China-France Mathematics Talents Class

Variétés différentielles

– Examen du 12/01/2022 –

8h30 – 11h30

Les exercices peuvent être traités indépendamment mais certains pourront utiliser des résultats obtenus auparavant.

I. On note X_r l'ensemble des matrices de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r.

a) Soit A une matrice carrée d'ordre r inversible. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

appartient à X_r si et seulement si $D = CA^{-1}B$. *Indication:* On cherchera une matrice inversible $P \in M_m(\mathbb{R})$ telle que

$$PM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

b) Montrer que X_r est une sous-variété différentiable de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

II. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est propre et calculer son degré.

III. Soit $\varphi : M \to N$ une application C^∞ entre deux variétés différentielles sans bord. On dit qu'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ est φ-lié à $Y \in \mathfrak{X}(N)$ si $d\varphi_x(X_x) = Y_{\varphi(x)}$ pour chaque $x \in M$.

a) Montrer que si φ n'est pas injective, il existe un champs de vecteurs sur M qui n'est φ-lié à aucun champ de vecteurs sur N.

b) Montrer que $X \in \mathfrak{X}(M)$ est φ-lié à $Y \in \mathfrak{X}(N)$ si et seulement si $X(\varphi^*(f)) = \varphi^*(Y(f))$ pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$.

c) Si $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ sont φ-liés à $Y, Y' \in \mathfrak{X}(N)$ respectivement, montrer que $[X, X']$ est φ-lié à $[Y, Y']$.

IV. a) Soit $n \geq 1$ un entier et $p_1, \ldots, p_n$ des points distincts du plan. Calculer la cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. *Indication :* Traiter le cas $n = 1$, puis appliquer une récurrence en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris associée à un recouvrement de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ par deux ouverts bien choisis.

b) On appelle X la réunion des trois axes de coordonnées dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la cohomologie de $\mathbb{R}^3 \setminus X$. *Indication :* On pourra utiliser le point précédent.

c) Soient x_0 et x_1 deux points de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $R > 0$ et un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x_0) = x_1$ et $\varphi(x) = x$ quel que soit x avec $\|x\| \geq R$.

d) Soit M une variété différentiable connexe et x_0 et x_1 deux points de M. Montrer que $M \setminus \{x_0\}$ et $M \setminus \{x_1\}$ sont difféomorphes. *Indication :* On peut relier x_0 et x_1 par un chemin et recouvrir celui-ci par un nombre fini d'ouverts de l'atlas.

e) Soient Z_1 et Z_2 deux parties finies de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus Z_1$ et $\mathbb{R}^2 \setminus Z_2$ sont difféomorphes si et seulement si Z_1 et Z_2 ont même cardinal.

V. a) Montrer que $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ est difféomorphe à S^2. *Indication :* On porra construire le difféomorphisme en utilisant l'atlas standard de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ et l'atlas de S^2 défini par les projections stéréographiques $\varphi_1 : S^2 \setminus (0,0,1) \to \mathbb{R}^2$ et $\varphi_2 : S^2 \setminus (0,0,-1) \to \mathbb{R}^2$. On peut calculer le changement de carte de cet atlas, sans beaucoup de calculs, dans le plan contenant les pôles Nord et Sud, et un autre point sur la sphère.

a) Montrer que $\mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus \{x\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$. *Indication :* On peut utiliser IV d) et choisir $x = [0 : \ldots : 0 : 1]$.

b) En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris et une récurrence sur n, montrer que

$$H^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 2p,\ 0 \leq p \leq n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

c) Soit $j : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ l'inclusion définie par

$$j([x_0 : \ldots : x_{n-1}]) = [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0].$$

Montrer que $\bar{j} : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1})$ est un isomorphisme.

VI. a) Soit x un générateur de $H^n(S^n)$ et p_1, p_2 les projections canoniques de $S^n \times S^n$ sur S^n. Montrer, en utilisant la formule de Künneth, que $H^n(S^n \times S^n)$ est engendré par $x_1 := \overline{p_1}(x)$ et $x_2 := \overline{p_2}(x)$ et que $x_1 \wedge x_2 \neq 0$.

b) Supposons qu'il existe $e \in S^n$ et $f : S^n \times S^n \to S^n$ telle que $f(e,p) = f(p,e) = p$ quel que soit $p \in S^n$. Montrer que n est impair.