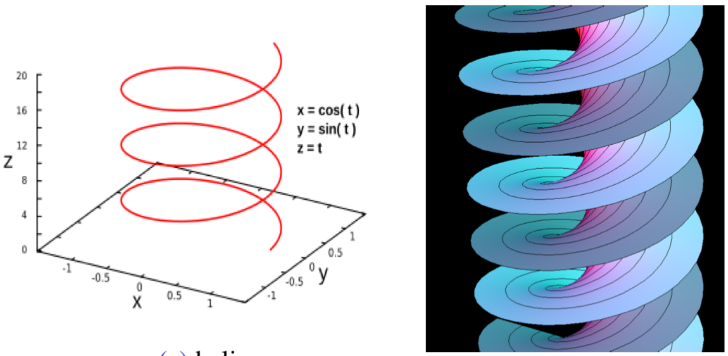
2023 Differential Geometry- TD4

1. On considère l'hélice circulaire, d'équation paramétrique

$$t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$$

dans un repère orthonormé. Montrer que la surface engendrée par l'ensemble des droites qui rencontrent l'hélice et rencontrent orthogonalement l'axe Oz (*hélicoïde droit*) est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

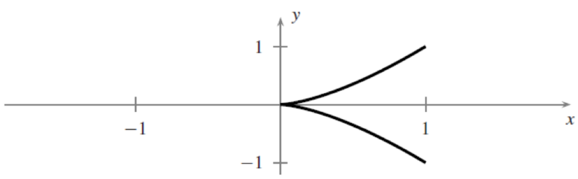


(a) helix

(b) Helicoid

2. Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que $M_1 \times M_2 = \{a = (a_1, a_2), a_1 \in \mathbb{R}^n, a_2 \in \mathbb{R}^m\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension

3. Montrer que l'image de la courbe $t \to (t^2, t^3)$ n'est pas une sous-variété.



4. Soit M sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leq n-2$. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus M$ est connexe.

5. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 4xy + 2xz + 4y - z = xy + 2x - z = 0\}$$

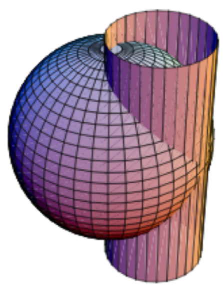
est un sous-variété de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera la dimension et l'espace tangent en $(0,0,0)$.

6 . Un angle n'est pas une sous-variété

1– Montrer que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geqslant 0, \text{ ou } x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété $\mathbb{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. On pourra raisonner par l'absurde, et obtenir une contradiction en utilisant le théorème des fonctions implicites.

2– Donner cependant un exemple d'application C^∞ injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image A.

7. L'intersection de la sphère unité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - x = 0$ est-elle une sous-variété ?



8 * ~~22~~. *Position d'une hypersurface par rapport à un plan tangent*
On désigne par $(x^0, \cdot, x^n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit S une sous-variété de codimension 1, contenant 0, et ayant l'hyperplan $x^0 = 0$ pour plan tangent à l'origine.

a) Montrer que S peut être définie au voisinage de 0 par le graphe d'une fonction $(x^1, \cdots, x^n) \mapsto f(x^1, \cdots, x^n)$ dont 0 est point critique.

b) On suppose que la forme quadratique Q définie par

$$(x^1, \cdots x^n) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \left(\partial^2_{ij} f(0)\right) x^i x^j$$

est non dégénérée. Montrer que si Q est définie positive (resp. définie négative) f admet un minimum (resp. maximum) local strict en 0.

c) On suppose maintenant que Q est de signature $p, n-p$, avec $0 < p < n$. Montrer, en utilisant l'exercice **11**, que tout voisinage de 0 contient à la fois des points de S situés au-dessus et des points situés au-dessous de $T_0 S$. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant 0 tel que $U \cap S \cap T_0 S \setminus \{0\}$ soit une sous-variété de dimension $n-1$ de $T_0 S$. Que se passe-t-il si on rajoute 0 ? (On pourra commencer par le cas $n = 2$.)

Morse Lemma in TD1