装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院
2021—2022 学年第一学期期末考试试卷

课程名称 分析（III） 班级 20 级中法班

考试时间 2022 年 1 月 10 日 考试形式 闭卷

姓名________ 学号________ 学院________

第一部分：概念题（40 分，每小题 8 分）

(1.1) 设 $C^\infty(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数全体。定义一个距离函数 d，使得 $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ 在距离意义下收敛，当且仅当，对于任何 $K > 0$，f_i 及其不超过 K 阶的导数在 $[-K, K]$ 上一致收敛。（不用证明。）

令 $|f|^{(k)} = |f| + \cdots + |f^{(k)}|$

$$d(f,g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \min\left\{2^{-n}, \sup_{[-n,n]} |f-g|^{(n)}\right\}$$

(1.2) 叙述覆叠映射 (covering map) 的定义，并证明它一定是开映射 (open map)。

$p: Y \to X$ 若 $\forall x \in X$，$\exists x$ 的 open Nbd U

使 $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in I} U_\alpha$ (不交并) U_α 在 Y 中开

而且 $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ homeo.

证明：设 $O \subset Y$ 是开集，$\forall y \in O$ 令 $x = p(y)$. 设 U, U_α 如上.

$\exists \alpha \in I$，使 $y \in O \cap U_\alpha$. $O \cap U_\alpha$ 在 U_α 中开

$\xRightarrow{p \text{ homeo}}$ $p(O\cap U_\alpha)$ 在 U 中开 又 $\because$ U 开 $\Rightarrow$ $p(O \cap U_\alpha)$ 在 X 中开

$x \in p(O \cap U_\alpha) \subset p(O)$ (因为 x 可取 $p(O)$ 中任一点)

$\Rightarrow$ $p(O)$ 是开集.

(1.3) 用 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上的速降函数类，设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。计算函数 $g(x) = f''(4x+1)$ 的 Fourier 变换。（用 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 表示。）

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f''(4x+1)\, e^{-2\pi i x\cdot \xi}\, dx$$

令 $4x+1=y$ $\quad dx = \frac{1}{4} dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f''(y)\cdot e^{-2\pi i\cdot\frac{y-1}{4}\cdot\xi}\,\frac{1}{4}\,dy$$

$$= \frac{1}{4} e^{\frac{\pi}{2} i\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f''(y)\cdot e^{\frac{-2\pi i\cdot y\cdot\xi}{4}}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{\pi}{2} i\xi}\cdot\left(\frac{-2\pi i\xi}{4}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot e^{-2\pi i y\cdot\left(\frac{\xi}{4}\right)}\,dy$$

$$= \frac{-\pi^2\xi^2}{16} e^{\frac{\pi}{2} i\xi}\,\hat{f}\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

(1.4) 将 $n \times n$ 实系数矩阵自然的等同于 $\mathbb{R}^{n^2}$。设 B 是一个固定的矩阵，问所有和 B 可交换的矩阵全体是不是一个子流形？为什么？

是的：令 $f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$

$A \longmapsto AB-BA$

$\{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f(A)=0\}$ 是一个线性子空间。

可以说 f是常秩的，用常秩，

也可以取基 用参数化.

(1.5) 设 $E = \left\{u \in C^2([0,1],\mathbb{R}) | u(0) = u(1) = 0\right\}$. 推导在约束条件

$$\Psi(u) = \int_0^1 u^2 dx = 1$$

下，u_0 取到函数

$$\Phi(u) = \int_0^1 |u'|^2 + u^4 dx$$

最小值的必要条件。(Lagrange 乘子法，要计算过程，不要证明。)

$$\Phi'(u).v = \int_0^1 2u'v' + 4u^3 v \, dx$$

$$\Psi'(u).v = \int_0^1 2uv \, dx = 0$$

Lagrange 乘子法 $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ 使

$$\int_0^1 2u'v' + 4u^3 v - 2\lambda uv \, dx = 0$$

i.e. $\int_0^1 (-2u'' + 4u^3 - 2\lambda u) \cdot v \, dx = 0$

由 v 的任意性

$$-2u'' + 4u^3 - 2\lambda u = 0 \quad \text{on } [0,1]$$

第二部分：基础题（45 分，每小题 15 分）

(2.1) 设 $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列无内点闭集，求证：$\bigcup_i A_i$ 无内点。

(书上)

(2.2) 设$p : Y \to X$是一个G-covering，而且有$y_1, y_2 \in Y$满足$p(y_1) = p(y_2) = x$。求证：

$$p_*(\pi_1(Y, y_1)) = p_*(\pi_1(Y, y_2)).$$

并且这是$\pi_1(X, x)$的正规子群。

证明: ① $\exists g \in G$ 使 $g \cdot y_1 = y_2$

$\forall [\gamma] \in \pi_1(Y, y_1)$ γ is a loop based at y_1

$g \circ \gamma$ is a loop based at y_2

$p \circ g \circ \gamma = p \circ \gamma \Rightarrow p_*[\gamma] = p_*[g \circ \gamma] \in p_*(\pi_1(Y, y_2))$

$p_*(\pi_1(Y, y_1)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_2))$

另一侧同理.

② $\forall$ $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$, $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_1)$

令 $\tilde{\sigma}$ 是 σ 的从 y_1 出发的 lifting.

设 $\tilde{\sigma}(1) = y_2$.

$\tilde{\sigma}^{-1} \cdot \gamma \cdot \tilde{\sigma}$ is a loop based at y_2

$$\begin{array}{c} p_*[\tilde{\sigma}^{-1} \cdot \gamma \cdot \tilde{\sigma}] = [\sigma]^{-1} \cdot \underbrace{p_*([\gamma])}_{\text{可取遍 } p_*(\pi_1(Y, y_1)) \text{ 中任何元素}} \cdot [\sigma] \\ \cap \\ p_*(\pi_1(Y, y_2)) \\ \| \ \text{前一小题} \\ p_*(\pi_1(Y, y_1)) \end{array}$$

（2.3）设Ω是平面$\mathbb{R}^2$上的区域。光滑函数$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$称为调和函数，若它满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$$

另一个光滑函数g称为f的共轭调和函数，若它满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y};\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x}.$$

求证：

(1) g是调和函数。

(2) 若Ω是球，则任何调和函数都有共轭调和函数，而且在相差一个常数的意义下唯一。

(3) 举例表明对于一般的Ω上述命题未必成立。

(1) $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ $\Rightarrow$ $\Delta g=0$

(2). 令 $\omega=-\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial x}dy$

$d\omega=(\Delta f)\,dx\,dy=0$

Poincaré 引理 $\Rightarrow$ $\exists g$ 使 $dg=\omega$

i.e. $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}$

唯一性 显然

(3). 取 $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

取 $f=\log r$ $\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$

(验证略)

光滑函数 f.

第三部分：提高题（15 分）

(3.1) S^2 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面，用 (x,y,z) 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标。

(1)（4 分）什么样的 $f:S^2\to\mathbb{R}$ 能够满足（作为 S^2 上的微分形式）

$$dx\wedge df=0?$$

(2)（4 分）证明任何满足条件的 f 都是这样的。

用 (x,θ) 来参数化球面

$$\begin{cases} x = x \\ y=\sqrt{1-x^2}\cos\theta \\ z=\sqrt{1-x^2}\sin\theta \end{cases}$$

在 (x,θ) 坐标下计算

$$dx\wedge df = dx\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta\right)=\frac{\partial f}{\partial \theta}\,dx\wedge d\theta=0$$

$\Rightarrow$ f 关于 θ 是常值.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\boxed{dx\wedge d\theta}=0$$

$$0 \quad \neq 0$$

（3.2）定义$\mathbb{C}^2$中的子集

$$X = \left\{(z,w) \mid \quad z^6 = w^2; \quad w \neq 0\right\}.$$

(1)（3分）证明：X是~~A~~流形。

(2)（2分）设$p : X \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$定义为$p(z,w) = w$，求证：$p$是一个covering map.

(3)（2分）若$x = (1,1)$，求$\pi_1(X,x)$.

(1):

$f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$f(z,w) = z^6 - w^2$

$\forall (z_0,w_0) \in X.\quad w_0 \neq 0,\quad \frac{\partial f}{\partial w} = 2w_0 \neq 0.$

这里用复变的语言
要check $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$
的偏Jacobi要满秩

$\Rightarrow X$ 是 $\left\{(z,w) \in \mathbb{C},\ w \neq 0 \mid f(z,w)=0\right\}$ 定义的流形

(2) 6层的 covering

若 $z^6 = w^2$ 则 $\left(e^{i \cdot \frac{k}{3}\pi} \cdot z\right)^6 = w^2 \quad k=0,1,2,\cdots,5$

covering 的细节不好写，写几句定义就好了.

不是不可以写好. 证明：p 是 locally diffeo. & proper 就可以了.

③ $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}$

- X 不连通，所以这是一个连通分支的π_1

$\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow X$

$t \longmapsto (t^3, t)$

check φ 是一个从 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 到这个连通分支的 homeo.