Cours sino-français Hefei, automne 2023
Topologie algébrique - Examen du 20 novembre (durée 3 heures)

L'évaluation prend en compte la rédaction: on demande des solutions argumentées. Néanmoins, certaines questions peuvent avoir des réponses très courtes. Barême indicatif: 6+6+8.

I

Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ réunion de la sphère unité S^2 et du disque unité du premier plan de coordonnées: $D^2 \times \{0\}$.

1. Pour $N = (0, 0, 1)$.
   (a) Calculer l'homologie $H_*(X - \{N\})$.
   (b) Calculer l'homologie relative $H_*(X, X - \{N\})$.
2. Calculer l'homologie de X.
3. Pour $A = (1, 0, 0)$, calculer l'homologie $H_*(X, X - \{A\})$.
4. Est-ce que X est une variété topologique ?
5. Quel sont les points de X qui ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$?

II

On note X_1 et X_2 les surfaces obtenues comme quotient du disque avec les identifications associées aux mots $m_1 = a\,b\,c\,d\,\overline{a}\,\overline{b}\,d\,\overline{c}$ et $m_2 = a\,b\,c\,d\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,d$.

1. Démontrer que X_1 et X_2 ne sont pas homéomorphes.
2. (a) Décrire les groupes d'homologie $H_*(X_1)$.
   (b) Calculer les groupes de cohomologie $H^*(X_1, \mathbb{Z})$, $H^*(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
3. (a) Identifier le revêtement d'orientation de X_1.
   (b) Soit $p : X \to X_1$ un revêtement connexe à deux feuilles. Démontrer que si p n'est pas le revêtement d'orientation, alors X est homéomorphe à X_2.

III

On appelle involution libre sur un espace topologique séparé X, tout homéomorphisme $\tau : X \to X$, tel que $\tau \circ \tau$ est l'identité de X et $\tau(x) \neq x$ pour tout x.

1. Soit $\tau : X \to X$ une involution libre avec quotient associé $p : X \to B = X/\tau$.

   (a) Démontrer qu'un simplexe singulier $\sigma : \Delta_n \to B$ a exactement 2 relevés, $\tilde{\sigma}$ et $\tau \circ \tilde{\sigma}$,
   $$\tilde{\sigma} : \Delta_n \to X \ , \ p \circ \tilde{\sigma} = \sigma \ .$$
   On définit le transfert sur les cochaînes, $T^n : C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ par
   $$\langle T^n(f), \sigma \rangle = \langle f, \tilde{\sigma} + \tau \circ \tilde{\sigma} \rangle \ ,$$
   où $\tilde{\sigma}$ et $\tau \circ \tilde{\sigma}$ sont les deux relevés du simplexe singulier σ.

   (b) Montrer que T commute avec le cobord (est un morphisme de complexes de cochaînes).

   (c) Montrer qu'avec la projection et le transfert on obtient une suite exacte courte de complexes de cochaînes: pour chaque n on a une suite exacte
   $$0 \longrightarrow C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{C^n(p)} C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^n} C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

   (d) Déduire une suite exacte longue en cohomologie à coefficients modulo 2. On précisera les homomorphismes qui apparaissent dans cette suite, en particulier le connectant noté β.

2. (a) Décrire la suite exacte longue de transfert de la question précédente dans le cas de l'involution $-\mathrm{Id}$ sur la sphère S^m, $m \geq 1$. On pourra d'abord expliciter les petites valeurs de m.

   (b) Démontrer que, pour $m \geq 1$, il n'existe pas d'application continue impaire
   $$f : S^m \to S^{m-1} \ , \ \forall x \ f(-x) = -f(x) \ .$$
   On pourra étudier l'action de l'application induite
   $$\overline{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^{m-1}$$
   sur la cohomologie modulo 2.

3. Démontrer que pour toute application continue $g : S^m \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, il existe $x \in S^m$ tel que $g(x) = g(-x)$ (théorème de Borsuk-Ulam) .

I

1\. a) $X-\{N\}$ se rétracte par déformation sur $X_- = X \cap (\mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0])$.

Soit :

$$h : [0,1] \times X-\{N\} \longrightarrow X-\{N\}$$

$$(t, (x,y,z)) \longmapsto (x,y,z) \text{ si } z \leq 0$$

$$(t, (x,y,z)) \longmapsto (x_t, y_t, z_t) \text{ si } z > 0,$$

avec pour $\begin{cases} x = \cos\varphi \sin\theta \\ y = \sin\varphi \sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\begin{cases} x_t = \cos\varphi \sin\theta_t \\ y_t = \sin\varphi \sin\theta_t \\ z_t = \cos\theta_t \\ \theta_t = (1-t)\theta + t\frac{\pi}{2} \end{cases}$

h est continue ; pour tout $t \in [0,1]$ $h_t = h(t, \cdot)$ est l'identité sur X_- et $h_1(X) = X_-$.

Le sous-espace X_-, réunion de deux disques sur leur bord est homéomorphe à la sphère S^2.

Conclusion : $H_*(X-\{N\}) \simeq H_*(X_-) \simeq H_*(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) Par excision, $H_*(X, X-N)$ est isomorphe à

$$H_*(S^2_{>0}, S^2_{>0}-\{N\}) \simeq H_*(\mathring{D}^2, \mathring{D}^2-\{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2\. On utilise la suite exacte longue de la paire $(X, X-N)$:

$$\rightarrow H_*(X-\{N\}) \longrightarrow H_*(X) \longrightarrow H_*(X, X-\{N\}) \rightarrow$$

	$H_*(X-\{N\})$	$H_*(X)$	$H_*(X, X-\{N\})$
$* \geq 3$	0	0	0
$* = 2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$
$* = 1$	0	0	0
$* = 0$	$\mathbb{Z}$ $\xrightarrow{\sim}$	$\mathbb{Z}$	0

On déduit les groupes $H_*(X)$:

$H_2(X) = \mathbb{Z}^2$,

$H_*(X) = 0$, $* = 1$ ou $* > 2$,

$H_0(X) = \mathbb{Z}$ (X est connexe par arc).

3. $X - \{A\}$ se rétracte par déformation sur $B = \{(-1,0,0)\}$.
On va appliquer la suite exacte longue de la paire :

$$\to H_*(X-A) \longrightarrow H_*(X) \longrightarrow H_*(X, X-A) \to$$

	$H_*(X-A)$		$H_*(X)$	$H_*(X,X-A)$
$*\geq 3$	0		0	0
$*=2$	0		$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$
$*=1$	0		0	0
$*=0$	$\mathbb{Z}$	$\xrightarrow{\sim}$	$\mathbb{Z}$	0

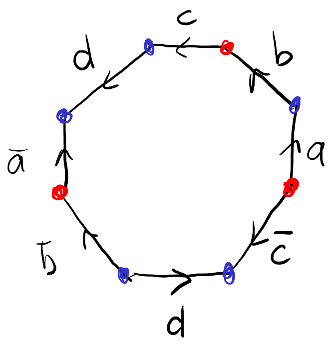
On conclut que $H_*(X, X-A)$ est concentré en degré 2 :

$$\boxed{H_*(X, X-A) = H_2(X, X-A) \simeq \mathbb{Z}^2.}$$

4. Dans la question 3, on a calculé l'homologie locale en A, qui est $\mathbb{Z}^2$ en degré 2. Pour une variété de dimension n, on doit avoir $\mathbb{Z}$ en degré n (ou 0 sur le bord). Donc X n'est pas une variété.

5. Par symétrie, les points du cercle S^1, intersection de la sphère avec le disque, ont même homologie locale que A, et donc n'ont pas de voisinage euclidien. Tous les autres points sont intérieurs à un disque ouvert : ils ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$.

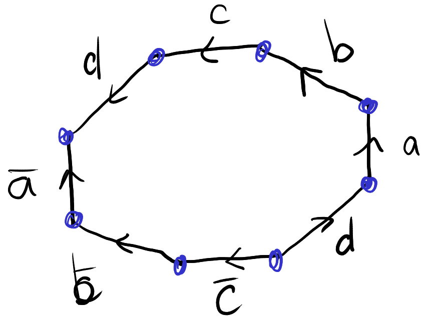
II 1.



Pour X_1, l'identification donne 2 sommets dans le quotient :

$$\chi(X_1) = 2 - 4 + 1 = -1$$

Pour X_2 :



$$\chi(X_2) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Les caractéristiques d'Euler étant distinctes, les surfaces ne sont pas homéomorphes.

Ces deux surfaces sont non-orientables (no) et respectivement homéomorphes aux modèles P_3 et P_4.

2. a) $$H_*(X_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \geq 2. \end{cases}$$

b) $H^*(X_1, \mathbb{Z})$ est obtenu avec les coefficients universels.

$$H^0(X_1, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_0(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$
$$H^1(X_1, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(H_1(X_1), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_0(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$$
$$H^2(X_2, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(H_1(X_1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Idem pour $H^*(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$H^0(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$H^1(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(H_0(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$$
$$H^2(X_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}(H_1(X_1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On a utilisé : $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$ et $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. a) La surface X_1 étant non orientable, son revêtement d'orientation est une surface orientable connexe $\tilde{X}_1$. En utilisant le modèle associé à m_1, on obtient un modèle dédoublé avec 4 sommets, 8 arêtes et 2 disques : $\chi(\tilde{X}_1) = -2 = 2 - 2g$

$\boxed{\text{Donc } \tilde{X}_1 \simeq \Sigma_2}$

b) Soit $p : X \longrightarrow X_1$ un revêtement connexe à deux feuilles.

Comme précédemment $\chi(X) = -2$.

Si X est orientable, alors le revêtement p est équivalent au revêtement d'orientation (devoir 5, II 1.c)).

Si p n'est pas le revêtement d'orientation, alors X est non orientable. Avec $\chi(X) = -2$ on déduit $X \simeq P_4 \simeq X_2$.

III On suppose X séparé.

1a) L'application $p : X \longrightarrow B$ est un revêtement double : chaque $b \in B$ a deux préimages $\tilde{b}$ et $\tau \tilde{b}$ qui appartiennent à des ouverts homéomorphes disjoints.

Étant donné un simplexe singulier $\sigma : \Delta_n \to B$, le point $b_0 = \sigma(e_0)$, $e_0 = (1, 0 \ldots, 0) \in \Delta_n$ a 2 préimages par p : $\tilde{b}_0$ et $\tau(\tilde{b}_0)$. Comme $\pi_1(\Delta_n, e_0)$ est trivial, il existe un relèvement $\tilde{\sigma}$ tel que : $\tilde{\sigma}(e_0) = \tilde{b}_0$. Par unicité des relèvements, celui-ci est unique. De même $\tau \circ \tilde{\sigma}$ est l'unique relèvement pour lequel $e_0 \longmapsto \tau(\tilde{b}_0)$.

En conclusion on obtient exactement 2 relevés

b) L'homéomorphisme τ induit une action $C_*(\tau)$ sur les chaînes qui commute avec le bord : un morphisme de complexe de chaîne.

Pour un simplexe σ $\Delta_n \longrightarrow B$, un relevé $\tilde{\sigma}$ $\Delta_n \longrightarrow B$ a des faces $\tilde{\sigma} \circ F_i$ qui relèvent les faces de σ. On peut alors écrire pour

$$
\begin{aligned}
\langle \delta T^{n-1}(f), \sigma \rangle &= \langle T^{n-1}(f), \partial \sigma \rangle \\
&= \langle f, \partial \tilde{\sigma} + C_{n-1}(\tau)(\partial \tilde{\sigma}) \rangle \\
&= \langle f, \partial (\tilde{\sigma} + C_n(\tau)(\tilde{\sigma})) \rangle \\
&= \langle \delta f, \tilde{\sigma} + C_n(\tau)(\tilde{\sigma}) \rangle \\
&= \langle T^n(\delta f), \sigma \rangle
\end{aligned}
$$

Conclusion : T est un morphisme de complexe de cochaîne.

c) Le noyau de T^n est formé des n-cochaînes f telles que $\langle f, \tilde{\sigma} + \tau\circ\tilde{\sigma}\rangle = 0 \mod 2$ pour tout n-simplexe $\sigma : \Delta_n \to B$.

Ce sont les n-cochaînes qui factorisent par $C_n(B)$:

$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "C_n(p)"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ C_n(B) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

On a identifié le noyau de T^n avec $C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Il reste à voir la surjectivité de T^n.

Comme $C_n(B)$ est un module libre, il existe une section de $C_n(p)$: $S_n \quad C_n(B) \longrightarrow C_n(X)$, $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$.

On a alors une base de $C_n(X)$ avec les $\tilde{\sigma}$ et $\tau\tilde{\sigma}$.

Étant donné une cochaîne $g : C_n(B) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on définit $\tilde{g}$ par
$$\tilde{\sigma} \longmapsto \langle g, \sigma\rangle \qquad \tau\tilde{\sigma} \longmapsto 0 .$$

Alors $T^n \tilde{g} = g$.

d) La suite exacte courte précédente est une suite exacte de complexes de cochaînes. Par la méthode standard, on déduit une suite exacte longue en cohomologie :

$$\to H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{T^*} H^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} H^{n+1}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to$$

Les deux premiers morphismes sont naturellement associés à la projection p et au transfert T. Le connectant β est un cobord obtenu en "chassant dans le diagramme".

Pour $g \in Z^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\tilde{g} \in C^n(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ un relèvement

$\beta[g]$ est représentée par $\delta\tilde{g} \in C^n(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \ker(T^n)$

---

2 (a) Pour S^m avec $-Id$, $S^m/_{-Id} = \mathbb{R}P^m$

Suite exacte :

$$H^n(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^n(S^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^n(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \cdots$$

$$\begin{array}{llllllll}
n=0 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} \\
n=1 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} \\
\vdots & & & & & & \\
n=m-2 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} \\
n=m & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &
\end{array}$$

Notons que cela calcule $H^*(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

b) Supposons que $f : S^m \to S^{m-1}$ est impaire,

alors elle induit $\bar{f} : \mathbb{R}P^m \to \mathbb{R}P^{m-1}$

On utilise la fonctorialité de la suite exacte précédente. En degré 0 on a un isomorphisme

$$\bar{f}^* \; H^0(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

On utilisant le connectant, on déduit des isomorphismes

$$\bar{f}^* \; H^k(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^k(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad 0 \leq k \leq m-1$$

Pour les lignes de degré $m-1$:

$$\begin{tikzcd}
H^{m-1}(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\wr"] & H^{m-1}(S^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^{m-2}(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & {} \\
H^{m-1}(\mathbb{R}P^{m}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r] & H^{m-1}(\mathbb{R}P^{m-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Le carré de droite donne une <u>contradiction</u>.

Conclusion : Il n'existe pas d'application continue impaire $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$.

3. Supposons que $g \quad S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que $\forall x \quad g(x) \neq g(-x)$, alors

$$f(x) = \frac{g(x) - g(-x).}{\| g(x) - g(-x) \|}$$ définit

une application continue impaire $S^n \longrightarrow S^{n-1}$, ce qui est exclu. !