China-France Mathematics Talents Class

Variétés différentielles

– Examen du 22/02/2023 –

14h30 – 17h30

Les exercices peuvent être traités indépendamment mais certains pourront utiliser des résultats obtenus auparavant.

I. Soit M une variété différentiable et $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^{2k+1}(M)$ deux formes différentielles fermées ($d\omega_1 = d\omega_2 = 0$) telles que $\omega_1 - \omega_2$ est exacte. Montrer que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est exacte.

II. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 2$.

a) Quelles sont les dimensions de $\Lambda^{n-1}(E)$ et $\Lambda^n(E)$?

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit F le sous-espace engendré par $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Montrer que l'inclusion $F \to E$ induit une application linéaire injective $\Lambda^k(F) \to \Lambda^k(E)$ pour tout $k \geq 1$. On identifiera désormais $\Lambda^k(F)$ avec son image dans $\Lambda^k(E)$.

c) Montrer que pour tout élément $\alpha \in \Lambda^{n-1}(E)$, il existe $\beta \in \Lambda^{n-2}(F)$ et $\gamma \in \Lambda^{n-1}(F)$ tels que $\alpha = \beta \wedge e_n + \gamma$.

d) Montrer (par récurrence sur n) que tout élément de $\Lambda^{n-1}(E)$ est décomposable, c'est-à-dire peut s'écrire sous la forme $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$ pour certains $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$.

III. Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tel que la norme de X est bornée.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale de X passant par x (c'est-à-dire vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)}$ pour tout $t \in I$. On suppose que I est l'intervalle ouvert maximal de définition de γ et on suppose qu'il existe $b \in \bar{I} \setminus I$.

a) Montrer qu'il existe une suite t_n de I avec $\lim_{n\to+\infty} t_n = b$.

b) Montrer que soit $t_n < b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $t_n > b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite de l'exercice on supposera qu'on est dans le premier cas, donc $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

c) Montrer que la suite $\gamma(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. On note y sa limite.

d) Soit $c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^n$ la courbe intégrale de X passant par y. Montrer que la courbe $\tilde\gamma :]b, a + \epsilon[$ définie par

$$\tilde\gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in]a, b[\\ c(t-b) & \text{si } t \in [b, b+\epsilon[\end{cases}$$

est de classe C^1.

e) En déduire que $I = \mathbb{R}$ et que donc X est complet.

IV. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞.

a) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle X_x, Y\rangle = df_x(Y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. On appelle X le *gradient* de f.

Dans la suite de l'exercice on suppose que $\|X_x\| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\|$ quels que soient $x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) Montrer que X est complet. On appelle φ_t le flot de X, qui est donc défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $f(\varphi_t(x)) = t + f(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

e) Montrer que $\|\varphi_t(x) - x\| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

f) En déduire que $\|\varphi_t(x) - x\| = |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que $t \mapsto X_{\varphi_t(x)}$ est une fonction constante pour chaque x fixé.

g) Montrer que $\varphi_t(x) = x + tX_x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

h) En déduire que pour x, y tels que $f(x) = f(y)$, on a $\langle X_x, y - x\rangle = 0$.

i) Montrer que $M := f^{-1}(0)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Quelle est sa dimension ?

j) Soit $x \in M$. Montrer que M est contenue dans le sous-espace affine $x + T_xM$ de $\mathbb{R}^n$. En déduire que M est égale à ce sous-espace.

k) Montrer que X est un champ de vecteurs constant sur $\mathbb{R}^n$ et trouver toutes fonctions lisses $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont le gradient est de norme constante égale à 1.

V. Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq k \leq n - 1$ et soit $S^k \subset \mathbb{R}^n$ la sphère

$$S^k := \{(x_1, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}.$$

a) Montrer que l'ouvert $U_{n,k} := \mathbb{R}^n \setminus S^k$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^k \cup \{P\})$, où P est un point de $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$. *Indication : on pourra utiliser des projections stéréographiques sur S^n. Il n'est pas nécessaire de faire des calculs explicites, on se contentera d'expliquer l'idée générale.*

b) Calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,n-1}$.

c) En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris, calculer les groupes de cohomologie à support compact de $U_{n,k}$ pour $k \leq n - 2$ (on suppose ici que $n \geq 3$).

d) Soit $n' \geq 2$ un entier et $k' \in \{1, \dots, n' - 1\}$. Montrer que si $U_{n,k}$ est difféomorphe à $U_{n',k'}$ alors $n = n'$ et $k = k'$.

e) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on suppose seulement que $U_{n,k}$ et $U_{n',k'}$ ont le même type d'homotopie ?