslant k < m} U_k \cap E_m\Big) \cup \Big(\bigcup_{k \geqslant m} U_k \cap E_m\Big) \\ &= \Big(\bigcup_{n \leqslant k < m} U_k \cap E_m\Big) \cup U_m \\ &= \bigcup_{n \leqslant k \leqslant m} (U_k \cap E_m) \\ &= U_m. \end{aligned}$$

Donc $U \cap E_m = U_m,\ \forall m \geqslant n$, c'est un τ_m-voisinage de 0. Pour $m \leqslant n$, on a

$$U \cap E_m = U \cap E_n \cap E_m = U_n \cap E_m.$$

C'est un $\tau_n|_{E_m}$=τ_m-voisinage de 0. Comme $(U_m)_m$ croissante, les U_m sont convexes, donc U est convexe. Les U_m sont rond donc U est rond. On vérifie que U est absorbant : Soit $x \in E$, $\exists m \geqslant n$ tel que $x \in E_m$. Comme U_m est absorbant dans E_m, $\exists t > 0$, tel que $x \in tU_m \subseteq tU$. Donc $U \in \mathcal{B}$. Donc $U_n \in \tau|_{E_n}$.

2) Soit $x \in \overline{\{0\}}^{\tau}$. $\exists n$ tel que $x \in E_n$. $\forall V \subseteq E_n$ un τ_n-voisinage de x, par 1) $\exists U \subseteq E$ un τ-voisinage de 0 tel que $V = U \cap E_n$. Donc $0 \in U$ donc $0 \in V$. Comme τ_n est séparée, alors $x = 0$, donc τ est séparée.

Soit $x \in \overline{E_n}^{\tau} \subseteq E$. Soit $m \geqslant n$ tel que $x \in E_m$. $\forall V \subseteq E_m$ un τ_m-voisinage de 0, comme $\tau_m = \tau|_{E_m}$, $\exists\ O \subseteq E$ τ-voisinage de 0 tel que $V = O \cap E_m$. On a $(O + x) \cap E_n \neq \varnothing$. Comme $(O + x) \cap E_n = ((O + x) \cap E_m) \cap E_n \subseteq (O \cap E_m + x) \cap E_n = (V + x) \cap E_n$, $(V + x) \cap E_n \neq \varnothing$, donc $x \in \overline{E_n}^{\tau_m}$. Mais E_n est fermé dans E_m (comme E_m et E_n sont complets et $\tau_n = \tau_m|_{E_n}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n \in E_n$ une suite de Cauchy dans E_m converge à un point dans E_n), on voit donc $x \in E_n$.

3) Assertion : Si (x_n) est une suite de E telle que $\forall n \geqslant 0$, $x_n \notin E_n$, alors $(x_n)_n$ n'est pas bornée.

En fait, on construit par récurrence une suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

· $\forall n \geqslant 0$, $U_n \in \mathcal{C}_{E_n}$ τ_n-voisinage de 0.

· $U_n = U_{n+1} \cap E_n$.

· $\frac{1}{k+1}x_k \notin U_{n+1},\ \forall\ 0 \leqslant k \leqslant n$.

On choisit $U_0 \in \mathcal{C}_{E_0}$ un τ_0-voisinage de 0, puis pour $n \geqslant 1$, $U_0, \ldots, U_n$ sont construit tel que

· $U_m = U_{m+1} \cap E_m,\ \forall\ 0 \leqslant m \leqslant n - 1$.

· $\frac{1}{k+1}x_k \notin U_{m+1},\ \forall\ 0 \leqslant k \leqslant m$ et tout $0 \leqslant m \leqslant n - 1$.

On peut appliquer le Lemme 1.2.2 car E_{n+1} séparé, E_n est fermé dans E_{n+1}, $U_n \in \mathcal{C}_{E_n}$ un τ_n-voisinage de 0, $\tau_n = \tau_{n+1}|_{E_n}$. Ainsi on obtient $V_0, \ldots, V_{n-1} \in \mathcal{C}_{E_{n+1}}$ τ_{n+1}-voisinage de 0 tels que $V_k \cap E_n = U_n$ et $\frac{1}{k+1}x_k \notin V_k$, $\forall 0 \leqslant k \leqslant n - 1$. De plus $\frac{1}{n+1}x_n \notin E_n$. En particulier $\frac{1}{n+1}x_n \notin U_n$. On applique encore une fois le Lemme 1.2.2 pour obtenir $V_n \in \mathcal{C}_{E_{n+1}}$ τ_{n+1}-voisinage de 0 tel que $V_n \cap E_n = U_n$ et $\frac{1}{n+1}x_n \notin V_n$. Poser $U_{n+1} = \bigcap_{k=0}^{n} V_k$ τ_{n+1}-voisinage de 0, $\forall 0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{1}{k+1}x_k \notin U_{n+1}$. Par le Lemme 1.1.2 $U_{n+1} \in \mathcal{C}_{E_{n+1}}$ et $U_{n+1} \cap E_n = U_n$. Par récurrence on montre que

· $\forall m \geqslant n$, $U_m \cap E_n = U_n$.

Donc la suit $(U_n)_n$ est croissante. $\forall n$, $U \cap E_n = U_n$ un τ_n-voisinage de 0. Par construction, $\frac{1}{k+1}x_k \notin \bigcup_{n\geqslant k+1} U_n$, $\forall k \geqslant 0$. Si $n \leqslant k$, $\frac{1}{k+1}x_k \notin U_n$ car $\frac{1}{k+1}x_k \notin E_k \supset E_n$. Donc $\forall k \geqslant 0$, $\frac{1}{k+1}x_k \notin U$. Si $(x_k)_k$ était bornée alors $\exists \rho > 0$, $x_k \in tU$, $\forall k \geqslant 0$, $\forall t > \rho$. En particulier pour $k = [\rho]$, on a $\frac{1}{k+1}x_{k+1} \notin U$, faux, d'où l'assertion.

Fin de la preuve de 3) : Si $B \subseteq E$ est bornée. supposons $\forall n \geqslant 0$, $B \nsubseteq E_n$, alors

$\exists x_n \in B$ tq $x_n \notin E_n$. Par l'assertion $(x_n)_n$ n'est pas bornée, faux car $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B$. Donc $\exists n$, $B \subseteq E_n$. Montrons que B est bornée dans E_n. Soit $U \subseteq E_n$ un τ-voisinage de 0. Par (1) $\exists V \subseteq E$ τ-voisinage de 0, $U = V \cap E_n$, $B \subseteq E$ borné $\Rightarrow \exists p > 0$ tel que $B \subseteq tV$, $\forall t > \rho$. Donc $B \subseteq (tV) \cap E_n = t(V \cap E_n) = tU$. La réciproque est claire.

4) On montre uniquement que (E, τ) est séquentiellement complet. Soit $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (E, τ). Elle est donc bornée. Par 3) $\exists N$ tel que $\{u_n : n \in N\} \subseteq E_N$. Par 1) $(u_n)_n$ est de Cauchy dans E_N. (E_N, τ_N) complet $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ est convergente. $\square$

1.3 Applications linéaires continues sur un espace LF

Rappel. $f : E \to F$ entre evt.

- f est *bornée* si $f(B) \subseteq F$ bornée, $\forall B \subseteq E$ bornée.
- Si f linéaire, alors si f est continue alors elle est bornée. La réciproque est vrai si E est métrisable.
- E métrisable, f linéaire, alors f continue $\Leftrightarrow$ $\forall$ suite $(u_n)_n$ de E qui tend vers 0, $(f(v_n))_n$ tend vers 0.

Théorème 1.3.1. $(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n)$ espace LF et F evtlc et $f : E \to F$ linéaire. Il y a équivalence :

1) f est continue.
2) f est bornée.
3) $\forall$ suite $(u_n)_n$ de E qui tend vers 0, $(f(u_n))_n$ tend vers 0.
4) $\forall n$, $f|_{E_n} : E_n \to F$ est continue.

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) Toujours vrai.

1) $\Leftrightarrow$ 4) déjà vu.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $(u_n)_n$ suite de E qui tend vers 0. Alors $(u_n)_n$ est bornée. Donc $(f(u_n))_n$ est bornée. Donc $\exists N$ tel que $u_n \in E_N$, $\forall n$. $\tau|_{E_N} = \tau_N \Rightarrow u_n \to 0$ dans (E_N, τ_N). $f|_{E_N} : E_N \to F$ est linéaire et bornée sur l'espace de Fréchet (E_N, τ_N). $f|_{E_N}$ est continue donc $f(v_n) \to 0$.

3) $\Rightarrow$ 4) (E_n, τ_n) Fréchet donc il suffit de vérifier la continuité séquentielle en 0 de $f|_{E_N}$. C'est juste 3). $\square$

Exercice 1.3.1 (Non métrisabilité).
Un espace LF $(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n)$ est dit *non-trivial* si l'inclusion $E_n \subseteq E$ est stricte, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que si $F \subseteq G$ est un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel topologique alors F est d'intérieur vide.

b) Montrer qu'un espace LF non-trivial n'est pas métrisable.

Démonstration. a) Sinon, soit $O \subseteq F$ un voisinage ouvert de 0 et $x \in E \backslash F$. Comme la multiplication $f : \mathbb{K} \times E \to E$ est continue et envoie $(0, x)$ à 0, on peut trouver $U \subseteq \mathbb{K}$ ouvert et $V \subseteq E$ ouvert qui contient x telles que $f(U \times V) \subseteq O$. En particulier, on peut trouver un $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in F$, qui implique que $x \in F$, d'où la contradiction.

b) Sinon, écrire $E = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$, on sait que E est d'intérieur vide par le lemme de Baire, ridicule. □

Exercice 1.3.2 (Convergence des suites)**.**
Soit $(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n)$ un espace LF. Montrer qu'une suite $(u_k)_k$ de E converge vers $u \in E$ si et seulement si il existe $n \in N$ tel que $u_k, u \in E_n$ pour tout k et la suite $(u_k)_k$ converge vers u dans (E_n, τ_n).

Démonstration. Si $(u_k)_k$ converge vers u dans (E_n, τ_n), alors clairement $(u_k)_k$ converge vers u car $\tau_n = \tau|_{E_n}$. Réciproquement, si $(u_k)_k$ converge vers u dans E, alors $\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ est bornée, par théorème 1.2.1 on sait qu'il existe $n \in N$ tel que $\{u_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq E_n$. Comme $\tau_n = \tau|_{E_n}$, $(u_k)_k$ est encore une suite de Cauchy dans E_n et donc converge à un point u' car E_n est complet. Mais $u = u'$ car E est séparé. □

Exercice 1.3.3 (Non complétude)**.**
Montrer que la topologie sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ induite de l'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas complète.

Démonstration. On peut trouver des fonctions $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $f_n|_{[-n,n]} = 1$ et supp$(f_n) \subseteq [-n-1, n+1]$. Alors $f_n \to 1$ sous la topologie sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ induite de $C^\infty(\mathbb{R})$, mais 1 n'est pas dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$. □

Exercice 1.3.4 (Limites faible*)**.**
Soit $(E, \tau) = \cup^{\uparrow}(E_n, \tau_n)$ un espace LF et notons E^* sont dual topologique. Soit $(w_n)_n$ une suite de E^* telle que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_n(x))_n$ converge. Montrer que la suite $(w_n)_n$ est $*$-faiblement convergente dans E^*.

Démonstration. Prenons $w : E \to \mathbb{K},\ x \mapsto \lim_{n\to\infty} w_n(x)$. En prenant la limite, on voit que w est bien linéaire. Pour montrer que w est continue, il suffit de montrer que $w \circ \iota_n$ est continue sur E_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, où ι_n est l'inclusion de E_n dans E. En notant que $w_m|_{E_n}$ est encore continue pour $m \geqslant n$ et $(w_m|_{E_n})$ converge simplement vers $w|_{E_n}$ (c'est-à-dire pour tout $x \in E_n$, $w_m|_{E_n}(x) \to w|_{E_n}(x)$).

Rappelons le résultat ci-dessous (c.f. Poly. Dospinescu Corollaire 8.2.1)

Soit X un F-espace, Y un evt séparé et (T_n) une suite dans $L(X,Y)$, qui converge simplement vers une application $T\colon X \to Y$. Alors $T \in L(X,Y)$.

Cette proposition montre bien $w|_{E_n} \in E_n^*$, donc $w \in E^*$ est la limite faible* de la suite $(w_n)_n$. $\square$

1.4 Les fonctions test

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert. Pour $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact et $K \subseteq \Omega$ et $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on note

$$C_K^m(\Omega) = \{f \in C_c^m(\Omega)\colon \operatorname{supp}(f) \subseteq K\}.$$

C'est un espace de Fréchet pour la topologie induite de $C^m(\Omega)$. Si $m \neq +\infty$, c'est un espace de Banach pour la norme

$$p_{m,K}\colon C_K^m(\Omega) \to [0,+\infty[,\ p_{m,K}(f) = \sup\{|\partial^\alpha f(x)|\colon x \in K, |\alpha| \leqslant m\}.$$

Si $(K_n)_n$ est une suite de compacts Ω-adaptée et $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors la suite de sous espaces vectoriels $C_{K_n}^m(\Omega) \subseteq C_c^m(\Omega)$ est croissante et $\cup^{\uparrow} C_{K_n}^m(\Omega) = C_c^m(\Omega)$. Ainsi $C_c^m(\Omega)$ a une structure d'espace LF.

Il est facile de vérifier que la topologie d'espace LF sur $C_c^m(\Omega)$ ne dépend de la suite de compacts Ω-adaptée choisie.

Définition 1.4.1. L'espace des *fonctions tests*, noté $\mathcal{D}^m(\Omega)$, est l'espace LF $C_c^m(\Omega)$ avec la topologie d'espace LF. Pour $m = +\infty$, on note simplement $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}^{+\infty}(\Omega)$ pour $\Omega \neq \varnothing$. Notons que $\mathcal{D}^m(\Omega)$ n'est pas métrisable (car, pour $K' \subseteq \mathring{K}$, l'inclusion $C_{K'}^m(\Omega) \subseteq C_K^m$ est non triviale par le lemme d'Urysohn C^∞, et utiliser exercice 1.3.1).

Remarque. $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, alors $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}^m(\Omega)$ si et seulement si :

1) $\exists K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact, $K \subseteq \Omega$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi), \operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$, $\forall n$.
2) $\forall |\alpha| \leqslant m$, $\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \to 0$.

Remarque. Les inclusions naturelles

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$$

sont continues (caractérisation de la continuité des applications linéaires) et d'image dense, voir la proposition 1.4.1 .

Rappels sur la convolution. Pour $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mesurables, on dit que f et g sont convolables si $(y \mapsto f(y)g(x-y))$ est $d\lambda$-*pp* intégrable. On note alors $f * g$ l'application $D \to \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}^N$ borélien avec $\lambda(\mathbb{R}^N \backslash D) = 0$:

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)d\lambda(y),$$

on a des propriétés suivantes.

- $f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ g \in L^p(\mathbb{R}^N),\ 1 \leqslant p < +\infty$, alors f et g convolables et

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p.$$

- $f \in L^p(\mathbb{R}^N),\ g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f * g$ est définie partout et bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$ et

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

- $f \in C_c^m(\mathbb{R}^N),\ g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in C^m(\mathbb{R}^N)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leqslant m$,

$$\partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g$$

Proposition 1.4.1. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \int \varphi d\lambda = 1,\ \varepsilon > 0,\ \varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N}\varphi(x/\varepsilon)$. Alors $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall f \in C_c^m(\mathbb{R}^N)$.

$$\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} f \text{ dans } \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^N).$$

Cela démontre la densité de l'image de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}^m(\Omega)$.

Démonstration.

$$(\varphi_\varepsilon * f - f)(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy - f(x) = \int \varphi(y)(f(x-\varepsilon y) - f(x))dy$$

Si $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \bar{B}(0, R_0)$, alors $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subseteq \bar{B}(0, \varepsilon R_0)$. Notons que $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon * f) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) + \mathrm{supp}(f)$ qui est compact, alors

$$|\varphi_\varepsilon * f - f| \leqslant \left(\int |\varphi(x)|dx \right) \cdot \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon R_0} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Par le Théorème de Heine, f est uniformément continue donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| = 0.$$

Notons que $\partial^\alpha(\varphi * f - f) = \varphi * \partial^\alpha f - \partial^\alpha f$, cela fini la démonstration. $\square$

Exercice 1.4.1 (Fonctions pic, fonctions plateau)**.**
Soit $N > 1$. Notons $|\cdot|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ et $B(x, r)$ la boule ouverte Euclidienne de centre x et de rayon r.

a) Montrer que la fonction $\rho_0 \colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ définie par

$$\rho_0(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

est C^∞ sur $\mathbb{R}^N$, $\mathrm{supp}(\rho_0) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leqslant 1\}$, $0 \leqslant \rho_0(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

b) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Montrer qu'il existe $\rho \in C_c^\infty(\Omega)$ positive, $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq B(x_0, \varepsilon)$ et $\int_\Omega \rho d\lambda = 1$. ρ est appelé *fonction pic sur la boule* $B(x_0, \varepsilon)$.

c) Soit $K \subseteq O$, $\bar{O} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ avec K compact, O et Ω ouverts. Montrer qu'il existe $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que

$$\forall x \in K,\ \chi(x) = 1,\ \forall x \notin O,\ \chi(x) = 0,\ \forall x \in \Omega, 0 \leqslant \chi(x) \leqslant 1.$$

Une fonction satisfaisant cette propriété sera noté $K \prec \chi \prec O$ et appelé *fonction plateau.*

Démonstration. Déjà vu en cours de Prof. Xinan MA. $\square$

Chapitre 2

Le calcul des distributions

2.1 Généralité

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert.

Définition 2.1.1. Une *distribution* sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Ainsi, une application linéaire $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists c_K > 0$, $\exists N_K \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c_K \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant N_K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite *d'ordre fini*, si $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists c_K > 0$, $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c_K \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre fini, alors *l'ordre de T* est

$$\min\{m \in \mathbb{N}\colon \forall K \subseteq \Omega \text{ compact }, \exists c_K > 0,\ \forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega), |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c_K \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|\}.$$

Rappelons que l'inclusion $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$ est continue d'image dense.

Proposition 2.1.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $m \in \mathbb{N}$, alors T est d'ordre $\leqslant m$ si et seulement si T s'étend en une application linéaire continue $\mathcal{D}^m(\Omega) \to \mathbb{C}$. Une telle extension est unique par densité.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}^m(\Omega)$. Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}^m(\Omega)$, il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers x. Par le théorème 1.2.3, il existe $K \subseteq \Omega$ compact tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont dans $C_K^\infty(\Omega)$, qui est un espace métrique complet. Alors (f_n) est de Cauchy, comme T est d'ordre m, en appliquant l'inégalité, on sait que $T(f_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, il existe donc $\tilde{T}(f) := \lim_{n\to\infty} T(f_n) \in \mathbb{C}$, et cette limite ne dépend pas du choix de la suite (f_n) dans $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers f, car si (g_n) est une autre telle suite alors on peut définir une troisième suite (h_n) qui converge vers f en posant $h_{2n} = f_n, h_{2n+1} = g_n$, et d'après ce qui précède la suite $(T(h_n))$ doit converger, ce qui force $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to} T(g_n)$. Il est alors évident que $\tilde{T}\colon \mathcal{D}^m(\Omega) \to \mathbb{C}$ ainsi construite est bien un prolongement de f, et en prenant la limite dans línégalité dans la définition d'ordre fini, on sait bien que $\tilde{T}$ est continue sur $\mathcal{D}^m(\Omega)$. $\square$

Rappel. E, F evt, $f\colon E \to F$ linéaire continue, E', F' les duaux topologiques, où $E' = \{w\colon E \to \mathbb{C}$ linéaire continue $\}$. La *transposée* de f est ${}^t f\colon F' \to E',\ w \mapsto w \circ f$.

Pour $m \geqslant 0$, la transposée de l'inclusion $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^m(\Omega)$ donne l'application de restriction $\mathcal{D}^m(\Omega)' \to \mathcal{D}'(\Omega)$ qui est injective par densité et le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$ formé des distributions d'ordre $\leqslant m$ est exactement l'image de $\mathcal{D}^m(\Omega)'$ dans $\mathcal{D}'$. Dans la suite on les identifie et on note $\mathcal{D}^m(\Omega)' \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ contient $L^1_{loc}(\Omega)$ et les mesures de Radon sur Ω, où $L^1_{loc}(\Omega) = \mathcal{L}^1_{loc}/\sim$, $\sim$ est l'égalité λ-*pp*, $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) = \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon f$ mesurable et $\forall K \subseteq \Omega$ compact $\int_K |f| d\lambda < \infty\}$.

Proposition 2.1.2.

1) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, alors l'application

$$T_f\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi d\lambda$$

est une distribution d'ordre 0. De plus, $L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),\ f \mapsto T_f$ est linéaire et injective.

2) Soit μ une mesure de Radon sur Ω, alors $T_\mu\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi d\mu$ est une distribution d'ordre 0 sur Ω et $\mu \mapsto T_\mu$ est linéaire injective.

Démonstration. 1) T_f est clairement linéaire. Soit $K \subseteq \Omega$ compact et $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, alors $|\langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_K |f| d\mu$, ainsi T_f est une distribution d'ordre 0. $(f \mapsto T_f)$ est clairement linéaire. Montrons l'injectivité. Si $T_f = 0$, soit $K \subseteq \Omega$ compact et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ au voisinage de K. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\lambda = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, poser $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x/\varepsilon)$, de telle sorte que $\varphi_\varepsilon * \chi f \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \chi f$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. On a

$$(\varphi_\varepsilon * \chi f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\chi(y)\varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-N} dy = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi_x d\lambda$$

où $\varphi_x(y) = \chi(y)\varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})\varepsilon^{-N}$. Ainsi $\varphi_x \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\varphi_\varepsilon * (\chi f)(x) = \langle T_f, \varphi_x\rangle = 0$. Donc $\varphi_\varepsilon * \chi f(x) = 0$, $\forall x$. $\varphi_\varepsilon * \chi f \to \chi f$ dans L^1 donc $\chi f = 0$, λ-*pp*. Ceci est vrai $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\forall \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ au voisinage de K donc $f = 0$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$.

2) $(\mu \mapsto T_\mu)$ est clairement linéaire. Soit $K \subseteq \Omega$ compact, $\varphi \in C^\infty_K(\Omega)$, alors $|\langle T_\mu, \varphi\rangle| \leqslant \int_\Omega |\varphi| d\mu \leqslant \mu(K)\|\varphi\|_\infty$, c'est donc une distribution d'ordre 0. T_μ étant d'ordre 0, elle admet une unique extension continue à $C^0_c(\Omega)$, donnée par $\langle \tilde{T_\mu}, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi d\mu$, $\forall \varphi \in C^0_c(\Omega)$. Ici $(\mu \mapsto \tilde{T_\mu})$ est injective par Théorème de Riesz, donc $(\mu \mapsto T_\mu)$ est injective. $\square$

Exemple 2.1.1. $\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$, la limite $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ existe et l'application

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

est une distribution d'ordre 1. Notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$. En fait, avec une intégration par parties, on a

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = (\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))ln(\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty} (\varphi'(x) + \varphi'(-x))ln(x)dx.$$

Écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + O(x)$, $(\varphi(-x) - \varphi(x))ln(x) = O(xlnx) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, mais $(x \mapsto ln|x|) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ car $ln|x| = o(|x|^{-\frac{1}{2}})$. Donc la limite existe et vaut $-\int_\mathbb{R} \varphi'(x)ln|x|dx = \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$. Soit $K \subseteq \mathbb{R}$ compact et $\varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R})$, alors

$$|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| \leqslant (\int_K ln|x|dx)\|\varphi'\|_\infty.$$

Donc $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre $\leqslant 1$. Si $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre 0, alors $\forall K$ compact, $\exists c > 0$ tel que $\forall \varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R})$,

$$|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_\infty.$$

Mais par le lemme d'Uryshon C^∞, on peut prendre $[\frac{1}{n}, 1] \prec \chi_n \prec]\frac{1}{2n}, 2[$, alors $\|\chi_n\|_\infty = 1$, $K = [0, 2]$, $\chi_n \in C^\infty_K(\mathbb{R})$, et

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\chi_n(x)}{x} dx \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x} dx = ln(n)$$

si $\varepsilon < \frac{1}{n}$. Donc $\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \chi_n\rangle \geqslant ln(n) \to +\infty$, contradiction. Donc $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.

Rappel. E evt avec dual topologique E'. La *topologie $*$-faible* sur E' est la topologie donnée par la famille de semi-normes $\{E' \to \mathbb{R}_+,\ u \mapsto |\langle u, x\rangle| \colon x \in E\}$. Donc u_n converge

$*$-faiblement vers u si et seulement si $\langle u_n, x\rangle \to \langle u, x\rangle$, $\forall x \in E$. On munit $\mathcal{D}^m(\Omega)'$ de la topologie $*$-faible. $\mathcal{D}^m(\Omega)'$ est un evtlc séparé.

Remarque. $\mathcal{D}^m(\Omega)' \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ n'est pas fermé en général. En effet, soient les fonctions $f_n = (x \mapsto \mathbb{1}_{\{y\in\mathbb{R}:\ |y|\geqslant \frac{1}{n}\}}(x)\frac{1}{x}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_n \varphi d\lambda = \int_{|x|\geqslant \frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$$

alors $f_n \to \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ au sens des distributions.

Proposition 2.1.3. (T_n) suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la suite $(\langle T_n, \varphi\rangle)_n$ converge, alors $(T_n)_n$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $\langle T, \varphi\rangle := \lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle$.

Démonstration. Un résultat direct du Théorème Banach-Steinhaus. Voir exercice 1.3.4.
□

Exercice 2.1.1 (Limites)**.**
Calculer les limites $*$-faibles dans l'espaces des distributions des suites de distributions suivantes.

a) $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$.
b) $S_n = n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_0)$.
c) $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq B(0, \varepsilon_n)$, $f_n \geqslant 0$, $\int f_n d\lambda = 1$ et $\varepsilon_n \to 0$.

Démonstration.

a) $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}) \to -2\delta_0'$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + o(x)$, $\varphi(\pm\frac{1}{n}) = \varphi(0) \mp \frac{1}{n}\varphi'(0) + o(\frac{1}{n})$. Alors $\langle T_n, \varphi\rangle = n(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(-\frac{1}{n})) = 2\varphi'(0) + o(\frac{1}{n}) \to 2\varphi'(0) = \langle -2\delta_0', \varphi\rangle$.
b) $S_n = n^2(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_0) \to \delta_0''$. En effet, il suffit de faire un développement de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour voir ce résultat.
c) $f_n \to \delta_0$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$|\langle f_n, \varphi\rangle - \langle \delta_0, \varphi\rangle| = |\int f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))dx| \leqslant \int_{B(0,\varepsilon_n)} f_n(x)|\varphi(x) - \varphi(0)|dx$$

Comme φ est C^1, $d\varphi$ est bornée sur le compact $\bar{B}(0,1)$, soit M. Par l'inégalité des accroissements finis, on a $|\langle f_n, \varphi\rangle - \langle \delta_0, \varphi\rangle| \leqslant M\varepsilon_n \to 0$.

□

Exercice 2.1.2 (Calculs d'ordre)**.**

a) Montrer que $\langle S, \varphi\rangle = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k}(\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(0))$ définit élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont on calculera l'ordre.

b) Montrer que $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n\geqslant 0} \varphi^{(n)}(n)$ définit élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dont on calculera l'ordre.

Démonstration.

a) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle S, \varphi\rangle = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k}(\varphi(\frac{1}{k}) - \varphi(0))$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\langle S, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}\|\varphi'\|_\infty$. Donc ordre($S$)$\leqslant 1$.
Prenons $[\frac{1}{n}, 1] \prec \varphi_n \prec [0,1]$, alors

$$\langle S, \varphi_n\rangle \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\varphi_n(\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty.$$

Donc S n'est pas d'ordre 0.

b) $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n\geqslant 0} \varphi^{(n)}(n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ compact, soit $n \in \mathbb{N}$, $K \subseteq [-n, n]$, $\forall \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ alors $\varphi^{(m)}(m) = 0$, $\forall m \geqslant n+1$. $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant (n+1)\max_{0\leqslant k\leqslant n} \|\varphi^{(k)}\|_\infty$.
Si $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall K \subseteq \mathbb{R}$ compact, $\exists c > 0$ tel que $\forall \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c \max_{j\leqslant m} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

Prenons $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \prec \psi_0 \prec]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, et $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$, et $\phi(x) = \psi(\lambda(x-m-1))$, $\lambda > 1$. On a $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq [m+1-\frac{1}{2\lambda}, m+1+\frac{1}{2\lambda}] =: K$. Comme $\psi^{(m+1)}(0) = 1$, on a $\langle T, \phi\rangle = \lambda^{m+1}$, et $\forall j \leqslant m$, $|\phi^{(j)}(x)| \leqslant \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_\infty$. Donc

$$\lambda^{m+1} \leqslant c(\max_{j\leqslant m} \|\psi^{(j)}\|_\infty)\lambda^m.$$

Impossible si $\lambda >> 1$. Donc T est d'ordre infini.

□

2.2 support des fonctions localement intégrables

Définition 2.2.1. Pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on définit le *support* de f l'ensemble ci-dessous :

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega \colon \forall U \text{ voisinage ouvert de } x,\ \lambda(U \cap f^{-1}(\mathbb{C}^*)) > 0\}.$$

Proposition 2.2.1. On a des propriétés suivantes :

1) Ces deux notions de support sont les mêmes lorsque f est continues et que $\operatorname{supp}(f)$ est un fermé dans Ω (pour la topologie induite de $\mathbb{R}^N$ sur Ω), pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

2) $\forall \varphi \in C^0(\Omega)$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{supp}(\varphi(a.))$=$a^{-1}\operatorname{supp}(\varphi)$.

3) $\forall \varphi, \psi \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi + \psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\psi)$ et $\operatorname{supp}(\varphi\psi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$.

4) $\forall \varphi, \psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ convolables, $\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi)}$.

5) $\forall m \geqslant 1$, $\forall \varphi \in C^m(\Omega)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, $\operatorname{supp}(\partial^\alpha \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi)$.

Démonstration. 1) 2) 3) 5) conséquences directes de la définition. Montrons 4). Soit $N \subseteq \mathbb{R}^N$, $\lambda(N) = 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash N$, $H_x \colon y \mapsto \varphi(x-y)\psi(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. Montrons que si $x \in \mathbb{R}^N \backslash (N \cup (\overline{\operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi)}))$, alors $H_x(y) = 0$, y-pp. Noter

$$N_\varphi = \{z \in \mathbb{R}^N \backslash \operatorname{supp}(\varphi) \mid \varphi(z) \neq 0\}$$
$$N_\psi = \{z \in \mathbb{R}^N \backslash \operatorname{supp}(\psi) \mid \psi(z) \neq 0\}$$

On a $\lambda(N_\varphi) = \lambda(N_\psi) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^N \backslash (N \cup (\overline{\operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi)})$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^N$, on a

(a) soit $x - y \notin \operatorname{supp}(\varphi)$,

(b) soit $y \notin \operatorname{supp}(\psi)$.

Donc si $H_x(y) \neq 0$, alors

(a) $\Rightarrow x - y \in N_\varphi$,

(b) $\Rightarrow y \in N_\psi$.

Autrement dit, $\{y \in \mathbb{R}^N \colon H_x(y) \neq 0\} \subseteq (\{x\} - N_\varphi) \cup N_\psi$ qui est de mesure nulle. Donc $H_x(y) = 0$, *y-pp*. Donc si $x \in \mathbb{R}^N \backslash (N \cup (\overline{\operatorname{supp}(\varphi) + \operatorname{supp}(\psi)}))$, alors $(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} H_x(y)dy = 0$, $\varphi * \psi|_{\mathbb{R}^N \backslash \overline{\operatorname{supp}(\varphi)+\operatorname{supp}(\psi)}} = 0$, λ-*pp*. □

2.3 Calcul des distributions

Le calcul des distributions est basé sur la notion de transposition. On cherche à transposer les applications $\mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ linéaires continues classiques du calcul différentiel.

Théorème 2.3.1. $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ouverts et $\pi \colon \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ linéaire telle que

1) $\forall K \subset \Omega_1$ compact, $\exists\ K' \subseteq \Omega_2$ compact, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$,

$$\forall\ \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \Rightarrow \operatorname{supp}(\pi(\varphi)) \subseteq K'.$$

2) $\forall K \subseteq \Omega_1$ compact, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$, $\exists m' \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathbb{C}_K^\infty(\Omega_1)$,

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha(\pi(\varphi))\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m'} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Alors π est continue.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\pi|_{C_K^\infty}(\Omega_1) \colon C_K^\infty(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$ est continue, $\forall K \subseteq \Omega$ compact. On fixe $K \subseteq \Omega$ compact. Par 1), $\exists K' \subseteq \Omega_2$. Comme la topologie de $\mathcal{D}(\Omega_2)$ restreinte à $C_{K'}^\infty(\Omega_2)$ est celle de Fréchet $C_{K'}^\infty(\Omega_2)$, il suffit de vérifier que l'application restreinte $\pi|_{C_K^\infty(\Omega_1)} \colon C_K^\infty(\Omega_1) \to C_{K'}^\infty(\Omega_2)$ est continue. C'est juste 2). □

Remarque. La même preuve montre qu'une application linéaire

$$\pi \colon \mathcal{D}^{m_1}(\Omega_1) \to \mathcal{D}^{m_2}(\Omega_2)$$

est continue si elle satisfait 1) et la version modifiée de 2) suivante :

- $m_1 = \infty,\ m_2 < \infty$. $\forall K \subseteq \Omega_1$ compact, $\exists c > 0$, $\exists m' \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega_1)$,

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m_2} \|\partial^\alpha \pi(\varphi)\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m'} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

- $m_1 < \infty,\ m_2 = \infty$. $\forall K \subseteq \Omega_1$ compact, $\exists c > 0$, $\forall m' \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in C_K^{m_1}(\Omega_1)$,

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m'} \|\partial^\alpha \pi(\varphi)\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m_1} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

- $m_1 < \infty,\ m_2 < \infty$. $\forall K \subseteq \Omega_1$ compact, $\exists c > 0$, $\forall \varphi \in C_K^{m_1}(\Omega_1)$,

$$\sup_{|\alpha| \leqslant m_2} \|\partial^\alpha \pi(\varphi)\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m_1} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

2.3.1 Dérivations des distributions

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, l'application linéaire

$$\partial^\alpha \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$$

est continue par le Théorème 2.3.1.

Définition 2.3.1. $\alpha \in \mathbb{N}^N$. On note $\partial^\alpha := (-1)^{|\alpha|}\ {}^t(\partial^\alpha) \colon \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$. Ainsi, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\partial^\alpha T$ est l'unique distribution telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$.

Proposition 2.3.2. $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

1) Si $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, sa dérivée au sens des distributions $\partial^\alpha f$ et sa dérivée usuelle $\partial^\alpha f$ coïncident.
2) Si T est d'ordre $\leqslant m$, alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre $\leqslant m + |\alpha|$.

Démonstration. 1) Par récurrence, il suffit de faire la preuve pour $|\alpha| = 1$. Noter $\partial_{x_k} f$ au sens des distributions, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ au sens usuel, où $f \in C^1(\Omega)$ et $1 \leqslant k \leqslant N$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, comme φ est à support compact, une intégration par parties (avec Fubini) donne

$$\langle \partial_{x_k} f, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} d\lambda = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi d\lambda = \langle \frac{\partial f}{\partial x_k}, \varphi \rangle.$$

2) Si T d'ordre $\leqslant m$, alors $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists c > 0$, $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\beta| \leqslant m} |\partial^\beta \varphi(x)|$$

Comme $\mathrm{supp}(\partial^\alpha \varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$, on a

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\beta| \leqslant m} |\partial^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| = c \sup_{x \in K, |\beta| \leqslant m + |\alpha|} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Cela montre que $\partial^\alpha T$ est d'ordre $|\alpha| + m$. □

Exemple 2.3.1.

1) $(x \mapsto ln|x|) \in L_{loc}(\mathbb{R})$, $ln|x|' = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
   En effet, on a que $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = -\int_\mathbb{R} ln|x| \varphi'(x) dx = -\langle ln|x|, \varphi' \rangle = \langle ln|x|', \varphi \rangle.$$

2) $\mathbb{1}'_{[0,+\infty[} = \delta_0$ la mesure de Dirac en 0.
   En effet, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathbb{1}'_{[0,+\infty[}, \varphi \rangle = -\langle \mathbb{1}_{[0,+\infty[}, \varphi' \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = -\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

3) Calculer l'ordre de $\partial^\alpha \delta_{x_0}$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0), \ |\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle| \leqslant \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Donc $\partial^\alpha(\delta_{x_0})$ est d'ordre $\leqslant |\alpha|$. Si $\partial^\alpha\delta_{x_0}$ est d'ordre $k < |\alpha|$, alors $\forall K \subset \mathbb{R}^N$ compact, $\exists c > 0$ tels que $\forall \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^N)$,on a

$$|\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi\rangle| = |\partial^\alpha \varphi(x_0)| \leqslant c \sup_{|\beta|\leqslant k} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons comme $K = \overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Fixons $\psi_0 \in C_K^\infty(B(0,\varepsilon))$ telle que $\psi_0(x) = 1$ pour $|x| \leqslant \varepsilon/2$. Posons alors $\psi(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi_0(x)$. Par la formule de Leibniz, on a $\partial^\alpha\psi(0) = \psi_0(0) = 1$. Posons enfin $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - x_0))$ où $\lambda \geqslant 1$. On a $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B(x_0, \varepsilon\lambda^{-1}) \subseteq K$. De plus, $\partial^\alpha\varphi(x_0) = \lambda^{|a|}\partial^\alpha\psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$. Pour $|\beta| \leqslant k$,

$$|\partial^\beta\varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}|\partial^\beta\psi(\lambda(x - x_0))| \leqslant \lambda^k\|\partial^\beta\psi\|_\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors, pour tout $\lambda \geqslant 1$, on devrait avoir

$$\lambda^{|\alpha|} = |\partial^\alpha\varphi(x_0)| \leqslant c \sup_{|\beta|\leqslant k} \|\partial^\beta\varphi\|_\infty \leqslant \lambda^k \cdot c \sup_{|\beta|\leqslant k} \|\partial^\beta\psi\|_\infty.$$

on aboutit à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$ puisque $|\alpha| > k$. Donc $\partial^\alpha\delta_{x_0}$ est d'ordre exactement $|\alpha|$.

2.3.2 Multiplication

Pour $f \in C^\infty(\Omega)$ l'application

$$M_f \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega), \ \varphi \to f\varphi$$

est linéaire et continue. M_f est clairement linéaire. Montrons que M_f est continue. Notations : $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$. Note $\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leqslant \beta_i, \ \forall i$, et $\alpha! = \prod_{k=1}^N \alpha_k!$. Lorsque $\beta \leqslant \alpha$, on note $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_N - \beta_N) \in \mathbb{N}^N$ et $C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$. Pour $K \subseteq \Omega$ compact, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, en utilisant

$$\partial^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta(\partial^{\alpha-\beta}f)\partial^\beta\varphi$$

On obtient que

$$\sup_{|\alpha|\leqslant n} \|\partial^\alpha(f\varphi)\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant n} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty$$

où $c = \sup_{|\alpha|\leqslant n}\{\sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\beta^\alpha \sup_{x\in K} |\partial^{\alpha-\beta}f(x)|\}$.

Définition 2.3.2. $f \in C^\infty(\Omega),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit

$$f. : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),\ T \mapsto f.T := {}^tM_f(T)$$

$f.$ est bien définie car $f.T$ est une application linéaire et continue comme une composition de deux applications linéaires et continues.

Exemple 2.3.2. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. C'est facile de vérifier que :

1) $f.\delta_0 = f(0)\delta_0$.
2) $f.\delta_0' = -f'(0)\delta_0 + f(0)\delta_0'$.
3) Noter $x = (x \mapsto x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors $x.\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$.

Proposition 2.3.3.

1) L'application $C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega),\ (f,T) \mapsto f.T$ est bilinéaire.
2) $\forall f \in C^\infty(\Omega),\ \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(f.T) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\beta^\alpha \partial^\beta f.\partial^{\alpha-\beta}T$.
3) Si ordre $T \leqslant m$, alors ordre de $(f.T) \leqslant m$. De plus, $\forall f \in C^m(\Omega)$, l'application $M_f : \mathcal{D}^m(\Omega) \to \mathcal{D}^m(\Omega)$ est linéaire continue et donc $f.T$ a du sens pour $f \in C^m(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}^m(\Omega)'$.

Démonstration. 1) Clair.
2) Leibniz.
3) Leibniz. □

Proposition 2.3.4 (Formule différentielle en dimension 1)**.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^1 par morceau et $a_1 < \ldots < a_n$ une suite adoptée à f (c'est-à-dire f est C^1 sur $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[$, $\ldots$, $]a_{n-1}, a_n[$, $]a_n, +\infty[$ et de plus, f admet des limites droite/gauche $f(a_k^-)$ et $f(a_k^+)$ qui peuvent être différents). Au sens des distributions, on a

$$f' = \sum_{k=0}^{n} \frac{df}{dx} \mathbb{1}_{]a_k, a_{k+1}[} + \sum_{k=1}^{n} [f(a_k^+ - f(a_k^-)]\delta_{a_k}$$

avec $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$.

Démonstration. Une intégration par parties donne $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' d\lambda \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\varphi'(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(t)\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n} f(a_k^+)\varphi(a_k) - f(a_{k+1}^-)\varphi(a_{k+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=0}^{n} f' \mathbb{1}_{]a_k, a_{k+1}[})\varphi d\lambda + \sum_{k=0}^{n} [f(a_k^+) - f(a_k^-)]\varphi(a_k).\end{aligned}$$

Cela fini la démonstration. □

Proposition 2.3.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert.

1) Les solutions dans $\mathcal{D}'(I)$ de $T' = 0$ sont les fonctions constantes.
2) Si $u \in \mathcal{D}'(I)$, l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(I)$ de $T' = u$ est un espace affine de dimension 1.

Démonstration. Soit $\chi \in \mathcal{D}(I)$, $\int_{\mathbb{R}} \chi d\lambda = 1$. Notons que pour $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, la fonction

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} [\varphi(t) - (\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda)\chi(t)]dt$$

est dans $\mathcal{D}(I)$.

1) Si $T' = 0$ alors,

$$\langle T, \varphi - (\int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda)\chi \rangle = \langle T, \psi' \rangle = -\langle T', \psi \rangle = 0.$$

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\lambda \langle T, \chi \rangle$. Donc T est la fonction constante égale à $\langle T, \chi \rangle$.

2) Il suffit de trouver $T_0 \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $T_0' = u$ et par le point 1) on aura que l'ensemble des solutions est $T_0 + \mathbb{C}1$. Poser $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on pose $\langle T_0, \varphi \rangle := -\langle u, \psi \rangle$, $T_0 \colon \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ est linéaire et continue. C'est-à-dire $T_0 \in \mathcal{D}'(I)$, alors $\forall \varphi \in$ on a

$$\langle T_0', \varphi \rangle = -\langle T_0, \varphi' \rangle = \langle u, \psi_{\varphi'} \rangle.$$

Ici $\psi_{\varphi'}(x) = \int_{-\infty}^{x} (\varphi'(t) - (\int_{\mathbb{R}} \varphi')\chi(t))dt = \varphi(x)$ car $\int \varphi' = 0$ car φ à support compact. On a donc $\langle T_0', \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \Rightarrow T_0' = u$. □

Théorème 2.3.6. supposons $n \geqslant 1$.

1) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $x^n.T = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C},\ T = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \delta_0^{(j)}$, où $x^n = (x \mapsto x^n) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2) $\forall S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\exists T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $S = x^n.T$.

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ écrire $\varphi(x) = P_{\varphi,n}(x) + \psi_{\varphi,n}(x)x^n$, où

$$P_{\psi,n}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} x^j \text{ et } \psi_{\varphi,n} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(m)}(tx)dt.$$

Notons que $P_{\varphi,n} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et par théorème de dérivation sous l'intégrale $\psi_{\varphi,n} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur un voisinage de 0. On a $\chi P_{\varphi,n}, \chi\psi_{\varphi,n} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1) Supposons $x^n.T = 0$, écrire $\varphi = x^n(1-\chi)x^{-n}\varphi + \chi\varphi$. On a $(1-\chi)x^{-n}\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi \rangle &= \langle x^n.T, (1-\chi)x^{-n}\varphi\rangle + \langle T, \chi\varphi\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle \\ &= \langle T, \chi P_{\varphi,n}\rangle + \langle T, \chi\psi_{\varphi,n}x^n\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \langle T, \chi x^j\rangle + \langle x^n.T, \chi\psi_{\varphi,n}\rangle \\ &= \langle \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \delta_0^{(j)}, \varphi\rangle\end{aligned}$$

où $\lambda_j = \frac{\langle T, \chi x^j\rangle}{j!}$. La réciproque est claire.

2) Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Poser $T \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\langle T, \varphi\rangle := \langle S, \chi\psi_{\varphi,n}\rangle + \langle S, x^{-n}(1-\chi)\varphi\rangle$. On vérifie facilement que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Poser $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour $\Psi = x^n\varphi$, on a alors, par la formule de Leibniz, $P_{\Psi,n} = 0$ et donc $x^n\psi_{\Psi,n} = x^n\varphi(x)$. Par continuité en 0, on a $\psi_{\Psi,n} = \varphi$. Ainsi, $\langle x^n.T, \varphi\rangle = \langle T, x^n\varphi\rangle = \langle S, \chi\psi_{\Psi,n}\rangle + \langle S, x^{-n}(1-\chi)x^n\varphi\rangle = \langle S, \chi\varphi\rangle + \langle S, (1-\chi)\varphi\rangle = \langle S, \varphi\rangle$.

$\square$

Exemple 2.3.3. Les solutions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $x.T = 1$ sont $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + \lambda\delta_0, \lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.3.1 (Résolution d'équations différentielles)**.**

a) Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T' = aT$ $(a \in \mathbb{R})$.
b) Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $T' + T = H$, H la fonction de Heaviside.
c) Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $x.T' + T = 0$.

Démonstration.

a) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}0 &= \langle aT - T', \varphi\rangle = \langle T, a\varphi + \varphi'\rangle \\ &= \langle T, e^{-ax} \cdot (e^{ax}\varphi)'\rangle = \langle e^{ax}.(e^{-ax}.T)', \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $e^{ax}.(e^{-ax}.T)' = 0$. Par la proposition 2.3.5 et la remarque dans la démonstration du théorème 3.6.2, $T = Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{C}$.

b) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle H, \varphi\rangle &= \langle T + T', \varphi\rangle = \langle T, \varphi - \varphi'\rangle \\ &= \langle T, e^{x}(-e^{-x}\varphi)'\rangle = \langle e^{-x}.(e^{x}.T)', \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $(e^x.T)' = e^x \cdot H$. Par l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\langle ((e^x - 1) \cdot H)', \varphi\rangle = -\langle (e^x - 1) \cdot H, \varphi'\rangle &= -\int_0^\infty (e^x - 1)\varphi'(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^x \varphi(x)dx = \langle e^x \cdot H, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Alors $((e^x - 1) \cdot H)' = e^x \cdot H$ au sens de distribution. Par la proposition 2.3.5, $T = (1 - e^{-x}) \cdot H + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{C}$.

c) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}0 &= \langle x.T' + T, \varphi\rangle = -\langle T, (x\varphi)'\rangle + \langle T, \varphi\rangle \\ &= -\langle T, x\varphi'\rangle = \langle (x.T)', \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $(x.T)' = 0$. Par la proposition 2.3.5 et le théorème 2.3.6, $T = C_1 \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + C_2\delta_0$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

□

2.3.3 Changement de variable

Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ouverts et $\theta \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ un C^∞-difféomorphisme. La différentielle $d\theta \colon \Omega_1 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ est de classe C^∞ telle que $\forall x \in \Omega$, $d\theta_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ est inversible. On note $J_\theta(x) = |\det d\theta_x|^{-1}$. Alors $J_\theta \in C^\infty(\Omega_1)$.

Considérons $V_\theta\colon \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\forall y \in \Omega_2$,

$$V_\theta(\varphi)(y) = J_\theta(\theta^{-1}(y))\varphi(\theta^{-1}(y)) = M_{J_\theta}(\varphi)(\theta^{-1}(y))$$

Théorème 2.3.7. V_θ est linéaire continue. Sa transposée ${}^tV_\theta\colon \mathcal{D}'(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ est appelé *le changement de variables* pour θ, noté $T \circ \theta := {}^tV_\theta(T)$ pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Ainsi on a $\langle T \circ \theta, \varphi\rangle = \langle T, V_\theta(\varphi)\rangle$.

Démonstration. La linéarité est claire, et comme $J_\theta \in C^\infty(\Omega_1)$, l'application linéaire $M_{J_\theta}\colon \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_1)$ est continue. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \theta^{-1}$ est continue. Soit $K \subset \Omega_1$ compact et $\varphi \in C^\infty_K(\Omega_1)$, alors $\operatorname{supp}(\varphi \circ \theta^{-1}) \subseteq \theta(K)$ qui est compact dans Ω_1. Il suffit donc de montrer que $\forall m \geqslant 0,\ \exists c > 0,\ \exists m' \geqslant 0,\ \forall \varphi \in C^\infty_K(\Omega_1)$,

$$\sup_{|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha(\varphi \circ \theta^{-1})\|_\infty \leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant m'} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

Par récurrence sur $m \geqslant 0$. $m = 0$ c'est claire. On suppose pour m c'est vrai. Soit $\gamma \in \mathbb{N}^N,\ |\gamma| = m+1, \exists \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| = m$ et $1 \leqslant k \leqslant N$ tels que $\partial^\gamma = \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \partial^\alpha$. En notant $(e_1, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi \circ \theta^{-1})(x) &= d_x \varphi \circ \theta^{-1}(e_k) \\
&= d_{\theta^{-1}(x)}\varphi(\frac{\partial \theta^{-1}}{\partial x_k}(x)) \\
&= \sum_{l=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}(\theta^{-1}(x)) \frac{\partial \theta_l^{-1}}{\partial x_k}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi \circ \theta^{-1}) = \sum_{l=1}^N (\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \circ \theta^{-1})(\frac{\partial \theta_l^{-1}}{\partial x_k}).$$

Avec Leibniz on a

$$\partial^\gamma(\varphi \circ \theta^{-1}) = \sum_{l=1}^N \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta[\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \circ \theta^{-1}] \partial^{\alpha-\beta}(\frac{\partial \theta_l^{-1}}{\partial x_k}).$$

Si $\varphi \in C^\infty_K(\Omega_1)$ comme $\operatorname{supp}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_l}) \subseteq K$, on a

$$\|\partial^\gamma(\varphi \circ \theta^{-1})\|_\infty \leqslant D \sum_{l=1}^N \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\alpha^\beta \|\partial^\beta[\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} \circ \theta^{-1}]\|_\infty$$

où

$$D = \sum_{1\leqslant l\leqslant N, x\in\theta(K), \beta\leqslant\alpha} |\partial^{\alpha-\beta}(\frac{\partial\theta_l^{-1}}{\partial x_k})(x)|.$$

Donc

$$\|\partial^\gamma(\varphi\circ\theta^{-1})\|_\infty \leqslant c' \sup_{|\rho|\leqslant m'+1} \|\partial^\rho\varphi\|_\infty$$

où $c' = NDc\sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta$. Cela fini la démonstration par récurrence. □

Exemple 2.3.4. Les exemples suivants seront souvent utilisés.

1) $x \in \mathbb{R}^N$, $\tau_x \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,\ y \mapsto y + x$ la translation par x. Alors $\tau_x^{-1} = \tau_{-x},\ J_{\tau_x} \equiv 1$. Donc $\langle T\circ\tau_x, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\circ\tau_{-x}\rangle$.
2) $A \in GL_N(\mathbb{R})$, alors
$$\langle T\circ A, \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle T, \varphi\circ A^{-1}\rangle$$
3) Lorsque A est une homothétie $A = \lambda\mathrm{id}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert tel que $\lambda\Omega \subseteq \Omega$, on a
$$\langle T\circ\lambda\mathrm{id}, \varphi\rangle = |\lambda|^{-N}\langle T, \varphi(\lambda^{-1}\cdot)\rangle$$
$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Exemple 2.3.5. $\theta \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ C^∞-difféomorphisme.

1) Si $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$ et par la formule de changement de variables, $T_f\circ\theta = T_{f\circ\theta}$.
2) $y \in \Omega_2$, $\delta_y\circ\theta = |\det d_x\theta|^{-1}\delta_x$, où $\theta(x) = y$.
3) $\forall\alpha \in \mathbb{N}^N,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$, $(\partial^\alpha\delta_0)\circ\lambda\mathrm{id} = |\lambda|^{-N-|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

2.3.4 Restriction-Recollement

Définition 2.3.3 (Restriction)**.** Soient $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ouverts. L'inclusion $\iota_{\Omega_1\subseteq\Omega_2} \colon \mathcal{D}^m(\Omega_1) \subseteq \mathcal{D}^m(\Omega_2)$ $(m \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\})$ est linéaire et continue, sa transposée

$${}^t\iota_{\Omega_1\subseteq\Omega_2} \colon \mathcal{D}^m(\Omega_2)' \to \mathcal{D}^m(\Omega_1)'$$

pour $T \in \mathcal{D}^m(\Omega_2)'$ est appelée *la restriction* et notée $T|_{\Omega_1} = {}^t\iota_{\Omega_1\subseteq\Omega_2}(T)$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, alors $T|_{\Omega_1}$ est l'unique élément de $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ tel que $\langle T|_{\Omega_1}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1) \subseteq \mathcal{D}(\Omega_2)$.

Notons que si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$ alors $(T|_{\Omega_2})|_{\Omega_1} = T|_{\Omega_1}$. De plus, si $O \subseteq \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, alors $\partial^\alpha(T|_O) = (\partial^\alpha T)|_O$.

Exemple 2.3.6.

1) $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$, $f \in L^1_{loc}(\Omega_2)$, alors $(T_f)\big|_{\Omega_1} = T_{(f|_{\Omega_1})}$.

2) $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})\big|_{\mathbb{R}^*} = (x \mapsto \frac{1}{x}) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$.

Théorème 2.3.8 (partition de l'unicité)**.** Soit $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$, K compact, Ω ouvert. $n \geqslant 1$, $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subseteq \Omega$ des ouverts tels que $K \subset \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\exists \psi_k \in C^\infty_c(\Omega_k, [0,1])$ et V ouvert tels que $K \subseteq V \subseteq \Omega$, $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1$, $\forall x \in V$, $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) \in [0,1]$, $\forall x \in \Omega$.

Remarque. Soient $S, O \subseteq \mathbb{R}^N$, S compact, O ouvert et $S \subset O$ alors $\exists V \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert d'adhérence compacte et tel que $S \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq O$. En effet la fonction continue $x \mapsto d(x, O^c))$ admet un minimum sur le compact S, on met $\delta = \{d(x, O^c) \mid x \in S\}$, on pose $V = \{x \in O \mid d(x, S) < \frac{\delta}{2}\}$.

Démonstration. Soit $S_1 = K \backslash (\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_m)$, alors S_1 est compact et $S_1 \subseteq \Omega_1$. Par la remarque, $\exists V_1$ ouvert d'adhérence compacte tel que $S_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq \Omega_1$. On a $K \subseteq S_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_n \subseteq V_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_m$. On pose $S_2 = K \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_n) \subseteq \Omega_2$, S_2 compact. On obtient V_2 ouvert avec $\overline{V_2}$ compact et $S_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subset \Omega_2$. Alors $K \subset \Omega_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_n$. Par intersection $K \subset V_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots \cup \Omega_n$, on construit récursivement des ouverts $V_1, \dots, v_n$ avec $\overline{V_1}, \dots, \overline{V_n}$ compacts $\overline{V_i} \subset \Omega_i$ tels que $\forall j$, $K \subset V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_j \cup \Omega_{j+1} \cup \cdots \cup \Omega_n$. On pose $V = \bigcup_{j=1}^n V_j$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, prendre $\varphi_k \in C^\infty_c(\Omega_k)$, $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$ et $\varphi_k \equiv 1$ au voisinage de $\overline{V_k}$. On pose $\psi_1 = \varphi_1, \psi_2 = \varphi_2(1-\varphi_1), \dots, \psi_k = \varphi_k(1-\varphi_{k-1}) \cdots (1-\varphi_1), \cdots$. Ainsi $\psi_k \in C^\infty_c(\Omega_k)$, $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$. Par récurrence sur n on trouve

$$\sum_{k=1}^n \psi_k = \sum_{k=1}^n \varphi_k \prod_{1 \leqslant j \leqslant k-1} (1 - \varphi_j) = 1 - \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 - \varphi_k).$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) \in [0,1]$, $\forall x \in \Omega$, et $\forall x \in V$, $\exists j$ tel que $x \in V_j$ donc $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1$. $\square$

Théorème 2.3.9 (Recollement)**.** $\Omega_k \subseteq \mathbb{R}^N$, $k \in L$ des ouverts et $\Omega = \bigcup_{k \in L} \Omega_k$. Si $\forall k$, $T_k \in \mathcal{D}'(\Omega_k)$ telles que $T_k|_{\Omega_k \cap \Omega_j} = T_j|_{\Omega_k \cap \Omega_j}$, $\forall k, j \in L$, alors $\exists! T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T|_{\Omega_k} = T_k$, $\forall k \in L$.

Démonstration. Si $K \subseteq \Omega$ est compact, $\exists J \subseteq L$, $|J| < +\infty$ tel que $K \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j$. Fixer une partition de l'unicité $(\psi_j)_{j \in J}$, $\psi_j \in C^\infty_c(\Omega_j, [0,1])$, $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, $\sum_j \psi_j \equiv 1$ au voisinage de K, $\sum_j \psi_j \leqslant 1$.

Unicité : Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega),\ T|_{\Omega_k} = S|_{\Omega_k},\ \forall k \in L$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$,

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \sum_{j\in J} \varphi\psi_j\rangle = \sum_{j\in J}\langle T, \varphi\psi_j\rangle \\ &= \sum_{j\in J}\langle T|_{\Omega_j}, \varphi\psi_j\rangle = \sum_{j\in J}\langle S|_{\Omega_j}, \varphi\psi_j\rangle = \langle S, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Existence : Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$. On pose $\langle T, \varphi\rangle := \sum_{j\in J}\langle T_j, \varphi\psi_j\rangle$ où l'on voit $\varphi\psi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$. Montrons que cette définition ne dépend pas de la décomposition choisie. supposons que $\varphi = \sum_{i\in I} \varphi\rho_i$ où $\rho_i \in C_c^\infty(\Omega_i),\ I \subseteq L,\ |I| < +\infty$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I}\langle T_i, \varphi\rho_i\rangle &= \sum_{i\in I}\langle T_i, (\sum_{j\in J}\varphi\psi_j)\rho_i\rangle = \sum_{i\in I, j\in J}\langle T_i, \varphi\rho_i\psi_j\rangle \\ &= \sum_{i\in I, j\in J}\langle T_i|_{\Omega_i\cap\Omega_j}, \varphi\rho_i\psi_j\rangle = \sum_{i\in I, j\in J}\langle T_j|_{\Omega_i\cap\Omega_j}, \varphi\rho_i\psi_j\rangle = \sum_{j\in J}\langle T_j, \varphi\psi_j\rangle.\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier la linéarité de $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$. Montrons la continuité de T. Soit $K \subseteq \Omega$ compact. Soit $K_j = \mathrm{supp}(\psi_j) \subseteq \Omega_j$. Comme chaque T_j est continue sur $\mathcal{D}(\Omega_j)$, $\forall j \in J,\ \exists c_{K,j} > 0,\ \exists N_{K,j} \in \mathbb{N}, \forall \varphi \in C_{K,j}^\infty(\Omega_j),\ |\langle T_j, \varphi\rangle| \leqslant c_{K,j} \sup_{x\in K_j, |\alpha|\leqslant N_{K,j}} |\partial^\alpha\varphi(x)|$. Si $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ on a $\varphi = \sum_{j\in J} \varphi\psi_j$. $\varphi\psi_j \in C_{K_j}^\infty(\Omega_j)$ et

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{j\in J} |\langle T_j, \varphi\psi_j\rangle| \leqslant \sum_{j\in J} c_{K,j} \sup_{x\in K_j, |\alpha|\leqslant N_{K,j}} |\partial^\alpha(\varphi\psi_j)(x)|.$$

La Formule de Leibniz donne, $\forall |\alpha| \leqslant N_{K,j}$,

$$|\partial^\alpha\varphi\psi_j(x)| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\beta^\alpha |\partial^{\alpha-\beta}\psi_j(x)||\partial^\beta\varphi(x)| \leqslant D_{\alpha,K,j} \sup_{x\in K_j, |\gamma|\leqslant N_{K,j}} |\partial^\gamma\varphi(x)|.$$

Ainsi,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c_K \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant N_K} |\partial^\alpha\varphi(x)|$$

où $N_K = \max\{N_{K,j}, j \in J\},\ c_K = \sum_{j\in J} \max_{|\alpha|\leqslant N_K} D_{\alpha,K,j}$. □

Proposition 2.3.10.

1) Si ordre(T_k)$\leqslant m$, $\forall k$, alors ordre(T) $\leqslant m$.
2) Si $\exists k$ ordre(T_k) $> m$, alors ordre(T) $> m$.

Démonstration. 1) Par la preuve du Théorème 2.3.9. 2) évident car $T|_{\Omega_k} = T_k$. □

2.4 Support d'une distribution

Définition 2.4.1. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit le support de T :

$$\operatorname{supp}(T) := \{x \in \Omega \mid \forall U \subseteq \Omega \text{ voisinage ouvert de } x,\ T|_U \neq 0\}.$$

Proposition 2.4.1. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

1) $\operatorname{supp}(T)$ est le plus petit fermé F de Ω (pour la topologie de $\mathbb{R}^N$ induite à Ω) satisfaisant $T|_{\Omega\backslash F} = 0$.
2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle = 0$.
3) $\forall S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp}(T+S) \subseteq \operatorname{supp}(T) \cup \operatorname{supp}(S)$.
4) $\forall f \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(f.T) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(T)$.
5) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\operatorname{supp}(\partial^\alpha T) \subseteq \operatorname{supp}(T)$.
6) $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ouverts, $\theta\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ difféomorphisme C^∞, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, alors $\operatorname{supp}(T\circ\theta) \subseteq \theta^{-1}(\operatorname{supp}(T))$.

Démonstration. 1) $\Omega\backslash\operatorname{supp}(T)$ est ouvert donc $\operatorname{supp}(T)$ est fermé dans Ω. Noter $\mathcal{F}(T) = \{F \subseteq \Omega \mid F \text{ fermé et } T|_{\Omega\backslash F} = 0\}$. Si $F \in \mathcal{F}(T)$. Soit $x \in \Omega\backslash F$, $U = \Omega\backslash F$ voisinage ouvert de x tel que $T|_U$=0 et donc $x \notin \operatorname{supp}(T)$, d'où $\operatorname{supp}(T) \subseteq F$. Par définition de $\operatorname{supp}(T)$, $\exists$ recouvrement $\Omega\backslash\operatorname{supp}(T) \subseteq \bigcup_i U_i \subseteq \Omega$, U_i ouverts et $T|_{U_i} = 0$. Par unicité d'un recollement, $T_{\Omega\backslash\operatorname{supp}(T)} = 0$.

2) Conséquence de 1) : Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing$, alors $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \Omega\backslash\operatorname{supp}(T)$, donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T|_{\Omega\backslash\operatorname{supp}(T)}, \varphi\rangle = 0$.

3) Soit $x \in \Omega\backslash(\operatorname{supp}(T) \cup \operatorname{supp}(S))$, $\exists\ U, V$ voisinages ouverts de x tels que $T|_U = 0$ et $S|_V$=0. Alors $U \cap V$ voisinage ouvert de x et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U\cap V)$ on a

$$\begin{aligned}\langle (T+S)|_{U\cap V}, \varphi\rangle &= \langle T+S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle \\ &= \langle T|_U, \varphi\rangle + \langle S|_V, \varphi\rangle = 0.\end{aligned}$$

Donc $x \in \Omega\backslash\operatorname{supp}(T+S)$.

4) Soit $x \in \Omega\backslash(\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(T))$.

Cas 1. Si $x \in \Omega\backslash\operatorname{supp}(f)$, alors $\exists U$ voisinage ouvert de x tel que $f|_U = 0$. Donc $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\langle f.T, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle = 0$.

Cas 2. Si $x \in \Omega\backslash\operatorname{supp}(T)$, $\exists U$ voisinage ouvert de x tel que $T|_U = 0$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$, $f\varphi \in \mathcal{D}(U)$ et donc $\langle f.T, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle = \langle T|_U, f\varphi\rangle = 0$.

5) 6) En exercice.

$\square$

Exemple 2.4.1.

1) Si $f \in L^1_{loc}$, $\text{supp}(T_f) = \text{supp}(f)$.

2) $\text{supp}(\text{vp}(\frac{1}{x})) = \mathbb{R}$. En effet, soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non-vide. Soit $\psi \in \mathcal{D}(U)$, $\int_U \psi d\lambda = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\varphi(x) := x\psi(x)$, alors

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x})|_U, \varphi\rangle = \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x\psi(x)}{x} dx = \int_U \psi d\lambda = 1.$$

3) $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\text{supp}(\partial^\alpha \delta_{x_0}) = \{x_0\}$. En effet, quitte à translation, on peut supposer $x_0 = 0$. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^N$ contenant 0 et $\chi \in \mathcal{D}(U)$ telle que $\chi(0) = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\varphi(x) = x^\alpha \chi(x)$ (si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $x^\alpha := \sum_{i=1}^n x^{\alpha_i}$). Par récurrence on trouve

$$\partial^\beta x^\alpha = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} x^{\alpha - \beta}, \ \beta \leqslant \alpha.$$

Avec Leibniz, $\partial^\alpha \varphi(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\alpha^\beta \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^\beta \chi^{\alpha-\beta}(x)$, en $x = 0$ on trouve $\partial^\alpha \varphi(0) = \chi(0) = 1$. Alors $\langle \partial^\alpha \delta_0|_U, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) = (-1)^{|\alpha|}$. Donc $0 \in \text{supp}(\partial^\alpha \delta_0)$. Mais $\text{supp}(\partial^\alpha \delta_0) \subseteq \text{supp}(\delta_0) = 0$. Si $y \in \mathbb{R}^N$, $y \neq 0$, $\exists U \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert tel que $y \in U$ et $0 \notin U$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\langle \partial^\alpha \delta_0|_U, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0) = 0$, car $\text{supp}(\partial^\alpha \varphi) \subseteq \text{supp}(\varphi) \subseteq U$ et $0 \notin U$. Donc $y \notin \text{supp}(\partial^\alpha \delta_0)$.

Exercice 2.4.1 (Calculs de support)**.** Montrer que $\langle T, \varphi\rangle = \int_\mathbb{R} \varphi(x, -x) d\lambda(x)$ définie une distribution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ dont on calculera l'ordre et le support. Montrer que T est solution de $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y}$ et que T ne peut pas être la distribution associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C}$, $\langle T, \varphi\rangle = \int_\mathbb{R} \varphi(x, -x) dx$. Si $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}^2)$, poser $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, -x) \in K\}$ compact dans $\mathbb{R}$, et $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \lambda(K_1) \|\varphi\|_\infty$. T est donc une distribution d'ordre 0. Montre que $\text{supp}(T) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = D$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash D$, alors $\varphi(x, -x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Réciproquement, soit $M_0 = (x_0, -x_0) \in D$. Poser $\varepsilon > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $B(M_0, \frac{\varepsilon}{2}) \prec \varphi \prec B(M_0, \varepsilon)$. Alors $V = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, -x) \in B(M_0, \frac{\varepsilon}{2})\}$ satisfait $\lambda(V) > 0$ et donc $T(\varphi) > 0$.

- $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-N, N]^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle &= -\int_{-N}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, -t) dt \\
&= -(\varphi(t)) \Big|_{t=-N}^{N} - \int_{-N}^{N} -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(t, -t) dt) \\
&= \langle T, -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle = \langle \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

- Si T associe à $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} g$. Mais soit $\operatorname{supp} g = \varnothing$, soit $\operatorname{supp} g$ est d'intérieur non vide. Contradiction.

□

2.5 Les distributions à support compact

Lemme 2.5.1. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact alors $\forall \chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$, on a $\chi.T = T$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle + \langle T, (1-\chi)\varphi \rangle$. Soit O ouvert tel que $\operatorname{supp}(T) \subseteq O \subseteq \Omega$ et $\chi|_O \equiv 1$, alors $O \subseteq \Omega \backslash \operatorname{supp}((1-\chi)\varphi)$. Ainsi $\operatorname{supp}((1-\chi)\varphi) \subseteq \Omega \backslash O \subseteq \Omega \backslash \operatorname{supp}(T)$. Donc $\langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = \langle T|_{\Omega \backslash \operatorname{supp}(T)}, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$. □

Proposition 2.5.2. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Les deux assertions sont équivalentes :

1) T est à support compact.
2) $\exists K \subseteq \Omega$ compact, $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

De plus, si K, c, m sont comme en 2, alors $\operatorname{supp}(T) \subseteq K$ et $\operatorname{ordre}(T) \leqslant m$.

Démonstration. 1)⇒2). Soit $\chi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 en voisinage de $\operatorname{supp}(T)$. Poser $K = \operatorname{supp}(\chi_0)$. Comme T est une distribution, $\exists c_K > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c_K \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\chi_0 \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$ et par le lemme 2.5.1,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle \chi_0.T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi_0 \varphi \rangle| \leqslant c_K \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \chi_0 \varphi(x)|$$

et $\partial^\alpha(\chi_0\varphi)(x) = \sum_{\beta\leqslant\alpha} C^\alpha_\beta \partial^\beta\chi_0(x)\partial^{\alpha-\beta}\varphi(x)$. Note $c = c_K \sum_{\beta\leqslant\alpha} C^\alpha_\beta \sup_{x\in K,|\gamma|\leqslant m} |\partial^\gamma\chi_0(x)|$. Ainsi, $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant c \sup_{x\in K,|\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha\varphi(x)|$.

2)⇒1) Il suffit de montrer que $\mathrm{supp}(T) \subseteq K$. Si $x \in \Omega\backslash K$, $\exists U \subseteq \Omega$ voisinage ouvert tel que $x \in U$ et $K \cap U = \varnothing$. $\forall\varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\partial^\alpha\varphi(y) = 0$, $\forall y \in K$, $\forall\alpha \in \mathbb{N}^N$. Donc $|\langle T|_U,\varphi\rangle| = |\langle T,\varphi\rangle| \leqslant c \sup_{y\in K,|\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha\varphi(y)| = 0$. Donc $T|_U = 0$. □

Remarque. a) Il ne suffit pas que $\varphi \equiv 0$ sur $\mathrm{supp}(T)$ pour que $\langle T,\varphi\rangle = 0$ (Donc on ne peut pas prendre $K = \mathrm{supp}(T)$ dans cette proposition). En effet, soit $T = \delta_0'$, $\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$, $[-1,1] \prec \rho \prec]-2,2[$, $\varphi(x) := x\rho(x)$. Alors $\mathrm{supp}(T) = \{0\}$, $\varphi(0) = 0$, mais$\langle T,\varphi\rangle = -\varphi'(0) = -\rho(0) = -1 \neq 0$.
b) La proposition est vrai pour tout K voisinage compact de $\mathrm{supp}(T)$ mais pas vrai pour $K = \mathrm{supp}(T)$ en général. Voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.5.1. Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact qui n'est pas réunion finie de compact connexes deux à deux disjoints (par exemple, l'ensemble de Cantor). Donc $K\backslash(K_1 \cup \cdots \cup K_j)$ est compact, $\forall j$. Prendre $\forall j$, $x_j \in K_j$ et un point d'accumulation $x_0 \in K$ de la suite $(x_j)_j$. Quitte à extraire (et renuméroter les K_j) que $x_j \to x_0$. Soit $\lambda_j > 0$ telle que $\sum_{j\geqslant1} \lambda_j = +\infty$, $\sum_{j\geqslant1} \lambda_j|x_j - x_0| = 1$. On peut trouver cette suite car $\lim_{j\to+\infty} |x_j - x_0| = 0$. Poser $T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$,

$$|\langle T,\varphi\rangle| = |\sum_{j\geqslant1} \lambda_j(\varphi(x_j) - \varphi(x_0))| \leqslant \sum_{j\geqslant1} \lambda_j|x_j - x_0|\|\varphi'\|_\infty = \|\varphi'\|_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (et on a ordre(T)=1, voir exercice 2.1.2), $\mathrm{supp}(T) = \overline{\{x_j, j \in \mathbb{N}\}} = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$. Si la proposition 2.5.2 est vrai pour $K = \mathrm{supp}(T)$, alors $\forall j$, soit $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi = 1$ au voisinage de $K_1 \cup \cdots \cup K_j$ et 0 au voisinage de $K\backslash(K_1 \cup \cdots \cup K_j)$, $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$. Alors $|\langle T,\varphi_j\rangle| = \sum_{i\leqslant j} \lambda_i \leqslant c$, d'où une contradiction car $\sum_{j\geqslant1} \lambda_j = +\infty$.

Noter $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ avec sa structure d'espace de Fréchet topologie donnée par la famille de semi-normes $\{p_{m,K} \mid K \subseteq \Omega \text{ compact}, \ m \in \mathbb{N}\}$. $p_{m,K}(f) = \sup_{x\in K,|\alpha|\leqslant m} |\partial^\alpha f(x)|$. L'inclusion naturelle $\iota\colon \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ est continue car sa restriction à $C^\infty_K(\Omega)$ est continue, $\forall K \subseteq \Omega$ compact. Ainsi sa transposée est l'application de restriction ${}^t\iota\colon \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est linéaire $*$-faiblement continue. Elle est de plus injective par la lemme suivante.

Lemme 2.5.3. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

Démonstration. $\Omega = \cup^\uparrow K_n$ où $(K_n)_n$ suite Ω-adaptée. Soit $\rho_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\rho_n(x) = 1$, $\forall x \in \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors $\varphi_n = \rho_n\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, or $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{E}(\Omega)$ (avec la formule de Leibniz). □

Théorème 2.5.4. On a

1) Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ alors ${}^t\iota(T)$ est à support compact.

2) $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, $\exists!\ \tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tel que $\forall \chi = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$, $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$. En particulier, ${}^t(\tilde{T}) = T$.

Démonstration. 1) Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors

$$\mathcal{E}(\Omega) \to [0, +\infty[,\ \ \varphi \mapsto |\langle T, \varphi \rangle|$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Par la caractérisation des semi-normes continues sur un evtlc, $\exists c > 0$, $\exists p_{m_1}, K_1, \ldots, p_{m_n}, K_n$, $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \max\{p_{m_s, K_s}(\varphi)\}$. En posant $m = \max\{m_s\}$, $K = \bigcup_{s=1}^n K_S$ compact, on a $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$. Donc ${}^t\iota(T)$ est une distribution à support compact $\subseteq K$.

2) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact. Soit $\chi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$. Définir $\tilde{T} \colon \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$, $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle := \langle T, \chi_0 \varphi \rangle$, $\ \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$. $\tilde{T}$ est linéaire. Montrons que $\tilde{T}$ est continue. Comme T est à support compact, $\exists K \subseteq \Omega$ compact, $\exists c > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. $\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on a donc

$$|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi_0 \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha (\chi_0 \varphi)(x)|.$$

Par la formule de Leibniz, $|\langle \tilde{T}, \varphi \rangle| \leqslant D \sup_{x \in K, |\alpha| \leqslant m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$. Donc $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui vaut 1 au voisinage de $\operatorname{supp}(T)$ alors $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$, on a $\chi_0 \varphi$, $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et donc, en appliquant 2 fois le lemme 2.5.1,

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi_0 \varphi \rangle = \langle \chi . T, \chi_0 \varphi \rangle = \langle T, \chi_0 \chi \varphi \rangle = \langle \chi_0 . T, \chi \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle.$$

Enfin, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle {}^t\iota(\tilde{T}), \varphi \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi_0 \varphi \rangle = \langle \chi_0 . T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

ce qui implique que ${}^t\iota(\tilde{T}) = T$. □

Remarque. Dans la suite on identifie $\mathcal{E}'(\Omega)$ avec les distributions à support compact et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact est identifié à son extension $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ d'ordre$\leqslant m$, alors s'étend à $C_c^m(\Omega)$ puis à $C^m(\Omega)$ en posant $\forall \varphi \in C^m(\Omega)$, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle$, où $\chi \in C_c^m(\Omega)$ qui vaut 1 en voisinage de $\operatorname{supp}(T)$.

Définition 2.5.1. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on définit son prolongement $\dot{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N),\ \langle \dot{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi|_\Omega \rangle.$$

Remarque. $T \to \dot{T}$ est la transposée de l'application linéaire continue $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\Omega)$, $\varphi \mapsto \varphi|_\Omega$. Ainsi $T \mapsto \dot{T}$ est linéaire et $*$-faiblement continue. Elle est de plus injective. En effet, $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq \{\varphi|_\Omega,\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\}$ est dense dans $C^\infty(\Omega)$.

Théorème 2.5.5. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert, $x_0 \in \Omega$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp}(T) = \{x_0\}$, alors $\exists n \geqslant 0,\ \lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ tells que $T = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \lambda_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

Démonstration. Quitte à translater on peut supposer $x_0 = 0$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$, alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On verra $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ dans la suite. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{B}(0,1) \prec \chi \prec \mathring{B}(0,2)$, $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x) = \chi(\frac{x}{\varepsilon})$. χ_ε vaut 1 au voisinage de $\{0\}$ donc $\chi_\varepsilon.T = T$, $\forall \varepsilon > 0$.
Assertion. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leqslant n$, $n \geqslant 1$, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Fixer $|\alpha| \leqslant n$, la formule de Taylor au point 0 à l'ordre $n - |\alpha|$ donne

$$\partial^\alpha \varphi(x) = (n + 1 - |\alpha|) \sum_{|\beta| = n+1-|\alpha|} \frac{x^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{n-|\alpha|} \partial^\beta \partial^\alpha \varphi(tx) dt.$$

En utilisant l'inégalité $|x^\beta| \leqslant |x|^{|\beta|}$ et en posant $D = c_0(n+1) \max_{|\beta|=n+1} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty$, où c_0 est le nombre de $\beta \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\beta| = n + 1 - |\alpha|$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $|\alpha| \leqslant n$,

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leqslant D |x|^{n+1-|\alpha|}.$$

Fixer $\varepsilon_0 > 0$. Comme $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon \varphi) \subseteq \bar{B}(0, 2\varepsilon_0)$, $\forall \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, en utilisant la continuité de T sur le compact $\bar{B}(0, 2\varepsilon_0)$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle \chi_\varepsilon.T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi_\varepsilon \varphi \rangle| \leqslant c \sup_{|x| \leqslant 2\varepsilon_0, |\alpha| \leqslant n} |\partial^\alpha \chi_\varepsilon \varphi(x)| = c \sup_{|x| \leqslant 2\varepsilon, |\alpha| \leqslant n} |\partial^\alpha \chi_\varepsilon \varphi(x)|.$$

Ici c ne dépend que de ε_0. Avec Leibniz, $|\partial^\alpha \chi_\varepsilon \varphi(x)| \leqslant D' \varepsilon^{n+1-|\alpha|}$. Donc $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, en prenant $c' = c_1 c D'$, où c_1 est le nombre de $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| = n$, on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant c' \max_{|\alpha| \leqslant n} (\varepsilon)^{n+1-|\alpha|}.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on a l'assertion.

Fin de la preuve : Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$, $\forall |\alpha| \leqslant n$, prenons $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\chi \equiv 1$ au voisinage de 0. Alors $\partial^\alpha \chi(0) = 0$, $\forall |\alpha| \geqslant 1$. Comme $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi \varphi \rangle$, on a $\chi \varphi(0) = 0$

et $\partial^\alpha(\varphi\chi)(0) = 0$ par Leibniz. On a donc par l'assertion $\langle T, \varphi\rangle = 0$ (Ici on peut aussi utiliser la densité pour montrer directement que $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$).

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, posons

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant n} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall |\alpha| \leqslant n$, $\partial^\alpha \psi(0) = 0$. Donc $\langle T, \psi\rangle = 0$, ainsi

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \lambda_\alpha \langle \partial^\alpha \delta_0, \varphi\rangle$$

où $\lambda_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle T, x^\alpha\rangle$. □

2.6 Dérivation/Intégration sous le crochet de dualité

$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $O \subseteq \mathbb{R}^M$ deux ouverts, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{D}(O)$, on note $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(\Omega \times O)$ définie par $(\varphi \otimes \psi)(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$.

Proposition 2.6.1. L'espace vectoriel

$$\mathcal{D}(\Omega) \otimes \mathcal{D}(O) := \mathrm{Vect}\{\varphi \otimes \psi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \psi \in \mathcal{D}(O)\}$$

est dense dans $\mathcal{D}^m(\Omega \times O)$. Ici on suppose que $m < +\infty$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega \times O)$. Soit $K_1 \subseteq O$, $K_2 \subseteq \Omega$ compacts tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K = K_1 \times K_2$. $\exists$ une suite de polynômes $(P_k)_k$ en la variable $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ tel que $\partial^\alpha P_k \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{N+M}$, $|\alpha| \leqslant m$. Soit $\theta_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\theta_2 \in \mathcal{D}(O)$, $\theta_k = 1$ au voisinage de $K_k, k = 1, 2$. $P_j(x_1, x_2) = \sum_{|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant m_j} a_{j,\alpha_1,\alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

Poser $\varphi_j(x_1, x_2) = \sum_{|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant m_j} a_{j,\alpha_1,\alpha_2} \theta_1(x_1)\theta_2(x_2) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, donc $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega) \otimes C_c^\infty(O)$, et $\partial^\alpha(\varphi_j) \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K, $\forall \alpha$, $|\alpha| \leqslant m$. $\mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq \mathrm{supp}(\theta_1) \times \mathrm{supp}(\theta_2) \subseteq K_1 \times K_2$. Donc $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathcal{D}^m(\Omega \times O)$. □

Remarque. C'est aussi vrai pour $m = +\infty$, on verra la preuve plus tard. Voir 2.7.4.

Théorème 2.6.2. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $O \subseteq \mathbb{R}^M$ ouverts, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in C^\infty(\Omega \times O)$.

1) S'il existe $K \subseteq \Omega$ compact tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K \times O$, alors $\forall y \in O$, $\varphi(\cdot, y) = (x \mapsto \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $\psi = (y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle) \in C^\infty(O)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\rangle$.

2) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times O)$, alors

$$\int_O \varphi(\cdot, y)dy = (x \mapsto \int_O \varphi(x,y)dy) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et $(y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle) \in \mathcal{D}(O)$ et $\int_O \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle dy = \langle T, \int_O \varphi(\cdot, y)dy\rangle$.

Démonstration. 1) On a bien $\varphi(\cdot, y) \in C^\infty(\Omega)$, $\forall y \in O$ (par composition) et $y \in O$, $\operatorname{supp}(\varphi(\cdot, y)) \subseteq K$, donc $\varphi(\cdot, y) \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi := y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ est bien définie sur O. Fixer $y_0 \in O$, $r > 0$ tel que $B = \bar{B}(y_0, r) \subseteq O$. Par Taylor reste intégral à l'ordre 1, pour $y \mapsto \varphi(x, y)$ donne $\forall h,\ |h| \leqslant r$, $x \in \Omega$,

$$\varphi(x, y_0 + h) = \varphi(x, y_0) + \sum_{k=0}^{M} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}(x, y_0)h_k + 2 \sum_{\beta \in \mathbb{N}^M, |\beta|=2} \frac{h^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)\partial_y^\beta \varphi(x, y_0 + th)dt.$$

On défini $r(y_0, h)(x) := 2\sum_{\beta \in \mathbb{N}^M, |\beta|=2} \frac{h^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)\partial_y^\beta \varphi(x, y_0 + th)dt$, alors $\operatorname{supp}(r(y_0, h)) \subseteq K$. En appliquant récursivement le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on a que $r(y_0, h)$ est C^∞ sur Ω et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\partial^\alpha r(y_0, h)(x) = 2 \sum_{|\beta|=2} \frac{h^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y_0 + th)dt.$$

Si $|h| \leqslant r$, $r(y_0, h) \in C_K^\infty(\Omega)$ et

$$\|\partial^\alpha r(y_0, h)\|_\infty \leqslant c_\alpha |h|^2 = O(|h|^2).$$

Comme $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\exists c > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$,

$$|\langle T, r(y_0, h)\rangle| \leqslant c \max_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha r(y_0, h)\|_\infty = O(|h|^2).$$

Pour $|h| \leqslant r$,

$$\langle T, \varphi(\cdot, y_0 + h)\rangle = \langle T, \varphi(\cdot, y_0)\rangle + \sum_{k=1}^{M} \langle T, \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(\cdot, y_0)\rangle h_k + O(|h|^2).$$

Donc $y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ est C^1 sur O et ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(\cdot, y)\rangle,$$

$\forall y \in O$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant M$. On termine la preuve de 1) par récurrence.

2) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times O)$, soient $K \subseteq \Omega, L \subseteq O$ compacts tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K \times L$. Donc $\forall x \in \Omega$, $\mathrm{supp}(\varphi(x, \cdot)) \subseteq L$, $\forall y \in O$, $\mathrm{supp}(\varphi(\cdot, y)) \subseteq K$. On applique successivement le théorème de dérivation des intégrales à paramètres et on obtient

$$\int_O \varphi(\cdot, y) dy \in C^\infty(\Omega) \text{ (à support dans } K)$$

et $\forall \beta \in \mathbb{N}^N$,

$$\partial_x^\beta \int_O \varphi(x, y) dy = \int_O \partial_x^\beta \varphi(x, y) dy, \ \forall x \in \Omega.$$

Comme $\mathrm{supp}(\partial_x^\beta \varphi) \subseteq K \times L$, on a $\forall x \in K$,

$$|\partial_x^\beta \int_O \varphi(x, y) dy| \leqslant \int_O |\partial_x^\beta \varphi(x, y)| dy \leqslant \|\partial_x^\beta\|_\infty \lambda(L).$$

On obtient une application linéaire

$$\Psi_1 \colon \mathcal{D}(\Omega \times O) \to \mathcal{D}(\Omega), \ \varphi \mapsto \int_O \varphi(\cdot, y) dy.$$

Elle satisfait les conditions de continuité, elle est donc continue. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $T_1 = {}^t\Psi_1(T) \in \mathcal{D}'(\Omega \times O)$, ainsi

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T, \int_O \varphi(\cdot, y) dy \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times O).$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(O)$, $\langle T_1, \varphi \otimes \psi \rangle = \int \psi d\lambda \langle T, \varphi \rangle$.

Si $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K \times L$, $\forall y \in O$, $\varphi(\cdot, y) \in \mathcal{D}(\Omega)$, et si $y \notin L$, $\varphi(\cdot, y) \equiv 0$. Donc $\langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = 0$. Ainsi $(y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle)$ est à support dans L, donc compact. Par 1), $(y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle) \in \mathcal{D}(O)$, $\forall \alpha$, $\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle$. Notons $\mathrm{supp}(\partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)) \subseteq K$. $\forall y \in O \backslash L$, $\partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) = 0$, $\forall \alpha$. Par continuité de T, $\exists c > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall y \in O$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^M$, $|\alpha| \leqslant l$,

$$\begin{aligned}
|\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle| &= |\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle| \\
&\leqslant c \max_{|\beta| \leqslant m} \|\partial_x^\beta \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\|_\infty \\
&\leqslant c \mathbb{1}_L(y) \max_{|\gamma| \leqslant m+l} \|\partial^\gamma \varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

On considère l'application linéaire

$$\Psi_2 \colon \mathcal{D}(\Omega \times O) \to \mathcal{D}(O),\ \varphi \mapsto (y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle)$$

Elle satisfait donc les conditions de continuité, on pose $T_2 = {}^t\Psi_2(1) \in \mathcal{D}'(\Omega \times O)$, où $1 \in L^1_{loc}(O)$. Ainsi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times O)$,

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \int_O \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle dy$$

en particulier, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(O)$, $\langle T_2, \varphi \otimes \psi \rangle = \int \psi d\lambda \langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \otimes \psi \rangle$. Par linéarité, $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \otimes C_c^\infty(O)$. Par continuité en densité $T_1 = T_2$. $\square$

Remarque. Voilà une preuve de la formule d'intégration sous le crochet de dualité indépendante de la densité. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^M)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^M} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle dy = \langle T, \int_{\mathbb{R}^M} \varphi(\cdot, y) dy \rangle.$$

· Cas $M = 1$: soit $K \subseteq \Omega$ compact et $R > 0$ tels que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \times [-R, R]$. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\xi) \subseteq [-R, R]$, $\int_{\mathbb{R}} d\lambda = 1$. Soit $\psi(x, y) := \varphi(x, y) - \xi(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dt$. Par Théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq K \times [-R, R]$, $\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) dy = 0$. Poser $\Psi(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \psi(x, t) dt$, alors $\Psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(\Psi) \subseteq K \times [-R, R]$. On montrons que

$$\langle T, \Psi(\cdot, y)\rangle = \int_{-\infty}^{y} \langle T, \psi(\cdot, t)\rangle dt,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Par théorème de dérivation, ces deux fonctions de y sont C^∞ sur $\mathbb{R}$, et ont la même dérivée $y \mapsto \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle$. De plus elle sont nulle pour $y < -R$, donc elle sont égales. En particulier,

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle dy = \int_{-\infty}^{R} \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle dy = \langle T, \Psi(\cdot, R)\rangle = 0$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \langle T, \psi(\cdot, y)\rangle dy = \int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle dy - \langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, t) dt \rangle \int_{\mathbb{R}} \xi d\lambda = 0.$$

· Cas $M > 1$: on procède par récurrence en intégrant successivement par rapport à toutes les composantes de y et en appliquant Fubini.

2.7 Convolution

Si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{R}^N$. Noter $\varphi(x-\cdot) = (y \mapsto \varphi(x-y) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors $\varphi(x-\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 2.7.1 (Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$)**.** $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On défini la convolution $T * \varphi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle$.

Remarque. Cette définition est cohérente avec la convolution des fonctions :

$$T_f * \varphi = f * \varphi, \text{ si } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N).$$

Proposition 2.7.1. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

1) $T * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(T*\varphi) = \partial^\alpha T * \varphi = T * \partial^\alpha \varphi$.

2) $\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$.

Démonstration. 1) On a

$$\partial^\alpha T * \varphi(x) = \langle \partial^\alpha T, \varphi(x-\cdot)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha(\varphi(x-\cdot)\rangle = \langle T, (\partial^\alpha\varphi)(x-\cdot)\rangle$$

car $\partial^\alpha(\varphi(x-\cdot)) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha\varphi)(x-\cdot)$. Donc $\partial^\alpha T * \varphi(x) = T * \partial^\alpha\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$, soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\mathring{B}(x_0,1)$. Poser $\psi(x,y) = \chi(x)\varphi(x-y)$, alors $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq \operatorname{supp}(\chi) \times (\operatorname{supp}(\chi) - \operatorname{supp}(\varphi))$. Par théorème de dérivation, $(x \mapsto \langle T, \psi(x,\cdot)\rangle) = (x \mapsto \langle T, \chi(x)\varphi(x-\cdot)\rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$,

$$\partial^\alpha(\langle T, \chi(x)\varphi(x-\cdot)\rangle) = \langle T, \partial_x^\alpha \chi(x)\varphi(x-\cdot)\rangle.$$

Sur $\mathring{B}(x_0,1)$ cette fonction coïncide avec $T * \partial^\alpha\varphi$ qui est donc C^∞ sur $\mathring{B}(x_0,1))$ et on a $\forall x \in \mathring{B}(x_0,1)$,

$$(T * \partial^\alpha\varphi)(x) = \langle T, (\partial^\alpha\varphi)(x-\cdot)\rangle = \partial^\alpha(T*\varphi)(x)$$

c'est vrai pour tout x_0.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^N \backslash (\operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi))$, alors $\operatorname{supp}(\varphi(x-\cdot)) = \{x\} - \operatorname{supp}(\varphi)$, donc $\operatorname{supp}(\varphi(x-\cdot)) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing$. Donc $\langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle = 0$. $T * \varphi \equiv 0$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^N \backslash (\operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi))$. ☐

Remarque. $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$. On définit $T * \varphi(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle$. La même argument que ci-dessus montre que $T*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(T*\varphi) = (\partial^\alpha T)*\varphi = T * (\partial^\alpha\varphi)$. On a aussi $\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$.

Exemple 2.7.1. 1) $\forall\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\delta_0 * \varphi = \varphi$.

2) $\forall\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha\varphi = (\partial^\alpha\delta_0) * \varphi$.

Théorème 2.7.2 (continuité de la convolution)**.** $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, l'application $D'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, $T \mapsto T * \varphi$ est séquentiellement continue, c'est-à-dire $\forall$ suite $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ avec $T_n \to T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ $*$-faiblement, on a $\forall\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha(T_n * \varphi) \mapsto \partial^\alpha(T * \varphi)$ uniformément sur tout compact.

Démonstration. On peut supposer $T = 0$. Il suffit de montrer que si $T_n \to 0$, alors $T_n * \varphi \to 0$ uniformément sur tout compact. En effet si c'est vrai alors soit $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ étant $*$-faiblement continue (car c'est la transposée d'une application linéaire continue), on a $\partial^\alpha T_n \to 0$ en appliquant ce résultat à $S_n = \partial^\alpha T_n$, et on a $(\partial^\alpha T_n) * \varphi \to 0$ uniformément sur les compacts. Donc $\partial^\alpha(T_n * \varphi) = (\partial^\alpha T_n) * \varphi \to 0$.

Soit $R > 0$, poser $K = \bar{B}(0,R) + \mathrm{supp}(\check{\varphi})$, où $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. $\forall x \in \bar{B}(0,R)$, $\mathrm{supp}(\varphi(x - \cdot)) \subseteq K$. Par un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus appliqué à $\{T_n|_{C_K^\infty(\mathbb{R}^N)}, n\} \subseteq \mathcal{L}(C_K^\infty(\mathbb{R}^N), \mathbb{C})$, on a $\exists\ c > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \leqslant R$,

$$\sup_{|x|\leqslant R} |T_n * \varphi(x)| = \sup_{|x|\leqslant R} |\langle T_n, \varphi(x - \cdot)\rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant m, z\in K} |\partial^\alpha\varphi(z)|.$$

En effet, prenons $V = B(0,1)$ dans $\mathbb{C}$, il existe donc $W \subseteq X$ un voisinage de 0 dans $C^\infty(K)$, tel que $T_i(W) \subseteq V$, $\forall i$. Considérons la topologie de $C^\infty(K)$, on sait qu'il y a un semi-norme $p_m := (f \mapsto \sup_{\alpha\leqslant m, x\in K} |\partial^\alpha f(x)|)$ et c_0 tel que $\{f \mid p_m(f) \leqslant c_0\} \subseteq W$. Mais $\forall\varphi \in C^\infty(K)$, note $p_m(\varphi) = kc_0$, $k > 0$, alors $p_m(\frac{\varphi}{k}) = c_0$. Donc $T_i(\frac{\varphi}{k}) \subseteq V$, c'est-à-dire $|T_i(\frac{\varphi}{k})| \leqslant 1$, donc $|T_i(\varphi)| \leqslant k = c\sup_{\alpha\leqslant m, x\in K} |\partial^\alpha\varphi(x)|$, où $c = \frac{1}{c_0}$.

Montrons que $\sup_{|x|\leqslant R} |T_n * \varphi(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Sinon $\exists\delta > 0$, $\exists x_n \in \bar{B}(0,R)$ tels que $|(T_n * \varphi)(x_n)| \geqslant \delta$, $\forall n$. Par compacité de $\bar{B}(0,R)$, on a une sous-suite $x_{n_k} \to x^* \in \bar{B}(0,R)$.

$$\begin{aligned} |T_{n_k} * \varphi(x^*)| &\geqslant |T_{n_k} * \varphi(x_{n_k})| - |(T_{n_k} * \varphi)(x_{n_k}) - (T_{n_k} * \varphi)(x^*)| \\ \text{(accroissements finis}\Rightarrow\text{)} &\geqslant \delta - N|x^* - x_{n_k}| \max_{1\leqslant j\leqslant N} \sup_{|y|\leqslant R} |T_{n_k} * \partial_{x_j}\varphi(y)| \\ &\geqslant \delta - Nc|x^* - x_{n_k}| \sup_{1\leqslant j\leqslant N, |\alpha|\leqslant m, |y|\leqslant R} |\partial^\alpha\partial_{x_j}\varphi(y)| \\ &\geqslant \delta - c'|x^* - x_{n_k}|. \end{aligned}$$

Ainsi, $\liminf |T_{n_k} * \varphi(x^*)| \geqslant \delta > 0$, contredit le fait que $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $T_n * \varphi(x) \to 0$. $\square$

Théorème 2.7.3 (Régularisation par convolution).

1) Soit $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à support $\bar{B}(0,1)$, $\xi \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \xi d\lambda = 1$. Poser, pour $\varepsilon > 0$, $\xi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\xi(\frac{x}{\varepsilon})$, alors $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on a $T * \xi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $T * \xi_\varepsilon \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

2) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $\exists T_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $T_n \to T$ $*$-faiblement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. 1) On a vu que $T_\varepsilon := T * \xi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\forall \varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned}
\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} T_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle T, \xi_\varepsilon(x-\cdot)\rangle\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle T, \xi_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)\rangle dx \\
&= \langle T, \int_{\mathbb{R}^N} \xi_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)dx\rangle \\
&\uparrow \text{ Par intégration sous le crochet de dualité}
\end{aligned}$$

Notons que $\int_{\mathbb{R}^N} \xi_\varepsilon(x-\cdot)\varphi(x)dx = (\check{\xi}_\varepsilon) * \varphi$. On a $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\operatorname{supp}(\check{\xi}_\varepsilon * \varphi) \subseteq K$, où $K = \{x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, \operatorname{supp}(\varphi)) \leqslant 1\}$ compact. On a $\partial^\alpha(\check{\xi}_\varepsilon * \varphi) = \check{\xi}_\varepsilon * \partial^\alpha\varphi$. Par régularisation par convolution des fonctions, $\forall \alpha$, $\partial^\alpha(\check{\xi}_\varepsilon * \varphi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K. Donc $\check{\xi}_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Par continuité de T, $\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle T, \check{\xi}_\varepsilon * \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ donc $T_\varepsilon \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

2) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ et $(K_n)_n$ suite de compact Ω-adaptée, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ et $\Omega = \cup^\uparrow K_n$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(\chi) \subseteq \bar{B}(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \chi d\lambda = 1$ et χ pair. $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$, $\theta_n := \chi_{\varepsilon_n} * \mathbb{1}_{K_n}$, où ε_n assez petit pour que $K_n + \bar{B}(0, 2\varepsilon_n) \subseteq \Omega$, $\lim \varepsilon_n = 0$. $\operatorname{supp}(\theta_n) \subseteq K_n + \bar{B}(0,\varepsilon_n) \subseteq \Omega$. $\theta_n T$ est une distribution à support compact, elle s'étend donc en $\theta_n T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Poser $T_n = (\theta_n.T) * \chi_{\varepsilon_n} \in \mathcal{D}(\Omega)$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} T_n(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\theta_n.T) * \chi_{\varepsilon_n}(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \theta_n.T, \chi_{\varepsilon_n}(x-\cdot)\rangle\varphi(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \theta_n.T, \chi_{\varepsilon_n}(x-\cdot)\varphi(x)\rangle dx.
\end{aligned}$$

Par l'intégration sous le crochet de la dualité,

$$
\begin{aligned}
&= \langle \theta_n.T, \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\varepsilon_n}(x - \cdot)\varphi(x)dx\rangle \\
&= \langle \theta_n.T, \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\varepsilon_n}(\cdot - x)\varphi(x)dx\rangle \\
&= \langle \theta_n.T, \chi_{\varepsilon_n} * \varphi\rangle \\
&= \langle T, \theta_n \cdot (\chi_{\epsilon_n} * \varphi)\rangle
\end{aligned}
$$

$\operatorname{supp}(\chi_{\varepsilon_n} * \varphi) \subseteq \operatorname{supp}(\varphi) + \bar{B}(0, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \to 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $\tilde{K_0} \subseteq \Omega$ compact tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\operatorname{supp}(\chi_{\varepsilon_n} * \varphi) \subseteq \tilde{K_0}$. Comme $\theta_n = 1$ sur un petit voisinage de $\{x \mid d(x, K_n^c) \geqslant \varepsilon_n\}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow \theta_n = 1$ sur $\tilde{K_0}$. Ainsi $\forall n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$, $\theta_n(\chi_{\varepsilon_n} * \varphi) = \chi_{\varepsilon_n} * \varphi$ et à support dans $\tilde{K_0}$. Ainsi, par régularisation, $\theta_n(\chi_{\varepsilon_n} * \varphi) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, par continuité de T, $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$. □

Proposition 2.7.4. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $O \subseteq \mathbb{R}^M$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega \times O)$ et si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(O)$, $\langle T, \varphi \otimes \psi\rangle = 0$, alors $T = 0$. En particulier, $C_c^\infty(\Omega) \otimes C_c^\infty(O)$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega \times O)$.

Remarque. Pour la densité, X evt, $A \subseteq X$, $A^\perp = \{w \in X^*,\ w(a) = 0,\ \forall a \in A\}$. $B \subseteq X^*$, ${}^\perp B = \{x \in X \mid w(x) = 0,\ \forall w \in B\}$. X est localement convexe, par le théorème de séparation de Hahn-Banach, on a ${}^\perp(A^\perp) = \overline{Vect(A)}$.

Démonstration. $K_1 \subseteq \Omega$ et $K_2 \subseteq O$ compacts. $\chi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\chi_2 \in \mathcal{D}(O)$. $\chi_k = 1$ au voisinage de K_k, $k = 1, 2$. Alors $S = (\chi_1 \otimes \chi_2).T$ est à support compact dans $\Omega \times O$. Elle se prolonge à $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M)$, et on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$, $\langle S, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle T, \chi_1\varphi \otimes \chi_2\psi\rangle = 0$. Soient $\xi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\xi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$. $\operatorname{supp}(\xi_k) \subseteq \bar{B}(0, 1)$, $\xi_k \geqslant 0$, $\int \xi_k d\lambda = 1$.

$$\xi_{1\varepsilon}(x_1) = \frac{1}{\varepsilon^N}\xi_1(\frac{x_1}{\varepsilon}),\ \xi_{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^M}\xi_2(\frac{x_2}{\varepsilon})$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\langle S, \xi_{1\varepsilon}(x_1 - \cdot) \otimes \xi_{2\varepsilon}(x_2 - \cdot)\rangle = 0$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}^N$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}^M$. C'est-à-dire $S * (\xi_{1\varepsilon} \otimes \xi_{2\varepsilon}) = 0$. Par régularisation par convolutions des distributions, $S = 0$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \times O)$, soit K_1, K_2 compacts tels que $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq K_1 \times K_2$, on a $\langle T, \psi\rangle = \langle T, (\chi_1 \otimes \chi_2)\psi\rangle = \langle S, \psi\rangle = 0$. □

Notation. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, poser $\check{T} = T \circ (-id)$, c'est-à-dire $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$.

Corollaire 2.7.5. 1) $\forall T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a $\check{T} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et l'application $\lambda(T)\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \to \check{T} * \varphi$ est linéaire continue.

2) $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\check{T} * \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et l'application $\lambda(T)\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ est linéaire continue.

Démonstration. 1) On a vu que $\check{T} * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On vérifie les conditions de continuité.

2) Il suffit de vérifier que

$$\lambda(T)|_{C_K^\infty(\mathbb{R}^N)} : C_K^\infty(\mathbb{R}^N) \to C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

est continue, $\forall K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact. □

On obtient des applications linéaires $*$-faiblement continues.

$$T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N),\ {}^t\lambda(T) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$
$$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ {}^t\lambda(T) : \mathcal{E}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

Définition 2.7.2 (convolution $\mathcal{E}' * \mathcal{D}',\ \mathcal{D}' * \mathcal{E}'$)**.** Si $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ avec T ou S à support compact, on définit $T * S = {}^t\lambda(S)(T)$. Ainsi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\langle T * S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} * \varphi\rangle$.

Exemple 2.7.2. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$

1) $T * \delta_0 = T = \delta_0 * T$, car $\check{\delta}_0 = \delta_0$ et $\delta_0 * \varphi = \varphi$. C'est-à-dire δ_0 est l'unité du produit de convolution.
2) $\delta_a * T = T * \delta_a = T \circ \tau_{-a}$, où $\tau_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,\ x \mapsto x + a$.

Proposition 2.7.6. *$S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.*

1) *En voyant $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $f * S$ définie comme au-dessus, alors $f * S$ est la fonction définie précédemment $S * f = (x \mapsto \langle S, f(x - \cdot)\rangle)$.*
2) *$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{supp}(T * S) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$.*
3) *$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $S * T = T * S$.*
4) *$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$.*

Démonstration. 1) Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned}
\langle S * f, \varphi\rangle &= \langle S * T_f, \varphi\rangle = \langle S, \check{T}_f * \varphi\rangle \\
&= \langle S, (y \mapsto \langle T_f, \varphi(y + \cdot)\rangle)\rangle \\
&= \langle S, (y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(y + x)dx)\rangle \\
&= \langle S, (y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)\varphi(x)dx)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle S, f(x - \cdot)\varphi(x)\rangle dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \langle S, f(x - \cdot)\rangle\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

2) supp(T)+supp(S) est fermé (fermé+compact), $O = \mathbb{R}^N \backslash (\text{supp}(T)+\text{supp}(S))$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(O)$, $\check{S} * \varphi$ est C^∞ à support dans $\text{supp}(\check{S}) + \text{supp}(\varphi) = \{-x + y \mid x \in \text{supp}(S),\ y \in \text{supp}(\varphi)\}$. Donc $(\text{supp}\, \check{S} + \text{supp}(\varphi)) \cap \text{supp}(T) = \varnothing$. Donc $\text{supp}(\check{S} * \varphi) \cap \text{supp}(T) = \varnothing$. Donc $\langle T, \check{S} * \varphi \rangle = 0$, ainsi $T * S|_O = 0$.

3) Il suffit de montrer que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\langle S, \check{T} * \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * \varphi \rangle$. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(\xi) \subseteq \bar{B}(0,1)$, $\xi \geqslant 0$, $\int \xi d\lambda = 1$. $\xi_n(x) := n^N \xi(nx)$. $S_n := S * \xi_n$ fonction C^∞ à support dans $\text{supp}(S) + \bar{B}(0, \frac{1}{n})$ qui est donc compact. D'après le théorème d'intégration sous le crochet de dualité,

$$\begin{aligned}
\langle S_n, \check{T} * \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \langle \check{T}, \varphi(x - \cdot) \rangle dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \langle T, \varphi(x + \cdot) \rangle dx \\
&= \langle T, \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x) \varphi(x + \cdot) dx \rangle \\
&= \langle T, \int_{\mathbb{R}^N} S_n(-x) \varphi(-x + \cdot) dx \rangle \\
&= \langle T, \check{S}_n * \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Par régularisation, $S_n \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Par continuité de $S \mapsto \check{S}$ on a $\check{S}_n \mapsto \check{S}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Par continuité séquentielle de la convolution, $\check{S}_n * \varphi \to \check{S} * \varphi$ uniformément sur tout compact. De plus $\text{supp}(\check{S}_n * \varphi) \subseteq \text{supp}(\varphi) + \text{supp}(\check{S}) + \bar{B}(0,1)$, $\forall n$. Donc $\check{S}_n * \varphi \to \check{S} * \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Par continuité de T on a $\langle T, \check{S}_n * \varphi \rangle \to \langle T, \check{S} * \varphi \rangle$ et comme $S_n \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on a $\langle S_n, \check{T} * \varphi \rangle \to \langle S, \check{T} * \varphi \rangle$.

4) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (T * S), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T * S, \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{S} * \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\check{S} * \varphi) \rangle (\text{cas } \mathcal{D}' * \mathcal{D}) \\
&= \langle \partial^\alpha T, \check{S} * \varphi \rangle \\
&= \langle (\partial^\alpha T) * S, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

On montre de même que $\partial^\alpha (T * S) = T * \partial^\alpha S$. □

Exemple 2.7.3. $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\partial^\alpha T$ est un produit de convolution. $\partial^\alpha T = T * \partial^\alpha \delta_0$.

Proposition 2.7.7 (continuité séquentielle du crochet de dualité)**.** $T_n, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. $T_n \to T$ $*$-faiblement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\langle T_n, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$.

Démonstration. $\mathrm{supp}(\varphi_n), \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K$, $\forall n$, où K est compact. D'après le corollaire de Banach-Steinhaus (appliqué à $\{T_n|_{C_K^\infty(\Omega)}, n\} \subseteq C_K^\infty(\Omega)^*$, car $\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, $\{\langle T_n, \varphi\rangle, n\}$ est borné car T_n converge $*$-faiblement, donc $\{T_n|_{C_K^\infty(\Omega}, n\}$ est borné, qui est caractérisé par une semi-norme, voir la démonstration du théorème 2.7.2), $\exists p \geqslant 0$, $\exists c > 0$ tel que $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support compact dans K,

$$|\langle T_n, \psi\rangle| \leqslant c \sup_{x\in K, |\alpha|\leqslant p} |\partial^\alpha \psi(x)|.$$

Appliquer l'inégalité à $\psi = \varphi_n - \varphi \in C_K^\infty(\Omega)$,

$$|\langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant p, x\in K} |\partial^\alpha (\varphi_n - \varphi)(x)|.$$

Prenons $n \to +\infty$, on voit $|\langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle| \to 0$ car $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors, $|\langle T_n, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle| \leqslant |\langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle| + |\langle T_n - T, \varphi\rangle|$. Prenons $n \to +\infty$, d'òu le résultat. □

Théorème 2.7.8 (continuité séquentielle de la convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$ ou $\mathcal{E}' * \mathcal{D}'$)**.** $T_n, S_n, T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $T_n \to T$ et $S_n \to S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Si $\exists$ K compact tel que $\mathrm{supp}(S_n) \subseteq K$, $\forall n$, alors $T_n * S_n \to T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\langle T_n * S_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \check{S}_n * \varphi\rangle$. $\mathrm{supp}(\check{S}_n * \varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\check{S}_n) + \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi) - K$ qui est compact, $\forall n$. D'après la continuité séquentielle de la convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$ et continuité $S \mapsto \check{S}$, $\check{S}_n * \varphi \to \check{S} * \varphi$ uniformément sur tout compact donc dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Par la continuité du crochet de dualité,

$$\langle T_n * S_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \check{S}_n * \varphi\rangle \to \langle T, \check{S} * \varphi\rangle = \langle T * S, \varphi\rangle.$$

Cela fini la démonstration. □

Théorème 2.7.9 (Associativité de la convolution)**.** $\forall R, T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ dont au moins deux sont à support compact, on a

$$R * (S * T) = (R * S) * T.$$

Remarque. $(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N), *, \delta_0)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire et commutative.

Démonstration. En utilisant la commutativité, on peut se ramener au cas où S et T sont à support compact. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{supp}(S) \cup \mathrm{supp}(T) \subseteq \bar{B}(0, r)$. Soit $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\mathrm{supp}(\xi) \subseteq \bar{B}(0, 1)$, $\xi \geqslant 0$, $\int \xi d\lambda = 1$. $\xi_n(x) = n^N \xi(nx)$ et $S_n = S * \xi_n = \xi_n * S \in$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $T_n = T * \xi_n = \xi_n * T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Vérifions que $R * (S_n * T_n) = (R * S_n) * T_n,\ \forall n$.

$$\begin{aligned} R * (S_n * T_n)(x) &= \langle R, S_n * T_n(x - \cdot)\rangle \\ &= \langle R, \int_{\mathbb{R}^N} S_n(x - \cdot - z)T_n(z)dz\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle R, S_n(x - \cdot - z)\rangle T_n(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} R * S_n(x - z)T_n(z)dz \\ &= (R * S_n) * T_n(x), \forall x \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

$\mathrm{supp}(S_n), \mathrm{supp}(T_n) \subseteq \bar{B}(0, r+1)$, $\forall n$. $S_n \to S$, $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ (par régularisation par convolution). D'après la continuité séquentielle du produit de convolution, on a $R * S_n \to R * S$, puis $(R * S_n) * T_n \to (R * S) * T$. De même on montre que $R * (S_n * T_n) \to R * (S * T)$. $\square$

Remarque. Le résultat est faux si on suppose seulement l'une des trois distribution à support compact. Par exemple, $(1 * \delta_0') * H = 1' * H = 0$, mais $1 * (\delta_0' * H) = 1 * H' = 1 * \delta_0 = 1$. Ici $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

2.7.1 Distributions convolables

Définition 2.7.3. On dit $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ sont *convolables* si l'application

$$\Sigma\colon\ \mathrm{supp}(T_1) \times \mathrm{supp}(T_2) \to \mathbb{R}^N,\ (x, y) \mapsto x + y$$

est *propre*: c'est-à-dire $\Sigma^{-1}(K)$ est compact, $\forall K$ compact.

Propsition-Définition 2.7.10. $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, si T_1 et T_2 sont convolables, alors $\exists! T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $\forall O \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert borné, $\forall K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact tel que $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$, $\forall \phi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\phi_1 \equiv 1$ au voisinage de K, on a $T|_O = (\phi_1 T_1 * \phi_2 T_2)|_O$. On note $T = T_1 * T_2$.

Démonstration. Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert borné et $K \subseteq \mathbb{R}^N$ tel que $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$, $\phi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\phi_i \equiv 1$ au voisinage de K. Montrons que $T|_O$ est bien définie. Prenons $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\psi_1 \equiv 0$ au voisinage de K.

$$((\phi_1 + \psi_1).T_1 * \phi_2.T_2)|_O = (\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2)|_O + (\psi_1.T_1 * \phi_2.T_2)|_O$$

$\operatorname{supp}(\psi_1.T_1 * \phi_2.T_2) \subseteq \operatorname{supp}(\psi_1.T_1) + \operatorname{supp}(\phi_2.T_2)$. Comme $\operatorname{supp}(\psi_1.T_1) \cap K \subseteq \operatorname{supp}(\psi_1) \cap K = \varnothing$, on a $(\operatorname{supp}(\psi_1.T_1) + \operatorname{supp}(\phi_2.T_2)) \cap O = \varnothing$, car $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$. Donc $(\psi_1.T_1 * \phi_2.T_2)|_O = 0$. On écrit $\mathbb{R}^N = \bigcup_i O_i$, $(O_i)_i$ des ouverts bornés. On prend des compacts $K_i \subseteq \mathbb{R}^N$, $\Sigma^{-1}(O_i) \subseteq K_i \times K_i$. On prend $\phi_{1i}, \phi_{2i} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\phi_{1i}, \phi_{2i} \equiv 1$ au voisinage de K_i. Poser $T_i = (\phi_{1i}.T_1 * \phi_{2i}.T_2)|_{O_i} \in \mathcal{D}'(O_i)$. On pose $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ le recollement des T_i. L'unicité de T est conséquence de l'unicité d'un recollement. $\square$

Remarque. Si T_1 ou T_2 est à support compact, alors T_1 et T_2 sont convolables (les parties compactes dans $\mathbb{R}^N$ sont des fermés bornés) et les deux définitions de $T_1 * T_2$ coïncident (par unicité).

Proposition 2.7.11. $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ convolables.

1) T_2 et T_1 sont convolables et $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

2) $\operatorname{supp}(T_1 * T_2) \subseteq \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2)$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T_1$ et T_2 sont convolables et T_1 et $\partial^\alpha T_2$ sont convolables et $\partial^\alpha(T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2)$.

Démonstration. 1) Supposer $\Sigma\colon \operatorname{supp}(T_1) \times \operatorname{supp}(T_2) \to \mathbb{R}^N$, $(x, y) \mapsto x + y$ est propre, alors $\Sigma'\colon \operatorname{supp}(T_2) \times \operatorname{supp}(T_1) \to \mathbb{R}^N$, $(x, y) \mapsto x + y$ est donnée par $\Sigma' = \Sigma \circ \sigma$ où $\sigma\colon \operatorname{supp}(T_2) \times \operatorname{supp}(T_1) \to \operatorname{supp}(T_1) \times \operatorname{supp}(T_2)$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ qui est un homéomorphisme. Donc Σ' est propre. Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert borné, $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$, alors $\Sigma'^{-1}(O) = \sigma^{-1}(\Sigma^{-1}(O)) \subseteq \sigma^{-1}(K \times K) = K \times K$. Prenons $\phi_i \equiv 1$ au voisinage de K. $T_1 * T_2|_O = (\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2)|_O = (\phi_2.T_2 * \phi_1.T_1)|O = (T_2 * T_1)|_O$. Par unicité $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

2) Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N \backslash (\operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2))$ un ouvert borné. K compact, $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$, $K \prec \phi_i$, $i = 1, 2$. $\operatorname{supp}(\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2) \subseteq \operatorname{supp}(\phi_1.T_1) + \operatorname{supp}(\phi_2.T_2) \subseteq \operatorname{supp}(T_1) + \operatorname{supp}(T_2)$. Donc $\operatorname{supp}(\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2) \cap O = \varnothing$. Donc $(T_1 * T_2)|_O = (\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2)|_O = 0$.

3) $\Sigma\colon \operatorname{supp}(T_1) \times \operatorname{supp}(T_2) \to \mathbb{R}^N$ propre, $\Sigma_\alpha\colon \operatorname{supp}(\partial^\alpha T_1) \times \operatorname{supp}(T_2) \to \mathbb{R}^N$. On a $\Sigma_\alpha = \Sigma|_{\operatorname{supp}(\partial^\alpha T_1) \times \operatorname{supp}(T_2)}$. Donc Σ_α est propre et $\partial^\alpha T_1$ et T_2 sont convolables, de même T_1 et $\partial^\alpha T_2$ sont convolables. Prenons O, K, ϕ_i tels que $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$,

$K \prec \phi_i$, $\Sigma_\alpha^{-1}(O) \subseteq \Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(T_1 * T_2)|_O &= \partial^\alpha((T_1 * T_2)|_O) \\
&= \partial^\alpha([\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2]|_O) \\
&= (\partial^\alpha(\phi_1.T_1 * \phi_2.T_2))|_O \\
&= (\partial^\alpha(\phi_1.T_1) * \phi_2.T_2)|_O \\
&= \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\beta^\alpha (\partial^\beta \phi_1.\partial^{\alpha-\beta} T_1 * \phi_2 T_2)|_O
\end{aligned}$$

or $\operatorname{supp}(\partial^\beta\phi_1.\partial^{\alpha-\beta}T_1 * \phi_2.T_2)|_O \subseteq O \cap \operatorname{supp}(\partial^\beta\phi_1.\partial^{\alpha-\beta}T_1 * \phi_2.T_2)$. Si $\phi_1 \equiv 1$ au voisinage de K, alors $\partial^\beta\phi_1 \equiv 0$ au voisinage de K, $\forall|\beta| \geqslant 1$. Donc $\operatorname{supp}(\partial^\beta\phi_1.\partial^{\alpha-\beta}T_1 * \phi_2.T_2) \cap O = \varnothing$, $\forall|\beta| \geqslant 1$. Donc $\forall|\beta| \geqslant 1$, $(\partial^\beta\phi_1.\partial^{\alpha-\beta}T_1 * \phi_2 T_2)|_O = 0$. D'où, $(\partial^\alpha(T_1 * T_2))|_O = (\phi_1.\partial^\alpha T_1 * \phi_2.T_2)|_O = (\partial^\alpha T_1 * T_2)|_O$. Par unicité, $\partial^\alpha(T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2$, on montre l'autre égalité de la même façon.

□

Exemple 2.7.4.

- Si $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}(T_1), \operatorname{supp}(T_2) \subseteq [0, +\infty[$, alors T_1 et T_2 sont convolables, car $\forall c > 0$, $\Sigma^{-1}(\bar{B}(0,c)) \subseteq [0,c] \times [0,c]$.
- Plus généralement, si $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ est un cône convexe fermé et propre (ne contient pas de longue droite : $\mathbb{R}x$, $x \in \mathbb{R}^N$). Alors, $\forall c > 0$, $\{(x,y) \in \Gamma^2 \colon |x+y| \leqslant c\}$ est borné. Ainsi $C_\Gamma = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \operatorname{supp}(T) \subseteq \Gamma\}$ est une algèbre de convolution : $\forall T_1, T_2 \in C_\Gamma$, T_1 et T_2 sont convolables et $T_1 * T_2 \in C_\Gamma$.

Exercice 2.7.1. Montrer que si $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^N$ est un cône convexe fermé et propre (ne contient pas de longue droite : $\mathbb{R}x$, $x \in \mathbb{R}^N$). Alors, $\forall c > 0$, $\{(x,y) \in \Gamma^2 \colon |x+y| \leqslant c\}$ est borné.

Démonstration. Si pas borné, on trouve $(x_i, y_i) \in \Gamma^2$, $|x_i + y_i| \leqslant c$, $\forall i$, et $|x_i| \xrightarrow[i \to +\infty]{+} \infty$. Quitte à extraire $\frac{x_i}{|x_i|} \to x \in \Gamma$, $|\frac{x_i}{|x_i|} + \frac{y_i}{|y_i|}| \leqslant \frac{c}{|x_i|} \to 0$. Donc $\frac{y_i}{|x_i|} \to -x \in \Gamma$. Donc $\mathbb{R}x \subseteq \Gamma$. □

Exercice 2.7.2. Calculer $\delta_0^{(k)} * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.

Démonstration. $\delta_0^k * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} = \partial^k(\delta_0 * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}) = \partial^k \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} = \delta_0^{(k-1)}$. □

Exercice 2.7.3. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\delta_h * T - T).(= -T')$

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}\langle \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\delta_h * T - T), \varphi\rangle &= \lim_{h\to 0}\langle T * (\frac{1}{h}(\delta_h - \delta_0)), \varphi\rangle \\ &= \lim_{h\to 0}\langle T, \frac{1}{h}(\varphi(h+\cdot) - \varphi(\cdot))\rangle \\ &= \langle T, \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\varphi(h+\cdot) - \varphi(\cdot))\rangle \\ &= \langle T, \varphi'\rangle \\ &= \langle -T', \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\delta_h * T - T) = -T'$. □

Exercice 2.7.4. Soit $a > 0$. Trouver $u_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{1}_{[0,a]} * u_a = \delta_a$.

Démonstration. Poser $(u_a = \sum_{n\geqslant 1} \delta'_{na})$, alors $u_a \in D'(\mathbb{R})$. Comme $\mathbb{1}'_{[0,a]} = \delta_0 - \delta_a$ et $\delta_a * \delta_{na} = \delta_{(n+1)a}$, on a $\mathbb{1}_{[0,a]} * u_a = \sum_{n\geqslant 1} \delta_{na} - \sum_{n\geqslant 2} \delta_{na} = \delta_a$ au sens des distributions. □

2.8 Produit tensoriel de distributions

Propsition-Définition 2.8.1. $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^M$ ouvert, $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. $\exists!$ distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ notée $S \otimes T$ telle que $\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle S, \varphi\rangle\langle T, \psi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. De plus, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a

$$\langle S \otimes T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

où $\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle =: \langle S, (x \mapsto \langle T, \varphi(x,\cdot)\rangle)\rangle$.

Démonstration. L'unicité est claire par linéarité, continuité et densité.

Définir $U\colon \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle$. U est bien définie par le théorème de dérivation sous le crochet de dualité. U est linéaire. Vérifions que U est continue. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Soient $K_i \subseteq \Omega_i$ compacts tels que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq K_1 \times K_2$. $(x \mapsto \langle T, \varphi(x,\cdot)\rangle) \in C^\infty_{K_1}(\Omega_1)$. Par continuité de S, $\exists c_1 > 0$, $p_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle| \leqslant c_1 \sup_{|\alpha|\leqslant p_1, x\in K_1} |\partial_x^\alpha \langle T, \varphi(x,\cdot)\rangle| \leqslant c_1 \sup_{|\alpha|\leqslant p_1, x\in K_1} |\langle T, \partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot)\rangle|$$

$\forall x \in \Omega_1$, $\mathrm{supp}(\partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot)) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi(x,\cdot)) \subseteq K_2$. Donc $\partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot) \in C^\infty_{K_2}(\Omega_2)$. Par continuité de T, $\exists c_2 > 0$, $p_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \partial_x^\alpha \varphi(x,\cdot)\rangle| \leqslant c_2 \sup_{|\beta|\leqslant p_2, y\in K_2} |\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x,y).|$$

Donc $|\langle U, \varphi\rangle| \leqslant c_1 c_2 \max_{|\alpha|\leqslant p_1+p_2} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$. U est donc une distribution. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned}\langle U, \varphi \otimes \psi\rangle &= \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x)\psi(y)\rangle\rangle \\ &= \langle S_x, \varphi(x)\langle T, \psi\rangle\rangle \\ &= \langle S, \varphi\rangle\langle T, \psi\rangle.\end{aligned}$$

On montre de même que l'application

$$V\colon \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

est une distribution, et on a, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$,

$$\begin{aligned}\langle V, \varphi \otimes \psi\rangle &= \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x)\psi(y)\rangle\rangle \\ &= \langle T_y, \psi(y)\langle S, \varphi\rangle\rangle \\ &= \langle T, \psi\rangle\langle S, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Par unicité, $U = V$. □

Proposition 2.8.2. $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1),\ T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$.

1) ordre$(S \otimes T) \leqslant$ ordre(S)+ordre(T).
2) $\operatorname{supp}(S \otimes T) = \operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)$.
3) $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (S \otimes T) = \partial^\alpha S \otimes \partial^\beta T$.

Démonstration.

1) est démontré dans la preuve précédente.
2) Soit $O \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \backslash (\operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T))$ un ouvert. Ainsi $\forall \varphi \in \mathcal{D}(O)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \cap (\operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)) = \varnothing$. Donc $\exists V$ ouvert, $\operatorname{supp}(S) \subseteq V \subseteq \Omega_1$, tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \cap V \times \operatorname{supp}(T) = \varnothing$. (Utilisons que $\operatorname{supp}(\varphi)$ est compact, il y a donc une distance strictement positive de $\operatorname{supp}(\varphi)$ à $\operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)$, disons $2d$. Prenons $V = \operatorname{supp}(S) + B(0, d)$ et V marche) Alors, $\forall x \in V$, $\operatorname{supp}(\varphi(x, \cdot)) \cap \operatorname{supp}(T) = \varnothing$. Ainsi, $\forall x \in V$, $\langle T, \varphi(x, \cdot)\rangle = 0$. Donc $(x \mapsto \langle T, \varphi(x, \cdot)\rangle)|_V \equiv 0$. Ainsi, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(O)$,

$$\langle S \otimes T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T, \varphi(x, \cdot)\rangle\rangle = \langle S_x|_V, \langle T, \varphi(x, \cdot)\rangle\rangle = \langle S_x, (\langle T, \varphi(x, \cdot)\rangle)|_V\rangle = 0$$

Donc $S \otimes T|_O = 0$. Ainsi $\operatorname{supp}(S \otimes T) \subseteq \operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T)$.

Réciproquement, si O est ouvert et $O \cap (\mathrm{supp}(S) \times \mathrm{supp}(T)) \neq \varnothing$, $\exists U \times V \subseteq O$, $U \subseteq \Omega_1$, $V \subseteq \Omega_2$ ouvert, et $U \cap \mathrm{supp}(S) \neq \varnothing$, $V \cap \mathrm{supp}(T) \neq \varnothing$. $\exists \varphi \in \mathcal{D}(U)$, $\langle S, \varphi \rangle \neq 0$, $\exists \psi \in \mathcal{D}(V)$, $\langle T, \psi \rangle \neq 0$. Donc $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{D}(O)$ et $\langle S \otimes T, \varphi \otimes \psi \rangle \neq 0$.

3) $\partial^\alpha S \otimes \partial^\beta T$ est l'unique distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$,

$$\langle \partial^\alpha S \otimes \partial^\beta T, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle \partial^\alpha S, \varphi \rangle \langle \partial^\beta T, \psi \rangle.$$

On a

$$\begin{aligned}\langle \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (S \otimes T), \varphi \otimes \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle S \otimes T, \partial_y^\beta \partial_x^\alpha (\varphi \otimes \psi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle S \otimes T, \partial^\alpha \varphi \otimes \partial^\beta \psi \rangle \\ &= \langle \partial^\alpha S, \varphi \rangle \langle \partial^\beta T, \psi \rangle\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Remarque. Si $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et si l'une des deux est à support compact (par exemple T) alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \check{T} * \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle.$$

Attention : même si $\varphi(x+y)$ n'est pas à support compact sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, on peut bien définir $\langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle$, car une fois on fixe x, $\varphi(x+\cdot)$ est à support compact, est puis $(x \mapsto \langle T, \varphi(x+\cdot) \rangle)$ est ainsi à support compact.

Proposition 2.8.3. *$S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Si S et T sont convolables, i.e l'application*

$$\Sigma\colon\ \mathrm{supp}(S) \times \mathrm{supp}(T) \to \mathbb{R}^N,\ (x, y) \mapsto x + y$$

est propre. Alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ telle que $\theta \equiv 1$ au voisinage de $\Sigma^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))$, on a que $\langle S_x \otimes T_y, \theta(x,y)\varphi(x+y) \rangle$ ne dépend pas d'un tel θ, et on a

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \theta(x,y)\varphi(x+y) \rangle.$$

Démonstration. Si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ et $\psi \equiv 0$ au voisinage de $\Sigma^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))$, alors $\mathrm{supp}(\psi(x,y)\varphi(x+y)) \cap (\mathrm{supp}(S) \times \mathrm{supp}(T)) = \varnothing$, donc $\langle S_x \otimes T_y, \psi(x,y)\varphi(x+y) \rangle = 0$. Donc $\langle S_x \otimes T_y, (\theta + \psi)(x,y)\varphi(x+y) \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \theta(x,y)\varphi(x+y) \rangle$. Soit $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq O$

ouvert borné, $\Sigma^{-1}(O) \subseteq L \times L$, L compact, $\phi_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $L \prec \phi_i$, $i = 1, 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle S * T, \varphi \rangle &= \langle S * T|_O, \varphi \rangle \\
&= \langle \phi_1.S * \phi_2.T, \varphi \rangle \\
(\text{Remarque au-dessus} \Rightarrow) &= \langle (\phi_1.S)_x \otimes (\phi_2.T)_y, \varphi(x+y) \rangle \\
&= \langle S_x \otimes T_y, \theta(x,y)\varphi(x+y) \rangle
\end{aligned}$$

où $\theta = \phi_1 \otimes \phi_2 \equiv 1$ au voisinage de $\Sigma^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi))$. □

Exercices.

1) Calculer $\delta_a' \otimes \delta_b'$. $(= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi(a,b))$

   Démonstration. Prenons $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\delta_a' \otimes \delta_b'(\varphi \otimes \psi) = \varphi'(a)\psi'(b) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi \otimes \psi(a,b)$. Par densité, $\delta_a' \otimes \delta_b' = f \mapsto \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(a,b)$. □

2) Calculer $\delta_0' * \delta_0'$.

   Démonstration. $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0 * \delta_0'' = \delta_0''$. □

3) $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et S à support compact, montrer que $x^n.(T * S) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^k.T) * (x^{n-k}.S)$.

   Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle x^n.(T * S), \varphi \rangle &= \langle T * S, x^n \cdot \varphi \rangle \\
&= \langle T_x \otimes S_y, (x+y)^n \varphi(x+y) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle T_x \otimes S_y, x^k y^{n-k} \varphi(x+y) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \langle x^k.T_x \otimes y^{n-k}.S_y, \varphi(x+y) \rangle \\
&= \langle \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^k.T) * (x^{n-k}.S), \varphi \rangle
\end{aligned}$$

□

4) Montrer que l'application $D = \frac{d}{dx} \colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est surjective. (Plus facile : Toute distribution à support compact admet une primitive)

Démonstration. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\frac{d}{dx}(T * \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}) = T * \mathbb{1}'_{\mathbb{R}_+} = T * \delta_0 = T$. Note que $\mathbb{1}'_{]-\infty,0]} = -\delta_0$. $\mathbb{R} \subseteq]-\infty, 1[\cup]-1, +\infty[$. Soit ψ_1, ψ_2 partition de l'unité subordonné à ce recouvrement. $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \psi_1, \psi_2 \leqslant 1$, $\mathrm{supp}(\psi_1) \subseteq]-\infty, 1[$, $\mathrm{supp}(\psi_2) \subseteq]-1, +\infty[$. $\psi_1 + \psi_2 = 1$. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $H_1 = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$, $H_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. $\mathrm{supp}(\psi_1.T) \subseteq]-\infty, 1]$, $\mathrm{supp}(H_1) \subseteq]-\infty, 1]$. Donc $\psi_1.T$ et H_1 sont convolables, $\psi_2.T$ et H_2 sont convolables. Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\psi_1.T * H_1 + \psi_2.T * H_2) &= \psi_1.T * \delta_0 + \psi_2.T * \delta_0 \\ &= \psi_1.T + \psi_2.T = (\psi_1 + \psi_2).T = T\end{aligned}$$

□

5) De plus, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $D - \lambda \mathrm{id}$ admet un inverse à droite.

Démonstration. En effet, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, calculer

$$\begin{aligned}e^{\lambda x}.D(e^{-\lambda x}.T) &= e^{\lambda x}.(-\lambda e^{-\lambda x}.T + e^{-\lambda x}.D(T)) \\ &= -\lambda.T + D(T) = (D - \lambda \mathrm{id})(T).\end{aligned}$$

Si $V(T) = (\psi_1.T) * H_1 + (\psi_2.T) * H_2$, V est telle que $D(V(T)) = T$. Alors

$$T \mapsto e^{\lambda x}.V(e^{-\lambda x}.T)$$

est l'inverse à droite de $D - \lambda id$. En particulier, D n'a pas des vecteurs propres non nuls. □

Exercice 2.8.1. Note $\mathcal{C} = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \mathrm{supp}(T) \subseteq [0, +\infty]\}$. Montrer que $(\mathcal{C}, *, \delta_0)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre. (Vérifie l'associativité de $*$ sur $\mathcal{C}$)

Démonstration. Prenons $R, S, T \in \mathcal{C}$. Il suffit de montrer que pour $\forall O \subseteq \mathbb{R}$ ouvert borné, $(R * (S * T))|_O = ((R * S) * T))|_O$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(O)$, comme R et $S * T$ sont convolables, il y a $K \subseteq \mathbb{R}$ compact tel que $\Sigma^{-1}(O) \subseteq K \times K$. Supposons $O \cap [0, +\infty] \subseteq [0, c[$, $c > 0$, on peut prendre $K = [0, c]$. Soit $\phi_1 = \phi_2 = \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 au voisinage de $[-c-1, c+1]$, et $\phi(x) = \phi(-x)$. Alors $\langle R * (S * T), \varphi\rangle = \langle \phi_1.R * \phi_2.(S * T), \varphi\rangle = \langle \phi_1.R, (x \mapsto \langle S * T, \phi_2(\cdot)\varphi(x + \cdot)\rangle$. Notons que $\varphi_x := \phi_2(\cdot)\varphi(x + \cdot)$ est à support dans K, on peut donc trouver $K' = [0, c + \frac{1}{2}]$ compact tel que $\Sigma^{-1}(\mathrm{supp}(\varphi_x)) \subseteq K' \times K'$ car S et T sont convolables. Prenons $\phi_3 = \phi_4 = \phi$ qui vaut 1 au voisinage de $[-c-1, c+1]$, alors $\langle S * T, \varphi_x \rangle = \langle \phi_3.S * \phi_4.T, \varphi_x \rangle$, donc

$$\begin{aligned}
\langle R * (S * T), \varphi \rangle &= \langle \phi_1.R, \langle \phi_3.S * \phi_4.T, \varphi_x \rangle \rangle \\
&= \langle \phi_1.R, (\widecheck{(\phi_3.R) * (\phi_4.T)}) * (\phi_2 \varphi) \rangle \\
&= \langle \phi_1.R * (\phi_3.S * \phi_4.T), \phi_2 \varphi \rangle \\
&= \langle \phi.(\phi.R * (\phi.S * \phi.T)), \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

De même, on montre que $\langle (R * S) * T, \varphi \rangle = \langle \phi.((\phi.R * \phi.S) * \phi.T), \varphi \rangle$, et on utilise l'associativité de $*$ sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Exercice 2.8.2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\delta_0' - \lambda \delta_0$ est inversible dans $\mathcal{C}$ ($\mathrm{Spec}_{\mathcal{C}}(\delta_0') = \varnothing$) et $(\delta_0' - \lambda \delta_0)^{-1} = (t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{\lambda t})$.

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
\langle (\delta_0' - \lambda \delta_0) * (t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) e^{-\lambda t}), \varphi \rangle &= \langle \delta_0' - \lambda \delta_0, \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} \varphi(\cdot + t)\ dt \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \langle \delta_0' - \lambda \delta_0, e^{-\lambda t} \varphi(\cdot + t) \rangle\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} \varphi'(t) - \lambda e^{-\lambda t} \varphi(t)\ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} (e^{-\lambda t} \varphi)'(t)\ dt \\
&= \varphi(0).
\end{aligned}$$

Cela montre que $(t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t)}$ est l'inverse voulu. $\square$

Chapitre 3

Distribution tempérée et analyse de Fourier

Noter $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R},\ (x,\xi) \mapsto x \cdot \xi = \sum_{i=1}^N x_i \xi_i$ le produit scalaire Euclidien.

Rappel. La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ est la fonction

$$\hat{f} \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

Chercher $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, tel que $\forall f \in \mathcal{S},\ \hat{f} = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. Définir ${}^t\mathcal{F} \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

3.1 L'espace de Schwartz

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'ensemble des $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tels que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty.$$

Une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dite *à décroissance rapide*.

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, l'application

$$N_m \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty[\ ,\ \varphi \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

  est une semi-norme (norme en fait) sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Définition 3.1.1. L'espace de Schwartz est l'evtlc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont la topologie est définie par la famille de semi-normes $\{N_m, m \in \mathbb{N}\}$.

Remarque. La famille de semi-normes $\{N'_m, m \in \mathbb{N}\}$ donne la même topologie où

$$N'_m(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N, |\alpha|, |\beta| \leqslant m} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

Exemple 3.1.1 (Fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)**.**

1) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
2) $\forall a > 0$, $\forall P$ fonction polynomiale, $(x \mapsto P(x)e^{-a|x|^2}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
3) La seule fraction rationnelle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est la fonction nulle.

Proposition 3.1.1 ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et densité)**.**

1) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
2) $\forall p \in [1, +\infty[$, $S(\mathbb{R}^N) \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ est dense.

Démonstration.

1) Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{B}(0,1) \prec \chi \prec \mathring{B}(0,2)$. Poser $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$, $n \geqslant 1$. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, poser $\varphi_n(x) = \chi_n(x)\varphi(x)$, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \mathrm{supp}(\chi_n) \subseteq \bar{B}(0, 2n)$.

$$\begin{aligned} \partial^\beta(\varphi - \varphi_n)(x) &= \partial^\beta((1-\chi_n)\varphi)(x) \\ &= (1-\chi_n)(x)\partial^\beta\varphi(x) - \sum_{\gamma \leqslant \beta, |\gamma| \geqslant 1} C_\beta^\gamma \frac{1}{n^{|\gamma|}} (\partial^\gamma \chi)(\frac{x}{n}) \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x) \\ \Rightarrow |x^\alpha \partial^\beta(\varphi - \varphi_n)(x)| &\leqslant |x^\alpha(1-\chi_n)(x)\partial^\beta\varphi(x)| + \frac{c}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N, |\beta| \leqslant m-1} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \end{aligned}$$

où $c = \sum_{\gamma \leqslant \beta, |\gamma| \geqslant 1} C_\beta^\gamma \|\partial^\gamma \chi\|_\infty$. Donc $\forall \alpha, \beta, |\alpha|, |\beta| \leqslant m$,

$$|x^\alpha \partial^\beta(\varphi - \varphi_n)(x)| \leqslant \frac{|x|^{\alpha+2}}{n^2} |\partial^\beta \varphi(x)| + \frac{c}{n} N_m(\varphi)$$

car $\forall z \in \mathbb{R}^N$, $0 \leqslant 1 - \chi(z) \leqslant |z|^2$. Donc $\forall \alpha, \beta, |\alpha|, |\beta| \leqslant m$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta(\varphi - \varphi_n)(x)| \leqslant \frac{1}{n^2} N_{m+2}(\varphi) + \frac{c}{n} N_m(\varphi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

2) Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $p \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p d\lambda &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi| d\lambda \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty^{p-1} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(1+|x|^{N+1})\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\lambda(x)}{1+|x|^{N+1}} < +\infty \qquad (*)\end{aligned}$$

Comme $p \in [1, +\infty[$, par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et comme $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on déduit que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^P(\mathbb{R}^N)$ est dense.

□

Définition 3.1.2. Une fonction continue $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est dite à *croissance polynomiale* si $\exists n \geqslant 0$ tel que $f = O(|x|^n)$ quand $|x| \to +\infty$. Ceci est équivalent à $\exists c > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $|f| \leqslant c(1+|x|^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 3.1.2 (Opérations sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$)**.** $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

a) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

b) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ dont toutes les dérivées sont à croissance polynomiale, on a $f \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

c) $\forall p \in [1, +\infty[$, $\exists c > 0$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$,

$$\|x^\alpha \cdot \partial^\beta \varphi\|_p \leqslant c N_m(\varphi)^{1-\frac{1}{p}} N_{m+N+1}(\varphi)^{\frac{1}{p}}$$

d) $\forall S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $S * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration.

a) Évident.

b) Par Leibniz,

$$\begin{aligned}N_m(f\cdot\varphi) &= \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta (f\cdot\varphi)(x)| \\ &\leqslant \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \sum_{\gamma\leqslant\beta} C_\gamma^\beta \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\gamma f(x) \partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Par hypothèse sur f, $\forall m \geqslant 0$, $\exists c_m > 0$, $\exists n_m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\partial^\gamma f(x)| \leqslant c_m(1+|x|^{2n_m}),\ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall |\gamma| \leqslant m.$$

On a $|x|^{2n_m} \leqslant N^{n_m-1}\sum_{k=1}^{N} x_k^{2n_m},\ \forall x \in \mathbb{R}^N$ par convexité de $(z \mapsto z^n)$, on en déduit

$$N_m(f \cdot \varphi) \leqslant cN_{m+2n_m}(\varphi) \tag{C1}$$

avec $c = c_m(1 + N^{2n_m-1})\max_{|\beta|\leqslant m}\sum_{\gamma\leqslant\beta} C_\gamma^\beta$. Donc $f \cdot \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

c) Si $g(x) = x^\alpha \cdot \partial^\beta\varphi(x)$, alors par a) et b), $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. $(*)$ appliqué à g donne

$$\|g\|_p^p \leqslant cN_0(g)^{p-1}N_{N+1}(g) \leqslant cN_m(\varphi)^{p-1}N_{m+N+1}(\varphi)$$

si $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$.

d) On sait que $S * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Noter $m \in \mathbb{N}$ l'ordre de S (S est d'ordre fini à car support compact) et soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subseteq \bar{B}(0, R)$. Par la propriété de continuité de S, on a $\exists c > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
|x^\alpha\partial^\beta(S * \varphi)(x)| &= |x^\alpha S * \partial^\beta\varphi(x)| \\
&= |x^\alpha\langle S, \partial^\beta\varphi(x - \cdot)\rangle| \\
&\leqslant |x^\alpha| \cdot c \sup_{|\gamma|\leqslant m+|\beta|, |y|\leqslant R} |\partial^\gamma\varphi(x + y)| \\
&\leqslant c \sup_{|\gamma|\leqslant m+|\beta|, |y|\leqslant R} |(x + y - y)^\alpha\partial^\gamma\varphi(x + y)|.
\end{aligned}$$

On utilise la majoration $|(x + y - y)^\alpha| \leqslant 2^{|\alpha|-1}(|x + y|^{|\alpha|} + |y|^{|\beta|})$, alors

$$|x^\alpha\partial^\beta S * \varphi(x)| \leqslant c2^{|\alpha|-1} \sup_{|\gamma|\leqslant m+|\beta|, z\in\mathbb{R}^N} (|z|^{|\alpha|} + R^{|\alpha|})|\partial^\gamma\varphi(z)|,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, on

$$N_p(S * \varphi) \leqslant 2^{p-1}c(1 + R^p)N_{p+m}(\varphi) \tag{C2}$$

c'est-à-dire $S * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

□

Remarque.

(C1) montre que $\varphi \mapsto f \cdot \varphi$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ vers $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

(C2) montre que $\forall S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \varphi \mapsto S * \varphi$ est continue.

3.2 La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Définition 3.2.1. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\hat{\varphi}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C},\ \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)d\lambda x.$$

Ceci a bien du sens car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^1(\mathbb{R}^N)$. L'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est linéaire et se note $\mathcal{F}$.

Proposition 3.2.1 (Fourier sur $\mathcal{S}$ et opérations)**.** Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

a) $\mathcal{F}(\varphi) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ et $\forall 1 \leqslant j \leqslant N,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j \cdot \varphi)(\xi)$.

b) $\forall 1 \leqslant j \leqslant N,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)(\xi) = (i\xi_j \cdot \mathcal{F}(\varphi))(\xi)$.

c) $\forall a \in \mathbb{R}^N$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}((\tau_a)_*\varphi)(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$, où $\tau_a\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,\ x \mapsto x + a$, $(\tau_a)_*\varphi = \varphi \circ \tau_{-a}$.

d) $\forall a \in \mathbb{R}^N$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}(e^{ia\cdot x} \cdot \varphi)(\xi) = (\tau_a)_*(\mathcal{F}(\varphi))(\xi) = \mathcal{F}(\varphi)(\xi - a)$.

Mentalité : Plus une fonction est dérivable, plus rapidement sa transformée décroît.

Démonstration.

a) La fonction $(x, \xi) \mapsto e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)$ est $C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, et $\forall 1 \leqslant j \leqslant N$,

$$|\partial_{\xi_j}(e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x))| = | - ix_j e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)| = |x_j\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on a $\mathcal{F}(\varphi) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, et

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{\xi_j}(e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x))d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} -ix_j e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)d\lambda(x)\\ &= \mathcal{F}(-ix_j \cdot \varphi)(\xi).\end{aligned}$$

b) Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)$, noter $x' = (x_2, \ldots, x_N)$. Une intégration par parties en x_1 donne

$$\begin{aligned}&\int_R e^{-i\xi\cdot x}\partial_{x_1}\varphi(x)dx_1\\ &= e^{-i\xi\cdot}\varphi(x)\Big|_{x_1=-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1}(e^{-i\xi\cdot x})\varphi(x)dx_1\\ &= +i\xi_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)dx_1\end{aligned}$$

car $(x_1 \mapsto \varphi(x, x'))$ tend vers 0 quand $|x_1| \to +\infty$.
Comme

$$|e^{-i\xi\cdot x}\partial_{x_1}\varphi(x)| \leqslant |\partial_{x_1}\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

$$|e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

on a, en intégrant en x' les deux membres de l'égalité et avec Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\partial_{x_1}\varphi(x)dx = i\xi_1 \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x)dx$$

le cas $j \geqslant 2$ est de même.

c) En faisant le changement de variables $z = x - a$ dans l'intégrale de Fourier, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{F}((\tau_a)_*\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(x-a)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot(z+a)}\varphi(z)dz \\ &= e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}(\varphi)(\xi).\end{aligned}$$

d) Par la définition de $\mathcal{F}$.

$\square$

Corollaire 3.2.2. $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$,

$$\xi^\alpha \cdot \partial^\beta(\mathcal{F}(\varphi)) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta \cdot \varphi))$$

Démonstration. Récurrence avec la proposition précédente. $\square$

Lemme 3.2.3 (Transformée de Fourier des Gaussiennes)**.** Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$, $A > 0$. Poser

$$G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det A}} e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}, \ x \in \mathbb{R}^N$$

alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\widehat{G_A}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle}, \ \forall\xi \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. 1) Calcul dans le cas $N = 1$. Pour a>0, $g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}e^{-\frac{x^2}{2a}}, \ x \in \mathbb{R}$. Vérifier que $g_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et calculer $\hat{g_a}$. Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists P_k$ polynôme tel que $g_a^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-\frac{x^2}{2a}}$. Ainsi $g_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. $g_a' = -\frac{x}{a}g_a$. On applique Fourier et la proposition précédente et obtient $i\xi\hat{g_a} = \frac{-i}{a}\hat{g_a}'$. Donc $\hat{g_a}'(\xi) = -a\xi\hat{g_a}(\xi)$. Ainsi $\exists c$ tel que $\hat{g_a}(\xi) = ce^{-\frac{1}{2}a\xi^2}$, où $c = \hat{g_a}(0) = \int_{\mathbb{R}} g_a d\lambda = 1$.

2) Cas général. Montrons que $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Écrire $A = QDQ^T$, où $Q \in O_N(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_N)$, $a_j > 0$. Par récurrence, $\forall \beta \in \mathbb{N}^N$, $\exists P_\beta$ fonction polynomiale, $\partial^\beta G_A(x) = P_\beta(x) e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}$. Donc $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Dans l'intégrale de Fourier faire le changement de variable $y = Q^T x$.

$$\langle A^{-1}x, x\rangle = \langle D^{-1}Q^T x, Q^T x\rangle = \langle D^{-1}y, y\rangle.$$

On a donc pour $\eta = Q^T\xi$,

$$\begin{aligned}
\hat{G}_A(\xi) &= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle} dx \\
&= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iQ^T\xi\cdot Q^T x} e^{-\frac{1}{2}\langle D^{-1}Q^T x, Q^T x\rangle} dx \\
&= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\eta\cdot y} e^{-\frac{1}{2}\langle D^{-1}y, y\rangle} dy \\
&= \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi a_k}} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{k=1}^N e^{-i\eta_k y_k - \frac{1}{2}a_k^{-1}y_k^2} dy_1 \cdots dy_N.
\end{aligned}$$

Par Fubini appliqué à $(y_1, \dots, y_N) \mapsto \prod_{k=1}^N e^{i\eta_k y_k - \frac{1}{2}a_k^{-1}y_k^2}$ qui est donc $L^1(\mathbb{R}^N)$ car $a_k > 0$, $\forall k$. Il suffit de traiter le cas $N = 1$. □

Théorème 3.2.4 (Inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$)**.** La transformée de Fourier est un isomorphisme (de $\mathbb{C}$-espace vectoriel) de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(R^N)$. L'inverse est donné par

$$(\mathcal{F}^{-1}(\psi))(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} \psi(\xi) d\xi$$

De plus, $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sont continues : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists c_p > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $N_p(\mathcal{F}(\varphi)), N_p(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) \leqslant c_p N_{p+N+1}(\varphi)$.

Remarque. Intuitivement, la formule d'inversion de Fourier signifie que

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi))(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y} \varphi(y) dy \Big) d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \Big(\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot(x-y)} d\xi \Big) dy
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\varphi = \varphi * f$ où $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} d\xi$.

On voudrait que $f = \delta_0$. Malheureusement, $(\xi, y) \mapsto e^{i\xi\cdot(x-y)}\varphi(y)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Donc Fubini n'est pas justifié, et l'intégrale qui définit f n'existe pas. On va rendre l'intégrale convergente en la remplaçant par

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2} d\xi = G_{\varepsilon I_n}(x-y).$$

Démonstration. Montrons que $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors on sait $\mathcal{F}(\varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par Leibniz,

$$\partial^\alpha(x^\beta \cdot \varphi) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} C_\alpha^\gamma \partial^\gamma x^\beta \partial^{\alpha-\gamma}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Donc $\xi^\alpha \cdot \partial^\beta(\mathcal{F}(\varphi)) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}(\partial^\alpha(x^\beta \cdot \varphi)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\forall \alpha, \beta$. Donc $\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. En faisant un calcul dans la démonstration de 3.1.1 (l'inégalité $(*)$), on voit que $N_p(\mathcal{F}(\varphi)) \leqslant c_p N_{p+N+1}(\varphi)$. De même, $N_p(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) \leqslant \frac{c_p}{(2\pi)^N} N_{p+N+1}$.

Pour $\varepsilon > 0$, poser

$$G_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x - \frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2} \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

Notons que $[(y, \xi). \mapsto e^{i\xi\cdot(x-y)-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2}\varphi(y)] \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, par Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} G_\varepsilon(x-y)\varphi(y)dy &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2} (\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot y}\varphi(y)dy) \frac{d\xi}{(2\pi)^N} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $z = x - y$, on a, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-z) G_\varepsilon(z) dz = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^N}.$$

Pour le membre de gauche, changement de variable $z = \sqrt{\varepsilon} w$,

$$\int \varphi(x-z) G_\varepsilon(z) dz = \int \varphi(x - \sqrt{\varepsilon} w) G_1(w) dw.$$

Comme

- $\varphi(x - \sqrt{\varepsilon} w) G_1(w) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(x) G_1(w)$, $\forall w \in \mathbb{R}^N$
- $|\varphi(x - \sqrt{\varepsilon} w) G_1(w)| \leqslant c G_1(w)$, $\forall w \in \mathbb{R}^N$ car φ est bornée.

par le théorème de convergence dominée, utilisons $\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x-\frac{1}{2}\xi^2} = e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{2\pi}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-z)G_\varepsilon(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(x)\int G_1 d\lambda = \varphi(x),\ \forall x$$

Pour le membre de droite, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{i\xi\cdot x}\hat{\varphi}(\xi)$ et

$$|e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)| \leqslant |\hat{\varphi}(\xi)|$$

Par convergence dominée,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)\frac{d\xi}{(2\pi)^N} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

On a bien, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi$. □

Corollaire 3.2.5 (Formule de Plancherel)**.** $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N}\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\varphi}\psi d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{(\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x}\hat{\varphi}(\xi)d\xi)}\psi(x)d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\psi(x)dxd\xi && (*) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)dx)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\langle \hat{\varphi}, \hat{\psi}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

$(*)$: Par Fubini, car $[(\xi, x) \mapsto e^{ix\cdot\xi}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\psi(x)] \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. □

3.3 Les distributions tempérées

L'inclusion naturelle $\iota\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est linéaire et continue. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $K = \mathrm{supp}(\varphi)$, $\forall m \in \mathbb{N}$, on a

$$N_m(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leqslant c \max_{|\beta| \leqslant m} \|\partial^\beta \varphi\|_\infty$$

ici c est déterminé par K et m. Ainsi sa transposée ${}^t\iota\colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est linéaire et $*$-faiblement continue. Elle est de plus injective par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Dans la suite on verra $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Définition 3.3.1. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est dite *tempérée* si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Ainsi par la caractérisation des formes linéaires continues sur l'espace de Fréchet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est tempérée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant cN_m(\varphi)$.

Exemple 3.3.1.

1) Toute distribution à support compact est tempérée. En effet, l'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$ est linéaire et continue et d'image dense (contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$), la transposée de l'inclusion donne $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

2) Toute fonction $L^p(\mathbb{R}^N)$ ($p \in [1, +\infty]$) définit une distribution tempérée. L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ est linéaire continue d'image dense (pour $1 \leqslant p < +\infty$) donne

$$(L^p(\mathbb{R}^N))' = L^q(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($1 < q \leqslant +\infty$). Plus concrètement, $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\forall p \in]1, +\infty]$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
|\langle T_f, \varphi\rangle| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f\varphi| d\lambda \\
&\leqslant \|f\|_p \|\varphi\|_q \\
&\leqslant \|f\|_p (\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|^{N+1}) |\varphi(x)|^q)^{\frac{1}{q}} (\int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{1 + |x|^{N+1}})^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant cN_{[\frac{N}{q}]+1}(\varphi)
\end{aligned}$$

et pour $p = 1$,

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f\varphi| d\lambda \leqslant \|f\|_1 N_0(\varphi).$$

Combiner avec Proposition 2.1.2, on a la composition $L^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est injective, donc $L^1(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est injective, d'où l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 3.3.1. Toute fonction continue à croissance polynomiale définit une distribution tempérée. En particulier, toute fonction continue bornée est tempérée.

Démonstration. $\exists c > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ |f(x)| \leqslant c(1 + |x|^n)$. On suppose $n \geqslant N + 1$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi\rangle| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f\varphi| d\lambda \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}^N} |(1 + |x|^n)\varphi(x)| dx \\ &\leqslant c \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(1 + |x|^n)^2\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{1 + |x|^n} \\ &\leqslant c' N_{2n}(\varphi). \end{aligned}$$

□

Exercice 3.3.2. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$. T tempérée $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = O(|k|^p)$, $|k| \to +\infty$. C'est-à-dire la suite (a_k) est à croissance polynomiale.

Démonstration. Soit C et p tels que $a_k \leqslant C(1 + k^p)$, $\forall k$. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$|a_k\varphi(k)| \leqslant c(1 + k^p)|\varphi(k)| \leqslant \frac{c'}{k^2}$$

car $(k \mapsto (1 + k^p)k^2\varphi(k))$ est bornée, disons $N_{p+2}(\varphi)$. Donc $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\varphi(k)$ est absolument convergente et $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant cN_{p+2}(\varphi)$, donc tempérée.

Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\exists c, m, p$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant c \sum_{n\leqslant p} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1 + |x|^m)\varphi^{(n)}(x)|.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]-1, 1[)$, alors

$$|\langle T, (\tau_k)_*\varphi\rangle| = |a_k| \leqslant c \sum_{n\leqslant p} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1 + |x|^m)((\tau_k)_*\varphi)^{(n)}(x)|.$$

Mais $(1 + |x|^m)((\tau_k)_*\varphi)(x) = 0$ si $|x| \geqslant k + 1$, donc $\exists c'$ tel que $|a_k| \leqslant c'(2 + k^m) = O(k^m)$. □

Exercice 3.3.3. $(x \mapsto e^x)$ définit une distribution qui n'est pas tempérée.

Démonstration. Si $(x \mapsto e^x)$ tempérée, alors $\exists c, m, p$ tels que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$|\langle e^x, \varphi \rangle| \leqslant c \sum_{n \leqslant p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^m) |\varphi^{(n)}(x)|.$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, $\varphi(0) = 1$, alors

$$\langle e^x, (\tau_a)_* \varphi \rangle = \int e^x \varphi(x-a) dx = \int e^{x+a} \varphi(x) dx = e^a \langle e^x, \varphi \rangle$$

Or

$$|\langle e^x, (\tau_a)_* \varphi \rangle| \leqslant c \sum_{n \leqslant p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^n) |((\tau_a)_* \varphi)^{(n)}(x)|.$$

Si $|x| > a + 1$, $(1 + |x|^m)((\tau_a)_* \varphi)^{(n)}(x) = 0$, et $\|((\tau_a)_* \varphi)^{(n)}\|_\infty = \|\varphi^{(n)}\|_\infty$, on a donc $e^a |\langle e^x, \varphi \rangle| \leqslant c'(1 + (a+1)^m)$, donc $\forall a$, $e^a \leqslant |p(a)|$, où $p(a)$ un polynôme, contradiction. $\square$

Exercice 3.3.4. $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est tempérée.

Démonstration. Prenons $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, alors $\psi \in C^\infty$, $\|\psi\|_\infty \leqslant \|\varphi'\|_\infty$. On a $\int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = 0$ car $(x \mapsto \frac{\varphi(0)}{x})$ impaire et intégrable sur $[\varepsilon, 1]$. Donc

$$\int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|x| \geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} \psi(x) dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{|x| \geqslant 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-1}^{1} \psi(x) dx.$$

Alors

$$|\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} (|x\varphi(x)|) (\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}) + 2\|\varphi'\|_\infty \leqslant c N_1(\varphi).$$

Cela fini la preuve. $\square$

Proposition 3.3.1 (opération sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$)**.** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors T est d'ordre fini par définition.

a) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

b) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées, on a $f.T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

c) $\forall S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. On a montré dans la proposition 3.1.2 que les applications linéaires

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\\ \varphi &\mapsto \partial^\alpha \varphi\\ \varphi &\mapsto f\cdot\varphi\\ \varphi &\mapsto \varphi * S\end{aligned}$$

sont continues. On obtient a),b),c) en transposant ces applications. □

Exemple 3.3.2. Pour voir si une distribution définie par une fonction f est tempérée, il ne suffit pas d'étudier la croissance à l'infini de $|f|$. Par exemple, posons $f(x) = ie^{x+ie^x}$, alors $|f(x)| = e^x$ n'est pas tempérée. $f = \frac{d}{dx}e^{ie^x}$, $(x \mapsto e^{ie^x})$ est continue bornée donc tempérée. Donc f comme dérivée d'une distribution tempérée est tempérée. En particulier, pour savoir si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est tempérée, on cherche à écrire $T = \partial^\alpha S$ où S est tempérée.

Théorème 3.3.2 (Admis)**.** Toute distributions tempérée T est de forme

$$T = \partial^\alpha((1+|x|^2)^n f)$$

où f est continue bornée.

Démonstration. Référence : L.Schwartz « *Théorie des distributions* » Chapitre 7. □

3.4 La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

On a vu que $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est linéaire continue.

Définition 3.4.1. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on appelle *transformée de Fourier* de T, noté $\mathcal{F}(T)$, la distribution tempérée ${}^T\mathcal{F}(T)$. On a $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$. Notons que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $T \mapsto \mathcal{F}(T)$ est linéaire et $*$-faiblement continue.

Exemple 3.4.1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a $\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}$ où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)dx$. Montrons que $T_{\hat{f}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$: $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$. Donc $\hat{f}$ est bornée. Elle est continue par théorème de continuité des intégrales à paramètre (en fait par le théorème de Riemann-Lebesgue, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^N)$). Donc $T_{\hat{f}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y}\varphi(y)dy)dx.$$

Comme $[(x,y) \mapsto e^{-ix\cdot y} f(x)\varphi(y)] \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, on peut appliquer Fubini :

$$\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) (\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y} f(x) dx) dy = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle.$$

Donc $\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}$.

Proposition 3.4.1 (Fourier sur $\mathcal{S}'$ et opérations)**.** Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

a) $\forall k$, $\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k.\mathcal{F}(T)$.

b) $\forall k$, $\mathcal{F}(x_k.T) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}(T)$.

c) $\forall a \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia\cdot\xi}.\mathcal{F}(T)$.

d) $\mathcal{F}(e^{-ia\cdot x}.T) = (\mathcal{F}(T)) \circ \tau_a$.

Corollaire 3.4.2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a

- $\xi^\alpha.\mathcal{F}(T) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial^\alpha T)$.
- $\partial^\beta(\mathcal{F}(T)) = (-i)^{|\beta|} \mathcal{F}(x^\beta.T)$.

Démonstration. Se démontre par dualité en utilisant la proposition 3.2.1. □

Théorème 3.4.3 (Fourier sur $\mathcal{E}'$)**.** Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est la distribution définie par la fonction $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $(\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$, où $e_\xi(x) = e^{i\xi\cdot x})$. Cette fonction notée $[\xi \mapsto \mathcal{F}(T)(\xi)]$ est $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées.

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Par l'intégration sous le crochet de dualité, on a

$$\begin{aligned}\langle \langle T, e_{-\xi} \rangle, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle T, e_{-\xi} \rangle \varphi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^N} \langle T, \varphi(\xi) e_{-\xi} \rangle d\xi \\ &= \langle T, \int_{\mathbb{R}^N} e_{-\xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle.\end{aligned}$$

De plus, $(\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle)$ est C^∞ et $\partial^\alpha(\mathcal{F}(T))(\xi) = \partial^\alpha \langle T, e_{-\xi} \rangle = \langle T, \partial^\alpha e_{-\xi} \rangle$ par la dérivation sous le crochet de dualité. Par continuité de $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $c > 0$ tels que $\mathrm{supp}(T) \subseteq B(0,R)$ et

$$|\langle T, e_{-\xi} \rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant p, |x| \leqslant R} |\partial_x^\alpha e_{-\xi}(x)|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\langle T, e_{-\xi}\rangle| &\leqslant c \sup_{|\alpha|\leqslant p, |x|\leqslant R} |(-i\xi)^\alpha e_{-\xi}(x)| \leqslant c \max_{|\alpha|\leqslant p} |\xi^\alpha| \\
&\leqslant c\left(1+\sum_{i=1}^N |\xi_i|\right)^p \leqslant c\left(1+\frac{N+|\xi|^2}{2}\right)^p.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{F}(T)$ est à croissance polynomiale. De même $\partial^\alpha \mathcal{F}(T)$ est aussi à croissance polynomiale, car $\partial^\alpha \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha.T)$ et $(-ix)^\alpha.T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. □

Rappel. Une fonction C^1 $F\colon \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann, c'est-à-dire, $\partial_\xi F + i\partial_\eta F = 0$, où on prend l'isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $\xi + i\eta \leftrightarrow (\xi, \eta)$.

Théorème 3.4.4. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(T) \in C^\infty(\mathbb{R})$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Prenons $\tilde{F}\colon \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(\xi, \eta) \mapsto \langle T, e_{-\xi-i\eta}\rangle$, où $e_{-\xi-i\eta} = (x \mapsto e^{-i(\xi+i\eta)\cdot x})$. Alors $\tilde{F}$ est un prolongement de F sur $\mathbb{R}^2$. Comme dans la preuve précédente, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Par le théorème de dérivation sous le crochet de dualité, on a

$$\begin{aligned}
(\partial_\xi F)(\xi, \eta) =& \langle T, \partial_\xi e_{-\xi-i\eta}\rangle \\
=& \langle T, (-ix) \cdot e_{-\xi-i\eta}\rangle
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\partial_\eta F)(\xi, \eta) =& \langle T, \partial_\eta e_{-\xi-i\eta}\rangle \\
=& \langle T, x \cdot e_{-\xi-i\eta}\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi $\partial_\xi F + i\partial_\eta F = 0$, donc F est un prolongement holomorphe de $\mathcal{F}(T)$. □

Théorème 3.4.5 (Paley-Wiener, Admis)**.** Tout fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant la condition de croissance : $\exists C, N, R$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leqslant c(1+|z|)^N \exp(R|\mathrm{Im}(z)|)$$

est la transformée de Fourier d'une distribution à support dans $[-R, R]$. C'est-à-dire $\forall f$ satisfaisant la condition, $\exists T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, tel que $f|_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(T)$.

Théorème 3.4.6 (Inversion de Fourier sur $\mathcal{S}'$)**.** $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{F}^{-1}(T) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(\tilde{T})$ (où $\tilde{S} = S \circ (-\mathrm{Id})$).

Démonstration. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\mathcal{F}(T)), \varphi\rangle &= \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(\varphi)\rangle \\ &= \langle T, \mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))\rangle \\ &= \langle T, (2\pi)^N \varphi \circ (-\mathrm{Id})\rangle \\ &= \langle (2\pi)^N \tilde{T}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Du coup $\mathcal{F}^{-1}(T) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}\widetilde{T}$. □

Exemple 3.4.2.

1) $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.
2) $\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta_a)(\xi) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha.\mathcal{F}(\delta_a) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha.\mathcal{F}(\delta_0 \circ \tau_{-a}) = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi\cdot a}$.
3) $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^N \delta_0$.
4) $\mathcal{F}(x^\alpha) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}(1) = (2\pi)^N i^{|\alpha|}\partial^\alpha \delta_0$.
5) $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2\pi i H + \pi i$, où $H = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$. En effet, considérons $x.\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$ et appliquer transforme de Fourier, on a $\partial(\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2\pi i \delta_0$. Donc $\exists c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2i\pi H + c$. Posons $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, alors $\hat{g} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Donc $\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})), g\rangle = \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \hat{g}\rangle = 0$. Alors $\langle -2i\pi H + c, g\rangle = -i\pi + c = 0$, donc $c = \pi i$.

Définition 3.4.2. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est *impaire* si $T \circ (-\mathrm{Id}) = -T$.

Exemple 3.4.3. $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est impaire.

Remarque. T impaire $\Rightarrow \mathcal{F}(T)$ impaire. Le seul $c \in \mathbb{C}$ possible pour $-2i\pi H + c$ soit impaire est $c = i\pi$.

Théorème 3.4.7 (Structure des distributions à support compact)**.** Toute distributions à support compact sur $\mathbb{R}^N$ est une somme finie de dérivée du sens des distributions d'une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\exists c > 0$, $\exists p \geqslant 0$ tels que

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| \leqslant c(1 + |\xi|^2)^p.$$

Posons $S\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \frac{\mathcal{F}(T)(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{p+N}}$, alors $S \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et on a $|S(\xi)| \leqslant c(1 + |\xi|^2)^{-N}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$. Donc $S \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Donc $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dont Fourier inverse est la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}S(\xi)d\xi$$

qui est continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$, voir 3.3.1.

Lemme 3.4.8. Soit $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2$. $\forall n \geqslant 1$, $\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$,

$$\mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)^n u) = (1 + |\xi|^2)^n . \mathcal{F}(u).$$

Démonstration du lemme. Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)u) &= \mathcal{F}(u) - \sum_{j=1}^{N} \mathcal{F}(\partial_{x_j}^2 u) \\
&= \mathcal{F}(u) + \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 . \mathcal{F}(u) \\
&= (1 + \sum_{j=1}^{N} \xi_j^2) . \mathcal{F}(u) \\
&= (1 + |\xi|^2) . \mathcal{F}(u).
\end{aligned}$$

On déduit par récurrence car

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)^{n+1} u) \\
&= \mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)(\mathrm{Id} - \Delta)^n u) \\
(\text{cas } n = 1 \Rightarrow) &= (1 + |\xi|^2) . \mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)^n u).
\end{aligned}$$

Applique le lemme à $u = f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}((\mathrm{Id} - \Delta)^{p+N} f) &= (1 + |\xi|^2)^{p+N} \mathcal{F}(f) \\
&= (1 + |\xi|^2)^{p+N} . S \\
&= \mathcal{F}(T).
\end{aligned}$$

Par injectivité de Fourier sur $\mathcal{S}'$ on a $T = (\mathrm{Id} - \Delta)^{p+N}(f)$. □

Théorème 3.4.9 (Fourier et convolution)**.** $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\mathcal{F}(S * T) = \mathcal{F}(S) . \mathcal{F}(T)$$

Démonstration.

Cas 1 : Si $T = f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, par l'opération sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $S * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Par l'intégration sous le crochet de dualité,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S * f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\langle S, f(x-\cdot)\rangle dx \\ &= \langle S_y, \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)dx\rangle.\end{aligned}$$

On a $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x-y)dx = (\mathcal{F}(f))(\xi)e_{-\xi}(y)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S * f)(\xi) &= \langle S, \mathcal{F}(f)(\xi)e_{-\xi}\rangle \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi)\langle S, e_{-\xi}\rangle \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi)\cdot\mathcal{F}(S)(\xi),\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Cas général : $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par l''opération sur $\mathcal{S}'$, $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(S).\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(S * T), \varphi\rangle &= \langle S * T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \\ &= \langle S * T, (2\pi)^N \widetilde{\mathcal{F}^{-1}(\varphi)}\rangle \\ &= (2\pi)^N \langle T, \check{S} * \widetilde{\mathcal{F}^{-1}(\varphi)}\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{F}(T)}), \check{S} * \widetilde{\mathcal{F}^{-1}(\varphi)}\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{F}(T)}), (S * \widetilde{\mathcal{F}^{-1}}(\varphi))\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(S * \mathcal{F}^{-1}(\varphi)\rangle.\end{aligned}$$

Appliquer cas 1 avec $f = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(S * \mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = \mathcal{F}(S).\varphi$, donc

$$\langle \mathcal{F}(S * T), \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}(S).\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(S).\mathcal{F}(T), \varphi\rangle.$$

Ça fini la démonstration. $\square$

Théorème 3.4.10 (Plancherel). $L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N}\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

En particulier, $\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ est un isomorphisme continue et $(\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^N)})^* = (2\pi)^N\mathcal{F}^{-1}$.

Démonstration. Comme $L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}$ induit un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^N)$ sur $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N))$. Vérifions que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, par densité, $\exists f_n \in$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$|\langle \mathcal{F}(f_n), \varphi\rangle| = |\langle f_n, \mathcal{F}(\varphi)\rangle| \leqslant \|f_n\|_{L_2}\|\mathcal{F}(\varphi)\|_{L^2} \leqslant c\|\varphi\|_2$$

où $c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2$.

$f_n \to f$ dans L^2 implique, par le théorème de convergence dominée, $f_n \to f$ $*$-faiblement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par continuité, $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f)$ $*$-faiblement. Donc $|\langle \mathcal{F}(f), \varphi\rangle| \leqslant c\|\varphi\|_{L^2}$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Par densité c'est vrai pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc $(\varphi \mapsto \langle \mathcal{F}(f), \varphi\rangle) \in L^2(\mathbb{R}^N)'$. Par le théorème de Riesz, $\exists \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que $\langle \mathcal{F}(f), \varphi\rangle = \langle \bar{\hat{f}}, \varphi\rangle_{L^2}$. Donc $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$. Donc $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$. Par inversion de Fourier sur $\mathcal{S}'$, on a $L^2(\mathbb{R}^N) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N))) \subseteq \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^N)) = L^2(\mathbb{R}^N)$.

Remarque. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on note $\bar{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ définie par

$$\langle \bar{T}, \varphi\rangle = \overline{\langle T, \bar{\varphi}\rangle}.$$

On a

1) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \Rightarrow T \circ (-\mathrm{Id}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\bar{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
2) $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\overline{\mathcal{F}(T)} = \mathcal{F}(\bar{T}) \circ (-\mathrm{Id}) = \mathcal{F}(\bar{T} \circ (-\mathrm{Id}))$.
3) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{T}_f = T_{\bar{f}}$.

Alors

$$\begin{aligned}\langle \hat{f}, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \langle \overline{\mathcal{F}(f)}, \varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(\bar{f}) \circ (-\mathrm{Id}), \varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(\bar{f}), \varphi \circ (-\mathrm{Id})\rangle.\end{aligned}$$

Poser, pour $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\varphi = \hat{g}$, $\hat{g} \circ (-\mathrm{Id}) = (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1}(g)$ (d'après inversion de Fourier). Donc $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle \mathcal{F}(\bar{f}), \hat{g} \circ (-\mathrm{Id})\rangle = \langle \mathcal{F}(\bar{f}), (2\pi)^N \mathcal{F}^{-1}(g)\rangle = \langle \bar{f}, (2\pi)^N g\rangle = (2\pi)^N \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$. □

3.5 Transformée de Fourier partielle

La transformée de Fourier partielle est utilisée dans les EDP d'évolution.

Notation. L'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ est noté $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$ pour spécifier le symbole des variables utilisées.

Définition 3.5.1. Soit $\varphi = ((t,x) \mapsto \varphi(t,x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$. La transformée de Fourier partielle en x de φ est

$$(\mathcal{F}_x(\varphi))(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(t,x)dx.$$

$\mathcal{F}_x$ a les mêmes propriétés de continuité et d'inversibilité que la transformée de Fourier (avec les mêmes preuves).

Théorème 3.5.1 (Inversion Fourier partielle sur $\mathcal{S}$)**.** $\mathcal{F}_x \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\mathcal{F}_x$ est continue, c'est-à-dire $\forall p \geqslant 0$, $\exists c_p > 0$, tels que

$$N_p(\mathcal{F}_x(\varphi)) \leqslant c_p N_{p+N+1}(\varphi),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N).$$

On a $(\mathcal{F}_x^{-1}(\varphi))(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\varphi(t,\xi)d\xi$.

Définition 3.5.2 (Fourier partielle sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$)**.** La transposée ${}^t\mathcal{F}_x \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ est linéaire et $*$-faiblement continue. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, on note $\mathcal{F}_x(T) := {}^t\mathcal{F}_x(T)$, on a $\langle \mathcal{F}_x(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}_x(\varphi)\rangle,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

Proposition 3.5.2. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$,
$$\partial_t^n \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}_x(T) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}_x(x^\alpha.\partial_t^n T).$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$,
$$\mathcal{F}_x(\partial_t^n \partial_x^\alpha T) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha.\partial_t^n \mathcal{F}_x(T).$$

Théorème 3.5.3 (Inversion Fourier partielle sur $\mathcal{S}$)**.** $\mathcal{F}_x \colon \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}_x^{-1}(T) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}_x(T \circ J)$ où $J \colon (t,x) \mapsto (t,-x)$.

3.6 Séries de Fourier

Définition 3.6.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite *périodique de période* a si $T \circ \tau_a = T$.

Proposition 3.6.1. Toute distribution périodique est tempérée.

Remarque. $\exists \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x+k) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $[-1,1] \prec \psi \prec]-2,2[$. Poser $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(x+k) > 0$. φ est de classe C^∞ car la somme est localement finie. Poser $\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$.

Démonstration. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T \circ \tau_1 = T$, alors

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(\cdot + k).T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\phi.T) \circ \tau_k.$$

Pour $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle T, \chi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi.T, \chi(\cdot - k) \rangle.$$

$\phi.T$ est à support compact, par continuité, $\exists p \geqslant 2$, $c > 0$ tels que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|k| \geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned}
&|\langle \phi.T, \chi(\cdot - k) \rangle| \\
&\leqslant c \sup_{l \leqslant p, |x| \leqslant 2} |\partial_x^l \chi(x-k)| \\
&= c \sup_{l \leqslant p, |x| \leqslant 2} \left| \frac{1}{(|x|-2)^2} (|x|-2)^2 \partial_x^l \chi(x-k) \right| \\
&= \frac{c}{(|k|-2)^2} N_p(\chi)
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{|k|\geqslant 3} |\langle \phi.T, \chi(\cdot - k) \rangle| \leqslant c \sum_{|k|\geqslant 3} \frac{1}{(|k|-2)^2} \cdot N_p(\chi)$. □

Théorème 3.6.2 (Formule sommatoire de Poisson)**.**

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(T) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}.$$

On divise la démonstration à cinq étapes :

1) $T \circ \tau_1 = T \Rightarrow T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2) Déduire que $\mathcal{F}(T) = e^{i\xi}.\mathcal{F}(T)$, puis que $\operatorname{supp}(\mathcal{F}(T)) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$.
3) Si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \prec \chi \prec]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, alors $\mathcal{F}(T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(\cdot - 2\pi k).\mathcal{F}(T)$.
4) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists c_k \in \mathbb{C}$ tel que $\chi(\cdot - 2\pi k).\mathcal{F}(T) = c_k \delta_{2\pi k}$.
5) Vérifier que $\mathcal{F}(T)$ est 2π-périodique et conclut.

Démonstration.

1) Déjà vu.
2) Comme $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T \circ \tau_1) = e^{i\xi}.\mathcal{F}(T)$, $(1 - e^{i\xi}).\mathcal{F}(T) = 0$. Par la remarque suivante on a $\operatorname{supp}(\mathcal{F}(T)) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ et $f.S = 0$. Alors $\mathrm{supp}(S) \subseteq f^{-1}(0)$. En effet, si $x \in \Omega$ tel que $f(x) \neq 0$, montrons que $x \notin \mathrm{supp}(S)$. Sinon, il existe donc un voisinage U de x et $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ tels que $f|_U \neq 0$ et $\langle S|_U, \varphi\rangle \neq 0$. Donc $\langle f.S, \frac{\varphi}{f}\rangle = \langle S, \varphi\rangle \neq 0$, contradiction.

3) Posons $\tilde{\chi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(x - 2\pi k)$, $\mathrm{supp}(1-\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Donc $(1-\tilde{\chi}).\mathcal{F}(T) = 0$.

4) Montrons $(\xi - 2\pi k).\chi(\cdot - 2\pi k).\mathcal{F}(T) = 0$.

Par 2), on a $(e^{i\xi} - 1).\sqrt{\chi(\cdot - 2\pi k)}.\mathcal{F}(T) = 0$. Comme $\frac{\xi - 2\pi k}{e^{i\xi}-1}|_{\xi = 2\pi k} = -i$ et les zéros de $e^{i\xi-1}$ sont d'ordre 1, $\frac{\xi-2\pi k}{e^{i\xi}-1} \cdot \sqrt{\chi(\cdot - 2\pi k)} \in C_c^\infty(\Omega)$. Donc

$$(\xi - 2\pi k).\chi(\cdot - 2\pi k).\mathcal{F}(T) = \left(\frac{\xi - 2\pi k}{e^{i\xi} - 1} \cdot \sqrt{\chi(\cdot - 2\pi k)}\right).\sqrt{\chi(\cdot - 2\pi k)}(e^{i\xi} - 1)\mathcal{F}(T) = 0.$$

On sait donc $\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}(T) = c_k\delta_{2\pi k}$ par 2.3.6 et un changement de variable $(\xi - 2\pi k \mapsto \xi)$.

5) $e^{2i\pi x}.T = T$, donc $\mathcal{F}(T) \circ \tau_{2\pi} = T$, alors $\mathcal{F}(T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \Rightarrow c_k = c$, $\forall k$. On pose $g = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\pi}}$, alors $\hat{g} = e^{-\pi x^2}$. Applique $\mathcal{F}(T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c\delta_{2\pi k}$, on a $c = 2\pi$. Cela fini la démonstration.

$\square$

Proposition 3.6.3 (Séries de Fourier)**.** Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ périodique de période 1. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x + k) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

la transformée de Fourier de u est

$$\mathcal{F}(u) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{2\pi k} \text{ où } c_k = \mathcal{F}(\phi.u)(2\pi k).$$

Notons que $\phi.u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{F}(\phi.u)$ est une fonction.

Remarque. Si u est une fonction continue et périodique de période 1, alors

$$\begin{aligned} c_k &= \mathcal{F}(\phi.u)(2\pi k) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x)u(x)e^{-2i\pi kx}dx \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \phi(x)u(x)e^{-2i\pi kx}dx \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \phi(x+l)u(x)e^{-2i\pi kx}dx \\ &= \int_0^1 (\sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(x+l)u(x))e^{-2i\pi kx}dx \\ &= \int_0^1 u(x)e^{-2i\pi kx}dx \end{aligned}$$

C'est juste le coefficient de Fourier usuel de u.

Démonstration. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(u), \psi \rangle &= \langle u, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(\cdot + k).u, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\phi.u) \circ \tau_k, \mathcal{F}(\psi) \rangle \\ &= \langle \phi.u, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}(\psi))(\cdot - k) \rangle \\ &= \langle \phi.u, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}(\psi))(\cdot + k) \rangle. \end{aligned}$$

Par la formule sommatoire de Poisson,

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}(\psi))(\cdot + k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\psi e_{-x})(k) = \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k, \mathcal{F}(\psi e_{-x}) \rangle \\ &= 2\pi \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi k}, \psi e_{-x} \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(2k\pi) e^{-2i\pi kx}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\langle \mathcal{F}(u), \psi \rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(2k\pi) \langle \phi.u, e^{-2i\pi kx} \rangle$.

Par inversion de Fourier, $u = \mathcal{F}^{-1}(2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \delta_{2\pi k}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_{2\pi k}$ où $c_k = \mathcal{F}(\phi.u)(2\pi k)$ pour toute distribution périodique de période 1 avec convergence $*$-faible de la série. □

Exercice 3.6.1. Quelques calculs

1) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, poser

$$\langle \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle := \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx$$

Montrer que $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer $\mathcal{F}(\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}))$.

2) Montrer que $H \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et calculer $\mathcal{F}(H)$.

Démonstration.

1) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la formule de Taylor donne

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x} = O(x)$$

quand x tend vers 0. Alors par l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} - \left(\frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x} \bigg|_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(-x)}{x} dx \right) \\
&= \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi' \rangle = \langle (-\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))', \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = -(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))'$, $\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2})$ est tempérée car $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ l'est. On a aussi

$$\mathcal{F}(\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2})) = ix\mathcal{F}(-\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -ix \cdot i\pi(1 - 2H) = -\pi|x|.$$

2) Comme $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2i\pi H + i\pi$, par l'inversion de Fourier

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(H) &= \frac{i}{2\pi}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))) - \mathcal{F}(i\pi)) \\
&= \frac{i}{2\pi}(2\pi\widetilde{\mathrm{vp}(\frac{1}{x})} - 2i\pi^2\delta_0) \\
&= -i \cdot \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) + \pi\delta_0.
\end{aligned}$$

$\square$

3.7 Espaces de Sobolev

Définition 3.7.1. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert. $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ est

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant k\}.$$

Cet espace est munit d'une norme

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque. $(W^{k,p}(\Omega), \ \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ est un espace de Banach. Cela provient de

- $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ est complet.
- Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$, alors $f_n \to f$ $*$-faiblement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.
- $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ est $*$-faiblement continue.

Cas important : $p = 2$. On note $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Ce produit scalaire induit une norme équivalente à $\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}$. À partir de maintenant on suppose $\Omega = \mathbb{R}^N$ afin d'utiliser la transformée de Fourier pour montrer les propriétés de $H^k(\mathbb{R}^N)$.

Lemme 3.7.1. $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Il y a une équivalence :

a) $f \in H^k(\mathbb{R}^N)$,

b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leqslant k$, $\xi^\alpha.\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. a)$\Rightarrow$ b) : Fourier.

b)$\Rightarrow$ a) : Fourier inverse. □

Remarque. $\forall f, g \in H^k(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle_{H^k(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle \mathcal{F}(\partial^\alpha f), \mathcal{F}(\partial^\alpha g) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N} \sum_{|\alpha| \leqslant k} \langle \xi^\alpha.\mathcal{F}(f), \xi^\alpha.\mathcal{F}(g) \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|^2_{H^k(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\xi^{2\alpha})|\mathcal{F}(f)|^2(\xi)d\xi$$

Ici $\sum_{|\alpha|\leqslant k}\xi^{2\alpha} = (1+\sum_l \xi_l^2)^k = (1+|\xi|^2)^k$, donc

$$\|f\|^2_{H^k(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^k|\mathcal{F}(f)|^2(\xi)d\xi$$

Définition 3.7.2. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \colon (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

et on pose

$$\langle f, g\rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^N}\langle(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f), (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(g)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Alors $(H^s(\mathbb{R}^N), \langle , \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)})$ est un espace de Hilbert qui coïncide avec le cas entier.

Proposition 3.7.2 (Échelle des espaces $H^s(\mathbb{R}^N)$)**.** Soient $s, t \in \mathbb{R}$, on a

a) Si $s < t$, alors $H^t(\mathbb{R}^N) \subseteq H^s(\mathbb{R}^N)$ et $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|f\|_{H^t(\mathbb{R}^N)}$.

b) $\forall s > 0$, $H^s(\mathbb{R}^N) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

c) $\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un sous espace dense de $H^s(\mathbb{R}^N)$.

d) L'application

$$\begin{aligned} H^{-s}(\mathbb{R}^N) &\to H^s(\mathbb{R}^N)' \\ f &\mapsto L_f \end{aligned}$$

où $L_f(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}\mathcal{F}(\phi)(\xi)d\xi$ est un isomorphisme anti-linéaire et isométrique.

Démonstration. a) Il suffit de pointer que $\forall\xi$, $\forall s < t$, on a

$$(1+|\xi|^2)^s \leqslant (1+|\xi|^2)^t.$$

b) L'inclusion $H^s(\mathbb{R}^N) \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$ est évidente. Si $s > 0$, $(1+|\xi|^2)^{-s} \leqslant 1$, $\forall\xi$. D'où $L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

c) L'inclusion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq H^s(\mathbb{R}^N)$ est claire. Vérifions la densité. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, alors $\phi = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on a une suite $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ avec $\phi_n \to \phi$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Poser $\varphi_n = (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}.\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $f_n = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\|f_n - f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\mathcal{F}(f_n)-\mathcal{F}(f))\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\|\phi_n - \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0.$$

d) Par le théorème de Riesz, l'application

$$H^s(\mathbb{R}^N) \to (H^s(\mathbb{R}^N))' \colon\ \phi \mapsto \Lambda_\phi = (\psi \mapsto \langle \phi, \psi \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)})$$

est un isomorphisme anti-linéaire isométrique. On a

$$\Lambda_\phi(\psi) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \overline{\mathcal{F}(\phi)(\xi)}\mathcal{F}(\psi)(\xi)d\xi.$$

Or $T\colon H^s(\mathbb{R}^N) \to H^{-s}(\mathbb{R}^N)$, $T(\phi) = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^s\mathcal{F}(\phi)) \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ est bien un isomorphisme linéaire isométrique avec $T^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-s}\mathcal{F}(f))$. Vérifie $L_f = \Lambda_{T^{-1}f}$ et cela conclut.

□

Théorème 3.7.3 (Plongement de Sobolev)**.** $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{N}{2} + k$, on a $H^s(\mathbb{R}^N) \subseteq C^k(\mathbb{R}^N)$. De plus, $\exists c_{N,k,s}$ tel que $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^N)$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N, |\alpha|\leqslant k} |\partial^\alpha f(x)| \leqslant c_{N,k,s}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

c'est-à-dire l'inclusion est continue.

Démonstration. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Comme $s > \frac{N}{2} + k$, $\forall |\alpha| \leqslant k$, on a

$$\left(\xi \mapsto \frac{i^{|\alpha|}\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha.\mathcal{F}(f) = \frac{i^{|\alpha|}\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \cdot (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f)$$

Comme $\frac{i^{|\alpha|}\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ par Cauchy-Schwartz. Par l'inversion de Fourier et le théorème de continuité de l'intégrale, on sait que $\partial^\alpha f$ est continue (et bornée) :

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha f(x)| &= |\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)d\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)|d\lambda \\ &\leqslant c_{N,k,s}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},\ \forall x\in\mathbb{R}^N,\ \forall|\alpha|\leqslant k\end{aligned}$$

où $c_{N,k,s} = \frac{1}{(2\pi)^N}(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{(1+|\xi|)^{2k}}{(1+|\xi|^2)^s}d\xi)^{\frac{1}{2}} < \infty$. □

Remarque. Donc $\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Une différence importante entre $H^s(\mathbb{R}^N)$ et $C^k(\mathbb{R}^N)$ c'est : $\forall f\in C^k(\mathbb{R}^N)$ alors pour tout hyperplan Σ de $\mathbb{R}^N$, la restriction $f|_\Sigma$ est C^k sur Σ : si Σ est l'hyperplan d'équation $x_N = 0$, alors $f|_\Sigma$ est $(x_1,\ldots,x_{N-1}) \to f(x_1,\ldots,x_{N-1},0)$ admet bien des dérivées partielles continues. L'énoncé analogue pour les espaces de Sobolev est FAUX. Déjà l'hyperplan $x_N = 0$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^N$ et même en définissant correctement la restriction, on doit changer d'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour obtenir un résultat analogue.

Théorème 3.7.4 (Théorème de trace)**.** *$N \geqslant 2$, $s > \frac{1}{2}$, l'application*

$$\gamma\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1}),\ \gamma(f)(x_1,\ldots,x_{N-1}) = f(x_1,\ldots,x_{N_1},0)$$

se prolonge en une application linéaire continue $\gamma\colon H^s(\mathbb{R}^N) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$.

Démonstration. Pour $x = (x_1,\ldots,x_N), \xi = (x_1,\ldots,x_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ on note $x' = (x_1,\ldots,x_{N-1})$, $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} = \frac{1}{(2\pi)}\|(1+|\xi'|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}\mathcal{F}(\gamma(f))\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Par l'inversion de Fourier on a

$$\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(f))(\xi',\xi_N)d\xi_N,\ \forall\xi'\in\mathbb{R}^{N-1}.$$

En effet, $\forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, poser

$$f_{x'} = (x_N \mapsto f(x',x_N)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

$\gamma(f)(x') = f(x',0) = f_{x'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_R \mathcal{F}(f_{x'})(\xi_N)d\xi_N$ par l<inversion de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}\gamma(f)(x')dx' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^{N-1}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix'\cdot\xi'}(\mathcal{F}(f_{x'}))(\xi_N)d\xi_N dx' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}(\mathcal{F}(f_{x'}))(\xi_N)dx'\right)d\xi_N \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi',\xi_N)d\xi_N.
\end{aligned}$$

Cela donne donc la définition de $\gamma(f)(x') = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\xi',\xi_N)d\xi$.

En appliquant Cauchy-Schwartz,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\xi',\xi_N)d\xi_N\right|^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi_N\right)J(\xi')$$

où

$$\begin{aligned}
J(\xi') &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_N}{(1+|\xi|^2)^s} < +\infty \ (s > \frac{1}{2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_N}{(1+|\xi'|^2)^s(1+\frac{\xi_N^2}{1+|\xi'|^2})}.
\end{aligned}$$

Changement de variable $\zeta = \frac{\xi_N}{\sqrt{1+|\xi'|^2}}$: $J(\xi') = c_s(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}$ où $c_s = \int_{\mathbb{R}}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^s}$.
On déduit $\forall \xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\begin{aligned}
4\pi^2(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}|(\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi')|^2 &= (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}\left|\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}(f)(\xi',\zeta_N)d\zeta_N\right|^2 \\
&\leqslant c_s\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi_N.
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leqslant c'_s\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 d\xi = c'_s\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.$$

Donc $\gamma\colon H^s(\mathbb{R}^N) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$ est bien une application linéaire continue. $\square$

Chapitre 4

Applications aux EDP

4.1 Opérateurs différentiels

Définition 4.1.1. Un *opérateur différentiel sur* Ω ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert) est une application linéaire

$$P\colon C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$

de la forme

$$(P\varphi)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x), \ \forall \varphi \in C^\infty(\Omega),$$

où $n \in \mathbb{N}$ dépendant de P et $\alpha \in a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$.

Notons que si P est un opérateur différentiel, alors $P(\mathcal{D}(\Omega)) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ et $P\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ est continue. Donc on peut aussi voir, par transposition, ${}^tP\colon \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ application linéaire $*$-faiblement continue.

Notation. Note D_k ou D_{x_k} l'application $P_k = \frac{1}{i}\partial_{x_k}$ et D^α ou D_x^α, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \circ \cdots \circ D_{x_N}^{\alpha_N}$. Quitte à poser $b_\alpha(x) = i^{|\alpha|} a_\alpha(x)$, $P = \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ s'écrit $P = \sum_{|\alpha| \leqslant n} b_\alpha(x) D^\alpha$.

Définition 4.1.2. Soit $P = \sum_{|\alpha| \leqslant n} b_\alpha(x) D^\alpha$, *le symbole complet de* P est le polynôme en les variables $\xi_1, \ldots, \xi_N$ et à coefficient dans $C^\infty(\Omega)$

$$\sigma(P)(x,\xi) := \sum_{|\alpha| \leqslant n} b_\alpha(x) \xi^\alpha \in C^\infty(\Omega)[\xi_1, \ldots, \xi_N]$$

l'ordre de P est le degré du polynôme $\sigma(P)$, c'est-à-dire

$$\text{ordre}(P) = \max\{|\alpha| \leqslant n : b_\alpha \text{ n'est pas identiquement nulle sur } \Omega\}.$$

Le symbole principal d'ordre d de P est la composante homogène de degré d de $\sigma(P)$:

$$\sigma_d(P)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=d} b_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Exemple 4.1.1. a) L'opérateur de transport (à vitesse $v \in \mathbb{R}^N$) sur $\mathbb{R}^{1+N} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$ est $\partial_t + \sum_{k=1}^N v_k \partial_{x_k}$.

b) Le Laplacien : $\Delta = \sum_{k=1}^N \partial^2_{x_k}$.

c) Le d'Alembertien sur $\mathbb{R}^{1+N} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$: $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x = \partial_t^2 - \sum_{k=1}^N \partial^2_{x_k}$ (propagation des ondes à vitesse 1).

d) L'opérateur de la chaleur $\mathbb{R}^{1+N} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$: $\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x$ (décrit le champ des températures dans un corps).

e) L'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^{1+N} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$: $i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x - V(x)$ (décrit en mécanique quantique le mouvement d'une particule soumise à un potentiel V).

f) L'opérateur de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{R}^2$: $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.

Définition 4.1.3. Soit P un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^N$. *Une solution élémentaire de P* est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $P(E) = \delta_0$.

Définition 4.1.4. Un opérateur différentiel P sur Ω est dit *à coefficients constants* si $P = \sum_{|\alpha|\leqslant n} b_\alpha D_\alpha$ où $b_\alpha \in \mathbb{C}$.

Remarque. Il n'y a pas, en général, unicité d'une solution élémentaire.

Exemple 4.1.2. Si $P = \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant n} b_\alpha D^\alpha$ à coefficient constant, alors $P(1) = 0$. Donc si $P(E) = \delta_0$, alors $P(E+1) = \delta_0$.

Théorème 4.1.1. Soit P un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^N$ à coefficients constants et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ une solution élémentaire. Soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, alors l'EDP $P(f) = S$ (d'inconnue $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$) admet au moins une solution donnée par $f = E * S$.

Démonstration. Comme $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, le produit de convolution est bien définit et on a

$$D^\alpha(E * S) = D^\alpha(E) * S, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Par la bilinéarité on a

$$P(E * S) = P(E) * S = \delta_0 * S = S$$

d'où une solution voulue. $\square$

Proposition 4.1.2. Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^N$. Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\widehat{Pf} = \sigma(P)(\xi).\hat{f}$$

En particulier, si E est une solution élémentaire de P, alors

$$\sigma(P)(\xi).\hat{E} = 1$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{\partial_{x_k} f} = i\xi_k.\hat{f}$. Donc $\widehat{D_{x_k} f} = \xi_k.\hat{f}$. Donc pour $P = \sum_\alpha b_\alpha D^\alpha$, on a

$$\widehat{Pf} = \sum_\alpha b_\alpha \xi^\alpha.\hat{f} = \sigma(P)(\xi).\hat{f}.$$

Le fin de la proposition provient de $\hat{\delta_0} = 1$. □

Remarque. Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^N$. Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $D_x^\alpha e^{i\xi\cdot x} = \xi^\alpha e^{i\xi\cdot x}$. Ainsi $P(e^{i\xi\cdot x}) = \sum_\alpha b_\alpha \xi^\alpha e^{i\xi\alpha}$. Donc $(x \mapsto e^{i\xi\cdot x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est un vecteur propre pour l'application linéaire P.

Considérons l'EDP $Pf = S$ comme un problème simulaire à la résolution du système linéaire $Av = b$ (inconnue $v \in \mathbb{C}^N$, données $A \in M_N(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$).

Pour trouver une solution élémentaire, la proposition suggère la stratégie :

a) Résoudre l'équation d'inconnue $\hat{E}$

$$\sigma(P).\hat{E} = 1 \ (\hat{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)).$$

b) Une fois que l'on trouve $\hat{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, calculer E par Fourier inverse.

La formule "$\hat{E} = \frac{1}{\sigma(P)}$" ne définit pas forcément une distribution tempérée à cause des $\xi \in \mathbb{R}^N$ tels que $\sigma(P)(\xi) = 0$.

L.Ehrenpreis et B.Malgrange ont montré en 1955 que tout opérateur différentiel à coefficients constant sur $\mathbb{R}^N$ admet une solution élémentaire. Voici leur stratégie.

a) On montre que

$$\psi\colon P(\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)) \to \mathbb{C}, \ \varphi \mapsto \varphi(0)$$

est bien définie.

b) On montre que cette application linéaire est continue (pour la topologie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).

c) On étend ψ à une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ par le théorème de Hahn-Banach.

Cette extension est une solution élémentaire.

4.2 Solutions élémentaires, principaux exemples

Les méthodes :

a) Utiliser les symétries de l'opérateur.

b) Passer en variables Fourier.

c) Déformer l'opérateur en faisant varier ses coefficients dans le plan complexe.

4.2.1 Solutions élémentaires du Laplacien

Définition 4.2.1. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $\lambda\Omega \subseteq \Omega$, $\forall \lambda > 0$. Rappelons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \circ \lambda Id \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\langle T \circ \lambda \mathrm{Id}, \varphi \rangle = \lambda^{-N} \langle .T, \varphi(\lambda^{-1} \cdot) \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est *homogène de degré* $\beta \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$, $T \circ \lambda Id = \lambda^\beta T$.

Exemple 4.2.1. 1) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est homogène de degré $\beta \Leftrightarrow \forall \lambda > 0$, $f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$.

2) $\partial^\alpha \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ est homogène de degré $-N - |\alpha|$.

Exercice 4.2.1.

1) Montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est homogène et calculer le degré.

2) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène degré $\beta \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^N$, $\partial^\alpha T$ homogène degré $\beta - |\alpha|$.

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β, alors

$$\sum_{k=1}^{N} x_k . \partial_{x_k} T = \beta T$$

C'est l'équation d'Euler.

4) Toute famille finie de distribution homogènes de degré 2 à 2 différents est libre.

5) Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ homogène de degré $\beta > -N$, alors $T = 0$.

Démonstration.

1) On trouve degré -1 en faisant un changement de variable dans la formule

$$\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

2) Calcul direct.

3) Fixer $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ qui vaut 1 au voisinage de 1 et poser $\psi \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$, $\psi(x,\lambda) := \varphi(\lambda^{-1}x)\theta(x)$. Alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N+1})$. Vérifier que

$$\partial_\lambda \psi(\cdot,\lambda)\big|_{\lambda=1} = -\sum_{k=1}^N x_k.\partial_{x_k}\varphi$$

sur un voisinage de 1. En effet, $\psi(x,\lambda) = \varphi(\lambda^{-1}x)$ au voisinage de 1 et $\forall x$, on a

$$\partial_\lambda \varphi(\lambda^{-1}x) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^N x_k(\partial_{x_k}\varphi)(\lambda^{-1}x).$$

Ainsi, $\forall \lambda > 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T, \varphi(\lambda^{-1}\cdot)\rangle = \lambda^{N+\beta}\langle T, \varphi\rangle.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle \sum_{k=1}^N x_k\partial_{x_k}T, \varphi\rangle &= -\sum_{k=1}^N\langle T, \partial_{x_k}(x_k.\varphi)\rangle = -\sum_{k=1}^N\langle T, x_k.\partial_k\varphi + \varphi\rangle \\ &= -N\langle T,\varphi\rangle + \langle T, \sum_{k=1}^N -x_k.\partial_{x_k}\varphi\rangle \\ &= -N\langle T,\varphi\rangle + \langle T, \partial_\lambda\psi(\cdot,\lambda)\big|_{\lambda=1}\rangle \\ &= -N\langle T,\varphi\rangle + \partial_\lambda\langle T, \varphi(\lambda^{-1}\cdot)\rangle\big|_{\lambda=1} \\ &= -N\langle T,\varphi\rangle + (N+\beta)\langle T,\varphi\rangle = \beta\langle T,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

4) Soit $T_1, \ldots, T_n$ des distributions homogènes de degré $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 2 à 2 distincts. S'il existe $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{j=1}^m c_jT_j = 0$, alors $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$,

$$0 = \sum_{j=1}^m \langle c_jT_j, \lambda^{-N}\varphi(\lambda^{-1}\cdot)\rangle = \sum_{j=1}^m\langle c_j\lambda^{\beta_j}T_j, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^m\langle c_jT_j,\varphi\rangle\lambda^{\beta_j}.$$

On étudie la tendance quand $\lambda \to 0$ et $\lambda \to +\infty$ et on obtient $\langle c_jT_j, \varphi\rangle = 0$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant m$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donc $c_j = 0$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant m$.

5) Prenons $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, alors $\varphi(\lambda^{-1}\cdot) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \varphi(0)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^N)$, donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{N+\beta}\langle T, \varphi(x)\rangle = \lim_{\lambda\to+\infty}\langle T, \varphi(\lambda^{-1}x)\rangle = \langle T, \varphi(0)\rangle = 0$$

car $\langle T, \varphi(0) \rangle = \lambda^{N+\beta} \langle T, \varphi(0) \rangle$, $\forall \lambda > 0$. Ceci implique que $\langle T, \varphi \rangle = 0$, donc $T = 0$.

$\square$

Proposition 4.2.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ homogène de degré $\beta > -N$. Alors $\exists! \tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ homogène de degré β telle que $\tilde{T}|_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}} = T$.

Démonstration. Unicité est la conséquence de l'exercice précédent. Montrons l'existence. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, noter

$$R_\beta \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(rx) r^{\beta+N-1} dr, \; x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\chi(t^{-1}x)}{t} dt = 1, \; \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

On peut prendre par exemple $\chi(x) = cX(|x|)$ où $X \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, $X \geqslant 0$ non nulle et $c \int_0^{+\infty} \frac{X(t^{-1})}{t} = 1$.

Poser $\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \chi . R_\beta \varphi \rangle$. On vérifie facilement la condition de continuité ainsi $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. En effet, par le calcul ci-dessous, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, disons $\mathrm{supp}(\varphi) = K$, on a

$$\langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi|_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}} \rangle \leqslant \sup_{|\alpha| \leqslant m, x \in K - \{0\}} \|\partial^\alpha \varphi\| \leqslant \sup_{|\alpha| \leqslant m, x \in K} \|\partial^\alpha \varphi\|.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle T, \chi R_\beta \varphi \rangle &= \langle T, \chi \int_0^{+\infty} \varphi(r\cdot) r^{\beta+N-1} dr \rangle \\
&= \int_0^{+\infty} \langle r^\beta . T, \chi \varphi(r\cdot) r^{N-1} \rangle dr \\
&= \int_0^{+\infty} \langle T \circ (r\mathrm{Id}), \chi \varphi(r\cdot) r^{N-1} \rangle dr \\
&= \int_0^{+\infty} \langle T, \chi(r^{-1}\cdot) \varphi \rangle \frac{dr}{r} \\
&= \langle T, \varphi \int_0^{+\infty} \frac{\chi(r^{-1}\cdot)}{r} dr \rangle \\
&= \langle T, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{T}|_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}} = T$.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}\langle \tilde{T} \circ \lambda \mathrm{Id}, \varphi \rangle =& \langle \tilde{T}, \lambda^{-N} \varphi(\lambda^{-1} \cdot) \rangle \\ =& \langle T, \lambda^{-N} \chi R_\beta \varphi(\lambda^{-1} \cdot) \rangle.\end{aligned}$$

Or $R_\beta \varphi(\lambda^{-1}x) = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda^{-1}rx) r^{\beta+N-1} dr$, par un changement de variable,

$$R_\beta \varphi(\lambda^{-1}x) = \lambda^{\beta+N} \int_0^{+\infty} \varphi(sx).s^{\beta+N-1} dx = \lambda^{\beta+N} R_\beta \varphi(x).$$

Donc $\langle \tilde{T} \circ \lambda \mathrm{Id}, \varphi \rangle = \langle T, \lambda^\beta \chi . R_\beta \varphi \rangle = \lambda^\beta \langle \tilde{T}, \varphi \rangle$. $\square$

On va maintenant calculer une solution élémentaire du Laplacien.
Cherchons, pour $N \geqslant 1$, $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $-\Delta E = \delta_0$.

1) Le cas $N = 1$. La formule c'est $-E'' = \delta_0 = H'$, donc $E' = -H + c_0$. Note $x^+ = (x \mapsto \max\{x, 0\})$, alors $(x^+)' = H$. Donc E est une fonction continue de la forme

$$E(x) = -x^+ + c_0 x + c_1.$$

Prenons $c_0 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = 0$ et on a $E(x) = -\frac{1}{2}|x|$.

2) Le cas $N \geqslant 2$.

Remarque. δ_0 et Δ sont invariants par isométries linéaires. Précisément, $\delta_0 \circ A = \delta_0$, $\Delta(f \circ A) = \Delta(f) \circ A$, $\forall A \in O_N(\mathbb{R})$, $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

On cherche ainsi une solution élémentaire du Laplacien qui soit une fonction (ou une distribution) invariante par isométries linéaires, c'est-à-dire *radiale* :

$$(x \mapsto f(|x|), \ f \in C(\mathbb{R}_+).$$

Ensuite si $-\Delta E = \delta_0$ alors $E|_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}}$ satisfait $-\Delta(E|_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}}) = \delta_0$.
Rappelons que si $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*)$, alors

$$\Delta(f(|x|)) = f''(|x|) + \frac{N-1}{|x|} f'(|x|), \ \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Autrement dit, en notant $r = |x|$, on a la formule

$$\Delta(f(|x|)) = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{d}{dr} (r^{N-1} \frac{df}{dr})|_{r=|x|}.$$

Pour la distribution E donnée sur $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ par une fonction radiale, on a

$$r^{N-1}\frac{dE}{dr} = \text{Const.}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, on a

$$\begin{cases} N \geqslant 3 & E(x) = c_0|x|^{2-N} + c_1 \\ N = 2 & E(x) = c_0 \log|x| + c_1 \end{cases}$$

Le Cas $N \geqslant 3$. La fonction $x \mapsto |x|^{2-N}$ est continue sur $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ et homogène de degré $2-N > -N$. Elle définit donc une distribution homogène de degré $2-N$ sur $\mathbb{R}^N$. Donc $\Delta(|x|^{2-N})$ est homogène de degré $-N$.

Elle est à support dans $\{0\}$. Ainsi $\Delta(|x|^{2-N})$ est une combinaison linéaire de dérivées de δ_0 qui sont homogènes. Les distributions homogènes de degrés 2 à 2 différents sont libres. Donc $\exists c$ tel que

$$\Delta(|x|^{2-N}) = c\delta_0$$

où c une constante à déterminer.

Le cas N=2. $(x \mapsto \log|x|)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ et localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Par contre elle n'est pas homogène de degré 0, mais on a $\forall k = 1, 2$, $\partial_{x_k} \log|x|$ est homogène de degré -1. En effet, par un changement de variable $x \leftarrow \lambda^{-1}x$

$$\begin{aligned} \langle(\partial_{x_k} \log|x|) \circ \lambda \mathrm{Id}, \varphi\rangle &= -\langle(\log|x|) \circ \lambda\mathrm{Id}, \partial_{x_k}(\varphi)\rangle \\ &= -\lambda^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} \log|x|(\partial_{x_k}(\varphi))(\lambda^{-1}x)dx \\ &= -\lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} \log(\lambda|x|)\partial_{x_k}\varphi(x)dx \\ &= -\lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} (\log|x|)\partial_{x_k}\varphi(x)dx \\ &= \lambda^{-1}\langle\partial_{x_k}(\log|x|), \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi $-\Delta\log|x|$ est homogène de degré -2 dans $\mathbb{R}^2$. Par les mêmes arguments, on a

$$-\Delta\log|x| = d\delta_0$$

où d une constante à déterminer.

Théorème 4.2.2 (Solution élémentaire du Laplacien)**.**

$$\begin{cases} E_1(x) & = -\frac{1}{2}|x|, \ x \in \mathbb{R} \\ E_2(x) & = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|), \ x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \\ E_N(x) & = \frac{1}{c_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}, \ x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}, \text{ où } c_N = (N-2)|S^{N-1}|, N \geqslant 3. \end{cases}$$

où $|S^{N-1}| = \sigma(S^{N-1})$ est la surface de la sphère. Alors $-\Delta E_N = \delta_0$.

Démonstration.

1) Cas $N = 1$ déjà vu.

2) Cas $N \geqslant 3$: On note, si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$, où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert, est C^1 sur Ω,

$$\nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x), \cdots .\partial_{x_N} f(x))^T.$$

On a

$$\nabla E_N(x) = \frac{1}{c_N}\frac{x}{|x|^N}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ radiale, posons $\varphi(x) = \phi(|x|)$, alors

$$\nabla\varphi(x) = \phi'(|x|)\frac{x}{|x|}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

$$\begin{aligned} \langle -\Delta E_N, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla E_N \cdot \nabla\varphi d\lambda \\ &= -\frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{x}{|x|^N}\cdot\frac{x}{|x|}\phi'(|x|)dx \\ &= -\frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\phi'(|x|)}{|x|^{N-1}}dx \\ &= -\frac{N-2}{c_N}|S^{N-1}|\int_0^{+\infty}\phi'(r)dr \text{ (en coordonnées sphériques)} \\ &= \frac{N-2}{c_N}|S^{N-1}|\phi(0). \end{aligned}$$

3) Cas $N = 2$: $\nabla E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{|x|^2}$. $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ radiale, posons $\varphi(x) = \phi(|x|)$, on a

$$\langle -\Delta E_2, \varphi\rangle = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\phi'(|x|)}{|x|}dx = -\frac{1}{2\pi}|S'|\int_0^{+\infty}\phi'(r)dr = \phi(0).$$

$\square$

4.2.2 Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur

On cherche pour $N \geqslant 1$, $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ telle que

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)(E_N) = \delta_{(t,x)=(0,0)}.$$

Si E_N est solution élémentaire alors $E_N + \text{Const.}$ l'est aussi.

Pour garantir l'unicité, on impose une condition de support : $\operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N$. Il faut donc trouver $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ pour résoudre

$$\begin{cases} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = \delta_{t=0} \otimes \delta_{x=0}, \\ \operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N. \end{cases}$$

On applique Fourier partiel en x. On note $\hat{E}_N = \mathcal{F}_x(E_N) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{E}_N + \frac{1}{2}|\xi|^2 \hat{E}_N = \delta_0 \otimes 1, \\ \operatorname{supp}(\hat{E}_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N. \end{cases}$$

En particulier, la restriction $\hat{E}_N\big|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N}$ satisfait

$$\partial_t \hat{E}_N\big|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N} + \frac{1}{2}|\xi|^2 \cdot \hat{E}_N\big|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N} = 0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N)$.

Cela suggère de choisir

$$\hat{E}_N = (t, \xi) \mapsto c(\xi) e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}.$$

Comme $\hat{E}_N$ doit être à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N$, on va prendre $\hat{E}_N$ globalement définie par la fonction $(t, \xi) \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) c(\xi) e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}$.

Théorème 4.2.3 (Solution élémentaire de l'opérateur de la chaleur)**.** Pour $N \geqslant 1$, poser

$$E_N(t, x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}, \ \forall (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N.$$

Alors E_N est l'unique distribution tempérée sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$ telle que

$$\begin{cases} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = \delta_{(t,x)=(0,0)}, \\ \operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N. \end{cases}$$

Remarque. Notons

$$L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^N)) = \big\{f \colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{C} \text{ mesurables } : \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} |f(t,x)|dx < +\infty\big\}.$$

Alors voir $f \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^N))$ comme une distribution sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$:

$$\langle f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} f(t,x)\varphi(t,x)dtdx.$$

On a ainsi

$$L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^N)) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$$

car

$$\begin{aligned}
|\langle f, \varphi\rangle| &\leqslant N_{N+3}(\varphi)\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N} \frac{f(t,x)}{1+x^{N+1}}\cdot\frac{1}{1+t^2}dtdx \\
&\leqslant N_{N+3}(\varphi)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(t,x)}{1+|x|^{N+1}}dx\right)\frac{1}{1+t^2}dt \\
&\leqslant cN_{N+3}(\varphi)\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+t^2}dt \\
&= c'N_{N+3}(\varphi)
\end{aligned}$$

où c est déterminé comme $f \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}^N))$.

Démonstration. Par la remarque, E_N définit une distribution tempérée. De plus pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} E_N(t,x)dx = 1$. Par la formule de la transformée de Fourier d'une Gaussienne, on a

$$\hat{E}_N(t,\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} = (\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\otimes 1)e^{-\frac{1}{2}t|x|^2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \frac{1}{2}|\xi|^2)\hat{E}_N &= e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\partial_t(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}\otimes 1) \\
&= e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\delta_{t=0}\otimes 1 = \delta_{t=0}\otimes 1
\end{aligned}$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^N_x)$. On applique Fourier partiel en x inverse :

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = \delta_{t=0}\otimes\delta_{x=0}.$$

La condition de support est claire.

L'unicité est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.2.4. Si $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ telle que

$$\begin{cases} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)F = 0 \\ \operatorname{supp}(F) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N \end{cases}$$

alors $F = 0$. En effet, en appliquant Fourier (global), on a $(i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2).\hat{F} = 0$, donc $(\tau^2 + \frac{1}{4}|\xi|^4).\hat{F} = 0$. Par la remarque dans 3.6.2, $\operatorname{supp}(\hat{F}) \subseteq \{(0,0)\}$, donc F est polynomiale et nulle sur $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^N$. Donc $F = 0$. □

4.2.3 Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger

Pour $N \geqslant 1$, on cherche $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ telle que

$$(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)}.$$

On ajoute une condition de support $\operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.

Idée. Le changement de variable $s = it$ transforme l'opérateur de Schrödinger en l'opérateur de la chaleur. Cela suggère de prendre E_N de la forme

$$E_N(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi i t}} e^{-\frac{|x|^2}{2it}}.$$

Théorème 4.2.5 (Solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger)**.** Pour $N \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, on pose

$$E_N^\varepsilon(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{\sqrt{2\pi(\varepsilon + i)t}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}}, \ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N$$

où $\sqrt{\cdot}$ désigne la détermination principale.

Alors $E_N^\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, $\forall \varepsilon > 0$ et E_N^ε converge $*$-faiblement quand $\varepsilon \to 0$ vers $E_N \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ qui est l'unique distribution tempérée telle que

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)}, \\ \operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N. \end{cases}$$

La transformée de Fourier partielle en x de E_N est $\hat{E}_N(t,x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}$.

Démonstration. Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.2.6 (Transformée des Gaussiennes complexes)**.** Soit $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$. Posons

$$G_N(z,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}^N} e^{-\frac{|x|^2}{2z}}, \ (x \in \mathbb{R}^N).$$

Alors la transformée de Fourier partielle en x de G_N est la fonction

$$\hat{G}_N(z,\xi) = e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2}.$$

Démonstration du lemme : On utilise le résultat suivant (conséquence du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre)

Théorème 4.2.7. $X \subseteq \mathbb{R}^N$ mesurable, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f \colon \Omega \times X \to \mathbb{C}$ telle que

a) $\forall x \in X,\ f(\cdot,x)$ est holomorphe sur Ω.

b) $\forall z \in \Omega,\ f(z,\cdot)$ est mesurable.

c) $\exists \varphi \in L^1(X)_+,\ |f(z,x)| \leqslant \varphi(x),\ \forall z,x.$

alors $(z \in \Omega \mapsto \int_X f(z,x)dx)$ est holomorphe.

On peut montrer simplement ce théorème par la formule de Cauchy-Riemann.

Comme $[(z,x) \mapsto G_N(z,x)]$ continue sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} \times \mathbb{R}^N$ et

$$|G_N(z,x)| = \frac{1}{(2\pi|z|)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{-\mathrm{Re}(z)|x|^2}{2|z|^2}}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sup_{\mathrm{Re}(z)>a, |z|\leqslant R} |G_N(z,x)|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-\frac{a|x|^2}{2R^2}}}{(2\pi a)^{\frac{N}{2}}} dx < \infty$$

Comme $(z \mapsto G_N(z,x))$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$, on déduit que $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $(z \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} G_N(z,x)dx)$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Par la formule de la transformée de Fourier des Gaussiennes réelles, cette fonction coïncide avec $(z \mapsto e^{-\frac{1}{2}z|\xi|^2})$ pour $z \in \mathbb{R}_+^*$ qui est également holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Par le théorème des zéros isolés, ces deux fonctions holomorphes coïncident sur l'ouvert connexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Cela fini la démonstration du lemme.

Pour

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N = i\delta_{(t,x)=(0,0)} \\ \mathrm{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N \end{cases}$$

on applique Fourier partielle en x :

$$\begin{cases} (i\partial_t - \frac{1}{2}|\xi|^2)\hat{E}_N = i\delta_{t=0} \otimes 1 \\ \operatorname{supp}(\hat{E}_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_x \end{cases}$$

$(t,\xi) \mapsto e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}$ est de classe C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées. Donc

$$\begin{aligned} i\partial_t(e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\hat{E}_N) &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}(i\partial_t\hat{E}_N - \frac{1}{2}|\xi|^2\hat{E}_N) \\ &= e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2} i\delta_{t=0} \otimes 1 \\ &= i\delta_{t=0} \otimes 1. \end{aligned}$$

Avec la condition de support, c'est équivalent à

$$e^{\frac{1}{2}it|\xi|^2}\hat{E}_N = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+(t)} \otimes 1.$$

Donc $\hat{E}_N$ est la fonction

$$\hat{E}_N(t,\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t) e^{-\frac{1}{2}it|\xi|^2}.$$

C'est une fonction mesurable bornée donc $\hat{E}_N$ est tempérée.

Soit E_N la transformée de Fourier partielle inverse en x, par le calcul précédent, c'est la seule solution élémentaire avec $\operatorname{supp}(E_N) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_x$.

Vérifions que $E_N = \lim_{\varepsilon\to 0^+} E_N^\varepsilon$.

$$|E_N^\varepsilon(t,x)| = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t)}{\sqrt{2\pi(\varepsilon^2+1)^{1/2}t}^N} e^{-\frac{\varepsilon|x|^2}{2(\varepsilon^2+1)t}}.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |E_N^\varepsilon(t,x)| dx = \frac{(\varepsilon^2+1)^{N/4}}{\varepsilon^{N/2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t).$$

Donc $E_N^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}, L^1(\mathbb{R}))$, donc $E_N^\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$. Par le lemme, la transformée de Fourier est

$$\hat{E}_N^\varepsilon(t,\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_+}(t) e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon+i)t|\xi|^2}$$

Par le théorème de convergence dominée, $\hat{E}_N^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \hat{E}_N$ $*$-faiblement. Par la continuité de Fourier inverse, $E_N^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} E_N$ $*$-faiblement. □

4.3 Les équations de Laplace et de Poisson

Étude des EDP de la forme

$$-\Delta E = S$$

E inconnue et S donnée. C'est l'équation de Poisson ou de Laplace quand $S = 0$.

Définition 4.3.1. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Une fonction f de classe C^2 sur Ω et à valeurs réelles est dite *harmonique* dans Ω si $\Delta f(x) = 0$, $\forall x \in \Omega$.

Pour Cas $N = 1$: sur un intervalle de $\mathbb{R}$, ce sont les fonctions affines.

Proposition 4.3.1. Toute fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est harmonique dans Ω. En particulier, si f holomorphe sur Ω, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont harmoniques.

Rappel.(Propriété de la moyenne) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ouvert et $f \in \mathbb{C}^2(\Omega)$. Toutes suivantes sont équivalentes :

a) f est harmonique sur Ω.

b) $\forall x_0 \in \Omega$, $\forall r > 0$, $\bar{B}(x_0, r) \subseteq \Omega$

$$f(x_0) = \frac{1}{|S^{N-1}|} \int_{S^{N-1}} f(x_0 + r\omega) d\sigma(\omega).$$

Définition 4.3.2. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite *harmonique* si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème 4.3.2. Toute distribution harmonique sur un ouvert Ω est une fonction C^∞.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\Delta(T) = 0$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$ telle que $B(x_0, 2R) \subseteq \Omega$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\bar{B}(x_0, R) \prec \phi \prec B(x_0, \frac{3}{2}R)$.

Notons que

$$\Delta(\phi.T) = 2\nabla\phi.\nabla T + (\Delta\phi).T + \phi.(\Delta T)$$

où l'on note $\nabla\phi.\nabla T = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}\phi.\partial_{x_k}T$. Comme $\partial_{x_k}\phi$ est à support dans $\{x \in \mathbb{R}^N \mid R \leqslant |x - x_0| \leqslant \frac{3}{2}R\}$, on déduit que $\phi.T$ est harmonique sur $B(x_0, R)$. On note encore $\phi.T$ le prolongement de $\phi.T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω. Soit $(\xi_\varepsilon)_{\varepsilon \geqslant 0}$ une suite régularisante, $0 \leqslant \xi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}(\xi_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \xi_\varepsilon d\lambda = 1$.

$$\Delta(\xi_\varepsilon * \phi.T) = \xi_\varepsilon * \Delta(\phi.T)$$

$\mathrm{supp}(\Delta(\xi_\varepsilon * \phi.T)) \subseteq B(0, \varepsilon) + \mathbb{R}^N \backslash B(x_0, R) = \mathbb{R}^N \backslash B(x_0, R - \varepsilon)$. Donc $\xi_\varepsilon * \phi/T$ est harmonique sur $B(x_0, R - \varepsilon)$.

Dans la suite on suppose $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}R$. Soit une fonction radiale $\Psi(x) = \psi(|x|^2)$ à support dans $B(0, \frac{1}{4}R)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \Psi(x)dx = 1$.

D'après un corollaire de la propriété de la moyenne des fonctions harmonique appliqué à $\xi_\varepsilon * \phi.T$ qui est harmonique sur $B(x_0, \frac{3}{4}R)$, on a

$$(\xi_\varepsilon * \phi.T)(x) = \int_{B(0,\frac{3}{4}R)} (\xi_\varepsilon * \phi.T)(x-y)\psi(|y|^2)dy = \Psi * (\xi_\varepsilon * \phi.T)(x).$$

On a $\xi_\varepsilon * \phi.T \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \phi.T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, donc

$$\Psi * (\varepsilon * \phi.T) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \Psi * \phi.T$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$. Comme

$$\xi_\varepsilon * \phi.T\big|_{B(x_0,\frac{1}{2}R)} = \Psi * (\xi_\varepsilon * \phi.T)\big|_{B(x_0,\frac{1}{2}R)}$$

pour tout $\varepsilon < \frac{1}{4}R$ en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on trouve

$$T|_{B(x_0,\frac{1}{2}R)} = \phi.T|_{B(x_0,\frac{1}{2}R)} = \psi * \phi.T|_{B(x_0,\frac{1}{2}R)}.$$

Le membre de droite est une fonction C^∞. □

Définition 4.3.3. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est *holomorphe* si

$$\bar{\partial}T = \partial_{\bar{z}}T := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)T = 0.$$

Corollaire 4.3.3. Toute distribution holomorphe sur Ω est une fonction holomorphe.

Démonstration. Poser $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\partial_{\bar{z}}T = 0$, alors $\partial_z\partial_{\bar{z}}T = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)T = 0$. Donc $\Delta T = 0$ est harmonique, donc T est une fonction C^∞. T est holomorphe car T satisfait l'équation de Cauchy-Riemann. □

Théorème 4.3.4. Toute distribution tempérée et harmonique sur $\mathbb{R}^N$ est une fonction polynomiale.

Démonstration. $\Delta T = 0 \Rightarrow \widehat{\Delta T} = -|\xi|^2.\hat{T} = 0$. Donc $\mathrm{supp}(\hat{T}) \subseteq \{0\}$, donc $\hat{T} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$. Par Fourier inverse T est une fonction polynomiale. □

Maintenant on traite l'équation de Poisson.

Théorème 4.3.5. Soit $N \geqslant 3$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ tels que

$$-\Delta T = S$$

alors

a) T est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^N \backslash \operatorname{supp}(S)$.

b) L'unique solution du problème $-\Delta T = S$ et $\lim_{|x| \to +\infty} T(x) = 0$ est donnée par $T = E_N * S$.

Démonstration. a) Vrai car T est harmonique sur l'ouvert $\mathbb{R}^N \backslash \operatorname{supp}(S)$.

b) $-\Delta(E_N * S) = (-\Delta E_N) * S = \delta_0 * S = S$. Montrons que $E_N * S$ tend vers 0 à l'infini. Soit $\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\bar{B}(0,1) \prec \chi \prec B(0,2)$. Écrire $E_N = G_1 + G_2$, $G_1 = (1-\chi)E_N$, $G_2 = \chi E_N$. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(S) \subseteq B(0,R)$, alors $\operatorname{supp}(G_2 * S) \subseteq \operatorname{supp}(G_2) + \operatorname{supp}(S) \subseteq B(0, R+2)$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \backslash \bar{B}(0, R+2))$, on a $T = G_1 * S$. Notons que $G_1 * S$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^N$. Par la propriété de continuité des distributions à support compact, on a

$$|G_1 * S(x)| = |\langle S, G_1(x - \cdot)\rangle| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m, |y| \leqslant R} |\partial^\alpha G_1(x-y)|, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Pour $|x| > R' > R + 2$,

$$|G_1 * S(x)| \leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant m, |y| \leqslant R} |\partial^\alpha E_N(x-y)|.$$

E_N est homogène de degré $-(N-2)$ donc $\partial^\alpha E_N$ est homogène de degré $-(N-2) - |\alpha|$. Ainsi

$$|\partial^\alpha E_N(z)| \leqslant c_\alpha |z|^{-(N-2)-|\alpha|}, \ \forall z \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$

Donc

$$|G_1 * S(x)| \leqslant \frac{c \max_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha}{(|x| - R)^{N-2}}, \ \forall |x| > R'.$$

Donc, pour $|x| > R'$, $T(x) = G_1 * S(x) = O(\frac{1}{|x|^{N-2}}) \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$.

Unicité : Si, pour $k = 1, 2$, $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $-\Delta T_k = S$ et $\lim_{|x| \to +\infty} T_k(x) = 0$, alors $T_1 - T_2$ est harmonique et c'est donc une fonction C^∞. De plus $T_1 - T_2$ tend vers 0 à l'infini. Donc $T_1 = T_2$.

□

Théorème 4.3.6. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si ΔT est une fonction C^∞, alors T est une fonction C^∞.

Démonstration. $x_0 \in \Omega,\ r > 0$ tels que

$$\bar{B}(x_0, 2r) \subseteq \Omega$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $B(x_0, \frac{3}{2}r) \prec \phi \prec \bar{B}(x_0, 2r)$, alors

$$-\Delta(\phi.T) = -\phi.\Delta T - 2\nabla\phi.\nabla T - \Delta\phi.T$$

où on note $S_1 = -\phi.\Delta T$ et $S_2 = -2\nabla\phi.\nabla T - \Delta\phi.T$. $S_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $\operatorname{supp}(S_2) \subseteq \bar{B}(x_0, 2r)\backslash B(x_0, \frac{3}{2}r)$. Soit $T_k = E_N * S_k$, $k = 1, 2$, solution de $-\Delta T_k = S_k$ (et on demande que $\lim_{|x|\to+\infty} T_k(x) = 0$). Par Unicité, $\phi.T = T_1 + T_2$. Ainsi, T_1 est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ et T_2 est une fonction C^∞ sur $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^N \backslash \operatorname{supp}(S_2)$. On déduit que

$$T|_{B(x_0,r)} = \phi.T|_{B(x_0,r)}$$

est donc C^∞ sur $B(x_0, r)$. $\square$

4.4 L'équation de la chaleur

4.4.1 Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Définition 4.4.1. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$, $\operatorname{supp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N_x$, et $f^{\mathrm{in}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. On dit que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ est *solution au sens des distribution du problème de Cauchy* (donnée initiale f^{in}, second membre S)

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = S & x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ f|_{t=0} = f^{\mathrm{in}} \end{cases}$$

si

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = \delta_{t=0} \otimes f^{\mathrm{in}} + S \\ \operatorname{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^N_x \end{cases}$$

Théorème 4.4.1 (Existence et unicité)**.** $f^{\mathrm{in}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^N)$. Il existe une unique solution au sens des distributions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec donnée initiale f^{in} et second membre S. Cette solution est

$$f = E_N * (\delta_{t=0} \otimes f^{\mathrm{in}} + S).$$

En particulier $f|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_x^N)$, où

$$E_N(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)(E_N * (\delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}} + S)) \\
&= [(\partial_t - \frac{1}{2}\delta_x)(E_N)] * (\delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}} + S) \\
&= \delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}} + S.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
supp(E_N * (\delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}} + S)) &\subseteq \text{supp}(E_N) + \text{supp}(\delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}} + S) \\
&\subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N + \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \\
&= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

L'unicité est une conséquence du lemme 4.2.4 utilisé pour montrer l'unicité de E_N. □

Proposition 4.4.2. $N \geqslant 1$, $f^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Il existe une unique solution f au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = 0 \\ f|_{t=0} = f^{\text{in}} \end{cases}$$

La restriction de cette solution à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$ se prolonge (en $t = 0$) en une fonction $\subseteq C(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N))$ et donnée par la formule

$$\begin{aligned}
f(t,x) =& E_N(t,\cdot) * f^{\text{in}} \\
=& \int_{\mathbb{R}^N} E(t, x-y) f^{\text{in}}(y) dy, \ \forall t > 0, \ \text{pp en } x \in \mathbb{R}^N. \\
f(0,\cdot) =& f^{\text{in}}.
\end{aligned}$$

Remarque. Si $f^{\text{in}} \in C_c(\mathbb{R}^N)$, la solution de la proposition et du théorème coïncident.

Démonstration. Pour $n \geqslant 1$, soit f_n l'unique solution du problème de Cauchy avec second membre 0 et donnée initiale $f_n^{\text{in}} = \mathbb{1}_{B(0,n)} f^{\text{in}} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, on a $f_n = E_N * (\delta_{t=0} \otimes f_n^{\text{in}})$. On applique Fourier partielle en x :

$$\hat{f}_n(t,\xi) = \hat{E}_N(t,\xi)\widehat{f^{\text{in}}}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2} \widehat{f_n^{\text{in}}}(\xi)$$

pour $t > 0$, p.p. en $\xi \in \mathbb{R}^N$. Pour $t \geqslant 0$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, soit

$$g(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\widehat{f^{\text{in}}}(\xi),$$

alors $g(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ avec $\|g(t,\cdot)\|_{L^2} \leqslant \|f^{\text{in}}\|_{L^2}$.

Par Plancherel, $\forall t \geqslant 0$ il existe une unique fonction $(x \mapsto f(t,x)) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\hat{f}(t,\xi) = g(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\widehat{f^{\text{in}}}(\xi), \text{ p.p. en } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Note encore f_n et f les prolongements de f_n et f par 0 en $t \leqslant 0$, alors Plancherel nous donne $\forall t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|f_n(t,\cdot) - f(t,\cdot)\|_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^N}\|\hat{f}_n(t,\cdot) - \hat{f}(t,\cdot)\|_{L^2} \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^N}\|\widehat{f_n^{\text{in}}} - \widehat{f^{\text{in}}}\|_{L^2} = \|f_n^{\text{in}} - f^{\text{in}}\|_{L^2} \to 0\end{aligned}$$

Par convergence dominée, $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, donc $\partial_t f_n \to \partial_t f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, $\Delta_x f_n \to \Delta_x f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$, donc

$$\delta_{t=0} \otimes f_n^{\text{in}} = \partial_t f_n - \frac{1}{2}\Delta_x f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = \delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}}.$$

Par construction, $\operatorname{supp}(f_n) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^N$, $\forall n$. Donc $\operatorname{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.

L'unicité est une conséquence du lemme 4.2.4.

Montrons la continuité. Soit $t_n \to t$, $t_n, t \geqslant 0$, utilisons Plancherel et $\hat{f}(t,\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)$, on a

$$\|f(t_n,\cdot) - f(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N}(e^{-\frac{1}{2}t_n|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2})^2|\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)|^2 d\xi \to 0$$

par convergence dominée et car $(e^{-\frac{1}{2}t_n|\xi|^2} - e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2})^2|\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)|^2 \leqslant 4|\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)|^2$. □

Définition 4.4.2 (Semi-groupe de la chaleur)**.** Pour $t \geqslant 0$, on définit l'application linéaire $P(t)\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $f^{\text{in}} \mapsto f(t,\cdot)$, où f est l'unique solution du problème de Cauchy de l'équation de la chaleur avec second membre nul et donnée initial f^{in}.

Proposition 4.4.3. Le *semi-groupe* de la chaleur satisfait

a) $\forall t \geqslant 0$, $\|P(t)f^{\text{in}}\|_{L^2} \leqslant \|f^{\text{in}}\|_{L^2}$.

b) $\forall s,t > 0$, $P(s+t) = P(s)P(t)$.

c) $\forall f^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\mathbb{R}_+ \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $t \mapsto P(t)f^{\text{in}}$ est continue.

Démonstration. Par la preuve de la proposition, $\widehat{P(t)f^{\text{in}}}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}t|\xi|^2}\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)$, ceci implique b). En particulier,

$$|\widehat{P(t)f^{\text{in}}}(\xi)| \leqslant |\widehat{f^{\text{in}}}(\xi)|$$

d'où a) avec Plancherel.

c) est déjà vu dans la proposition précédente.

□

Corollaire 4.4.4. Soit $N \geqslant 1$, prenons donnée initiale $f^{\text{in}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et second membre $S \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ et telle que

$$\sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^N} |S(t,x)|^2 dx < +\infty$$

Il existe une unique fonction $f \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^N)) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ qui est une solution de

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f = S \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \\ f|_{t=0} = f^{\text{in}} \end{cases}$$

f est donnée par la formule

$$f(t,\cdot) = P(t)f^{\text{in}} + \int_0^t P(t-s)S(s,\cdot)ds$$

Elle est appelée la formule de Duhamel.

Chapitre 5

Examens

5.1 Examen 2022

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

(1) $x^2 \cdot T = 1$.

(2) $x \cdot T = \delta_0^{(k)} (k \geqslant 0)$.

(3) $x^2 \cdot T = \delta_0$.

(4) $x^n \cdot T = \delta_0 (n \geqslant 1)$.

Exercice 2. Soient $M, N \geqslant 1$.

(1) Soient $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^M$ des ouverts, $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Montrer que

$$\operatorname{supp}(S \otimes T) = \operatorname{supp}(S) \times \operatorname{supp}(T).$$

(2) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ un ouvert, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $S \in \mathcal{D}'(\Omega_x \times I_t)$. Montrer que si $\partial_t S = 0$, alors il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $S = T \otimes 1$.

Exercice 3. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ telles que $\Delta T := \sum\limits_{k=1}^{N} \partial_{x_k}^2 T = 0$.

Exercice 4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ une distribution homogène de degré β.

(1) Montrer que T est tempérée.

(2) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{T}$ est aussi homogène et préciser son degré.

Exercice 5. Montrer que la limite $*$-faible dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ suivante existe et la calculer :

$$\lim_{s \to +\infty} e^{isx} \cdot \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 6. Soit $\bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ l'opérateur de Cauchy-Riemann sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$. Considérons la fonction $z \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $z := (x, y) \mapsto x + iy$.

(1) Montrer que $\frac{1}{z} \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ est homogène de degré -1.

(2) Montrer que $\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}\right) = 0$.

(3) Montrer que $\frac{1}{\pi z}$ est une solution élémentaire de l'opérateur de Cauchy-Riemann.

Exercice 7. Soit $A = (a_{kl})_{k,l} \in M_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive (i.e. $A^T = A$ et $\mathrm{Sp}(A) \subseteq]0, +\infty[$ où Sp désigne le spectre). On considère l'opérateur différentiel à coefficients constants P sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x$ définit par $P := \partial_t - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl}\partial_{x_k}\partial_{x_l}$. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N_x)$ telle que :

(i) $PE = \delta_{(t,x)=(0,0)}$;

(ii) $\mathrm{supp}(E) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$.

Montrer que E est donné par la fonction $E(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{\sqrt{(2\pi t)^N|\det(A)|}}e^{-\frac{1}{2t}\langle A^{-1}x,x\rangle}$, où $\langle A^{-1}x, x\rangle$ désigne ici le produit scalaire Euclidien de $A^{-1}x$ avec x.

5.1.1 Solutions

Exercice 1.

(1) $T = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) + c_0\delta_0 + c_1\delta_0'$, $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$.

(2) $\forall \varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle x\delta_0^{(k+1)}, \varphi\rangle &= (-1)^{k+1}\langle \delta_0, (x\varphi)^{(k+1)}\rangle \\
&= (-1)^{k+1}\langle \delta_0, x\varphi^{(k+1)} + (k+1)\varphi^{(k)}\rangle \\
&= \langle (-1)^{k+1}(k+1)\delta_0, \varphi^{(k)}\rangle \\
&= \langle -(k+1)\delta_0^{(k)}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Donc $T = -\frac{1}{k+1}\delta_0^{(k+1)} + c_0\delta_0$, $c_0 \in \mathbb{C}$.

(3) $T = \frac{1}{2}\delta_0'' + c_0\delta_0 + c_1\delta_0'$, $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$.

(4) $T = \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta_0^{(k)}$, les c_k sont dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.

(1) Proposition 2.8.2.

(2) On choisit $\chi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \chi d\lambda = 1$. On définit

$$T\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},\ \langle T, \varphi\rangle = \langle S, \varphi \otimes \chi\rangle.$$

Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$, posons $\gamma = \int_I \psi d\lambda$, on a

$$\begin{aligned}
\langle S, \varphi \otimes \psi\rangle &= \langle S, \varphi \otimes \gamma\chi\rangle + \langle S, \varphi \otimes (\psi - \gamma\chi)\rangle \\
&= \gamma\langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi \otimes (\psi - \gamma\chi)\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $\psi - \gamma\chi$ est à support compact et $\int_I (\psi - \gamma\chi) d\lambda = 0$, il existe $\psi_0 \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\psi_0' = \psi - \gamma\chi$. Donc

$$\begin{aligned}
\langle S, \varphi \otimes \psi\rangle &= \gamma\langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi \otimes \psi_0'\rangle \\
&= \langle T, \varphi\rangle \cdot \langle 1, \psi\rangle - \langle \partial_t S, \varphi \otimes \psi_0\rangle \\
&= \langle T, \varphi\rangle \cdot \langle 1, \psi\rangle.
\end{aligned}$$

Alors $S = T \otimes 1$ avec $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercice 3. Théorème 4.3.4.

Exercice 4.

(1) Référence : « The Analysis of Linear Partial Diffierential Operators I », Lars Hörmander, Théorème 7.1.18.

On choisit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, $\int_0^\infty \frac{\psi(xt^{-1})}{t}dt = 1$. On définit $\psi_0(x) = \int_0^1 \frac{\psi(xt^{-1})}{t}dt$, alors $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, 1 \cdot \varphi\rangle = \langle T, \psi_0\varphi\rangle + \langle T, \int_1^\infty \frac{\psi(t^{-1}\cdot)}{t}\varphi(\cdot)dt\rangle.$$

Par l'intégration sous le crochet de dualité,

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi\rangle &= \langle T, \psi_0\varphi\rangle + \int_1^\infty \langle T, \psi(t^{-1}\cdot)\varphi(\cdot)\rangle t^{-1}dt \\ \text{(homogénéité)} &= \langle T, \psi_0\varphi\rangle + \int_1^\infty \langle T, \psi(\cdot)\varphi(t\cdot)\rangle t^{\beta+N-1}dt\end{aligned}$$

Soit $K_0 = \operatorname{supp}\psi_0$, $K = \operatorname{supp}\psi$. Posons $d = \min\limits_{x\in K}|x| > 0$. Par la continuité de T, il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned}|\langle T, \varphi\rangle| &\leqslant C(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_0}|D^\alpha(\psi_0\varphi)| + \int_1^\infty \sum_{|\alpha|\leqslant k} t^{\beta+n-1}\sup_{x\in K}|D^\alpha(\psi(x)\varphi(tx))|dt) \\ \text{(Leibniz)} &\leqslant C'(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_0}|D^\alpha\varphi| + \int_1^\infty \sum_{|\alpha|\leqslant k} t^{|\alpha|+\beta+n-1}\sup_{tK}|D^\alpha\varphi|dt) \\ &\leqslant C'(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_0}|D^\alpha\varphi| + \int_1^\infty t^{k+\beta+n-1}\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{tK}|D^\alpha\varphi|dt) \\ &\leqslant C'(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{K_0}|D^\alpha\varphi| + \int_1^\infty d^{-M}t^{k+\beta+n-1-M}\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{tK}|x^M D^\alpha\varphi|dt) \\ &\leqslant C''\sum_{|\alpha|\leqslant k}\sum_{l\leqslant M}\sup|x^l D^\alpha\varphi|\end{aligned}$$

où M est un entier positif tel que $k + \beta + n - M \leqslant -1$. Donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

(2) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi(\lambda^{-1}\cdot))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x}\varphi(\lambda^{-1}x)dx \\ &= \lambda^N\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot\lambda x}\varphi(x)dx \\ &= \lambda^N\mathcal{F}(\varphi)(\lambda\xi).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(T)\circ(\lambda\cdot \mathrm{id}),\varphi\rangle &= \lambda^{-N}\langle T,\mathcal{F}(\varphi(\lambda^{-1}\cdot))\rangle\\ &= \lambda^{-N}\langle T,\lambda^{N}\mathcal{F}(\varphi)(\lambda\cdot)\rangle\\ &= \lambda^{-N}\langle T\circ(\lambda^{-1}\cdot \mathrm{id}),\mathcal{F}(\varphi)\rangle\\ \text{(homogénéité)} &= \lambda^{-n-\beta}\langle T,\mathcal{F}(\varphi)\rangle = \lambda^{-n-\beta}\langle \mathcal{F}(T),\varphi\rangle.\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\mathcal{F}(T)$ est homogène de degré $-N-\beta$.

Exercice 5. En appliquant la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{isx}\cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)(\xi) &= \left(\mathcal{F}\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\circ\tau_{-s}\right)(\xi)\\ &= i\pi(1-2H(\xi-s)).\end{aligned}$$

Donc pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty}\langle \mathcal{F}\left(e^{isx}\cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right),\varphi\rangle &= \lim_{s\to+\infty} i\pi\left(\int_{\mathbb{R}}\varphi d\lambda - 2\int_s^{+\infty}\varphi d\lambda\right)\\ &= \langle i\pi,\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}(i\pi\delta_0),\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\lim\limits_{s\to+\infty} e^{isx}\cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = i\pi\delta_0$.

Exercice 6.

(1) $\frac{1}{z}$ a un seul pôle en 0. En utilisant les coordonnées polaires, on a

$$\int_{B(0,1)}\frac{1}{|z|}dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}rdrd\theta = 2\pi$$

Donc $\frac{1}{z}\in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}\langle\frac{1}{z}\circ(\lambda\cdot \mathrm{id}),\varphi\rangle &= \lambda^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y)}{x+iy}dxdy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varphi(x,y)}{\lambda x+i\lambda y}dxdy\\ &= \lambda^{-1}\langle\frac{1}{z},\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{z}$ est homogène de degré -1.

(2) Sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$,

$$\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x+iy)^2} + i\frac{-i}{(x+iy^2)}\right) = 0$$

au sens traditionnel. Donc $\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}|_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}}\right) = 0$ au sens de distribution.

(3) Par (2), $\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right)$ est à support dans 0, donc elle est une combinaison linéaire des dérivées de δ_0. Par (1), $\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right)|_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}}$ est une distribution homogène de degré -2. Donc $\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = c_0\delta_0$, $c_0 \in \mathbb{C}$. On pose

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}}$$

la Gaussienne standard. Alors

$$\begin{aligned}\frac{c}{2\pi} &= \langle c\delta_0, G\rangle = \langle\bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right), G\rangle = -\langle\frac{1}{z}, \bar{\partial}G\rangle \\ &= -\langle\frac{1}{z}, -\frac{z}{2}G\rangle = \langle 1, \frac{1}{2}G\rangle = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Donc $c = \pi$. C'est-à-dire $\frac{1}{\pi z}$ est une solution élémentaire.

Exercice 7.
Unicité : Considérons l'équation

$$\begin{cases} PE &= 0, \\ \mathrm{supp}(E) &\subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$0 = \mathcal{F}(PE) = (i\tau + \frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle)\mathcal{F}(E).$$

Multiplier $-i\tau + \frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle$, on a $(\tau^2 + \frac{1}{4}\langle A\xi, \xi\rangle^2)\mathcal{F}(E) = 0$. Comme A est symétrique définie positive, $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(E)) \subseteq \{0\}$. Donc $\mathcal{F}(E)$ est une combinaison linéaire des dérivées de δ_0, c'est-à-dire E est un polynôme. Mais $\mathrm{supp}(E) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, donc E est nulle.
Existence : En appliquant la transformée de Fourier partielle, on obtient

$$\begin{cases} (\partial_t + \frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle)\mathcal{F}_x(E) &= \delta_{t=0} \otimes 1, \\ \mathrm{supp}(\mathcal{F}_x(E)) &\subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Pour E donnée, on a $\mathcal{F}_x(E)(t,\xi) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{t}{2}\langle A\xi,\xi\rangle}$.
On obtient le résultat par un calcul simple et l'inversion de Fourier partielle.

5.2 Examen 2023

Exercice 1. Trouver toutes les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $2xT' - T = \delta_0$.
Exercice 2. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels et $S, T \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ les formes linéaires :

$$T := \varphi \mapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad S := \varphi \mapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n \varphi^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(1) Montrer que S et T sont des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Montrer l'équivalence :

$$\exists u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ tel que } T = u|_{\mathbb{R}_+^*} \Leftrightarrow \exists l \geqslant 0 \text{ tel que } a_n = O(n^l).$$

(3) Montrer l'équivalence :

$$\exists v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ tel que } S = v|_{\mathbb{R}_+^*} \Leftrightarrow \exists N \geqslant 1 \text{ tel que } a_n = 0 \text{ pour } n \geqslant N.$$

Exercice 3. Pour $\varepsilon > 0$ on pose :

$$f_\varepsilon^+(x) := \frac{1}{x + i\varepsilon}, \quad f_\varepsilon^-(x) := \frac{1}{x - i\varepsilon}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que f_ε^+ (respectivement f_ε^-) converges dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$.
Dans la suite on notera $\frac{1}{x+i0} := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon^+$ et $\frac{1}{x-i0} := \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon^-$.

(2) Calculer l'ordre de $\frac{1}{x+i0}$ et $\frac{1}{x-i0}$.

(3) Montrer que les distributions $\frac{1}{x+i0}$ et $\frac{1}{x-i0}$ sont tempérées et calculer leurs transformées de Fourier.

Exercice 4. Existe-t-il une solution élémentaire tempérée dans le passé de l'opérateur de la chaleur $\delta_t - \frac{1}{2}\Delta_x$? C'est-à-dire existe-t-il $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$ telle que :

$$\begin{cases} (\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)E &= \delta_{(t,x)=(0,0)}, \\ \operatorname{supp}(E) &\subseteq \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Exercice 5. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite *positive* si $\langle T, \varphi\rangle \geqslant 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à valeurs réelles positives. Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Nous noterons $T \leqslant S$ lorsque $S - T$ est une distribution positive.

Fixons $f^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et considérons l'unique solution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ au problème :

$$\begin{cases} \partial_t f - \frac{1}{2}\Delta_x f &= \delta_{t=0} \otimes f^{\text{in}}, \\ \operatorname{supp}(f) &\subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Rappelons que f satisfait $f|_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N)$. Montrer que s'il existe $M > 0$ tel que $f^{in} \leqslant M$ alors $f(t,x) \leqslant M$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Exercice 6. Considérons l'opérateur de Schrödinger $i\delta_t + \frac{1}{2}\Delta_x$ et notons E_N son unique solution élémentaire tempérée à support dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$. Rappelons que

$$E_N = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi(\varepsilon + i)t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2(\varepsilon+i)t}}.$$

(1) Montrer que peut tout $\psi^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique distribution tempérée $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\Psi & = & \delta_{t=0} \otimes \psi^{\text{in}}, \\ \text{supp}(\Psi) & \subseteq & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

et que cette distribution est donnée par la formule $\Psi = E_N * (\delta_0 \otimes \psi^{in})$.

(2) Montrer que si on suppose de plus $\psi^{in} \in H^s(\mathbb{R}^N)(s \in \mathbb{R})$ alors la restriction de la solution Ψ à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N$ se prolonge en $t = 0$ en une fonction $\Psi \in C^(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}^N))$ telle que

$$\|\Psi(t,\cdot)\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|\psi^{in}\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

5.2.1 Solutions

Exercice 1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a

$$0 = \langle 2xT' - T, \varphi\rangle = -\langle T, 3\varphi + 2x\varphi'\rangle.$$

Donc on trouve que $T = -\frac{1}{3}\delta_0$ est une solution. Maintenant considérons l'équation $2xT' - T = 0$. On résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$:

$$0 = (2xT' - T)|_{\mathbb{R}^*} = 2|x|^{3/2}.(|x|^{-1/2}.T|_{\mathbb{R}^*})'$$

Donc $T|_{\mathbb{R}^*} = c_1 H\sqrt{|x|} + c_2(1-H)\sqrt{|x|}$, où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, H est la fonction de Heaviside.

Soit T_1, T_2 deux solutions de $2xT' - T = 0$, alors on a $(T_1 - T_2)|_{\mathbb{R}^*} = 0$. C'est-à-dire $\operatorname{supp}(T_1 - T_2) \subseteq \{0\}$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ et $N+1$ complexes $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ tels que $T_1 - T_2 = \sum_{k=0}^N a_k\delta_0^{(k)}$. En appliquant la transformée de Fourier, comme $2x(T_1 - T_2)' - (T_1 - T_2) = 0$, on obtient $-2x\mathcal{F}(T_1 - T_2)' - 3\mathcal{F}(T_1 - T_2) = 0$. Mais $\mathcal{F}(T_1 - T_2)$ est un polynôme, par une comparaison des coefficients on déduit que $\mathcal{F}(T_1 - T_2) = 0$, c'est-à-dire $T_1 = T_2$. Donc $T = -\frac{1}{3}\delta_0 + c_1 H\sqrt{|x|} + c_2(1-H)\sqrt{|x|}$ sont toutes les solutions au sens de distribution.

Exercice 2.

(1) Pour tout $K \subseteq \mathbb{R}_+^*$ compact, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $\frac{1}{n} \notin K$. Donc pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^N |a_j| \cdot \sup_{x\in K} |\varphi(x)|,$$
$$|\langle S, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^N |a_j| \cdot \sup_{x\in K, \alpha\leqslant N} |\varphi^{(\alpha)}(x)|.$$

Donc S et T sont des distributions sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) S'il existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $T = u|_{\mathbb{R}_+^*}$, alors on pose $[-1,1] \prec \psi \prec]-2,2[$ et $\psi_n(x) = \psi(2n(n+1)(x - \frac{1}{n}))$. Comme ψ_n est à support dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\langle u, \psi_n\rangle = \langle T, \psi_n\rangle = a_n\psi(0) = a_n.$$

Par la continuité de u, il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a_n| = |\langle u, \varphi_n\rangle| \leqslant C \sup_{x\in[-2,3], \alpha\leqslant M} |\psi_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant C(2n(n+1))^M \sup_{\alpha\leqslant M} |\psi^{(\alpha)}|.$$

C'est-à-dire il existe $l \geqslant 0$ tel que $a_n = O(n^l)$.
S'il existe $l \geqslant 0$ tel que $a_n = O(n^l)$, alors on pose

$$u \colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C},\ \langle u, \varphi \rangle = \sum_{n \geqslant 1} a_n \left(\varphi(\frac{1}{n}) - \sum_{k=0}^{M} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{n^k k!} \right)$$

où M est un entier tel que $M \geqslant l + 1$. Par la formule de Taylor-Lagrange, on obtient pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} |a_n| \frac{\sup |\varphi^{(M+1)}|}{n^{M+1}(M+1)!} \leqslant C \sup_{\alpha \leqslant M+1} |\varphi^{(\alpha)}|$$

comme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|a_n|}{n^{M+1}} < +\infty$. Donc u est une distribution sur $\mathbb{R}$. C'est claire que $u|_{\mathbb{R}_+^*} = T$.

(3) S'il existe $N \geqslant 1$ tel que $a_n = 0$ pour $n \geqslant N$, on pose $v = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \delta_{1/n}^{(n)}$.
S'il existe $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tel que $S = v|_{\mathbb{R}_+^*}$, alors il existe $C > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$, on a $|\langle v, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{x \in [-2,3], \alpha \leqslant M} |\varphi^{(\alpha)}(x)|$.
On pose $[-1,1] \prec \chi \prec]-2,2[$, $\psi_n(x) = \frac{x^n}{n!}\chi(x)$ et $\Psi_n(x) = \psi_n(2\lambda n(n+1)(x - \frac{1}{n}))$ pour $n \geqslant M+1$ et $\lambda \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned} |a_n|(2\lambda n(n+1))^n &= |\langle S, \Psi_n \rangle| = |\langle v, \Psi_n \rangle| \\ &\leqslant C \sup_{x \in [-2,3], \alpha \leqslant M} |\Psi_n^{(\alpha)}(x)| \\ &\leqslant C \sup_{\alpha \leqslant M} |\psi_n^{(\alpha)}|(2\lambda n(n+1))^M. \end{aligned}$$

Si a_n n'est pas nul, on prend λ tend vers l'infini et obtient une contradiction. Donc $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant M+1$.

Exercice 3.

(1) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle f_\varepsilon^+, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx - i \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(- \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2) \varphi'(x) dx + i \int_{\mathbb{R}} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \varphi'(x) dx \right) \end{aligned}$$

Comme $\ln(x^2 + \varepsilon^2) \leqslant (\ln(x^2) + \ln(x^2 + 1)) \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\arctan(x/\varepsilon)$ est bornée, φ'

est à support compact, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\langle f_\varepsilon^+,\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\ln(x^2)\varphi'(x)dx - \frac{i\pi}{2}\int_{-\infty}^{0}\varphi'(x)dx + \frac{i\pi}{2}\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)dx$$
$$= \langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\rangle - i\pi\varphi(0).$$

Donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon^+ = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0$. Par le même argument, on obtient $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon^- = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0$.

(2) C'est claire que $\frac{1}{x+i0}$ et $\frac{1}{x-i0}$ sont d'ordre 1.

(3)

$$\mathcal{F}(\frac{1}{x+i0}) = -2i\pi H,\ \mathcal{F}(\frac{1}{x-i0}) = 2i\pi(1-H)$$

où H est la fonction de Heaviside.

Exercice 4. On pose une solution élémentaire tempérée de l'opérateur de la chaleur

$$E_N(t,x) = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}.$$

Soit T une autre solution élémentaire tempérée de l'opérateur de la chaleur, alors on a

$$(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta_x)(T-E_N) = 0.$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$(i\tau + \frac{1}{2}|\xi|^2)\mathcal{F}(T-E_N) = 0.$$

On multiplie $-i\tau+\frac{1}{2}|\xi|^2$ et on a $(\tau^2+\frac{1}{4}|\xi|^4)\mathcal{F}(T-E_N) = 0$. Donc $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(T-E_N)) \subseteq \{0\}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}(T-E_N)$ est une combinaison linéaire de dérivées de δ_0. Alors $T-E_N$ est un polynôme, donc $T|_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N}$ n'est pas nulle. Donc il n'existe pas une solution élémentaire tempérée dans le passé de l'opérateur de la chaleur.

Exercice 5. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ positive, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t,\cdot)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est positive. Donc $\langle M - f^{in},\varphi(t,\cdot)\rangle \geqslant 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Alors $\langle \delta_{t=0}\otimes(M-f^{in}),\varphi\rangle \geqslant 0$. On sait que $f = E_N * (\delta_{t=0}\otimes f^{in})$, où $E_N = \frac{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{N/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ est une solution élémentaire tempérée de l'opérateur de la chaleur. Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)$ positive on a

$$\begin{aligned}
\langle f,\varphi\rangle &= \langle E_N * (\delta_{t=0}\otimes f^{in}),\varphi\rangle \\
&= \langle E_N, \langle \delta_0\otimes f^{in}, \varphi(t+\cdot, x+\cdot)\rangle\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \langle \delta_0\otimes f^{in}, \varphi(t+\cdot, x+\cdot)\rangle dtdx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \langle \delta_0\otimes M, \varphi(t+\cdot, x+\cdot)\rangle dtdx \\
&= M\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(t,x+y)dy\right) dtdx \\
\text{(Fubini-Tonnelli)} &= M\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(t,y)dy}{(2\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx\right) dt \\
&= M\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N} \varphi(t,y)dydt = \langle M\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t),\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $f \leqslant M\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$, donc $f|_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^N} \leqslant M$.

Exercice 6.

(1) Comme $\delta_0\otimes\psi^{in} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, E_N et $\delta_{t=0}\otimes\psi^{in}$ sont convolables. Comme E_N est une solution élémentaire de l'opérateur de Schrödinger, on a

$$\begin{aligned}
(i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)(E_N * (\delta_{t=0}\otimes\psi^{in})) &= ((i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)E_N) * (\delta_{t=0}\otimes\psi^{in}) \\
&= \delta_{(t,x)=(0,0)} * (\delta_{t=0}\otimes\psi^{in}) = \delta_{t=0}\otimes\psi^{in}.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(E_N * (\delta_0\otimes\psi^{in})) &\subseteq \operatorname{supp}(E_N) + \operatorname{supp}(\delta_0\otimes\psi^{in}) \\
&\subseteq (\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N) + (\{0\}\times\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Pour l'unicité, on considère l'équation

$$\begin{cases} (i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta_x)\Psi &= 0, \\ \operatorname{supp}(\Psi) &\subseteq \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N. \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Fourier partielle, on obtient

$$\begin{cases} (\partial_t + \frac{1}{2}i|\xi|^2)\mathcal{F}_x(\Psi) &= 0, \\ \operatorname{supp}(\mathcal{F}_x(\Psi)) &\subseteq \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On en déduit que $\partial_t(e^{\frac{it|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}_x(\Psi)) = 0$. Donc il existe $\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ telle que $e^{\frac{it|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}_x(\Psi) = 1 \otimes \Phi$. Mais $\mathrm{supp}(e^{\frac{it|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}_x(\Psi)) \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$, donc Φ est nulle. $e^{\frac{it|\xi|^2}{2}}$ n'a pas de zéro, donc $\mathcal{F}_x(\Psi) = 0$. Par l'inversion de Fourier partielle, $\Psi = 0$.

(2) La solution est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
&\Psi(t,\cdot) = E_N(t,\cdot) * \psi^{in},\ \forall t > 0,\ \text{pp en } x \in \mathbb{R}^N,\\
&\Psi(0,\cdot) = \psi^{\mathrm{in}}.
\end{aligned}$$

Donc on a pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_x(E_N(t,\cdot)) * \psi^{in})\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_x(E_N(t,\cdot))\mathcal{F}_x(\psi^{in}))\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}}\mathcal{F}_x(\psi^{in}))\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_x(\psi^{in}))\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)}\\
&= \|\psi^{in}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Vérifions la continuité en t : soit $t_n \to t$, $t_n, t \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}
\|\Psi(t_n,\cdot) - \Psi(t,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}_x(\Psi(t_n,\cdot) - \Psi(t,\cdot))\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^N)}\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^s \cdot \left|e^{-\frac{it_n|\xi|^2}{2}} - e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}}\right|^2 \cdot |\mathcal{F}_x(\psi^{in})(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

car $\left|e^{-\frac{it_n|\xi|^2}{2}} - e^{-\frac{it|\xi|^2}{2}}\right| \leqslant 2$, $\psi^{in} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et par le théorème de convergence dominée.