中国科学技术大学数学科学学院
2019学年秋季学期期中考试试卷

■A 卷　　　□B 卷

课程名称　代数（I）　　课程编号　001661

姓名__________　　学号__________　　学院__________

题号	1	2	3	4	总分
得分					

习题之中如果某一步不会做（但若能猜到结果），之后的步骤可以直接利用该步结果做之后的步骤，之后步骤如果正确仍可以得分。法国式考试：满分20分，10分及格。按小问数目大概可以猜出基本是每问1分，偶尔有0.5分或2分的。

得分	

习题1.

令$(E,\leq)$为偏序集。

1. 把以下这句话用数理逻辑语言表述（即只允许出现“$\forall$、$\exists$、$\leq$、$=$、$\in$、且、或、非”，以及变量和必要的括号，不允许出现“$\Rightarrow$”）：

   - 如果E不存在极大元，那么E不存在最小元。

2. 令A为元素个数严格大于1的集合，$E=\mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset,A\}$带上“$\subseteq$”偏序，上述断言是真的吗？为什么？

装订线 答题时不要超过此线

得分	

习题2.

假设集合E上有等价关系$\sim$，元素x所在的等价类记为$\bar{x}$。定义幂集到自身的映射$s:\mathcal{P}(E)\to\mathcal{P}(E)$ 为$s(A)=\bigcup_{x\in A}\bar{x}$。

1. 比较A、$s(A)$与$s(s(A))$。并证明你的结论成立。
2. 求证对于任意$x\in E$有：$x\in s(A)\iff\bar{x}\cap A\neq\emptyset$
3. 求证$s(\bigcap_{i\in I}A_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}s(A_i)$。并在$E=\{1,2\}$ 上给出一个等价关系说明严格包含可以成立。

得分	

习题3.

本题中A为一个含有乘法中性元的交换环。

1. 已知$I \subset A$是一个理想，陈述“I是A的极大理想”的定义。
2. 若$a \in A$是一个可逆元，它生成的理想(a)是什么？是否存在一个A的极大理想包含a？证明你的这两个判断。
3. 陈述Zorn引理。
4. 若$a \in A$不是一个可逆元，用Zorn引理证明：存在A的一个极大理想包含a。
5. 总结上述结论，给出A中极大理想的并集的一个简单刻画。

得分	

习题4.

1. 令K是一个域，通过Gauss消去法讨论对于任何$(a,b,c)\in K^3$以下线性方程组均存在唯一解的一个关于系数$(\alpha,\beta,\gamma)\in K^3$的充分必要条件。

$$\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z &= a \\ x+\beta y+\beta^2 z &= b \\ x+\gamma y+\gamma^2 z &= c \end{cases}$$

2. 陈述一个猜想，推广第1问的结论到n个未知数n个方程的情形。（不要求证明）
3. 令$P\in\mathbb{C}[X]$为多项式，若$\alpha\in\mathbb{C}$是P的重根，求证$(X-\alpha)$整除P与P'的最大公因子。
4. 设P与Q是$\mathbb{Q}[X]$中的多项式，如果P与Q在$\mathbb{Q}[X]$中互素，求证P与Q在$\mathbb{C}[X]$中也互素。
5. 利用上述两个结论证明：多项式$P\in\mathbb{Q}[X]$如果在$\mathbb{Q}$上是不可约的，那么它在$\mathbb{C}$中没有重根。
6. 给定A与B为$\mathbb{Q}[X]$中不同的首一不可约非常值的多项式。用代数学的结构性语言重述以下结论：

   - 对于任何满足$\deg(U)<\deg(A)$以及$\deg(V)<\deg(B)$ 的多项式$U\in\mathbb{Q}[X]$与$V\in\mathbb{Q}[X]$，存在多项式$P\in\mathbb{Q}[X]$使得P除以A的欧氏除法余式为U且P除以B 的欧氏除法余式为V。更进一步的，P除以AB的欧氏除法的余式R由U与V唯一确定。

   这是关于整数环$\mathbb{Z}$的哪一个定理的类比？
7. 承认上述结论中的存在性，通过考察R的系数所满足的方程，利用上面几问中的结论和所提出的猜想来证明唯一性。（请勿模仿$\mathbb{Z}$中的证明，此题本意为给出另外一种思考方式。）