2023 Differential Geometry- TD 7

Exercice 1 (Hélicoïde) — On considère l'hélicoïde

$$\gamma : t \mapsto (a \cos \frac{t}{c}, a \sin \frac{t}{c}, b\frac{t}{c})$$

où $a, b, c > 0$.

1. Montrer que γ est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc. On suppose dans la suite c fixé à la valeur pour laquelle γ est paramétrée par la longueur d'arc.
2. Donner le repère de Frénet, la courbure, la torsion et le plan osculateur de γ.

Exercice 2 (Expressions de la courbure et de la torsion) — Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe lisse et régulière.

1. Montrer que sa courbure vérifie $\kappa = \dfrac{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}$;
2. montrer que sa torsion vérifie $\tau = -\dfrac{(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|^2}$.

Exercice 3 (Courbure d'une courbe fermée) — Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, périodique de période T.

Montrer qu'il existe un temps t_0 où $d(O, \gamma(t))$ est maximal. Montrer que $\kappa(t_0) \geqslant d(O, \gamma(t_0))^{-1}$. En déduire que si γ est contenue dans un disque de rayon R, il existe un point où la valeur absolue de sa courbure est supérieure ou égale à $1/R$.

Exercice 4 (Courbes sphériques) — Soit γ une courbe régulière tracée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'en tout point, sa courbure est supérieure ou égale à 1.

5 Assume that all normals of a parametrized curve pass through a fixed point. Prove that the trace of the curve is contained in a circle.

Exercice 7 (Hélicoïde) — On considère l'hélicoïde

$$\gamma : t \mapsto (a\cos\frac{t}{c}, a\sin\frac{t}{c}, b\frac{t}{c})$$

où $a, b, c > 0$.

1. Montrer que γ est paramétrée proportionnellement à la longueur d'arc. On suppose dans la suite c fixé à la valeur pour laquelle γ est paramétrée par la longueur d'arc.
2. Donner le repère de Frénet, la courbure, la torsion et le plan osculateur de γ.

1. $\dot{r}(t) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{t}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{t}{c}, \frac{b}{c}\right)$

$|\dot{r}|^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$. $|\dot{r}|=1 \iff c^2 = a^2+b^2$

2.

我们亦可从以下简单的例子中看出挠率 τ 的意义.

例 3.2 求圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)(a > 0)$ 的曲率和挠率.

曲线的速度 $|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$，因此

$$s = \int_0^t |\boldsymbol{r}'(u)|du = \sqrt{a^2+b^2}t.$$

记 $c = \sqrt{a^2+b^2}$，曲线的弧长参数表示为

$$\boldsymbol{r}(s) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s).$$

直接计算，有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}(s) &= \Big(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\Big),\\
\dot{\boldsymbol{t}}(s) &= \Big(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big),\\
\kappa(s) &= |\dot{\boldsymbol{t}}(s)| = \frac{a}{c^2},\\
\boldsymbol{n}(s) &= \Big(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\Big),\\
\boldsymbol{b}(s) &= \boldsymbol{t}(s)\wedge\boldsymbol{n}(s) = \Big(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\Big),\\
\dot{\boldsymbol{b}}(s) &= \Big(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big) = -\frac{b}{c^2}\boldsymbol{n}(s).
\end{aligned}$$

所以

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

由此我们知道，圆柱螺旋线的曲率和挠率都是常数，它的形状见图 2.3.

Exercice 8 (Expressions de la courbure et de la torsion) — Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe lisse et régulière.

1. Montrer que sa courbure vérifie $\kappa = \dfrac{|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3}$;
2. montrer que sa torsion vérifie $\tau = -\dfrac{(\dot\gamma \wedge \ddot\gamma)\cdot \dddot\gamma}{|\dot\gamma \wedge \ddot\gamma|^2}$.

一般的正则曲线 $\gamma(t)$ in E^3

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

弧长 $s(t) = \int_0^t |\gamma'(u)|\,du$, $\dfrac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$

• 单位切向量 $\tau(s) = \dot\gamma(s) = \dfrac{d}{dt}\gamma(t)\cdot\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$

$$\Rightarrow \dot\tau(s) = \frac{d}{dt}\vec{t}(s)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\left(\frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|} - \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|^2}\frac{d}{dt}|\gamma'(t)|\right)$$

$\because$ $\dot\tau(s) = \kappa(s)\,\nu(s)$,

$$\kappa(s)\,\underbrace{\tau(s)\wedge\nu(s)}_{\beta(s)} = \tau(s)\wedge\dot\tau(s) = \frac{1}{|\gamma'(t)|^3}\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa(s) = \dfrac{|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \\[2ex] \beta(s) = \dfrac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|} \\[2ex] \nu(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}\dot\tau(s) = \dfrac{|\gamma'(t)|\;\gamma''(t)}{|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|} - \dfrac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)|}\cdot\dfrac{d}{dt}|\gamma'(t)| \end{cases}$$

$\because$ $\dot\beta(s) = -\chi(s)\,\nu(s)$

$$\dot\beta(s) = \frac{d}{dt}\beta(s)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\left(\frac{\gamma'(t)\wedge\gamma'''(t)}{|\gamma'\wedge\gamma''|} - \frac{\gamma'\wedge\gamma''}{|\gamma'\wedge\gamma''|^2}\frac{d}{dt}|\gamma'\wedge\gamma''|\right)$$

$$\Rightarrow \chi(s) = -\langle\dot\beta(s), \nu(s)\rangle$$

$$= -\frac{\langle\gamma'\wedge\gamma''', \gamma''\rangle}{|\gamma'\wedge\gamma''|^2} = \frac{\langle\gamma'''\wedge\gamma', \gamma''\rangle}{|\gamma'\wedge\gamma''|^2} = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma'\wedge\gamma''|^2}$$

Exercice 11 (Courbure d'une courbe fermée) — Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, périodique de période T.

Montrer qu'il existe un temps t_0 où $d(O, \gamma(t))$ est maximal. Montrer que $\kappa(t_0) \geqslant d(O, \gamma(t_0))^{-1}$. En déduire que si γ est contenue dans un disque de rayon R, il existe un point où la valeur absolue de sa courbure est supérieure ou égale à $1/R$.

(a) 设 $t=s$ 为弧长参数. 定义 $f(s) = |\alpha(s)|^2$

s_0 为 f 的 max point

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{ds} f(s) \Big|_{s=s_0} = 2 \langle \alpha(s_0), \tau(s_0) \rangle$$

$$0 \geqslant \frac{d^2}{ds^2} f(s) \Big|_{s=s_0} = 2 \, |\tau(s_0)|^2 + 2 \langle \alpha(s_0), \alpha''(s_0) \rangle$$

$$= 2 \left(1 - k(s_0) \langle \alpha(s_0), \nu(s_0) \rangle \right)$$

$$\geqslant 2 (1 - |k(s_0)| \, |\alpha(s_0)|$$

$$\Rightarrow |k(s_0)| \geqslant \frac{1}{|\alpha(s_0)|}$$

(b) C is a closed plane curve $\subset D(0, r)$. $\Rightarrow \exists \, s_0$. s.t $d(s_0)$ 取极大. 由 (a) $\Rightarrow$ $|k(s_0)| \geqslant \frac{1}{|\alpha(s_0)|} \geqslant \frac{1}{r}$ $\square$

Exercice 12 (Courbes sphériques) — Soit γ une courbe régulière tracée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'en tout point, sa courbure est supérieure ou égale à 1.

$\gamma(s) \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ，设 s 为弧长参数

$\{\gamma(s); \tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ Frenet frame

$|\gamma(s)|^2 = 1 \Rightarrow \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \ddot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle + \underbrace{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle}_{=1} = 0$

$\ddot{\gamma}(s) = \dot{\tau}(s) = k(s)\nu(s)$

$\Rightarrow k(s)\langle \nu(s), \gamma(s) \rangle + 1 = 0$

由 $\langle \gamma(s), \tau(s) \rangle = 0 \Rightarrow \gamma(s) = a\,\nu(s) + b\,\beta(s)$, $a^2 + b^2 = 1$

$\Rightarrow k(s)\,a + 1 = 0$

if $a \neq 0 \Rightarrow k(s) = -\frac{1}{a} \geq 1$

if $a(s) = 0$ in some interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, i.e. $\gamma(s) = \beta(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(s) = \dot{\beta}(s) = -\chi(s)\nu(s) \\ \dot{\gamma}(s) = \tau(s) \end{cases}$$ ✗

so: the point s.t $a(s) = 0$ are isolated.

2. Assume that all normals of a parametrized curve pass through a fixed point. Prove that the trace of the curve is contained in a circle.

设该 fixed point $= p_0$，则 $\exists\ \lambda(s)$. s.t

$$\alpha(s) + \lambda(s)\, \nu(s) = p_0$$

求导. $\Rightarrow$ $\tau(s) + \dot{\lambda}(s)\, \nu(s) + \lambda(s)\,(-\kappa(s)\,\tau(s) + \chi(s)\,\beta(s)) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(1-\lambda(s)\,\kappa(s))\,\tau(s) + \dot{\lambda}(s)\,\nu(s) + \lambda(s)\,\chi(s)\,\beta(s) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \dot{\lambda}(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(s) \equiv \lambda_0 \\ \lambda(s)\,\chi(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi(s) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(s) \subset \text{平面上} \\ 1-\lambda(s)\,\kappa(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa(s) = \frac{1}{\lambda_0} \end{cases}$

从而 $\alpha(s)$ is a circle，半径为 λ_0.

注：设 $\alpha(s)$ 以 s 为弧长参数，即 $\left|\frac{d}{ds}\alpha(s)\right| = 1$

$\tau(s) = \dot{\alpha}(s)$，切向

$\dot{\tau}(s) = \kappa(s)\,\nu(s)$，$\nu(s)$ 为主法向，

$\beta(s) = \tau(s) \wedge \nu(s)$ 为副法向.

$\{\alpha(s);\ \tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ 为 Frenet 标架

满足

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \tau(s) \\ \nu(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \kappa(s), & 0 \\ -\kappa(s), & 0, & \chi(s) \\ 0, & -\chi(s), & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(s) \\ \nu(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}$$