Analyse fonctionnelle

Gabriel Dospinescu

Contents

Chapter 1

Préliminaires de topologie et de théorie de la mesure

1.1 Topologie

Ce paragraphe contient des rappels de topologie, que l'on utilisera très souvent par la suite. On suppose le lecteur familier avec les notions suivantes:

• espace topologique, application continue entre des espaces topologiques.

• adhérence et intérieur d'un sous-ensemble d'un espace topologique,

• topologie induite, topologie produit.

• espace métrique, topologie définie par une distance, norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

• voisinage d'un point x dans un espace topologique X: une partie de X contenant un ouvert qui contient x.

• base de voisinages pour une topologie.

Soit X un espace topologique. Rappelons deux notions fondamentales:

• une suite (x_n) dans X converge vers $x \in X$ si tout voisinage de x contient presque tous les termes de la suite (i.e. tous sauf éventuellement un nombre fini).

• X est dit *séparé* (ou *Hausdorff*, ou T_2) si pour tous $x \neq y \in X$ il existe des ouverts disjoints U, V tels que $x \in U, y \in V$. Cela entraîne l'unicité des limites des suites: si (x_n) est une suite dans X qui converge vers x et vers y, alors $x = y$.

1.1.1 Analyse dans les espaces métriques

Un *espace métrique* est une paire $X = (X, d)$, où X est un ensemble et $d : X \times X \to [0, \infty)$ est une application telle que

• $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$

• pour tous x, y, z on a $d(x, y) = d(y, x)$ et $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Soit $X = (X, d)$ un espace métrique. On note $B(x, r) = \{y \in X |\, d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et rayon $r > 0$. L'espace X possède une topologie naturelle séparée, un sous-ensemble U étant ouvert si et seulement si U est une réunion de boules ouvertes. Un espace topologique X est dit *métrisable* s'il possède une distance qui définit sa topologie.

Le résultat suivant, dont la preuve facile est laissée en exercice, est très utile et sera utilisé implicitement par la suite:

Proposition 1.1.1. *Si X est métrisable*[1]*, une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si f est séquentiellement continue.*

b) L'adhérence d'une partie A d'un espace métrique X est l'ensemble des limites des suites convergentes (x_n) avec $x_n \in A$ pour tout n.

Sans une hypothèse de complétude il est vraiment difficile de faire de l'analyse digne de ce nom.

Définition 1.1.1. Une suite $(x_n)_n$ dans X est dite *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq N$. L'espace X est dit *complet* si toute suite de Cauchy converge.

Attention la notion de complétude dépend vraiment de la distance sur X, il se peut que X soit complet pour une distance d, et qu'il ne soit pas complet pour une autre distance d', même si les topologies définies par d et d' sur X sont les mêmes.

On se servira très souvent du lemme suivant, dont la preuve est laissé en exercice:

Lemme 1.1.1. *Une suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est elle-même convergente.*

1.1.2 Compacité

La compacité est une notion absolument fondamentale en analyse. Malheureusement elle vient avec toute une panoplie de variantes: compacité locale, relative, quasi-compacité, compacité séquentielle, etc, et il est assez facile de s'y perdre. Voici une liste loin d'être exhaustive:

Définition 1.1.2. On dit qu'un espace topologique X est

- *quasi-compact (ou qc)* si tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement fini, i.e. pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X tels que $X = \cup_{i\in I} U_i$ il existe $J \subset I$ fini tel que $X = \cup_{j\in J} U_j$.
- *compact* si X est qc et séparé.
- *séquentiellement compact* si toute suite dans X possède une sous-suite convergente.

Remarque 1.1.1. Attention au fait qu'il existe des espaces séquentiellement compacts non compacts, ainsi que des espaces compacts non séquentiellement compacts. Par exemple, posons $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $X = \{0,1\}^Y$. Les fonctions $f_n : Y \to \{0,1\}$, $f_n(a) = a_n$ pour $a = (a_j)_j \in Y$ forment une suite de fonctions qui ne possède pas de sous-suite convergente, et il découle du théorème de Tychonov (cf. ci-dessous) que X est compact.

Définition 1.1.3. Soit X un espace topologique et soit A une partie de X. On dit que A est compact si A est un espace compact pour la topologie induite. On dit que $A \subset X$ est *relativement compact* si l'adhérence de A dans X est compacte. On dit que X est *σ-compact* s'il existe une suite (K_n) de parties compactes de X telles que $X = \cup_{n\geq 1} K_n$.

Rappelons le résultat suivant:

---

[1]Cela marche plus généralement si tout point $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages.

Proposition 1.1.2. *Soit X un espace quasi-compact.*

1. *Tout fermé de X est quasi-compact.*

2. *Si (x_n) est une suite dans X, il existe $x \in X$ tel que tout voisinage de x contient une infinité de termes de la suite.*[2]

3. *Soit $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors*

   a) $f(X)$ est quasi-compact.

   b) Si f est bijective et Y est séparé, alors f est un homéomorphisme.

   c) Si $Y = \mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint son sup et son inf.

Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 1.1.2. *(Tychonov) a) Un produit dénombrable d'espaces séquentiellement compacts est séquentiellement compact.*
b) Un produit arbitraire d'espaces compacts est compact.

Le premier point se démontre facilement avec l'argument d'extraction diagonale, que l'on rencontrera ci-dessous plusieurs fois. Il n'en est pas de même du second!

1.1.3 Espaces localement compacts

Un espace topologique X est dit *localement compact* si X est séparé[3] et si tout point de X possède un voisinage relativement compact. Cette classe d'espaces joue aussi un rôle très important en analyse fonctionnelle.

Proposition 1.1.3. *Soit X un espace localement compact.*
a) Si U est un ouvert contenant le compact K, alors il existe un ouvert relativement compact V tel que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.
b) Un sous-espace Y de X est localement compact si et seulement si $Y = U \cap F$, avec U ouvert dans X et F fermé dans X.

Proof. a) Supposons d'abord que $K = \{x\}$, avec $x \in X$. Quitte à remplacer U par $U \cap V$ avec V un voisinage relativement compact de x, on peut supposer que $\overline{U}$ est compact. Soient V, W des ouverts disjoints de $\overline{U}$ qui contiennent x, respectivement $\overline{U} \setminus U$. Alors $V \subset U$, donc V est ouvert dans X, $x \in V$ et $\overline{V}$ est fermé dans le compact $\overline{U} \setminus W$, donc compact, et $\overline{V} \subset U$. En général on trouve un tel ouvert V_x pour chaque $x \in K$, on extrait un recouvrement fini $V_{x_1}, ..., V_{x_n}$ de K et on pose $V = V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}$.
b) exercice! □

Attention, un produit $\prod_{i \in I} X_i$ d'espaces localement compacts n'est pas forcément localement compact. C'est le cas si et seulement si X_i est compact pour presque tout i (i.e. tous sauf éventuellement un nombre fini).

---

[2]Si de plus tout $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages, alors X est séquentiellement compact.

[3]Cette condition n'est pas toujours demandée, mais quasiment toujours présente dans les applications.

Théorème 1.1.3. *(Alexandrov) Soit X un espace localement compact et non compact. Il existe un espace compact $\hat{X}$ et une application $f : X \to \hat{X}$ qui est un homéomorphisme sur un sous-espace dense de $\hat{X}$ et tel que $\hat{X} \setminus X$ soit réduit à un point (et donc X s'identifie à un ouvert de $\hat{X}$).*

On appelle $\hat{X}$ le *compactifié d'Alexandrov* de X. La construction (et la preuve du théorème ci-dessus) est en fait très simple: en supposant que X n'est pas compact on pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, ∞ étant un point n'appartenant pas à X, et on dit qu'une partie U de $\hat{X}$ est un ouvert si et seulement si U est un ouvert de X ou bien $\infty \in U$ et U^c est un compact de X. On vérifie que cela définit une topologie et que $\hat{X}$ a les propriétés désirées.

Proposition 1.1.4. *Soit X un espace localement compact et σ-compact, i.e. X est réunion dénombrable de compacts. Alors on peut écrire $X = \cup_{i \geq 1} U_i$, pour des ouverts relativement compacts U_i tels que $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$. Ainsi on peut écrire $X = \cup_{n \geq 1} K_n$, pour des compacts K_n tels que $K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1})$.*

Proof. Ecrivons $X = \cup_{n \geq 1} K_n$ pour des compacts K_n. On choisit un ouvert relativement compact U_1 contenant K_1, et par récurrence on choisit un ouvert relativement compact U_n contenant $\overline{U_{n-1}} \cup K_n$. □

1.1.4 Espaces à base dénombrable

On dit qu'un espace topologique X possède une base dénombrable s'il existe une famille dénombrable d'ouverts $(U_n)_n$ telle que tout ouvert de X soit une réunion de certains U_n (i.e. pour tout ouvert U il existe $I \subset \mathbb{N}$ tel que $U = \cup_{n \in I} U_n$). Si c'est le cas, tout sous-espace de X (muni de la topologie induite) possède une base dénombrable.

Lemme 1.1.2. *Si X possède une base dénombrable, alors tout recouvrement ouvert de X possède un sous-recouvrement dénombrable.*

Proof. Soit $(U_n)_n$ une base dénombrable et $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Ecrivons $V_i = \cup_{n \in S_i} U_n$ pour certains $S_i \subset \mathbb{N}$, et notons $T = \cup_i S_i$. Alors T est dénombrable et $\cup_{n \in T} U_n = X$. Pour tout $n \in T$ on choisit i_n tel que $n \in S_{i_n}$, alors $U_n \subset V_{i_n}$ et donc $(V_{i_n})_{n \in T}$ est un sous-recouvrement dńombrable. □

1.2 Théorie de la mesure

Ce paragraphe contient quelques rappels concernant les espaces mesurables et les espaces mesurés. Soit X un ensemble quelconque.

1.2.1 Mesures positives

Définition 1.2.1. Une *σ-algèbre (ou tribu)* Σ sur X est une famille Σ de parties de X telle que

- $X \in \Sigma$,
- $X \setminus A \in \Sigma$ pour tout $A \in \Sigma$
- Σ est stable par réunions dénombrables: si $A_n \in \Sigma$, alors $\cup_{n \geq 1} A_n \in \Sigma$.

On dit que (X, Σ) est un *espace mesurable*.

Exemple 1.2.1. 1. Si X est un ensemble et $\Sigma = \mathscr{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X, on peut définir la *mesure de comptage* $\mu(A) = |A|$ pour $A \subset X$.

2. Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est un sous-ensemble quelconque, il existe une plus petite tribu sur X, appellée *tribu (ou σ-algèbre) engendrée par $\mathscr{A}$* et notée $\sigma(\mathscr{A})$, qui contient $\mathscr{A}$. C'est l'intersection de toutes les tribus sur X qui contiennent $\mathscr{A}$.

3. Si X est un espace topologique, on peut prendre $\Sigma = \mathscr{B}(X)$ la *σ-algèbre borélienne* de X, i.e. la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts de X. Les parties de Σ sont les *sous-ensembles de Borel de X*.

Définition 1.2.2. Soit (X, Σ) un espace mesurable. Une *mesure (positive)* sur (X, Σ) est une application $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et μ est σ-additive, i.e.

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

pour toute suite (A_n) de parties deux à deux disjointes de X. On dit que (X, Σ, μ) est un *espace mesuré*.

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. On montre facilement que $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ pour tous les $A_n \in \Sigma$ (en particulier $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$ sont dans Σ), et que

$$\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

si $(A_n)_n$ est une suite croissante dans Σ (on a aussi $\mu(\cap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ si $(A_n)_n$ est une suite décroissante **et si** $\mu(A_1) < \infty$).

Définition 1.2.3. Un espace mesuré (X, Σ, μ) est dit
• fini si $\mu(X) < \infty$.
• σ-fini s'il existe une suite (A_n) avec $A_n \in \Sigma$, $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n et $X = \cup_{n\geq 1} A_n$.

Nous aurons besoin du résultat suivant. Soit X un ensemble. Une *mesure extérieure* sur X et une application $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ telle que $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ pour $A \subset B$ et $\mu^*(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n)$ pour toute suite (A_n) de parties de X. On dit qu'une partie A de X est μ^*-mesurable si $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ pour tout $E \subset X$. Il suffit de vérifier que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ pour tout E tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 1.2.1. *(Carathéodory) Si μ^* est une mesure extérieure sur X, alors l'ensemble Σ des parties μ^*-mesurables de X est une σ-algèbre et la restriction de μ^* à Σ est une mesure.*

Soit X un ensemble et soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une algèbre de Boole (i.e. $\mathscr{A}$ contient X et est stable par passage au complémentaire et par intersections finies). Soit $\nu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ une prémesure, i.e. une application telle que $\nu(\emptyset) = 0$ et $\nu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)$ pour toute suite (A_n) de parties deux à deux disjointes avec chaque A_n ainsi que $\cup_{n\geq 1} A_n$ dans $\mathscr{A}$. Alors ν induit une mesure extérieure $\mu^*(E) := \inf \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)$, l'inf étant pris sur toutes les suites (A_n) avec $A_n \in \mathscr{A}$ et $E \subset$

$\cup_{n\geq 1} A_n$. De plus, chaque $A \in \mathscr{A}$ est μ^*-mesurable, et $\mu^*(A) = \nu(A)$. Si $\Sigma = \sigma(\mathscr{A})$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{A}$, alors $\mu^*|_\Sigma$ est une mesure qui prolonge ν. Si ν est σ-finie, c'est l'unique mesure qui prolonge ν.

Soient (X, Σ, μ) et (X', Σ', μ') deux espaces mesurés et soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des réunions disjointes finies d'ensembles de la forme $A \times A'$ avec $A \in \Sigma, A' \in \Sigma'$. La tribu produit $\Sigma \otimes \Sigma'$ est par définition $\sigma(\mathscr{A})$. L'application

$$\nu : \mathscr{A} \to [0, \infty],\ \nu(\coprod_{i=1}^{n} A_i \times A_i') = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)\mu'(A_i')$$

est bien définie et une prémesure, elle induit donc une mesure $\mu \times \mu'$ sur $\Sigma \otimes \Sigma'$ par la construction ci-dessus. Si μ et μ' sont σ-finies, alors $\mu \times \mu'$ est l'unique mesure sur $(X \times X', \Sigma \otimes \Sigma')$ telle que $(\mu \times \mu')(A \times A') = \mu(A) \cdot \mu'(A')$ pour $A \in \Sigma, A' \in \Sigma'$.

1.2.2 Intégration sur un espace mesuré

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré.

Définition 1.2.4. Une fonction $f : X \to Y$, Y étant un espace topologique, est dite *mesurable* si $f^{-1}(U) \in \Sigma$ pour tout ouvert U de Y.

Si $f : X \to Y$ est mesurable, alors $f^{-1}(A) \in \Sigma$ pour tout sous-ensemble de Borel A de Y. L'espace $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ possède une structure naturelle d'espace métrique compact, et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}([a, \infty]) \in \Sigma$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ (on peut aussi utiliser les intervalles de la forme $(a, \infty]$, $[-\infty, a)$ ou bien $[-\infty, a]$ pour tester la mesurabilité d'une fonction).

Soit

$$M(X) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} |\, f \text{ est mesurable}\}$$

et soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions *mesurables étagées ou simples*, i.e. les fonctions mesurables $s : X \to \mathbb{C}$ d'image finie, ou encore l'espace engendré par les 1_A avec $A \in \Sigma$. On vérifie facilement que $M(X)$ est stable par les opérations $f \mapsto |f|$, $(f, g) \mapsto \max(f, g), \min(f, g)$ et

$$(f_n)_n \mapsto \sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n.$$

En particulier une limite simple d'applications mesurables est mesurable.

Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on écrit $f \leq g$ si $f(x) - g(x) \in [0, \infty]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si T est un ensemble de fonctions sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose

$$T_+ = \{f \in T |\, f \geq 0\}.$$

Pour $f = \sum_{i=1}^n x_i 1_{A_i} \in \mathscr{E}_+$ on pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i) \in [0, \infty],$$

avec la convention $0 \cdot \infty = 0$. On vérifie que cela ne dépend pas du choix de l'écriture de f. Pour $f \in M(X)_+$ on pose

$$\int_X f d\mu = \sup_{e \in \mathscr{E}_+, e \leq f} \int_X e d\mu.$$

On vérifie que cela est compatible avec la définition précédente si $f \in \mathscr{E}_+$, et que $f \mapsto \int_X f d\mu$ est additive et respecte l'ordre, i.e. $f \leq g \implies \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$. Les résultats fondamentaux suivants seront systématiquement utilisés dans ce cours:

Théorème 1.2.2. *a) (convergence monotone) Si $f_n \in M(X)_+$, alors $f := \sum_{n\geq 1} f_n \in M(X)_+$ et*

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n d\mu.$$

Ainsi pour toute suite croissante (f_n) d'éléments de $M(X)_+$

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

b) (lemme de Fatou) Si $f_n \in M(X)_+$, alors

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

c) Si $f \in M(X)_+$, on a $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si $\int_A f d\mu = 0$ pour tout $A \in \Sigma$, si et seulement si $f = 0$ presque partout.

Pour tout $f \in M(X)_+$ il existe une suite croissante $(e_n)_n$ déléments de $\mathscr{E}_+$ qui converge simplement vers f: $e_n = \min(n, \frac{\lfloor 2^n f \rfloor}{2^n})$ est une telle suite. Le théorème ci-dessus montre que $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X e_n d\mu$, ce qui nous ramène souvent à prouver des résultats pour $\mathscr{E}_+$ seulement.

Corollaire 1.2.1. *Soit $f \in M_+(X)$ et posons pour $A \in \Sigma$*

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu := \int_X f 1_A d\mu.$$

Alors λ est une mesure positive sur X et $\int_X g d\lambda = \int_X f g d\mu$ pour tout $g \in M_+(X)$.

Soit

$$\mathscr{L}^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} | \text{ f est mesurable et } \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et notons $u = \mathrm{Re}(f)$, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$. On note $v = \mathrm{Im}(f)$ (donc $f = u + iv$) et on définit v^+, v^- comme ci-dessus. Alors $u, v, u^\pm, v^\pm \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et on pose

$$\int_X f d\mu := \int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu + i(\int_X v^+ d\mu - \int_X v^- d\mu).$$

Le résultat suivant est une conséquence formelle de ceux ci-dessus.

Théorème 1.2.3. *a) L'ensemble $\mathscr{L}^1(\mu)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, sur lequel l'application*

$$\int_X (\cdot) d\mu : \mathscr{L}^1(\mu) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_X f d\mu$$

est une application linéaire, et $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$ pour tout $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

b) Une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ est nulle presque partout si et seulement si $\int_X |f| d\mu = 0$.

Deux autres résultats fondamentaux de la théorie sont:

Théorème 1.2.4. *(convergence dominée) Soit (f_n) une suite dans $\mathscr{L}^1(\mu)$ et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Supposons que $f_n(x) \to f(x)$ pour presque tout x et qu'il existe $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ telle que pour tout n on ait $|f_n| \leq g$ presque partout. Alors $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu,\ \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Théorème 1.2.5. *Soient* (X, Σ, μ) *et* (X', Σ', μ') *des espaces mesurés* σ*-finis.*

a) (Tonelli) Si $f : X \times X' \to [0, \infty]$ *est mesurable (pour* $\Sigma \otimes \Sigma'$*), alors les fonctions* $x \mapsto \int_{X'} f(x, \cdot) d\mu'$ *et* $x' \mapsto \int_X f(\cdot, x') d\mu$ *sont mesurables sur* X *et* X' *respectivement, et*

$$\int f d(\mu \times \mu') = \int_X (\int_{X'} f(x, x') d\mu'(x')) d\mu(x) = \int_{X'} (\int_X f(x, x') d\mu(x)) d\mu'(x').$$

b) (Fubini) Si $f \in L^1(\mu \times \mu')$ *alors* $f(x, \cdot) \in L^1(\mu')$ *pour presque tout* $x \in X$, $f(\cdot, x') \in L^1(\mu)$ *pour presque tout* $x' \in X'$*, les fonctions (définies presque partout)* $x \mapsto \int_{X'} f(x, \cdot) d\mu'$ *et* $x' \mapsto \int_X f(\cdot, x') d\mu$ *sont dans* $L^1(\mu)$ *et* $L^1(\mu')$ *respectivement, et on a*

$$\int_{X \times X'} f d(\mu \times \mu') = \int_X (\int_{X'} f(x, x') d\mu'(x')) d\mu(x) = \int_{X'} (\int_X f(x, x') d\mu(x)) d\mu'(x').$$

Chapter 2

Fonctions continues sur un espace compact

Les deux premiers chapitres étudient les propriétés classiques de l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur un espace topologique. Ces espaces jouent un rôle très important en analyse fonctionnelle. Nous insistérons sur trois résultats fondamentaux: les théorèmes de compacité d'Arzela-Ascoli, le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass et le théorème de Riesz-Markov-Kakutani.

Quelques conventions et notations: si X, Y sont des espaces topologiques, on note $C(X, Y)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to Y$. On écrit simplement $C(X) := C(X, \mathbb{R})$. Si $f, g \in C(X)$ on écrit $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in X$. En particulier on écrit $f \geq 0$ si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$.

On note

$$C_b(X) = \{f \in C(X) | \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

l'espace des fonctions continues bornées $f : X \to \mathbb{R}$. Si X est compact, toute fonction continue sur X est bornée, donc $C(X) = C_b(X)$. Pour $f \in C_b(X)$ on pose

$$||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

S'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit aussi $||f||$ au lieu de $||f||_\infty$. Alors $(C_b(X), || \cdot ||_\infty)$ est un espace de Banach, i.e. $|| \cdot ||_\infty$ est une norme sur $C_b(X)$ et $C_b(X)$ est un espace métrique complet pour la distance $d(f, g) = ||f - g||_\infty$ (théorème 2.3.4 ci-dessous).

2.1 Compacité dans les espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est dite *precompacte* si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir A par un nombre fini de boules de rayon ε (il n'est pas difficile de voir que l'on peut alors choisir les centres de ces boules dans A). Notons que si X est compact, alors X est precompact: il suffit d'extraire du recouvrement ouvert $(B(x, \varepsilon))_{x \in X}$ un sous-recouvrement fini. Cela fournit le très utile résultat suivant (rappelons qu'un espace topologique est dit *séparable* s'il possède une partie dénombrable et dense):

Proposition 2.1.1. *Un espace métrique compact est séparable et possède une base dénombrable.*

Proof. Pour tout n on peut recouvrir X par un nombre fini de boules $B(x_{n,i}, 1/n)$, $1 \leq i \leq k_n$. On vérifie alors facilement (exercice) que les $x_{n,i}$ forment une partie dénombrable dense de X, et que les boules ci-dessus forment une base dénombrable de X. □

Remarque 2.1.1. Il existe beaucoup d'espaces localement compacts métrisables et qui ne possèdent pas de base dénombrable: tout espace discret est métrisable et localement compact. L'espace $[0,1]^{[0,1]}$ est compact, séparable, sans base dénombrable.

Le résultat suivant est fondamental et franchement délicat:

Théorème 2.1.2. *(Borel-Lebesgue) Soit (X,d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) X est compact
b) X est séquentiellement compact
c) X est complet et precompact

Proof. $a) \implies b)$ Soit (x_n) une suite dans X et soit F_n l'adhérence de $\{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Les F_n sont fermés, non vides, décroissants pour l'inclusion, donc par compacité il existe $x \in \cap_n F_n$. On construit alors par récurrence des entiers $k_1 < k_2 < ...$ tels que $d(x, x_{k_i}) < 1/i$ pour tout i, donc (x_{k_i}) est une sous-suite convergente de (x_n) et X est séquentiellement compact.

$b) \implies c)$ Supposons donc que X est séquentiellement compact. Alors X est complet, car toute suite de Cauchy possède une sous-suite convergente, et elle est alors automatiquement convergente. Si X n'est pas precompact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute réunion finie de boules de rayon ε ne soit pas X tout entier. En partant d'un $x_1 \in X$ quelconque, on construit par récurrence une suite (x_n) telle que $d(x_n, x_i) \geq \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n-1$ (il suffit de prendre x_n en dehors de $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$), et il est évident qu'elle ne possède pas de sous-suite convergente, une contradiction.

L'implication $c) \implies a)$ est la la plus difficile, et on va la montrer en deux étapes, en montrant que $c) \implies b)$ et que $b) \implies a)$.

$c) \implies b)$ Soit (x_n) une suite dans X. Pour tout k on recouvre X par un nombre fini de boules de rayon $1/k$. Une de ces boules de rayon 1 contient une sous-suite $(x_{\varphi_1(n)})$ de (x_n), ensuite une de ces boules de rayon 1/2 contient une sous-suite $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ de $(x_{\varphi_1(n)})$. On continue ainsi et on fabrique pour tout $k \geq 1$ une suite de boules $B(y_k, 1/k)$ et une sous-suite $(x_{\varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(n)})$ contenue dans $B(y_k, 1/k)$. On a donc $d(x_{\varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(n)}, x_{\varphi_1 \circ ... \circ \varphi_k(m)}) \leq 2/k$ pour tous m, n. En posant $\phi(n) = \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_n(n)$, on obtient une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $d(x_{\phi(m)}, x_{\phi(n)}) \leq 2/\min(m,n)$ pour tous m, n, donc $(x_{\phi(n)})$ est de Cauchy, et donc convergente car X est complet. Cela permet de conclure.

Montrons enfin que $b) \implies a)$. Supposons que X est séquentiellement compact et soit (U_i) un recouvrement ouvert de X. Montrons d'abord le

Lemme 2.1.1. *Il existe $r > 0$ tel que toute boule de rayon r soit contenue dans un des U_i.*

Proof. Sinon, il existe des boules $B(x_n, 1/n)$ qui ne sont contenues dans aucun U_i. Soit (x_{n_k}) une sous-suite qui converge vers $x \in X$, soit i tel que $x \in U_i$ et soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Alors $B(x_{n_k}, 1/n_k) \subset B(x, r) \subset U_i$ pour k assez grand (par l'inégalité triangulaire), une contradiction. □

En revenant à la preuve, soit $r > 0$ comme dans le lemme. Comme X est precompact, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon r, et chacune est contenue dans un U_i. Ces U_i forment un sous-recouvrement fini, donc X est compact. Ouf! $\square$

Corollaire 2.1.1. *Soit X un espace métrique complet et soit A une partie de X. Alors A est relativement compacte si et seulement si A est precompacte.*

Proof. On applique le théorème ci-dessus à $\bar{A}$, qui est complet (car fermé dans X, qui est complet). Alors $\bar{A}$ est compact si et seulement si $\bar{A}$ est precompact, ce qui équivaut à la precompacité de A: un sens est évident, pour l'autre il suffit de remarquer que si $A \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ alors $\bar{A} \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, 2\varepsilon)$). $\square$

2.2 Deux espaces métriques compacts "universels"

Nous allons exhiber deux espaces métriques compacts X, Y "universels", au sens où tout espace métrique compact K est une image continue de X et est homéomorphe à un sous-espace fermé de Y. Cela utilise la construction classique suivante, qui est très importante.

Soient (X_n, d) des espaces métriques[1] et notons $X = \prod_{n\geq 1} X_n$ l'espace produit. Soit $p_n : X \to X_n$ la projection canonique. On pose $\bar{d} = \min(d, 1)$. Alors $\bar{d}$ est aussi une distance et définit la même topologie que d sur chaque X_n. Si $x, y \in X$, on pose

$$d(x, y) := \sum_{n\geq 1} \frac{\bar{d}(p_n(x), p_n(y))}{2^n}.$$

Noter que la série converge puisque $\bar{d}$ prend des valeurs dans $[0, 1]$.

Théorème 2.2.1. *a) (X, d) est un espace métrique, et une suite (x_n) dans X converge vers $x \in X$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = p_k(x)$ pour tout k.*

b) Si chaque X_n est compact, il en est de même de X.

Proof. a) Il est immédiat que d est une distance sur X. Comme $\bar{d}(p_k(x_n), p_k(x)) \leq 2^k d(x_n, x)$, si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ on a aussi $\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = p_k(x)$ pour tout k. Dans l'autre sens, supposons que $\lim_{n\to\infty} p_k(x_n) = p_k(x)$ pour tout k et soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $2^N > \varepsilon$ et soit n_0 tel que $\bar{d}(p_k(x_n), p_k(x)) < \varepsilon$ pour $n \geq n_0$ et $k \leq N$. Un tel n_0 existe bien puisque $(p_k(x_n))$ converge vers $p_k(x)$ pour tout $k \leq N$. Alors pour $n \geq n_0$

$$d(x_n, x) \leq \sum_{1\leq k\leq N} \frac{\varepsilon}{2^k} + \sum_{k>N} \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

b) Soit (x_n) une suite dans X. Nous allons montrer qu'elle possède une sous-suite convergente (ce qui permettra de conclure via le théorème de Borel-Lebesgue). La suite $(p_1(x_n))$ vit dans l'espace compact X_1, elle possède donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi_1(n)})$ vers un $y_1 \in X_1$. La suite $(p_2(x_{\varphi_1(n)}))$ vit dans l'espace compact X_2, donc possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ vers un $y_2 \in X_2$. On

[1] Pour ne pas encombrer les notations, on utilise la même lettre d pour toutes les métriques, mais elles ne sont bien entendu pas identiques!

continue ainsi et on fabrique une suite (y_k) avec $y_k \in X_k$, ainsi que des sous-suites $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)})$ de (x_n) telles que $\lim_{n\to\infty} p_k(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)}) = y_k$ pour tout k. Posons $\phi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)$, alors $(x_{\phi(n)})$ est une sous-suite de chacune des suites $(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k(n)})$, donc $\lim_{n\to\infty} p_k(x_{\phi(n)}) = y_k$ pour tout k. Le point a) montre alors que $(x_{\phi(n)})$ converge dans X vers $(y_1, y_2, \ldots) \in X$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 2.2.1. *On garde les notations du théorème.*

a) Montrer que si chaque X_n est complet, il en est de même de X.

b) Montrer que la distance définie sur X ci-dessus définit la même topologie que la topologie produit sur X.

Le *cube de Hilbert* est l'espace

$$H = \prod_{n\geq 1} [0,1],$$

muni de la métrique complète

$$d(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n},\ x = (x_n), y = (y_n),$$

qui définit la topologie produit (exercice ci-dessus!) et fait de H un espace compact (théorème ci-dessus).

Théorème 2.2.2. *Tout espace métrique compact X est homéomorphe à un sous-espace fermé du cube de Hilbert H.*

Proof. La proposition 2.1.1 fournit une suite (x_n) dense de X. Soit $\bar{d} = \min(d, 1)$, d étant la distance sur X. Alors $\bar{d}$ est une distance sur X, à valeurs dans $[0,1]$ et qui définit la même topologie que d sur X. L'application

$$f : X \to H,\ f(x) = (\bar{d}(x, x_n))_{n\geq 1}$$

est continue, puisque chacune des applications $x \mapsto \bar{d}(x, x_n)$ l'est (et par la propriété universelle de la topologie produit sur H). Elle est aussi injective: si $\bar{d}(x, x_n) = \bar{d}(y, x_n)$ pour tout n, par densité de (x_n) (et la continuité de $\bar{d}$) on a $\bar{d}(x,z) = \bar{d}(y,z)$ pour tout z, en particulier $\bar{d}(x,y) = 0$ et donc $x = y$. Puisque X et H sont compacts, f est forcément un homéomorphisme sur son image, qui est fermée. □

Notre deuxième espace métrique compact universel est

$$\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\geq 1} \{0,1\},$$

muni de la topologie produit, $\{0,1\}$ ayant la topologie discrète. Alors Δ est un espace métrique compact, pour la métrique $d(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$ si $x = (x_n), y = (y_n)$. Il nous sera plus utile de considérer la distance

$$d'(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{|x_n - y_n|}{3^n},\ x = (x_n), y = (y_n),$$

qui a la propriété remarquable suivante: si $x, y, z \in \Delta$ et $d(x,y) = d(x,z)$ alors $y = z$ (exercice). De plus, d' et d définissent la même topologie sur Δ, la topologie produit.

On a un homéomorphisme vers l'ensemble classique de Cantor

$$\Delta \to \mathscr{C} = \{\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} |\ a_n \in \{0,2\}\} \subset [0,1],\ (a_n) \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{2a_n}{3^n}.$$

Proposition 2.2.1. *a) Il existe une surjection continue $\Delta \to [0,1]$.*

b) Il existe une surjection continue $\Delta \to [0,1]^{\mathbb{N}}$.

c) Si F est un fermé de Δ, il existe une surjection continue $\Delta \to F$.

Proof. a) La fonction $f((a_n)) = \sum_{n\geq 1} a_n/2^n$ est surjective et continue.

b) Puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont en bijection, on a un homéomorphisme $\Delta \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq \Delta^{\mathbb{N}}$ et on utilise alors a) pour obtenir une surjection continue $\Delta^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$.

c) Si $x \in \Delta$ il existe un unique $y \in F$ tel que $d'(x,F) = d'(x,y)$, par la propriété remarquable de notre distance d' et par la compacité de F. On pose $f(x) = y$, ce qui définit une fonction $f : \Delta \to F$. Pour voir qu'elle est continue, supposons que $x_n \to x$ et que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(x)$. Comme F est compact, quitte à remplacer (x_n) par une sous-suite, on peut supposer que $f(x_n) \to y$ avec $y \neq f(x)$. Alors $d'(x_n, f(x_n)) \to d'(x,y)$, mais $d'(x_n, f(x_n)) = d'(x_n, F) \to d'(x,F) = d'(x, f(x))$, donc $d'(x,y) = d'(x,f(x))$ et $y \neq f(x)$, une contradiction. □

Théorème 2.2.3. *(Banach-Mazur) Soit K un espace métrique compact.*

a) Il existe une surjection continue $\Delta \to K$ de l'ensemble de Cantor vers X.

b) Il existe une isométrie $C(K) \to C(\Delta)$ qui est aussi un morphisme d'algèbres.

c) Il existe une isométrie linéaire $C(\Delta) \to C([0,1])$ et donc une isométrie linéaire $C(K) \to C([0,1])$.

Proof. a) On sait que K s'identifie à un fermé de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, qui est une image continue de Δ. Si $f : \Delta \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ est une surjection continue, alors $F = f^{-1}(K)$ est un fermé de Δ, donc il existe une surjection continue $g : \Delta \to F$. La composée de g et de $f|_F$ fournit une surjection continue $\Delta \to K$.

b) Conséquence évidente de a).

c) Ecrivons $[0,1] \setminus \Delta = \coprod_{n\geq 1} I_n$ (on identifie ici Δ avec l'ensemble de Cantor dans $[0,1]$), avec I_n des intervalles ouverts, dont les extrémités sont dans Δ. Si $f \in C(\Delta)$ on définit $\bar{f} \in C([0,1])$ en interpolant de manière linéaire sur chaque I_n. Alors $||\bar{f}||_\infty = ||f||_\infty$ et $f \mapsto \bar{f}$ est une isométrie linéaire $C(\Delta) \to C([0,1])$. □

2.3 Continuité uniforme

Soient $(X,d), (Y,d)$ des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Une telle application est continue et envoie les suites de Cauchy dans X vers les suites de Cauchy dans Y (exercice facile). Un exemple important d'uniforme continuité automatique est le suivant:

Théorème 2.3.1. *(Heine) Si $f : X \to Y$ est une application continue entre des espaces métriques, avec X compact, alors f est uniformément continue.*

Proof. Supposons que ce n'est pas le cas, il existe donc $\varepsilon > 0$ et des suites $(x_n), (x'_n)$ dans X telles que $d(x_n, x'_n) < 1/n$ et $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Soit (x_{n_k}) une sous-suite de (x_n) qui converge vers un $x \in X$ et soit $(x_{n_{k_j}})$ une sous-suite de (x_{n_k}) qui converge vers un $x' \in X$. En passant à la limite dans $d(x_{n_{k_j}}, x'_{n_{k_j}}) < 1/n_{k_j}$ on obtient

$d(x, x') \leq 0$, donc $x = x'$. Mais en passant à la limite dans $d(f(x_{n_{k_j}}), f(x'_{n_{k_j}})) \geq \varepsilon$ on obtient $0 = d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$, une contradiction. □

Le théorème de prolongement suivant est très utile:

Théorème 2.3.2. *Soient*

- X, Y *des espaces métriques, avec* Y *complet*
- $D \subset X$ *une partie dense et*
- $f : D \to Y$ *une application uniformément continue.*

Il existe une unique application continue $\tilde{f} : X \to Y$ *qui prolonge* f *(i.e.* $\tilde{f}|_D = f$*). De plus,* $\tilde{f}$ *est uniformément continue.*

Proof. Soit $x \in X$. Puisque D est dense et que l'on travaille avec des espaces métriques, il existe une suite (x_n) dans D qui converge vers x. Alors (x_n) est de Cauchy, et comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy dans l'espace complet Y. Il existe donc $\tilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$, et cette limite ne dépend pas du choix de la suite (x_n) dans D qui converge vers x, car si (y_n) est une autre telle suite alors on peut définir une troisième suite (z_n) qui converge vers x en posant $z_{2n} = x_n, z_{2n+1} = y_n$, et d'après ce qui précède la suite $(f(z_n))$ doit converger, ce qui force $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Il est alors évident que $\tilde{f} : X \to Y$ ainsi construite est bien un prolongement de f. Montrons qu'elle est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que si $x, y \in D$ vérifient $d(x, y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soient $(x_n), (y_n)$ des suites dans D qui convergent vers x, y. Alors pour n assez grand on a $d(x_n, y_n) < \delta$ et donc $d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$ et donc $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) < 2\varepsilon$.

Montrons enfin l'unicité de $\tilde{f}$. Mais si $\tilde{g}$ est un autre prolongement, alors $\{x \in X | \tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)\}$ est un fermé de X (cela peut se tester avec des suites, et découle alors de la continuité de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$) qui contient la partie dense D de X, donc ce fermé est X tout entier et $\tilde{f} = \tilde{g}$. □

Remarque 2.3.3. Attention, il faut vraiment l'hypothèse d'uniforme continuité: prendre $D = \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, alors $x \in D \mapsto x/|x|$ ne se prolonge pas en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Une belle application du théorème ci-dessus est le fait que tout espace métrique possède une complétion, unique à isométrie près. Pour cela nous avons besoin de quelques préliminaires, qui sont très utiles dans d'autres circonstances et que nous allons utiliser souvent par la suite. Une partie B d'un espace métrique est dite *bornée* si B est contenue dans une boule. Si X est un espace topologique et si Y est un espace métrique, on note $C_b(X, Y)$ l'espace des fonctions continues $f : X \to Y$ dont l'image est bornée. C'est aussi un espace métrique pour la distance

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)),$$

comme on le vérifie aisement. Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 2.3.4. *Si* Y *est un espace métrique complet, alors il en est de même de* $C_b(X, Y)$*.*

Proof. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $E := C_b(X,Y)$. Comme $d(f,g) \geq d(f(x),g(x))$ pour tous $f,g \in E, x \in X$, il s'ensuit que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans Y pour tout $x \in X$, donc elle converge et on pose $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Nous allons montrer que $f \in E$ et que f_n converge vers f dans E. Soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 tel que $d(f_n,f_m) < \varepsilon$ pour $m,n \geq n_0$, alors $\sup_{x\in X} d(f_n(x),f_m(x)) < \varepsilon$. Pour $n \geq n_0$, en faisant $m \to \infty$ à $x \in X$ fixé, on obtient $\sup_{x\in X} d(f_n(x),f(x)) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Il nous reste à montrer que $f \in E$, ce qui permettra de conclure. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. On a vu qu'il existe n tel que $\sup_{y\in Y} d(f_n(y),f(y)) \leq \varepsilon$. Puisque f_n est continue en x, il existe un voisinage U de x tel que $d(f_n(y),f_n(x)) < \varepsilon$ pour $y \in U$. Mais alors pour $y \in U$ on a

$$d(f(y),f(x)) \leq d(f(y),f_n(y)) + d(f_n(y),f_n(x)) + d(f_n(x),f(x)) < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue en x et finit la preuve. □

Nous pouvons enfin démontrer le

Théorème 2.3.5. *Pour tout espace métrique X il existe un espace métrique complet $\hat{X}$ et une isométrie d'image dense $i : X \to \hat{X}$. L'espace $\hat{X}$ est unique à isométrie près, c'est le complété de X.*

Proof. Montrons d'abord l'unicité. Si $\iota : X \to \hat{X}$ et $\iota' : X \to \hat{X}'$ sont des isométries d'image dense avec $\hat{X}, \hat{X}'$ complets, en posant $D = \mathrm{Im}(\iota)$, l'application $f = \iota' \circ \iota^{-1} : D \to X \to \hat{X}'$ est bien définie et une isométrie. En particulier f est uniformément continue et par le théorème ci-dessus elle se prolonge uniquement en une application $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$, qui est forcément une isométrie. En permutant les rôles de $\hat{X}$ et $\hat{X}'$ on construit une application $\hat{f}' : \hat{X}' \to \hat{X}$ qui est un inverse de $\hat{f}$.

Pour l'existence soit $Y = C_b(X,\mathbb{R})$. C'est un espace métrique complet. Notons aussi que pour tous x,y on a $d(x,y) = \sup_{z\in X} |d(z,x) - d(z,y)|$. Ainsi, en fixant $a \in X$, l'application $\iota : X \to Y, \iota(x) = d(\cdot,x) - d(\cdot,a)$ est bien définie (i.e. l'image est bien formée de fonctions continues bornées) et on voit immédiatement que ι est une isométrie en utilisant l'observation ci-dessus. Il suffit de prendre $\hat{X} = \overline{\iota(X)} \subset Y$. □

Remarque 2.3.6. La construction usuelle de $\hat{X}$ est de prendre le quotient de l'espace des suites de Cauchy dans X modulo les suites convergentes.

2.4 Le théorème d'Arzela-Ascoli

On veut comprendre les parties relativement compactes de $C(X)$ quand X est un espace compact (ou un espace plus général...). Si X,Y sont des espaces topologiques, on note Y^X l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to Y$ (sans aucune hypothèse de continuité).

Définition 2.4.1. Soit (Y,d) un espace métrique et soit X un espace topologique. Une partie S de Y^X est dite *équicontinue en* $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de x tel que

$$\sup_{f\in S,\, y\in U} d(f(y),f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que S est *équicontinue* si S est équicontinue en x pour tout $x \in X$. Noter qu'une partie équicontinue S de Y^X est contenue dans $C(X,Y)$.

Si X, Y sont des espaces métriques, la condition d'équicontinuité en x devient: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x,y) < \delta \implies \sup_{f \in S} d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Le point crucial ici est le fait que δ ne dépend pas du choix de $f \in S$.

Exemple 2.4.1. a) Une famille de fonctions Lipschitziennes de même constante de Lipschitz entre deux espaces métriques est clairement équicontinue.

b) Si S est une partie équicontinue de Y^X, alors pour toute suite convergente $x_n \to x$ dans X on a $\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in S} d(f(x_n), f(x)) = 0$.

c) Soit $X = [0,1]$ et $Y = \mathbb{R}$. Les fonctions $f_n(x) = x^n$ ne forment pas une famille équicontinue en 1, puisque $d(f_n(1-1/n), f_n(1))$ tend vers $1 - e^{-1}$ quand $n \to \infty$. Noter cependant que $(f_n(x))$ est bornée pour tout $x \in X$. D'autre part, les fonctions $f_n(x) = n$ forment une suite équicontinue, mais $f_n(x)$ n'est bien entendu pas bornée.

Supposons que X est compact et que (Y, d) est un espace métrique. Alors tout $f \in C(X, Y)$ est borné, on peut donc définir une distance sur $C(X, Y)$ en posant

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Si Y est complet, il en est de même de $C(X,Y)$ (théorème 2.3.4).

Théorème 2.4.1. *(Arzelà-Ascoli) Soit X un espace compact et soit S une partie équicontinue $C(X)$, telle que pour tout $x \in X$ l'ensemble $S_x = \{f(x) |\, f \in S\}$ soit borné. Alors S est relativement compacte.*

Proof. Puisque $C(X)$ est un espace métrique complet, par le corollaire 2.1.1 il suffit de montrer que S est precompacte. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$ on dispose d'un ouvert U_x contenant x tel que

$$\sup_{f\in S, y\in U_x} |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \qquad (1).$$

Comme X est compact et $X = \cup_{x\in X} U_x$, il existe $x_1, ..., x_n$ tels que $X = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Donc

$$\forall x \in X \exists i \in \{1, ..., n\}, \sup_{f\in S} |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon, \qquad (2).$$

Chaque S_{x_i} est borné, et la relation (2) montre que $\cup_{f\in S} f(X)$ est borné, donc precompact dans $\mathbb{R}$. on peut donc le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $V_1, ..., V_m$ de $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{diam}(V_i) < \varepsilon$.

Si $a : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., m\}$ est une fonction, posons

$$T_a = \{f \in S |\, f(x_i) \in V_{a(x_i)}, 1 \le i \le n\}.$$

Notons que $S \subset \cup_a T_a$, puisque pour tout $f \in S$ on a $f(X) \subset V_1 \cup ... \cup V_m$. Soient $T_{a_1}, ..., T_{a_N}$ les sous-ensembles non vides parmi les divers T_a et prenons $f_{a_j} \in T_{a_j}$. On va montrer que $S \subset \cup_{i=1}^N B(f_{a_i}, 3\varepsilon)$, ce qui finira la preuve.

Soit $f \in S$. Comme $S \subset \cup_a T_a = \cup_{j=1}^N T_{a_j}$, il existe $1 \le j \le N$ tel que $f \in T_{a_j}$. Montrons que $f \in B(f_{a_j}, 3\varepsilon)$. Soit $x \in X$, alors (2) fournit un i tel que $\sup_{f\in S} |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$, en particulier $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ et $|f_{a_j}(x) - f_{a_j}(x_i)| < \varepsilon$. Comme $\mathrm{diam} V_{a_j(x_i)} < \varepsilon$, on a $|f(x_i) - f_{a_j}(x_i)| < \varepsilon$, et donc

$$|f(x) - f_{a_j}(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_{a_j}(x_i)| + |f_{a_j}(x_i) - f_{a_j}(x)| < 3\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Exemple 2.4.2. a) Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $a > 0$. Alors l'ensemble des fonctions continues $f \in C(X)$ telles que $||f||_\infty \leq 1$ et $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)^a$ pour tous $x, y \in X$ est relativement compact dans $C(X)$. En effet, les hypothèses du théorème d'Arzelà-Ascoli sont évidemment satisfaites.

b) Soit $K \in C([0, 1])^2)$. Pour $f \in C([0, 1])$ la fonction $T(f)$ définie par

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$$

est dans $C([0, 1])$ et $S = \{T(f) |\, ||f||_\infty \leq 1\}$ est relativement compact dans $C([0, 1])$. En effet, notons que $||T(f)||_\infty \leq ||K||_\infty$ pour $f \in S$. Pour montrer que S est équicontinue, notons que pour tous x, x'

$$\sup_{||f||_\infty \leq 1} |T(f)(x) - T(f)(x')| \leq \int_0^1 |K(x, y) - K(x', y)|dy.$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, par uniforme continuité de K il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| < \delta \implies \sup_{0 \leq y \leq 1} |K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon,$$

donc $\sup_{||f||_\infty \leq 1} |T(f)(x) - T(f)(x')| < \varepsilon$ pour $|x - x'| < \delta$.

Exercice 2.4.1. *Adapter la preuve du théorème ci-dessus pour montrer le résultat plus général suivant: soit X un espace compact, Y un espace métrique et $S \subset C(X, Y)$ une partie équicontinue telle que $\{f(x) | f \in S\}$ est relativement compact dans Y pour tout $x \in X$. Alors S est relativement compacte dans $C(X, Y)$.*

a) Montrer que l'on peut supposer que Y est complet, en utilisant le complété de Y.

b) Expliquer les modifications (minimes...) à apporter à la preuve donnée ci-dessus.

Corollaire 2.4.1. *Soit X un espace métrique compact et soit (f_n) une suite équicontinue telle que $(f_n(x))_n$ soit bornée pour tout x. Alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur X.*

Exercice 2.4.2. *Cet exercice fournit une preuve plus "concrète" du corollaire. On reprend les notations et les hypothèses du corollaire. Soit D une partie dénombrable dense dans X (qui existe par la proposition 2.1.1).*

a) Par un argument d'extraction diagonale, montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n) telle que $(f_{n_k}(d))$ converge pour tout $d \in D$.

b) Montrer que (f_{n_k}) converge uniformément sur X.

La suite de ce paragraphe peut être ignorée dans une première lecture, elle démontre une version plus générale du théorème d'Arzelà-Ascoli. Soit (Y, d) un espace métrique et soit X un espace topologique. Sur l'espace Y^X des fonctions $f : X \to Y$ on considère les deux topologiques suivantes:

• la topologie produit, en identifiant Y^X et $\prod_{x \in X} Y$ via $f \mapsto (f(x))_{x \in X}$.

• la topologie de la convergence compacte, ayant pour base d'ouverts les $\{g \in Y^X | \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$ pour $f \in Y^X, \varepsilon > 0$ et $K \subset X$ compact. Son nom est expliqué par le fait qu'une suite (f_n) dans Y^X converge vers $f \in Y^X$ pour cette topologie si et seulement si f_n converge uniformément vers f sur tout compact de X.

Cette topologie semble dépendre de la métrique sur Y. Ce n'est pas vraiment le cas, puisque l'on montre que sa restriction à $C(X,Y)$ n'est rien d'autre que la topologie compacte-ouverte, dont une base est donnée par les intersections finies d'ensembles de la forme $\{f \in C(X,Y) | \, f(K) \subset U\}$, avec $K \subset X$ compact et $U \subset X$ ouvert.

Pour $S \subset C(X,Y)$ et $x \in X$ on note

$$S_x = \{f(x) | \, f \in S\}.$$

La version générale (mais pas la plus générale...) du théorème d'Arzelà-Ascoli est alors:

Théorème 2.4.2. *(Arzelà-Ascoli) Soit X un espace topologique, Y un espace métrique, et munissons $C(X,Y)$ de la topologie de la convergence compacte. Si $S \subset C(X,Y)$ est une partie équicontinue et si S_x est relativement compact pour tout $x \in X$, alors S est relativement compacte.*

Proof. Munissons Y^X de la topologie produit et soit $\bar{S}$ l'adhérence de S dans Y^X. Alors $\bar{S}$ est une partie fermée de $\prod_{x\in X} \overline{S_x}$, car les projections de Y^X vers chaque copie de Y sont continues, donc elles envoient $\bar{S}$ dans les divers $\overline{S_x}$. Puisque $\prod_{x\in X} \overline{S_x}$ est compact (en tant que produit de compacts), $\bar{S}$ est compact. Nous allons montrer que $\bar{S}$ est une partie équicontinue de Y^X, en particulier contenue dans $C(X,Y)$, et que les deux topologies produit et de la convergence compacte induisent la même topologie sur $\bar{S}$, ce qui permettra de conclure: $\bar{S}$ sera une partie compacte (donc fermée) de $C(X,Y)$ qui contient S, donc contient l'adhérence de S dans $C(X,Y)$, et cette adhérence est donc un fermé d'un compact, donc un compact.

Montrons d'abord que $\bar{S}$ est équicontinue. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, et soit U un voisinage de x tel que $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$ pour $g \in S, y \in U$. Soit $f \in \bar{S}$ et soit $y \in U$. Puisque $\{g \in Y^X | \, d(g(x), f(x)) < \varepsilon, d(g(y), f(y)) < \varepsilon\}$ est un voisinage ouvert de f dans Y^X, il rencontre S, donc il existe $g \in S$ tel que $d(g(x), f(x)) < \varepsilon, d(g(y), f(y)) < \varepsilon$, mais alors l'inégalité triangulaire montre que $d(f(x), f(y)) < 3\varepsilon$, donc cette inégalité est valable pour $f \in \bar{S}$ et $y \in U$, ce qui permet de conclure.

Montrons enfin que la topologie induite par Y^X sur $\bar{S}$ est la même que celle induite par la topologie de la convergence compacte. Il suffit de montrer que pour tout compact K de X, tout $g \in \bar{S}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage ouvert V de g dans Y^X (avec la topologie produit) tel que

$$\bar{S} \cap V \subset \{f \in \bar{S} | \, \sup_{x\in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}.$$

Comme $\bar{S}$ est équicontinue en tout point de K et K est compact, on peut recouvrir K par un nombre fini d'ouverts $U_1, ..., U_n$, contenant des points convenables $x_i \in U_i$, tels que $d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon$ pour $x \in U_i, f \in \bar{S}$. Mais alors si l'on prend $V = \{g \in Y^X | \, d(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon, 1 \le i \le n\}$, on voit tout de suite que tout $g \in V \cap \bar{S}$ vérifie $d(f(x), g(x)) < 3\varepsilon$ pour tout $x \in K$, ce qui finit la preuve. □

Remarque 2.4.3. a) La réciproque est vraie si X est localement compact (séparé). Nous n'en aurons pas besoin par la suite.

b) Si X est compact, la topologie de la convergence compacte sur $C(X,Y)$ est la même que la topologie définie par la distance $d(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$ (excellent exercice!), donc le théorème ci-dessus est bien une généralisation du théorème 2.4.1.

Exercice 2.4.3. *Soit X un espace localement compact (séparé) et σ-compact. Si (f_n) est une suite équicontinue dans $C(X)$ et si $(f_n(x))$ est bornée pour tout x, alors (f_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de X vers une fonction $f \in C(X)$.*

Exercice 2.4.4. *Soit $(f_n) \in C_b(X, Y)$ une suite équicontinue, avec Y un espace métrique complet. Si $f_n(x)$ converge pour x dans une partie dense de X, alors $f_n(x)$ converge pour tout x. Si de plus X est compact, alors f_n converge uniformément sur X.*

2.5 Le théorème de Stone-Weierstrass

Dans ce paragraphe on démontre un critère de densité dans $C(X)$ dû à Stone et Weierstrass, quand X est un espace compact. Ce résultat sera utilisé plusieurs fois dans ce cours, et constitue l'un des théorèmes de base concernant l'espace $C(X)$. Il exploite la structure de $\mathbb{R}$-algèbre de $C(X)$: $C(X)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (via $(a \cdot f)(x) = af(x)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C(X)$) et possède aussi une structure d'anneau (en posant $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ et $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$) telle que le morphisme naturel[2] $\mathbb{R} \to C(X)$ soit un morphisme d'anneaux. Nous allons voir plus loin dans le cours que la $\mathbb{R}$-algèbre $C(X)$ permet de retrouver X à homéomorphisme près (c'est un résultat célèbre de Gelfand et Kolmogoroff, et Gelfand en a tiré des conséquences merveilleuses...).

Nous allons commencer par un résultat de densité pas très pratique, mais qui sera le coeur de la preuve du théorème de Stone-Weierstrass. Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie S de $C(X)$ *sépare les points de X* si

$$\forall x \neq y \in X \; \exists f \in S, \; f(x) \neq f(y).$$

Par exemple, si X est un espace métrique compact, alors $C(X)$ sépare les points de X (utiliser les fonctions de la forme $y \mapsto d(x, y)$ avec $x \in X$). Cela reste vrai pour un espace compact (et même pour une classe beaucoup plus large d'espaces), comme on le verra dans le prochain cours (conséquence du lemme d'Urysohn).

Théorème 2.5.1. *(Kakutani-Krein) Soit X un espace compact non réduit à un point et soit $V \subset C(X)$ un sous-espace vectoriel tel que $|f| \in V$ pour tout $f \in V$. Si*

$$\{(f(x), f(y)) | \, f \in V\} = \mathbb{R}^2, \; \forall x \neq y \in X,$$

alors V est dense dans $C(X)$.

Proof. Notons que V est stable par $(f, g) \mapsto \max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$, et aussi par $(f, g) \mapsto \min(f, g)$. Soit $f \in C(X)$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer en deux étapes qu'il existe $g \in V$ tel que $||g - f||_\infty < \varepsilon$.

Montrons d'abord que pour tout $x \in X$ il existe $g_x \in V$ tel que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x < f + \varepsilon$. Fixons x. Pour tout y il existe $h_y \in V$ qui envoie x sur $f(x)$ et y sur $f(y)$ (si $x \neq y$ c'est l'hypothèse, et si $y = x$ on applique l'hypothèse à x et un point différent de x). Par continuité de h_y en y il existe un voisinage ouvert U_y de y sur lequel $h_y < f + \varepsilon$. On recouvre X par un nombre fini de tels voisinages,

[2] Qui envoie $a \in \mathbb{R}$ sur la fonction constante égale à a.

disons $U_{y_1}, ..., U_{y_n}$ et on prend $g_x := \min_{1\le j\le n} h_{y_j}$, qui est bien dans V et vérifie les conditions demandées.

On reprend maintenant le même argument: par continuité, pour tout $x \in X$ il existe un voisinage W_x de x sur lequel $g_x > f - \varepsilon$. On recouvre X avec un nombre fini de ces voisinages, disons $W_{x_1}, ..., W_{x_n}$ et on pose $g = \max_{1\le i\le n} g_{x_i}$, qui vérifie bien $||g - f||_\infty < \varepsilon$. □

Pour la preuve du théorème de Stone-Weierstrass nous aurons aussi besoin du lemme technique suivant, qui dit que la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$ est limite uniforme de fonctions polynômiales.

Lemme 2.5.1. *Soit (P_n) la suite de fonctions polynômiales définie par $P_0 = 0$ et*

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}.$$

Alors

a) On a $0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$ pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \ge 0$.

b) $(P_n(x^2))$ est une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

Proof. a) On montre cela par récurrence, le cas $n = 0$ est immédiat. Admettons que c'est vrai pour n. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x))}{2} \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2}\right).\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $\sqrt{x} - P_n(x) \ge 0$, en particulier $P_n(x) \le 1$, et donc $1 - \frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2} \ge 0$ et enfin $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \ge 0$. Pour montrer l'inégalité $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \le \frac{2\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$ on utilise le même argument (i.e. l'identité ci-dessus et l'hypothèse de récurrence), ce qui nous ramène à montrer que

$$1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \le \frac{2 + n\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}},$$

ou encore $\frac{P_n(x)+\sqrt{x}}{2} \ge \frac{\sqrt{x}}{2+(n+1)\sqrt{x}}$. Cela est évident puisque le terme à gauche est $\ge \frac{\sqrt{x}}{2}$ et celui à droite est $\le \frac{\sqrt{x}}{2}$.

b) Le point a) montre que $0 \le |x| - P_n(x^2) \le 2/n$ pour $n \ge 1$ et $|x| \le 1$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.5.2. a) La preuve n'est pas très élégante, mais on a sacrifié l'élégance sur l'autel du pragmatisme... Une preuve plus élégante utilise le critère de Dini.

b) Une autre manière d'approcher la valeur absolue par des fonctions polynômiales est la suivante. La formule de Taylor pour la fonction $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$ montre que

$$1 - \sqrt{1 - x} = \sum_{n\ge 1} a_n x^n$$

pour certains $a_n \geq 0$, la série étant convergente pour $x \in [0,1[$. Si $s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k$, alors $s_n(x) \leq 1-\sqrt{1-x} \leq 1$ pour tout n et tout $x \in [[$ (car $a_k \geq 0$ pour tout k). En faisant $x \to 1$ on obtient $\sum_{k=1}^n a_k \leq 1$ pour tout n, donc $\sum_{n\geq 1} a_n < \infty$. Mais alors il est évident que s_n converge uniformément vers $x \mapsto 1-\sqrt{1-x}$ sur $[0,1]$, donc $x \mapsto 1 - s_n(1-x^2)$ sont des fonctions polynômiales qui convergent uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Théorème 2.5.3. *(Stone-Weierstrass) Soit X un espace compact et soit A une sous-algèbre de $C(X)$ qui sépare les points et contient la fonction constante* 1*. Alors A est dense dans $C(X)$.*

Proof. On peut supposer que X n'est pas réduit à un point. Soit $\bar{A}$ l'adhérence de A dans $C(X)$. On voit facilement que $\bar{A}$ est aussi une sous-algèbre de $C(X)$, qui contient bien entendu A, donc sépare les points. Montrons que $|f| \in \bar{A}$ pour $f \in \bar{A}$. On peut supposer que $||f|| \leq 1$ (puisque A contient les fonctions constantes). Par le lemme 2.5.1 il existe une suite de fonctions polynômiales (P_n) qui convergent uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \to |x|$. Mais alors $P_n(f) \in \bar{A}$ convergent uniformément vers $|f|$, et donc $|f| \in \bar{A}$, ce qui permet de conclure.

Le théorème de Stone-Weierstrass découle alors du théorème de Krein-Kakutani, si l'on montre que $\{(f(x), f(y)) |\, f \in \bar{A}\} = \mathbb{R}^2$ pour tous $x \neq y \in X$. Par hypothèse il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ on peut choisir $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $g := a + bf$ vérifie $g(x) = u, g(y) = v$. Mais $g \in A$, car A contient 1 et est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. □

La version complexe du théorème de Stone-Weiertrass est un peu délicate. Prenons le compact $K = \{e^{i\theta} |\, \theta \in [0, 2\pi]\}$. Si $f \in C(K, \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales P_n sur K, alors pour tout $k \geq 1$ on a

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} P_n(e^{i\theta}) d\theta = 0$$

car $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} P(e^{i\theta}) d\theta = 0$ pour tout polynôme P et tout $k \geq 1$. Ainsi l'algèbre A des fonctions polynômiales sur K est une sous-algèbre de $C(K, \mathbb{C})$ qui sépare les points, contient la fonction constante 1 et qui n'est pas dense, car $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} f(e^{i\theta}) d\theta = 0$ pour tout $f \in \overline{A}$ et tout $k \geq 1$, donc par exemple la fonction $z \to 1/z$ n'est pas dans $\overline{A}$.

Théorème 2.5.4. *(Stone-Weierstrass, version complexe) Soit X un espace compact et soit A une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{C})$ qui sépare les points, contient la fonction constante* 1 *et qui est stable par conjugaison complexe (i.e. $\overline{f} \in A$ pour tout $f \in A$). Alors A est dense dans $C(X, \mathbb{C})$.*

Proof. Soit $B = A \cap C(X)$, alors B est une sous-algèbre réelle de $C(X)$ qui contient la fonction constante 1. De plus, comme A est stable par $f \mapsto \overline{f}$, on a $A = B + iB$: en effet, $\mathrm{Re}(f) = \frac{f+\bar{f}}{2} \in B$ et $\mathrm{Im}(f) = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in B$ si $f \in A$. Il suffit donc de montrer que B est dense dans $C(X)$, et par le théorème de Stone-Weierstrass (version réelle) il suffit de voir que B sépare les points. Si $x \neq y$, par hypothèse il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Mais alors il existe $g \in \{\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\} \subset B$ tel que $g(x) \neq g(y)$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 2.5.1. *Soient X, Y des espaces compacts, soit $f \in C(X \times Y)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $g_1, ..., g_n \in C(X)$ et $h_1, ..., h_n \in C(Y)$ tels que*

$$\sup_{x\in X, y\in Y} |f(x,y) - \sum_{k=1}^n g_k(x) h_k(y)| < \varepsilon.$$

Nous allons continuer avec quelques applications importantes des théorèmes ci-dessus.

Corollaire 2.5.1. *(approximation de Weierstrass) a) Si $a \le b \in \mathbb{R}$ les fonctions polynômiales sont denses dans $C([a, b])$.*

b) L'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi nx}$, avec $n \in \mathbb{Z}$ est dense dans $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Proof. C'est une conséquence directe du théorème de Stone-Weierstrass (la version complexe pour b)). □

Bien entendu, la preuve du corollaire est un peu absurde, au moins historiquement: le corollaire précède le théorème de Stone-Weierstrass et en est la motivation principale. Il convient donc d'expliquer d'autres méthodes de démonstration de ce théorème fondamental. La fin de ce paragraphe explique quelques approches. Elle peut être ignorée dans une première lecture.

Corollaire 2.5.2. *Si X est un espace métrique compact, alors $C(X)$ est séparable.*

Proof. Par le théorème de Banach-Mazur 2.2.3 il suffit de voir que $C([0, 1])$ est séparable, or le théorème d'approximation de Weierstrass (corollaire 2.5.1) et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ montrent que les fonctions polynômiales à coefficients dans $\mathbb{Q}$ sont denses dans $C([0, 1])$ et forment un ensemble dénombrable.

Si on veut se passer du théorème 2.2.3, on peut raisonner comme suit. Soit (x_n) une suite dense dans X et posons $f_n(x) = d(x, x_n)$. Alors pour tout $x \neq y$ il existe n tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$ (en effet, il existe n tel que $f_n(x) = d(x, x_n) < d(x, y)/2$, et alors $f_n(y) > d(x, y)/2$). Soit A la $\mathbb{Q}$-algèbre engendrée par la fonction constante 1 et par $f_1, f_2, ...$ Alors A est dénombrable et son adhérence contient la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par 1 et les f_n, et celle-ci est dense dans $C(X)$ par Stone-Weierstrass. Donc $C(X)$ est séparable. □

Corollaire 2.5.3. *Soit X un espace compact, $a \in X$ et soit $A = \{f \in C(X) | \, f(a) = 0\}$. Toute sous-algèbre de A qui sépare les points est dense dans A.*

Proof. Soit A' une sous-algèbre de A qui sépare les points et soit B le sous-espace de $C(X)$ engendré par la fonction constante 1 et par A'. Alors B est une sous-algèbre de $C(X)$ qui sépare les points et contient 1, donc B est dense dans $C(X)$. Soit $f \in A$, alors il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $f_n \in A'$ tels que $||f_n + a_n - f||_\infty \to 0$. Mais alors $a_n \to 0$ (en utilisant que $f_n(a) = f(a) = 0$) et donc $||f_n - f||_\infty \to 0$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 2.5.4. *Soit X un espace localement compact et soit $C_0(X)$ l'espace des fonctions $f \in C(X)$ qui tendent vers 0 à l'infini, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset X$ tel que $\sup_{x \notin K} |f(x)| \le \varepsilon$. Toute sous-algèbre de $C_0(X)$ qui sépare les points et telle que $\forall x \in X \; \exists f \in A, f(x) \neq 0$ est dense dans $C_0(X)$.*

Proof. Soit $\hat{X}$ le compactifié d'Alexandrov de X. La restriction à X induit une isométrie bijective $\{f \in C(\hat{X}) | \, f(\infty) = 0\} \simeq C_0(X)$ (tout $f \in C_0(X)$ s'étend à $\hat{X}$ en posant $f(\infty) = 0$, et ce prolongement est continu). Il suffit alors d'appliquer le corollaire ci-dessus à $\hat{X}$. □

Ce qui suit peut être ignoré dans une première lecture. On discute quelques approches "directes" ou "explicites" du théorème d'approximation de Weierstrass, plus précisément le point a) du corollaire 2.5.1 (il existe des approches similaires pour traiter le point b) du dit corollaire). Notons que l'on peut supposer que $a = 0$ et $b = 1$, via le changement de variable $x \to \frac{x-a}{b-a}$. Le résultat suivant exhibe une suite canonique de fonctions polynômiales qui convergent uniformément vers f, les polynômes de Bernstein.

Théorème 2.5.5. *(Bernstein) Soit $f \in C([0,1])$ et soit $B_n(f) \in C([0,1])$ la fonction définie par*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Alors $B_n(f)$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

Ce théorème peut se démontrer directement, mais nous allons encore le réduire à un énoncé plus général, le théorème de Korovkin ci-dessous. Une application linéaire $T : C(X) \to C(X)$ est appelée *opérateur positif* si $T(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$. Bien entendu $B_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ est un opérateur positif. Soit

$$p_k \in C([0,1]),\ p_k(x) = x^k.$$

On calcule facilement, en utilisant la formule du du binôme combinée avec $j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$ que $T_n(p_k) = p_k$ pour $k = 0, 1$. Pour $k = 2$ c'est un peu plus compliqué, mais on s'en sort en utilisant l'identité $j(j-1)\binom{n}{j} = n(n-1)\binom{n-2}{j-2}$, qui montre que

$$T_n(p_2)(y) - \frac{1}{n}T_n(p_1)(y) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n} j(j-1)\binom{n}{j} y^j (1-y)^{n-j}$$

$$= \frac{n-1}{n}\sum_{j=2}^{n}\binom{n-2}{j-2} y^j (1-y)^{n-j} = \frac{n-1}{n} y^2$$

Ainsi, on voit que $T_n(p_k)$ converge uniformément vers p_k pour $0 \leq k \leq 2$. Le théorème de Bernstein est donc une conséquence du résultat remarquable suivant:

Théorème 2.5.6. *(Korovkin) Soient $a \leq b$ des réels et soient $T_n : C([a,b]) \to C([a,b])$ des opérateurs positifs tels que $||T_n(x^k) - x^k||_\infty \to 0$ pour $k = 0, 1, 2$ (on écrit x^k pour la fonction $x \to x^k$). Alors $||T_n(f) - f||_\infty \to 0$ pour tout $f \in C([a,b])$.*

Ce théorème est réduit enfin au résultat plus général suivant[3], en prenant $g(x,y) = (x-y)^2$ et $X = [0,1]$.

Théorème 2.5.7 (Lomelí, García). *Soit X un espace compact et $g : X \times X \to [0, \infty)$ une fonction continue telle que*

$$g(x,y) = 0 \implies x = y.$$

Soit $\phi_n(x) = T_n(g(\cdot, x))(x)$ et soient enfin $T_n : C(X) \to C(X)$ des opérateurs positifs vérifiant $||T_n(1) - 1||_\infty \to 0$ et $||\phi_n||_\infty \to 0$. Alors $||T_n(f) - f||_\infty \to 0$ pour tout $f \in C(X)$.

[3]Cf. Lomelí et García, dans l'article "Variations on a theorem of Korovkin" (American Math. Monthly)

Proof. Le point clé est le lemme suivant (qui est trivial quand X est métrique, un peu plus fatigant en général):

Lemme 2.5.2. *Soit Y un espace compact et $f, g \in C(Y)$ des fonctions telles que $f \geq 0, g \geq 0$ et telles que $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que $f \leq \varepsilon + Cg$.*

Proof. Fixons ε et supposons qu'il existe $x_n \in X$ tels que $f(x_n) \geq \varepsilon + ng(x_n)$. Montrons d'abord qu'il existe $x \in X$ tel que tout voisinage ouvert U de X contient une infinité de termes de la suite (x_n) (i.e. l'ensemble des n tels que $x_n \in U$ est infini). Sinon tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U_x qui ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite (x_n), mais alors par compacité X est recouvert par un nombre fini des voisinages U_x, et donc X ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite (x_n), ce qui est absurde.

Fixons un tel x. Soit $\delta > 0$. Par continuité il existe un voisinage U de x tel que $f(y) \leq f(x) + \varepsilon/2$ et tel que $g(y) \geq g(x) - \delta$ pour $y \in U$. Il existe $n_k \to \infty$ tels que $x_{n_k} \in U$, et alors $f(x_{n_k}) \geq \varepsilon + n_k g(x_{n_k})$, donc $f(x)/n_k \geq g(x) - \delta$ pour tout k, ce qui donne $g(x) \leq \delta$. Puisque δ est arbitraire, on a $g(x) = 0$, et par hypothèse cela force $f(x) = 0$, contredisant $f(x) + \varepsilon/2 \geq f(x_{n_k}) \geq \varepsilon$. □

Revenons à la preuve du théorème et fixons $\varepsilon > 0$ et $f \in C(X)$. En appliquant le lemme avec $Y = X \times X$, $f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ et le g du théorème, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + Cg(x, y)$ pour tous $x, y \in X$. Ainsi $|f - f(y)| \leq \varepsilon + Cg(\cdot, y)$ et par positivité[4] $|T_n(f) - f(y)T_n(1)| \leq \varepsilon T_n(1) + CT_n(g(\cdot, y))$. En particulier pour tout $y \in Y$ on a

$$|T_n(f)(y) - f(y)T_n(1)(y)| \leq \varepsilon T_n(1)(y) + C\varphi_n(y).$$

Puisque $\varphi_n(y) \to 0$ uniformément et $||T_n(1) - 1||_\infty \to 0$, on voit immédiatement que cela force $||T_n(f) - f||_\infty < 2\varepsilon$ pour n assez grand, ce qui permet de conclure. □

Exercice 2.5.2. *a) Montrer directement que si $f \in C([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$, alors*

$$||f - B_n(f)||_\infty \leq \frac{||f||_\infty}{2n\varepsilon^2} + \sup_{|x-y|\leq\varepsilon} |f(x) - f(y)|$$

et conclure que $B_n(f) \to f$ uniformément.

b) Montrer que si $f \in C^d([0, 1])$ alors $B_n(f)^{(d)}$ converge uniformément vers $f^{(d)}$.

c) Montrer que si f est convexe, alors $B_n(f)$ est aussi convexe.

[4] Si $f, g \in C(X)$ vérifient $g \geq |f|$, alors $T(g) \geq |T(f)|$.

Chapter 3

Quelques aspects plus fins de l'espace $C(X)$

Ce chapitre contient des résultats nettement plus délicats concernant $C(X)$, qui tournent autour du lemme d'Urysohn et ses applications. Les deux résultats les plus délicats que l'on démontre sont le théorème fondamental de Riesz-Markov-Kakutani (qui jouera un rôle crucial dans la suite du cours) et l'existence des mesures de Haar sur les groupes topologiques localement compacts, un autre résultat de base et hautement nontrivial.

3.1 Le lemme d'Urysohn et le théorème de Tietze

Un espace topologique X est dit *normal*[1] si pour toute paire (F, G) de fermés disjoints de X il existe des ouverts disjoints U, V de X tels que $F \subset U$ et $G \subset V$, i.e. deux fermés disjoints de X peuvent toujours être séparés par des ouverts disjoints. La proposition suivante fournit beaucoup d'exemples de tels espaces.

Proposition 3.1.1. *a) Tout espace métrique est normal.*
b) Tout espace compact[2] *est normal.*

Proof. a) Pour tout fermé F de X la fonction f définie par $f(x) = d(x, F) = \inf_{f \in F} d(x, f)$ est continue puisque $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. Si F et G sont des fermés disjoints de X, alors $U = \{x \in X | \, d(x, F) < d(x, G)\}$ et $V = \{x \in X | \, d(x, G) < d(x, F)\}$ soit des ouverts disjoints contenant F, respectivement G.

b) Montrons d'abord que si X est un espace séparé, $K \subset X$ est un compact et $x \notin K$, alors on peut séparer x et K par des ouverts disjoints. Pour tout $y \in K$ on peut séparer x et y par des ouverts disjoints U_y et V_y (donc $x \in U_y, K \subset V_y$). Par compacité, il existe $y_1, ..., y_n$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^n V_{y_i}$. Il suffit de considérer les ouverts $U = \cap_{i=1}^n U_{y_i}$ et $V = \cup_{i=1}^n V_{y_i}$.

Soient maintenant F, G des fermés disjoints de X. Alors F, G sont compacts. Pour tout $x \in F$ on peut séparer x et G par des ouverts disjoints U_x et V_x. On recouvre F par un nombre fini d'ouverts $U_{x_1}, ..., U_{x_n}$, alors $U := \cup_{i=1}^n U_{x_i}$ et $V = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$ sont des ouverts disjoints qui contiennent F et G, respectivement. $\square$

[1] Attention, cette définition n'est pas universelle (et il ne semble pas y en avoir une...): certains auteurs imposent que X soit T_2 ou T_1, etc.

[2] Rappelons que pour nous un espace compact est séparé!

Remarque 3.1.1. Il existe des espaces localement compacts (séparés) qui ne sont pas normaux.

Dans un espace normal on dispose de beaucoup de fonctions continues à valeurs dans $[0,1]$, grâce au résultat fondamental suivant, que l'on utilisera sans cesse dans ce chapitre. Nous renvoyons le lecteur à son livre favori d'analyse pour une preuve, qui n'est pas spécialement éclairante (sauf si l'espace est métrique). Il est beaucoup plus important de connaître l'énoncé que la preuve de ce résultat!

Théorème 3.1.2. *(lemme d'Urysohn) Soit X un espace topologique normal et soit F un fermé de X.*

- *Si U est un voisinage ouvert de F, alors il existe $f \in C(X,[0,1])$ telle que $1_F \leq f \leq 1_U$.*
- *Si G est un fermé de X disjoint de F, il existe $f \in C(X,[0,1])$ telle que $f=0$ sur G et $f=1$ sur F.*

Remarque 3.1.3. Les deux assertions du théorème sont trivialement équivalentes (poser $U=G^c$ et $G=U^c$ pour passer de l'une à l'autre). De plus le résultat est quasiment trivial si (X,d) est un espace métrique: il suffit de poser

$$f(x)=\frac{d(x,G)}{d(x,F)+d(x,G)},$$

ce qui a un sens puisque F,G étant des fermés disjoints, le dénominateur n'est jamais nul.

Théorème 3.1.4. *(théorème de prolongement de Tietze) Soit F un fermé d'un espace normal X et soient $a \leq b \in \mathbb{R}$. Les applications de restriction $C(X,[a,b]) \to C(F,[a,b])$ et $C_b(X) \to C_b(F)$ sont surjectives.*

Proof. Il suffit de montrer la surjectivité de

$$C_b(X) \to C_b(F), f \to f|_F.$$

En effet, si cette flèche est surjective et si $f \in C(F,[a,b])$ est $g|_F$ pour un $g \in C_b(X)$, alors f est aussi la restriction à F de $\min(b,\max(g,a)) \in C(X,[a,b])$. On va montrer la surjectivité de $C_b(X) \to C_b(F)$ en utilisant la méthode des approximations succéssives.

Montrons d'abord que tout $f \in C_b(F)$ s'écrit $f=g|_F+f_1$, avec $g \in C_b(X)$, $f_1 \in C_b(F)$, $||g||_\infty \leq \frac{1}{3}||f||_\infty$ et $||f_1||_\infty \leq \frac{2}{3}||f||_\infty$. On peut supposer que $||f||_\infty=1$ (remplacer f par $f/||f||_\infty$, le cas $f=0$ étant évident). Le lemme d'Urysohn appliqué aux fermés disjoints $\{x|\, f(x) \geq 1/3\}$ et $\{x|\, f(x) \leq -1/3\}$, suivi d'une composition avec l'application $x \to \frac{2x-1}{3}$ (qui transforme $[0,1]$ en $[-1/3,1/3]$) fournit $g \in C_b(X)$ telle que $||g||_\infty \leq 1/3$ et telle que

$$f(x) \geq 1/3 \implies g(x)=1/3,\ f(x) \leq -1/3 \implies g(x)=-1/3.$$

Ainsi $f_1 := f-g|_F$ est de norme $\leq 2/3$, ce qui permet de conclure.

Partant d'un $f \in C_b(F)$ quelconque et en itérant la construction du paragraphe ci-dessus on construit des fonctions $f_n \in C_b(F), g_n \in C_b(X)$ telles que $||f_n||_\infty \leq (2/3)^n||f||_\infty, ||g_n||_\infty \leq \frac{1}{3}(2/3)^n||f||_\infty$ et $f_n=g_n|_F+f_{n+1}$. La série $\sum_n g_n$ converge normalement vers une fonction continue bornée g telle que $g|_F=f$. □

3.2 Application: un théorème de métrisabilité

Une très belle application du lemme d'Urysohn est le théorème de métrisabilité d'Urysohn ci-dessous. Rappelons qu'un espace topologique X possède une base dénombrable s'il existe une suite (U_n) d'ouverts de X telle que tout ouvert de X soit de la forme $\cup_{n\in A}U_n$ avec $A \subset \mathbb{N}$. Rappelons aussi que le cube de Hilbert est $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$, un espace métrique compact.

Théorème 3.2.1. *(théorème de métrisabilité d'Urysohn) Soit X un espace topologique normal, dans lequel tout point est fermé. Si X possède une base dénombrable, alors*

a) Tout fermé F de X est une intersection dénombrable d'ouverts, et il existe $f \in C(X,[0,1])$ telle que $f^{-1}(0) = F$.

b) X est homéomorphe à un sous-espace du cube de Hilbert, et donc métrisable.

Proof. a) Pour tout $x \notin F$, l'axiome de normalité pour $\{x\}$ et F fournit des ouverts disjoints U_x et V_x tels que $x \in U_x, F \subset V_x$. Puisque $X \setminus F$ est aussi à base dénombrable, on peut extraire du recouvrement ouvert $(U_x)_{x\in X\setminus F}$ un sous-recouvrement dénombrable $(U_{x_n})_n$ (lemme 1.1.2). Il s'ensuit que $F = \cap_n V_{x_n}$.

Pour la deuxième assertion, écrivons $F = \cap_n U_n$ avec U_n ouvert dans X, donc $X \setminus F = \cup_n F_n$, avec F_n fermé dans X. Le lemme d'Urysohn fournit $f_n : X \to [0,1]$ continue telle que $f_n|_F = 0$ et $f_n|_{F_n} = 1$. En posant $f = \sum_n 2^{-n} f_n$, on obtient une fonction continue f sur X telle que $f^{-1}(0) = F$.

b) Soit (U_n) une base dénombrable de X et soit $F_n = X \setminus U_n$. Par le point a) on peut écrire $F_n = f_n^{-1}(0)$ pour une fonction continue $f_n : X \to [0,1]$. Cela fournit une application continue

$$g : X \to H,\ g(x) = (f_n(x))_n.$$

Si $x \neq y \in X$, alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des fermés disjoints de X. Comme (U_n) est une base de la topologie, il existe m, n tels que U_m et U_n soient des voisinages disjoints de x et y. Mais alors $x \in U_m = X \setminus f_m^{-1}(0)$ et $y \notin U_m$, donc $f_m(y) \neq f_m(x)$ et $g(x) \neq g(y)$. Pour conclure, il suffit de voir que $g : X \to g(X)$ est ouverte, et il suffit de voir que $g(U_n)$ est ouvert dans $g(X)$. Puisque $U_n = X \setminus f_n^{-1}(0)$, on a

$$g(U_n) = g(X) \cap \{(x_k) \in H |\, x_n > 0\},$$

qui est bien ouvert dans $g(X)$. □

Nous avons vu que pour tout espace métrique compact X l'espace $C(X)$ est séparable, i.e. possède une partie dénombrable dense. Le très joli théorème ci-dessous montre, entre autres, que cela caractérise les espaces métriques compacts parmi les espaces compacts.

Théorème 3.2.2. *Pour un espace compact X les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) X est métrisable

b) X possède une base dénombrable.

c) X est homéomorphe à un sous-espace fermé du cube de Hilbert.

d) $C(X)$ est un espace séparable.

Proof. $a) \implies b)$ par le corollaire 2.1.1.

$b) \implies c)$ découle de la proposition 3.1.1 et du théorème de métrisabilité d'Urysohn ci-dessus.

$c) \implies d)$ X est alors un espace métrique compact et d) découle alors du corollaire 2.5.2.

$d) \implies a)$. Soit (f_n) une suite dense dans $C(X)$. Pour tout n tel que $f_n \neq 0$ notons $g_n = \frac{f_n+||f_n||}{2||f_n||}$, et pour les autres n posons $g_n = 0$. On obtient une application continue

$$F : X \to H = [0,1]^{\mathbb{N}},\ x \mapsto (g_n(x))_n$$

et il suffit de montrer que F est injective, car alors F induit un homéomorphisme de X sur un fermé de H et donc X est métrisable. Si $g_n(x) = g_n(y)$ pour tout n, alors $f_n(x) = f_n(y)$ pour tout n, et donc $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in C(X)$ (par densité et continuité de $f \to f(x)$ et $f \to f(y)$). Mais alors $x = y$ (lemme d'Urysohn!), ce qui permet de conclure. □

Exercice 3.2.1. *Montrer que si X est localement compact et à base dénombrable, alors X est métrisable. Indication: montrer que le compactifié d'Alexandrov de X est aussi à base dénombrable.*

3.3 Application: compactifications de Stone-Cech

Rappelons la définition suivante:

Définition 3.3.1. Une application continue $f : X \to Y$ entre des espaces topologiques est un *plongement* si $f : X \to f(X)$ est un homéomorphisme quand on munit $f(X)$ de la topologie induite par Y. On dit que X *se plonge dans* Y s'il existe un plongement $X \to Y$.

Une question parfaitement naturelle est: quels espaces topologiques se plongent dans un espace compact? Bien entendu, ils doivent être séparés, et nous allons considérer uniquement des espaces séparés par la suite. Soit donc X un espace séparé. On a vu dans le paragraphe ci-dessus que si X se plonge dans un espace *métrique* compact, alors X se plonge aussi dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Nous allons généraliser cela, en utilisant les espaces (compacts par Tychonov) de la forme $[0,1]^A$, avec A un ensemble quelconque.

Soit X un espace séparé et soit $C_X = C(X,[0,1])$. Identifions l'ensemble

$$X_\infty := \mathrm{Fct}(C_X, [0,1])$$

de toutes les fonctions $u : C_X \to [0,1]$ à $\prod_{f\in C_X}[0,1]$ (via $u \mapsto (u(f))_{f\in C_X}$), ce qui munit X_∞ d'une structure d'espace topologique compact (par Tychonov). L'espace compact X_∞ est muni de projections canoniques continues

$$\pi_f : X_\infty \to [0,1], u \mapsto u(f)$$

pour tout $f \in C_X$, ainsi que d'une application naturelle

$$\iota = \iota_X : X \to X_\infty,\ \iota(x)(f) = f(x),\ x \in X, f \in C_X,$$

telle que $\pi_f \circ \iota = f$ pour $f \in C_X$. Cette dernière égalité et la propriété universelle de la topologie produit montrent que ι est continue. Mais il n'est pas clair du tout (et c'est même faux en général) que ι est un plongement. En fait on dispose du très beau résultat suivant:

Théorème 3.3.1. *Pour un espace séparé X les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\iota : X \to X_\infty$ est un plongement

b) X se plonge dans un espace compact

c) pour tout fermé F de X et tout $x \in X \setminus F$ il existe $f \in C(X, [0,1])$ telle que $f(x) = 1$ et $f(F) = \{0\}$.

Proof. $a) \implies b)$ est claire car X_∞ est compact.

$b) \implies c)$ découle du lemme d'Urysohn (qui montre que c) est valable pour tout espace compact, mais si c) est valable pour un espace X, elle l'est clairement aussi pour tout sous-espace de X).

$c) \implies a)$. L'injectivité de ι découle du point c) appliqué à un fermé F réduit à un point. Ainsi $\iota : X \to \iota(X)$ est une bijection continue, et il reste à montrer qu'elle est ouverte. Soit U un ouvert de X et soit $x \in U$. Nous allons montrer qu'il existe un ouvert V de X_∞ tel que $\iota(x) \in V \cap \iota(X) \subset \iota(U)$, ce qui montrera que $\iota(U)$ est ouvert dans $\iota(X)$. Par hypothèse il existe $f \in C_X$ telle que $f(x) = 1$ et $f = 0$ sur U^c. Alors $V = \pi_f^{-1}(]0,1])$ est ouvert dans X_∞. Pour $x' \in X$, on a $\iota(x') \in V$ si et seulement si $f(x') > 0$. Cela est vrai pour $x' = x$ et force $x' \in U$, ce qui montre que $\iota(x) \in V \cap \iota(X) \subset \iota(U)$ et permet de conclure. $\square$

Définition 3.3.2. Un espace topologique séparé X est appelé *espace complètement régulier (ou de Tychonov)* si $\iota : X \to X_\infty$ est un plongement.

Remarque 3.3.2. Le point c) du théorème ci-dessus combiné au lemme d'Urysohn montre que tout espace normal est de Tychonov. Tout espace localement compact (séparé) est de Tychonov, par le théorème d'Alexandrov et le point b) du théorème. C'est un résultat nontrivial que tout groupe topologique séparé est de Tychonov. En fait, quasiment tous les espaces rencontrés en analyse sont de Tychonov.

Soit X un espace de Tychonov. On note βX l'adhérence de $\iota(X)$ dans X_∞. C'est donc un espace compact en tant que fermé du compact X_∞, et $\iota : X \to \beta X$ est un plongement d'image dense de X. On appelle βX la *compactification de Stone-Cech de X*.

Théorème 3.3.3. *Soit X un espace de Tychonov.*

a) L'application $C(\beta X) \to C_b(X), f \mapsto f \circ \iota$ est une isométrie bijective.

b) Si Y est un espace compact, l'application $C(\beta X, Y) \to C(X, Y), f \mapsto f \circ \iota_X$ est bijective.

Proof. a) Le caractère isométrique découle immédiatement de la densité de $\iota_X(X)$ dans βX. Pour la surjectivité, il suffit de montrer que tout $f \in C_X$ provient de $C(\beta X)$, mais cela est clair puisque $\pi_f : \beta X \to [0,1]$ est continue et $\pi_f \circ \iota = f$.

b) L'injectivité provient du fait que $\iota_X(X)$ est dense dans βX. Montrons la surjectivité. Soit $u \in C(X, Y)$. Elle induit une application $u^* : C_Y \to C_X, f \mapsto f \circ u$, et une application continue $u_\infty : X_\infty \to Y_\infty, F \mapsto F \circ u^*$, telle que $u_\infty \circ \iota_X = \iota_Y \circ u_\infty$. Puisque Y est compact, $\iota_Y : Y \to \beta Y$ est un homéomorphisme. Comme $u_\infty \circ \iota_X = \iota_Y \circ u$, on voit que $u_\infty(\beta X) \subset \iota_Y(Y)$, et alors $F = \iota_Y^{-1} \circ u_\infty|_{\beta X}$ est dans $C(\beta X, Y)$ et s'envoie sur u. $\square$

Exercice 3.3.1. *Montrer que toute application continue $X \to Y$ entre des espaces de Tychonov induit une application continue naturelle $\beta X \to \beta Y$.*

Si D est un espace discret, on note $\ell_\infty(D)$ l'espace des fonctions bornées $f : D \to \mathbb{R}$. C'est aussi $C_b(D)$, qui est isométrique à $C(\beta D)$. Par exemple, si $D = \mathbb{N}$ on obtient que $C(\beta\mathbb{N})$ est isométrique à ℓ_∞, l'espace des suites bornées de nombres réels. Cet espace est très gros (non séparable), donc $\beta\mathbb{N}$ est un espace compact non métrisable. En fait $\beta\mathbb{N}$ est un drôle d'espace: toute suite convergente dans cet espace est stationnaire (excellent exercice!).

Corollaire 3.3.1. *Pour tout espace compact K il existe une surjection continue $\beta D \to K$ pour un espace discret D. Pour tout espace métrique compact K il existe une surjection continue $\beta\mathbb{N} \to K$.*

Proof. Dans les deux cas on prend une partie dense D de K ($D = K$ dans a) et D dénombrable dans b)) et on munit D de la topologie discrète. Par le théorème ci-dessus l'inclusion $D \to K$ (qui est continue) se prolonge en une fonction continue $f : \beta D \to K$, qui est forcément surjective car son image est dense (vu que D est dense dans K) et fermée (car tout est compact). $\square$

Remarque 3.3.4. Il découle immédiatement du corollaire que pour tout espace compact K il existe une isométrie linéaire $C(K) \to \ell_\infty(D)$ pour un espace discret D (en fait on peut prendre $D = K$, muni de la topologie discrète) et pour tout espace métrique compact K il existe une isométrie linéaire $C(K) \to \ell_\infty$. En fait ces résultats sont triviaux... Par exemple, si (x_n) est une suite dense dans K (qui existe par la proposition 2.1.1), alors $C(K) \to \ell_\infty, f \mapsto (f(x_n))$ est une isométrie linéaire.

3.4 Le théorème de Riesz, Markov, Kakutani

Ce paragraphe (et le suivant...) est l'un des plus techniques de tout le cours, mais il démontre un théorème absolument fondamental en analyse fonctionnelle: le fameux théorème de Riesz, Markov, et Kakutani. On commence par quelques préliminaires qui nous seront utiles dans la preuve du théorème principal.

On fixe par la suite un espace localement compact (séparé) X. Soit U un ouvert de X et soit $f \in C(X)$. On écrit $f < U$ si $0 \le f \le 1$ et si $\mathrm{supp}(f) \subset U$, en particulier $0 \le f \le 1_U$ (rappelons que $\mathrm{supp}(f)$ est **l'adhérence** de $\{x|\, f(x) \neq 0\}$). Nous allons utiliser de manière intensive la conséquence suivant du lemme d'Urysohn:

Proposition 3.4.1. *Pour tout ouvert U de X contenant un compact K de X il existe $f \in C_c(X)$ telle que $f < U$ et $f = 1$ sur K.*

Proof. Soit V un ouvert relativement compact tel que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$ (voir la proposition 1.1.3). Le lemme d'Urysohn dans le compact $\bar{V}$ fournit une fonction continue $g : \bar{V} \to [0,1]$ nulle sur $\bar{V} \setminus V$ et qui vaut 1 sur K. On pose $f(x) = g(x)$ pour $x \in \bar{V}$ et $f(x) = 0$ sinon. Alors $\mathrm{supp}(f) \subset \bar{V} \subset U$ et $f = 1$ sur K. Il reste à vérifier que f est continue, et il faut voir que $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F de $[0,1]$. Si $0 \notin F$ cela est évident car $f^{-1}(F) = g^{-1}(F)$. Si $0 \in F$, alors $f^{-1}(F) = \overline{V}^c \cup g^{-1}(F) = V^c \cup g^{-1}(F)$ (car g est nulle sur $\bar{V} \setminus V$), qui est bien fermé. $\square$

Rappelons que $C_0(X)$ est l'espace des $f \in C(X)$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de X tel que $\sup_{x \notin K} |f(x)| < \varepsilon$. Si $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ est le compactifié d'Alexandrov de X, alors $C_0(X)$ s'identifie au sous-espace fermé de $C(\hat{X})$ formé des fonctions s'annulant en $\infty \in \hat{X}$.

Corollaire 3.4.1. *$C_c(X)$ est dense dans $C_0(X)$.*

Proof. c) Soit $f \in C_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un compact K tel que $|f| \leq \varepsilon$ en dehors de K. Soit $g : X \to [0,1]$ dans $C_c(X)$ telle que $g = 1$ sur K (un tel g existe par le point a)). Alors $fg \in C_c(X)$ et $||f - fg||_\infty \leq \varepsilon$. □

Corollaire 3.4.2. *Si $f \in C_c(X)$ et si $U_1, ..., U_n$ sont des ouverts de X tels que $\mathrm{supp}(f) \subset U_1 \cup ... \cup U_n$, alors il existe $f_i \in C_c(X)$ telles que $f = f_1 + ... + f_n$ et $\mathrm{supp}(f_i) \subset U_i$. Si de plus $f \geq 0$, on peut choisir $f_i \geq 0$ pour tout i.*

Proof. Il suffit de traiter le cas $n = 2$, dans le cas général une récurrence permet de conclure (écrire f comme somme de deux fonctions, une à support dans $U_1 \cup ... \cup U_{n-1}$ et l'autre à support dans U_n, et utiliser l'hypothèse de récurrence). Soit $K = \mathrm{supp}(f)$. Alors $K \setminus U_i$ sont des compacts disjoints, donc ils sont séparés par des ouverts disjoints V_1, V_2. Soit $K_i = K \setminus V_i$, alors $K = K_1 \cup K_2$ et $K_i \subset U_i$. On choisit $h_i \in C_c(X)$ tels que $1_{K_i} \leq h_i \leq 1_{U_i}$ et $\mathrm{supp}(h_i) \subset U_i$ (possible par le point a)), et on pose $g_1 = h_1, g_2 = h_2 - \min(h_1, h_2)$ et $f_i = f g_i$. Alors $g_i \geq 0$, $g_1 + g_2 = \max(h_1, h_2) = 1$ sur $\mathrm{supp}(f)$, et $\mathrm{supp}(g_i) \subset U_i$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 3.4.1. *Montrer que si K est un compact de X, alors tout $f \in C(K)$ se prolonge à $C_c(X)$.*

Soit $\mathscr{B}(X)$ la σ-algèbre borélienne de X, i.e. la plus petite σ-algèbre sur X contenant les ouverts de X.

Définition 3.4.1. Une *mesure de Radon positive*[3] sur X est une mesure positive μ sur $\mathscr{B}(X)$ telle que

- μ est finie sur chaque compact K de X, i.e. $\mu(K) < \infty$.
- pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ on a $\mu(A) = \inf_{A \subset U} \mu(U)$, l'inf portant sur les ouverts U de X contenant A.
- pour tout ouvert U de X on a $\mu(U) = \sup_{K \subset U} \mu(K)$, le sup portant sur les compacts K de X contenus dans U.

Soit $\mathscr{MR}(X)_+$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur X. Chaque $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ définit une forme linéaire

$$I_\mu : C_c(X) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_X f d\mu.$$

En effet, chaque $f \in C_c(X)$ est à support compact, est bornée et μ est finie sur chaque compact, donc f est μ-intégrable.

Définition 3.4.2. Une forme linéaire $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si $I(f) \geq 0$ pour tout $f \in C_c(X)$ telle que $f \geq 0$ (rappelons que cela signifie $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$).

[3] Il n'existe pas de définition universelle d'une mesure de Radon, chaque auteur impose les conditions qu'il désire...

Bien sûr, I_μ est une forme linéaire positive sur $C_c(X)$ si $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$. On se propose de démontrer que cela fournit toutes les formes linéaires positives sur $C_c(X)$. Ce résultat est l'un des théorèmes profonds de l'analyse fonctionnelle, et la preuve est assez longue et technique.

Théorème 3.4.1. *(Riesz, Markov, Kakutani) Soit X un espace localement compact (séparé). L'application $\mu \mapsto I_\mu$ induit une bijection entre $\mathscr{MR}(X)_+$ et l'ensemble des formes linéaires positives sur $C_c(X)$.*

Proof. **Convention** Pour éviter beaucoup de répétitions, faisons la convention que dans tout ce qui suit (sauf mention explicite du contraire):

- U sera un ouvert arbitraire (qui peut donc varier) de X.
- K sera un compact arbitraire de X.
- E sera une partie arbitraire de X.
- f sera une fonction dans $C_c(X)$ telle que $0 \leq f \leq 1$. Rappelons que l'on écrit $f < U$ si $\text{supp}(f) \subset U$.

Voici le premier point crucial de l'argument, qui fournit l'unicité ainsi que le début de la partie existence (qui est de loin la plus dure). Soit I une forme linéaire positive sur X et soit $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ telle que $I(f) = \int_X f d\mu$ pour $f \in C_c(X)$. Montrons que $\mu(U) = \sup_{f<U} I(f)$ pour un ouvert U, ce qui montrera en particulier l'unicité. Dans un sens, pour tout $f < U$ on a $I(f) = \int_X f d\mu \leq \int_X 1_U d\mu = \mu(U)$. Pour l'autre inégalité, il suffit de voir que $\mu(K) \leq \sup_{f<U} I(f)$ pour tout compact K contenu dans U. Or (proposition 3.4.1) il existe $f < U$ tel que $f = 1$ sur K, donc $\mu(K) \leq \int_X f d\mu = I(f)$.

Avec l'unicité acquise, passons à la preuve de l'existence. Fixons donc une forme linéaire positive I sur $C_c(X)$. Inspirés par l'observation ci-dessus, posons $\mu(U) = \sup_{f<U} I(f)$ pour tout (ouvert) U. Pour montrer que μ se prolonge en une mesure positive sur $\mathscr{B}(X)$ nous allons utiliser le théorème de Carathéodory: il suffit donc de construire une mesure extérieure μ^* telle que tout ouvert U soit μ^*-mesurable, car alors $\mu := \mu^*|_{\mathscr{B}(X)}$ fournit un prolongement de μ. Posons (rappelons que $E \subset X$ est une partie arbitraire)

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset U} \mu(U).$$

Noter que $\mu^*(U) = \mu(U)$, car μ est croissante pour l'inclusion de deux ouverts.

Lemme 3.4.1. *μ^* est une mesure extérieure sur X.*

Proof. Il est évident que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et que μ^* est croissante pour l'inclusion. Montrons que $\mu^*(\cup E_n) \leq \sum \mu^*(E_n)$ pour toute suite (E_n) de parties de X. On peut supposer que $\sum \mu^*(E_n) < \infty$. Supposons d'abord que chaque E_n est ouvert et montrons que $\mu(\cup E_n) \leq \sum \mu(E_n)$. Soit f telle que $f < \cup E_n$. Par compacité de $\text{supp}(f)$ il existe n tel que $f < E_1 \cup ... \cup E_n$, donc par le corollaire 3.4.2 on peut écrire $f = f_1 + ... + f_n$ avec $f_i \in C_c(X)$ et $f_i < E_i$. Donc $I(f) = I(f_1) + ... + I(f_n) \leq \mu(E_1) + ... + \mu(E_n) \leq \sum_k \mu(E_k)$, ce qui permet de conclure en passant au sup sur f. Dans le cas général où E_j ne sont pas forcément ouverts, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des ouverts U_n contenant E_n tels que $\mu^*(E_n) > \mu(U_n) - \varepsilon/2^n$, et alors $\mu^*(\cup E_n) \leq \mu^*(\cup U_n) \leq \sum \mu^*(U_n) = \sum \mu(U_n) \leq \sum \mu^*(E_n) + \varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 3.4.2. *Tout ouvert U est μ^*-mesurable.*

Proof. Il suffit de voir que $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c)$ pour tout E tel que $\mu^*(E) < \infty$. On peut supposer que E est ouvert (immédiat), et il faut montrer que $\mu(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c) \leq \mu(E)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $f < E \cap U$ tel que $\mu(E \cap U) < I(f) + \varepsilon$. Soit aussi g tel que $g < E \cap (\mathrm{supp}(f))^c$ et $\mu(E \cap (\mathrm{supp}(f))^c) < I(g) + \varepsilon$. Alors $f + g < E$, puisque $\mathrm{supp}(f)$ et $\mathrm{supp}(g)$ sont disjoints, donc $\mathrm{supp}(f+g) \subset \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g) \subset E$. Comme $E \cap U^c \subset E \cap \mathrm{supp}(f)^c$, on a

$$\mu(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c) \leq I(f) + \varepsilon + I(g) + \varepsilon = I(f+g) + 2\varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

On peut donc conclure que l'on dispose d'une mesure positive μ sur $\mathscr{B}(X)$ telle que $\mu(U) = \sup_{f<U} I(f)$ et $\mu(E) = \inf_{E \subset U} \mu(U)$ pour $E \in \mathscr{B}(X)$ (par construction). Nous allons montrer que $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ et que $I = I_\mu$. On commence par un résultat préliminaire:

Lemme 3.4.3. *a) On a $I(f) \geq \mu(K)$ si $f \geq 1_K$, en particulier μ est finie sur les compacts.*

b) Pour tout (ouvert) U on a $\mu(U) = \sup_{K \subset U} \mu(K)$. Ainsi $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$.

Proof. a) Soit $\varepsilon > 0$. Alors $U = \{x \in X |\, f(x) > 1 - \varepsilon\}$ est un ouvert contenant K et si $g \in C_c(X)$ vérifie $g < U$, on a $\frac{1}{1-\varepsilon} f - g \geq 0$, donc $\mu(K) \leq \mu(U) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} I(f)$. On conclut en faisant $\varepsilon \to 0$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $f < U$ tel que $\mu(U) < I(f) + \varepsilon$. Soit $K = \mathrm{supp}(f)$ et montrons que $\mu(K) \geq I(f)$, ce qui permettra de conclure. Comme $\mu(K) = \inf_{K \subset V} \mu(V)$ (avec V ouvert), il suffit de montrer que $\mu(V) \geq I(f)$ pour $K \subset V$. Mais il existe (prop. 3.4.1) $g \in C_c(X)$ tel que $1_K \leq g$ et $g < V$, et alors $g - f \geq 0$ et $\mu(V) \geq I(g) \geq I(f)$. □

Nous allons finir la preuve en montrant que $I = I_\mu$. Par linéarité, il suffit de voir que $I(f) = \int_X f d\mu$ pour $f \in C_c(X, [0,1])$. Fixons $N \geq 1$ et posons $K_0 = \mathrm{supp}(f)$, $K_i = \{x \in X |\, f(x) \geq i/N\}$ pour $1 \leq i \leq N$. Si l'on définit

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, \mathrm{si}\, x \notin K_{i-1}, \\ N f(x) - (i-1) \,\mathrm{si}\, x \in K_{i-1} \setminus K_i, \\ 1, \mathrm{si}\, x \in K_i. \end{cases},$$

alors $f_1, ..., f_N \in C_c(X)$ vérifient $1_{K_j} \leq f_j \leq 1_{K_{j-1}}$ et $f = \frac{f_1 + ... + f_N}{N}$.

Puisque $1_{K_j} \leq f_j \leq 1_{K_{j-1}}$, on a

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) \leq \int_X f d\mu = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \int_X f_j d\mu \leq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(K_j).$$

D'autre part, comme $f_j \geq 1_{K_j}$ on a $I(f_j) \geq \mu(K_j)$. Enfin, si U est un ouvert contenant K_{j-1}, alors $f_j < U$ et donc $I(f_j) \leq \mu(U)$. Puisque μ est de Radon, en passant à l'inf sur U, on obtient $I(f_j) \leq \mu(K_{j-1})$ et donc

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) \leq I(f) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} I(f_j) \leq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mu(K_j).$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient

$$|\int_X f d\mu - I(f)| \leq \frac{\mu(K_0) - \mu(K_N)}{N} \leq \frac{\mu(\mathrm{supp}(f))}{N}$$

et on conclut en faisant $N \to \infty$ (noter que $\mu(\mathrm{supp}(f)) < \infty$). Ouf!!!

□

Exercice 3.4.2. *Soit I une forme linéaire positive sur $C_c(X)$. Montrer (sans utiliser le théorème de Riesz-Markov-Kakutani) que pour tout compact K de X il existe $c > 0$ tel que $|I(f)| \leq c||f||_\infty$ pour tout $f \in C(X)$ à support dans K.*

On a vu des exos plus amusants que le suivant... Je conseille cependant la lecture du point c), qui est important et pas trivial.

Exercice 3.4.3. *Soit X un espace localement compact (séparé). On dit qu'une mesure positive μ sur $(X, \mathscr{B}(X))$ est intérieurement régulière (ou IR) si $\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$, le sup portant sur les compacts K de X contenus dans A, et on dit que μ est extérieurement régulière (ou ER) si $\mu(A) = \inf_{A \subset U} \mu(U)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$, l'inf portant sur les ouverts U contenant A. On dit que μ est régulière si μ est IR et ER. Noter que tout $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ est ER.*

a) Montrer que si $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ est σ-finie, alors μ est régulière.

b) Montrer que si X est σ-compact, tout $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ est régulière et pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ il existe $F \subset A \subset U$ avec F fermé de X, U ouvert de X et $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

c) Montrer que si tout ouvert de X est σ-compact, alors toute mesure positive sur $(X, \mathscr{B}(X))$ finie sur les compacts de X est régulière (utiliser le théorème de Riesz-Markov-Kakutani). Montrer que cette hypothèse est satisfaite si X possède une base dénombrable d'ouverts.

d) Soit $\mu \in \mathscr{MR}(X)_+$ et soit $\sigma(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K)$ pour $A \in \mathscr{B}(X)$, le sup portant sur les compacts K de X contenus dans A. Montrer que σ est finie sur les compacts de K, IR, que σ et μ prennent les mêmes valeurs sur tout compact et tout ouvert de X, que $\sigma(A) \leq \mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ et enfin que $\int_X f d\mu = \int_X f d\sigma$ pour tout $f \in C_c(X)$. De plus, si X est σ-compact alors $\mu = \sigma$.

Remarque 3.4.2. Dieudonné a construit un exemple d'espace compact qui possède une mesure de Borel finie et qui n'est pas IR.

3.5 Application: l'existence de la mesure de Haar

Un *groupe topologique* est un espace topologique G muni d'une structure de groupe telle que l'application $G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ soit continue. Si de plus en tant qu'espace topologique G est localement compact (séparé), on dit que G est un *groupe localement compact*.

Soit G un groupe localement compact. Une *mesure de Haar à gauche* sur G est une mesure de Radon positive non nulle μ sur G telle que $\mu(gA) = \mu(A)$ pour $g \in G$ et $A \in \mathscr{B}(G)$. Le résultat suivant est absolument fondamental[4], et pas du tout trivial. Pour $G = \mathbb{R}^d$ on retrouve (à scalaire près) la mesure de Lebesgue. Pour un groupe discret une mesure de Haar est donnée par la mesure de comptage.

[4]Le nombre de théorèmes importants en théorie des nombres, en théorie des représentations ou en analyse harmonique qui seraient inexistants sans ce théorème est assez impréssionant...

Théorème 3.5.1. *(Haar, Weil) Tout groupe localement compact possède une mesure de Haar.*

Proof. Par le théorème de Riesz-Markov-Kakutani, il suffit de fabriquer une forme linéaire positive $\mathscr{L}$ sur $C_c(G)$, invariante par translation à gauche, i.e. telle que $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(L_x(f))$ pour tout $f \in C_c(G)$, où l'on note $L_x f(y) = f(x^{-1}y)$. Nous allons construire une application additive I sur

$$C_c^+ := \{f \in C_c(G) | \, ||f||_\infty > 0\}$$

telle que $I(af) = aI(f)$ pour $a > 0$ et $I(f) \geq 0$ pour $f \in C_c^+$. En posant $I(0) = 0$ et $\mathscr{L}(f) = I(f^+) - I(f^-)$ pour $f \in C_c(G)$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ (donc $f = f^+ - f^-$ et $f^\pm \in C_c^+ \cup \{0\}$), on obtiendra le résultat.

Passons à la construction de I. L'observation cruciale est la suivante. Supposons que I existe et fixons $f, F \in C_c^+$. Soit $S(f, F)$ l'ensemble des suites (a_n) de support fini (i.e. $a_n = 0$ pour tout n sauf un nombre fini), telles que $a_n \geq 0$ pour tout n et telles qu'il existe une suite (x_n) dans G satisfaisant $f \leq \sum_n a_n L_{x_n}(F)$. Si $(a_n) \in S(f, F)$ alors $I(f) \leq \sum_n a_n I(L_{x_n}(F)) = (\sum a_n) I(F)$. Donc si l'on pose

$$(f : F) = \inf_{(a_n) \in S(f,F)} \sum a_n,$$

alors $(f : F) \geq I(f)/I(F)$ et donc $(f : F)$ semble jouer un rôle particulier. Montrons d'abord qu'il a un sens et qu'il se comporte bien:

Lemme 3.5.1. *Pour tous $f, F \in C_c^+$ l'ensemble $S(f, F)$ est non vide et on a*

a) $(f : F) \geq \frac{||f||_\infty}{||F||_\infty}$.

b) $(f : F) = (L_x f : F)$ pour $x \in G$

c) $(f + g : F) \leq (f : F) + (g : F)$ pour $f, g, F \in C_c^+$ et $(af : F) = a(f : F)$ pour $a > 0$.

d) $(f : F) \leq (f : G)(G : F)$ pour tous $f, F, G \in C_c^+$

Proof. Pour montrer que $S(f, F) \neq \emptyset$ il suffit de trouver $x_1, ..., x_n$ tels que $\sum_{i=1}^n F(x_i^{-1}x) > \frac{||F||_\infty}{2}$ pour $x \in \text{supp}(f)$, car alors on peut poser $a_i = \frac{2||f||_\infty}{||F||_\infty}$ pour $1 \leq i \leq n$ (et $a_i = 0$ pour $i > n$). Cela revient à $\text{supp}(f) \subset \cup_{i=1}^n x_i U$, avec $U = \{x \in G | \, F(x) > \frac{||F||_\infty}{2}\}$. Mais U est un ouvert non vide et $\text{supp}(f)$ est compact, donc l'existence des x_i est claire.

a) Si $f \leq \sum a_n L_{x_n}(F)$ alors $f(x) \leq (\sum a_n)||F||_\infty$ pour tout x, donc $(f : F) \geq \frac{||f||_\infty}{||F||_\infty}$.

b) si $f \leq \sum a_n L_{x_n}(F)$ alors $f(x) \leq (\sum a_n)||F||_\infty$ pour tout x.

c) C'est évident.

d) Il suffit de remarquer que si $f \leq \sum a_i L_{x_i}(G)$ et $G \leq \sum b_j L_{y_j}(F)$, alors $f \leq \sum a_i b_j L_{x_i y_j}(F)$ et $\sum a_i b_j = (\sum a_i)(\sum b_j)$. □

Fixons une fois pour toutes $f_0 \in C_c^+$ et posons

$$I_F(f) = \frac{(f : F)}{(f_0 : F)}.$$

Le lemme montre que I_F est sous-additive, $I_F(L_x(f)) = I_F(f)$ et $I_F(af) = aI_F(f)$ pour $a > 0$. De plus, on a

$$1/(f_0 : f) \leq I_F(f) \leq (f : f_0), \quad \forall f \in C_c^+.$$

Pour construire I on va prendre une sorte de limite des I_F quand le support de F tend vers 1, en utilisant un argument de compacité. Chaque I_F induit un élément

$$(I_F(f))_{f\in C_c^+} \in X := \prod_{f\in C_c^+} [1/(f_0 : f), (f : f_0)],$$

de l'espace compact (Tychonov!) X. Pour tout voisinage U de 1 soit K_U l'adhérence dans X de $\{(I_F(f))_{f\in C_c^+} | \operatorname{supp}(F) \subset U\}$. Si $U_1, ..., U_n$ sont des voisinages de 1, alors $K_{U_1} \cap ... \cap K_{U_n}$ est non vide car cette intersection contient $K_{U_1\cap...\cap U_n}$. Par compacité on obtient

$$\cap_U K_U \neq \emptyset.$$

Prenons alors $I \in \cap_U K_U$ et montrons qu'il convient. Par construction, pour tous $f_1, ..., f_n \in C_c^+$, $\varepsilon > 0$ et tout voisinage U de 1 il existe $F \in C_c^+$ à support dans U avec $\max_{1\le i\le n} |I(f_i) - I_F(f_i)| < \varepsilon$. En particulier on peut approcher $I(af), I(f_1), I(f_2), I(f_1+f_2), I(L_x(f))$ par $I_F(af), I_F(f_1), I_F(f_2), I_F(f_1+f_2), I_F(L_x(f))$ aussi bien que l'on veut, avec F à support aussi petit que l'on veut. En utilisant le lemme, on en déduit immédiatement que I est sous-additive, $I(af) = aI(f)$ pour $a > 0$ et $I(L_x(f)) = I(f)$. Par contre il n'est pas du tout évident que I est additive. C'est le point le plus délicat de la preuve et il découle du lemme crucial suivant:

Lemme 3.5.2. *Pour tous $f_1, f_2 \in C_c^+$ et $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de $1 \in G$ tel que*

$$\forall F \in C_c^+, \operatorname{supp}(F) \subset U \implies I_F(f_1) + I_F(f_2) \le I_F(f_1 + f_2) + \varepsilon.$$

Proof. L'argument est assez délicat. Soit $\delta > 0$ et soit $k \in C_c^+$ égale à 1 sur $\operatorname{supp}(f_1 + f_2)$. On pose $h = f_1 + f_2 + k\delta$ (on a besoin de k pour nous assurer que $h > 0$ sur $\operatorname{supp}(f_i)$). Les fonctions $h_i = f_i/h$ sont continues, à support compact, et l'exercice ci-dessous montre qu'elles sont uniformément continues. Il existe donc un voisinage U de 1 tel que $|h_i(x) - h_i(y)| < \delta$ si $y^{-1}x \in U$. Soit $F \in C_c^+$ à support dans U et supposons que $h \le \sum a_n L_{x_n}(F)$ pour certains $x_n \in G$ et une suite à support fini (a_n), avec $a_n \ge 0$. Alors pour $x \in \operatorname{supp}(f_1)$ on a

$$f_1(x) \le \sum a_n h_1(x) F(x_n^{-1}x) \le \sum a_n(h_1(x_n) + \delta) L_{x_n}(F)(x).$$

Ainsi $I_F(f_1) \le \sum a_n(h_1(x_n) + \delta)$ et un argument identique avec f_2 fournit

$$I_F(f_1) + I_F(f_2) \le \sum a_n(h_1(x_n) + h_2(x_n) + 2\delta) \le (1 + 2\delta) \sum a_n.$$

En prenant l'inf sur les (a_n) on obtient

$$I_F(f_1) + I_F(f_2) \le (1 + 2\delta) I_F(f_1 + f_2 + k\delta) \le (1 + 2\delta)(I_F(f_1 + f_2) + \delta I_F(k)).$$

En prenant δ assez petit, on peut rendre le terme à droite plus petit que $I_F(f_1 + f_2) + \varepsilon$ (noter cependant que l'on ne peut pas faire $\delta \to 0$ ci-dessus et obtenir $I_F(f_1) + I_F(f_2) \le I_F(f_1 + f_2)$, puisque U dépend de δ). □

Ainsi I a toutes les propriétés désirées et la preuve est finie. Ouf!!! □

Exercice 3.5.1. *Soit G un groupe topologique.*

a) Montrer que si U est un voisinage de 1, alors il existe un voisinage V de 1 tel que $V = V^{-1} := \{v^{-1} | v \in V\}$ et $V \cdot V := \{vv' | v, v' \in V\} \subset U$.

b) Soit $f \in C_c(G)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de 1 tel que pour tout $y \in U$ on ait $\sup_{x\in G} |f(xy) - f(x)| < \varepsilon$.

Exercice 3.5.2. *Soit G un groupe localement compact et soit μ une mesure de Haar à gauche sur G.*

a) Montrer que $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(yx)d\mu(x)$ pour $y \in G$ et $f \in C_c(G)$.

b) Montrer que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U de G, et que $\int_G f(x)dx > 0$ pour tout $f \in C_c(G)$ telle que $f \geq 0$ et $||f||_\infty > 0$.

c) Montrer que G est compact si et seulement si $\mu(G) < \infty$.

Exercice 3.5.3. *(unicité, ou presque, de la mesure de Haar) Soit G un groupe localement compact et soient μ, σ des mesures de Haar à gauche sur G. On suppose aussi*[5] *que μ est invariante à droite (i.e. $\mu(Ag) = \mu(A)$ pour $g \in G$ et $A \in \mathscr{B}(G)$).*

a) Montrer que si $f, h \in C_c(G)$ alors

$$\int_G h d\sigma \int_G f d\mu = \int_{G\times G} h(x^{-1}y)f(y)d\sigma(y)d\mu(x).$$

b) Montrer que pour tous $f, h \in C_c(G)$

$$\int_G h d\mu \cdot \int_G f d\sigma = \int_{G\times G} h(y^{-1}x)f(y)d\mu(x)d\sigma(y).$$

c) Montrer qu'il existe $h \in C_c(G)$ non nulle, positive, et telle que $h(x) = h(x^{-1})$. Conclure qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\sigma(A) = c\mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(G)$

[5] Cela n'est pas nécéssaire, mais la preuve devient nettement plus pénible et assez opaque, et nous aurons uniquement besoin du cas où G est abélien, dans quelle cas cette hypothèse est automatiquement satisfaite.

Chapter 4

Normes, semi-normes, espaces de Banach

Dans ce chapitre nous introduisons les briques de base de l'analyse fonctionnelle: les espaces vectoriels normés, les espaces de Banach et plus généralement les espaces vectoriels topologiques dont la topologie est définie par une famille de semi-normes. Ce degré de généralité peut paraître un peu arbitraire, mais beaucoup d'espaces de fonctions très importants refusent d'être traités d'espaces de Banach...

La lettre $\mathbb{K}$ est réservée à un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires. Espace vectoriel veut dire $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sauf mention explicite du contraire.

4.1 Semi-normes et normes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.1.1. Une *semi-norme* sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ et } p(ax) = |a|p(x), \ \forall a \in \mathbb{K}, x, y \in E.$$

Si de plus $p(x) = 0 \implies x = 0$, on dit que p est une *norme* sur E et que (E, p) est un *espace vectoriel normé* (evn pour faire court).

Si p est une semi-norme, on a clairement $p(0) = 0$ et $p(x) = p(-x)$, donc $2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(0) = 0$ pour tout $x \in E$.

Si p est une semi-norme sur E et si F est un sous-espace de E, la restriction de p à F est une semi-norme sur F. De plus, p induit une semi-norme sur E/F en posant

$$p(x+F) = \inf_{y \in F} p(x+y).$$

Cela permet d'associer canoniquement à un espace semi-normé (E, p) un evn:

Proposition 4.1.1. *Si p est une semi-norme sur E, alors $\ker(p) := \{x \in E | \, p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et $E/\ker(p)$ devient un evn pour la semi-norme induite, et on a $p(x + \ker(p)) = p(x)$ pour $x \in E$.*

Proof. Il est trivial de voir que $\ker(p)$ est un sous-espace vectoriel de E (utiliser que $p(x) \geq 0$ pour tout x). Pour conclure, il suffit de voir que $p(x+\ker(p)) = p(x)$ pour $x \in E$. Clairement $p(x + \ker(p)) \leq p(x)$, et il reste à voir que $p(x + y) \geq p(x)$ si $p(y) = 0$. Or $p(x + y) + p(-y) \geq p(x)$ et $p(-y) = 0$. $\square$

On utilise souvent la notation $||\cdot||$ pour une norme ou une semi-norme. Nous le ferons aussi, sauf quand il s'agit de démontrer des propriétés purement formelles de ces objets, dans quel cas la notation p est plus facile à manipuler.

Exemple 4.1.1.

1. Si $f : E \to F$ est une application linéaire et si p est une semi-norme sur F, alors $p \circ f$ est une semi-norme sur E. En particulier, si E est un espace vectoriel, alors toute forme linéaire ℓ sur E définit une semi-norme p_ℓ sur E par $p_\ell(x) = |\ell(x)|$.

2. Si E est un espace vectoriel, alors tout $x \in E$ définit une semi-norme p_x sur le dual E^* de E, via $p_x(\ell) = |\ell(x)|$.

   Les familles de semi-normes construites dans les deux exemples ci-dessus joueront un rôle important par la suite.

3. Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré. Soit $M(X)$ l'espace des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{K}$. Pour $p \in]0, \infty[$ on pose

   $$\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(\mu) = \mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu) = \{f \in M(X) | \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

   l'espace des fonctions p-intégrables sur X. C'est un des espaces les plus importants de l'analyse (fonctionnelle en particulier...) et il va bien nous occuper dans les prochains cours. Pour $f \in \mathscr{L}^p$ on pose

   $$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

   Pour $p = \infty$ on définit

   $$\mathscr{L}^\infty = \mathscr{L}^\infty(X, \mu) = \{f \in M(X) | \exists C \in [0, \infty[, |f| \leq C \text{ presque partout}\}$$

   et, pour $f \in \mathscr{L}^\infty$

   $$||f||_\infty = \inf\{C \in [0, \infty[\,|\, |f| \leq C \text{ presque partout}\}.$$

   On vérifie facilement que $||f||_\infty$ est le plus petit nombre dans $[0, \infty[$ tel que $|f| \leq ||f||_\infty$ presque partout.

   C'est un fait nontrivial (théorème de Minkowski) mais bien connu[1] que $f \mapsto ||\cdot||_p$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^p$ **si** $p \in [1, \infty]$. Pour $p \in]0, 1[$ on a $||f + g||_p \geq ||f||_p + ||g||_p$ si $f, g \in \mathscr{L}^p$ prennent des valeurs positives, donc il n'y a aucun espoir d'obtenir une semi-norme...

   Le sous-espace $\mathscr{N}$ des fonctions mesurables nulles presque partout est le noyau de la semi-norme $f \mapsto ||f||_p$. On note

   $$L^p := \mathscr{L}^p / \mathscr{N}$$

   l'espace quotient. On écrira toujours f pour la classe de $f \in \mathscr{L}^p$ dans L^p. La semi-norme $f \mapsto ||f||_p$ induit une norme encore notée $f \mapsto ||f||_p$ sur L^p.

[1] Voir le cours d'intégration, on le reverra un peu plus tard.

4. Soit X un espace topologique. Chaque compact K de X induit une semi-norme $p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|$ sur $C(X)$, qui n'est pas forcément une norme (c'est le cas si $K = X$).

5. Pour tout $k \geq 0$ l'application $f \mapsto p_k(f) = \sum_{j=0}^{k} ||f^{(j)}||_\infty$ est une norme sur $C^\infty([0,1])$.

6. Soit $d \geq 1$. Pour $m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}^d$ et $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ on pose $x^m = x_1^{m_1}...x_d^{m_d}$, ainsi que
$$D^m f = \frac{\partial^{m_1+...+m_d}}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_d^{m_d}} f$$
pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. *L'espace de Schwartz* $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P(x)D^m f(x)| < \infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}^d$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_d]$. On dispose de semi-normes $f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P(x)D^m f(x)|$ sur $\mathscr{S}$, en particulier pour chaque $k \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}^d$ on a une semi-norme
$$||f||_{k,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^k |D^m f(x)|, \ |x|^2 = x_1^2 + ... + x_d^2$$

4.2 Résultats basiques sur les evn

Soit p une semi-norme sur un espace vectoriel E. Pour $x \in E$ et $r > 0$ on note
$$B_p(x, r) := \{y \in E |\, p(y - x) < r\}$$
la boule ouverte de centre x et de rayon r. La sous-additivité de p montre (comme pour les espaces métriques) que l'intersection d'un nombre fini de telles boules est vide ou une réunion de boules ouvertes, donc il existe une unique topologie sur E appelée *topologie définie par* p dont les ouverts sont des réunions arbitraires de boules ouvertes $B_p(x, r)$. Une base de voisinages ouverts de $x \in E$ est donnée par les $B_p(x, r)$ avec $r > 0$.

Si p est une norme sur E, la topologie définie par p est métrisable, une distance définissant cette topologie étant $d(x, y) = p(x - y)$. Noter que cette distance est invariante par translation, i.e. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ pour $x, y, z \in E$. Ainsi la topologie de E est contrôlée par ce qui se passe au voisinage de 0. De plus, on vérifie facilement que les applications $E \times E \to E, (x, y) \mapsto x + y$ et $\mathbb{K} \times E \to E, (a, x) \mapsto ax$ sont continues si l'on munit E de la topologie définie par p (et $E \times E, \mathbb{K} \times E$ de la topologie produit). Une suite (x_n) converge dans E vers x si et seulement si $p(x_n - x)$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. Enfin, si F est un sous-espace fermé de E, alors la semi-norme induite sur E/F est une norme, donc E/F est un evn. En effet, si $||x + F|| = 0$ alors il existe $f_n \in F$ tels que $||f_n + x|| \to 0$, donc $(-f_n)$ est une suite dans F qui converge vers x, et comme F est fermé, on ca forcément $x \in F$.

Proposition 4.2.1. *a) Une application linéaire* $f : (E, ||\cdot||) \to (F, ||\cdot||')$ *entre des evn est continue si et seulement si il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $||f(x)||' \leq c||x||$ *pour tout* $x \in E$*, si et seulement si elle est continue en* 0.

b) Deux normes $||\cdot||, ||\cdot||'$ *sur* E *définissent la même topologie si et seulement si elles sont équivalentes, i.e. il existe* $c, c' > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$ *on ait* $c'||x|| \leq ||x||' \leq c||x||$.

Proof. a) La seule chose à montrer est que la continuité de f en 0 force l'existence d'un $c > 0$ tel que $||f(x)||' \leq c||x||$ pour tout x (car si un tel c existe, il est clair que f est c-Lipschitzienne et donc continue). Sinon, pour tout $n \geq 1$ il existe $x_n \in E$ tel que $||f(x_n)||' > n||x_n||$. En posant $y_n = \frac{x_n}{n||x_n||}$ on a $y_n \to 0$ et donc $f(y_n) \to 0$, ce qui contredit l'inégalité $||f(y_n)||' > 1$.

b) C'est une conséquence directe du point a) appliqué à l'identité, vue comme application linéaire de $(E, ||\cdot||)$ dans $(E, ||\cdot||')$ ou de $(E, ||\cdot||')$ dans $(E, ||\cdot||)$. □

Soient E, F des evn. On note $L(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues $f : E \to F$. Si $F = \mathbb{K}$, on note

$$E' = L(E, \mathbb{K})$$

et on l'appelle **dual topologique (ou continu) de** E. Le passage de E à E' est une des constructions les plus étudiées en analyse fonctionnelle.

D'après la proposition 4.2.1, pour tout $f \in L(E,F)$ on a

$$||f|| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{||f(x)||}{||x||} < \infty.$$

On voit facilement que $f \mapsto ||f||$ est une norme sur $L(E,F)$, que l'on appelle *norme subordonnée aux normes de* E *et de* F. Il est évident que

$$||f|| = \sup_{||x||=1} ||f(x)|| = \inf\{c \in [0, \infty[\ ||f(x)|| \leq c||x|| \ \forall x \in E\}.$$

Il découle de la dernière formule (ou directement de la définition) que

$$||g \circ f|| \leq ||g|| \cdot ||f||$$

pour $f \in L(E,F), g \in L(F,G)$, si E, F, G sont des evn. En particulier, si E est un evn alors

$$L(E) := L(E,E)$$

est une $\mathbb{K}$-algèbre telle que $||g \circ f|| \leq ||f|| \cdot ||g||$ pour $f, g \in L(E)$.

Ce qui précède est très formel. Il n'en est pas de même du résultat suivant.

Théorème 4.2.1. *(équivalence des normes en dimension finie) Toutes les normes sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

Proof. Fixons une fois pour toutes une base $e_1, ..., e_n$ de notre espace vectoriel E et considérons l'application

$$||\cdot||_\infty : E \to [0, \infty), ||x_1 e_1 + ... + x_n e_n||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

C'est une norme sur E et nous allons montrer que n'importe quelle autre norme $||\cdot||$ est équivalente à $||\cdot||_\infty$, ce qui permettra de conclure.

Dans une première étape on observe que si l'on note $c = \max ||e_i||$, alors pour tout $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$ on a

$$||x|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot ||e_i|| \leq c||x||_\infty.$$

Donc l'application $||\cdot|| : (E, ||\cdot||_\infty) \to [0,\infty)$ est continue, car c-Lipschitzienne.

Soit $S = \{x \in E| \, ||x||_\infty = 1\}$. Montrons que S est compact. Soit $(x^k = x_1^k e_1 + ... + x_n^k e_n)$ une suite dans S, donc $\max_{1\le i\le n} |x_i^k| = 1$ pour tout k. La suite $(z^k := (x_1^k, ..., x_n^k))$ vit dans le compact $\mathbb{K}^{\le 1} \times ... \times \mathbb{K}^{\le 1}$, avec $\mathbb{K}^{\le 1} = \{x \in \mathbb{K}| \, |x| \le 1\}$. Elle possède donc une sous-suite convergente (z^{k_j}) vers un $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{K}^{\le 1} \times ... \times \mathbb{K}^{\le 1}$. Puisque $\max_{1\le i\le n} |x_i^{k_j}| = 1$ pour tout j, on a aussi $\max(|z_1|, ..., |z_n|) = 1$ et donc $z := z_1 e_1 + ... + z_n e_n \in S$. De plus $x^{k_j} \to z$ par continuité de $||\cdot|| : (E, ||\cdot||_\infty) \to [0,\infty)$. Par le théorème de Borel-Lebesgue, S est compact.

Enfin, puisque $||\cdot|| : S \to [0,\infty)$ est continue sur le compact S et elle ne s'annule pas sur S, on a

$$a := \inf_{x\in S} ||x|| \in]0,\infty[, \ b := \sup_{x\in S} ||x|| \in]0,\infty[.$$

Comme $\frac{1}{||x||_\infty} x \in S$ pour $x \in E \setminus \{0\}$, on voit que

$$a||x||_\infty \le ||x|| \le b||x||_\infty$$

pour tout $x \ne 0$, et comme c'est aussi vrai pour $x = 0$, cela permet de conclure. □

Le résultat suivant est une conséquence formelle de l'équivalence des normes en dimension finie, et il est assez puissant.

Théorème 4.2.2. *Soit F un evn et soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors E est complet et il est fermé dans F.*

Proof. Si E est complet, alors E est fermé dans F: si (x_n) est une suite de E qui converge vers $x \in F$, alors (x_n) est une suite de Cauchy dans E, donc converge dans E (car E est complet), et par unicité de la limite on doit avoir $x \in E$.

Montrons que E est complet. Soit $e_1, ..., e_n$ une base de E. Comme toutes les normes sur E sont équivalentes, on peut supposer que $||\cdot|| = ||\cdot||_\infty$, avec $||x_1 e_1 + ... + x_n e_n||_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$. Si (x_k) est une suite de Cauchy dans E, et si l'on écrit $x_k = x_k^1 e_1 + ... + x_k^n e_n$, alors (x_k^i) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ pour tout i (car $|x_k^i - x_l^i| \le ||x_k - x_l||_\infty$), donc converge vers un $x^i \in \mathbb{K}$. En posant $x = x^1 e_1 + ... + x^n e_n$, on a

$$\lim_{k\to\infty} ||x_k - x||_\infty = \lim_{k\to\infty} \max_{1\le i\le n} ||x_k^i - x^i|| = 0,$$

donc (x_k) converge vers x et E est complet. □

Exercice 4.2.1. *Montrer que si E est un evn de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ vers un evn F est continue. Donner un contre-exemple à cette assertion quand E est de dimension infinie.*

Une très jolie application du théorème ci-dessus est le résultat classique suivant. Riesz en a tiré des merveilles, que nous allons voir dans le dernier cours, consacré aux opérateurs compacts.

Proposition 4.2.2. *(lemme de Riesz) Soit E un evn et soit F un sous-espace fermé de E et différent de E. Il existe une suite de vecteurs (v_n) de norme 1 tels que $d(v_n, F) \to 1$. Si F est de dimension finie, il existe v de norme 1 tel que $d(v, F) = 1$.*

Proof. Nous avons vu que E/F est un evn non nul pour la (semi-) norme quotient. On choisit un vecteur $z + F$ de norme 1, donc $\inf_{f\in F} ||z + f|| = 1$, i.e. $d(z, F) = 1$. Il existe donc $f_n \in F$ tels que $||z + f_n|| \to 1$. En posant $v_n = \frac{z+f_n}{||z+f_n||}$, on a $||v_n|| = 1$ et $d(v_n, F) = \frac{1}{||z+f_n||} d(z, F)$ tend vers 1. Ensuite, si F est de dimension finie, les (f_n) forment une suite bornée dans F, donc elle possède une sous-suite convergente (f_{n_k}) vers un $f \in F$, et on a forcément $||z + f|| = 1$ et $d(z + f, F) = d(z, F) = 1$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 4.2.1. *Si E est un evn de dimension infinie, il existe une suite $(v_n)_n$ de vecteurs de norme 1 tels que $||v_n - v_m|| \geq 1$ pour tous $m \neq n$. En particulier $B_E = \{x \in E| \ ||x|| \leq 1\}$ n'est pas compacte.*

Proof. On choisit v_1 de norme 1. Supposons avoir construit $v_1, ..., v_{n-1}$ tels que $||v_i - v_j|| \geq 1$ pour $1 \leq i < j \leq n - 1$. L'espace $F = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_{n-1})$ est fermé dans E (car de dimension finie), et différent de E car $\dim E = \infty$. Par le lemme de Riesz il existe $v_n \in E$ de norme 1 tel que $d(v_n, F) = 1$, et donc $||v_n - v_i|| \geq 1$ pour $1 \leq i < n$. La dernière assertion devient évidente: la suite (v_n) ne possède aucune sous-suite convergente! □

4.3 Espaces de Banach

Introduisons maintenant les objets qui vont bien nous occuper dans ce cours. La théorie des espaces de Banach est d'une richesse incroyable.

Définition 4.3.1. Un *espace de Banach (ou simplement: un Banach)* est un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$, qui est complet pour la distance associée $d(x, y) = ||x-y||$.

Exercice 4.3.1. *Soit E un evn et soit $\hat{E}$ le complété de l'espace métrique E. En utilisant plusieurs fois le théorème de prolongement des applications uniformément continues, montrer que*

a) $\hat{E}$ possède une unique structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel telle que l'application naturelle $E \to \hat{E}$ soit $\mathbb{K}$-linéaire.

b) $\hat{E}$ possède une unique norme pour laquelle l'application $E \to \hat{E}$ est une isométrie. De plus $\hat{E}$ est un espace de Banach. Ainsi tout evn possède une isométrie vers un espace de Banach.

Exemple 4.3.1.

1. Un fermé d'un espace métrique complet est complet, donc un sous-espace vectoriel fermé d'un Banach est un Banach.

2. Soit X un ensemble et soit $\ell^\infty(X)$ l'espace des fonctions bornées $f : X \to \mathbb{K}$, muni de la norme sup $||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Pour $X = \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on note cet espace simplement ℓ^∞. Alors l'espace $\ell^\infty(X)$ muni de la norme sup est un Banach. C'est une conséquence immédiate du fait que $\mathbb{K}$ est un Banach: si (f_n) est une suite de Cauchy dans $\ell^\infty(X)$, alors pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc converge vers un $f(x) \in \mathbb{K}$. Comme $\sup ||f_n||_\infty < \infty$, on a $\sup_x |f(x)| < \infty$ et donc $f \in \ell^\infty(X)$. On vérifie sans problème que $f_n \to f$ dans $\ell^\infty(X)$: soit $\varepsilon > 0$ et k tel que $||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon$ pour $m, n \geq k$, alors en faisant $m \to \infty$ dans $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (avec $x \in X$ arbitraire) on obtient $||f - f_n||_\infty \leq \varepsilon$.

3. Soit maintenant X un espace topologique et soit $C_b(X, \mathbb{K}) \subset \ell^\infty(X)$ le sous-espace des fonctions continues bornées $f : X \to \mathbb{K}$. Alors $C_b(X, \mathbb{K})$ est fermé dans $\ell^\infty(X)$, donc un espace de Banach pour la norme sup (on peut aussi utiliser le résultat général du cours 2, disant que $C_b(X, Y)$ est un espace métrique complet pour tout espace topologique X et tout espace métrique complet Y).

4. Si X est localement compact, l'espace $C_0(X, \mathbb{K})$ des fonctions continues sur X, qui tendent vers 0 à l'infini (i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que $|f| < \varepsilon$ sur $X \setminus K$) est fermé dans $C_b(X, \mathbb{K})$, donc un Banach. Pour $X = \mathbb{N}$ muni de la topologie discrète l'espace $C_0(X, \mathbb{R})$ n'est rien d'autre que l'espace c_0 des suites dans $\mathbb{R}$ qui convergent vers 0.

5. Attention, en général l'espace $C_c(X, \mathbb{K})$ des fonctions continues à support compact sur un espace topologique X n'est pas un espace de Banach pour la norme sup (c'est bien entendu le cas si X est compact).

Le résultat suivant est très important:

Théorème 4.3.1. *Si E est un evn et si F est un Banach, alors $L(E, F)$ muni de la norme subordonnée aux normes sur E et F est un espace de Banach.*

Proof. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $L(E, F)$, alors $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F pour tout $x \in E$, donc il existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La linéarité des f_n force la linéarité de f. Il reste à voir que $f \in L(E, F)$ et que $||f_n - f|| \to 0$. Si l'on pose $c = \sup_n ||f_n||$, alors $||f_n(x)|| \leq c||x||$ pour tout n et tout x, donc $||f(x)|| \leq c||x||$ pour tout x, donc $f \in L(E, F)$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 tel que $||f_m - f_n|| < \varepsilon$ pour $m, n \geq n_0$. Alors pour tout x et tout $n \geq n_0$, en faisant $m \to \infty$ dans $||f_m(x) - f_n(x)|| \leq \varepsilon||x||$ on obtient $||f(x) - f_n(x)|| \leq \varepsilon||x||$ et donc $||f - f_n|| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$, ce qui permet de conclure. □

On utilisera aussi très souvent le résultat suivant, qui est une conséquence formelle du théorème de prolongement pour les applications uniformément continues (cours 1).

Proposition 4.3.1. *Soit D un sous-espace vectoriel dense d'un evn E, et soit F un Banach. L'application de restriction $L(E, F) \to L(D, F)$ est une bijection isométrique.*

Exercice 4.3.2. *Démontrer la proposition ci-dessus.*

Le résultat suivant est assez utile pour démontrer que certains espaces sont des espaces de Banach. Une série $\sum_{n\geq1} x_n$ dans un evn $(E, ||\cdot||)$ est dite *absolument convergente* si $\sum_{n\geq1} ||x_n|| < \infty$.

Théorème 4.3.2. *Un evn $(E, ||\cdot||)$ est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente dans E converge. Si c'est le cas, alors pour tout sous-espace fermé F de E l'espace quotient E/F muni de la norme induite est un Banach.*

Proof. Supposons que E est un Banach. Si $\sum_{n\geq1} x_n$ est absolument convergente, alors la suite $(y_n := x_1 + ... + x_n)$ est de Cauchy dans E puisque $||y_n - y_m|| \leq \sum_{k=n+1}^m ||x_k||$ si $m > n$. Cette suite converge car E est complet.

Dans l'autre sens, supposons que toute série absolument convergente est convergente et soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Il suffit de montrer que (x_n) possède une sous-suite convergente. Mais pour tout k il existe n_k tel que $||x_m - x_n|| \leq 1/k^2$ pour $m, n \geq n_k$, et on peut supposer que $n_k < n_{k+1}$. Alors $||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|| \leq 1/k^2$ pour tout k, donc $\sum_k ||x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|| < \infty$ et donc par hypothèse la série $\sum_k (x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ converge, ce qui signifie exactement que la suite (x_{n_k}) converge.

Supposons que E est un Banach et que F est un sous-espace fermé de E. Soit $(x_n + F)$ une suite dans E/F telle que $\sum_n ||x_n + F|| < \infty$. Il existe $y_n \in F$ tels que $||x_n + F|| \geq ||x_n + y_n|| - 2^{-n}$, donc $\sum ||x_n + y_n|| < \infty$ et donc $\sum_n (x_n + y_n)$ converge. Ainsi il existe $x \in E$ tel que $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n x_k + z_n) = x$, avec $z_n = \sum_{k=1}^n y_k \in F$. Mais alors $\sum_{k=1}^n (x_k + F) = (\sum_{k=1}^n x_k) + F$ converge dans E/F vers $x + F$. □

Une application très classique du théorème ci-dessus est le résultat fondamental suivant, dans lequel (X, Σ, μ) est un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$.

Théorème 4.3.3. *(Riesz) Soit $p \in [1, \infty]$. L'espace $(L^p, || \cdot ||_p)$ est un espace de Banach.*

Proof. Le cas $p = \infty$ est laissé en exercice (c'est plus facile que ce qui suit!), supposons donc que $p < \infty$. Soit $\sum_{n\geq 1} f_n$ une série absolument convergente dans L^p et posons $S = \sum_{n\geq 1} ||f_n||_p < \infty$. Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^n f_k, \ v_n = \sum_{k=1}^n |f_k|, \ v = \sum_{k\geq 1} |f_k|.$$

Alors $||u_n||_p, ||v_n||_p \leq S$ pour tout n, donc par convergence monotone (ou lemme de Fatou) $\int_X v^p d\mu \leq S^p < \infty$, et donc $v < \infty$ presque partout, i.e. $\sum_{k\geq 1} |f_k(x)| < \infty$ pour presque tout x. Ainsi la série $u(x) := \sum_{k\geq 1} f_k(x)$ converge (absolument) pour presque tout x. On pose $u(x) = 0$ pour tout x dans le mauvais ensemble de mesure nulle sur lequel les choses ne se passent pas bien. Alors $u \in M(X)$, $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge presque partout vers u et comme $|u_n| \leq |v|$ pour tout n, on a $|u| \leq |v|$ presque partout, et donc $u \in L^p$ (car $v \in L^p$). De plus $|u - u_n|^p \leq (|v| + |v|)^p \in \mathscr{L}^1$ presque partout (pour tout n), et $u_n - u$ tend vers 0 presque partout, donc par convergence dominée $||u_n - u||_p \to 0$ et donc $\sum_{k\geq 1} f_k$ converge dans L^p vers u, ce qui permet de conclure. □

Exercice 4.3.3. *a) Démontrer le théorème de Riesz pour $p = \infty$.*

b) En regardant de près la preuve ci-dessus, montrer que toute suite $(f_n)_n$ de L^p qui converge dans L^p vers $f \in L^p$ possède une sous-suite qui converge presque partout vers f.

4.4 Le Banach des mesures complexes

Soit Σ une algèbre de Boole (par exemple une σ-algèbre) sur un ensemble X, i.e. un sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X, tel que

- $X \in \Sigma$ et $X \setminus A \in \Sigma$ pour tout $A \in \Sigma$.
- $A \cup B \in \Sigma$ pour $A, B \in \Sigma$.

Si M est un groupe abélien, une application $\mu : \Sigma \to M$ est dite *finiment additive* si $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tous $A, B \in \Sigma$ *disjoints.* Si M est un espace de Banach ou $[0,\infty]$ et si Σ est une σ-algèbre, on dit qu'une application $\mu : \Sigma \to M$ est *σ-additive* si

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

pour toute suite (A_n) de parties *deux à deux disjointes* de Σ.

Définition 4.4.1. a) On note $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ l'ensemble des applications finiment additives $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ qui sont bornées, i.e. telles que $\sup_{A\in\Sigma} |\mu(A)| < \infty$.

b) Si Σ est une σ-algèbre, on note[2] $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$ l'ensemble des applications σ-additives $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$.

Remarque 4.4.1. Si $\mu \in \mathrm{ca}(X,\Sigma)$ et si (A_n) est une suite de parties deux à deux disjointes dans Σ, alors par hypothèse la série de scalaires $\sum_{n\geq 1} \mu(A_{\sigma(n)})$ converge pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, donc (théorème de Riemann) elle converge absolument. On pourrait aussi imposer cette condition directement dans la définition et ignorer cette remarque...

Les espaces $\mathrm{ba}(X,\Sigma)$ et $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$ sont naturellement des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Si μ est dans un de ces espaces et si $A \in \Sigma$ on pose

$$|\mu(A)| = \sup_{A_1,\dots,A_n} |\mu(A_1)| + \dots + |\mu(A_n)|,$$

le sup étant pris sur les suites finies $A_1,\dots,A_n \in \Sigma$ de parties deux à deux disjointes de A. On appelle $|\mu|$ la *variation de* μ et $||\mu|| := |\mu|(X) \in [0,\infty]$ la *variation totale de* μ.

Proposition 4.4.1. *Soit $T \in \{\mathrm{ba}(X,\Sigma), \mathrm{ca}(X,\Sigma)\}$ (si $T = \mathrm{ca}(X,\Sigma)$ on suppose que Σ est une σ-algèbre). Pour tout $\mu \in T$ on a $|\mu| \in T$.*

Proof. Notons $\sigma = |\mu|$ et montrons d'abord que σ est bien finiment additive. Soient $A, B \in \Sigma$ disjoints. Si $A_1,\dots,A_n \in \Sigma$ sont des parties deux à deux disjointes de A et $B_1,\dots,B_m \in \Sigma$ sont des parties deux à deux disjointes de B, alors $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m$ sont des parties deux à deux disjointes de $A\cup B$, ce qui montre que $\sigma(A)+\sigma(B) \leq \sigma(A\cup B)$. Dans l'autre sens, si $A_1,\dots,A_n \in \Sigma$ sont des parties deux à deux disjointes de $A\cup B$, alors $A_i = (A\cap A_i)\coprod(B\cap A_i)$ et $|\mu(A_i)| \leq |\mu(A\cap A_i)| + |\mu(B\cap A_i)|$, les $(A_i\cap A)$ étant des parties de A deux à deux disjointes et dans Σ, et pareil pour B. Ainsi $\sigma(A\cup B) \leq \sigma(A)+\sigma(B)$ et au final σ est bien finiment additive.

Supposons que μ est σ-additive et montrons que σ l'est aussi. Soit (A_n) une suite dans Σ, les A_n étant deux à deux disjoints. Soit $A = \cup A_n$. Comme σ est croissante, il est clair que pour tout n on a $\sigma(A) \geq \sigma(A_1\cup\dots\cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(A_i)$, donc $\sigma(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(A_i)$. Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, soient $B_1,\dots,B_N \in \Sigma$ deux à deux disjoints et contenus dans A, et montrons que $\sum_{i=1}^{N} |\mu(B_i)| \leq \sum_{n\geq 1} \sigma(A_n)$, ce qui permettra de conclure. Mais

$$\sum_{i=1}^{N} |\mu(B_i)| = \sum_{i=1}^{N} |\sum_{n\geq 1} \mu(A_n\cap B_i)| \leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{n\geq 1} |\mu(A_n\cap B_i)| = \sum_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{N} |\mu(A_n\cap B_i)| \leq \sum_{n\geq 1} \sigma(A_n).$$

Enfin, et c'est le seul point délicat de l'argument, montrons que si μ est bornée alors σ l'est aussi. Cela découle du résultat très très utile suivant:

[2] "ca" est pour "countably additive" en anglais.

Lemme 4.4.1. *Pour tout $A \in \Sigma$ on a*

$$\sup_{B\in\Sigma, B\subset A} |\mu(B)| \le |\mu|(A) \le 4 \sup_{B\in\Sigma, B\subset A} |\mu(B)|.$$

Proof. L'inégalité à gauche est évidente. Pour celle à droite, il suffit de la démontrer avec la constante 4 remplacée par 2 quand $\mu(\Sigma) \subset \mathbb{R}$ (on l'applique alors aux parties réelle et imaginaire de μ pour obtenir le résultat en général). Soient $A_1, ..., A_n \in \Sigma$ deux à deux disjoints et contenus dans A. Soit $I = \{i \in \{1, ..., n\} | \, \mu(A_i) \ge 0\}$ et $J = \{1, ..., n\} \setminus I$, alors

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| = \mu(\cup_{i\in I} A_i) - \mu(\cup_{j\in J} A_j) \le 2 \sup_{B\in\Sigma, B\subset A} |\mu(B)|,$$

ce qui permet de conclure. □

□

Nous pouvons alors démontrer le résultat principal de ce paragraphe:

Théorème 4.4.2. *L'application $\mu \mapsto ||\mu|| := |\mu|(X)$ munit* $\mathrm{ba}(X, \Sigma)$ *d'une structure d'espace de Banach, et (si Σ est une σ-algèbre)* $\mathrm{ca}(X, \Sigma)$ *en est un sous-espace fermé.*

Proof. Le lemme montre que $|| \cdot ||$ est équivalente à $\mu \mapsto \sup_{A\in\Sigma} |\mu(A)|$, i.e. à la norme sup sur $\ell^\infty(\Sigma)$. Il est trivial de voir que $\mathrm{ba}(X, \Sigma)$ est bien fermé dans $\ell^\infty(\Sigma)$, c'est donc un Banach.

La partie difficile consiste à montrer que $\mathrm{ca}(X, \Sigma) \subset \ell^\infty(\Sigma)$. Admettons cela pour l'instant et montrons que $\mathrm{ca}(X, \Sigma)$ est forcément fermé dans $\ell^\infty(\Sigma)$. Soit μ_n une suite dans $\mathrm{ca}(X, \Sigma)$ qui converge dans $\ell^\infty(\Sigma)$ vers μ. Soit (A_k) une suite dans Σ, les A_k étant deux à deux disjoints, et soit $A = \cup A_k$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit n_0 tel que $\sup_{B\in\Sigma} |\mu(B) - \mu_n(B)| < \varepsilon$ pour $n \ge n_0$. Alors $|\mu(\cup_{k>n} A_k) - \mu_{n_0}(\cup_{k>n} A_k)| < \varepsilon$, donc, puisque μ est trivialement finiment additive

$$|\mu(A) - \sum_{k=1}^n \mu(A_k)| = |\mu(\cup_{k>n} A_k)| \le |\mu_{n_0}(\cup_{k>n} A_k)| + \varepsilon \le |\mu_{n_0}(A) - \sum_{k=1}^n \mu_{n_0}(A_k)| + \varepsilon$$

et la dernière expression est $< 2\varepsilon$ pour n grand, car $\mu_{n_0}(A) = \sum_{k\ge 1} \mu_{n_0}(A_k)$.

Enfin, montrons que $\mathrm{ca}(X, \Sigma) \subset \ell^\infty(\Sigma)$. Par le lemme il suffit de voir que $|\mu|(X) < \infty$ pour $\mu \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$. Supposons que $|\mu|(X) = \infty$, on va d'abord construire une suite décroissante (A_n) dans Σ avec $|\mu(A_n)| \ge n$ et $|\mu|(A_n) = \infty$ pour tout n. Soit $A_1 = X$ et supposons avoir construit $A_1, ..., A_n$. Comme $|\mu|(A_n) = \infty$, il existe $B \in \Sigma$ contenu dans A_n et tel que $|\mu(B)| \ge n + 1 + |\mu(A_n)|$ (par le lemme 4.4.1). Si $|\mu|(B) = \infty$, on pose $A_{n+1} = B$. Si $|\mu|(B) < \infty$, alors $|\mu|(A_n \setminus B) = \infty$ (sinon $|\mu|(A_n) < \infty$) et on pose $A_{n+1} = A_n \setminus B$.

On peut enfin finir la preuve. Les $B_n = A_1 \setminus A_n$ sont croissants et si l'on pose $C_1 = B_1$ et $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$ pour $n > 1$, alors les C_n sont deux à deux disjoints et $\cup_{k=1}^n C_k = B_n = A_1 \setminus A_n$. Comme $\mu(\cup_n C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu(C_k)$ existe dans $\mathbb{C}$ (par définition), on obtient que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_1) - \mu(A_n)$ existe dans $\mathbb{C}$, ce qui contredit l'inégalité $|\mu(A_n)| \ge n$. □

4.5 Banach-Steinhaus pour les mesures: théorème de Nikodym

On finit ce chapitre avec le très subtil résultat suivant.

Théorème 4.5.1. *(Nikodym) Soit (X, Σ) un espace mesurable et soit $\mathscr{F}$ une famille déléments de* $\mathrm{ba}(X, \Sigma)$ *tels que* $\sup_{\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A)| < \infty$ *pour tout* $A \in \Sigma$. *Alors* $\sup_{\mu\in\mathscr{F}} ||\mu|| < \infty$, *autrement dit* $\sup_{\mu\in\mathscr{F},A\in\Sigma} |\mu(A)| < \infty$.

Proof. Supposons que ce n'est pas le cas.

Etape 1 Nous montrons qu'il existe une suite (σ_k) dans $\mathscr{F}$ et des parties deux à deux disjointes $B_k \in \Sigma$ telles que

$$|\sigma_k(B_k)| > k + 2 + \sum_{i=1}^{k-1} |\sigma_k(B_i)|$$

pour tout k. Pour cela, il suffit de construire une suite (μ_n) dans $\mathscr{F}$ et une suite (A_n) dans Σ telle que les A_n soient deux à deux disjoints et $|\mu_n(A_n)| \to \infty$. En effet, on pourra alors construire par récurrence une suite $n_1 < n_2 < ...$ telle que $|\mu_{n_1}(A_{n_1})| > 1$ et pour $k > 1$

$$|\mu_{n_k}(A_{n_k})| > k + 2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sup_{\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A_{n_i})| \geq k + 2 + \sum_{i=1}^{k-1} |\mu_{n_k}(A_{n_i})|$$

et il suffira de poser $\sigma_k = \mu_{n_k} \in \mathscr{F}$ et $B_k = A_{n_k} \in \Sigma$.

Pour construire les (A_n) et (μ_n) on appliquera plusieurs fois le

Lemme 4.5.1. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et soit $\mathscr{F} \subset \mathrm{ba}(X, \Sigma)$ une famille telle que $\sup_{A\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A)| = \infty$. Alors pour tout $r > 0$ il existe une partition mesurable $X = A \coprod B$, $C \in \{A, B\}$ et $\mu \in \mathscr{F}$ tels que $|\mu(A)|, |\mu(B)| > r$ et $\sup_{A\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A \cap C)| < \infty$.*

Proof. On prend $A \in \Sigma$ et $\mu \in \mathscr{F}$ tels que $|\mu(A)| > r + \sup_{\sigma\in\mathscr{F}} |\sigma(X)|$ (ils existent puisque $\sup_{A\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A)| = \infty$). On a alors $|\mu(X \setminus A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(X)| > r$. De plus, si l'on pose $B = X \setminus A$, comme $\sup_{U\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(U)| = \infty$ et $|\mu(U \cap A)| + |\mu(U \cap B)| \geq |\mu(U)|$, il existe $C \in \{A, B\}$ tel que $\sup_{U\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(U \cap C)| = \infty$. □

Le lemme fournit $\mu_1 \in \mathscr{F}$ et une partition mesurable $X = A_1 \coprod B_1$ telle que $\min(|\mu_1(A_1)|, |\mu_1(B_1)|) > 1$ et $\sup_{A\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(B_1 \cap A)| = \infty$. On applique le lemme à l'espace B_1, muni de la σ-algèbre $\{A\cap B_1 | \ A \in \Sigma\}$ et des mesures finiment additives $A \cap B_1 \mapsto \mu(A \cap B_1)$ pour $\mu \in \mathscr{F}$. On trouve une partition mesurable $B_1 = A_2 \coprod B_2$ et $\mu_2 \in \mathscr{F}$ avec $\min(|\mu_2(A_2)|, |\mu_2(B_2)|) > 2$ et $\sup_{A\in\Sigma,\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A \cap B_2)| = \infty$, et on continue ainsi.

Etape 2 On va voir dans le lemme ci-dessous qu'il existe une sous-suite (σ_{n_k}) telle que

$$|\sigma_{n_k}|(B_{n_{k+1}} \cup B_{n_{k+2}} \cup ...) < 1$$

pour tout k. Mais alors si l'on pose $A = \cup_k B_{n_k}$ on a

$$|\sigma_{n_k}(A)| \geq |\sigma_{n_k}(B_{n_k})| - \sum_{i=1}^{k-1} |\sigma_{n_k}(B_{n_i})| - |\sigma_{n_k}|(B_{n_{k+1}} \cup B_{n_{k+2}} \cup ...) > n_k,$$

une contradiction avec le fait que $\sup_{\mu\in\mathscr{F}} |\mu(A)| < \infty$. Il reste à démontrer le

Lemme 4.5.2. *Soit* (σ_k) *une suite de mesures positives finies sur* (X, Σ) *et* (B_k) *une suite dans* Σ*, les* B_k *étant deux à deux disjoints. Il existe* $n_1 < n_2 < ...$ *tels que* $\sigma_{n_k}(B_{n_{k+1}} \cup B_{n_{k+2}} \cup ...) < 1$ *pour tout* k*.*

Proof. Notons que si σ est une mesure finie sur (X, Σ), alors pour toute partie infinie A de $\mathbb{N}$ on peut trouver une partie infinie $A' \subset A \setminus \{\min A\}$ telle que $\sigma(\cup_{i\in A'} B_i) < 1$. En effet, on prend une partition infinie $A \setminus \{\min A\} = T_1 \coprod T_2 \coprod ...$ avec chaque T_i infini, et alors $\sigma(\cup_{i\in T_1} B_i) + \sigma(\cup_{i\in T_2} B_i) + ... \leq \sigma(X) < \infty$, donc il existe j tel que $\sigma(\cup_{i\in T_j} B_i) < 1$.

En appliquant l'observation ci-dessus une infinité de fois, on trouve une suite décroissante de parties infinies $A_1, A_2, ...$ de $\mathbb{N}$ telles que $\min A_{i+1} > \min A_i$ et $\sigma_{\min A_i}(\cup_{a\in A_{i+1}} B_a) < 1$ pour tout i. En posant $n_i = \min A_i$, cela permet de conclure. □

□

Chapter 5

Espaces vectoriels topologiques

Le but de ce chapitre est de formaliser et de généraliser un certain nombre de constructions vues dans le chapitre précèdent. Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés scalaires. Les objets de base sont les *espaces vectoriels topologiques (evt)*, i.e. les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E munis d'une structure d'espace topologique telle que $E \times E \to E, (x, y) \mapsto x + y$ et $\mathbb{K} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ soient des applications continues. Les evn (et donc les Banach) sont des evt, mais il y a beaucoup plus d'evt que des evn. Par exemple, toute famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E munit E d'une structure canonique d'evt. Il se trouve que les evt obtenus par cette construction peuvent être caractérisés en termes purement topologiques et géométriques, et ce sont les evt que l'on étudie le plus en analyse fonctionnelle, puisqu'ils ont beaucoup de formes linéaires continues, contrairement aux evt généraux.

5.1 Définition, propriétés élémentaires

Un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel topologique* (ou $\mathbb{K}$-evt, ou simplement evt si $\mathbb{K}$ est sous-entendu ou pas important) est un espace topologique E muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel tel que les applications $E \times E \to E, (x, y) \mapsto x + y$ et $\mathbb{K} \times E \to E, (a, x) \mapsto ax$ soient continues.

Soit E un evt. Il découle directement des définitions que pour tout $y \in E$ l'application $x \mapsto x + y$ est un homéomorphisme $E \to E$, donc la topologie est déterminée par une base de voisinages de 0. De même, si a est un scalaire non nul, l'application $x \mapsto ax$ un homéomorphisme $E \to E$.

Exemple 5.1.1.

1. Tout evn (en particulier tout Banach) est un evt.
2. Si (E_i) est une famille d'evt, alors l'espace produit $E = \prod_i E_i$ avec la structure évidente de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et avec la topologie produit est un evt. Donnons juste l'argument pour la continuité de l'addition $m : E \times E \to E$. Par définition de la topologie produit, il suffit de vérifier la continuité de la composée $E \times E \to E \to E_i$, la deuxième flèche étant la projection canonique $p_i : E \to E_i$. Mais cette composée n'est rien d'autre que $E \times E \to E_i \times E_i \to E_i$, la première étant (p_i, p_i) et la seconde étant $m : E_i \times E_i \to E_i$. En particulier pour tout ensemble I l'espace $\mathbb{K}^I$ des fonctions $f : I \to \mathbb{K}$ est un evt.
3. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel d'un evt est un evt.

4. Deux contre-exemples: un espace vectoriel muni de la topologie discrète n'est pas un evt (la multiplication par des scalaires n'est pas continue). De même $\mathbb{C}[[X]]$ muni de la topologie X-adique (i.e. une base de voisinages de f est donnée par les $f + X^n\mathbb{C}[[X]]$ avec $n \geq 1$) n'est pas un evt (alors que c'est un anneau topologique!). Moralité: il ne faut pas sous-estimer la continuité de la multiplication par les scalaires!

5. Nous verrons bien d'autres exemples dans le paragraphe suivant.

Nous finissons ce paragraphe par quelques propriétés formelles mais très utiles des evt. On s'en sert tout le temps! Une première est que la topologie d'un evt est déterminée par ce qui se passe au voisinage de 0. En particulier, supposons que $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ sont des topologies faisant de E des evt et que $(B_i), (B'_j)$ sont des bases de voisinages de 0 pour $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ respectivement. Si pour tout i il existe j tel que $B'_j \subset B_i$ et si pour tout j il existe i tel que $B_i \subset B'_j$, alors $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

Proposition 5.1.1. *Soit E un evt.*

a) L'adhérence d'une partie A de E est $\bar{A} = \cap_U(A + U)$, U parcourant les voisinages de 0.

b) E est séparé si et seulement si $\{0\}$ est fermé dans E.

c) Si U est un voisinage de 0, alors $E = \cup_n a_n U$ pour toute suite non bornée de scalaires (a_n).

Proof. a) Les voisinages de 0 sont permutés par l'homéomorphisme $x \mapsto -x$, et un vecteur $x \in E$ est dans $\bar{A}$ si et seulement si $(x + U) \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage U de 0, ou encore $x \in U + A$ pour tout tel U.

b) Un sens est évident. Pour l'autre, soient $x \neq y$ et montrons qu'il existe U voisinage de 0 tel que $(x+U)\cap(y+U) = \emptyset$. Sinon $x-y \in U-U$ pour tout voisinage U de 0. Par continuité de $(x, y) \mapsto x - y$ tout voisinage V de 0 contient $U - U$ pour un voisinage U de 0, et donc $x - y \in \cap_V V = \overline{\{0\}} = \{0\}$, une contradiction.

Pour c), soit $x \in E$. La continuité de $a \mapsto ax$ montre que $\{a \in \mathbb{K} | \, ax \in U\}$ est un voisinage de 0, qui contient donc $1/a_n$ pour un n, et alors $x \in a_n U$. □

Le résultat suivant est très utile en pratique, mais demande une définition préliminaire:

Définition 5.1.1. Une partie A d'un espace vectoriel E est dite *ronde* si $\lambda A \subset A$ pour tout scalaire λ tel que $|\lambda| \leq 1$.

Proposition 5.1.2. *Soit U un voisinage de* 0*. Alors U contient $\overline{W} + \overline{W}$ pour un voisinage rond W de* 0.

Proof. Par continuité de l'addition, il existe des voisinages V_1, V_2 de 0 tels que $V_1+V_2 \subset U$. Soit $V' = V_1 \cap V_2$, un voisinage de 0 tel que $V'+V' \subset U$. On applique le même argument à V' et on trouve un voisinage V'' de 0 tel que $V''+V''+V''+V'' \subset U$. Par continuité de la multiplication par les scalaires il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage T de 0 tel que $aT \subset V''$ pour $|a| < \varepsilon$. Alors $W = \cup_{|a|<\varepsilon} aT \subset V''$ est rond (évident) et un voisinage de 0, de plus (point a) de la proposition 5.1.1) $\overline{W} + \overline{W} \subset W + W + W + W \subset V'' + V'' + V'' + V'' \subset U$. □

5.2 Topologie définie par une famille de semi-normes

Les exemples les plus importants d'evt sont construits à partir d'une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Soient $\mathscr{T}_i$ sont des topologies sur un espace vectoriel E, telles que chaque $(E, \mathscr{T}_i)$ soit un evt. Soit $\mathscr{T}$ la plus faible topologie (i.e. ayant le moins d'ouverts) qui contient chaque $\mathscr{T}_i$ (i.e. contient tous les ouverts de $\mathscr{T}_i$). Alors $(E, \mathscr{T})$ est un evt. On applique ce résultat à la topologie $\mathscr{T}_i$ définie par la semi-norme p_i. La topologie $\mathscr{T}$ ainsi obtenue est la *topologie définie par la famille de semi-normes* $(p_i)_{i\in I}$.

Plus concrètement, une base de voisinages ouverts de $x \in E$ est donnée par les ensembles de la forme

$$B_{p_{i_1},\dots,p_{i_n}}(x,\varepsilon) := \{y \in E|\ \ \max(p_{i_1}(y-x),\dots,p_{i_n}(y-x)) < \varepsilon\} = \cap_{j=1}^n B_{p_{i_j}}(x,\varepsilon),$$

avec $\varepsilon > 0$ et $i_1, \dots, i_n \in I$.

Le résultat suivant, bien que formel, est systématiquement utilisé en pratique.

Théorème 5.2.1. *Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E, et munissons E de la topologie définie par les (p_i). Alors:*

a) E est un evt.

b) Une application linéaire $f : F \to E$ d'un evt F vers E est continue si et seulement si $p_i \circ f : F \to \mathbb{R}$ est continue pour tout $i \in I$.

c) Une semi-norme p sur E est continue si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ et $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $p(x) \le c \max(p_{i_1}(x), \dots, p_{i_n}(x))$ pour tout x.

d) Une suite (x_n) dans E converge vers $x \in E$ si et seulement si $(p_i(x_n - x))$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $i \in I$. Une suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si $\lim_{m,n\to\infty} p_i(x_m - x_n) = 0$ pour tout $i \in I$.

e) Si $I = \mathbb{N}$ et si $\cap_{i\in I}\ker(p_i) = \{0\}$, alors la topologie de E métrisable, induite par la métrique

$$d(x,y) = \sum_{i\in I} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)} 2^{-i}.$$

Proof. a) C'un exercice très formel, à faire une fois dans sa vie; je l'ai déjà fait, donc je vous laisse ce plaisir!

b) Une implication est évidente (car chaque p_i est continue), supposons donc que $p_i \circ f$ est continue pour tout i. Il suffit de vérifier la continuité en 0, et il suffit de voir que $f^{-1}(B_{p_i}(0,\varepsilon))$ est ouvert pour tout i. Mais $f^{-1}(B_{p_i}(0,\varepsilon)) = (p_i \circ f)^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$, qui est bien ouvert.

c) Par définition chaque p_i est continue. Comme $|p(x) - p(y)| \le p(x-y)$ pour toute semi-norme p, p est continue si et seulement si p est continue en 0. Il est alors clair que si $p(x) \le c \max(p_{i_1}(x), \dots, p_{i_n(x)})$ pour tout x, alors p est continue. Dans l'autre sens, soit p une semi-norme continue. Il existe un voisinage U de 0 dans E, que l'on peut choisir de la forme $U = B_{p_{i_1},\dots,p_{i_n}}(0,\varepsilon)$ tel que $p(x) < 1$ pour $x \in U$. Pour $\delta > 0$ on a $y_\delta := \varepsilon \cdot \frac{x}{\delta + \max p_{i_j}(x)} \in U$, donc $p(y_\delta) < 1$ et $p(x) < \frac{1}{\varepsilon}(\delta + \max p_{i_j}(x))$. On fait alors $\delta \to 0$ et on obtient $p(x) \le \frac{1}{\varepsilon} \max p_{i_j}(x)$ pour $x \in E$.

d) Donnons l'argument pour le premier point. Un sens est évident, car chaque p_i est continue. Supposons que $p_i(x_n - x)$ tend vers 0 pour tout i. Il suffit de voir que pour tous $i_1, \dots, i_n \in I$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $x_k - x \in B_{p_{i_1},\dots,p_{i_n}}(0,\varepsilon)$ pour k assez grand, ce qui est évident car $p_{i_j}(x_k - x) < \varepsilon$ pour k assez grand et on n'a qu'un nombre fini d'indices i_j.

e) On a bien $d(x,y)=0 \implies x=y$ car $d(x,y)=0 \implies p_i(x-y)=0, \forall i \in I$, donc $x-y=0$ par hypothèse. Ensuite, on a clairement $d(x,y)=d(y,x)$ et l'inégalité $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ vient de

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b} \geq \frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b}=\frac{a+b}{1+a+b}.$$

Pour montrer que d définit la topologie de E, on utilise la discussion qui précède la proposition 5.1.1. Notons que si $d(x,0)<\frac{\varepsilon}{2^j(1+\varepsilon)}$ alors $p_j(x)<\varepsilon$, donc tout $B_{p_{i_1},\ldots,p_{i_n}}(0,\varepsilon)$ contient une boule ouverte $B(0,r)$. Dans l'autre sens, $B(0,\varepsilon)$ contient $B_{p_1,\ldots,p_N}(0,\varepsilon/2)$ si l'on prend N tel que $\sum_{j>N} 2^{-j}<\varepsilon/2$. □

5.3 Evt localement convexes

Nous allons caractériser de manière topologique et géométrique les evt dont la topologie est définie par une famille de semi-normes. Cela demande une interprétation géométrique des semi-normes.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soit p une semi-norme sur E. Alors

$$\mathring{B}_p := \{x \in E \mid p(x)<1\}$$

a les trois propriétés suivantes:

• $\mathring{B}_p$ est une partie ronde, car si $p(x)<1$ et $a \in \mathbb{K}$ vérifie $|a| \leq 1$, alors $p(ax)=|a|p(x)<1$.

• on a $\cup_{\lambda \in]0,\infty[} \lambda \mathring{B}_p = E$, puisque $p(\frac{1}{p(x)+1}x)=\frac{p(x)}{p(x)+1}<1$ pour tout x, donc $x \in (p(x)+1)\mathring{B}_p$.

• on a $ta+(1-t)b \in \mathring{B}_p$ pour $a,b \in \mathring{B}_p$ et $t \in [0,1]$, puisque $p(ta+(1-t)b) \leq p(ta)+p((1-t)b)=tp(a)+(1-t)p(b)$.

Ces trois propriétés vont apparaître assez souvent par la suite, on va les glorifier dans la définition suivante:

Définition 5.3.1. Une partie A de E est dite

• (pour mémoire!) *ronde* si $xA \subset A$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ tel que $|x| \leq 1$.

• *absorbante* si $E=\cup_{\lambda>0}\lambda A$. Noter qu'en particulier un tel A contient 0.

• *convexe* si $ta+(1-t)b \in A$ pour $a,b \in A$ et $t \in [0,1]$.

Dans l'autre sens, si A est une partie absorbante de E, on peut définir sa *jauge ou fonctionnelle de Minkowski*

$$p_A : E \to [0,\infty[,\ p_A(x)=\inf\{\lambda>0 \mid \frac{x}{\lambda} \in A\}.$$

Le théorème suivant établit un lien très important entre semi-normes et les propriétés géométriques introduites ci-dessus.

Théorème 5.3.1. *a) Soit A une partie absorbante de E. Si A est convexe, alors p_A est sous-additive et $p_A(\lambda x)=\lambda p_A(x)$ pour $\lambda>0$. Si A est de plus ronde, alors p_A est une semi-norme sur E.*

b) On a $p_{\mathring{B}_p}=p$ pour toute semi-norme p et $\mathring{B}_{p_A} \subset A \subset B_{p_A} := \{x \in E \mid p(x) \leq 1\}$ pour toute partie convexe, ronde et absorbante A de E.

Proof. a) Il est évident que $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ pour $\lambda > 0$, et aussi que $p_A(ax) = |a|p_A(x)$ pour $a \in \mathbb{K}$ si A est ronde. Soient $x, y \in E$ et montrons que $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui permettra de conclure. Par définition il existe $0 < \lambda_1 < p_A(x) + \varepsilon, 0 < \lambda_2 < p_A(y) + \varepsilon$ tels que $\frac{x}{\lambda_1}, \frac{y}{\lambda_2} \in A$. Mais alors, par convexité

$$\frac{x+y}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{x}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot \frac{y}{\lambda_2} \in A$$

et donc $p_A(x+y) \leq \lambda_1 + \lambda_2 < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon$.

b) Si p est une semi-norme, il est évident que

$$p_{B_p}(x) = \inf\{\lambda > 0 | \, p(x/\lambda) < 1\} = \inf\{\lambda > 0 | \, p(x) < \lambda\} = p(x),$$

donc $p_{B_p} = p$. Si A est convexe, ronde et absorbante, il est clair que $p_A(x) \leq 1$ pour $x \in A$. Dans l'autre sens, si $p_A(x) < 1$, alors $x/\lambda \in A$ pour un $0 < \lambda < 1$ et donc $x = \lambda(x/\lambda) + (1-\lambda)0 \in A$ par convexité de A et le fait que $0 \in A$. $\square$

Théorème 5.3.2. *La topologie d'un evt E peut être définie par une famille de semi-normes si et seulement si E possède une base de voisinages convexes de* 0.

Proof. Si la topologie de E peut être définie par les semi-normes (p_i), alors les $B_{p_{i_1},\ldots,p_{i_n}}(0, \varepsilon)$ forment une base de voisinages convexes de 0. Supposons que E possède une base de voisinages convexes A_i de 0. Par la proposition 5.1.2 chaque A_i contient un voisinage rond C_i de 0. Alors $B_i = \mathrm{conv}(C_i)$ (enveloppe convexe de C_i) est contenu dans A_i, un voisinage de 0 donc absorbant (car $C_i \subset B_i$) et rond (car C_i l'est) La discussion qui précède la proposition 5.1.1 combinée au théorème 5.3.1 montrent que les $p_i := p_{B_i}$ définissent la topologie de E: chaque B_i contient B_{p_i}, et chaque $B_{p_{i_1},\ldots,p_{i_n}}(0, \varepsilon)$ contient $\frac{\varepsilon}{2}B_{i_1} \cap \ldots. \cap B_{i_n}$, qui contient un B_j. $\square$

Le théorème ci-dessus motive alors la définition suivante:

Définition 5.3.2. Un evt E est appelé *localement convexe (ou evtlc)* si E possède une base de voisinages convexes de 0.

Il existe des evt qui ne sont pas localement convexes, comme le montre l'exercice suivant, fortement conseillé.

Exercice 5.3.1. *Soit $0 < p < 1$ et soit L^p l'espace des classes d'équivalence de fonctions mesurables (pour la mesure de Lebesgue) $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que $|f|_p := \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$, deux fonctions étant équivalentes si elles sont égales presque partout.*

a) Montrer que $|f+g|_p \leq |f|_p + |g|_p$ pour $f, g \in L^p$ et que $d(f,g) := |f-g|_p$ définit une distance invariante par translation sur L^p.

b) Montrer que L^p est un espace métrique complet pour cette distance. Indication: se rappeler la preuve du fait que les espaces L^p sont des Banach pour $p \geq 1$.

c) Montrer qu'il existe un voisinage borné de 0 dans L^p.

d) Soit $B_r = \{f \in L^p | \, |f|_p < r\}$ pour $r > 0$. Montrer que si $f \in L^p$ et si $n^{p-1}|f|_p < r$, alors il existe $g_1, \ldots, g_n \in B_r$ tels que $nf = g_1 + \ldots + g_n$. Indication: $g_i = f \cdot 1_{(x_{i-1}, x_i]}$ pour des $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ bien choisis.

e) En déduire que L^p ne possède aucun ouvert convexe non vide et différent de L^p et que le dual continu de L^p est réduit à $\{0\}$.

Si E est un evt, on note $\mathscr{SC}(E)$ l'ensemble des semi-normes *continues* sur E. En combinant les théorèmes 5.2.1 et 5.3.2 on obtient le très utile:

Théorème 5.3.3. *a) Un evt E est localement convexe si et seulement si sa topologie est définie par la famille de semi-normes $\mathscr{SC}(E)$.*

b) Si $f : E \to F$ est une application linéaire entre des evtlc, alors f est continue si et seulement si

$$\forall\, p \in \mathscr{SC}(F)\ \exists\, q \in \mathscr{SC}(E),\ p(f(x)) \leq q(x),\ \forall x \in E.$$

Exercice 5.3.2. *Soit E un evt et $A \subset E$ une partie convexe. Alors $\bar{A}$ et* $\mathrm{Int}(A)$ *sont des parties convexes de E.*

5.4 Espaces quotient, applications aux evt de dimention finie

Soit E un evt et F un sous-espace de E. Soit $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. On munit E/F de sa structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de telle sorte que π soit $\mathbb{K}$-linéaire), et de la topologie quotient (autrement dit une partie U de E/F est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans E). On vérifie alors facilement que E/F est un evt. De plus, si E est séparé et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors E/F est séparé si et seulement si F est fermé dans E.

Soit E un evt et soient F, G des sous-espaces vectoriels de E, en somme directe (algébrique) dans E, i.e. $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$. L'application naturelle $F \times G \to E, (x, y) \mapsto x + y$ est continue bijective, et on dit que F, G sont en *somme directe topologique* si l'inverse de cette application est aussi continue. On laisse en exercice la preuve formelle du résultat suivant:

Proposition 5.4.1. *Soient F, G des sous-espaces vectoriels d'un evt E, en somme directe algébrique dans E. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- *F et G sont en somme directe topologique dans E*
- *la projection $E \to F$ parallèlement à G est continue.*
- *l'application naturelle $E/F \to G$ est un isomorphisme d'evt.*

Définition 5.4.1. Un sous-espace vectoriel F d'un evt E est dit *complémenté* s'il existe un sous-espace G de E tel que F et G soient en somme directe topologique dans E.

Remarque 5.4.1. Soit E un evtlc. Une *base* de $\mathscr{SC}(E)$ est une famille (p_i) d'éléments de $\mathscr{SC}(E)$ telle que pour tout $p \in \mathscr{SC}(E)$ il existe $c > 0$ et i tels que $p \leq cp_i$. Ainsi, une famille (p_i) de semi-normes définit la topologie de E si l'ensemble des semi-normes $\max_{i_1,\dots,i_n}(p_{i_1}, \dots, p_{i_n})$ est une base de $\mathscr{SC}(E)$. Si F est un sous-espace, alors E/F est un evtlc pour la topologie quotient, et si $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{S}(E)$ alors les semi-normes quotient $p(x + F) = \inf_{y \in F} p(x + y)$ pour $p \in \mathscr{B}$ forment une base de $\mathscr{S}(E/F)$.

Tout ce qui précède est parfaitement formel et manque un peu de sel. Mais nous allons voir que c'est en fait assez puissant. Le premier résultat nontrivial et fort utile de la théorie est la généralisation suivante de l'équivalence des normes en dimension finie.

Théorème 5.4.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-evt de dimension finie, séparé. Alors toute forme linéaire sur E est continue et pour toute base $e_1, ..., e_n$ de E l'application $\phi : \mathbb{K}^n \to E, (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ est un isomorphisme d'evt.*

Proof. On raisonne par récurrence sur $d = \dim E$. Avant de nous lancer, quelques observations utiles:

• ϕ est continue: on peut tester cela avec des suites, et cela découle alors de la continuité de la multiplication par des scalaires, qui montre que $\lim_{x \to 0} x e_i = 0$ pour tout i.

• si toute forme linéaire sur E est continue, alors l'inverse de ϕ est continue et donc ϕ est un isomorphisme d'evt.

Supposons que $d = 1$ et soit $e \in E \setminus \{0\}$. Il faut vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de 0 dans E tel que si $xe \in U$ alors $|x| \leq \varepsilon$. Comme E est séparé, il existe un voisinage U de 0, que l'on peut supposé rond, tel que $\varepsilon e \notin U$. Si $xe \in U$, alors $|x| \leq \varepsilon$, sinon $\varepsilon e = \frac{\varepsilon}{x}(xe) \in U$ (car U est rond). Cela permet de conclure.

Supposons que le résultat est démontré en dimension $d-1$. Comme nous l'avons constaté, il suffit de montrer que toute forme linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ est continue. Mais $\ker(f)$ est un evt de dimension $d-1$ (pour la topologie induite), donc (par hypothèse de récurrence) isomorphe à $\mathbb{K}^{d-1}$, en particulier complet, et donc fermé dans E (car E est séparé). Ainsi $E/\ker(f)$ est un evt séparé de dimension 1, donc l'application $E/\ker(f) \to \mathbb{K}$ induite par f est un isomorphisme d'evt (d'après le cas $d = 1$ établi ci-dessus), en particulier continue. Comme f est la composée $E \to E/\ker(f) \to \mathbb{K}$, f est continue. □

En particulier, tout sous-espace de dimension finie d'un evt séparé E est complet, et donc fermé dans E. On utilisera ce fait très souvent.

Corollaire 5.4.1. *Soit E un evt.*

a) Si F est un sous-espace fermé de E et si G est un sous-espace de dimension finie de E, alors $F + G$ est fermé dans E.

b) Si F est un sous-espace fermé de codimension finie dans E, alors tout supplémentaire algébrique G de F dans E est un supplémentaire topologique.

Proof. a) La projection canonique $\pi : E \to E/F$ est continue, et E/F est séparé car F est fermé dans E. De plus, $\pi(G)$ est de dimension finie, donc fermé dans E/F. Mais alors $F + G = \pi^{-1}(\pi(G))$ est fermé dans E.

b) L'application naturelle $E/F \to G$ est continue car E/F est séparé de dimension finie. Mais alors la projection $E \to G$ est continue, en tant que composée $E \to E/F \to G$. □

Le résultat suivant montre qu'en quelque sorte la théorie des evt est orthogonale à celle des espaces localement compacts:

Théorème 5.4.3. *(Riesz) Tout evt séparé localement compact est de dimension finie.*

Proof. Soit E un evt localement compact, et soit K un voisinage compact de 0. On peut supposer que K est rond, car $\cup_{|x| \leq 1} xK$ est encore compact, en tant qu'image continue de $\{x \in \mathbb{K} | \, |x| \leq 1\} \times K$. Comme $\frac{1}{2}K$ est un voisinage de 0 et K est un compact, il existe $x_1, ..., x_n \in E$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^{n} (x_i + \frac{1}{2}K)$. Soit $V = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$, alors $K \subset V + \frac{1}{2}K \subset V + \frac{1}{4}K \subset ...$, donc $2^n K \subset V + K$ pour tout n. Comme K est un voisinage de 0, on a $E = \cup_n 2^n K$ (proposition 5.1.1), donc $E = V + K$.

Soit $f : E \to E/V$ la projection canonique. Alors V est fermé dans E et donc E/V est un evt séparé. On vient de voir que $f : K \to E/V$ est surjective, donc E/V est compact (car K est compact). Si $x \in E/V$ était non nul, alors $\mathbb{K}x$est fermé dans le compact E/V, donc compact. Mais $\mathbb{K}x$ est homéomorphe à $\mathbb{K}$, une contradiction évidente. Donc $E = V$ est de dimension finie. □

5.5 Parties bornées

Introduisons une autre notion très utile.

Définition 5.5.1. Soit E un evt. Une partie A de E est dite *bornée* si pour tout voisinage U de 0 il existe N tel que $A \subset tU$ pour $t > N$.

Pour les evt localement convexes on a un moyen bien pratique de vérifier si une partie est bornée:

Proposition 5.5.1. *Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E, et munissons E de la topologie définie par les (p_i). Une partie B de E est bornée si et seulement si $p_i(B) \subset \mathbb{R}$ est bornée pour tout $i \in I$.*

Proof. Un sens découle de la continuité de p_i. Pour l'autre, il suffit de voir que pour tous $i_1, ..., i_n \in I$ et $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$ tel que $B \subset tB_{p_{i_1},...,p_{i_n}}(0, \varepsilon)$ pour $t > N$, ce qui s'écrit $\max p_{i_j}(b) < \varepsilon t$ pour $b \in B$ et $t > N$. Cela est évident, car il existe N_j tel que $p_{i_j}(B) \subset [0, N_j]$, et on prend n'importe quel $N > \frac{1}{\varepsilon}\ \max(N_1, ..., N_n)$. □

Proposition 5.5.2. *Soit E un evt.*

a) Une partie quasi-compacte de E est bornée.

b) Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue entre des evt séparés. Alors l'image de tout borné de E est bornée dans F.

Proof. a) Soit K un quasi-compact de E et soit U un voisinage de 0. Soit V un voisinage de 0 rond, ouvert et contenu dans U. Alors $K \subset \cup_{n\geq 1} nV$ et donc il existe N tel que $K \subset \cup_{n=1}^N nV \subset tV \subset tU$ pour tout $t > N$ ($nV \subset tV$ car V est rond).

b) Soit $B \subset E$ bornée. Soit U un voisinage de 0 dans F. Alors $f^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 dans E, donc $B \subset tf^{-1}(U)$ pour t assez grand, et donc $f(B) \subset tU$ pour t assez grand, i.e. $f(B)$ est borné dans F. □

Soit E un evt. Une suite (x_n) dans E est dite de Cauchy si tout voisinage U de 0 contient $x_m - x_n$ pour tout m, n assez grands (i.e. pour tout U il existe n_0 tel que si $m, n \geq n_0$ alors $x_m - x_n \in U$).

Exercice 5.5.1. *Soit E un evt.*

a) Montrer que toute suite de Cauchy dans E est bornée.

b) Montrer qu'une partie B de E est bornée si et seulement si $a_n x_n \to 0$ pour toute suite $x_n \in B$ et toute suite de scalaires a_n telle que $a_n \to 0$.

5.6 Evt métrisables, evt normables

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème de métrisabilité des groupes topologiques (la preuve que nous allons en donner s'adapte facilement à ce cadre). Il est très utile.

Théorème 5.6.1. *(Birkhoff-Kakutani) Un evt séparé E est métrisable si et seulement si sa topologie possède une base dénombrable de voisinages de* 0*. Dans ce cas, il existe une métrique invariante par translation sur E, qui définit la topologie de E.*

Proof. Une implication est évidente, supposons donc que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une base de voisinages de 0. Posons $U_n = E$ pour $n \geq 0$, et pour $n \geq 1$ on construit par récurrence un voisinage rond U_{-n} de 0 tel que $U_{-n} \subset V_n$ et $U_{-n}+U_{-n}+U_{-n} \subset U_{-n+1}$. On pose

$$d(x,y) = \inf\{2^{n_1} + ... + 2^{n_k} |\, n_1,...,n_k \in \mathbb{Z}, y - x \in U_{n_1} + ... + U_{n_k}\}.$$

Clairement $d(x+z,y+z) = d(x,y)$, $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$ et $d(x,y) = d(y,x)$.

Montrons que d définit la topologie de E. Si $2^{-n} < \varepsilon/2$, alors U_{-n} est contenu dans la boule de centre 0 et rayon ε. La partie délicate est de voir que tout U_{-n} contient une boule autour de 0. Nous allons montrer que pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $B_d(0,2^n) \subset U_n$, ce qui prouvera aussi que d est une distance (car $\cap U_n = \{0\}$ puisque E est séparé).

Il s'agit de montrer que si $n_1,...,n_k,n \in \mathbb{Z}$ satisfont $2^{n_1} + ... + 2^{n_k} < 2^n$, alors $\sum_i U_{n_i} \subset U_n$. Cela est trivial pour $k = 1,2$, puisque $U_{n-1} + U_{n-1} \subset U_n$. Supposons que le résultat est valable jusqu'a $k-1$ (et tout n), et montrons-le pour k.

Soit $v = v_1 + ... + v_k$ avec $v_i \in U_{n_i}$. On va montrer que l'on peut trouver $j \in \{1,...,k\}$ tel que $2^{n_1}+...+2^{n_{j-1}} < 2^{n-1}$ et $2^{n_{j+1}}+...+2^{n_k} < 2^{n-1}$. Alors $v = A+v_j+B$, avec $A = v_1 + ... + v_{j-1}, B = v_{j+1} + ... + v_k$ vérifiant $d(A,0) < 2^{n-1}, d(B,0) < 2^{n-1}$, et par hypothèse de récurrence $A,B \in U_{n-1}$ et donc $v \in U_{n-1} + U_{n-1} + U_{n-1} \subset U_n$. L'existence de j est évidente si $\max n_i = n-1$ (on prend l'unique j tel que $n_j = n-1$), ou bien si $2^{n_1}+...+2^{n_k} < 2^{n-1}$, supposons donc que $2^{n_1}+...+2^{n_k} \geq 2^{n-1}$ et $n_i < n-1$ pour tout i. Soit d maximal tel que $2^{n_1}+...+2^{n_d} < 2^{n-1}$, alors $j = d+1$ marche. □

Corollaire 5.6.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre des evt séparés, avec E métrisable. Si l'image de tout borné de E est bornée dans F, alors f est continue.*

Proof. Il suffit de montrer que f est continue en 0 (par invariance par translation de la topologie), et pour cela on peut utiliser des suites (car E est métrisable). Soit donc $x_n \in E$ qui tend vers 0, on veut montrer que $f(x_n)$ tend vers 0. On va montrer qu'il existe une suite $a_n \to \infty$ telle que $a_n x_n \to 0$. Mais alors par hypothèse $(f(a_n x_n))$ est une suite bornée dans F, et comme $f(x_n) = \frac{1}{a_n} f(a_n x_n)$ et $\frac{1}{a_n} \to 0$, on a bien $f(x_n) \to 0$.

Pour montrer l'existence de la suite (a_n), on choisit une métrique invariante par translation d qui définit la topologie de E (l'existence d'une telle distance découle du théorème 5.6.1). Pour tout k il existe n_k tel que $d(x_n,0) < 1/k^2$ pour $n \geq n_k$. En posant $a_n = 1$ pour $n < n_1$ et $a_n = k$ pour $n_k \leq n < n_{k+1}$, on a $d(a_n x_n, 0) \leq k d(x_n,0) < 1/k$ si $n_k \leq n < n_{k+1}$ et $k > 1$, donc $a_n x_n \to 0$. □

Exercice 5.6.1. *Soit E un evt séparé.*

a) Montrer que si E possède un voisinage borné U de 0, alors E est métrisable. Indication: regarder les $(n^{-1}U)$ pour $n \geq 1$.

b) En considérant l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, montrer que la réciproque du point a) est fausse.

Exercice 5.6.2. *(théorème de Kolmogorov) Soit E un evt séparé, qui possède un voisinage convexe et borné U de 0.*

a) Montrer que E possède un voisinage convexe, borné et rond V de 0.

b) Montrer que p_V est une norme qui définit la topologie de E.

Théorème 5.6.2. *Soit E un evtlc séparé. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) E est métrisable.

b) la topologie de E peut être définie par une suite croissante de semi-normes.

c) la topologie de E peut être définie par une suite de semi-normes.

Proof. $a) \implies b)$ Soit (U_n) une base dénombrable de voisinages de 0. On peut supposer que U_n est rond et convexe, car chaque U_n contient un voisinage rond et convexe de 0. Alors $V_n = U_1 \cap ... \cap U_n$ sont décroissants, ronds et convexes, et forment une base de voisinages de 0. Si $p_n = p_{V_n}$, alors $p_n \leq p_{n+1}$ et les p_n définissent la topologie de E (exercice immédiat: combiner la discussion qui précède la proposition 5.1.1 et le théorème 5.3.1).

$b) \implies c)$ est évident.

$c) \implies a)$ voir le point e) du théorème 5.2.1. □

Définition 5.6.1. Un *espace de Fréchet* est un evtlc métrisable et complet.

Exercice 5.6.3. *Montrer que l'espace $\prod_{n\geq 1} \mathbb{K}$ est un espace de Fréchet pour la topologie produit.*

Exercice 5.6.4. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On munit $C(U)$ de la topologie induite par la famille de semi-normes*

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|,$$

K parcourant les compacts de U.

a) Montrer qu'il existe une suite croissante de compacts (K_n) de $\mathbb{R}^d$ tels que $U = \cup_n K_n$ et $K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1})$. En déduire que $C(U)$ est métrisable. Montrer que la topologie de $C(U)$ ne peut pas être définie par une norme.

b) Montrer que $C(U)$ est un espace de Fréchet.

Exercice 5.6.5. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. On munit $C^\infty(U)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$p_{K,n}(f) = \sum_{|m|\leq n} \sup_{x\in K} |D^m f(x)|,$$

K parcourant les compacts de U et n les entiers positifs.

a) Montrer que $C^\infty(U)$ est un espace de Fréchet.

b) En utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli et un argument d'extraction diagonale, montrer que les parties compactes de $C^\infty(U)$ sont exactement les parties fermées et bornées.

Exercice 5.6.6. *Montrer que l'espace* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *est un espace de Fréchet si on le munit de la famille de semi-normes*

$$||f||_{k,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^k |D^m f(x)|, \ |x|^2 = x_1^2 + ... + x_d^2$$

pour $k \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}^d$. *Montrer aussi que les compacts de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *sont exactement les parties fermées et bornées.*

Chapter 6

Le théorème de Hahn-Banach, applications à la dualité

Le théorème de Hahn-Banach figure tout en haut de la liste des plus importants théorèmes de l'analyse fonctionnelle, avec d'innombrables applications. La version la plus courte (mais pas très précise) dit que tout evt séparé localement convexe possède beaucoup d'applications linéaires continues.

6.1 Le théorème de Hahn-Banach, version analytique

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ici le choix du corps des scalaires est important!) et soit $p : V \to \mathbb{R}$ une *jauge* sur V, i.e. une application telle que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ p(ax) = ap(x)$$

pour $x, y \in V$ et $a \geq 0$. Par exemple, p pourrait être une semi-norme, mais il est important de pouvoir choisir des fonctions plus générales, par exemple la jauge de n'importe quelle partie convexe absorbante de V. On dit qu'un forme linéaire ℓ définie sur un sous-espace W de V est *dominée par* p si $\ell(x) \leq p(x)$ pour $x \in W$.

Théorème 6.1.1. *(Hahn-Banach) Soit p une jauge sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, et soit W un sous-espace vectoriel de V. Toute forme linéaire $\ell : W \to \mathbb{R}$ dominée par p se prolonge en une forme linéaire $L : V \to \mathbb{R}$ dominée par p.*

Proof. Nous allons commencer par la partie non formelle de la preuve, l'extension de ℓ à un sous-espace de V de la forme $W' = W + \mathbb{R}v$ avec $v \in V \setminus W$. Il faut donc trouver un $x = \ell(v) \in \mathbb{R}$ qui vérifie $\ell(w) + ax \leq p(w + av)$ pour tous $w \in W, a \in \mathbb{R}$, et il suffit pour cela (en divisant par $|a|$) d'avoir $\ell(w) + x \leq p(w + v)$ et $\ell(w) - x \leq p(w - v)$ pour $w \in W$. Soit $x = \inf_{w \in W} p(w + v) - \ell(w)$, notons que $x > -\infty$ car $p(w + v) - \ell(w) \geq p(w + v) - p(w) \geq -p(-v)$ pour tout $w \in W$. Montrons que $\ell(w) - x \leq p(w - v)$ pour $w \in W$. Il suffit de voir que

$$p(w' + v) - \ell(w') \geq \ell(w) - p(w - v)$$

pour tous $w, w' \in W$. Mais

$$p(w' + v) + p(w - v) \geq p(w + w') \geq \ell(w + w') = \ell(w) + \ell(w'),$$

ce qui permet de conclure.

Le reste est une application directe du lemme de Zorn. Soit A l'ensemble des paires (W', ℓ'), W' étant un sous-espace de V contenant W et ℓ' étant un prolongement de ℓ dominé par p. On ordonne A en posant $(W', \ell') \leq (W'', \ell'')$ si $W' \subset W''$ et si ℓ'' prolonge ℓ'. On vérifie tout de suite que toute partie totalement ordonnée (W_i, ℓ_i) dans A possède un majorant (prendre $\cup_i W_i$ et définir ℓ sur W en recollant les ℓ_i, en notant que celles-ci sont compatibles sur $W_i \cap W_j$ car (W_i, ℓ_i) et (W_j, ℓ_j) sont comparables), donc par le lemme de Zorn A possède un élément maximal (W', ℓ'). Si $W' \neq V$, on prend $v \in V \setminus W'$. L'argument ci-dessus (avec (W, ℓ) remplacé par (W', ℓ')) fournit un prolongement de ℓ' majoré par p sur $W' + \mathbb{R}v$, contredisant la maximalité de (W', ℓ'). Donc $W' = V$, ce qui permet de conclure. □

On dispose aussi d'une version complexe du théorème de Hahn-Banach:

Corollaire 6.1.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, et soit $p : V \to \mathbb{R}$ une semi-norme sur V. Si $\ell : W \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur un sous-espace W de V, telle que $|\ell(x)| \leq p(x)$ pour $x \in W$, alors ℓ s'étend en une forme linéaire L sur V telle que $|L(x)| \leq p(x)$ pour $x \in V$.*

Proof. Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est une conséquence du théorème ci-dessus, supposons donc que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit V_0 l'espace V vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Alors $\ell_1 = \mathrm{Re}(\ell)$ est une forme linéaire sur V_0 et on a $\ell(x) = \ell_1(x) - i\ell_1(ix)$ pour $x \in W$, puisque $\ell(ix) = i\ell(x)$. Comme ℓ_1 est dominée par p sur W, il existe $L_1 : V \to \mathbb{R}$ linéaire, dominée par p et qui étend ℓ_1. Posons $L(x) = L_1(x) - iL_1(ix)$, alors L étend ℓ sur W, est $\mathbb{C}$-linéaire (il suffit de voir que $L(ix) = iL(x)$, ce qui est immédiat) et il reste à voir que $|L(x)| \leq p(x)$. Ecrivons $L(x) = ru$ avec $r = |L(x)|$ et $|u| = 1$. On peut supposer que $r \neq 0$. Alors $r = L(u^{-1}x) \in \mathbb{R}$, donc

$$r = \mathrm{Re}(L(u^{-1}x)) = L_1(u^{-1}x) \leq p(u^{-1}x) = p(x),$$

ce qui permet de conclure. □

6.2 Applications aux evn

Les résultats de ce paragraphe seront systématiquement utilisés dans la pratique, il faut vraiment bien les comprendre.

Dans toute cette section $(X, ||\cdot||)$ est un evn sur $\mathbb{K}$. Le dual continu X' de X est alors un espace de Banach, muni de la norme $||\ell|| = \sup_{x \neq 0} |\ell(x)|/||x||$. Si Y est une partie de X on note $Y^\perp = \{\ell \in X' |\, \ell|_Y = 0\}$ son orthogonal. On voit alors facilement que si l'on note $\pi : X \to X/Y$ la projection canonique, alors $\ell \mapsto \ell \circ \pi$ induit un isomorphisme canonique

$$(X/Y)' \simeq Y^\perp.$$

Théorème 6.2.1. *Soit Y un sous-espace vectoriel d'un evn X.*

a) Tout $\ell \in Y'$ se prolonge en $L \in X'$ de norme $||\ell||$.

b) Pour tout $\ell \in X'$ on a

$$\min_{\ell' \in Y^\perp} ||\ell - \ell'|| = ||\ell|_Y||.$$

c) Si Y est fermé dans X, il existe un isomorphisme isométrique naturel

$$X'/Y^\perp \simeq Y'.$$

Proof. a) Appliquer le corollaire 6.1.1 avec la semi-norme $p(x) = ||\ell||\cdot||x||$. On a bien $|\ell(x)| \leq p(x)$ pour $x \in Y$, donc il existe une forme linéaire L sur X qui prolonge ℓ et telle que $|L(x)| \leq p(x)$ pour $x \in X$. Alors L est continue car $||L|| \leq ||\ell||$. Comme L prolonge ℓ, on a aussi $||L|| \geq ||\ell||$, donc $||L|| = ||\ell||$.

b) Une inégalité est triviale, car $||\ell - \ell'|| \geq ||(\ell - \ell')|_Y|| = ||\ell|_Y||$ pour $\ell' \in Y^\perp$. Ensuite, $\ell|_Y$ s'étend en $L \in X'$ de norme $||\ell|_Y||$ (par le point a)) et $\ell' = \ell - L$ est dans $Y^\perp$ et $||\ell - \ell'|| = ||L|| = ||\ell|_Y||$.

c) La restriction à Y fournit une flèche $X' \to Y'$, qui est surjective par a), dont le noyau est clairement $Y^\perp$, donc elle induit un isomorphisme $X'/Y^\perp \simeq Y'$. Le fait que c'est une isométrie découle du point b). □

Théorème 6.2.2. *Soit $(X, ||\cdot||)$ un evn. Pour tout $x \in X$ on a*

$$||x|| = \max_{\ell \in X', ||\ell|| \leq 1} |\ell(x)|,$$

en particulier pour tout $x \neq 0$ il existe $\ell \in X'$ tel que $\ell(x) \neq 0$, autrement dit X' sépare les points de X.

Proof. Clairement $\sup_{\ell \in X', ||\ell|| \leq 1} |\ell(x)| \leq ||x||$, donc il suffit de montrer qu'il existe $\ell \in X'$ de norme ≤ 1 telle que $|\ell(x)| = ||x||$. On peut supposer que $x \neq 0$. Soit $\ell_0 : \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\ell_0(ax) = a||x||$, alors ℓ_0 est de norme ≤ 1, donc par le théorème ci-dessus elle se prolonge en une forme linéaire ℓ de norme au plus 1 sur X. On a $\ell(x) = ||x||$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 6.2.1. *Montrer que si Y est un sous-espace de X, alors pour tout $z \in X$ on a*

$$d(z, Y) = \max_{\ell \in Y^\perp, ||\ell|| \leq 1} |\ell(z)|.$$

Corollaire 6.2.1. *Soit X un evn.*

a) Si Y est un sous-espace fermé de X et si $z \notin Y$, il existe $\ell \in X'$ nulle sur Y et telle que $\ell(z) \neq 0$.

b) Un sous-espace Y de X est dense dans X si et seulement si $Y^\perp = 0$.

Proof. a) Appliquons le théorème ci-dessus à l'evn X/Y et à l'image $\bar{z}$ de z dans X/Y. Il existe donc $\ell_0 \in (X/Y)'$ telle que $\ell_0(\bar{z}) \neq 0$. La composée de ℓ_0 et de la projection canonique $X \to X/Y$ est une forme linéaire ℓ nulle sur Y et telle que $\ell(z) \neq 0$.

b) Une implication est évidente, pour l'autre appliquer a) à $\bar{Y}$. □

Soient X, Y des espaces de Banach. Si $T \in L(X, Y)$ on définit *l'adjoint (ou la transposée) de T*

$$T' : Y' \to X', \ T'(\ell) = \ell \circ T.$$

Corollaire 6.2.2. *Soient X, Y des espaces de Banach et soit $T \in L(X, Y)$. Alors*

a) On a $T' \in L(Y', X')$ et $||T'|| = ||T||$.

b) On a $\ker(T') = \mathrm{Im}(T)^\perp$.

c) T est d'image dense si et seulement si T' est injectif.

Proof. a) On a, en utilisant le théorème ci-dessus et les définitions des normes subordonnées

$$||T'|| = \sup_{\ell\neq 0} \frac{||T'(\ell)||}{||\ell||} = \sup_{\ell\neq 0}\sup_{x\neq 0} \frac{|\ell(T(x))|}{||x||\cdot||\ell||} =$$

$$\sup_{x\neq 0} \frac{1}{||x||} \sup_{\ell\neq 0} \frac{|\ell(T(x))|}{||\ell||} = \sup_{x\neq 0} \frac{||T(x)||}{||x||} = ||T||.$$

b) On a $T'(\ell) = 0$ si et seulement si $\ell(T(x)) = 0$ pour tout x, i.e. ℓ est orthogonale à $\mathrm{Im}(T)$.

c) Cela découle de la formule $\ker(T') = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et du corollaire 6.2.1. □

6.3 Hahn-Banach "équivariant", moyennabilité

Nous allons montrer une version "équivariante" de Hahn-Banach, qui a quelques belles applications.

Théorème 6.3.1. *(Agnew, Morse) Considérons les données suivantes:*

• *V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p est une jauge sur V.*

• *$\mathscr{F}$ est une famille d'endomorphismes de V, qui commutent deux à deux et telle que $p(Tx) \leq p(x)$ pour $T \in \mathscr{F}, x \in V$.*

• *W est un sous-espace de V qui est stable par tout $T \in \mathscr{F}$.*

Toute forme linéaire $\ell : W \to \mathbb{R}$ invariante[1] *par $\mathscr{F}$ et dominée par p se prolonge en une forme linéaire sur V invariante par $\mathscr{F}$ et dominée par p.*

Proof. On peut supposer que $\mathscr{F}$ est stable par produit et contient l'identité (remplacer $\mathscr{F}$ par l'ensemble des $\prod_{k=1}^n T_k$ avec $n \geq 0$ et $T_k \in \mathscr{F}$). Soit C l'envelope convexe de $\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{F}$ est stable par produit, C l'est aussi: si $T_k, T'_j \in \mathscr{F}$ et $a_k, b_j \in [0,1]$ vérifient $\sum a_k = \sum b_j = 1$, alors $(\sum a_k T_k)(\sum b_j T'_j) = \sum a_k b_j (T_k T'_j)$, $a_k b_j \in [0,1]$, $\sum a_k b_j = 1$ et $T_k T'_j \in \mathscr{F}$.

Posons

$$q(x) = \inf_{T\in C} p(Tx).$$

Lemme 6.3.1. *q est une jauge sur V et $q(x - Tx) \leq 0$ pour $x \in V$ et $T \in C$.*

Proof. On a clairement $q(ax) = aq(x)$ si $a \geq 0$. Montrons que $q(x+y) \leq q(x)+q(y)$ pour tous x, y. Soit $\varepsilon > 0$ et prenons $T, T' \in C$ tels que $q(x) > p(T'x) - \varepsilon$ et $q(y) > p(Ty) - \varepsilon$. Alors (en utilisant $TT' = T'T$ et $TT' \in C$)

$$q(x+y) \leq p(TT'(x+y)) = p(TT'x + T'Ty) \leq$$

$$p(TT'x) + p(T'Ty) \leq p(T'x) + p(Ty) < q(x) + q(y) + 2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

Montrons que $q(x - Tx) \leq 0$ pour $T \in C, x \in V$. En effet, pout tout $n \geq 1$ on a $T_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k \in C$ et donc

$$q(x - Tx) \leq p(T_n(1-T)x) = \frac{1}{n} p(x - T^n x) \leq \frac{p(x) + p(T^n(-x))}{n} \leq \frac{p(x) + p(-x)}{n},$$

et en faisant $n \to \infty$ on obtient $q(x - Tx) \leq 0$. □

[1] i.e. $\ell(Tx) = \ell(x)$ pour $T \in \mathscr{F}, x \in W$.

Enfin, notons que $\ell(x) = \ell(Tx)$ pour $x \in W, T \in C$, et donc $\ell(x) = \ell(Tx) \leq p(Tx)$ pour $T \in C, x \in W$. Ainsi ℓ est dominée par q sur W. Hahn-Banach montre donc que ℓ s'étend en une forme linéaire L sur V, dominée par q. Il faut montrer que $L(Tx) = L(x)$ pour $T \in C$ et $x \in V$, et par linéarité il suffit de voir que $L(x - Tx) \leq 0$, qui découle de l'inégalité $q(x - Tx) \leq 0$. □

Soit G un monoide et soit $\ell^\infty(G)$ l'espace de Banach des fonctions bornées $f : G \to \mathbb{R}$, muni de la norme sup. Une *moyenne invariante sur* G est une forme linéaire $L : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ telle que

• L est invariante par translation: $L(f(\cdot + g)) = L(f)$ pour $f \in \ell^\infty(G)$ et $g \in G$ où $f(\cdot + g)(x) = f(x + g)$ pour $x \in G$.

• L est une moyenne: pour tout $f \in \ell^\infty(G)$ on a

$$\inf_{g \in G} f(g) \leq L(f) \leq \sup_{g \in G} f(g).$$

On dit que G est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante non nulle sur G.

Théorème 6.3.2. *Tout monoide abélien G est moyennable.*

Proof. Dans le théorème ci-dessus on prend $V = \ell^\infty(G)$, $W = \mathbb{R} \cdot 1$ le sous-espace des fonctions constantes, $\mathscr{F}$ la famille d'endomorphismes de V donnée par les $f \mapsto f(\cdot + g)$ pour $g \in G$. On prend la forme linéaire $\ell(a \cdot 1) = a$ sur W. On pose enfin

$$p(f) = \sup_{g \in G} f(g),$$

une jauge sur V. On vérifie facilement que les conditions du théorème sont satisfaites, donc ℓ se prolonge en une forme linéaire L sur V invariante par $\mathscr{F}$ et dominée par p. Il reste à voir que $\inf_{g \in G} f(g) \leq L(f) \leq \sup_{g \in G} f(g)$. Comme $L(a \cdot 1) = a$ et comme $(\inf_{g \in G} f(g)) \cdot 1 \leq f \leq (\sup_{g \in G} f(g)) \cdot 1$, il suffit de vérifier que si $f_1 \leq f_2$ alors $L(f_1) \leq L(f_2)$. Mais $L(f_1) - L(f_2) = L(f_1 - f_2) \leq p(f_1 - f_2) \leq 0$, puisqu'il est évident que $p(f) \leq 0$ si $f \leq 0$. Cela permet de conclure. □

Corollaire 6.3.1. *(limite de Banach) Il existe une forme linéaire* LIM : $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ *telle que*

a) si (a_n) converge alors $\mathrm{LIM}((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Pour tout $(a_n) \in \ell^\infty$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \mathrm{LIM}((a_n)) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

c) Pour tout $(a_n) \in \ell^\infty$ on a $\mathrm{LIM}(a_1, a_2, ...) = \mathrm{LIM}(a_2, a_3, ...)$.

Exercice 6.3.1. *Donner une preuve plus directe du corollaire, comme suit. Soit $V = \ell^\infty$ et soit $W = c$ le sous-espace des suites convergentes de V. L'application* $\lim : W \to \mathbb{R}$ *est linéaire, de norme* 1*, donc s'étend en une forme linéaire $L : V \to \mathbb{R}$ de norme* 1*. Posons*

$$\mathrm{LIM}((a_n)) = L(a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, ...).$$

Montrer que LIM *satisfait toutes les propriétés du corollaire.*

Corollaire 6.3.2. *Pour tout groupe abélien G il existe une application finiment additive*[2] $\mu : \mathscr{P}(G) \to [0,1]$ *telle que* $\mu(G) = 1$ *et* μ *est invariante par translation, i.e.* $\mu(gA) = \mu(A)$ *pour* $A \subset G$.

Proof. Soit L une forme linéaire comme dans le théorème ci-dessus. Il suffit de poser $\mu(A) = L(1_A)$ pour $A \subset G$. □

Exercice 6.3.2. *Montrer que le groupe libre à deux générateurs n'est pas moyennable.*

L'axiome du choix permet de montrer qu'il n'existe aucune mesure positive non nulle sur $(S^1, \mathscr{P}(S^1))$ invariante par rotation. En observant que S^1 est un groupe abélien on obtient le remarquable résultat suivant:

Théorème 6.3.3. *(Banach) Il existe une application additive non nulle* $\mu : \mathscr{P}(S^1) \to [0,1]$ *invariante par rotation.*

Remarque 6.3.4. Un résultat encore plus remarquable (dû à Hausdorff, Banach et Tarski) est le fait que le théorème ci-dessous n'est plus vrai pour S^d si $d > 1$.

6.4 Hahn-Banach, version géométrique

Dans ce paragraphe on va travailler dans un cadre très général, mais qui est bien utile pour les applications. Nous allons donc supposer partout que X est un evt séparé sur $\mathbb{K}$. Souvent, X sera en fait localement convexe. Nous allons étudier le problème de séparation des parties convexes disjointes de X. Les résultats établis dans ce paragraphe ont beaucoup d'applications à la structure fine des espaces de Banach.

On dit qu'une forme linéaire $\ell : X \to \mathbb{K}$ sépare une partie C_1 d'une autre partie C_2 de X si

$$\sup\ \mathrm{Re}(\ell(C_2)) \le \inf \mathrm{Re}(\ell(C_1)).$$

Noter que si ℓ sépare C_1 de C_2, alors $-\ell$ sépare C_2 de C_1. Notons aussi que $C = C_1 - C_2$ est convexe et que

$$\sup\ \mathrm{Re}(\ell(C_2)) \le \inf \mathrm{Re}(\ell(C_1))$$

est équivalent à $\inf \mathrm{Re}(\ell(C)) \ge 0$, i.e. ℓ sépare C et $\{0\}$. On supposera toujours que C_1, C_2 sont non vides, sinon la question n'est pas vraiment amusante.

Théorème 6.4.1. *Soit X un evt séparé. Si C_1, C_2 sont des convexes disjoints, et si au moins l'un d'entre eux possède un point intérieur, alors C_1, C_2 sont séparés par un* $\ell \in X' \setminus \{0\}$ *convenable.*

Proof. Pour simplifier supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On peut supposer que $0 \in \mathrm{Int}(C_1)$. On procède en trois étapes:

• réduction au cas où $|C_2| = 1$: soit $z \in C_2$, et soit $K = C_1 - C_2 + z$. Alors K est convexe, ne contient pas z et $0 \in \mathrm{Int}(K)$. Si une forme linéaire ℓ sépare K et $\{z\}$, alors elle sépare C_1 et C_2.

• construction d'une forme linéaire ℓ qui sépare K et $\{z\}$. Soit p la jauge de K, on a donc $p(z) \ge 1$. On définit une forme linéaire sur $\mathbb{R}z$ en posant $\ell_0(az) = ap(z)$.

[2]Rappelons que cela veut dire $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour $A, B \subset G$ disjoints.

Alors ℓ_0 est dominée par p sur $\mathbb{R}z$ (si $a \geq 0$, on a $\ell_0(az) = p(az)$, sinon $\ell_0(az) \leq 0 \leq p(az)$), donc par Hahn-Banach ℓ_0 s'étend en une forme linéaire ℓ sur X dominée par p. En particulier $\ell(x) \leq 1 \leq \ell(z)$ pour $x \in K$, donc ℓ sépare K et $\{z\}$.

• preuve du fait qu'une telle forme linéaire ℓ est continue (noter que l'argument ci-dessus n'utilise pas la structure d'evt de X!). Soit U un voisinage de 0 contenu dans K, tel que $U = -U$ (prendre un voisinage V de 0 contenu dans K et poser $U = V \cap (-V)$). Alors $|\ell(x)| \leq 1$ pour $x \in U$. Si $\varepsilon > 0$, $|\ell(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \in \varepsilon U$, donc ℓ est continue en 0 et donc partout. □

Théorème 6.4.2. *Si X est un evt localement convexe séparé et si C_1, C_2 sont des convexes fermés disjoints, avec C_1 compact, alors il existe $\ell \in X'$ tel que*

$$\sup \mathrm{Re}(\ell(C_2)) < \inf \mathrm{Re}(\ell(C_1)).$$

Proof. Puisque C_1 est compact, $C_1 - C_2$ est fermé (excellent exercice!) et comme il ne contient pas 0, il existe un voisinage U de 0 qui ne rencontre pas $C_1 - C_2$, et on peut supposer que U est convexe puisque E est localement convexe. Comme $C_1 - C_2$ est convexe, d'après le théorème ci-dessus il existe $\ell \in X' \setminus \{0\}$ telle qu'en posant $\phi = \mathrm{Re}(f)$ on ait $\inf_{x \in C_1, y \in C_2} \phi(x - y) \geq \sup_{u \in U} \phi(u)$. Il suffit de montrer que la dernière quantité est strictement positive. Cela est très facile: comme $\phi \neq 0$ (car $f \neq 0$), il existe x tel que $\phi(x) = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a $\varepsilon x \in U$, et $\phi(\varepsilon x) = \varepsilon > 0$. □

Corollaire 6.4.1. *Soit E un evtlc séparé.*

a) Si C est un convexe fermé de E et si $x \in X \setminus C$, il existe $\ell \in X'$ tel que

$$\mathrm{Re}(\ell(x)) < \inf_{z \in C} \mathrm{Re}(\ell(z)).$$

b) Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, pour tout $x \notin F$ il existe $\ell \in X'$ nulle sur F et telle que $\ell(x) \neq 0$.

Exercice 6.4.1. *Soit E un evtlc séparé.*

a) Montrer que toute forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E.

b) Soit $x_1, ..., x_n \in E$ une famille libre. Montrer que l'application $E' \to \mathbb{K}^n$ envoyant ℓ sur $(\ell(x_1), ..., \ell(x_n))$ est surjective.

c) Montrer que tout sous-espace de dimension finie de E possède un complémentaire fermé dans E.

6.5 Le théorème de Krein-Milman

On fixe comme toujours le corps des scalaires $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit A une partie de X.

Définition 6.5.1. On dit qu'une partie E de A est une *partie extrémale de A* si $E \neq \emptyset$ et si pour tous $y, z \in A$ et $t \in]0, 1[$ on a

$$ty + (1 - t)z \in E \implies x, y \in E.$$

Un *point extrémal* de A est une partie extrémale de A réduite à un élément. On note $\mathrm{Ex}(A)$ l'ensemble des points extrémaux d'une partie A de X.

Remarque 6.5.1. 1. Autrement dit, $x \in A$ est un point extrémal si toute égalité $x = ty + (1-t)z$ avec $y, z \in A, t \in]0, 1[$ implique $y = z = x$.

2. Il est évident qu'une intersection de parties extrémales de A est vide ou une partie extrémale de A. Notons aussi que si E est une partie extrémale de A et si A est une partie extrémale de B, alors E est une partie extrémale de B.

3. Si A est une partie de X et si ℓ est une forme linéaire sur X, alors

$$A' = \{x \in A | \operatorname{Re}(\ell(x)) = \inf_{y \in A} \operatorname{Re}(\ell(y))\}$$

est une partie extrémale de A, si A' est non vide. Notons que $A' \neq \emptyset$ si A est compact et ℓ est continue.

Exercice 6.5.1. *a) Montrer que la boule unité de l'espace* c_0 *des suites qui convergent vers* 0 *n'a pas de point extrémal.*

b) Quels sont les points extrémaux de la boule unité de l'espace c des suites convergentes? En déduire que c et c_0 *ne sont pas isométriques. Sont-ils isomorphes en tant qu'espaces de Banach?*

b) Quels sont les points extrémaux de la boule unité de $L^2([0,1])$*? Et de la boule unité de* $\ell^\infty(\mathbb{N})$*?*

Exercice 6.5.2. *Une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est dite bi-stochastique si* $a_{ij} \geq 0$ *pour tous* i, j*, et si la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est* 1*. Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bi-stochastiques* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des matrices de permutation, i.e. celles ayant un seul coefficient non nul sur chaque ligne et sur chaque colonne.*

Exercice 6.5.3. *Soit* $A \subset \mathbb{R}^3$ *l'enveloppe convexe de l'ensemble* $\{(x, y, 0) |\ x^2 + y^2 = 2x\} \cup \{(0, 0, \pm 1)\}$*. Montrer que* A *est un compact convexe et que* $\operatorname{Ex}(A)$ *n'est pas fermé dans* A*.*

Exercice 6.5.4. *Soit* X *l'espace* ℓ^2 *des suites* (x_n) *telles que* $\sum_{n \geq 1} |x_n|^2 < \infty$*, et soit* K *le sous-ensemble des suites* (x_n) *telles que* $\sum_n 4^n |x_n|^2 \leq 1$*.*

a) Montrer que K *est un convexe compact de* X*.*

b) Soit E_n *l'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $x_k = 0$ *pour* $k > n$ *et soit* $\mathscr{E}_n$ *la frontière de* $C \cap E_n$*. Montrer que* $\cup_n \mathscr{E}_n$ *est dense dans* C *et contenu dans* $\operatorname{Ex}(C)$*. Ainsi* $\operatorname{Ex}(C)$ *est dense dans* C*.*

Le théorème suivant est un des résultats de base de l'analyse fonctionnelle:

Théorème 6.5.2. *(Krein-Milman) Soit* X *un evt localement convexe séparé et soit* K *un compact non vide de* X*.*

a) On a $\operatorname{Ex}(K) \neq \emptyset$*, plus précisément pour tout* $\ell \in X'$ *il existe* $x \in \operatorname{Ex}(K)$ *tel que*

$$\sup_{y \in K} \operatorname{Re}(\ell(y)) = \operatorname{Re}(\ell(x)).$$

b) Si K *est convexe, alors* K *est l'adhérence de l'enveloppe convexe de* $\operatorname{Ex}(K)$*.*

Proof. a) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble (non vide) des parties fermées extrémales de K, ordonné par inclusion. Si $\mathscr{F}_1$ est une partie totalement ordonnée de $\mathscr{F}$, alors $B := \cap_{A\in\mathscr{F}_1} A$ est non vide[3], fermé et une partie extrémale de K (remarque 6.5.1), qui fournit une borne inférieure de $\mathscr{F}_1$. Par le lemme de Zorn, $\mathscr{F}$ possède un élément minimal A.

Montrons que A est un point extrémal de K. Sinon, soient $p \neq q \in A$ et prenons $\ell \in X'$ tel que $\mathrm{Re}(\ell(p)) \neq \mathrm{Re}(\ell(q))$. Alors

$$A' = \{x \in A | \, \mathrm{Re}(\ell(x)) = \inf_{y\in A} \mathrm{Re}(\ell(y))\}$$

est dans $\mathscr{F}$ (remarque 6.5.1) et est strictement contenue dans A car au moins l'un des p, q n'est pas dans A', une contradiction.

Soit maintenant $\ell \in X'$ et soit $B = \{x \in K | \sup_{y\in K} \mathrm{Re}(\ell(y)) = \mathrm{Re}(\ell(x))\}$. Alors B est un compact non vide, donc il contient un point extrémal x, d'après ce que l'on vient de démontrer. Alors $x \in \mathrm{Ex}(K)$ (remarque 6.5.1), ce qui permet de conclure.

b) Soit Co l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{Ex}(K)$. Il est évident que $\mathrm{Co} \subset K$. Supposons qu'il existe $x \in K \setminus \mathrm{Co}$. Par le théorème de séparation il existe $\ell \in X'$ tel que $\mathrm{Re}(\ell(x)) > \sup_{y\in\mathrm{Co}} \mathrm{Re}(\ell(y))$. Mais

$$\sup_{y\in\mathrm{Co}} \mathrm{Re}(\ell(y)) \geq \sup_{y\in\mathrm{Ex}(K)} \mathrm{Re}(\ell(y)) \geq \sup_{x\in K} \mathrm{Re}(\ell(x))$$

d'après le point a). Cette contradiction finit la preuve. □

Remarque 6.5.3. En dimension finie on peut être plus précis: un théorème classique de Carathéodory (dont la preuve est un excellent exercice!) affirme que tout point d'un convexe compact K d'un evt de dimension $n < \infty$ est une combinaison convexe d'au plus $n+1$ points extrémaux de K. En particulier pour toute fonction continue convexe $f : K \to \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathrm{Ex}(K)$ tel que $f(x) = \max_{k\in K} f(k)$.

Exercice 6.5.5. *Soit $f : \mathbb{Z}^2 \to [0, 1]$ une fonction telle que*

$$f(x, y) = \frac{f(x-1, y) + f(x+1, y) + f(x, y-1) + f(x, y+1)}{4}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

Exercice 6.5.6. *Soit K un espace compact. Montrer que* $\mathrm{Ex}(B_{C(K)'}) = \{\pm\delta_k | \, k \in K\}$*, où* $\delta_k(f) = f(k)$.

Exercice 6.5.7. *En utilisant l'exercice ci-dessus, montrer que si K, K' sont des espaces topologiques compacts tels qu'il existe une isométrie linéaire $C(K) \to C(K')$, alors K et K' sont homéomorphes.*

Le théorème de Banach-Stone est à comparer avec le miraculeux (et fort délicat) théorème suivant. Le cas $K = [0, 1]^2$ est déjà hautement nontrivial et répond à une question de Banach.

Théorème 6.5.4. *(Milyutin) Si K est un espace métrique compact non dénombrable, alors $C(K)$ est un Banach isomorphe à* $C[0, 1]$.

[3]Par compacité il suffit de voir que toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{F}_1$ est non vide, ce qui est évident car $\mathscr{F}_1$ est totalement ordonnée.

Chapter 7

Topologies faibles, réflexivité

Ce chapitre contient une variété d'applications des résultats du chapitre précédent à la topologie faible (et faible *) d'un evn, ainsi que l'étude des espaces de Banach réflexifs. C'est un des chapitres techniques du cours, et mélange des arguments topologiques, géométriques et analytiques pour établir pas mal de résultats fondamentaux de l'analyse fonctionnelle.

Convention: On fixe comme toujours $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Si X est un evn, on note

$$B_X = \{x \in X |\, ||x|| \leq 1\},\ S_X = \{x \in X |\, ||x|| = 1\}$$

la boule unité fermée, respectivement la sphère unité de X. L'espace $X' = L(X, \mathbb{K})$ (dual topologique de X) est un espace de Banach pour la norme $||\ell|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\ell(x)|}{||x||}$. La topologie de X définie par sa norme sera appelée *topologie forte* sur X.

7.1 Evn réflexifs

Si X est un evn, alors X' est un Banach et donc on peut définir le *bidual* de X

$$X'' := (X')'.$$

C'est un espace de Banach et on dispose de l'application canonique

$$J : X \to X'',\ J(x)(\ell) = \ell(x)$$

envoyant x sur l'évaluation en x. Le résultat suivant est une reformulation du théorème 6.2.2.

Proposition 7.1.1. *L'application canonique $J : X \to X''$ est une isométrie, en particulier J est injective et son image est fermée.*

Introduisons une définition qui va bien nous occuper:

Définition 7.1.1. On dit qu'un evn X est *réflexif* si $J : X \to X''$ est bijective.

Attention, il ne suffit pas de montrer qu'il existe un isomorphisme, voire même une isométrie entre X et X'' pour déduire que X est réflexif: un théorème profond de R.C. James montre l'existence d'un espace de Banach X qui n'est pas réflexif et qui est isométrique à son bidual.

Le résultat basique suivant est très utile.

Théorème 7.1.1. *Soit X un espace de Banach.*

a) Si X est réflexif, alors tout sous-espace vectoriel fermé de X l'est aussi.

b) X est réflexif si et seulement si X' l'est.

Proof. a) Soit $L \in Y''$ et définissons $\Lambda \in X''$ par $\Lambda(\ell) = L(\ell|_Y)$. Il existe $x \in X$ tel que $\Lambda(\ell) = \ell(x)$ pour tout $\ell \in X'$. Si $x \notin Y$, il existe (corollaire 6.2.1) $\ell \in X'$ nulle sur Y et non nulle en x, ce qui contredit légalité $L(\ell|_Y) = \ell(x)$. Donc $x \in Y$ et $L(\ell|_Y) = (\ell|_Y)(x)$ pour $\ell \in X'$. Comme tout $\ell' \in Y'$ est de la forme $\ell|_Y$ avec $\ell \in X'$ (théorème 6.2.1), Y est réflexif.

b) Si X est réfléxif, il est formel de voir que X' l'est aussi. Dans l'autre sens, si X' est réfléxif, alors $(X')'$ l'est aussi. Mais le plongement isométrique $X \to (X')'$ réalise X comme sous-espace fermé de $(X')'$, donc X est réfléxif d'après a). $\square$

Exercice 7.1.1. *a) Montrer que $c_0' = \ell^1$ et que $(\ell^1)' = \ell^\infty$. En déduire que c_0, ℓ^1, ℓ^∞ ne sont pas réflexifs.*

b) Soit K un espace topologique compact infini. Montrer que $C(K)$ n'est pas réflexif. Indication: montrer que $C(K)$ contient une copie isométrique de c_0.

c) Montrer que $L^1([0,1])$ n'est pas réflexif. Indication: montrer que $L^1([0,1])$ contient une copie isométrique de ℓ^1.

Exercice 7.1.2. *Soit X un Banach et soit Y un sous-espace vectoriel fermé de X.*

a) Montrer que si X est réflexif, alors X/Y l'est aussi.

b) Montrer que si Y et X/Y sont réflexifs, alors X l'est aussi.

Le résultat suivant est souvent utile pour montrer qu'un Banach n'est pas réflexif:

Proposition 7.1.2. *Si X est un Banach réflexif, alors pour tout $\ell \in X'$ il existe $x \in S_X$ tel que $||\ell|| = |\ell(x)|$.*

Proof. Soit $\ell \in X'$. Il existe $\Lambda \in B_{(X')'}$ tel que $||\ell|| = |\Lambda(\ell)|$ (théorème 6.2.2), et il existe $x \in X$ tel que $\Lambda(\ell) = \ell(x)$ pour tout ℓ. Donc $||\ell|| = |\ell(x)|$ et $||x|| \leq 1$. Mais on a aussi trivialement $||x|| \geq 1$, donc $||x|| = 1$. $\square$

Exercice 7.1.3. *En considérant la forme linéaire*

$$\ell(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt,$$

montrer que $C([-1,1])$ n'est pas réflexif.

Exercice 7.1.4. *a) Montrer que si X est un Banach tel que X' est séparable, alors X l'est aussi.*

b) En déduire que $C([-1,1])$ (muni de la norme sup) n'est pas réflexif. Indication: regarder la distance entre deux masses de Dirac.

La réciproque de la proposition est vraie, mais infiniment plus difficile à établir. C'est l'objet du théorème fort délicat suivant, dont on n'aura pas besoin.

Théorème 7.1.2. *(R.C. James) Un Banach X est réflexif si et seulement si pour tout $\ell \in X'$ il existe $x \in S_X$ tel que $|\ell(x)| = ||\ell||$.*

7.2 Topologies faible et faible *

Les topologies faible et faible * sur un evt et son dual topologique jouent un rôle fondamental en analyse fonctionnelle, car elles sont la source de beaucoup de parties compactes (et convexes).

Définition 7.2.1. Soit X un evt.

• La *topologie faible (ou* $\sigma(X, X')$*)* sur X est la topologie définie par la famille de semi-normes $p_\ell(x) = |\ell(x)|$, ℓ parcourant X'. Pour $A \subset X$, A^w désigne A muni de la topologie induite par la topologie faible sur X.[1]

• La *topologie faible * (ou topologie préfaible, ou encore topologie* $\sigma(X', X)$*)* sur X' est la topologie définie par la famille de semi-normes $p_x(\ell) = |\ell(x)|$, x parcourant X. Pour $A \subset X'$ on écrit A^{w*} pour A muni de la topologie induite par la topologie faible * sur X'.

Il découle de la définition et des propriétés de la topologie définie par une famille de semi-normes que:

• les topologies faible et faible * sont localement convexes. La topologie faible * est toujours séparée, celle faible sur X est séparée si et seulement si $\cap_{\ell \in X'} \ker(\ell) = \{0\}$. Nous avons déjà vu qu'il existe des evt X pour lesquels $X' = \{0\}$ (par exemple $L^p([0,1])$ pour $0 < p < 1$), donc en général la topologie faible n'est pas séparée. Cependant, le point b) du corollaire 6.4.1 (avec $F = \{0\}$) montre que **la topologie faible sur un evt séparé localement convexe est séparée**.

• En particulier, si X est un evt séparé de dimension finie, alors la topologie faible et la topologie de départ sur X sont les mêmes, et si X est un evn de dimension finie les topologies forte, faible et faible * sur X' sont les mêmes. La situation est très différente en dimension infinie, voir l'exercice ci-dessous.

• Soit X un evn. Si X est réflexif, en comparant les voisinages de 0 on voit immédiatement que les topologies faible et faible * sur X' sont les mêmes. On verra plus tard que la réciproque est vraie.

• La topologie faible sur X est la topologie la plus faible rendant continue chaque $\ell \in X'$, et la topologie faible * sur X' est la topologie la plus faible rendant continue chaque application

$$\mathrm{ev}_x : X' \to \mathbb{K}, \ell \mapsto \ell(x), x \in X.$$

En particulier:

• la topologie faible sur X est plus faible (il vaut mieux!) que la topologie de départ sur X, et la topologie faible * sur X' est plus faible que la topologie faible sur X' (qui est plus faible que la topologie forte sur X') si X est un evn.

• (propriété universelle) une application $f : Y \to X^w$ d'un espace topologique vers X^w est continue si et seulement si $\ell \circ f : Y \to \mathbb{K}$ est continue pour tout $\ell \in X'$. Une application $f : Y \to (X')^{w*}$ d'un espace topologique vers $(X')^{w*}$ est continue si et seulement si $\mathrm{ev}_x \circ f$ est continue pour tout $x \in X$.

• Une suite (x_n) dans X converge dans X^w vers x (on dit alors que la suite *converge faiblement*) si et seulement si $\ell(x_n)$ converge vers $\ell(x)$ pour tout $\ell \in X'$. Une suite (ℓ_n) dans X' converge dans $(X')^{w*}$ vers $\ell \in X'$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \ell_n(x) = \ell(x)$ pour tout $x \in X$.

[1] w est pour "weak".

Si X est un evn, alors B_X est faiblement fermé dans X, car

$$B_X = \bigcap_{\ell \in B_{X'}} \{x \in X \,|\, |\ell(x)| \leq 1\}.$$

Cependant S_X n'est que rarement fermée pour la topologie faible, comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 7.2.1. *Soit X un Banach de dimension infinie.*

a) Montrer que tout ouvert non vide U de X pour la topologie faible est non borné, donc la topologie faible n'est pas la même que la topologie forte.

b) Montrer que l'adhérence faible de S_X est B_X.

c) Quelle est l'adhérence de $S_{X'}$ pour la topologie faible *?

Exercice 7.2.2. *Soit $X = c_0$ et soient (e_n) les vecteurs standard, i.e. e_n est la suite $(1_{i=n})_{i\geq 1}$. Rappelons que $X' = \ell_1$ et $X'' = \ell_\infty$.*

a) Montrer que (e_n) converge faiblement, mais pas fortement vers 0 dans X.

b) Montrer que (e_n) converge vers 0 pour la topologie faible * dans X', mais ne converge pas pour la topologie faible de X'.

c) Montrer que $(e_n + e_{n+1} + ...)$ converge vers 0 pour la topologie faible * de X'', mais ne converge pas pour la topologie faible (utiliser l'existence d'une limite de Banach).

Tout fermé de X^w est fermé dans X, car la topologie faible est plus faible que la topologie de X. Cependant, un fermé de X n'a pas de raison d'être fermé pour la topologie faible, mais on dispose du résultat très utile suivant (dont la réciproque est vraie, mais triviale):

Théorème 7.2.1. *Tout convexe fermé d'un evtlc séparé est fermé pour la topologie faible.*

Proof. Soit C un convexe fermé d'un evtlc séparé X et montrons que $X \setminus C$ est faiblement ouvert. Soit $x \in X \setminus C$, par le théorème de séparation il existe $\ell \in X'$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Re}(\ell(x)) < a < \mathrm{Re}(\ell(c))$ pour $c \in C$. Alors $U = \{y \in X | \mathrm{Re}(\ell(y)) < a\}$ est un ouvert faible de X tel que $x \in U \subset X \setminus C$. □

Corollaire 7.2.1 (Mazur)**.** *Soit X un Banach et soit (x_n) une suite dans X qui converge faiblement vers x. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ de somme 1 tels que $||x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i|| < \varepsilon$.*

Proof. Appliquer le théorème à $C = \overline{\mathrm{Conv}(x_1, x_2, ...)}$ (adhérence pour la topologie forte): il est faiblement fermé, donc doit contenir x car $x_n \in C$. □

On finit ce paragraphe avec un résultat très utile et ses applications:

Lemme 7.2.1. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient $\ell, \ell_1, ..., \ell_n$ des formes linéaires sur X telles que $\cap_{i=1}^n \ker(\ell_i) \subset \ker(\ell)$. Alors $\ell \in \mathrm{Vect}(\ell_1, ..., \ell_n)$.*

Proof. Soit V l'image de $L : X \to \mathbb{K}^n, x \mapsto (\ell_1(x), ..., \ell_n(x))$. Comme $\ker(L) \subset \ker(\ell)$, on peut définir une forme linéaire $u : V \to \mathbb{K}$ en posant $u(y) = \ell(x)$ si $y = L(x)$ (cela ne dépend pas du choix de x). On a $u \circ L = \ell$, et u se prolonge en une forme linéaire $u' : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, qui est forcément de la forme $(x_1, ..., x_n) \mapsto a_1x_1 + ... + a_nx_n$, et alors $\ell = \sum a_i \ell_i$. □

Théorème 7.2.2. *Soit X un evt. Alors*

a) Toute forme linéaire continue sur $(X')^{w*}$ est de la forme ev_x pour un $x \in X$.

b) X' est le dual topologique de X^w.

Proof. a) Par continuité $U = \{\ell \in X' | \, |L(\ell)| < 1\}$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible *, donc il existe $x_1, ..., x_n \in X$ tels que $\{\ell \in X' | \, |\ell(x_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\} \subset U$. En particulier si $\ell(x_i) = 0$ pour tout i, alors $|L(a\ell)| < 1$ pour tout $a \in \mathbb{K}$, donc $L(\ell) = 0$. Ainsi $\cap_{i=1}^n \ker(\mathrm{ev}_{x_i}) \subset \ker(L)$. Le lemme ci-dessus montre qu'il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tels que $L = \sum a_i \mathrm{ev}_{x_i} = \mathrm{ev}_{a_1x_1+...+a_nx_n}$.

b) La preuve est identique et laissée en exercice. □

Proposition 7.2.1. *Soit X un espace de Banach.*

a) Si X^w possède une base dénombrable de voisinages de 0, alors X' est de dimension (algébrique) au plus dénombrable.

b) Si $(X')^{w*}$ possède une base dénombrable de voisinages de 0, alors X est fe dimension (algébrique) au plus dénombrable.

On verra dans un cours prochain (conséquence immédiate du lemme de Baire) que si un Banach X est de dimension au plus dénombrable, alors il est de dimension finie. La proposition montrera donc que si X est de dimension infinie, alors la topologie faible sur X et la topologie faible * sur X^* ne sont jamais métrisables!

Proof. a) Soit (U_n) une base dénombrable de voisinages de 0 dans X^w. Quitte à diminuer les U_n on peut supposer que $U_n = \{x \in X| \, |\ell(x)| < 1, \ \ell \in A_n\}$, pour certains ensembles finis $A_n \subset X'$. Soit $\ell_0 \in X'$, alors $U = \{x \in X| \, |\ell_0(x)| < 1\}$ est un voisinage de 0 dans X^w, donc il existe n tel que $U_n \subset U$. Si $x \in \cap_{\ell \in A_n} \ker(\ell)$ alors $ax \in U_n \subset U$ pour tout $a \in \mathbb{K}$, donc $\ell_0(x) = 0$. Le lemme ci-dessus montre alors que $\ell_0 \in \mathrm{Vect}(A_n)$. Donc $X' = \mathrm{Vect}(\cup_n A_n)$ est de dimension au plus dénombrable.

b) L'argument est identique et laissé au lecteur. □

7.3 Le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Dans tout ce paragraphe X est un evn. Si X est de dimension infinie, alors par le lemme de Riesz $B_{X'}$ n'est jamais compacte pour la topologie forte. Le théorème fondamental ci-dessous, qui a beaucoup d'applications, montre que la faiblesse de la topologie faible * contribue en fait à sa force...

Théorème 7.3.1. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Si X est un evn, alors $B_{X'}$ est compact pour la topologie faible *.*

Proof. Pour $x \in X$ soit $D_x = \{z \in \mathbb{K}| \, |z| \leq ||x||\}$, et soit $K = \prod_{x \in X} D_x$, muni de la topologie produit. Alors K est compact et la flèche

$$f : B_{X'} \to K, f(\ell) = (\ell(x))_{x \in X}$$

réalise un homéomorphisme de $B_{X'}^{w*}$ sur

$$K' = \{(a_x)_x \in K| \, a_{x+y} = a_x + a_y, a_{\lambda x} = \lambda a_x \ \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

En effet, f est continue car chaque $B_{X'} \to D_x, \ell \to \ell(x)$ est continue, f est trivialement bijective et $f^{-1} : K' \to B_{X'}$ est continue aussi: par la propriété universelle, il suffit de vérifier que $K' \to B_{X'} \to \mathbb{K}$ est continue pour tout $x \in X$ (la seconde flèche étant $\ell \mapsto \ell(x)$), or cette composée n'est rien d'autre que celle induite par la projection sur la composante x, qui est continue. Il suffit donc de montrer que K' est fermé dans K, ce qui est évident, car chacune des conditions $a_{x+y} - a_x - a_y = 0$ et $a_{\lambda x} - \lambda a_x = 0$ est une condition fermée. □

Exercice 7.3.1. *Montrer que c_0 n'est pas isométrique au dual d'un espace de Banach. Indication: Krein-Milman!*

Corollaire 7.3.1. *Pour tout evn X les compacts de $(X')^{w*}$ sont précisément le fermés et bornés de $(X')^{w*}$.*

Proof. Conséquence immédiate du théorème. □

Corollaire 7.3.2. *Si X est un evn de dimension infinie, alors la topologie faible * sur X' est différente de la topologie forte.*

Proof. Sinon $B_{X'}$ serait compacte pour la topologie forte, contredisant le lemme de Riesz. □

En fait on peut faire nettement mieux, mais cela coute beaucoup plus cher: le difficile théorème suivant montre que dans un Banach X de dimension infinie les topologies forte et faible * sur X' n'ont même pas les mêmes suites convergentes:

Théorème 7.3.2. *(Josefson, Nissenzweig) Si X est un Banach de dimension infinie, il existe une suite (ℓ_n) dans $S_{X'}$ telle que ℓ_n converge vers 0 pour la topologie faible *.*

Soit X un Banach et posons $K = (B_{X'})^{w*}$, un compact. L'application

$$X \to C(K), x \mapsto (\ell \mapsto \ell(x))$$

est une isométrie (si l'on munit $C(K)$ de la norme sup) car $||x|| = \sup_{||\ell|| \leq 1} |\ell(x)|$. Nous allons utiliser ces observations dans la preuve des deux corollaires ci-dessous:

Corollaire 7.3.3. *Soit X un Banach. Alors X est séparable si et seulement si $(B_{X'})^{w*}$ est métrisable. En particulier, si X est séparable alors toute suite bornée (ℓ_n) dans X' possède une sous-suite qui converge pour la topologie faible *.*

Proof. Si $(B_{X'})^{w*}$ est métrisable, alors $K = (B_{X'})^{w*}$ est un espace métrique compact, donc $C(K)$ est séparable et comme $X \to C(K)$ est une isométrie, X est séparable.

Supposons que X est séparable et soit (x_n) une suite dense dans B_X. Soit $D = \{z \in \mathbb{K} |\, |z| \leq 1\}$ et considérons l'application

$$F : (B_{X'})^{w*} \to D^{\mathbb{N}},\ F(\ell) = (\ell(x_n)).$$

Par densité des x_n on voit que F est injective. De plus F est continue si l'on munit $D^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit, car chaque $\ell \mapsto \ell(x_n)$ est continue par définition de la topologie faible *. Comme $(B_{X'})^{w*}$ est compact, F est un plongement et comme $D^{\mathbb{N}}$ est métrisable, il en est de même de $(B_{X'})^{w*}$. □

Exercice 7.3.2. *Donner une preuve directe du fait que* $(B_{X'})^{w*}$ *est métrisable et séquentiellement compact pour un Banach séparable* X*, sans passer par Banach-Alaloglu.*

Corollaire 7.3.4. *(Banach-Mazur) a) Tout espace de Banach est isométrique à un sous-espace fermé de* $C(K)$ *pour un espace compact* K*.*

b) Tout Banach séparable est isométrique à un sous-espace fermé de $C([0,1])$*.*

Proof. Combiner la discussion ci-dessus avec le fait que $C(K)$ est isométrique à un sous-espace fermé de $C([0,1])$ si K est un espace métrique compact (ce qui a été déjà vu). □

7.4 Les théorèmes de Goldstine, Kakutani et Milman-Pettis

Soit X un evn. On dispose du plongement isométrique $J : X \to X''$ et il est naturel de se demander quelle est la topologie induite sur X par la topologie faible * sur X''. La réponse est on ne peut plus simple: c'est la topologie faible. En effet:

Proposition 7.4.1. *L'application* $J : X^w \to J(X)^{w*}$ *est un homéomorphisme.*

Proof. C'est clairement une bijection, il suffit de voir que J et J^{-1} sont continues. Pour montrer la continuité de J, il suffit de montrer celle de $J : X^w \to (X'')^{w*}$, ou encore celle de la composée avec l'évaluation en ℓ, or cette composée n'est rien d'autre que ℓ, qui est continue. Pour la continuité de $J^{-1} : J(X)^{w*} \to X^w$, il suffit de voir que pour tout $\ell \in X'$ la composée J^{-1} et de ℓ est continue, or cette composée n'est rien d'autre que $z \mapsto z(\ell)$, qui est continue. □

Le résultat suivant est un peu technique, mais il sera l'ingrédient principal de bon nombre de résultats délicats. Notons que $B_{X'} = \cap_{x\in B_X}\{\ell \in X' | \, |\ell(x)| \leq 1\}$ est fermé pour la topologie faible * de X' pour tout evn X. Le résultat suivant montre que $B_{X''}$ est l'adhérence (pour la topologie faible *) de l'image de B_X par J.

Théorème 7.4.1. *(Goldstine)* $J(B_X)$ *est dense dans* $(B_{X''})^{w*}$*. En particulier* $J(X)$ *est dense dans* $(X'')^{w*}$*.*

Proof. Supposons pour simplifier que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et qu'il existe $\Lambda \in B_{X''} \setminus \overline{J(B_X)}$ (l'adhérence étant pour la topologie faible *). Comme $\overline{J(B_X)}$ est un fermé convexe de $(X'')^{w*}$, le théorème de séparation fournit une forme linéaire continue L sur $(X'')^{w*}$ telle que $L(\Lambda) > \sup_{x\in B_X} L(J(x))$. Par le théorème 7.2.2 il existe $\ell \in X'$ tel que $L(u) = u(\ell)$ pour tout $u \in X''$, donc $\Lambda(\ell) > \sup_{x\in B_X} J(x)(\ell) = \sup_{x\in B_X} \ell(x) = ||\ell||$. Cela est impossible, puisque $\Lambda \in B_{X''}$, donc $|\Lambda(\ell)| \leq ||\ell||$. □

Remarque 7.4.2. Ainsi, un sous-espace vectoriel fortement fermé de Y' n'est pas forcément fermé pour la topologie faible * de Y', contrairement à ce qui se passe avec la topologie faible! En effet, il suffit de choisir $Y = X'$ avec X un Banach non réflexif, alors X est dense dans Y' pour la topologie faible *, mais $X \neq Y' = X''$.

Exercice 7.4.1. *Démontrer le lemme de Helly: soit X un evn réel, $l_1, ..., l_n \in X'$ et $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ tel que $||x|| < M + \varepsilon$ et $l_i(x) = c_i$ pour tout i.
b) pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ on a

$$|a_1c_1 + ... + a_nc_n| \leq M||a_1l_1 + ... + a_nl_n||.$$

On arrive maintenant au deuxième théorème fondamental de compacité:

Théorème 7.4.3. *(Kakutani) Un Banach X est réflexif si et seulement si B_X est compact pour la topologie faible.*

Proof. Si X est réflexif, alors $J : X^w \to (X'')^{w*}$ est un homéomorphisme (proposition 7.4.1) et $J(B_X) = B_{X''}$, donc $B_X = J^{-1}(B_{X''})$ est compacte pour la topologie faible, en tant qu'image continue du compact (Banach-Alaoglu) $B_{X''}$. Dans l'autre sens, si B_X est faiblement compact, alors $J(B_X) \subset B_{X''}$ est compact pour la topologie faible *, donc fermé. Mais $J(B_X)$ est dense dans $B_{X''}$ d'après le théorème de Goldstine, donc $J(B_X) = B_{X''}$, et donc X est réflexif. □

Corollaire 7.4.1. *Dans un Banach réflexif X les compacts de X^w sont précisément les fermés bornés.*

Corollaire 7.4.2. *Un Banach X est réflexif si et seulement si les topologies faible et faible * sur X' sont les mêmes.*

Proof. Un sens a déjà été vu (et est trivial). Si les topologies faible et faible * sur X' sont les mêmes, alors par Banach-Bourbaki-Alaoglu $B_{X'}$ est compacte pour la topologie faible, donc par Kakutani X' est réflexif, et on conclut par le théorème 7.1.1. □

Corollaire 7.4.3. *Soit C un convexe fermé non vide dans le Banach réflexif X. Pour tout $x \in X$ il existe $c \in C$ tel que $d(x, C) = ||x - c||$.*

Attention, ce c n'a aucune raison d'être unique, même si $\dim X < \infty$!

Proof. Soit $r = d(x, C)$, on peut supposer que $r > 0$. Soit

$$F_n = \{c \in C|\, ||a - c|| \leq r + \frac{1}{n}\} = C \cap (x + (r + 1/n)B_X).$$

Alors F_n est faiblement compact car C est faiblement fermé et B_X est faiblement compact. Les F_n étant décroissants, il existe $c \in \cap_{n \geq 1} F_n$, et alors $c \in C$ et $||a - c|| = r$. □

Théorème 7.4.4. *Soit X un Banach. Alors B_X^w est métrisable si et seulement si X' est séparable.*

Proof. Si X' est séparable alors $B_{X''}^{w*}$ est métrisable, et B_X^w s'identifie (via J) à un sous-espace de $B_{X''}^{w*}$, donc est métrisable aussi.

Supposons que B_X^w est métrisable et soit (U_n) une base dénombrable de voisinages de 0 dans B_X^w. On peut supposer que $U_n = \{x \in B_X|\, |\ell(x)| < 1, \ell \in A_n\}$ pour des ensembles finis $A_n \subset X'$. Il suffit de montrer que $\cup_n A_n$ est dense dans X'. Soit $L \in X''$ telle que L s'annule sur $\cup A_n$, et montrons que $L(\ell) = 0$ pour tout $\ell \in X'$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Par le théorème de Goldstine il existe x_n tels que $|L(u) - u(x_n)| < \varepsilon$ pour $u \in \{\ell\} \cup A_1 \cup ... \cup A_n$. On a donc $|u(x_)| < 1$ pour $u \in A_1 \cup ... \cup A_n$ et donc $x_n \in U_1 \cap ... \cap U_n$. Ainsi (x_n) tend vers 0 pour la topologie faible et donc $\ell(x_n) \to 0$. Comme $|L(\ell) - \ell(x_n)| < \varepsilon$, on a $|L(\ell)| \leq \varepsilon$ et comme ε est arbitraire, on a $L(\ell) = 0$. □

Corollaire 7.4.4. *Soit X un Banach réflexif. Toute suite bornée dans X possède une sous-suite qui converge faiblement.*

Proof. On peut supposer que la suite (x_n) est à valeurs dans B_X. Comme B_X est un espace métrique compact (par Kakutani et le théorème ci-dessus), (x_n) possède une sous-suite convergente pour la topologie faible.

□

Un espace de Banach X est dit *uniformément convexe* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in S_X, ||x - y|| \geq \varepsilon \implies ||\frac{x+y}{2}|| < 1 - \delta.$$

On dispose alors du remarquable résultat suivant:

Théorème 7.4.5. *(Milman-Pettis) Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Proof. On suppose pour simplifier que le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que $J(X)$ est dense dans X'' (car J est une isométrie, donc $J(X)$ est fermé dans X''). Soit $L \in X''$, que l'on peut supposer de norme 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\ell \in X'$ tel que $L(\ell) > 1 - \delta$, où δ est fourni par la définition de l'uniforme convexité de X. Soit

$$U = \{L' \in X'' |\, L'(\ell) > 1 - \delta\},$$

un voisinage de L pour la topologie faible $*$. Comme $J(B_X)$ est dense dans $B_{X''}$ pour la topologie faible *, il existe $x \in J(B_X) \cap U$. De plus si $y \in J(B_X) \cap U$ alors $\frac{x+y}{2}(\ell) > 1 - \delta$, donc $||\frac{x+y}{2}|| > 1 - \delta$ et donc $||x - y|| < \varepsilon$. On en déduit que $J(B_X) \cap U \subset B_{X''}(x, \varepsilon)$ et comme L est dans l'adhérence (pour la topologie faible *) de $J(B_X) \cap U$, on a $||L - x|| \leq \varepsilon$, avec $x \in J(X)$. Cela montre que $J(X)$ est dense dans X'' et finit la preuve. □

Les deux résultats de compacité ci-dessous sont très délicats et nous ne nous en servirons pas par la suite. Noter que le premier combiné avec le théorème de Kakutani permet de démontrer le théorème 7.1.2.

Théorème 7.4.6. *(R.C.James) Soit X un Banach et soit A une partie faiblement fermée de X. Alors A est faiblement compacte si et seulement si pour tout $\ell \in X'$ il existe $a \in A$ tel que $\sup_{x \in A} |\ell(x)| = |\ell(a)|$.*

Théorème 7.4.7. *(Odell-Rosenthal) Si X est un Banach séparable, les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) X ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ_1.

b) B_X est séquentiellement dense dans $B_{X''}$ pour la topologie faible *.

c) $B_{X''}$ est séquentiellement compacte pour la topologie faible *.

7.5 Variations autour de Milman-Pettis

Ce paragraphe est optionnel et peut-être ignoré dans une première lecture. Il décrit une autre preuve, beaucoup plus compliquée mais très jolie, du théorème de Milman-Pettis. En passant, on démontre deux autres résultats intéressants.

Soit (X, Σ) un espace mesurable[2]. Si $\Sigma = \mathscr{P}(X)$, on ne fait pas apparaître Σ dans les notations ci-dessous. Soit $\ell^\infty(X, \Sigma)$ l'adhérence de $\mathrm{Vect}_{A\in\Sigma} 1_A$ dans $\ell^\infty(X)$ (muni de la norme sup, pour laquelle c'est un Banach). Chaque $\Lambda \in \ell^\infty(X, \Sigma)'$ induit naturellement un élement $\mu_\Lambda \in \mathrm{ba}(X, \Sigma)$, en posant $\mu_\Lambda(A) = \Lambda(1_A)$ pour $A \in \Sigma$. D'autre part chaque $\mu \in \mathrm{ba}(X, \Sigma)$ induit une forme linéaire continue $\Lambda_\mu = \int_X (\cdot) d\mu$ sur $\ell^\infty(X, \Sigma)$, comme suit. Il suffit de définir une forme linéaire bornée sur $\mathrm{Vect}_{A\in\Sigma} 1_A$. Si $f \in \mathrm{Vect}_{A\in\Sigma} 1_A$, alors $f^{-1}(x) \in \Sigma$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, et on pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{x\in\mathbb{K}} f(x)\mu(f^{-1}(x)).$$

En d'autres termes, si $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ avec $X = A_1 \coprod \ldots \coprod A_n$, on a $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$. On vérifie comme d'habitude que $f \mapsto \int_X f d\mu$ est bien une forme linéaire sur $\mathrm{Vect}_{A\in\Sigma} 1_A$, et la deuxième description de $\int_X f d\mu$ montre que $|\int_X f d\mu| \leq ||f|_\infty \cdot ||\mu||$, donc cette forme linéaire est bornée.

Théorème 7.5.1. *(Hildebrandt, Fichtenholtz, Kantorovitch) Les applications ci-dessus sont des bijections isométriques inverses une de l'autre*

$$\ell^\infty(X, \Sigma)' \simeq \mathrm{ba}(X, \Sigma).$$

En particulier $\ell^\infty(X)'$ et $\mathrm{ba}(X)$ sont isométriquement isomorphes.

Proof. Le seul point nontrivial à vérifier est le caractère isométrique de la construction $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ (puisque par construction $\Lambda = \Lambda_\mu$ sur $\mathrm{Vect}_{A\in\Sigma}(1_A)$ si $\mu = \mu_\Lambda$). La discussion ci-dessus montre que $||\Lambda_\mu|| \leq ||\mu||$. Dans l'autre sens, soit $\varepsilon > 0$ et soit $X = A_1 \coprod \ldots \coprod A_n$ une partition avec $A_i \in \Sigma$. Ecrivons $\mu(A_i) = z_i|\mu(A_i)$ avec $|z_i| = 1$ et considérons $f = \sum_{i=1}^n z_i 1_{A_i}$. Alors $||f||_\infty \leq 1$ et donc

$$||\Lambda_\mu|| \geq |\Lambda_\mu(f)| = |\sum_{i=1}^n z_i \mu(A_i)| = \sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| > ||\mu|| - \varepsilon.$$

Cela permet de conclure. □

En combinant le théorème de dualité ci-dessus et le théorème de Hahn-Banach, on obtient le très joli:

Théorème 7.5.2. *(Goldstine-Pettis) Soit X un espace de Banach et $B_X = \{x \in X| \ ||x|| \leq 1\}$ sa boule unité. Pour tout $F \in X''$ il existe $\mu \in \mathrm{ba}(B_X)$ positive telle que $||\mu|| = ||F||$ et*

$$F(\ell) = \int_{B_X} \ell(x) d\mu(x), \ \forall \ell \in X'.$$

Proof. Comme X' est un sous-espace de $\ell^\infty(B_X)$, par Hahn-Banach F se prolonge en un $\Lambda \in \ell^\infty(B_X)'$ de même norme que F. Il existe donc $\mu \in \mathrm{ba}(B_X)$ de norme $||\mu|| = ||F||$ telle que

$$F(\ell) = \int_{B_X} \ell(x) d\mu(x), \ \forall \ell \in X'.$$

[2] Il suffirait en fait de supposer que Σ est une algèbre de Boole sur un ensemble X.

On va modifier μ pour le rendre positif. Posons $\mu^{\pm} = \frac{|\mu|\pm\mu}{2}$, alors $\mu^{\pm} \in \mathrm{ba}(B_X)$ sont positives et on voit facilement en revenant aux définitions que $||\mu^+|| + ||\mu^-|| = ||\mu|| = ||F||$. Posons alors $\lambda(A) = \mu^+(A) + \mu^-(-A)$ pour $A \subset B_X$. La mesure $\sigma(A) = \mu^-(-A)$ vérifie trivialement $||\sigma|| = ||\mu^-||$, donc $||\lambda|| = ||F||$ et λ est positive. De plus, on voit immédiatement que

$$\int_{B_X} f(x) d\sigma(x) = \int_{B_X} f(-x) d\mu^-(x),$$

car il suffit de tester sur les fonctions simples. Donc pour $\ell \in X'$ on a

$$\int_{B_X} \ell(x) d\sigma(x) = \int_{B_X} \ell(x) d\mu^+(x) + \int_{B_X} \ell(-x) d\mu^-(x)$$

$$= \int_{B_X} \ell(x) d\mu^+(x) - \int_{B_X} \ell(x) d\mu^-(x) = \int_{B_X} \ell(x) d\mu(x) = F(\ell).$$

□

Nous sommes maintenant prêts pour la deuxième preuve du théorème de Milman-Pettis. Soit X un Banach uniformément convexe et $S_X = \{x \in X| \; ||x|| = 1\} \subset B_X = \{x \in \; X| \; ||x|| \leq 1\}$. On suppose pour simplifier que le corps des scalaires est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on munit B_X de la σ-algèbre $\Sigma = \mathscr{P}(B_X)$.

Lemme 7.5.1. *a) Pour tout $\ell \in X'$ il existe $x \in S_X$ tel que $|\ell(x)| = ||\ell||$.*
b) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in S_X, y \in B_X, \ell \in X', \ell(x) = ||\ell|| \;\; \text{et} \; ||x - y|| > \varepsilon \implies \ell(y) \leq (1 - \delta)||\ell||.$$

Proof. a) On peut supposer que $||\ell|| = 1$. Soient $x_n \in S_X$ tels que $\ell(x_n) \to 1$. Il suffit de voir que (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ et soit δ tel que $\sup_{\substack{||x||=||y||=1 \\ ||x-y|| \geq \varepsilon}} ||\frac{x+y}{2}|| \leq 1 - \delta$. Pour n assez grand on a $\ell(x_n) > 1 - \delta$, donc $\ell(\frac{x_n + x_m}{2}) > 1 - \delta$ et donc (puisque $||\ell|| = 1$) on a $||\frac{x_n+x_m}{2}|| > 1 - \delta$, ce qui force $||x_n - x_m|| \leq \varepsilon$.

b) Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ et des $x_n \in S_X, y_n \in B_X, \ell_n \in X'$ tels que $\ell_n(x_n) = ||\ell_n||$, $||x_n - y_n|| > \varepsilon$ et $\ell_n(y_n) > (1 - 1/n)||\ell_n||$. On peut supposer que $||\ell_n|| = 1$. Alors $\ell_n(y_n) > 1 - 1/n$ force $||y_n|| \to 1$, et donc pour n assez grand on a $||x_n - \frac{y_n}{||y_n||}|| > \varepsilon$ (car $y_n - \frac{y_n}{||y_n||}$ tend vers 0) et donc

$$\sup_n ||\frac{x_n + \frac{y_n}{||y_n||}}{2}|| < 1.$$

Cela force $\sup_n \frac{\ell_n(x_n) + \frac{\ell_n(y_n)}{||y_n||}}{2} < 1$, ce qui est clairement absude car $\ell_n(x_n), \ell_n(y_n), ||y_n|| \to 1$. □

Soit $F \in X''$ de norme 1 et soit $\ell_n \in S_{X'}$ tels que $F(\ell_n) > 1 - 1/n$. Par le lemme 7.5.1 il existe $x_n \in S_X$ tels que $\ell_n(x_n) = 1$. Nous allons montrer que (x_n) est de Cauchy. Par le théorème de Goldstine-Pettis il existe $\mu \in \mathrm{ba}(B_X)$ positive telle que $||\mu|| = 1$ et

$$F(\ell) = \int_{B_X} \ell(x) d\mu(x), \;\; \forall \ell \in X'.$$

Soit

$$A_{n,\varepsilon} = \{x \in B_X| \; ||x - x_n|| < \varepsilon\}.$$

Nous allons montrer ci-dessous que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon}) = 0$, donc pour m, n assez grands on a $A_{n,\varepsilon} \cap A_{m,\varepsilon} \neq \emptyset$ et par l'inégalité triangulaire on obtient $||x_m - x_n|| < 2\varepsilon$, donc (x_n) est de Cauchy. Soit $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ et montrons que $F(\ell) = \ell(y)$ pour $\ell \in X'$.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A_\varepsilon = \{x \in B_X | \, ||x - y|| < \varepsilon\}$. Pour n assez grand A_ε contient $A_{n,\varepsilon/2}$, donc $\mu(B_X \setminus A_\varepsilon) \leq \mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon/2})$ et comme ce dernier tend vers 0 et μ est positive, on a $\mu(B_X \setminus A_\varepsilon) = 0$. Ainsi

$$|F(\ell) - \ell(y)| = |\int_{B_X} (\ell(x) - \ell(y))d\mu(x)| \leq \int_{B_X} |\ell(x-y)|d\mu(x) = \int_{A_\varepsilon} |\ell(x-y)|d\mu(x)$$

$$\leq \varepsilon \cdot ||\ell|| \cdot \mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon \cdot ||\ell||.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre que $F(\ell) = \ell(y)$.

Il nous reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon}) = 0$. C'est une simple application du lemme 7.5.1. En effet, soit $\delta > 0$ comme dans le point b) du lemme 7.5.1. Si $x \in B_X \setminus A_{n,\varepsilon}$ on obtient $\ell_n(x) \leq 1 - \delta$. Comme $\ell_n(x) \leq ||\ell_n|| \cdot ||x|| = 1$ pour $x \in A_{n,\varepsilon}$, on obtient

$$1 - 1/n < F(\ell_n) = \int_{A_{n,\varepsilon}} \ell_n(x)d\mu(x) + \int_{B_X \setminus A_{n,\varepsilon}} \ell_n(x)d\mu(x)$$

$$\leq \mu(A_{n,\varepsilon}) + (1-\delta)\mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon}) = \mu(B_X) - \delta\mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon}),$$

ce qui montre que $\mu(B_X \setminus A_{n,\varepsilon}) < \frac{1}{n\delta}$ pour n assez grand et permet de conclure.

Chapter 8

Le théorème de Banach-Steinhaus, compacité faible

Ce chapitre est probablement le plus délicat de tout le cours, avec bon nombre de résultats franchement subtils. On commence doucement par deux résultats très importants, que l'on va utiliser tout le long du cours: le lemme de Baire et le théorème de Banach-Steinhaus. Ensuite nous étudions la compacité faible dans les espaces L^1 et les espaces de mesures. Cela demande une étude très fine de la compacité faible (théorèmes d'Eberlein-Smulian), ainsi que des applications délicates du lemme de Baire en théorie de la mesure (théorèmes de Nikodym et de Vitali-Hahn-Saks).

8.1 Le "lemme" de Baire

Le "lemme" de Baire est un des outils les plus formidables dont on dispose en analyse, et une source inépuisable de résultats nontriviaux et surprenants.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $E \subset X$ est *nulle part dense ou rare* si $\bar{E}$ est d'intérieur vide, i.e. E n'est dense dans aucune boule de X. Cela équivaut aussi à la densité de $X \setminus \bar{E}$ dans X. Une partie E de X est dite *maigre* si E est réunion dénombrable de sous-ensembles rares, et *générique* si $E^c = X \setminus E$ est maigre.

Théorème 8.1.1 ("lemme" de Baire)**.** *Dans un espace métrique complet* (X, d) *une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. De manière équivalente, toute partie maigre est d'intérieur vide, et donc toute partie générique est dense.*

Proof. Soit (U_n) une suite d'ouverts denses de X et soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte. Montrons que $\cap_{n\geq 1} U_n$ rencontre $B(x_0, r_0)$. Comme U_1 est dense, il existe $x_1 \in U_1 \cap B(x_0, r_0/3)$, et comme U_1 est ouvert il existe $0 < r_1 < r_0/3$ tel que $B(x_1, r_1) \subset U_1 \cap B(x_0, r_0/3)$. On itère cette construction et on fabrique une suite (x_n) dans X et une suite (r_n) dans $\mathbb{R}$ telles que $0 < r_n < r_{n-1}/3$ et $B(x_n, r_n) \subset U_{n-1} \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}/3)$. Si $m > n$ alors

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... < r_n/3 + r_{n+1}/3 + ... \leq r_n/2,$$

car $r_{n+k} \leq r_n/3^k$. On en déduit que (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un $x \in X$ qui vérifie $d(x, x_n) \leq r_n/2$ pour tout n, en particulier $x \in B(x_n, r_n) \subset U_{n-1}$ pour tout n. Donc $x \in \cap_{n\geq 1} U_n$, et aussi $d(x, x_0) \leq r_0/2$, donc $x \in B(x_0, r_0)$, ce qui finit la preuve. $\square$

Exercice 8.1.1. *Montrer que l'on peut remplacer "espace métrique complet" par "espace localement compact (séparé)" dans le lemme de Baire.*

Le résultat suivant couplé à la proposition **??** montre que dans un Banach de dimension infinie X les topologies faible (sur X) et faible * (sur X') ne sont pas métrisables.

Corollaire 8.1.1. *Un Banach de dimension au plus dénombrable est de dimension finie.*

Proof. Soit X un Banach de dimension dénombrable et infinie. Soit $e_1, e_2, ...$ une base de X et soit $F_n = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$. Alors F_n est fermé dans X (car de dimension finie) et $\cup_n F_n = X$, donc par le lemme de Baire un des F_n contient une boule $B(x, r)$ de X. Mais alors $x \in F_n$ et $B_X \subset F_n$, donc $X \subset F_n$, une contradiction. □

8.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

Le théorème de Banach-Steinhaus est un des piliers de l'analyse fonctionnelle, un énoncé fort surprenant et utile. Nous allons commencer par une version très générale, mais pas spécialement appétissante...

Un F*-espace* est un evt dont la topologie est définie par une distance invariante par translation et qui en fait un espace métrique complet. Ainsi les espaces de Fréchet sont les F-espaces localement convexes. Bien sûr, tout espace de Banach est un F-espace. Si X, Y sont des evt, on note $L(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Théorème 8.2.1. *(Banach-Steinhaus) Soient X un F-espace, Y un evt séparé et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L(X, Y)$. Si $\{T_i(x) | \, i \in I\}$ est borné dans Y pour tout $x \in X$, alors (T_i) est équicontinue: pour tout voisinage V de 0 dans Y il existe un voisinage W de 0 dans X tel que $T_i(W) \subset V$ pour tout i.*

Proof. Soit V un voisinage de 0 et soit U un voisinage de 0 tel que $\overline{U} - \overline{U} \subset V$. Alors

$$E = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(\overline{U})$$

est fermé dans X et par hypothèse $X = \cup_{n\geq 1} nE$: pour tout $x \in X$ l'ensemble $\{T_i(x) | \, i \in I\}$ est borné, donc contenu dans $n\overline{U}$ pour un certain $n \geq 1$. Le lemme de Baire montre que l'un des nE est d'intérieur non vide, et il en est alors de même de E (qui est homéomorphe à nE pour tout $n \geq 1$). Il existe donc $x \in E$ et un voisinage W de 0 tel que $x + W \subset E$. Mais alors $T_i(W) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset V$ pour tout $i \in I$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 8.2.1. *Adapter la preuve pour montrer le résultat plus général suivant: soient X, Y des evt séparés et soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille dans $L(X, Y)$. Soit B l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $\{T_i(x) | \, i \in I\}$ est borné dans Y. Si B n'est pas maigre, alors $B = X$ et (T_i) est équicontinue.*

Le corollaire suivant est immédiat à partir du théorème, mais il est franchement miraculeux (et très utile).

Corollaire 8.2.1. *(continuité automatique) Soit X un F-espace, Y un evt séparé et soit (T_n) une suite dans $L(X,Y)$, qui converge simplement vers une application $T : X \to Y$. Alors $T \in L(X,Y)$.*

Proof. Soit U un voisinage de 0 dans Y et soit W un voisinage de 0 tel que $\overline{W} \subset U$. Comme $(T_n(x))$ est borné pour tout n, le théorème de Banach-Steinhaus fournit un voisinage V de 0 dans X tel que $T_n(V) \subset W$ pour tout n. Mais alors $T(V) \subset \overline{W} \subset U$, donc T est continue en 0, et comme elle est clairement linéaire, on peut conclure. □

Spécialisons maintenant la discussion ci-dessus au cas rencontré le plus souvent "dans la nature". Son avantage par rapport au cas général est qu'il est très facile à retenir!

Théorème 8.2.2. *(Banach-Steinhaus) Soit X un espace de Banach et Y un evn.*
a) Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille dans $L(X,Y)$. Si

$$\forall x \in X, \ \sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < \infty,$$

alors $\sup_i ||T_i|| < \infty$.
b) Si (T_n) est une suite dans $L(X,Y)$ qui converge simplement vers une application T, alors $T \in L(X,Y)$.

Proof. a) Soit $B(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r (dans X ou dans Y, selon la situation). Par le théorème de Banach-Steinhaus général il existe $r > 0$ tel que $T_i(B(0,r)) \subset B(0,1)$ pour tout i, donc $||T_i|| \leq 1/r$ pour tout i.

Comme cela ne mange pas (trop) de pain, donnons aussi une preuve "plus concrète" dans ce cas particulier. Soit $X_n = \{x \in X| \, ||T_i(x)|| \leq n, \, \forall i\}$. Alors $X = \cup_n X_n$, et chaque X_n est fermé (puisque les T_i sont continues), donc par le lemme de Baire il existe un X_n contenant une boule $B(x_0,r)$. Si $||z|| < r$, alors $||T_i(z+x_0)|| \leq n$ pour tout i. Ainsi

$$||T_i(z)|| = ||T_i(z+x_0) - T_i(x_0)|| \leq 2n$$

pour tout $||z|| < r$ et tout i, donc $||T_i(x)|| < 1$ pour $||x|| < r/2n$ et tout i, ce qui permet de conclure que $||T_i|| \leq \frac{2n}{r}$ pour tout i et finit la preuve.

b) Voir le corollaire ci-dessus. □

Remarque 8.2.3.
1. Toutes les hypothèses sont essentielles. Par exemple, sans l'hypothèse de complétude le théorème tombe en défaut: prendre X l'espace des suites de support fini, avec la topologie uniforme, et $T_n(a) = na_n$ si $a = (a_m)_m$.

2. La preuve montre qu'il suffit de supposer que $\{T_i(x)| \, i \in I\}$ est borné pour tout x dans un ensemble non maigre. En particulier, si (f_i) est une famille de formes linéaires continues sur un Banach X, telles que $\sup_i |f_i(x)| < \infty$ pour tout x dans un ensemble non maigre, alors $\sup_i \ ||f_i|| < \infty$.

3. On peut aussi démontrer le théorème de Banach-Steinhaus (version "Banach") "à la main", sans passser par le lemme de Baire. La preuve suivante est due à Sokal. Supposons que $\sup_i ||T_i|| = \infty$, il existe donc une suite (T_{i_n}) telle

que $||T_{i_n}|| \geq 4^n$. Pour simplifier on écrit T_n au lieu de T_{i_n}. Notons que si $T : X \to Y$ est une application linéaire continue entre des evn, alors pour tous $x \in X$ et $r > 0$ on a

$$\sup_{||y-x||\leq r} ||T(y)|| = \sup_{||z||\leq 1} ||T(x+rz)|| \geq$$

$$\sup_{||z||\leq 1} \frac{||T(x+rz)|| + ||T(x-rz)||}{2} \geq r \sup_{||z||\leq 1} ||T(z)|| = r||T||.$$

On pose $x_0 = 0$ et on utilise succéssivement cette observation pour construire une suite (x_n) telle que $||x_n - x_{n-1}|| \leq 3^{-n}$ et $||T_n(x_n)|| \geq \frac{2}{3}\frac{||T_n||}{3^n}$. La suite (x_n) converge (puisque $\sum ||x_n - x_{n-1}|| < \infty$) vers un $x \in X$ tel que $||x - x_n|| \leq \sum_{k\geq n} ||x_{k+1} - x_k|| \leq \sum_{k\geq n} 3^{-k-1} = \frac{1}{2\cdot 3^n}$, donc $||T_n(x) - T_n(x_n)|| \leq ||T_n|| \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n}$. Mais alors

$$||T_n(x)|| \geq ||T_n(x_n)|| - ||T_n(x) - T_n(x_n)|| \geq \frac{2}{3}\frac{||T_n||}{3^n} - ||T_n|| \cdot \frac{1}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{6}\cdot\frac{||T_n||}{3^n}$$

et donc $\sup_n ||T_n(x)|| = \infty$, une contradiction!

Corollaire 8.2.2. *Soit X un Banach.*

a) Si $S \subset X$ est une partie telle que $\ell(S) \subset \mathbb{K}$ est borné pour tout $\ell \in X'$, alors S est bornée.

b) Si $S \subset X'$ est une partie telle que $\{\ell(x) | \ell \in S\}$ est borné pour tout $x \in X$, alors S est bornée dans X'.

Proof. a) Pour $s \in S$ on considère $\mathrm{ev}_s : X' \to \mathbb{K}, \ell \mapsto \ell(s)$. Alors $||\mathrm{ev}_s|| = \sup_{||\ell||\leq 1} ||\ell(s)|| = ||s||$. Il suffit alors d'appliquer Banach-Steinhaus aux $(\mathrm{ev}_s)_{s\in S}$.

b) Conséquence directe de Banach-Steinhaus. □

Corollaire 8.2.3. *Soit X un Banach.*

a) X (muni de la topologie forte) et X^w ont les mêmes parties bornées.

b) X' (muni de la topologie forte) et $(X')^{w*}$ ont les mêmes parties bornées.

Exercice 8.2.2. *Soit X un Banach.*

a) Si une suite (x_n) dans X converge faiblement vers x, alors $\sup_n ||x_n|| < \infty$ et $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$.

b) Si une suite (ℓ_n) dans X' converge pour la topologie faible * dans X' vers ℓ, alors $\sup_n ||\ell_n|| < \infty$ et $||\ell|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||\ell_n||$.

Discutons maintenant une conséquence ultra-classique, mais très jolie, du théorème de Banach-Steinhaus. Pour $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$ on note

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

le $n$ème coefficient de Fourier de f. La série de Fourier de f est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$.

Théorème 8.2.4. *L'ensemble des $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ dont la série de Fourier diverge sur un sous-ensemble dense de $[-\pi,\pi]$ est générique.*

Proof. Soit

$$S_N(f)(x) = \sum_{|n|\le N} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

Nous allons montrer que pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ l'ensemble des f pour lesquels $\sup_N |S_N(f)(x)| < \infty$ est maigre. Ainsi l'ensemble des $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ dont la série de Fourier diverge en un point donné $x \in [-\pi,\pi]$ est générique, et en prenant une suite dense $x_1, x_2, ... \in [-\pi,\pi]$ on peut conclure (une intersection dénombrable de parties génériques est générique).

En considérant les formes linéaires $\ell_n(f) = S_n(f)(x)$, il suffit de voir que $\sup_n ||\ell_n|| = \infty$. On a

$$S_n(f)(x) = (f*D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)dy,\ D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin x/2}$$

donc[1]

$$||\ell_n|| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|dx \ge c\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{|x|}dx$$

$$\ge c\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge c\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \ge c' \ln n.$$

□

Exercice 8.2.3. *(Schur-Mertens) Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer que $\sum_n |a_n| < \infty$ si et seulement si la série $\sum_{m\ge 0}(\sum_{n=0}^m a_{m-n}b_n)$ converge pour toute série convergente $\sum_{n\ge 0} b_n$.*

Dans les deux exercices ci-dessous on note ℓ^p l'espace des suites (a_n) de nombres complexes telles que $\sum_{n\ge 1}\ |a_n|^p < \infty$.

Exercice 8.2.4. *(Landau) Soit $p \in]1,\infty[$ et soit q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que $\sup_{N\ge 1} |a_1b_1 + ... + a_Nb_N| < \infty$ pour tout $(b_n) \in \ell^q$. Montrer que $(a_n) \in \ell^p$.*

Exercice 8.2.5. *(Hellinger-Toeplitz) Soit $(a_{k,\ell})_{k,\ell\ge 0}$ une suite double de nombres complexes telle que*

$$\sup_{n,m} |\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} a_{kl}x_ky_\ell| < \infty\ \forall x,y \in \ell^2.$$

Montrer que la série $\sum_\ell a_{k\ell}x_\ell$ converge pour tout $x \in \ell^2$ et que l'application $\ell^2 \to \ell^2, x \mapsto (\sum_\ell a_{k\ell}x_\ell)_k$ est continue.

Exercice 8.2.6. *(Banach-Steinhaus, principe de condensation des singularités) Soient X, Y des Banach et soit (T_{pq}) une suite double dans $L(X,Y)$ telle que $\limsup_{q\to\infty} ||T_{pq}|| = \infty$ pour tout $p \ge 1$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que*

$$\limsup_{q\to\infty} ||T_{pq}(x)|| = \infty,\ \forall p \ge 1.$$

[1] La première égalité découle de la densité des fonctions continues dans L^1, en approchant la fonction $D_n/|D_n|$ par des fonctions continues.

Exercice 8.2.7. *(Silverman-Toeplitz) Soit (u_{mn}) une suite double de nombres complexes. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) pour toute suite convergente (a_n) de nombres complexes on a

$$\lim_{m\to\infty}(\sum_{n\geq 1} u_{mn}a_n) = \lim_{m\to\infty} a_m.$$

b) Pour tout n on a $\lim_{m\to\infty} u_{mn} = 0$, $\lim_{m\to\infty}\sum_{n\geq 1} u_{nm} = 1$ et

$$\sup_m \sum_n |u_{mn}| < \infty.$$

8.3 Compacité faible: théorèmes d'Eberlein et Smulian

Les deux théorèmes suivants auraient été mieux placés dans le chapitre sur les topologie faibles, mais il nous manquait un ingrédient pour le démontrer: le théorème de Banach-Steinhaus...

Théorème 8.3.1. *(Smulian) Soit X un espace de Banach et soit $A \subset X^w$ relativement compact. Alors toute suite dans A possède une sous-suite qui converge faiblement dans X.*

Proof. La preuve se fera en plusieurs étapes.

Notons d'abord que A est borné: pour tout $\ell \in X'$ l'ensemble $\ell(A)$ est relativement compact, donc borné dans $\mathbb{K}$, et on peut alors conclure en utilisant le corollaire 8.2.2.

Dans une deuxième étape nous allons réduire le problème au cas où X est séparable. Soit (a_n) une suite dans A et soit Y l'adhérence de $\mathrm{Vect}(a_n)$ pour la topologie forte. Alors Y est un Banach séparable, et il est faiblement fermé dans X (car convexe et fortement fermé). Ainsi $A \cap Y$ est relativement compact dans Y^w. Si le théorème est vrai pour Y, il l'est aussi pour X, car toute sous-suite de (a_n) qui converge faiblement vers $x \in Y$ dans Y converge aussi faiblement dans X vers x.

Supposons donc que X est séparable et montrons que si $\bar{A}$ est l'adhérence de A pour la topologie faible, alors la topologie faible sur $\bar{A}$ est métrisable, ce qui permettra de conclure. Soit (y_n) une suite dense dans S_X, et soient $\ell_n \in S_{X'}$ tels que $|\ell_n(y_n)| = 1$. Alors $\bigcap_n \ker(\ell_n) = \{0\}$ car si $\ell_n(x) = 0$ pour tout n et $x \in S_X$, et si $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x$, alors $1 = |\ell_{n_k}(y_{n_k}) - \ell_{n_k}(x)| \leq ||y_{n_k} - x||$ et ceci est impossible pour k assez grand. Comme $\bar{A}$ est borné, on voit que

$$d(x,y) = \sum_n |\ell_n(x-y)|2^{-n}$$

définit une distance sur $\bar{A}$. Si $\mathrm{id} : \bar{A}^w \to (\bar{A}, d)$ continue, comme $\bar{A}$ est compact, id est forcément un homéomorphisme, ce qui permet de conclure. Pour montrer la continuité de id, soit $\varepsilon > 0$ et prenons N tel que[2]

$$2^N > \max_{x,y\in A} ||x-y||/\varepsilon.$$

Alors $U = \{y \in X \,|\, |\ell_n(x-y)| < \varepsilon, 1 \leq n \leq N\}$ est un voisinage faible de x contenu dans $B(x, 2\varepsilon)$. □

[2] Cela a un sens, car A est bornée

On arrive maintenant à un des théorèmes les plus profonds du début de la théorie des espaces de Banach: la réciproque du théorème de Smulian. Nous allons suivre la très élégante preuve de Whitley.

Théorème 8.3.2. *(Eberlein) Soit X un espace de Banach et soit $A \subset X$. Si toute suite dans A possède un point d'accumulation dans X pour la topologie faible (par exemple si toute suite dans A possède une sous-suite faiblement convergente dans X), alors A est est relativement compact dans X^w.*

Proof. Cela se fait en plusieurs étapes.

Notons d'abord que A est borné dans X: par le corollaire 8.2.2 il suffit de voir que $\ell(A) \subset \mathbb{K}$ est borné pour tout $\ell \in X'$, or sinon il existe (a_n) dans A telle que $|\ell(a_n)| \to \infty$, et alors trivialement la suite (a_n) n'a pas de point d'accumulation pour la topologie faible.

Une deuxième étape est purement topologique: soit $\overline{J(A)}$ l'adhérence de $J(A)$ dans X'', où $J : X \to X''$ est le plongement usuel. Alors $\overline{J(A)}$ est compact (par Banach-Alaoglu-Bourbaki et le fait que A est borné dans X). Comme $J : X^w \to J(X)^{w*}$ est un homéomorphisme (proposition 7.4.1), **si on a** $\overline{J(A)} \subset J(X)$, alors A est contenu dans la partie faiblement compacte $J^{-1}(\overline{J(A)})$ de X, et donc A est relativement faiblement compact.

Soit $L \in \overline{J(A)} \subset X''$ et montrons que $L \in J(X)$. Nous allons construire ci-dessous (c'est la partie technique de la preuve) une suite (a_n) dans A et une suite (ℓ_n) dans $S_{X'}$ telles que

- $||\Lambda||/2 \leq \sup_n |\Lambda(\ell_n)|$ pour tout $\Lambda \in \mathrm{Vect}(L, L - J(a_1), L - J(a_2), ...)$.
- pour tout n on a $\lim_{k\to\infty}(L - J(a_k))(\ell_n) = 0$.

Soit $x \in X$ un point d'accumulation (pour la topologie faible) de la suite (a_n) et montrons que $L = J(x)$. On commence par montrer que $L(\ell_n) = \ell_n(x)$ pour tout n. Fixons n et soit $\varepsilon > 0$. Comme x est un point d'accumulation de (a_n), pour une infinité de k on a $|\ell_n(x - a_k)| < \varepsilon$. Part hypothèse pour k assez grand on a $|L(\ell_n) - \ell_n(a_k)| < \varepsilon$, donc $|L(\ell_n) - \ell_n(x)| < 2\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $L(\ell_n) = \ell_n(x)$.

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$ et soit $Z = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, ...)$, alors $\overline{Z}$ (adhérence pour la topologie forte) est faiblement fermée (car convexe et fortement fermé), et comme $\overline{Z}$ contient tous les a_n et x est un point d'accumulation de (a_n), on a $x \in \overline{Z}$, donc il existe $u \in Z$ tel que $||x - u|| < \varepsilon$. Alors $||J(x) - J(u)|| < \varepsilon$, et donc

$$||J(x) - L|| \leq \varepsilon + ||L - J(u)|| \leq \varepsilon + 2\sup_n |(L - J(u))(\ell_n)|$$

$$= \varepsilon + 2\sup_n |\ell_n(x) - \ell_n(u)| \leq 3\varepsilon,$$

en utilisant les égalités $L(\ell_n) = \ell_n(x)$ et $||\ell_n|| = 1$. On a donc bien $J(x) = L$, ce qui finit la preuve.

Il reste à construire les suites (a_n) et (ℓ_n). Soit $\ell_1 \in S_{X'}$. Puisque $L \in \overline{J(A)}$, tout voisinage de L pour la topologie faible * rencontre $J(A)$, donc il existe $a_1 \in A$ tel que $|(L - J(a_1))(\ell_1)| < 1$. Nous allons utiliser

Lemme 8.3.1. *Soit $E \subset X''$ un sous-espace de dimension finie. Il existe $\ell_1, ..., \ell_n \in S_{X'}$ tels que*

$$\max_{1\leq i\leq n} |L(\ell_i)| \geq \frac{||L||}{2},\ \forall L \in E.$$

Proof. Comme S_E est compact, il existe $L_1, ..., L_n \in S_E$ tels que tout $L \in S_E$ vérifie $\min ||L - L_i|| < 1/4$. Soient $\ell_i \in X'$ tels que $L_i(\ell_i) > 3/4$. On vérifie tout de suite qu'ils répondent à l'appel! □

Le lemme fournit donc $\ell_2, ..., \ell_{n_2} \in S_{X'}$ tels que

$$\max_{2 \le k \le n_2} |\Lambda(\ell_k)| \ge \frac{||\Lambda||}{2}, \forall \Lambda \in \mathrm{Vect}(L, L - J(a_1)).$$

On recommence: il existe $a_2 \in A$ tel que $|(L - J(a_2))(\ell_i)| < 1/2$ pour $1 \le i \le n_2$, et le lemme fournit $\ell_{n_2+1}, ..., \ell_{n_3} \in S_{X'}$ tels que

$$\max_{n_2 < k \le n_3} |\Lambda(\ell_k)| \ge \frac{||\Lambda||}{2}, \forall \Lambda \in \mathrm{Vect}(L, L - J(a_1), L - J(a_2)).$$

On fabrique ainsi des suites (a_n) dans A, $n_2 < n_3 < ...$ dans $\mathbb{Z}$ et (ℓ_n) dans $S_{X'}$ tels que

$$\max_{n_{k-1} < m \le n_k} |\Lambda(\ell_m)| \ge \frac{||\Lambda||}{2}, \ \forall \Lambda \in \mathrm{Vect}(L, L - J(a_1), ..., L - J(a_{k-1})),$$

et

$$|(\Lambda - J(a_k))(\ell_m)| < 1/k, \ 1 \le m \le n_k. \tag{1}$$

Il est clair que les suites (a_n) et (ℓ_n) conviennent, ce qui permet de conclure. Ouf!!! □

Théorème 8.3.3. *(Eberlein) Un Banach X est réflexif si et seulement si toute suite bornée dans X possède une sous-suite faiblement convergente.*

Proof. On a déjà vu une implication. Si toute suite bornée dans X possède une sous-suite faiblement convergente, d'après le théorème ci-dessus B_X est faiblement compacte (noter que B_X est faiblement fermée), et donc on peut conclure par Kakutani. □

8.4 Convergence et compacité faible dans L^1, ca

Ce paragraphe est franchement délicat et technique, je conseille de regarder simplement les énoncés dans une première lecture, et d'essayer plus tard de voir les démonstrations, qui sont assez acrobatiques. Ce paragraphe est optionnel pour le cours (par conséquent les preuves ne seront pas très détaillées...).

Nous avons déjà établi un analogue du théorème de Banach-Steinhaus pour les mesures[3]: le théorème de Nikodym 4.5.1. On se propose de démontrer un analogue du théorème de continuité automatique de Banach-Steinhaus, pour les mesures, plus précisément:

Théorème 8.4.1. *(de convergence de Nikodym) Soit (X, Σ) un espace mesurable et soit (μ_n) une suite dans $\mathrm{ca}(X, \Sigma)$ telle que $\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ existe dans $\mathbb{C}$ pour tout $A \in \Sigma$. Alors*

a) pour toute suite décroissante (A_n) dans Σ telle que $\cap A_n = \emptyset$ on a

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n |\mu_n(A_k)| = 0.$$

b) On a $\mu \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$.

[3] Il est nettement plus pénible à démontrer que le théorème de Banach-Steinhaus!

L'ingrédient essentiel de la preuve est le classique mais délicat théorème de Vitali-Hahn-Saks ci-dessous, une très belle application du lemme de Baire. Nous aurons besoin de ces résultats pour étudier la compacité faible dans les espaces L^1 et les espaces de mesures.

Nous allons commencer par quelques "rappels". Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable (X, Σ). Une mesure $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$ est dite *absolument continue par rapport à* μ si

$$\mu(A) = 0 \implies \lambda(A) = 0, \ \forall A \in \Sigma.$$

On note $\mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-ac}$ l'espace des mesures $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$ qui sont absolument continues par rapport à μ. L'exercice suivant est très important:

Exercice 8.4.1. *a) Montrer que si* $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$ *alors* $\lim_{\mu(A)\to 0} \lambda(A) = 0$*, i.e. pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que si* $A \in \Sigma$ *vérifie* $\mu(A) < \delta$*, alors* $|\lambda(A)| < \varepsilon$*.*

b) Montrer que pour tout $f \in L^1(X, \Sigma, \mu)$ *on peut définir une mesure* $f \cdot \mu \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$ *par*

$$(f \cdot \mu)(A) := \int_A f(x) d\mu(x).$$

c) Supposons que $\mu(X) < \infty$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{ba}(X, \Sigma)$ *tel que* $\lim_{\mu(A)\to 0} |\lambda|(A) = 0$*. Alors* $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$*.*

On admet le théorème classique mais difficile suivant:

Théorème 8.4.2. *(Radon-Nikodym) Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré* σ*-fini. Alors l'application* $f \mapsto f \cdot \mu$ *de l'exercice ci-dessus induit un isomorphisme isométrique*

$$L^1(X, \Sigma, \mu) \simeq \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}.$$

Théorème 8.4.3. *(Vitali-Hahn-Saks) Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini et soit* (λ_n) *une suite dans* $\mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$ *telle que* $\lambda(A) := \lim_{n\to\infty} \lambda_n(A)$ *existe dans* $\mathbb{C}$ *pour tout* $A \in \Sigma$*. Alors* $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_n |\lambda_n(A)| = 0$ *et* $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$*.*

Proof. (esquisse) Posons

$$d(A, B) = \int_X |1_A - 1_B| d\mu$$

pour $A, B \in \Sigma$, et disons que A, B sont équivalents si $d(A, B) = 0$. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des classes d'équivalence dans Σ, et écrivons $\bar{A}$ pour la classe d'équivalence de A. On voit facilement que l'on peut définir $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$ pour $\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{M}$, i.e. que le terme de droite ne dépend que des classes d'équivalence de A et de B. Alors $\mathscr{M}$ devient un espace métrique. On dispose d'une isométrie $\mathscr{M} \to L^1(X, \Sigma, \mu)$ envoyant $\bar{A}$ sur (la classe de) 1_A, et un exercice amusant laissé au lecteur montre que l'image est fermée, donc l'espace métrique $\mathscr{M}$ est complet.

Puisque $\lambda_n \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$, on peut définir une fonction $f_n : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$ par $f_n(\bar{A}) = \lambda_n(A)$ si $A \in \Sigma$, et l'exercice ci-dessus montre que f_n est continue. Par hypothèse les f_n convergent simplement sur $\mathscr{M}$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \geq 1$ l'ensemble

$$F_k = \{\bar{A} \in \mathscr{M} | \sup_{m>k} |f_k(\bar{A}) - f_m(\bar{A})| \leq \varepsilon\}$$

est fermé dans $\mathscr{M}$ et par hypothèse $\cup_k F_k = \mathscr{M}$. Par le lemme de Baire il existe donc k_0 et $\delta > 0$, $\overline{A_0} \in \mathscr{M}$ tels que F_{k_0} contienne la boule de centre $\overline{A_0}$ et de rayon δ, autrement dit

$$d(A, A_0) < \delta \implies \sup_{m > k_0} |\lambda_{k_0}(A) - \lambda_m(A)| \leq \varepsilon.$$

Soit $A \in \Sigma$ tel que $\mu(A) < \delta$ et soit $A_1 = A \cup A_0$, $A_2 = A_0 \setminus A \cap A_0$, alors $A = A_1 \setminus A_2$ et $d(A_1, A_0) < \delta$, $d(A_2, A_0) < \delta$. Si $\mu(A) < \delta$ alors pour tout $k > k_0$

$$|\lambda_k(A)| \leq |\lambda_{k_0}(A)| + |\lambda_{k_0}(A_1) - \lambda_k(A_1)| + |\lambda_{k_0}(A_2) - \lambda_k(A_2)| < 2\varepsilon + |\lambda_{k_0}(A)|.$$

En combinant cela avec le fait que $\lim_{\mu(A)\to 0} \lambda_{k_0}(A) = 0$ (exercice ci-dessus), on voit que $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_n |\lambda_n(A)| = 0$. A partir de cela il est facile de voir que λ est σ-additive (le fait qu'elle soit finiment additive est évident). □

Passons enfin à la preuve du théorème de convergence de Nikodym 8.4.1. Soit $\lambda_n = \frac{|\mu_n|}{1+||\mu_n||}$ et soit $m = \sum_n 2^{-n}\lambda_n$. La série définissant m converge dans le Banach $\mathrm{ca}(X, \Sigma)$ vers une mesure positive finie sur (X, Σ). Clairement $\mu_n \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{m-\mathrm{ac}}$. Comme $\lim_{k\to\infty} m(A_k) = m(\cap A_k) = 0$, le théorème de Vitali-Hahn-Saks 8.4.3 montre que $\lim_{k\to\infty} \sup_n |\mu_n(A_k)| = 0$, ce qui montre le premier point. Le second découle facilement du premier. En effet, soit (A_n) une suite dans Σ, les A_n étant deux à deux disjoints. Puisque μ est trivialement finiment additive, il suffit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cup A_{n+1} \cup ...) = 0$, or on vient de démontrer que $\lim_{n\to\infty} \mu_k(A_n \cup A_{n+1} \cup ...) = 0$ uniformément en k, ce qui permet de conclure.

On fixe par la suite un espace mesuré σ-fini (X, Σ, μ) et on écrit $L^p = L^p(X, \Sigma, \mu)$. On admet[4] pour l'instant le résultat suivant.

Théorème 8.4.4. *L'application $f \mapsto (g \mapsto \int_X fg d\mu)$ induit un isomorphisme*

$$L^\infty \simeq (L^1)'.$$

Le théorème suivant est franchement délicat. Heureusement nous avons déjà presque tout fait pour le démontrer, mais la palette d'ingrédients utilisés est assez impressionnante:

Théorème 8.4.5. *Soit (f_n) une suite dans L^1. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) La suite (f_n) est de Cauchy pour la topologie faible.
b) $(\int_A f_n d\mu)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{C}$ pour tout $A \in \Sigma$.
c) La suite (f_n) converge pour la topologie faible.

Proof. *a)* $\implies$ *b)* est trivial car pour tout $A \in \Sigma$ l'application $f \mapsto \int_A f d\mu$ est dans $(L^1)'$. Bien entendu c) implique a). Il reste donc à montrer que b) implique c).

Soit $\mu_n = f_n \cdot \mu \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$. Par hypothèse $\lambda(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ existe dans $\mathbb{C}$ pour tout $A \in \Sigma$. Par le théorème de Nikodym 4.5.1 on obtient $\sup_n ||\mu_n|| < \infty$. Comme $||\mu_n|| = ||f_n||_1$ (théorème 8.4.2), la suite (f_n) est bornée dans $L^1(X, \Sigma, \mu)$. De plus, le théorème de convergence de Nikodym 8.4.1 montre que $\lambda \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$. Si $\mu(A) = 0$ alors $\mu_n(A) = 0$ pour tout n, donc $\lambda(A) = 0$ et

[4] On verra la preuve dans un cours prochain.

$\lambda \in \mathrm{ca}(X,\Sigma)^{\mu-\mathrm{ac}}$. Par le théorème de Radon-Nikodym 8.4.2 il existe $f \in L^1$ tel que $\lambda = f \cdot \mu$.

Ainsi $\int_A f_n d\mu$ converge vers $\int_A f d\mu$ pour $A \in \Sigma$ et, par linéarité, $\lim_{n\to\infty} \int_X h f_n d\mu = \int_X h f d\mu$ pour toute fonction simple (i.e. étagée) h. C'est un simple exercice de vérifier que ces fonctions sont denses dans L^∞. Comme de plus (f_n) est bornée dans L^1, un petit exercice d'analyse réelle montre que $\int_X h f_n d\mu$ converge vers $\int_X h f d\mu$ pour tout $h \in L^\infty$. On conclut en utilisant le théorème 8.4.4 que (f_n) converge faiblement vers f. $\square$

La preuve montre que f_n converge faiblement vers f si et seulement si $\int_A f_n d\mu$ converge vers $\int_A f d\mu$ pour tout $A \in \Sigma$.

Théorème 8.4.6. *Soit* (X,Σ) *un espace mesuré et soit* (μ_n) *une suite dans* $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) (μ_n) *est de Cauchy pour la topologie faible de* $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$.

b) $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ *converge dans* $\mathbb{C}$ *pour tout* $A \in \Sigma$.

c) (μ_n) *converge pour la topologie faible de* $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$.

Proof. *a)* $\implies$ *b)* est évident car $\mu \mapsto \mu(A)$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$. Il reste à montrer que b) implique c). Par le théorème de Nikodym 4.5.1 on a $\sup_n \ ||\mu_n|| < \infty$, donc $\lambda = \sum_n \frac{|\mu_n|}{2^n}$ converge dans le Banach $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$ et clairement $\mu_n \in \mathrm{ca}(X,\Sigma)^{\lambda-\mathrm{ac}}$. L'espace $\mathrm{ca}(X,\Sigma)^{\lambda-ac}$ est fermé dans $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$ (immédiat) donc il suffit de voir que (μ_n) converge faiblement dans cet espace. Mais (théorème 8.4.2) $\mathrm{ca}(X,\Sigma)^{\lambda-ac}$ est isométrique à $L^1(X,\Sigma,\lambda)$ (via $f \mapsto f\cdot\mu$). Donc si $f_n \in L^1(X,\Sigma,\lambda)$ sont telles que $\mu_n = f_n{\cdot}\lambda$, il suffit de voir que f_n converge faiblement dans $L^1(X,\Sigma,\lambda)$. Comme (X,Σ,λ) est σ-fini (même fini), on peut appliquer le théorème ci-dessus pour conclure. $\square$

Théorème 8.4.7. *Soit* (X,Σ) *un espace mesuré et supposons*[5] *que* Σ *est engendrée comme* σ*-algèbre par une partie dénombrable. Soit* K *une partie bornée de* $\mathrm{ca}(X,\Sigma)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) K *est relativement compact pour la topologie faible.*

b) Il existe $\lambda \in \mathrm{ca}(X,\Sigma)$ *positive telle que*

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup_{\mu\in K} |\mu(A)| = 0.$$

c) Pour toute suite décroissante (A_n) *dans* Σ *avec* $\cap_n A_n = \emptyset$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in K} |\mu(A_n)| = 0.$$

Proof. Le fait que b) implique c) est trivial (il suffit de noter que $\lambda(A_n) \to 0$).

c) $\implies$ *a)* Par le théorème d'Eberlein il suffit de voir que toute suite (μ_n) dans K possède une sous-suite faiblement convergente. Soit $T \subset \Sigma$ une partie dénombrable telle que $\Sigma = \sigma(T)$. Par un argument d'extraction diagonale de Cantor on trouve une sous-suite (μ'_n) de (μ_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \mu'_n(A)$ existe dans $\mathbb{C}$ pour tout $A \in T$. Soit

$$C = \{A \in \Sigma |\ \exists \lim_{n\to\infty} \mu'_n(A) \in \mathbb{C}\}.$$

[5]Cette hypothèse est inutile, mais elle nous permettra de nous passer de quelques contorsions pénibles.

Nous allons montrer que C est une classe monotone. Comme C contient T, cela montrera que $C = \Sigma$, et on pourra conclure par le théorème ci-dessus.

Soit donc (A_n) une suite monotone dans C et soit A sa limite (donc $A = \cup A_n$ si (A_n) est croissante, et $A = \cap A_n$ si (A_n) est décroissante). Montrons que $A \in C$. L'hypothèse c) appliquée aux ensembles $A \setminus A_n$ (si (A_n) est croissante) ou $A_n \setminus A$ (si (A_n) est décroissante) montre que $\lim_{k\to\infty} \mu_n(A_k) = \mu_n(A)$ uniformément en n. Comme chaque $\mu_n(A_k)$ converge quand $n \to \infty$, un exercice trivial de découpage de ε montre que $(\mu_n(A))$ est de Cauchy, donc convergente et $A \in C$.

a) $\implies$ *b)* Montrons d'abord l'existence d'une suite (μ_n) dans K telle que

$$\sum_n |\mu_n|(A) = 0 \implies \sup_{\mu\in K} |\mu(A)| = 0, \ \forall A \in \Sigma.$$

Cela suit du lemme ci-dessous, appliqué à $\varepsilon = 1/2^j$ pour $j \geq 1$, en prenant la réunion des familles finies fournies par le lemme.

Lemme 8.4.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie $\mu_1, ..., \mu_n \in K$ et $\delta > 0$ tel que*

$$\max_{1\leq i\leq n} |\mu_i|(A) \leq \delta \implies \sup_{\mu\in K} |\mu(A)| \leq \varepsilon, \forall A \in \Sigma.$$

Proof. Supposons que cela est faux pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit $\mu_1 \in K$ arbitraire, il existe $A_1 \in \Sigma$ et $\mu_2 \in K$ avec $|\mu_1|(A_1) \leq 1/2$ et $|\mu_2(A_1)| > \varepsilon$, ensuite il existe $A_2 \in \Sigma$ et $\mu_3 \in K$ avec $|\mu_1|(A_2), |\mu_2|(A_2) \leq 1/4$ et $|\mu_3(A_2)| > \varepsilon$, etc. On obtient donc une suite (μ_n) dans K et (A_n) dans Σ telle que $|\mu_i|(A_n) \leq 1/2^n$ pour $1 \leq i \leq n$ et $|\mu_{n+1}(A_n)| > \varepsilon$. Par hypothèse il existe $\mu \in \mathrm{ca}(X, \Sigma)$ et une sous-suite ($\sigma_k := \mu_{n_k}$) qui converge faiblement vers μ. Soit $\lambda = \sum_k 2^{-n_k}|\mu_{n_k}|$, alors les inégalités ci-dessus montrent que $\lambda(A_{n_k-1}) \to 0$. Par Vitali-Hahn-Saks on sait que $\lim_{k\to\infty} \sup_j |\mu_{n_j}(A_{n_k-1})| = 0$, une contradiction car $|\mu_{n_k}(A_{n_k-1})| > \varepsilon$. □

Soit $\lambda = \sum_n \frac{|\mu_n|}{2^n}$, qui converge dans $\mathrm{ca}(X, \Sigma)^{\lambda-\mathrm{ac}}$ car K est borné. Montrons que ce λ convient. Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ et des $A_n \in \Sigma$ avec $\lambda(A_n) \to 0$, ainsi que des $\mu_n \in K$ tels que $|\mu_n(A_n)| \geq \varepsilon$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que μ_n converge faiblement vers un μ. Mais alors $\mu_n(A)$ converge pour tout $A \in \Sigma$, et les inégalités ci-dessus contredisent le théorème de Vitali-Hahn-Saks. Ouf!!! □

Théorème 8.4.8. *(Dunford-Pettis) Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et soit $K \subset L^1(X, \Sigma, \mu)$ une partie bornée. Les assertions suivantes sont équivalentes*

a) K est relativement compact pour la topologie faible.

b) Pour toute suite décroissante (A_n) dans Σ telle que $\cap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in K} |\int_{A_n} f d\mu| = 0.$$

Si $\mu(X) < \infty$ ces conditions sont équivalentes à

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{f\in K} |\int_A f(x) d\mu(x)| = 0.$$

Proof. Exercice à partir des résultats ci-dessus. □

Chapter 9

Image ouverte, graphe fermé, applications

Après avoir passé beaucoup de temps sur les théorèmes de Hahn-Banach et de Banach-Steinhaus, nous attaquons les deux autres grands principes de l'analyse fonctionnelle: le théorème de l'image ouverte et celui du graphe fermé. Nous donnons ensuite des applications aux séries convergentes dans les espaces de Banach et aux bases de Schauder (malheureusement nous ne pouvons qu'effleurer ce très beau et profond sujet...).

9.1 Les théorèmes de l'image ouverte et du graphe fermé

La notion de F-espace a été introduite dans le chapitre précédent. Rappelons simplement que tout espace de Fréchet, en particulier tout Banach est un F-espace.

Théorème 9.1.1. *Soient X, Y des F-espaces et soit $T \in L(X,Y)$ surjective. Alors T est ouverte, i.e. l'image de tout ouvert de X par T est ouverte.*

Proof. On choisit une distance d invariante par translation sur X définissant la topologie de X. Il suffit de voir que l'image de n'importe quelle boule ouverte par T est ouverte, et par translation il suffit de voir que $T(B(0,r))$ est ouvert. Supposons avoir montré que $T(B(0,r))$ contient un voisinage U_r de 0 dans Y pour tout $r > 0$, et montrons que $T(B(0,r))$ est ouvert. Mais si $x = T(y) \in T(B(0,r))$, avec $y \in B(0,r)$, il existe $\delta > 0$ tel que $y + B(0,\delta) \subset B(0,r)$, et alors $x + U_\delta \subset T(y + B(0,\delta)) \subset T(B(0,r))$.

Soit donc $r > 0$ et montrons que $T(B(0,r))$ contient un voisinage de 0. Soit

$$B_n = B(0, r/2^n),\ \ E_n = \overline{T(B_n)}.$$

Montrons d'abord que E_n contient un voisinage de 0 pour tout n. Puisque $E_n - E_n \subset \overline{T(B_n - B_n)} \subset \overline{T(B_{n-1})} = E_{n-1}$, il suffit de montrer que E_n est d'intérieur non vide pour tout n. Mais $Y = T(X) \subset \cup_{k\geq 1} kE_n$, donc par le lemme de Baire un des kE_n est d'intérieur non vide. Comme kE_n et E_n sont homéomorphes, E_n est d'intérieur non vide.

Comme E_{n+1} contient un voisinage de 0 et $E_n = \overline{T(B_n)}$, on a $E_n \subset T(B_n) + E_{n+1}$. Nous allons montrer que $T(B_0)$ contient E_1, qui contient un voisinage de 0, ce qui finira la preuve. Soit $y_1 \in E_1$. Comme $E_n \subset T(B_n) + E_{n+1}$, une récurrence immédiate fournit des $x_n \in B_n$ et des $y_n \in E_n$ tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $y_1 = T(x_1 + ... + x_n) + y_{n+1}$. Comme d est invariante par translation, pour $M > N$ on a

$$d(x_1 + ... + x_N, x_1 + ... + x_M) = d(x_{N+1} + ... + x_M, 0) \leq \frac{r}{2^{N+1}} + ... + \frac{r}{2^M} < r/2^N,$$

donc $x = \lim_{n\to\infty}(x_1 + ... + x_n)$ existe (car (X, d) est complet) et $d(x, 0) \leq d(x_1, 0) + d(x_2, 0) + ... < r$, i.e. $x \in B_0$. D'autre part comme $y_n \in \overline{T(B_n)}$ et T est continue, on a $\lim_{n\to\infty} y_{n+1} = 0$ et un passage à la limite dans l'égalité $y_1 = T(x_1 + ... + x_n) + y_{n+1}$ fournit $y = T(x) \in T(B_0)$. Ainsi $E_1 \subset T(B_0)$, comme désiré. □

Remarque 9.1.2. La preuve montre un résultat plus fort: si X est un F-espace et Y est un evt séparé, et si $T \in L(X, Y)$ a la propriété que $T(X)$ n'est pas maigre dans Y, alors T est surjective et ouverte (et Y est un F-espace).

Donnons deux applications simples mais très puissantes (et très surprenantes) du théorème de l'image ouverte: le théorème d'isomorphisme de Banach et le théorème du graphe fermé. Ces deux résultats sont parmi les plus classiques et utiles théorèmes de l'analyse fonctionnelle!

Théorème 9.1.3. *(théorème d'isomorphisme de Banach) Toute bijection linéaire continue $T : X \to Y$ entre des F-espaces est un homéomorphisme.*

Proof. T est ouverte par le théorème de l'image ouverte, donc $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est ouvert pour tout ouvert U de X, ce qui montre que T^{-1} est continue. □

Si $f : X \to Y$ est une application continue entre des espaces topologiques, avec Y séparé, alors le graphe

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) | \, x \in X\}$$

est une partie fermée de $X \times Y$ (exercice amusant et facile). Le très surprenant résultat suivant est encore un des miracles de l'analyse fonctionnelle:

Théorème 9.1.4. *(théorème du graphe fermé) Une application linéaire $T : X \to Y$ entre des F-espaces est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $X \times Y$.*

Proof. Une implication découle de la discussion qui précède le théorème, supposons donc que le graphe $\Gamma(T)$ de T est fermé dans $X \times Y$. On factorise

$$T : X \to \Gamma \to X \times Y \to Y,$$

la première flèche étant $x \mapsto (x, T(x))$, la seconde l'inclusion et la dernière la projection $(x, y) \mapsto y$. Il suffit de voir que $f : X \to \Gamma, x \mapsto (x, T(x))$ est continue. Or f est bijective et linéaire, donc par le théorème ci-dessus il suffit de voir que $f^{-1} : \Gamma \to X$ est continue. Mais f^{-1} est simplement la composée de la projection $X \times Y \to X$ et de l'inclusion de Γ dans $X \times Y$, toutes les deux continues. □

Remarque 9.1.5. Le graphe de T est fermé dans $X \times Y$ si et seulement si pour toute suite convergente (x_n) *pour laquelle* $(T(x_n))$ *converge dans* Y on a forcément $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n)$. Le point fort du théorème est que l'on a le droit de supposer **à la fois** que (x_n) et $(T(x_n))$ sont convergentes, et il nous reste simplement à montrer que les limites de ces deux suites sont compatibles.

Corollaire 9.1.1. *Soient E, F des Banachs et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si T est "faiblement continue", i.e. $T : E^w \to F^w$ est continue.*

Proof. Supposons que T est continue. Par la proprieté universelle, pour vérifier la continuité de $T : E^w \to F^w$ il suffit de montrer que $\ell \circ T : E^w \to$ scalaires est continue pour tout $\ell \in F'$. Cela est évident, car $\ell \circ T \in E'$.

Supposons que T est faiblement continue. Par le théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que si $x_n \to x$ et $T(x_n) \to y$, alors $y = T(x)$. Mais x_n converge faiblement vers x, donc $T(x_n)$ converge faiblement vers $T(x)$, or $T(x_n)$ converge aussi faiblement vers y. Comme la topologie faible est séparée, cela force $y = T(x)$. $\square$

Exercice 9.1.1. *Soit X un K-espace vectoriel et supposons que X est un F-espace pour deux métriques d, d'. Si la topologie définie par d est plus forte que celle définie par d', montrer que les deux topologies sont les mêmes.*

Exercice 9.1.2. *Soient X, Y, Z des F-espaces, $T : Z \to X$ linéaire. S'il existe une famille d'applications linéaires continues $f_i : X \to Y$ telles que $\cap_i \ker(f_i) = 0$ et $f_i \circ T : Z \to Y$ est continue pour tout i, alors T est continue.*

Exercice 9.1.3. *Soit X un Banach et (Y, Σ, μ) un espace mesuré de mesure finie. Soit $u : X \to L^1(\mu)$ une application linéaire. Montrer que u est continue si et seulement si pour tout $A \in \Sigma$ l'application $X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_A u(x)d\mu$ est continue.*

Exercice 9.1.4. *(théorème de Banach-Mazur) Montrer que tout Banach séparable est isomorphe à un quotient de ℓ^1.*

Exercice 9.1.5. *Soient Y, Z des sous-espaces fermés d'un Banach X tels que $Y + Z$ soit fermé dans X. Il existe alors $c \geq 0$ tel que tout $x \in Y + Z$ puisse s'écrire $x = y + z$ avec $y \in Y, z \in Z$ et $\max(||y||, ||z||) \leq c||x||$. De plus, pour tout $x \in X$*

$$d(x, Y \cap Z) \leq c(d(x, Y) + d(x, Z)).$$

Exercice 9.1.6. *En utilisant le théorème de l'image ouverte, montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que $\lim_{|n| \to \infty} a_n = 0$ et telle que pour tout $f \in L^1([-\pi, \pi])$ il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n \neq \hat{f}(n)$.*

Exercice 9.1.7. *(théorème de l'image fermée de Banach) Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$. On se propose de montrer que T est d'image fermée si et seulement si $T' : Y' \to X'$ est d'image fermée.*

a) Montrer que T est injectif et d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $||T(x)|| \geq c||x||$ pour tout x.

b) Supposons que T' est injectif d'image fermée, et soit $c > 0$ tel que $||T'(\ell)|| \geq c||\ell||$ pour tout $\ell \in Y'$. Montrer que la boule fermée de centre 0 et de rayon c est contenue dans l'adhérence de $T(B_X)$ (indication: théorème de séparation). En déduire que T est surjectif.

c) Démontrer le résultat énoncé ci-dessus.

d) Montrer que T est un isomorphisme si et seulement si T' est un isomorphisme.

Exercice 9.1.8. *(théorème de Grothendieck) Soit (X, Σ, μ) un espace de probabilité et soit E un sous-espace fermé de L^p, pour un $1 \leq p < \infty$. Si $E \subset L^\infty$, alors E est de dimension finie.*

9.2 Séries (faiblement) commutativement convergentes

Soit X un Banach et soit (x_n) une suite dans X. On dit que la série $\sum x_n$ est

• *commutativement convergente (CC)* si $\sum_n x_{\sigma(n)}$ converge pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$.

• *faiblement commutativement convergente (FCC)* si $\sum_n \ell(x_{\sigma(n)})$ converge pour tout $\ell \in X'$ et toute permutation σ de $\mathbb{N}$, i.e. la série $\sum \ell(x_n)$ est CC (dans $\mathbb{K}$) pour tout $\ell \in X'$.

Toute série absolument convergente $\sum x_n$ est clairement CC car pour toute permutation σ la série $\sum x_{\sigma(n)}$ converge absolument, donc converge tout court. Si X est de dimension finie, toute série CC est absolument convergente, grâce au résultat classique (et facile) suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Exercice 9.2.1. *(théorème de Riemann) Une série CC de nombres complexes est absolument convergente.*

Proposition 9.2.1. *Soit $\sum x_n$ une série CC. Alors $\sum x_n$ et FCC et $\sum_n x_n = \sum_n x_{\sigma(n)}$ pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$.*

Proof. Par continuité de ℓ la série $\sum_n \ell(x_{\sigma(n)})$ converge vers $\ell(\sum x_{\sigma(n)})$. On en déduit que $\sum \ell(x_n)$ est une série CC de complexes, donc absolument convergente par l'exercice ci-dessus. Il est alors classique que la somme ne dépend pas de l'ordre des termes, donc $\sum \ell(x_n) = \sum \ell(x_{\sigma(n)})$ pour tout ℓ et tout σ, ce qui peut s'écrire aussi $\ell(\sum x_n) = \ell(\sum x_{\sigma(n)})$. Comme cette égalité est valable pour tout ℓ, on a $\sum x_n = \sum x_{\sigma(n)}$. □

Exercice 9.2.2. *On prend $X = c_0$, avec la norme sup. Soit $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in X$, 1 étant à la place n.*

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n}$ est CC mais pas absolument convergente.

b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} e_n$ est FCC mais pas CC.

La preuve du résultat suivant va nous occuper pendant un petit moment.

Théorème 9.2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) La série $\sum x_n$ est FCC.

b) On a

$$\sup_{\ell \in B_{X'}} \sum_n |\ell(x_n)| < \infty.$$

c) On a

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty} ||\sum_{n \in A} x_n|| < \infty.$$

d) il existe $c > 0$ tel que

$$\sup_{n \geq 1} ||\sum_{k=1}^{n} a_k x_k|| \leq c||a||_\infty \ \forall a = (a_k) \in \ell^\infty.$$

e) la série $\sum a_n x_n$ converge pour tout $(a_n) \in c_0$.

Proof. Montrons que a) et b) sont équivalents. Clairement b) implique a). Pour l'autre sens, par le théorème de Riemann on a $\sum |\ell(x_n)| < \infty$ pour tout $\ell \in X'$, donc l'application $T : X' \to \ell^1, \ell \mapsto (\ell(x_n))$ est bien définie, clairement linéaire, et il s'agit de voir qu'elle est continue. Il suffit de voir que son graphe est fermé, or si $\ell_n \to \ell$ et si $T(\ell_n) \to y = (y_k)$, alors pour tout k on a $\ell_n(x_k) \to y_k$ et d'autre part $\ell_n(x_k) \to \ell(x_k)$, donc $\ell(x_k) = y_k$ et $y = T(\ell)$.

Montrons que b) et c) sont équivalents, en utilisant le lemme un peu technique, mais bien utile ci-dessous:

Lemme 9.2.1. *Soit X un Banach et $x_1, ..., x_n \in X$. Alors*

$$4 \sup_{B \subset \{1,...,n\}} || \sum_{k \in B} x_k || \geq \sup_{\ell \in B_{X'}} \sum_{i=1}^{n} |\ell(x_i)| \geq \sup_{B \subset \{1,...,n\}} || \sum_{k \in B} x_k ||.$$

Proof. On a

$$\sup_{B \subset \{1,...,n\}} || \sum_{k \in B} x_k || = \sup_{B \subset \{1,...,n\}} \sup_{||\ell|| \leq 1} | \sum_{k \in B} \ell(x_k)| = \sup_{||\ell|| \leq 1} \sup_{B} | \sum_{k \in B} \ell(x_k)|.$$

L'inégalité à droite est alors évidente par l'inégalité triangulaire. Pour cella à gauche, il suffit de voir que pour tout $||\ell|| \leq 1$ on a $\sup_B |\sum_{k \in B} z_k| \geq 1/4 \sum_{i=1}^n |z_i|$, avec $z_k = \ell(x_k)$. Cela est un exercice facile (qui peut aussi se déduire du lemme crucial utilisé dans l'étude de $\mathrm{ba}(X, \Sigma)$). □

Maintenant, b) est clairement équivalent à

$$\sup_{||\ell|| \leq 1} \sup_{A \subset \mathbb{N}, |A| < \infty} \sum_{n \in A} |\ell(x_n)| < \infty,$$

et le lemme 9.2.1 combiné à une permutation des deux sup montre que ceci équivaut à c).

Ensuite, $b) \implies d)$ est triviale, car

$$|| \sum_{k=1}^{n} a_k x_k || = \sup_{||\ell|| \leq 1} | \sum_{k=1}^{n} a_k x_k | \leq ||a||_\infty \sup_{||\ell|| \leq 1} \sum_{k \geq 1} |\ell(x_k)|.$$

L'implication $d) \implies e)$ est aussi triviale, car $|| \sum_{k=n}^m a_k x_k || \leq c \max_{k \geq n} |a_k|$, et ce dernier tend vers 0 pour $n \to \infty$, ce qui permet d'utiliser le critère de Cauchy.

Montrons enfin que $e) \implies a)$. Fixons $\ell \in X'$. La série $\sum a_n \ell(x_n)$ converge pour tout $(a_n) \in c_0$. En posant $T_N : c_0 \to \mathbb{K}, T_N(a) = \sum_{k=1}^N a_k \ell(x_k)$, par Banach-Steinhaus on a $\sup_N \; ||T_N|| < \infty$, or $||T_N|| = \sum_{k=1}^N |\ell(x_k)|$, ce qui montre que $\sum |\ell(x_n)| < \infty$. □

La caractérisation des séries CC est très semblable:

Théorème 9.2.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\sum x_n$ est CC.

b) On a

$$\lim_{\min A \to \infty} || \sum_{n \in A} x_n || = 0,$$

A parcourant les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.

c) On a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell\in B_{X'}} \sum_{k\geq n} |\ell(x_k)| = 0.$$

d) La série $\sum a_n x_n$ *converge pour tout* $(a_n) \in \ell^\infty$.

e) La série $\sum x_{n_k}$ *converge pour toute suite croissante* $0 < n_1 < n_2 < ...$ *d'entiers.*

Proof. a) $\Longrightarrow$ b). Si b) tombe en défaut il existe $\varepsilon > 0$ et une suite (A_n) de parties finies de $\mathbb{N}$ telles que $||\sum_{k\in A_n} x_k|| \geq \varepsilon$ pour tout n, et $p_{n+1} := \min A_{n+1} > q_n := \max A_n$. Ecrivons $A_n = \{i_{1,n} < ... < i_{k_n,n}\}$ et définissons $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en posant $\sigma(j) = j$ pour $j \notin \cup_n[p_n, q_n]$ et $\sigma : [p_n, q_n] \to [p_n, q_n]$ n'importe quelle permutation telle que $i_{u,n}$ soit envoyé sur $p_n + u - 1$. Alors $\sum_{p_n\leq i<p_n+k_n} x_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{i\in A_n} x_i$ et donc $\sum_n x_{\sigma^{-1}(n)}$ ne converge pas, le critère de Cauchy étant mis en défaut!

Montrons que b) et c) sont équivalents. Mais c) équivaut à

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{||\ell||\leq 1, N\geq n} \sum_{k=n}^{N} |\ell(x_k)| = 0,$$

ou encore (par le lemme 9.2.1) à ce que $\lim_{n\to\infty} \sup_{N\geq n} \sup_{A\subset\{n,...,N\}} ||\sum_{k\in A} x_k|| = 0$, et enfin à b).

c) $\Longrightarrow$ d). Soit $(a_n) \in \ell^\infty$ et soient $\varepsilon > 0$ et N tels que $\sup_{||\ell||\leq 1} \sum_{k\geq N} |\ell(x_k)| < \varepsilon$. Alors pour $m \geq n > N$ on a

$$||\sum_{k=n}^{m} a_k x_k|| = \sup_{||\ell||\leq 1} |\sum_{k=n}^{m} a_k\ \ell(x_k)| \leq ||a||_\infty \cdot \sup_{||\ell||\leq 1} \sum_{k=n}^{m} |\ell(x_k)| < \varepsilon \cdot ||a||,$$

ce qui permet de conclure via le critère de Cauchy.

d) $\Longrightarrow$ e) On choisit $a_n = 1$ pour $n \in \{n_1, n_2, ...\}$ et $a_n = 0$ sinon.

e) $\Longrightarrow$ b) Sinon il existe des ensembles finis A_n avec $\min A_{n+1} > \max A_n$ et $\varepsilon > 0$ tel que $||\sum_{k\in A_n} x_k|| \geq \varepsilon$ pour $n \geq 1$. On écrit $\cup_n A_n = \{n_1 < n_2 < ...\}$. Il est évident que la série $\sum x_{n_k}$ ne converge pas, ce qui permet de conclure.

b) $\Longrightarrow$ a) Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et N tel que $||\sum_{n\in A} x_n|| < \varepsilon$ pour $\min A \geq N$. Comme $\sigma^{-1}(\{1, ..., N\})$ est fini, il existe k tel que $\min\{\sigma(m), ..., \sigma(n)\} \geq N$ pour $m \geq n \geq k$. Alors pour $m \geq n \geq k$ on a $||\sum_{i=n}^{m} x_{\sigma(i)}|| < \varepsilon$ et donc $\sum x_{\sigma(n)}$ converge par le critère de Cauchy. □

Exercice 9.2.3. *a) Montrer que si* $\sum x_n$ *est une série CC dans un Hilbert* H*, alors* $\sum ||x_n||^2 < \infty$.

b) Etudier la réciproque.

Exercice 9.2.4. *(Sierpinski) Soit* $X = (C([0, 1]), ||\cdot||_\infty)$. *Montrer que la série* $\sum f_n$ *est CC dans* X *si et seulement si la série* $\sum |f_n|$ *converge dans* X.

9.3 Bases de Schauder

Dans ce paragraphe nous allons effleurer un sujet très important, qui mérite sans doute plus que ce qui suit, mais nous allons nous contenter du peu...

Définition 9.3.1. On dit qu'une suite (x_n) dans un Banach X est une *base (de Schauder) de* X si pour tout $x \in X$ il existe une *unique* suite de scalairs (a_n) telle que $x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$, la série étant convergente. On note alors $x_n^*(x) = a_n$.

Notons que si (x_n) est une base d'un Banach X, alors les (x_n) engendrent un sous-espace dense de X, en particulier X est forcément séparable. Un théorème très difficile d'Enflo affirme l'existence d'un espace de Banach (réflexif) séparable qui ne possède pas de base.

Exercice 9.3.1. *Soit $e_n = (0,0,...,1,0,...)$, 1 étant en position n. On voit e_n comme des vecteurs dans c_0 et dans ℓ^p, avec $p \in [1,\infty]$.*
a) Montrer que (e_n) est une base de c_0.
b) Montrer que (e_n) est une base de ℓ^p si $1 \le p < \infty$.
c) Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable et donc que (e_n) n'en forme pas une base.

Soit (x_n) une base d'un Banach X. Clairement les (x_n) forment une famille libre, en particulier $x_n \neq 0$ pour tout n. De plus, chaque x_n^* est une forme linéaire sur X (par unicité de la représentation). Nous allons montrer que chaque x_n^* est continue. Pour cela on commence par montrer le résultat suivant:

Proposition 9.3.1. *Soit (x_n) une suite dans un Banach X, avec $x_n \neq 0$ pour tout n. Soit Y l'ensemble des suites (a_n) de scalaires tels que $\sum_n a_n x_n$ converge dans X. Pour $(a_n) \in Y$ on pose*
$$||(a_n)|| = \sup_n ||\sum_{k=1}^n a_k x_k||.$$
a) $(Y, ||\cdot||)$ est un espace de Banach.
b) Si (x_n) est une base de X, alors l'application $T : Y \to X$ définie par $T((a_n)) = \sum_n a_n x_n$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Proof. a) Le seul point délicat est la complétude de Y. Soit $c^k = (c_n^k)_n$ une suite de Cauchy dans Y. On a $2||c^k - c^l|| \ge |c_n^k - c_n^l| \cdot ||x_n||$ pour tous k, l, n, donc pour tout n la suite $(c_n^k)_k$ est de Cauchy et donc converge vers un a_n. Soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que pour tous $k, l \ge M$ on ait
$$\sup_N ||\sum_{n=1}^N (c_n^k - c_n^l) x_n|| \le \varepsilon.$$
En faisant $l \to \infty$ on obtient $\sup_N ||\sum_{n=1}^N (c_n^k - a_n) x_n|| \le \varepsilon$ pour $k \ge M$. D'autre part, la série $\sum c_n^M x_n$ converge par hypothèse vers un $z \in X$, et on a $||\sum_{n=1}^N c_n^M x_n - z|| \le \varepsilon$ pour N assez grand. Donc $||\sum_{n=1}^N a_n x_n - z|| \le \varepsilon$ pour N assez grand. On en déduit que $(\sum_{n=1}^N a_n x_n)_N$ est de Cauchy et donc $(a_n) \in Y$, et on a déjà montré que c^k converge dans Y vers (a_n).

b) Le fait que T soit défini, linéaire et bijectif est évident. De plus, par définition $|T((a_n))| \le ||(a_n)||$, donc T est aussi continue. Ainsi T est un isomorphisme par le théorème de Banach et le point a). □

Soit (x_n) une base d'un Banach X et posons
$$S_n : X \to X,\ S_n(x) = \sum_{k=1}^n x_k^*(x) x_k.$$

Théorème 9.3.1. *Pour toute base (x_n) d'un Banach X on a*
$$K := \sup_n\ ||S_n|| < \infty,$$
chaque x_n^* est une forme linéaire continue sur X et $||x_n|| \cdot ||x_n^*|| \le 2K$ pour tout n.

On appelle K la *constante associée à la base* (x_n).

Proof. Soit T comme dans la proposition ci-dessus. Noter que $T^{-1}(x) = (x_n^*(x))_n$, et comme $||T^{-1}(x)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||x||$, on obtient $\sup_n ||S_n(x)|| \leq ||T^{-1}|| \cdot ||x||$, ce qui montre que $K := \sup_n ||S_n|| < \infty$. Ainsi chaque S_n est continue, et comme $S_n - S_{n-1} = x_n^* \cdot x_n$ et $x_n \neq 0$, on voit que x_n^* est continue et $||x_n^*|| \cdot ||x_n|| \leq 2K$. □

Soit (x_n) une base du Banach X. Alors $S_n \in L(X, X)$ (par ce qui précède) et

a) On a $S_m \circ S_n = S_{\min(m,n)}$ sur X. En effet, par continuité et densité il suffit de le vérifier sur chaque x_k, ce qui découle des égalités $x_n^*(x_m) = 1_{m=n}$ pour tous m, n (conséquence de unicité de l'écriture $x = \sum_n x_n^*(x)x_n$).

b) On a $\dim S_n(X) = n$ pour tout n, car $x_1, ..., x_n$ est une famille libre.

c) On a $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x$ pour tout $x \in X$. Dans l'autre sens:

Proposition 9.3.2. *Soit X un Banach et soit (S_n) une suite dans $L(X, X)$ avec les propriétés a), b), c) ci-dessus. Il existe une base (x_n) de X telle que les S_n soient associés à cette base.*

Proof. Noter que chaque S_n est une projection. Posons $S_0 = 0$. L'application naturelle $\mathrm{Im}(S_n) \to X/\ker(S_{n-1}) \simeq \mathrm{Im}(S_{n-1})$ n'est pas injective pour des raisons de dimension. Il existe donc $x_n \in S_n(X) \cap \ker(S_{n-1})$ non nul, et on a $S_n(X) = S_{n-1}(X) \oplus \mathbb{K}x_n$. De plus $S_j(x_n) = 0$ pour $j < n$ et $S_j(x_n) = x_n$ pour $j \geq n$.

Si $x \in X$, on peut donc écrire $S_n(x) = S_{n-1}(y) + a_n x_n$ pour un $y \in X$ et un scalaire a_n. En appliquant S_{n-1} on trouve $S_{n-1}(y) = S_{n-1}(x)$, et comme $S_n(x)$ tend vers x, on a $x = \sum_{n\geq 1} a_n x_n$. Ensuite, si a_n sont des scalaires tels que $\sum_{n\geq 1} a_n x_n = 0$, en appliquant S_n on obtient $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$ pour tout n, et après $a_n = 0$ pour tout n. Donc (x_n) est une base et trivialement les projections canoniques associées sont les S_n. □

Exercice 9.3.2. *a) Soit (t_n) une suite dense dans $[0, 1]$ telle que $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$. Soit $X = C([0, 1])$ et $S_1(f) = f(0)$. Pour $n \geq 2$ soit $S_n(f)$ l'application affine par morceaux qui interpole f aux points $t_1, ..., t_n$. Montrer que les S_n vérifient les conditions de la proposition ci-dessus, et donc que $C([0, 1])$ possède une base.*

b) Décider si la suite $(x^n)_{n\geq 0}$ est une base de $C([0, 1])$.

Remarque 9.3.2. Si (x_n) est une base du Banach X et si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, il peut arriver que $(x_{\sigma(n)})$ ne soit plus une base de X.

Exercice 9.3.3. *Soit (x_n) une base d'un Banach X, telle que la série $\sum_n x_n^*(x)x_n$ converge absolument pour tout $x \in X$. Montrer que $T : \ell^1 \to X, (a_n) \mapsto \sum_n \frac{a_n}{||x_n||} x_n$ est un isomorphisme d'espaces de Banach.*

9.4 Suites basiques et théorèmes de Bessaga-Pelczyinski

On dit qu'une suite (x_n) dans un Banach X est une *suite basique* si (x_n) est une base de l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ...)$.

Théorème 9.4.1. *(Banach) Une suite (x_n) dans $X \setminus \{0\}$ est basique si et seulement si on peut trouver $c > 0$ tel que*

$$||a_1x_1 + ... + a_mx_m|| \leq c||a_1x_1 + ... + a_nx_n||, \ \forall m \leq n, \ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}.$$

Si c'est le cas, le plus petit tel c est la constante associée à la base (x_n) de $\overline{\mathrm{Vect}(x_n)}$.

Proof. Soit $Z := \mathrm{Vect}(x_1, x_2, ...)$ et $Y = \overline{Z}$. Si (x_n) est basique et si $S_n : Y \to Y$ sont les projections associées, alors pour tous $m \leq n$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$

$$||a_1x_1 + ... + a_mx_m|| = ||S_m(a_1x_1 + ... + a_nx_n)|| \leq \sup_m ||S_m|| \cdot ||a_1x_1 + ... + a_nx_n||,$$

on peut donc prendre $c = \sup_m ||S_m||$.

Dans l'autre sens, on définit $s_m : Z \to \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_m)$ par

$$s_m(a_1x_1 + ... + a_nx_n) = \sum_{k=1}^{m} a_kx_k$$

pour $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$ et $n \geq m$. Cela est bien défini par la condition de l'énoncé. De plus, $||s_m(x)|| \leq c||x||$ pour $x \in Z$, donc s_m se prolonge en $S_m : Y \to \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_m)$ de norme au plus c. L'égalité $S_m \circ S_n = S_{\min(m,n)}$ est immédiate sur Z, et donc vraie sur Y par densité et continuité. De plus, $S_n(x) \to x$ pour $x \in Z$, et comme $\sup_n ||S_n|| < \infty$ et Z est dense dans Y, on voit qu'en fait $S_n(x) \to x$ pour tout $x \in Y$. On en déduit que (x_n) est une base de Y par la proposition 9.3.2. Le reste est facile et laissé au lecteur. □

Exercice 9.4.1. *Soit X un Banach et soit (x_n) une base de X.*

a) Montrer que les (x_n^*) ne forment pas toujours une base de X'. Indication: prendre $X = \ell^1$, dont le dual est ℓ^∞.

b) Montrer que si X est réflexif, alors (x_n^*) est une base de X'.

c) Montrer que (x_n^*) est une suite basique dans X'.

Définition 9.4.1. Soit (x_n) une suite basique dans le Banach X et soit (y_n) une suite basique dans le Banach Y. On dit que (x_n) et (y_n) sont équivalentes si pour toute suite de scalaires (a_n) la convergence de la série $\sum a_nx_n$ dans X équivaut à celle de la série $\sum a_ny_n$ dans Y.

Proposition 9.4.1. *Soit (x_n) une suite basique dans le Banach X et soit (y_n) une suite quelconque dans un Banach Y. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) (y_n) est une suite basique dans Y et pour toute suite de scalaires (a_n) la convergence de la série $\sum a_nx_n$ dans X équivaut à celle de la série $\sum a_ny_n$ dans Y.

b) Il existe un isomorphisme d'espaces de Banach $T : \overline{\mathrm{Vect}(x_n)} \simeq \overline{\mathrm{Vect}(y_n)}$ tel que $T(x_n) = y_n$ pour tout n.

c) Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout n et tous les scalaires $a_1, ..., a_n$ on ait

$$c_1||a_1x_1 + ... + a_nx_n|| \leq ||a_1y_1 + ... + a_ny_n|| \leq c_2||a_1x_1 + ... + a_nx_n||.$$

Si (x_n) et (y_n) sont comme dans la proposition on dira que les deux suites sont *équivalentes*.

Proof. a) $\implies$ *b)* Par hypothèse on peut définir une application $T : \overline{\mathrm{Vect}(x_n)} \simeq \overline{\mathrm{Vect}(y_n)}$ par $T(\sum a_nx_n) = \sum a_ny_n$, et T est bijective car (x_n) et (y_n) sont basiques. Il reste à voir que T est continue, et il suffit de vérifier que son graphe est fermé. Supposons donc que (z_n) est une suite dans $\overline{\mathrm{Vect}(x_n)}$ qui converge vers z et telle que $(T(z_n))$ converge vers un u. Par continuité de y_k^* on a $y_k^*(T(z_n)) \to y_k^*(u)$. Mais par construction $y_k^*(T(z_n)) = x_k^*(z_n)$ qui tend vers $x_k^*(z) = y_k^*(T(z))$. Donc $y_k^*(u - T(z)) = 0$ pour tout k et $u = T(z)$, ce qui permet de conclure.

b) $\implies$ *c*) est trivial.

c) $\implies$ *a*) Si $m \leq n$ et $a_1, ..., a_n$ sont des scalaires, alors

$$||a_1y_1 + ... + a_my_m|| \leq c_2||a_1x_1 + ... + a_mx_m|| \leq$$

$$c_2K||a_1x_1 + ... + a_nx_n|| \leq c_2K/c_1||a_1y_1 + ... + a_ny_n||,$$

K étant la constante associée à (x_n). Le théorème 9.4.1 montre alors que (y_n) est basique. De plus, par hypothèse la suite $(\sum_{k=1}^n a_kx_k)$ est de Cauchy si et seulement si $(\sum_{k=1}^n a_ky_k)$ l'est, ce qui permet de conclure. □

Le résultat suivant nous sera très utile:

Lemme 9.4.1. *(de perturbation de Krein, Milman, Rutman) Soit (x_n) une suite basique dans le Banach X et soit (y_n) une suite dans X telle que $\sum_n ||x_n - y_n|| \cdot ||x_n^*|| < 1$. Alors (y_n) est une suite basique équivalente à (x_n).*

Proof. Par Hahn-Banach les x_n^* (formes linéaires continues sur $\overline{\text{Vect}(x_n)}$) se prolongent en des formes linéaires continues ℓ_n sur X, de même norme. La série

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \ell_n(x)(x_n - y_n)$$

converge absolument par hypothèse, et $S \in L(X, X)$ vérifie $||S|| \leq \sum_{n\geq 1} ||x_n^*|| \cdot ||x_n - y_n|| < 1$. Alors $T = \text{id} - S \in L(X, X)$ vérifie $T(x_n) = y_n$ et par la proposition ci-dessus il suffit de voir que T est inversible. Mais la série $\sum_{n\geq 0} S^n$ converge absolument dans le Banach $L(X, X)$ (car $||S^n|| \leq ||S||^n$ et $||S|| < 1$), et sa somme est trivialement un inverse de T. □

On finit ce paragraphe avec des résultats plus avancés (et optionnels) mais très jolis. On commence par une observation très utile:

Corollaire 9.4.1. *Soit (x_n) une suite basique dans X et soient $0 \leq p_1 < p_2 < ...$ des entiers et $y_n = \sum_{p_n < k \leq p_{n+1}} c_kx_k$, les c_k étant des scalaires. Si les y_n sont tous non nuls, alors ils forment une suite basique, dont la constante associée ne dépasse pas celle de la constante associée à (x_n).*

Proof. C'est une conséquence immédiate du théorème 9.4.1, les détails sont laissés en exercice. □

Une suite comme dans le corollaire est appelée *suite admissible associée à* (x_n) (en anglais on dit "block basis").

Le résultat suivant est assez technique, mais il a beaucoup de conséquences très intéressantes.

Théorème 9.4.2. *(théorème de sélection de Bessaga-Pelczyinski) Soit (x_n) une base du Banach X et soit (y_n) une suite qui ne converge pas vers 0 et telle que $\lim_{n\to\infty} x_k^*(y_n) = 0$ pour tout k. Alors (y_n) possède une sous-suite équivalente à une suite admissible associée à (x_n), en particulier (y_n) possède une sous-suite qui est une suite basique.*

Proof. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $a = \inf_n ||y_n|| > 0$. Soit K la constante associée à la base (x_n). On va construire ci-dessous des suites $1 = p_1 < p_2 < ...$ et $k_1 < k_2 < ...$ telles qu'en posant

$$z_j = \sum_{p_j < n \leq p_{j+1}} x_n^*(y_{k_j}) x_n,$$

on ait $||z_j - y_{k_j}|| < \frac{a}{4K \cdot 2^j}$ pour $j \geq 1$. Comme $K \geq 1$, on a $||z_j|| \geq a - \frac{a}{8K} \geq \frac{7a}{8} > 0$ et donc (z_j) est admissible par rapport à (x_n). Le corollaire 9.4.1 montre alors que $||z_n^*|| \cdot ||z_n|| \leq 2K$ pour tout n, donc $||z_n^*|| \leq \frac{16K}{7a}$ pour tout n. D'autre part

$$\sum_n ||z_n^*|| \cdot ||z_n - y_{k_n}|| \leq \frac{16K}{7a} \sum_n \frac{a}{4K \cdot 2^n} < 1$$

et donc (y_{k_n}) est équivalente à (z_n), grâce au lemme de perturbation . Cela finit la preuve du théorème.

Construisons les suites (p_i) et (q_i). Par l'inégalité triangulaire il suffit d'imposer les inégalités

$$||\sum_{n=1}^{p_j} x_n^*(y_{k_j}) x_n|| < \frac{a}{8K \cdot 2^j}, \ ||\sum_{n > p_{j+1}} x_n^*(y_{k_j}) x_n|| < \frac{a}{8K \cdot 2^j}, \ \forall j.$$

Mais $x_1^*(y_n) \to 0$, donc il existe k_1 tel que $||x_1^*(y_{k_1}) x_1|| < \frac{a}{2 \cdot 8K}$. Comme $\sum_n x_n^*(y_{k_1}) x_n$ converge (vers y_{k_1}), il existe $p_2 > p_1$ tel que

$$||\sum_{n > p_2} x_n^*(y_{k_1}) x_n|| < \frac{a}{2 \cdot 8K}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{p_2} x_n^*(y_k) \to 0$, il existe $k_2 > k_1$ tel que $||\sum_{n=1}^{p_2} x_n^*(y_{k_2}) x_n|| < \frac{a}{8K \cdot 2^2}$ et comme $\sum_n x_n^*(y_{k_2}) x_n$ converge, il existe $p_3 > p_2$ tel que $||\sum_{n > p_3} x_n^*(y_{k_2}) x_n|| < \frac{a}{8K \cdot 2^2}$. On continue ainsi. □

Corollaire 9.4.2. *Toute suite qui converge faiblement vers* 0 *et pas fortement vers* 0 *contient une sous-suite basique.*

Proof. Soit (x_n) qui converge faiblement vers 0, mais pas fortement vers 0. Soit Y l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_n)$. Puisque Y est séparable, par Banach-Mazur Y se plonge isométriquement dans $C([0,1])$, qui possède une base (x_n) (voir un des exercices ci-dessus). Bien entendu, $x_k^*(y_n)$ tend vers 0 pour tout k, et il suffit d'appliquer le théorème. □

Théorème 9.4.3. *(Banach-Mazur) Tout Banach de dimension infinie possède une suite basique.*

Proof. Soit (x_n) une suite qui forme une famille libre dans le Banach de dimension infinie X, et soit $Y = \overline{\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ...)}$. Par Banach-Mazur on peut voir Y comme un sous-espace de $C([0,1])$. Soit (e_n) une base de ce dernier espace. Comme $\dim Y = \infty$, on voit facilement qu'il existe $y_k \in S_Y \cap \cap_{i=1}^k \ker(e_i^*)$. Alors $\lim_{k \to \infty} e_n^*(y_k) = 0$ pour tout n, donc par le théorème de sélection (y_n) possède une sous-suite basique, ce qui permet de conclure. □

Exercice 9.4.2. *On se propose de donner une autre démonstration, plus directe, du théorème ci-dessus.*

a) Soit Y un sous-espace de dimension finie d'un Banach X de dimension infinie, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $x \in S_X$ tel que $||y|| \leq (1+\varepsilon)||y+ax||$ pour tout $y \in Y$ et tout scalaire a. Indication: recouvrir S_Y par un nombre fini de boules $B(y_i, \varepsilon/2)$, prendre $\ell_i \in S_{X'}$ tels que $\ell_i(y_i) = 1$ et $x \in S_X \cap \cap_i \ker(\ell_i)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et soit (ε_n) une suite dans $]0,\infty[$ telle que $\prod_{n\geq 1}(1+\varepsilon_n) < 1+\varepsilon$. Construire en utilisant a) une suite (x_n) dans S_X telle que pour tous $n < m$ et tous les scalaires $a_1, ..., a_m$ on ait

$$||a_1x_1 + ... + a_nx_n|| \leq \prod_{k=m-1}^{n}(1+\varepsilon_k)||a_1x_1 + ... + a_mx_m||.$$

c) Conclure que (x_n) est une suite basique, dont la constante associée est $\leq 1+\varepsilon$.

La base canonique (e_n) de c_0 a la propriété que la série $\sum e_n$ est FCC, mais ne converge pas, donc n'est pas CC. Le remarquable résultat suivant affirme que ce contre-exemple est essentiellement le seul:

Théorème 9.4.4. *(Bessaga-Pelczyinski) Soit X un Banach qui ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0. Alors toute série FCC de X est CC, en particulier convergente.*

Proof. Supposons que $\sum x_n$ est FCC et pas CC, il existe donc une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum x_{\sigma(n)}$ ne converge pas. Il existe alors des entiers $q_1 < q_2 < ...$ tels que $\inf_n ||\sum_{q_n<j\leq q_{n+1}} x_{\sigma(j)}|| > 0$. Posons $y_n = \sum_{q_n<j\leq q_{n+1}} x_{\sigma(j)}$, alors la série $\sum y_n$ est encore FCC (noter que $\sum|\ell(y_n)| \leq \sum|\ell(x_n)|$ pour tout $\ell \in X'$) et $\inf_n ||y_n|| > 0$. Bien entendu, y_n converge faiblement vers 0, donc par le corollaire ci-dessus la suite (y_n) possède une sous-suite basique (z_n). Alors $\sum z_n$ est FCC, (z_n) est basique et $\inf ||z_n|| > 0$. Soit (e_n) la base canonique de c_0. Si (a_n) est une suite de scalaires, alors $\sum a_ne_n$ converge dans c_0 si et seulement si (a_n) tend vers 0. D'autre part, $\sum a_nz_n$ converge si et seulement si $a_n \to 0$: dans un sens cela découle du fait que $\inf ||z_n|| > 0$, dans l'autre puisque la série $\sum z_n$ est FCC. Ainsi (z_n) et (e_n) sont équivalents et cela permet de conclure. $\square$

Chapter 10

Espaces L^p, épisode I: dualité, convolution

On fixe un espace mesuré (X, Σ, μ) et on note, pour $p \in [1, \infty[$

$$\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} | \, f \text{ est mesurable et } \int_X |f|^p d\mu < \infty\},$$

et $||f||_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ pour $f \in \mathscr{L}^p$. On note L^p le quotient de $\mathscr{L}^p$ par le sous-espace des fonctions nulles presque partout. Nous ne rappelons pas la définition de $\mathscr{L}^\infty$, que l'on a déjà vue. Dans les arguments faisant intervenir les théorèmes de Fubini et Tonelli, nous supposons aussi que X est σ-fini, hypothèse quasiment toujours satisfaite dans la "vraie" vie. Pour éviter les formules compliquées nous allons parfois écrire $\int f$ au lieu de $\int_X f d\mu$. Aussi, nous allons systématiquement traiter les éléments de L^p comme des vraies fonctions, au lieu de classes d'équivalence de fonctions (se rappeler cependant que cela demande quelques précautions, en particulier on ne peut pas parler de la valeur d'un $f \in L^p$ en un point donné x de X...).

10.1 Rappels

Le classique et fondamental résultat ci-dessous a déjà été implicitement utilisé dans les chapitres précédents, pour établir que L^p est un espace de Banach (théorème de Riesz).

Théorème 10.1.1. *Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

a) (Hölder) On a $fg \in \mathscr{L}^1$ pour tous $f \in \mathscr{L}^p, g \in \mathscr{L}^q$, et

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$$

b) (Minkowski) $\mathscr{L}^p$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \mapsto ||f||_p$ est une semi-norme sur cet espace.

Proof. a) Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont immédiats, supposons donc que $1 < p < \infty$. Par concavité du logarithme, pour tous $a, b > 0$ on a $\ln(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$, ce qui fournit l'inégalité de Young

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab,$$

trivialement valable si $ab = 0$, donc pour tous $a, b \geq 0$. Comme $|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \in \mathscr{L}^1$, on a $fg \in \mathscr{L}^1$ et (en intégrant sur X)

$$||fg||_1 \leq \frac{||f||_p^p}{p} + \frac{||g||_q^q}{q}.$$

Si $||f||_p = 0$ alors $f = 0$ presque partout, donc $fg = 0$ presque partout et $||fg||_1 = 0$. Supposons que $||f||_p > 0$ et $||g||_q > 0$. En appliquant l'inégalité ci-dessus à $f/||f||_p$ et $g/||g||_q$ on obtient $||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$.

b) Le seul point nontrivial à vérifier est que $h := f + g \in \mathscr{L}^p$ et $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ pour $f, g \in \mathscr{L}^p$. Le premier point est clair, puisque $|h|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$. Nous allons exclure les cas triviaux $p = 1$, $p = \infty$ ou $\int_X |h|^p d\mu = 0$. En utilisant a) et l'égalité $(p - 1)q = p$, on a

$$\int |h|^p \leq \int |h|^{p-1}|f| + \int |h|^{p-1}|g| \leq (\int |h|^p)^{1/q}(||f||_p + ||g||_p),$$

ce qui permet de conclure en divisant par $(\int |h|^p)^{1/q} \in]0, \infty[$. $\square$

Remarque 10.1.2. Si $p \in]0, 1[$ on a en fait $||f + g||_p \geq ||f||_p + ||g||_p$ pour $f, g \in \mathscr{L}^p$ *à valeurs positives*. En effet, prenons q tel que $1/(1/p) + 1/q = 1$ et posons $h = f + g$. On peut supposer que h n'est pas nulle presque partout (sinon f et g le sont et tout est trivial). L'inégalité de Hölder fournit

$$\int f^p = \int \frac{f^p}{h^{p/q}} \cdot h^{p/q} \leq (\int fh^{-1/q})^p(\int h^p)^{1/q},$$

i.e. $||f||_p \leq \int fh^{-1/q} \cdot ||h||_p^{1/q}$ et une inégalité similaire pour g. En faisant la somme de ces inégalités on obtient $||h||_p \geq ||f||_p + ||g||_p$.

Exercice 10.1.1. *Soient $r, p_1, ..., p_n \in [1, \infty]$ tels que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$. Montrer, en adaptant la preuve du théorème de Hölder que*

$$f_1...f_n \in L^r \text{ et } ||f_1...f_n||_r \leq \prod_{i=1}^n ||f_i||_{p_i}, \ \forall f_i \in L^{p_i}.$$

Exercice 10.1.2. *Soient $(X, \mu), (Y, \nu)$ des espaces mesurés σ-finis et soit $K : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une constante $C \in]0, \infty[$ telle que $\int_X |K(x, y)|d\mu(x) \leq C$ pour presque tout y et $\int_Y |K(x, y)|d\nu(y) \leq C$ pour presque tout x. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$ on peut définir une application linéaire continue $T : L^p \to L^p$ de norme $||T|| \leq C$ en posant (pour presque tout x)*

$$Tf(x) = \int_Y K(x, y)f(y)d\nu(y).$$

Exercice 10.1.3. *a) Soient $p \in [1, \infty]$ et $K :]0, \infty[\times]0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que $K(ax, ay) = \frac{K(x,y)}{a}$ pour tous $a, x, y > 0$ et*

$$C := \int_0^\infty K(x, 1)x^{-1/p}dx < \infty.$$

Montrer qu'en posant

$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x, y)f(x)dx$$

on obtient une application linéaire continue $T : L^p \to L^p$, de norme $\leq C$.

b) (inégalité de Hardy) Soit $1 < p \leq \infty$. Montrer qu'en posant

$$Tf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

on a $T \in L(L^p, L^p)$ et $||T|| \leq \frac{p}{p-1}$.

c) (inégalité de Hilbert) Soit $p \in]1, \infty[$. Montrer qu'en posant

$$Tf(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}dy$$

on a $T \in L(L^p, L^p)$ et

$$||T|| \leq \int_0^\infty \frac{x^{-1/p}}{1+x}dx.$$

En général il n'y a pas d'inclusion entre les divers espaces L^p. Si la mesure est finie, on dispose cependant de telles inclusions, qui sont continues. Le résultat suivant est très utile, malgré sa simplicité.

Proposition 10.1.1. *Si $\mu(X) < \infty$ alors $\mathscr{L}^q \subset \mathscr{L}^p$ pour $1 \leq p < q \leq \infty$ et*

$$||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_q.$$

Proof. Le résultat est évident pour $q = \infty$, et si $q < \infty$ il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder

$$||f||_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leq |||f|^p||_{q/p} \cdot ||1||_{q/(q-p)} = ||f||_q^p \cdot \mu(X)^{1-p/q}.$$

$\square$

Exercice 10.1.4. *Montrer que si $p \leq q$ alors $\ell^p \subset \ell^q$ et $||f||_q \leq ||f||_p$ pour $f \in \ell^p$.*

Exercice 10.1.5. *On suppose que $\mu(X) = 1$ et que $f \in L^p$ pour un $p > 0$. Montrer que $f \in L^q$ pour $q \in]0, p[$ et que $\lim_{q\to 0} ||f||_q = e^{\int \log |f|}$.*

10.2 Uniforme convexité

On note $L^p_{\mathbb{R}}$ le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de L^p des (classes d'équivalence de) fonctions à valeurs réelles.

Théorème 10.2.1. *(Clarkson) Pour tout $1 < p < \infty$ l'espace $L^p_{\mathbb{R}}$ est uniformément convexe.*

Proof. Si $p \geq 2$, c'est assez facile: la convexité de $x \to x^{p/2}$ sur $]0, \infty[$ donne

$$|\frac{a+b}{2}|^p + |\frac{a-b}{2}|^p \leq (\frac{a^2+b^2}{2})^{p/2} \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}, \ \forall a, b \in \mathbb{R},$$

ce qui implique par intégration l'inégalité de Clarkson

$$|\frac{f+g}{2}|_p^p + |\frac{f-g}{2}|_p^p \leq \frac{|f|_p^p + |g|_p^p}{2}, \ \forall f, g \in L^p_{\mathbb{R}}.$$

Cela permet de conclure.

Le cas $1 < p < 2$ coute plus cher. On fixe un tel p. Nous aurons besoin du

Lemme 10.2.1. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\left(\frac{|a|^p + |b|^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c(a-b)^2, \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Proof. On peut supposer que $b = 1$ et $|a| \leq 1$. Soit $f(x) = (\frac{1+|x|^p}{2})^{1/p}$. Il est clair que $f(x) + \frac{1+x}{2} \geq f(x) \geq 2^{-1/p}$ pour $|x| \leq 1$, donc il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f(a) - \frac{1+a}{2} \geq c(1-a)^2$ pour $|a| \leq 1$. Comme il est clair que le terme de gauche est strictement positif pour $a \in [-1, 1/2]$, on peut se limiter au cas $a \in [1/2, 1]$. Mais $f'(1) = 1/2$ et pour $x \in [1/2, 1]$

$$f''(x) = \frac{p-1}{4} x^{p-2} f(x)^{1-2p} \geq \frac{p-1}{2^p},$$

donc par la formule de Taylor $f(x) - \frac{1+x}{2} \geq \frac{p-1}{2^{p+1}}(x-1)^2$, ce qui permet de conclure. ☐

Soient maintenant $f, g \in L^p_{\mathbb{R}}$ de norme 1. Le lemme combiné à la remarque 10.1.2 fournit

$$1 = \left(\int \frac{|f|^p + |g|^p}{2}\right)^{2/p} \geq \left(\int \left(|\frac{f+g}{2}|^2 + c|f-g|^2\right)^{p/2}\right)^{2/p}.$$

$$= |||\frac{f+g}{2}|^2 + c|f-g|^2||_{p/2} \geq |||\frac{f+g}{2}||^2_{p/2} + ||c|f-g|^2||_{p/2} = ||\frac{f+g}{2}||_p^2 + c||f-g||_p^2,$$

ce qui permet de conclure. ☐

Remarque 10.2.2. La preuve "usuelle" pour $1 < p < 2$ consiste à établir l'inégalité de Clarkson ci-dessous, qui coute bien plus cher que l'argument donné ci-dessus

$$||\frac{f+g}{2}||_p^q + ||\frac{f-g}{2}||_p^q \leq \left(\frac{||f||_p^p + ||g||_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

10.3 Dualité $L^p - L^q$

Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'inégalité de Hölder fournit une application linéaire continue, de norme ≤ 1

$$\iota : L^q \to (L^p)', \quad \iota(g)(f) = \int_X fg d\mu.$$

Proposition 10.3.1. *L'application ι est une isométrie si $p > 1$ ou bien si $p = 1$ et (X, Σ, μ) est σ-fini.*

Proof. Il reste à voir que

$$\sup_{||f||_p = 1} |\int fg| \geq ||g||_q$$

pour $g \in L^q$. On peut supposer que $||g||_q \neq 0$. Si $q < \infty$ (i.e. $p \neq 1$) on prend $f = \frac{|g|^{q-1}\overline{\mathrm{sgn}(g)}}{||g||_q^{q-1}}$ (avec $\mathrm{sgn}(g)(x) = g(x)/|g(x)|$ pour $g(x) \neq 0$ et 0 sinon). Alors $||f||_p = 1$ et $\int fg = ||g||_q$.

Supposons que $q = \infty$ et que μ est σ-finie. On vérifie alors trivialement que pour tout $A \in \Sigma$ de mesure strictement positive on peut trouver $B \in \Sigma$ tel que $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A = \{x|\, |g(x)| > ||g||_\infty - \varepsilon\}$. Alors $\mu(A) > 0$, donc il existe $B \subset A$ mesurable avec $0 < \mu(B) < \infty$. En posant $f = \frac{1_B}{\mu(B)} \cdot \overline{\mathrm{sgn}(g)}$ on obtient $||f||_1 = 1$ et $\int fg = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| > ||g||_\infty - \varepsilon$. $\square$

Exercice 10.3.1. *Soient $p \in [1, \infty]$, (X, μ) et (Y, ν) des espaces σ-finis et f une fonction mesurable sur $X \times Y$ telle que $\int_Y ||f(\cdot, y)||_p d\nu(y) < \infty$. Montrer, en utilisant la proposition ci-dessus, que $\int_Y f(\cdot, y)d\nu(y) \in L^p(X)$ et que*

$$|| \int_Y f(\cdot, y)d\nu(y)||_p \leq \int_Y ||f(\cdot, y)||_p d\nu(y).$$

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve[1] du théorème profond et fondamental suivant:

Théorème 10.3.1. *(Riesz) L'application ι est un isomorphisme isométrique si $1 < p < \infty$ ou bien si $p = 1$ et si (X, Σ, μ) est σ-fini.*

Remarque 10.3.2. a) Pour $p = \infty$ l'isométrie ι est loin d'être un isomorphisme en général: $(L^\infty)'$ est souvent beaucoup plus gros que L^1. Par exemple, prenons $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \mathscr{P}(X)$ avec la mesure de comptage. Alors $L^p = l^p$ est l'espace des suites (x_n) telles que $\sum |x_n|^p < \infty$. Soit c le sous-espace de l^∞ des suites convergentes. La forme linéaire $(x_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ sur c est de norme 1, et s'étend donc (par Hahn-Banach) en une forme linéaire continue Λ sur l^∞, qui n'est pas de la forme $(x_n) \mapsto \sum_n x_n y_n$, avec $(y_n) \in l^1$. En effet, étant donné $(y_n)_n \in l^1$, prenons N tel que $\sum_{n \geq N} |y_n| < 1$ et posons $x_n = 1_{n \geq N}$. Alors clairement $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \sum_n x_n y_n$.

b) Si $p = 1$ et si X n'est pas σ-fini, des drôles de situations peuvent arriver. En prenant $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu Σ formée des parties A de X telles que A ou $X \setminus A$ soit dénombrable, et μ la mesure de comptage (i.e. $\mu(A) = |A|$), on montre que ι est injective et pas surjective. En prenant $X = \{0, 1\}$, $\Sigma = \mathscr{P}(X)$ et $\mu(\{0\}) = 1, \mu(\{1\}) = \infty$, on voit que $\dim L^\infty = 2$ et $\dim L^1 = 1$, donc ι n'est pas injective.

On a $L^p = L^p_\mathbb{R} \oplus i L^p_\mathbb{R}$, et on voit facilement que le théorème de Riesz est équivalent au fait que $\iota : L^q_\mathbb{R} \to (L^p_\mathbb{R})'$ est un isomorphisme (sous les conditions du théorème de Riesz). Supposons d'abord que $1 < p < \infty$. Comme $L^p_\mathbb{R}$ est uniformément convexe, il est réflexif par le théorème de Milman-Pettis. Comme ι est isométrique, son image est fermée dans $(L^p_\mathbb{R})'$. Si cette image n'est pas dense, il existe $g \in (L^p_\mathbb{R})'' \simeq L^p_\mathbb{R}$ non nul tel que $\int_X fg d\mu = 0$ pour tout $f \in L^q_\mathbb{R}$ et donc $g = 0$, une contradiction.

Traitons maintenant le cas $p = 1$, avec (X, Σ, μ) σ-fini. Soit $\Lambda \in (L^1_\mathbb{R})'$ et écrivons $X = \cup_n A_n$, avec $A_n \subset A_{n+1}$ de mesure finie. Soit (a_n) une suite dans $]0, \infty[$ telle que $\sum_n a_n^2 \mu(A_n) < \infty$ et posons (avec $A_0 = \emptyset$)

$$\theta = \sum_{n \geq 1} a_n 1_{A_n \setminus A_{n-1}}.$$

Alors $\theta \in L^2_\mathbb{R}$ et $\theta \geq \min(a_1, ..., a_n) > 0$ sur A_n. L'application $f \in L^2_\mathbb{R} \mapsto \Lambda(\theta f)$ est une forme linéaire continue sur $L^2_\mathbb{R}$, donc par ce que l'on vient de démontrer[2] il

[1] La preuve "usuelle" passe par le théorème de Radon-Nikodym. Celle que l'on donne ici est plus de nature "analyse fonctionnelle".

[2] En fait dans ce cas c'est beaucoup plus simple, comme on le verra dans le chapitre sur les espaces de Hilbert...

existe $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ tel que

$$\Lambda(\theta f) = \int uf, \ f \in L^2_{\mathbb{R}}.$$

Montrons qu'il existe $v \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ tel que $\Lambda(g 1_{A_n}) = \int g 1_{A_n} v$ pour tout $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et tout n. Comme $\mu(A_n) < \infty$ et θ est minorée par une constante strictement positive sur A_n, pour $g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ on a $f = g 1_{A_n}/\theta \in L^2_{\mathbb{R}}$ donc

$$\Lambda(g 1_{A_n}) = \int g v 1_{A_n}, \ g \in L^\infty_{\mathbb{R}}$$

avec $v = u/\theta$. Montrons que $v \in L^\infty_{\mathbb{R}}$ et $||v||_\infty \leq ||\Lambda||$. Il suffit de voir que $\mu(A_c) = 0$ pour tout $c > ||\Lambda||$, où $A_c = \{|v| > c\}$. Mais en écrivant $|\Lambda(g 1_{A_n})| \leq ||\Lambda|| \cdot ||g 1_{A_n}||_1$ avec $g = 1_{A_c} \mathrm{sgn}(v)$, on obtient

$$\int_{A_c \cap A_n} |v| \leq ||\Lambda|| \cdot \mu(A_c \cap A_n),$$

donc $\mu(A_c \cap A_n) = 0$ pour tout n et $\mu(A_c) = 0$.

Enfin, soit $h \in L^1_{\mathbb{R}}$ et posons

$$g_n = h \cdot 1_{|h| \leq n} + n \frac{h}{|h|} 1_{|h| > n}.$$

Alors $g_n 1_{A_n}$ converge simplement vers h et $|g_n| \leq |h|$, donc par convergence dominée $g_n 1_{A_n}$ tend vers h dans $L^1_{\mathbb{R}}$. Comme de plus $g_n \in L^\infty_{\mathbb{R}}$, on obtient

$$\Lambda(h) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n 1_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} \int g_n 1_{A_n} v = \int hv.$$

Enfin, on a $||\Lambda|| \leq ||v||_\infty \leq ||\Lambda||$, ce qui permet de conclure.

Exercice 10.3.2. *Expliquer comment adapter la preuve du théorème de Riesz pour* $1 < p < \infty$ *en utilisant uniquement l'uniforme convexité de* L^p *pour* $p \geq 2$ *(qui est beaucoup plus facile que dans le cas* $1 < p < 2$*).*

10.4 Résultats de densité

Les résultats établis dans ce paragraphe sont très souvent utilisés pour des questions un peu fines liées aux espaces L^p.

Proposition 10.4.1. *Si* $1 \leq p < \infty$ *alors l'espace* V *engendré par les fonctions* 1_A *avec* $\mu(A) < \infty$ *est dense dans* L^p.

Proof. Clairement $V \subset L^p$. Pour montrer la densité, il suffit de voir que tout $f \in L^p$ à valeurs positives est limite (dans L^p) de fonctions dans V, puisque tout $f \in L^p$ est combinaison linéaire de fonctions positives dans L^p. Soit donc $f \in L^p$ à valeurs positives. Il existe une suite croissante (f_n) de fonctions simples (ou étagées) telle que $f_n \to f$ presque partout et $0 \leq f_n \leq f$ presque partout, pour tout n. En particulier $f_n \in L^p$ et, par convergence dominée, $||f_n - f||_p \to 0$. Montrons que chaque $f_n \in V$. En effet, si $g = \sum_{j=1}^d x_j 1_{A_j} \in L^p$ avec A_j mesurables deux à deux disjoints et $x_j \neq 0$, alors $\sum |x_j|^p \mu(A_j) = \int_X |g|^p d\mu < \infty$, donc chaque $\mu(A_j) < \infty$ et $g \in V$, ce qui permet de conclure. $\square$

Théorème 10.4.1. *Si X est un espace localement compact (séparé) et si μ est une mesure de Radon positive sur X, alors $C_c(X)$ est dense dans $L^p(X)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Proof. Par la proposition ci-dessus il suffit de voir que pour tout $A \in \mathscr{B}(X)$ de mesure finie et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f \in C_c(X)$ tel que $||f - 1_A||_p < \varepsilon$. Comme μ est une mesure de Radon positive, il existe un compact K de X et un ouvert U de X tels que $K \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus K) < \varepsilon^p$. Le lemme d'Urysohn fournit $f \in C_c(X)$ telle que $1_K \leq f \leq 1_U$, et on a $|f - 1_A| \leq 1_U - 1_K$, donc $||1_A - f||_p \leq \mu(U \setminus K)^{1/p} < \varepsilon$. □

Le résultat ci-dessous nous sera très utile par la suite. Il n'est pas toujours vrai pour $p = \infty$.

Corollaire 10.4.1. *(continuité des translations) Soit G un groupe localement compact abélien, muni de sa tribu borélienne et d'une mesure de Haar. Si $f \in L^p(G)$ et $1 \leq p < \infty$ alors*

$$\lim_{a \to 0} ||f(\cdot + a) - f||_p = 0.$$

Proof. Si $f \in C_c(G)$, cela est immédiat par le théorème de convergence dominée, en utilisant le fait que pour a dans un voisinage relativement compact de 0 les fonctions $f(\cdot + a) - f$ sont toutes à support dans un compact fixé de G, et bornées en valeur absolue par $2||f||_\infty$. En général, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $g \in C_c(G)$ tel que $||f - g||_p < \varepsilon$, et on a (par invariance de la mesure de Haar par translation)

$$||f(\cdot+a)-f||_p \leq ||f(\cdot+a)-g(\cdot+a)||_p+||g(\cdot+a)-g||_p+||f-g||_p < 2\varepsilon+||g(\cdot+a)-g||_p.$$

Le dernier terme est plus petit que 3ε pour a dans un voisinage convenable de 0, car $g \in C_c(G)$. □

Exercice 10.4.1. *Montrer que $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$, mais pas pour $p = \infty$.*

10.5 Convolution

Soit G un groupe abélien localement compact (on dira par la suite groupe lca), réunion dénombrable de compacts. Soit dx une mesure de Haar sur G. Alors $(G, \mathscr{B}(G), dx)$ est σ-fini, et on écrit $L^p = L^p(G) = L^p(G, \mathscr{B}(G), dx)$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Le lecteur pourra garder en tête le cas $G = \mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue.

Si f, g sont des fonctions mesurables sur G et si $x \in X$ vérifie $\int_G |f(x - y)g(y)|dy < \infty$, on pose

$$(f * g)(x) := \int_G f(x - y)g(y)dy,$$

la *convolution de f et de g en x*. L'invariance par translation de dx montre que si $f * g$ est définie en x, alors $g * f$ l'est aussi et $f * g(x) = g * f(x)$.

Théorème 10.5.1. *(convolution $L^1 - L^1$ et $C_c - C_c$) a) Si $f, g \in L^1$, alors $f * g$ est définie presque partout, appartient à L^1 et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$.*

b) Pour tous $f, g, h \in L^1$ on a $(f * g) * h = f * (g * h)$.

c) Pour $f, g \in C_c(G)$ on a $f * g \in C_c(G)$.

Proof. a) Par Tonelli et l'invariance par translation de dx on a

$$\int_G (\int_G |f(x-y)g(y)|dy)dx = \int_G |g(y)|(\int_G |f(x-y)|dx)dy = \int_G |g(y)|||f||_1 dy = ||f||_1 \cdot ||g||_1,$$

donc $\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty$ pour presque tout x et donc $f * g$ est définie presque partout. L'inégalité ci-dessus montre aussi que $||f * g||_1 \leq ||f||_1 \cdot ||g||_1$.

b) On commence par un calcul formel, que l'on justifiera après. On a

$$(f * g) * h(x) = \int (f * g)(x-y)h(y)dy =$$

$$\int (\int f(x-y-z)g(z)dz)h(y)dy = \int g(z)(\int f(x-y-z)h(y)dy)dz.$$

Le changement de variable $y \to y - z$ et l'invariance de dx montrent que la dernière expression est égale à

$$\int g(z)(\int f(x-y)h(y-z)dy)dz = \int f(x-y)(\int g(z)h(y-z)dz)dy =$$

$$\int f(x-y)(g * h)(y)dy = f * (g * h)(x).$$

Pour justifier ces calculs on les refait avec f, g, h remplacés par $|f|, |g|, |h|$, et alors ils sont justifiés par Tonelli. Ces calculs montrent aussi que toutes les intégrales sont absolument convergentes (en utilisant a)), et alors les calculs sont justifiés par Fubini.

c) La continuité découle des théorèmes de continuité pour les intégrales à paramètre. Le fait que le support est compact est évident, car si $x \notin \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$ alors $f(x-y)g(y) = 0$ pour tout y, donc $(f * g)(x) = 0$. $\square$

On déduit du théorème ci-dessus que $L^1(G)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution et l'addition usuelle. On reviendra sur ce sujet dans un chapitre ultérieur.

Théorème 10.5.2. *(convolution $L^1 - L^p$) Soit $f \in L^1, g \in L^p$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f * g$ est définie presque partout, appartient à L^p et*

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_p.$$

Proof. Il suffit de montrer que la fonction u définie par

$$u(x) = \int_G |f(x-y)||g(y)|dy$$

est dans L^p et $||u||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_p$. En effet, si cela est vrai alors $u(x) < \infty$ pour presque tout x, donc $f * g$ est bien définie pour presque tout x, et clairement $|(f * g)(x)| \leq u(x)$, donc $f * g \in L^p$ et $||f * g||_p \leq ||f||_1 \cdot ||g||_p$. Ainsi, nous pouvons supposer (remplacer f par $|f|$ et g par $|g|$) que $f \geq 0$ et $g \geq 0$. Alors l'inégalité de Hölder donne

$$u(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy = \int_G (f(x-y)^{1/p}g(y)) \cdot f(x-y)^{1/q}dy$$

$$\leq (\int_G f(x-y)g(y)^p dy)^{1/p} \cdot (\int_G f(x-y)dy)^{1/q},$$

donc, par invariance par translation de la mesure de Haar

$$u(x)^p \leq \int_G f(x-y)g(y)^p dy \cdot ||f||_1^{p/q}.$$

En intégrant par rapport à x et en utilisant le théorème de Tonelli et l'invariance par translation de la mesure de Haar, on obtient

$$\int_G u(x)^p dx \leq ||f||_1^{p/q} \cdot \int_G g(y)^p (\int_G f(x-y)dx)dy = ||f||_1^{1+\frac{p}{q}} ||g||_p^p.$$

C'est exactement ce que l'on voulait démontrer. □

Théorème 10.5.3. *(convolution $L^p - L^q$) Soit $f \in L^p, g \in L^q$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

a) $f*g$ est une fonction uniformément continue et bornée sur G, avec $||f*g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$.

b) (lemme de Riemann-Lebesgue) Si $1 < p < \infty$, alors $f*g \in C_0(G)$, i.e. $\lim_{x\to\infty}(f*g)(x) = 0$.

Proof. a) Par l'inégalité de Hölder $f*g$ est définie partout et $||f*g||_\infty \leq ||f||_p \cdot ||g||_q$. Ensuite pour tout $x \in G$ on a

$$|f*g(x+a) - f*g(x)| = |(f(\cdot + a) - f) * g(x)| \leq ||f(\cdot + a) - f||_p \cdot ||g||_q$$

et le résultat découle alors de la continuité des translations (corollaire 10.4.1) si $p < \infty$. Pour $p = \infty$ il suffit de permuter f et g (et donc p et q) dans cet argument.

b) Si $f, g \in C_c(G)$ alors $f*g \in C_c(G)$ et tout est clair. Soit alors $\varepsilon > 0$ très petit, $f \in L^p, g \in L^q$ et prenons $u, v \in C_c(G)$ tels que $||f-u||_p < \varepsilon^2$ et $||g-v||_q < \varepsilon^2$. Alors

$$|f*g(x)| \leq |(f-u)*g(x)| + |u*(g-v)(x)| + |u*v(x)| \leq$$

$$||f-u||_p \cdot ||g||_q + ||u||_p \cdot ||g-v||_q + |(u*v)(x)|,$$

ce qui permet de conclure. □

10.6 Régularisation par convolution

On prend ici $G = \mathbb{R}^d$ avec la mesure de Lebesgue. Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on pose $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}}$. On laisse en exercice la preuve de la proposition ci-dessous, conséquence directe du théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Proposition 10.6.1. *a) Soit $f \in L^1$ et soit $g \in C^k(G)$ telle que $\partial^\alpha g$ soit bornée pour $|\alpha| \leq k$. Alors $f*g \in C^k(G)$ et $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g)$ pour $|\alpha| \leq k$.*

b) Soit $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p$ et $\rho \in C_c^\infty(G)$. Alors $f*\rho \in C^\infty(G)$ et $\partial^\alpha(f*\rho) = f*\partial^\alpha\rho$ pour tout α.

Définition 10.6.1. Une *approximation de l'unité* est une suite de fonctions (ρ_n) dans $C_c^\infty(G)$ telle que $\int_G \rho_n(x)dx = 1$, $\rho_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{supp}(\rho_n) = \{0\}$, i.e. pour tout voisinage U de 0 dans G on a $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U$ pour tout n assez grand.

Le théorème ci-dessus montre que des approximations de l'unité existent bien: prendre $\phi \in C_c^\infty(G)$ positive, de moyenne 1 et poser $\rho_n = \phi_{1/n}$, où l'on pose

$$\phi_t(x) = t^{-d}\phi(x/t)$$

pour une fonction ϕ sur G et $t > 0$. Noter que si $\phi \in L^1$, alors $\phi_t \in L^1$ et $\int \phi = \int \phi_t$ pour tout $t > 0$. Pour voir qu'un ϕ comme ci-dessus existe, il suffit de rappeler l'exercice standard consistant à montrer que la fonction ψ définie par $\psi(x) = e^{\frac{1}{||x||^2-1}}$ si $||x|| < 1$ et $\psi(x) = 0$ si $||x|| \geq 1$ est de classe C^∞ (exercice standard) et à valeurs positives, nulle en dehors de la boule unité (ici $||x|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_d^2}$ pour $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$). Il suffit alors de poser $\phi = \frac{1}{\int \psi}\psi$.

Proposition 10.6.2. *(lemme d'Urysohn C^∞) Soit K un compact de G et soit U un voisinage ouvert de K. Il existe $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ sur K et* $\operatorname{supp}(f) \subset U$.

Proof. Puisque K est compact, on a $\delta = d(K, G \setminus U) > 0$. Soit

$$V = \{x \in G |\, d(x, K) < \delta/3\}.$$

Il existe une fonction $\phi \in C_c^\infty(G)$ à valeurs positives, telle que $\int \phi = 1$ et $\phi(x) = 0$ pour $|x| \geq \delta/3$: poser $\phi = \frac{1}{\int \psi}\psi_{\delta/3}$ avec ϕ comme dans la discussion ci-dessus. En posant $f = 1_V * \phi$, on a $f \in C_c^\infty(G)$ (proposition ci-dessus) et on vérifie sans mal (exercice) que $0 \leq f \leq 1$, $f = 1$ sur K et

$$\operatorname{supp}(f) \subset \{x \in G |\, d(x, K) \leq 2\delta/3\} \subset U.$$

□

Théorème 10.6.1. *Soit (ρ_n) une approximation de l'unité. Pour tout $f \in L^p$ et $1 \leq p < \infty$ on a $\lim_{n\to\infty} ||\rho_n * f - f||_p = 0$.*

Proof. Nous allons montrer que

$$||\rho_n * f - f||_p \leq \sup_{y \in \operatorname{supp}(\rho_n)} ||f(\cdot - y) - f||_p,$$

ce qui permettra de conclure en utilisant la continuité des translations (corollaire 10.4.1). Notons que si a est une fonction mesurable à valeurs positives, alors

$$(\int a\rho_n)^p = (\int a\rho_n^{1/p}\rho_n^{1/q})^p \leq (\int a^p\rho_n)(\int \rho_n) = \int a^p\rho_n.$$

Donc, puisque $|\rho_n * f(x) - f(x)| \leq \int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy$, on obtient

$$\int |\rho_n * f - f|^p \leq \int (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p dx \leq \int \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dydx$$

$$= \int ||f(\cdot - y) - f||_p^p \rho_n(y)dy = \int_{\operatorname{supp}(\rho_n)} ||f(\cdot - y) - f||_p^p \rho_n(y)dy$$

$$\leq \sup_{y \in \operatorname{supp}(\rho_n)} ||f(\cdot - y) - f||_p^p \cdot \int \rho_n = \sup_{y \in \operatorname{supp}(\rho_n)} ||f(\cdot - y) - f||_p^p,$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 10.6.1. *Si $1 \leq p < \infty$ l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ avec $||f - g||_p < \varepsilon/2$, et $||\rho_n * g - g||_p < \varepsilon/2$ pour n assez grand, avec $\rho_n * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. □

On finit ce chapitre avec un très joli résultat.

Théorème 10.6.2. *(Fréchet-Riesz-Kolmogorov) Soit $p \in [1, \infty[$ et soit S une partie bornée de $L^p(G)$ telle que*

$$\lim_{|a|\to 0} \sup_{f\in S} ||f(\cdot + a) - f||_p = 0.$$

Alors pour tout ouvert $U \subset G$, de mesure finie, $\{f|_U| \, f \in S\}$ est relativement compact dans $L^p(U)$.

Proof. Puisque $L^p(U)$ est complet, il suffit de montrer que $\{f|_U| \, f \in S\}$ est precompact. Soit donc $\varepsilon > 0$ et soit (ρ_n) une approximation de l'unité. L'hypothèse combinée avec l'inégalité dans la preuve du théorème 10.6.1 montre qu'il existe n tel que $\sup_{f\in S} ||\rho_n * f - f||_p \leq \varepsilon/2$. On fixe un tel n.

L'inégalité de Hölder fournit

$$c := \sup_{f\in S} ||\rho_n * f||_\infty \leq ||\rho_n||_q \cdot \sup_{f\in S} ||f||_p < \infty$$

et le même argument combiné avec $\nabla(\rho_n * f) = \nabla(\rho_n) * f$ montre que

$$C' := \sup_{f\in S} ||\nabla(\rho_n * f)||_\infty < \infty,$$

et donc que les fonctions $\rho_n * f$ avec $f \in S$ sont C'-Lipschitziennes.

Montrons qu'il existe un compact K de U tel que

$$\sup_{f\in S} ||f||_{L^p(U\setminus K)} < \varepsilon.$$

Mais pour tout $f \in S$ on a

$$||f||_{L^p(U\setminus K)} \leq ||f - \rho_n * f||_p + ||\rho_n * f||_{L^p(U\setminus K)}.$$

Le premier terme est majoré par $\varepsilon/2$, et le second est majoré par $(\int_{U\setminus K} c^p)^{1/p} = c(m(U \setminus K))^{1/p}$, et ceci peut être rendu plus petit que $\varepsilon/2$ pour un bon choix de K.

Par Arzela-Ascoli, les fonctions $(\rho_n * f)|_K$ pour $f \in S$ forment une partie relativement compacte de $C(K)$, donc aussi de $L^p(K)$. Soient $f_1, ..., f_d \in L^p(K)$ tels que pour tout $f \in S$ on a $\min_{1\leq i\leq n} ||\rho_n * f - f_i||_{L^p(K)} < \varepsilon$. Soit F_i le prolongement par 0 de f_i et montrons que

$$\min_{1\leq i\leq n} ||F_i - f||_p < 2\varepsilon, \, \forall f \in S.$$

Or, si $||\rho_n * f - f_i||_{L^p(K)} < \varepsilon$ alors

$$||f - F_i||_p^p = \int_K |f - f_i|^p + \int_{U\setminus K} |f|^p \leq$$

$$(||f - \rho_n * f||_p + ||\rho_n * f - f_i||_{L^p(K)})^p + \varepsilon^p \leq (3\varepsilon/2)^p + \varepsilon^p < (2\varepsilon)^p.$$

Ouf! □

Exercice 10.6.1. *On reprend le contexte du théorème ci-dessus. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \subset \mathbb{R}^N$ borné et mesurable tel que*

$$\sup_{f\in S} ||f||_{L^p(\mathbb{R}^N\setminus A)} < \varepsilon,$$

alors S est relativement compact dans L^p.

Chapter 11

Espaces L^p, épisode II: aspects plus fins

Dans ce chapitre on discute des résultats nettement plus subtils concernant les espaces L^p: le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, les inégalités de Khintchine et la preuve du fait que les espaces de Banach $L^p([0,1])$ sont deux à deux non isomorphes pour $p \in [1,\infty]$.

11.1 Le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin

Soit (X,Σ,μ) un espace mesuré et $L^p = L^p(X,\Sigma,\mu)$, etc. On commence par une version facile, mais très utile du théorème d'interpolation:

Proposition 11.1.1. *Pour tous* $0 < p_0 < q < p_1 \le \infty$ *on a*

$$L^{p_0} \cap L^{p_1} \subset L^q \subset L^{p_0} + L^{p_1},$$

plus précisément

a) Si $t \in]0,1[$ *vérifie* $\frac{1}{q} = \frac{t}{p_0} + \frac{1-t}{p_1}$, *alors*

$$||f||_q \le ||f||_{p_0}^t \cdot ||f||_{p_1}^{1-t}, \ \forall f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}.$$

b) Tout $f \in L^q$ *s'écrit* $f = f_0 + f_1$ *avec* $f_j \in L^{p_j}$ *et* $||f_j||_{p_j} \le ||f||_q^{q/p_j}$.

Proof. a) Si $p_1 = \infty$ on a $t = p_0/q$ et le résultat découle de l'inégalité $|f|^q \le ||f||_\infty^{q-p_0}|f|^{p_0}$, valable presque partout. Si $p_1 < \infty$, alors $q \ne \infty$ et l'inégalité de Hölder avec les paramètres $\alpha = \frac{p_0}{tq}$ et $\beta = \frac{p_1}{(1-t)q}$ (qui vérifient $1/\alpha + 1/\beta = 1$) fournit

$$\int |f|^q = \int |f|^{tq} \cdot |f|^{(1-t)q} \le (\int |f|^{p_0})^{tq/p_0}(\int |f|^{p_1})^{(1-t)q/p_1} = ||f||_{p_0}^{tq} \cdot ||f||_{p_1}^{(1-t)q}.$$

b) Il suffit de poser $f_0 = f \cdot 1_{|f|\ge 1}$ et $f_1 = f \cdot 1_{|f|<1}$ et de remarquer que $|f_0|^{p_0} \le |f|^q$ et $|f_1|^{p_1} \le |f|^q$. $\square$

Nous allons établir maintenant un analogue holomorphe du résultat ci-dessus, qui à son tour fournira (avec pas mal de travail...) une vaste généralisation de la proposition 11.1.1.

Théorème 11.1.1. *(des trois droites de Hadamard) Soit f une fonction continue bornée sur $S = \{z \in \mathbb{C} | \, 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$, holomorphe dans* $\mathrm{Int}(S)$. *Si $M_j = \sup_{\mathrm{Re}(z)=j} |f(z)|$, alors pour tout $t \in [0,1]$ on a*

$$\sup_{\mathrm{Re}(z)=t} |f(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t.$$

Proof. On exclut le cas trivial d'une fonction constante. En considérant la fonction $F(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} f(z)$, on se ramène au cas $M_0 = M_1 = 1$. Pour $\varepsilon > 0$ soit $f_\varepsilon(z) = f(z) e^{\varepsilon(z^2-1)}$, alors $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$ sur les droites $\mathrm{Re}(z) = j$, $j \in \{0,1\}$, et comme f est bornée on a $\lim_{|z|\to\infty} |f_\varepsilon(z)| = 0$. Si l'on montre que $|f_\varepsilon| \leq 1$ dans S, en faisant $\varepsilon \to 0$ on peut conclure. On se ramène donc au cas $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Soit alors $M = \sup_{z \in S} |f(z)|$. Si $z_n \in S$ et $|f(z_n)| \to M$, l'hypothèse $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ montre que les z_n ne séchappent pas à l'infini, et donc quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que les z_n convergent vers un $z \in S$. Puisque f n'est pas constante, le principe du maximum montre que $\mathrm{Re}(z) \in \{0,1\}$, et alors on sait que $|f(z)| \leq 1$, donc $M \leq 1$. □

On se donne deux espaces mesurés σ-finis[1] (X, Σ, μ) et (X', Σ', μ'), ainsi que des nombres $p_1, p_2, q_1, q_2 \in [1, \infty]$. On pose

$$L^{p_j} = L^{p_j}(X, \Sigma, \mu), \;\; L^{q_j} = L^{q_j}(X', \Sigma', \mu').$$

Les exposants de type p seront réservés à (X, Σ, μ) et les exposants de type q seront réservés à (X', Σ', μ'). On se propose de démontrer le résultat suivant, une vaste généralisation de la proposition ci-dessus et une source inépuisable d'inégalités profondes.

Théorème 11.1.2. *(Riesz-Thorin) Soit $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ une application linéaire pour laquelle il existe $M_j < \infty$ tels que*

$$||T(f)||_{q_j} \leq M_j ||f||_{p_j}, \; \forall f \in L^{p_j}, \; 0 \leq j \leq 1.$$

Soit $t \in]0,1[$ et définissons p et q par

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \; \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Alors

$$T(L^p) \subset L^q \text{ et } ||T(f)||_q \leq M_0^{1-t} M_1^t ||f||_p, \; \forall f \in L^p.$$

Proof. Pour éviter des distinctions de cas assez fastidieuses, supposons que $p_j, q_j \in]1, \infty[$. Le lecteur pourra s'amuser (ou pas...) à adapter la discussion qui suit pour traiter les cas "au bord". Notons x' l'exposant dual de $x \in]1, \infty[$, i.e. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = 1$ et posons $M = M_0^{1-t} M_1^t$. Comme $p \in [\min(p_0,p_1), \max(p_0,p_1)]$ et $q \in [\min(q_0,q_1), \max(q_0,q_1)]$, on a $L^p \subset L^{p_0} + L^{p_1}$ et $L^q \subset L^{q_0} + L^{q_1}$ par la proposition ci-dessus, donc l'énoncé a un sens.

Etape 1 C'est le coeur de l'argument: nous allons montrer que $||T(f)||_q \leq M ||f||_p$ pour toute fonction simple $f \in L^p$. Comme

$$||T(f)||_q = \sup_{||g||_{q'}=1} |\int T(f) g|,$$

[1] Cette hypothèse n'est pas vraiment indispensable, mais dans la pratique elle est satisfaite.

et comme les fonctions simples sont denses dans $L^{q'}$, il suffit de voir que $|\int T(f)g| \leq M||f||_p||g||_{q'}$ pour $g \in L^{q'}$ simple. En re-normalisant, on peut supposer que $||f||_p = ||g||_{q'} = 1$.

Ecrivons $f = \sum a_k 1_{A_k}$ et $g = \sum b_j 1_{B_j}$, avec A_k et B_j mesurables, les (A_k) (ainsi que les B_j) étant deux à deux disjoints, et $a_k, b_j \in \mathbb{C}$. Pour chaque $x \in \mathbb{C}$ on pose $\mathrm{sgn}(0) = 0$ et $\mathrm{sgn}(x) = x/|x|$ pour $x \neq 0$.

On met f et g dans les familles qui varient analytiquement, en posant

$$f_z = |f|^{a(z)}\mathrm{sgn}(f) = \sum |a_k|^{a(z)}\mathrm{sgn}(a_k)1_{A_k},\ g_z = |g|^{b(z)}\mathrm{sgn}(g) = \sum_j |b_j|^{b(z)}\mathrm{sgn}(b_j)1_{B_j},$$

avec

$$a(z) = p(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}), b(z) = q'(\frac{1-z}{q_0'} + \frac{z}{q_1'}).$$

Alors $f_t = f, g_t = g$ car $a(t) = b(t) = 1$. De plus si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $\mathrm{Re}(a(z)) = p/p_0$ et $\mathrm{Re}(b(z)) = q'/q_0'$, et on voit immédiatement que

$$||f_z||_{p_0} = ||f||_p = 1,\ ||g_z||_{q_0'} = ||g||_{q'} = 1, \forall\, \mathrm{Re}(z) = 0.$$

Le même argument donne

$$||f_z||_{p_1} = ||g_z||_{q_1'} = 1 \,\forall\, \mathrm{Re}(z) = 1.$$

La fonction

$$F(z) = \int T(f_z)g_z = \sum_{k,j} |a_k|^{a(z)}|b_j|^{b(z)}\mathrm{sgn}(a_k b_j) \int T(1_{A_k})1_{B_j}$$

est continue bornée sur $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, holomorphe dans la région $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$. De plus, pour $\mathrm{Re}(z) = 0$ on a (par l'inégalité de Hölder, l'hypothèse et la discussion ci-dessus)

$$|F(z)| \leq ||T(f_z)||_{q_0}||g_z||_{q_0'} \leq M_0||f_z||_{q_0}||g_z||_{q_0'} = M_0$$

et un calcul semblable donne $|F(z)| \leq M_1$ pour $\mathrm{Re}(z) = 1$. On en déduit que $|F(z)| \leq M_0^{1-t}M_1^t$ sur la droite $\mathrm{Re}(z) = t$ grâce au théorème des trois droites (cf. ci-dessous). Mais $F(t) = \int T(f)g$, ce qui permet de conclure.

Etape 2 Soit $f \in L^p$ quelconque et soit (f_n) une suite de fonctions simples dans L^p telles que $||f_n - f||_p \to 0$ et $|f_n| \leq |f|$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $f_n \to f$ presque partout (voir la preuve du fait que L^p est un Banach). Par l'étape 1 on a $||T(f_n) - T(f_m)||_q \leq M||f_n - f_m||_p$, donc la suite $(T(f_n))$ est de Cauchy dans L^q. On peut supposer que $p_0 \leq p_1$, donc $p_0 \leq p \leq p_1$, et en posant $f^{\geq 1} := 1_{|f|\geq 1}f \in L^{p_0}$ et $f^{<1} := 1_{|f|<1}f \in L^{p_1}$, et (avec des notations évidentes) $f_n^{\geq 1} \to f^{\geq 1}$ dans L^{p_0}, $f_n^{<1} \to f^{<1}$ dans L^{p_1} par convergence dominée. Mais alors $T(f_n^{\geq 1}) \to T(f^{\geq 1})$ dans L^{q_0} et $T(f_n^{<1}) \to T(f^{<1})$ dans L^{q_1}. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $T(f_n^{\geq 1}) \to T(f^{\geq 1})$ et $T(f_n^{<1}) \to T(f^{<1})$ presque partout, donc $T(f_n) \to T(f)$ presque partout. Comme $(T(f_n))$ converge dans L^q, on en déduit que $T(f) \in L^q$ et $T(f_n) \to T(f)$ dans L^q, et ensuite que $||T(f)||_q \leq M||f||_p$. Ouf!!! $\square$

11.2 Inégalités de Khintchine

Dans ce paragraphe on prend $L^p = L^p([0,1])$, $[0,1]$ étant muni de la mesure de Lebesgue. Introduisons une suite remarquable de fonctions:

Définition 11.2.1. La *suite de Rademacher* (r_n) est la suite de fonctions

$$r_n : [0,1] \to \{-1,0,1\},, r_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^n \pi x)).$$

Plus explicitement, on a

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \bigcup_{0\leq k<2^{n-1}}]2k/2^n, (2k+1)/2^n[\\ -1 \text{ si } x \in \bigcup_{0\leq k<2^{n-1}}](2k+1)/2^n, (2k+2)/2^n[\\ 0, \text{ si } x \in \{k/2^n \,|\, 0 \leq k \leq 2^n\} \end{cases}$$

Notons que $|r_n| = 1$ presque partout, donc $r_n \in L^p$ pour tout $p \geq 1$. On laisse en exercice amusant la preuve du résultat suivant, qui montre que les (r_n) fournissent un modèle pour une suite de variables aléatoires indépendantes (ε_n) avec $P(\varepsilon_n = 1) = 1/2 = P(\varepsilon_n = -1)$.

Proposition 11.2.1. *On a*

$$\int_0^1 r_{n_1}(x)...r_{n_k}(x)dx = 0$$

pour tous les entiers $n_1, ..., n_k \geq 1$ deux à deux distincts.

En particulier les (r_n) forment un système orthonormal dans L^2, i.e. pour tous les scalaires a_i

$$||\sum_{i=1}^n a_i r_i||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}.$$

Théorème 11.2.1. *(inégalités de Khintchine) Pour tout $1 \leq p < \infty$ les normes $||\cdot||_p$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes sur* $\mathrm{Vect}(r_1, r_2, ...)$.

Proof. En utilisant les inégalités

$$\max(||f||_p, ||g||_p) \leq ||f+ig||_p \leq ||f||_p + ||g||_p, \;\; ||f||_2 + ||g||_2 \leq \sqrt{2}\; ||f+ig||_2,$$

valables pour des fonctions à valeurs réelles f, g, on voit facilement qu'il suffit de démontrer l'équivalence des normes sur les fonctions dans $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(r_1, r_2, ...)$. Soient $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ et posons $f = \sum_{i=1}^k a_i r_i$. On veut trouver une majoration $c_1||f||_2 \leq ||f||_p \leq c_2||f||_2$ avec $c_1, c_2 > 0$ indépendents de $a_1, ..., a_k$ (et de k).

On va d'abord traiter le cas $p \geq 2$. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $2n \geq p$. Alors $||f||_2 \leq ||f||_p \leq ||f||_{2n}$. Ensuite, en utilisant la proposition 11.2.1 et le fait que $r_i(x) \in \{-1,1\}$ pour presque tout x (et donc $r_i^k = 1$ presque partout si k est pair, et $r_i^k = r_i$ presque partout si k est impair), on voit que

$$\int_0^1 |f|^{2n} = \sum_{i_1+...+i_k=2n} \frac{(2n)!}{i_1!...i_k!} a_1^{i_1}...a_k^{i_k} \int_0^1 r_1^{i_1}...r_k^{i_k} = \sum_{j_1+...+j_k=n} \frac{(2n)!}{(2j_1)!...(2j_k)!} a_1^{2j_1}...a_k^{2j_k}$$

$$\leq (2n)^n \sum_{j_1+...+j_k=n} \frac{n!}{j_1!...j_k!} a_1^{2j_1}...a_k^{2j_k} = (2n)^n (a_1^2 + ... + a_k^2)^n = (2n)^n ||f||_2^{2n},$$

donc $||f||_{2n} \leq \sqrt{2n}||f||_2$, ce qui permet de conclure.

Passons au cas $1 \leq p < 2$. Alors $||f||_p \leq ||f||_2$, la proposition 11.1.1 et le cas $p = 4$

$$||f||_2 \leq ||f||_1^{1/3} \cdot ||f||_4^{2/3} \leq ||f||_p^{1/3} \cdot (c||f||_2)^{2/3},$$

ce qui permet de conclure. □

Corollaire 11.2.1. *L'espace ℓ^2 se plonge (comme sous-espace fermé) dans L^p pour $p \geq 1$.*

11.3 Type et cotype d'un de Banach

Soit X un espace de Banach et soit $p \in [1, \infty[$. Notons $SF(X) = \cup_{n\geq 1} X^n$ l'ensemble des suites finies $x = (x_1, ..., x_n)$ d'éléments de X et posons[2], pour $x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X)$

$$||x||_p = (||x_1||^p + ... + ||x_n||^p)^{1/p}$$

et

$$E_p(x) = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n \in \{-1,1\}} ||\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_n x_n||^p \right)^{1/p}.$$

Les fonctions de Rademacher (r_n) sont un modèle d'une suite de variables aléatoires $(\varepsilon)_n$ indépendantes avec $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2$, donc

$$E_p(x) = \left(\int_0^1 ||r_1(t)x_1 + ... + r_n(t)x_n||^p dt \right)^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X).$$

En combinant cette observation avec les inégalités de Khintchine et le théorème de Tonelli, on obtient le très utile résultat suivant.

Théorème 11.3.1. *Pour tout $1 \leq p < \infty$ il existe des constantes $a_p, b_p > 0$ telles que pour tout $f = (f_1, ..., f_n) \in SF(L^p)$, en posant $g = \sqrt{|f|_1^2 + ... + |f_n|^2}$ on ait*

$$a_p||g||_p \leq E_p(f) \leq b_p||g||_p.$$

Proof. Le théorème de Tonelli fournit l'égalité

$$\int_0^1 ||f_1 r_1(t) + ... + f_n r_n(t)||_p^p dt = \int_0^1 \int |f_1(x)r_1(t) + ... + f_n(x)r_n(t)|^p d\mu(x) dt$$

$$= \int (\int_0^1 |f_1(x)r_1(t) + ... + f_n(x)r_n(t)|^p dt) d\mu(x) = \int ||f_1(x)r_1 + ... + f_n(x)r_n||_p^p.$$

Par les inégalités de Khintchine il existe des constantes $a_p, b_p > 0$ telles que pour tout x

$$a_p^p|g(x)|^p \leq ||f_1(x)r_1 + ... + f_n(x)r_n||_p^p \leq b_p^p|g(x)|^p,$$

ce qui permet de conclure. □

Voici une belle application du théorème 11.3.1:

[2] E est pour "espérance", pas le sentiment mais la moyenne...

Théorème 11.3.2. *(Orlicz) Soit $p \in [1,2]$ et soit (f_n) une suite dans L^p. Si la série $\sum f_n$ est FCC, alors $\sum_{n\geq 1} ||f_n||_p^2 < \infty$.*

Proof. Comme $\sum f_n$ est FCC, on a

$$M := \sup_{A\in\mathbb{N}, |A|<\infty} ||\sum_{n\in A} f_n||_p < \infty.$$

Comme les fonctions r_i prennent des valeurs dans $\{-1,0,1\}$, on en déduit que

$$||f_1 r_1(t) + ... + f_n r_n(t)||_p \leq 2M$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout n, et donc $E_p((f_1,...,f_n)) \leq 2M$ pour tout n. Si $g_n = \sqrt{|f_1|^2 + ... + |f_n|^2}$, le théorème 11.3.1 montre que $||g_n||_p \leq 2M/a_p$ pour tout n.

En posant $r = p/2 \leq 1$, l'inégalité de Minkowski "dans l'autre sens" (remarque 10.1.2) fournit

$$2M/a_p \geq ||g_n||_p = ||\sum_{i=1}^n |f_i|^2||_r^{1/2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n |||f_i|^2||_r} = \sqrt{\sum_{i=1}^n ||f_i||_p^2},$$

valable pour tout n, ce qui permet de conclure. □

Un petit argument de convexité montre que si $p \geq q > 0$ alors

$$\left(\frac{a_1^p + ... + a_n^p}{n}\right)^{1/p} \geq \left(\frac{a_1^q + ... + a_n^q}{n}\right)^{1/q}$$

pour tous $a_1,...,a_n \geq 0$. En revenant aux définitions, on voit donc que $E_p(x) \geq E_q(x)$ pour toute suite finie x dans un Banach X et tous $p \geq q \geq 1$. En particulier $E_p(x) \geq E_1(x)$ pour toute suite finie x et tout $1 \leq p < \infty$. Le résultat délicat suivant montre que les $E_p(x)$ ne dépendent pas très sérieusement de p. Nous n'allons pas donner la preuve, car nous n'allons pas nous en servir, mais il est suffisamment beau et important pour le mentionner.

Théorème 11.3.3. *(inégalité de Kahane-Khintchine) Pour tout $1 \leq p < \infty$ il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour tout Banach X*

$$E_p(x) \leq c_p E_1(x),\ \forall x \in SF(X).$$

Exercice 11.3.1. *Démontrer le théorème ci-dessus pour l'espace $X = L^p$.*

Définition 11.3.1. Soit X un Banach et $p,q \in]1,\infty[$.

a) On dit que X est *de type p* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$E_p(x) \leq C||x||_p, , \forall x \in SF(X).$$

b) On dit que X est *de cotype q* s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$E_q(x) \geq c||x||_q,\ \forall x \in SF(X).$$

On note Type(X) l'ensemble des $p \in]1,\infty[$ pour lesquels X est de type p, et on définit de manière analogue Cotype(X).

Remarque 11.3.4. 1. Si X et Y sont des espaces de Banach isomorphes, alors clairement $\text{Type}(X) = \text{Type}(Y)$, pareil pour le cotype.

2. Si X est de type p (resp. de cotype q), alors tout sous-espace fermé Y de X est de type p (resp. de cotype q). La situation pour le quotient X/Y est plus délicate, cf. exercice ci-dessous.

3. Si X est un Banach et si $1 < r \leq p$, alors par convexité $E_r(x) \leq E_p(x)$ pour tout $x \in SF(X)$. On a aussi $N_p(x) \leq N_r(x)$ pour $x \in SF(X)$, car
$$(a_1^p + ... + a_n^p)^{1/p} \leq (a_1^r + ... + a_n^r)^{1/r}, \ \forall a_1, ..., a_n \geq 0.$$
On en déduit que si $p \in \text{Type}(X)$ alors $]1, p] \subset \text{Type}(X)$ et si $q \in \text{Cotype}(X)$ alors $[q, \infty[\subset \text{Cotype}(X)$.

Exercice 11.3.2. *Soit* $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ *(1 en position* i*) la base canonique de* ℓ_1*. Calculer* $E_p(x_n)$ *et* $N_p(x_n)$ *pour la suite* $x_n = (e_1, ..., e_n)$*. Montrer que* ℓ^1 *n'a pas de type, qu'il a cotype* 2 *et que* c_0 *n'a pas de cotype.*

Exercice 11.3.3. *Montrer que tout espace de Hilbert* H *est de type* 2 *et de cotype* 2*, plus précisément* $E_2(x) = ||x||_2$ *pour toute suite finie* x *dans* H*.*

Ainsi tout Banach isomorphe à un Hilbert est de type 2 et de cotype 2. Un théorème remarquable de Kwapień montre que la réciproque est vraie!

Exercice 11.3.4. *Montrer que* $\text{Type}(X) \subset]1, 2]$ *et* $\text{Cotype}(X) \subset [2, \infty[$ *pour tout Banach non nul* X*.*

Exercice 11.3.5. *Montrer que si* X *est de type* p *alors* X/Y *l'est aussi pour tout sous-espace fermé* Y *de* X*. Noter cependant que* c_0 *n'a pas de cotype, que* ℓ_1 *a cotype* 2 *et pourtant* c_0 *est un quotient de* ℓ_1*, donc la situation pour le cotype d'un quotient est plus délicate!*

Théorème 11.3.5. *(Orlicz, Norlander) Soit* $L^p = L^p([0, 1])$*.*
a) $\text{Type}(L^p)$ *est égal à* $]1, p]$ *pour* $p \in]1, 2]$ *et à* $]1, 2]$ *pour* $p \in]2, \infty[$*.*
b) $\text{Cotype}(L^p)$ *est égal à* $[2, \infty[$ *pour* $p \in [1, 2]$ *et à* $[p, \infty[$ *pour* $p \in]2, \infty[$*.*

Proof. a) On montre d'abord que L^p est de type p pour $p \in]1, 2]$ et de type 2 pour $p \in]2, \infty[$. Soit b_p comme dans le théorème 11.3.1. Soit $f = (f_1, ..., f_n) \in SF(L^p)$ et $g = \sqrt{|f|_1^2 + ... + |f_n|^2}$, donc $E_p(f) \leq b_p||g||_p$. Nous allons montrer que $||g||_p \leq ||f||_p$ pour $p \in]1, 2]$ et que $||g||_p \leq ||f||_2$ pour $p > 2$, ce qui permettra de conclure (dans le cas $p > 2$ noter que $E_2(f) \leq E_p(f) \leq b_p||g||_p \leq b_p||f||_2$).

Si $p \leq 2$, alors $(a_1 + ... + a_n)^{p/2} \leq a_1^{p/2} + ... + a_n^{p/2}$ pour $a_i \geq 0$, donc
$$||g||_p^p = \int |g|^p = \int (\sum |f_i|^2)^{p/2} \leq \int \sum (|f_i|^2)^{p/2} = \sum \int |f_i|^p = ||f||_p^p,$$
ce qui donne $||g||_p \leq ||f||_p$.

Supposons que $p > 2$. L'inégalité $||g||_p \leq ||f||_2$ s'écrit aussi
$$|||f|_1^2 + ... + |f_n|^2||_{p/2} \leq \sum ||f_i||_p^2.$$
Comme $p/2 \geq 1$, le terme de gauche est majoré par $\sum || \ |f_i|^2||_{p/2} = \sum ||f_i||_p^2$.

Compte tenu de l'exercice 11.3.4 et de la discussion qui précède le théorème, il reste à voir que L^p n'a pas de type plus grand que p si $p \in]1,2]$. Pour cela on va utiliser un plongement de ℓ^p dans L^p, et il suffit alors de montrer que ℓ^p n'a pas de type r pour $r > p$ et $p \in]1,2]$. Si (e_n) est la base canonique de ℓ^p, il est trivial de voir que $E_r((e_1,...,e_n)) = n^{1/p}$ et $||(e_1,...,e_n)||_r = n^{1/r}$ pour tout n, ce qui montre que ℓ^p ne peut pas avoir type $r > p$.

Il reste à expliquer l'existence d'un plongement de ℓ^p dans L^p:

Lemme 11.3.1. *Soit (g_i) une suite dans L^p telle que $||g_i||_p = 1$ et les g_i ont des supports deux à deux disjoints. Alors $Y := \overline{\mathrm{Vect}(g_i)}$ est isométrique à ℓ^p.*

Proof. Pour toute suite (a_k) de support fini on a, en utilisant le fait que les supports des g_i sont deux à deux disjoints,

$$||\sum a_i g_i||_p^p = \int |\sum a_i g_i|^p = \int \sum |a_i g_i|^p = \sum |a_i|^p,$$

ce qui permet de conclure. □

b) Cela se démontre de la même manière. Les détails sont un excellent exercice pour le lecteur, qui pourra aussi déduire le point b) du point a) via le théorème 11.3.7 ci-dessous. □

Voici une jolie application, tout à fait nontriviale[3] du théorème ci-dessus:

Corollaire 11.3.1. *Les espaces $L^p([0,1])$ sont deux à deux non isomorphes pour $p \in [1,\infty]$.*

Proof. On peut déjà exclure L^∞ de la liste, puisqu'il est le seul espace non séparable. Pour les autres, on combine le théorème ci-dessus avec l'observation triviale mais bien utile que deux espaces de Banach isomorphes ont les mêmes ensembles de types et les mêmes ensembles de cotypes. □

Exercice 11.3.6. *Montrer que si ℓ_q se plonge (comme sous-espace fermé) dans L^p (avec $p,q \in]1,\infty[$), alors $p \le q \le 2$ ou $2 \le q \le p$.*

Exercice 11.3.7. *(théorème de Pitt) Soient $1 \le p < r < \infty$ et soit X un sous-espace fermé de ℓ^r. On se propose de montrer que tout $T \in L(X,\ell^p)$ est compact, i.e. $T(B_X)$ est relativement compact dans ℓ^p.*

a) Montrer qu'il suffit de vérifier que pour toute suite (x_n) dans B_X qui tend faiblement mais pas fortement vers 0, on a $||T(x_n)|| \to 0$. Indication: X est réflexif.

b) Soit (y_n) une suite qui tend faiblement mais pas fortement vers 0 dans ℓ^q, avec $1 \le q < \infty$. En utilisant le théorème de sélection de Bessaga-Pelczyinski, montrer que (y_n) possède une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^q.

c) En utilisant b) pour les suites (x_n) et $(T(x_n))$, démontrer le théorème de Pitt.

Exercice 11.3.8. *a) Montrer que si $1 \le p \ne q < \infty$, alors on ne peut pas trouver des sous-espaces fermés de dimension infinie X (resp. Y) de ℓ^p (resp. ℓ^q) tels que X et Y soient isomorphes en tant qu'espaces de Banach.*

b) Montrer que si $p > 2$, alors ℓ^q se plonge dans L^p si et seulement si $q \in \{2,p\}$, et alors il existe un plongement isométrique.

[3]Et curieusement peu présente, voire même mentionnée dans les livres "classiques".

Le résultat suivant (voir le magnifique livre d'Albiac et Kalton pour la preuve) clarifie la situation des plongements de ℓ^p et L^p dans L^q:

Théorème 11.3.6. *Soient* $1 \leq p, q < \infty$.

a) Si $p \in [1,2]$, *alors* ℓ^q *se plonge dans* L^p *si et seulement si* $q \in [p,2]$, *et alors il existe un plongement isométrique.*

b) Si $p > 2$, *alors* ℓ^q *se plonge dans* L^p *si et seulement si* $q \in \{2,p\}$, *et alors il existe un plongement isométrique.*

c) L'espace L^q *se plonge dans* L^p *si et seulement si* ℓ^q *se plonge dans* L^p.

Nous finissons ce long paragraphe avec un résultat (optionnel...) de dualité pour les notions de type et de cotype. Il faut faire attention au fait que sa réciproque est fausse[4].

Théorème 11.3.7. *Si* X *est un Banach de type* $p \in]1,2]$ *et si* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *alors* X' *est de cotype* q.

Proof. Soit C une constante telle que $E_p(x) \leq C||x||_p$ pour tout $x=(x_1,...,x_n) \in X^n$ et tout n. On va montrer que $||\ell||_q \leq CE_q(\ell)$ pour tout $\ell=(\ell_1,...,\ell_n) \in (X')^n$ et tout n. Le point crucial est le lemme suivant:

Lemme 11.3.2. *Pour tout* $\ell=(\ell_1,...,\ell_n) \in (X')^n$ *on a*

$$||\ell||_q = \sup_{||x_1||^p+...+||x_n||^p \leq 1} |\ell_1(x_1)+...+\ell_n(x_n)|.$$

Proof. Soit M le terme de droite. Si $\sum ||x_i||^p \leq 1$ alors par l'inégalité de Hölder

$$|\ell_1(x_1)+...+\ell_n(x_n)| \leq \sum ||\ell_i|| \cdot ||x_i|| \leq (\sum ||\ell_i||^q)^{1/q} = ||\ell||_q,$$

donc $M \leq ||\ell||_q$. Ensuite, si $y_1,...,y_n \in S_X$ et si $b_1,...,b_n \in \mathbb{K}$ vérifient $\sum |b_i|^p \leq 1$, on a $\sum |b_i||\ell_i(y_i)| \leq M$: si l'on écrit $|\ell_i(y_i)| = z_i\ell_i(y_i)$ pour des scalaires z_i de module 1, on a $\sum |||b_i|z_iy_i||^p \leq 1$, donc $|\sum \ell_i(|b_i|z_iy_i)| \leq M$ et $\sum |b_i||\ell_i(y_i)| \leq M$. Par dualité, il s'ensuit que $(\sum |\ell_i(y_i)|^q)^{1/q} \leq M$ pour tous $y_i \in S_X$ et en passant au sup on trouve $||\ell||_q \leq M$. □

Revenons à la preuve du théorème. Soit $x=(x_1,...,x_n) \in X^n$ tel que $\sum_{i=1}^n ||x_i||^p \leq 1$ et montrons que $|\ell_1(x_1)+...+\ell_n(x_n)| \leq CE_q(\ell)$. Pour $\varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ posons

$$x_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \;\; \ell_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \ell_i.$$

Un petit calcul montre que

$$\sum_{i=1}^n \ell_i(x_i) = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \ell_\varepsilon(x_\varepsilon),$$

donc, par Hölder

$$|\sum_{i=1}^n \ell_i(x_i)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_\varepsilon ||\ell_\varepsilon|| \cdot ||x_\varepsilon|| \leq E_q(\ell) \cdot E_p(x) \leq CE_q(\ell)||x||_p = CE_q(\ell).$$

□

[4] On montre que le dual de $C([0,1])$ est de cotype 2, mais que $C([0,1])$ n'a pas de type.

11.4 Le théorème de Kadec-Pelczynski

Nous allons montrer le beau (mais optionnel...) résultat suivant concernant $L^p := L^p[0,1]$.

Théorème 11.4.1. *(Kadec-Pelczynski) Soit $p \in]2, \infty[$ et soit X un sous-espace fermé, de dimension infinie de L^p. Alors*
- *soit $||\cdot||_p$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes sur X, et alors X est isomorphe à ℓ^2.*
- *soit X contient une copie de ℓ^p.*

Proof. Supposons d'abord que $||\cdot||_p$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes sur X. Si $\iota : L^p \to L^2$ est l'inclusion naturelle (qui est continue car $p > 2$), alors $\iota : X \to \iota(X)$ est un isomorphisme par notre hypothèse.

Supposons que $||\cdot||_p$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas équivalentes sur X, il existe donc $f_n \in X$ tels que $||f_n||_p = 1$ et $||f_n||_2 \to 0$. Le point technique crucial est le:

Lemme 11.4.1. *Il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une suite A_k de parties mesurables deux à deux disjointes telles que $f_{n_k} 1_{A_k^c} \to 0$ dans L^p.*

Proof. On va construire une suite $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ telle que si l'on pose $F_k = \{|f_{n_k}|^p > 1/2^k\}$ on ait

$$\int_{F_k} |f_{n_i}|^p < \frac{1}{2^{k-1}}, 1 \leq i < k, k > 1.$$

Admettons qu'une telle suite existe et posons $A_j = F_j \setminus \cup_{k>j} F_k$, les A_i sont deux à deux disjoints et il suffit de voir que $\int_{A_k^c} |f_{n_k}|^p$ tend vers 0. Mais $A_k^c \subset F_k^c \cup \cup_{j>k} F_j$, donc

$$\int_{A_k^c} |f_{n_k}|^p \leq \int_{F_k^c} |f_{n_k}|^p + \sum_{j>k} \int_{F_j} |f_{n_k}|^p < 1/2^{kp} + \sum_{j>k} 1/2^{j-1}$$

et le résultat s'en déduit.

Pour construire la suite (n_k) on utilise une méthode itérative. Notons que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mu(|f_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} ||f_n||_2^2 \to 0$ pour $n \to \infty$. Autrement dit les (f_n) tendent vers 0 en mesure.

Soit alors $n_1 = 1$. Il existe δ_1 tel que $\int_A |f_{n_1}|^p < 1/2$ dès que $\mu(A) < \delta_1$. Comme f_n tend vers 0 en mesure, il existe $n_2 > n_1$ tel que $\mu(F_2) < \delta_1$ (avec $F_k = \{|f_{n_k}|^p > 1/2^k\}$ dans la suite, même si les n_k n'ont pas été définis...). Ensuite, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $\int_A |f_{n_i}|^p < 1/2^2$ pour $i = 1, 2$ dès que $\mu(A) < \delta_2$, et il existe $n_3 > n_2$ tel que $\mu(F_3) < \delta_2$. On continue ainsi. □

Soit enfin $x_k = ||f_{n_k} 1_{A_k}||_p$ et soit $g_k = \frac{f_{n_k} 1_{A_k}}{x_k}$. Puisque $x_k \to 1$ et $f_{n_k} 1_{A_k^c} \to 0$ et $f_{n_k} \in X$, on voit que $f_{n_k} - g_k$ tend vers 0. Comme les g_k sont de norme 1 et à supports deux à deux disjoints, pour tout N l'adhŕence de $\mathrm{Vect}(g_N, g_{N+1}, \ldots)$ est isomorphe à ℓ^p par le lemme 11.3.1. Comme $f_{n_k} - g_k$ tend vers 0, par le lemme de perturbation X contient une copie de ℓ^p.

□

Chapter 12

Espaces de Hilbert

Ce chapitre est préliminaire à celui sur la transformée de Fourier. Nous rappelons les propriétés basiques des espaces de Hilbert, que l'on supposera séparables pour simplifier la discussion[1]. Un résultat remarquable est qu'il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable de dimension infinie, à isométrie près: c'est l'espace ℓ^2. Rappelons que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est le corps des scalaires.

12.0.1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Un *espace prehilbertien (sur* $\mathbb{K}$*)* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'une application $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ (appelée *produit scalaire ou produit hermitien*) vérifiant:

- pour tout $y \in H$ l'application $x \mapsto (x,y)$ est $\mathbb{K}$-linéaire.
- pour tous $x, y \in H$ on a $(y,x) = \overline{(x,y)}$.
- pour tout $x \in H$ on a $(x,x) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

On pose alors

$$||x|| = \sqrt{(x,x)},$$

qu'on appelle *norme hilbertienne associé au produit hermitien sur* H. Noter que

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\mathrm{Re}((x,y)).$$

Justifions qu'il s'agit bien d'une norme:

Proposition 12.0.1. *(inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit H un espace prehilbertien. Pour tous $x, y \in H$ on a $|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$, et $x \mapsto ||x||$ est une norme sur H.*

Proof. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $||x+ty||^2 \geq 0$, qui s'écrit aussi

$$t^2||y||^2 + 2t\mathrm{Re}((x,y)) + ||x||^2 \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela force $\mathrm{Re}((x,y))^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ et $|\mathrm{Re}((x,y))| \leq ||x|| \cdot ||y||$. Ecrivons $(x,y) = re^{i\theta}$, et appliquons ce que l'on vient de démontrer à $e^{-i\theta}x$ et y. On obtient $|(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Pour la deuxième assertion, le seul point nontrivial est l'inégalité $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, ce qui s'écrit aussi (en passant au carré) $2\mathrm{Re}((x,y)) \leq 2||x|| \cdot ||y||$ et découle du premier point. $\square$

[1]Dans la vraie vie il n'y a pas beaucoup d'espaces de Hilbert non séparables...

Remarque 12.0.1. La preuve montre qu'on n'a pas besoin de l'hypothèse que $(x,x) = 0 \implies x = 0$ pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et pour montrer que $x \mapsto ||x||$ est une semi-norme sur H). Sous cette hypothèse supplémentaire, on peut dire plus: on a $|(x,y)| = ||x|| \cdot ||y||$ si et seulement si x, y sont colinéaires, et la semi-norme $|| \cdot ||$ est une vraie norme sur H.

Corollaire 12.0.1. *Pour tout $x \in H$ l'application $\ell_x : H \to \mathbb{K}$ définie par $\ell_x(y) = (y,x)$ est une forme linéaire continue sur H, de norme $||\ell_x|| = ||x||$.*

Proof. L'inégalité $||\ell_x|| \leq ||x||$ découle directement de celle de Cauchy-Schwarz. Il suffit alors de remarquer que $\ell_x(x) = ||x||^2$ pour conclure. □

Corollaire 12.0.2. *L'application $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ est continue.*

Proof. Si (x_n) et (y_n) sont des suites dans H qui convergent vers x et y respectivement, alors

$$(x_n, y_n) - (x,y) = (x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)$$

et $|(x_n, y_n - y)| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y||$ tend vers 0 car $||y_n - y|| \to 0$ et $(||x_n||)$ est bornée. De même $(x_n - x, y)$ tend vers 0, ce qui permet de conclure. □

Définition 12.0.1. Un *espace de Hilbert* est un espace prehilbertien H qui est un espace de Banach pour la norme associée.

Convention: dans la suite H sera un espace de Hilbert (sauf mention explicite du contraire).

12.1 Projections orthogonales

Soit H un espace de Hilbert. *L'identité du parallélogramme*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \ x, y \in H,$$

montre immédiatement que H est uniformément convexe et donc, par le théorème de Milman-Pettis, H est réflexif (on verra une preuve beaucoup plus directe de cette assertion!). Nous avons déjà vu que dans un Banach réflexif X pour tout convexe fermé non vide C et tout $x \in X$ il existe un point de C à distance minimale de x. Quand l'espace est uniformément convexe, il est facile de voir qu'un tel point est forcément unique, ce qui prouve le résultat suivant, absolument fondamental pour tout ce qui suit. Bien que conceptuelle, la preuve ci-dessus utilise des résultats tout à fait nontriviaux, il convient donc de donner une preuve directe de ce résultat crucial:

Théorème 12.1.1. *Soit C un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert H. Pour tout $x \in H$ il existe un unique $c \in C$ tel que $||x - c|| = d(x, C)$.*

Proof. L'identité du parallélogramme donne

$$||z-x||^2 + ||z-y||^2 = 2||z - \frac{x+y}{2}||^2 + \frac{||x-y||^2}{2}, \ \forall x, y, z \in H.$$

Soit maintenant (c_n) une suite dans C telle que $\lim_{n\to\infty} ||x-c_n|| = d(x,C)$. Puisque $\frac{c_n+c_m}{2} \in C$, on a

$$||x-c_n||^2 + ||x-c_m||^2 = 2||x - \frac{c_n+c_m}{2}||^2 + \frac{||c_n-c_m||^2}{2} \geq 2d(x,C)^2 + \frac{||c_n-c_m||^2}{2},$$

et comme le terme de gauche tend vers $2d(x,C)^2$ quand $m,n\to\infty$, il s'ensuit que (c_n) est une suite de Cauchy dans H. Soit $c = \lim_{n\to\infty} c_n$, alors $||x-c|| = d(x,C)$ et $c\in C$ car C est fermé. Pour montrer l'unicité, noter que si $||x-c|| = ||x-c'|| = d(x,C)$, l'argument ci-dessus donne

$$2d(x,C)^2 = 2||x - \frac{c+c'}{2}||^2 + \frac{||c-c'||^2}{2} \geq 2d(x,C)^2 + \frac{||c-c'||^2}{2},$$

donc $c = c'$. $\square$

Si A est une partie de H, on note

$$A^\perp = \{x\in H|\,(x,a)=0,\ \forall a\in A\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de H, qui est fermé dans H puisque pour tout $a\in A$ l'application $x\mapsto (x,a)$ est continue.

Théorème 12.1.2. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert H. Alors*

a) On a $H = F\oplus F^\perp$.

b) La projection $p_F : H\to F$ associée à cette décomposition est continue, de norme ≤ 1 (égale à 1 si $F\neq 0$).

c) On a $F = (F^\perp)^\perp$.

Proof. a) Si $x\in F\cap F^\perp$, alors $(x,x)=0$ et donc $x=0$. Soit $x\in H$ et montrons que $x\in F+F^\perp$. Comme F est un convexe fermé de H, il existe $y\in F$ tel que $||x-y|| = d(x,F)$ (théorème ci-dessus). On a donc $||x-y||\leq ||x-y-tz||$ pour tout $z\in F$ et tout $t\in\mathbb{R}$, qui s'écrit aussi $t^2||z||^2 - 2t\mathrm{Re}((x-y,z))\geq 0$, et force $\mathrm{Re}((x-y,z)) = 0$ pour tout $z\in F$. On remplace z par iz (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) et l'on obtient $(x-y,z)=0$, autrement dit $x-y\in F^\perp$ et donc $H = F+F^\perp$.

b) Pour montrer que $||p_F||\leq 1$ il suffit de remarquer que si $x = y+z$ avec $y\in F, z\in F^\perp$, alors $||x||^2 = ||y||^2+||z||^2\geq ||y||^2$. Si $F\neq 0$ il existe $x\in F$ non nul et $p_F(x) = x$, donc $||p_F||\geq 1$.

c) L'inclusion $F\subset F = (F^\perp)^\perp$ est évidente. Si $x\in (F^\perp)^\perp$, on écrit $x = y+z$ avec $y\in F, z\in F^\perp$. Alors

$$0 = (x,z) = (y+z,z) = (y,z)+(z,z) = (z,z),$$

donc $z=0$ et $x\in F$. $\square$

Le résultat ci-dessous est un des plus importants de la théorie des espaces de Hilbert:

Théorème 12.1.3. *(Riesz-Fréchet) Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $\ell\in H'$ il existe un unique $y\in H$ tel que $\ell(x) = (x,y)$ pour tout $x\in H$. De plus on a $||y|| = ||\ell||$.*

Proof. Soit $\ell \in H' \setminus \{0\}$ et posons $F = \ker(\ell)$, un sous-espace fermé de H. Fixons $a \in H \setminus F$, alors $F \oplus \mathbb{K} = H$. Il suffit de trouver $y \in F^{\perp}$ tel que $\ell(a) = (a, y)$, car alors pour tout $z \in H$ on peut écrire $z = f + \lambda a$ avec $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et on a $\ell(z) = \lambda\ell(a) = \lambda(a, y) = (\lambda a, y) = (z - f, y) = (z, y)$ car $y \in F^{\perp}$. Cherchons y de la forme $y = \alpha(a - p_F(a))$. Comme $(a, a - p_F(a)) = (a - p_F(a) + p_F(a), a - p_F(a)) = ||a - p_F(a)||^2$, on voit que $\alpha = \frac{\overline{\ell(a)}}{||a-p_F(a)||^2}$ convient (noter que $a \neq p_F(a)$ car $a \notin F$).

Si $(x, y) = (x, y')$ pour tout $x \in X$, alors $(x, y - y') = 0$ pour tout x, et donc $y - y' = 0$. Cela montre l'unicité. On a déjà vu que la norme de $x \mapsto (x, y)$ est $||y||$. □

Exercice 12.1.1. *Soit p une projection $H \to H$. Si $||p|| = 1$, montrer que p est la projection orthogonale sur un sous-espace de H.*

Le théorème ci-dessous est tout à fait remarquable, mais malheureusement nous ne pouvons pas en présenter la preuve, franchement délicate.

Théorème 12.1.4. *(Lindenstrauss-Tzafriri) Soit X un Banach dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé Y de X est complémenté (i.e. il existe une projection continue $X \to Y$ d'image Y). Alors X est isomorphe à un espace de Hilbert.*

Exercice 12.1.2. *Déduire du théorème de Riesz-Fréchet les résultats suivants:*

a) Tout espace de Hilbert est réflexif.

b) Soit $B : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue, i.e. $B(x, \cdot)$ est semi-linéaire pour tout x et $B(\cdot, y)$ est linéaire pour tout y. Alors il existe un unique $T \in \mathscr{L}(H, H)$ tel que $B(x, y) = (Tx, y)$ pour tous x, y.

Corollaire 12.1.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in L(H, H)$. Il existe un unique $T^* \in L(H)$ tel que $(T(x), y) = (x, T^*(y))$ pour tous $x, y \in H$. De plus $||T|| = ||T^*||$, $(T^*)^* = T$ et $T_1^*T_2^* = (T_2T_1)^*$, $(aT_1 + bT_2)^* = \bar{a}T_1^* + \bar{b}T_2^*$ pour $T_1, T_2 \in L(H, H)$ et $a, b \in \mathbb{K}$.*

Proof. Justifions l'existence de T^*, qui est le seul point délicat. Les autres assertions sont triviales et laissées au lecteur. Fixons $y \in H$. L'application $x \mapsto (T(x), y)$ est linéaire et continue, de norme $\leq ||T|| \cdot ||y||$, car Cauchy-Schwarz donne $|(T(x), y)| \leq ||T(x)|| \cdot ||y|| \leq ||T|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$. Par le théorème de Riesz-Fréchet il existe un unique $T^*(y) \in H$ tel que $(T(x), y) = (x, T^*(y))$ pour tout x, et on a $||T^*(y)|| \leq ||T(y)||$. Par unicité on voit immédiatement que T^* est bien linéaire, et comme $||T^*(y)|| \leq ||T|| \cdot ||y||$, on a $T^* \in L(H, H)$ et $||T^*|| \leq ||T||$. □

12.2 Familles sommables dans un Banach

Soit X un espace de Banach et soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs dans X. Soit $PF(I)$ l'ensemble des parties finies de I. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *sommable de somme* $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $J \in PF(I)$ tel que

$$||x - \sum_{k \in K} x_k|| < \varepsilon, \ \forall K \in PF(I), J \subset K.$$

On note alors $x = \sum_{i \in I} x_i$. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si elle est sommable de somme x pour un certain $x \in X$. Enfin, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $J \in SF(I)$ tel que

$$|| \sum_{k \in K} x_k|| < \varepsilon,\ \forall K \in PF(I), K \cap J = \emptyset.$$

Notons que toute famille sommable (x_i) est de Cauchy: si $x = \sum_{i \in I} x_i$ et si $J \in PF(I)$ est tel que $||x - \sum_{k \in K} x_k|| < \varepsilon$ pour $K \in PF(I)$ contenant J, alors pour tout $K \subset I \setminus J$ fini on a

$$|| \sum_{k \in K} x_k|| = || \sum_{k \in K \cup J} x_k - \sum_{j \in J} x_j|| \leq ||x - \sum_{j \in J} x_j|| + ||x - \sum_{k \in K \cup J} x_k|| < 2\varepsilon.$$

Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie:

Proposition 12.2.1. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de Cauchy dans un Banach X.*
a) L'ensemble $S = \{i \in I |\, x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.
b) La série $\sum_{i \in S} x_i$ est CC et la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, de somme $\sum_{i \in S} x_i$.

Proof. Notons simplement $x_J = \sum_{j \in J} x_j$ pour $J \in PF(I)$. Soit $J_n \in PF(I)$ tel que $||x_K|| < 1/n$ pour tout $K \in PF(I)$ disjoint de J_n.

a) L'ensemble $S_n = \{i \in I |\, ||x_i|| \geq 1/n\}$ est alors contenu dans J_n, donc fini, et $S = \cup_{n \geq 1} S_n$ est au plus dénombrable.

b) On peut supposer que S est infini, sinon il n'y a rien à faire. Soit $i_1, i_2, ...$ une énumération des éléments de S. Comme (x_i) est de Cauchy, on a trivialement $\lim_{\min A \to \infty}\ || \sum_{n \in A}\ x_{i_n}|| = 0$, A parcourant les parties finies de $\mathbb{N}$, donc la série $\sum_n x_{i_n}$ est CC. En effet, $|| \sum_{n \in A} x_{i_n}|| < 1/N$ si $\{i_n | n \in A\} \cap J_N = \emptyset$, et cette condition est satisfaite si $\min A$ est assez grand. Montrons ensuite que (x_i) est sommable, de somme $\sum_{i \in S} x_i$. Soit $N \geq 1$ et M tel que $||x - \sum_{k=1}^{M} x_{i_k}|| < 1/N$ et $J_N \cap K \subset \{i_1, ..., i_M\}$. Soit $K \in PF(I)$ contenant $i_1, ..., i_M$. Alors

$$||x - \sum_{k \in K} x_k|| \leq ||x - \sum_{k=1}^{M} x_{i_k}|| + || \sum_{k \in K \setminus \{i_1, ..., i_M\}} x_k|| < 2/N,$$

ce qui permet de conclure. □

Par exemple, si $I = \mathbb{N}$, une suite (x_n) dans X est une famille sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ est CC dans X. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs est sommable si et seulement si $\sup_{A \subset I, |A| < \infty} \sum_{i \in A} x_i < \infty$.

Définition 12.2.1. Si I est un ensemble, on note $\ell^2(I)$ l'espace des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $(|x_i|^2)_{i \in I}$ soit une famille sommable dans $\mathbb{R}$.

On pose

$$((x_i), (y_i)) = \sum_{i \in I} x_i \overline{y_i}$$

pour $(x_i), (y_i) \in \ell^2(I)$. Noter que ceci a un sens, puisque $2|x_i \overline{y_i}| \leq |x_i|^2 + |y_i|^2$, donc la famille $(x_i \overline{y_i})_{i \in I}$ est de Cauchy et donc sommable. On vérifie alors facilement que $\ell^2(I)$ est un espace de Hilbert.

12.3 Familles et bases orthonormales

Soit H un espace de Hilbert. Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite *orthonormale* si $(x_i, x_j) = 0$ pour tous $i \neq j \in I$ et $||x_i|| = 1$ pour $i \in I$, autrement dit chaque x_i est de norme 1 et les x_i sont deux à deux orthogonaux.

Notons que si $x_1, ..., x_n$ est une famille orthonormale dans H, alors

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2,\ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}.$$

On en déduit que pour tout $x \in H$ et tout n on a

$$||x - \sum_{i=1}^{n}(x, x_i)x_i||^2 = ||x||^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2.$$

Proposition 12.3.1. *(inégalité de Bessel) Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale dans un Hilbert H, alors $((x, x_i))_{i\in I} \in \ell^2(I)$ et*

$$\sum_{i\in I} |(x, x_i)|^2 \leq ||x||^2,\ \forall x \in H.$$

Proof. Il suffit de voir que $\sum_{i\in J} |(x, x_i)|^2 \leq ||x||^2$ pour tout $x \in H$ et tout sous-ensemble fini J de I, ce qui découle de la discussion ci-dessus pour la famille orthonormale finie $(x_j)_{j\in J}$. □

Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 12.3.1. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans un espace de Hilbert H et soit V l'adhérence dans H de l'espace vectoriel engendré par les x_i. L'application*

$$\iota : V \to \ell^2(I),\ x \mapsto ((x, x_i))_{i\in I}$$

est un isomorphisme isométrique, son inverse envoyant $(a_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ sur $\sum_{i\in I} a_i x_i$, la famille $(a_i x_i)_{i\in I}$ étant sommable. En particulier

$$x = \sum_{i\in I}(x, x_i)x_i,\ ||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x, x_i)|^2,\ \forall x \in V.$$

Proof. Notons que ι est bien définie par l'inégalité de Bessel. Soit $(a_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ et montrons que $(a_i x_i)_{i\in I}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J \in PF(I)$ tel que $\sum_{i\in I\setminus J} |a_i|^2 < \varepsilon$. Si $K \in PF(I)$ est disjoint de J, alors

$$||\sum_{k\in K} a_i x_i||^2 = \sum_{k\in K} |a_k|^2 < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. Donc $(a_i x_i)_{i\in I}$ est sommable, soit $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ sa somme. Cela permet de définir une application linéaire

$$j : \ell^2(I) \to H,\ j((a_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} a_i x_i.$$

Comme V est fermé et contient $\sum_{j\in J} a_j x_j$ pour $J \in PF(I)$, on voit que $\mathrm{Im}(j) \subset V$. De plus, comme

$$(\sum_{k\in K} a_k x_k, x_i) = 1_{i\in K} a_k$$

pour tout $K \in PF(I)$, on voit aussi que $(j((a_i)_{i\in I}), x_i) = a_i$ pour tout i, donc $\iota \circ j = \mathrm{id}$.

Enfin, pour tout $K \in PF(I)$ on a

$$|| \sum_{k\in K} a_k x_k ||^2 = \sum_{k\in K} |a_k|^2,$$

et "en passant à la limite sur K" on obtient que j est une isométrie. En particulier son image est fermée, et comme elle contient $\mathrm{Vect}(x_i)$, qui est dense dans V, j est un isomorphisme isométrique. Comme $\iota \circ j = \mathrm{id}$, ι est un isomorphisme isométrique, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 12.3.1. *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite orthonormale dans un espace de Hilbert H. Si F est l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_n)$, alors l'application*

$$\ell^2 \to F,\ (a_n) \mapsto \sum a_n x_n$$

est un isomorphisme isométrique et pour tout $x \in \overline{\mathrm{Vect}(x_n)}$ on a

$$x = \sum_{n\geq 1} (x, x_n) x_n,$$

la série étant CC dans H.

Corollaire 12.3.2. *Pour une famille orthonormale $(x_i)_{i\in I}$ dans H les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\mathrm{Vect}(x_i)$ est dense dans H.

b) pour tout $x \in H$ on a $x = \sum_{i\in I} (x, x_i) x_i$ (au sens des familles sommables).

c) $(x_i)_{i\in I}$ est maximale (pour l'inclusion) parmi les familles orthonormales de H.

Proof. $a) \implies b)$ découle du théorème ci-dessus.

$b) \implies a)$ est évident: si x est orthogonal à chaque x_i, alors b) montre que $x = 0$. Il est aussi évident que a) implique c). Montrons donc que c) implique a). Mais si $v \in H$ n'est pas dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}(x_i)$, alors $w := v - \sum_{i\in I} (v, x_i) x_i$ est non nul et w est orthogonal à tout x_i, donc la famille obtenue en ajoutant $w/||w||$ à $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale et contient strictement $(x_i)_{i\in I}$, une contradiction. □

Une *base orthonormale* d'un Banach H est une famille orthonormale maximale (pour l'inclusion). L'existence d'une base orthonormale pour un espace de Hilbert est une conséquence facile du lemme de Zorn. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de H, alors H est isométriquement isomorphe à $\ell^2(I)$, comme nous l'avons vu, et pour tout $x \in H$ on a

$$x = \sum_{i\in I} (x_i, x) x_i,\ \ ||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x_i, x)|^2.$$

Théorème 12.3.2. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isométriquement isomorphe à ℓ^2.*

Proof. Soit (z_n) une suite dense dans H. Prenons une base (y_n) de $\mathrm{Vect}(z_n)$, alors l'adhérence de l'espace engendré par les y_n est H. On pose $x_1 = y_1/||y_1||$ et

$$x_j = \frac{u_j}{||u_j||},\ \ u_j := y_j - \sum_{k=1}^{j-1} (x_k, y_j) x_k,$$

autrement dit on suit l'algorithme de Gram-Schmidt. On voit immédiatement par récurrence que x_n est orthogonal à $x_1, ..., x_{n-1}$, donc (x_n) est une famille orthonormale. De plus, par construction $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{Vect}(y_1, ..., y_n)$ pour tout n, donc $\mathrm{Vect}(x_n)$ est dense dans H et donc (x_n) est une base orthonormale de H, donc $\ell^2 \to H, (a_n) \mapsto \sum a_n x_n$ est une isométrie et un isomorphisme. $\square$

Théorème 12.3.3. *Les fonctions $(e^{ik\theta})_{k\in\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$. Si $f \in L^2(S^1)$ et si*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})d\theta$$

alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ik\theta}|^2 d\theta = 0.$$

Proof. Le seul point nontrivial est la densité de $\mathrm{Vect}(e^{ik\theta})$ dans L^2. On a la densité dans $C(S^1)$ par Stone-Weierstrass, et comme $C(S^1)$ est dense dans L^2 (et la convergence uniforme est plus forte que celle L^2), on peut conclure. $\square$

Exercice 12.3.1. *(théorème de Fejer) Si $f \in C(S^1)$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = f$$

dans $C(S^1)$.

Exercice 12.3.2. *Déduire du théorème de Fejer que toute $f \in C(S^1)$ telle que $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = 0$ pour tout $n \geq 1$ est limite uniforme de fonctions polynômiales.*

Exercice 12.3.3. *(théorèmes de Vitali et Dalzell) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes pour une suite orthonormale (f_n) dans $L^2[0,1]$:*
- *(f_n) est une base orthonormale de $L^2[0,1]$.*
- *on a $\sum_{n\geq 1} |\int_0^x f_n|^2 = x$ pour tout $x \in [0,1]$.*
- *on a $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 |\int_0^x f_n|^2 dx = 1/2$.*

Indication: utiliser l'inégalité de Bessel.

12.4 Le théorème de Dvoretzky-Rogers

Le but de ce paragraphe est de démontrer le magnifique résultat suivant, qui fournit une dichotomie très importante entre les Banach de dimension infinie et ceux de dimension finie (pour lesquels le théorème ci-dessous est totalement faux, par le théorème de Riemann).

Théorème 12.4.1. *(Dvoretzky-Rogers) Dans tout Banach X de dimension infinie il existe une série CC et pas absolument convergente. Plus précisément pour toute suite $(c_n) \in \ell^2$ il existe des vecteurs $x_n \in S_X$ tels que $\sum c_n x_n$ soit CC.*

L'ingrédient crucial de la preuve est le suivant:

Proposition 12.4.1. *(lemme de Dvoretzky-Rogers) Soit* $(X, ||\cdot||)$ *un evn de dimension* n^2 *sur* $\mathbb{R}$. *Il existe* $x_1, ..., x_n \in S_X$ *tels que*

$$||a_1x_1 + ... + a_nx_n|| \leq 8\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}, \ \forall a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}.$$

Admettons pour l'instant ce résultat et montrons le théorème ci-dessus. Soit donc $(c_n) \in \ell^2$. Comme $\sum |c_n|^2 < \infty$, il existe $n_1 < n_2 < ...$ tels que

$$\sum_{j \geq n_k} |c_j|^2 < 4^{-k}, \ \forall k \geq 1.$$

En appliquant le lemme de Dvoretzky-Rogers à un sous-espace de dimension $(n_{k+1} - n_k)^2$ de X, on obtient des vecteurs $x_{n_k}, ..., x_{n_{k+1}-1} \in S_X$ tels que

$$|| \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} b_j x_j || \leq 8\sqrt{\sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} |b_j|^2}$$

pour tous $b_j \in \mathbb{R}$. On va montrer que la série $\sum c_n x_n$ est CC. Il suffit de voir que $\sum a_n c_n x_n$ est convergente pour toute suite $(a_n) \in \ell^\infty$. On peut supposer que $|a_j| \leq 1$ pour tout j, donc

$$|| \sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} a_j c_j x_j || \leq 8\sqrt{\sum_{n_k \leq j < n_{k+1}} |a_j c_j|^2} < 8 \cdot 2^{-k}$$

pour tout k. On en déduit facilement que $\sum_n a_n c_n x_n$ converge.

Passons maintenant à la preuve du lemme de Dvoretzky-Rogers. On va montrer ci-dessous qu'il existe un sous-espace Y de X de dimension n et un produit scalaire $(\cdot, \cdot)'$ sur Y dont la norme associée $|\cdot|'$ vérifie $|y|' \geq ||y||$ pour $y \in Y$, ainsi qu'une base orthonormale $y_1, ..., y_n$ de Y telle que $||y_i|| > 1/8$. Cela finira la preuve du théorème, puisque si l'on pose $x_i = y_i/||y_i$ alors $x_i \in S_X$ et pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ on a

$$||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| = ||\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{||y_i||} y_i|| \leq |\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{||y_i||} y_i|' = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^2}{||y_i||^2}} < 8\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}.$$

Pour continuer, nous avons besoin du très joli résultat suivant, qui dit que tout evn possède une base dont les vecteurs sont sur la sphère unité et les vecteurs de la base duale sont aussi sur la sphère unité (du dual de l'evn).

Proposition 12.4.2. *(Auerbach) Si* Z *est un evn de dimension* n, *il existe* $x_1, ..., x_n \in S_Z$ *et* $\ell_1, ..., \ell_n \in S_{Z'}$ *tels que* $\ell_i(x_j) = 1_{i=j}$.

Proof. Fixons une base $e_1, ..., e_n$ de Z et définissons pour $y_1, ..., y_n \in S_Z$

$$f(y_1, ..., y_n) = \det_{e_1, ..., e_n}(y_1, ..., y_n).$$

On prend $x_1, ..., x_n \in S_Z$ tels que $|f(x_1, ..., x_n)|$ soit maximal (ce qui est possible car S_Z est compact) et on pose

$$\ell_i(x) = \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)}{f(x_1, ..., x_n)}.$$

Il est clair que les x_i et les ℓ_j ainsi construits ont toutes les propriétés voulues. □

Corollaire 12.4.1. *Si Z est un evn de dimension n, alors il existe un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ sur Z dont la norme associée $|\cdot|$ vérifie*

$$||x|| \leq |x| \leq n||x||, \ \forall x \in X.$$

Proof. On prend un système (x_i) et (ℓ_i) comme dans le théorème d'Auerbach et on pose $(x,y) = n\sum_{i=1}^n \ell_i(x)\ell_i(y)$. On obtient ainsi un produit scalaire, qui vérifie pour $x = a_1x_1 + ... + a_nx_n$

$$|x|^2 := (x,x) = n\sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Comme $|a_i| = |\ell_i(x)| \leq ||\ell_i|| \cdot ||x|| = ||x||$, on a $\max |a_i| \leq ||x|| \leq \sum |a_i|$, et donc par Cauchy-Schwarz

$$||x||^2 \leq |x|^2 \leq n^2||x||^2,$$

ce qui permet de conclure. □

Revenons maintenant à la preuve du lemme de Dvoretzky-Rogers. Soit $(\cdot,\cdot)$ un produit scalaire sur X dont la norme associée $|\cdot|$ vérifie

$$||x|| \leq |x| \leq n^2||x||, \ \forall x \in X.$$

Supposons d'abord que tout sous-espace Y de X tel que $\dim Y > n^2/2$ contient un vecteur y tel que $|y| = 1$ et $||y|| > 1/8$. En particulier il existe $y \in X$ tel que $|y| = 1$ et $||y|| > 1/8$. On regarde $\mathrm{Vect}(y)^\perp$ et on trouve un vecteur z tel que $|z| = 1$ et $||z|| > 1/8$. On regarde ensuite $\mathrm{Vect}(y,z)^\perp$ et on continue tant que l'espace que l'on regarde est de dimension $> n^2/2$. Cela fournit au moins $n^2/2 - 1 \geq n$ vecteurs $y_1, ..., y_d$ qui forment une famille orthonormale pour $(\cdot,\cdot)$ et tels que $||y_i|| > 1/8$, ce qui permet de conclure.

Sinon, il existe X_1 de dimension $> n^2/2$ tel que $||\cdot|| \leq |\cdot|/8$ sur X_1. On a $||\cdot|| \leq \frac{|\cdot|}{8} \leq n^2/8 \cdot ||\cdot||$ sur X_1. On applique le même raisonnement que ci-dessus à X_1: soit on gagne, soit il existe $X_2 \subset X_1$ de dimension $> n^2/4$ sur lequel $||\cdot|| \leq \frac{|\cdot|}{8^2} \leq n^2/8^2 \cdot ||\cdot||$. Soit k tel que $8^{k-1} \leq n^2 < 8^k$. Comme une inégalité du type $||\cdot|| \leq \frac{|\cdot|}{8^k} \leq n^2/8^k \cdot ||\cdot||$ est impossible sur un espace non nul, on voit que $X_k = \emptyset$ (si on arrive à cette étape...). Si j est maximal tel que $X_j \neq \emptyset$, on voit que $j+1 \leq k$, et on gagne si $\dim X_j > n$. Mais $\dim X_j > n^2/2^j \geq n^2/2^{k-1} \geq n$, la dernière inégalité étant équivalente à $n^2 > 4^{k-1}$, ce qui est clair.

Chapter 13

Espaces de Hilbert et gaussiennes

Ce chapitre tourne autour de question suivante: quand est-ce qu'une application linéaire continue $T : X \to Y$ entre des espaces de Banach se factorise par un espace de Hilbert? Nous allons voir que cette question fait intervenir des très belles mathématiques, qui mélangent pas mal d'objets déjà rencontrés.

Quelques rappels: si X est un espace de Banach on note $SF(X)$ l'ensemble des suites finies d'éléments de X. Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X)$ et $p \geq 1$ on note

$$||x||_p = (\sum ||x_i||^p)^{1/p}$$

et

$$E_p(x) = (2^{-n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} ||\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_n x_n||^p)^{1/p} = (\int_0^1 ||r_1(t)x_1 + ... + r_n(t)x_n||^p dt)^{1/p},$$

avec $r_n(x) = \mathrm{sgn}(\sin(2^n \pi x))$ les fonctions de Rademacher, qui modélisent des variables aléatoires $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ indépendantes avec $P(\varepsilon_n = 1) = P(\varepsilon_n = -1) = 1/2$.

13.1 Factorisation par un espace de Hilbert

Pour simplifier un peu, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe, mais tout marche bien sur $\mathbb{C}$ aussi. On voit $\mathbb{R}^n$ comme un espace de Hilbert, muni du produit scalaire euclidien usuel. On identifie une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ à l'application linéaire

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_i)_{1\leq i\leq n} \to (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)_{1\leq i\leq n}.$$

Si X est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors A induit une application linéaire que l'on note encore A

$$A : X^n \to X^n, A(x_1, ..., x_n) := (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)_{1\leq i\leq n}.$$

Définition 13.1.1. Si X est un Banach et $x, z \in X^n$, on écrit $z \leq x$ s'il existe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire de norme ≤ 1 telle que $z = A(x)$.

Proposition 13.1.1. *Si X est un Banach et $z, x \in X^n$ alors*

$$z \leq x \iff \sum_{i=1}^n |\ell(z_i)|^2 \leq \sum_{i=1}^n |\ell(x_i)|^2, \forall \ell \in X'.$$

Proof. $\Longrightarrow$ est immédiat, par définition de la norme de $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Pour l'autre implication soit $V = \{(\ell(x_1), ..., \ell(x_n)) | \ \ell \in X'\} \subset \mathbb{R}^n$. Par hypothèse l'application

$$A_0 : V \to \mathbb{R}^n, \ A_0(\ell(x_1), ..., \ell(x_n)) = (\ell(z_1), ..., \ell(z_n))$$

est bien définie et de norme ≤ 1. En composant avec la projection orthogonale sur V on obtient une application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de norme au plus 1 qui prolonge A_0. Si $A = (a_{ij})$, on a $\ell(z_i) = \sum a_{ij}\ell(x_j)$ pour tout $\ell \in X'$, donc $z = A(x)$. □

Proposition 13.1.2. *Si H est un espace de Hilbert et si $z \leq x \in H^n$, alors $||z||_2 \leq ||x||_2$.*

Proof. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de norme ≤ 1 telle que $z = A(x)$. En utilisant la décomposition polaire, on montre facilement que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dans l'enveloppe convexe du groupe orthogonal $O(n)$. L'application qui à A associe $||A(x)||_2^2$ est trivialement convexe, donc il suffit de démontrer le résultat quand $A \in O(n)$. Mais dans ce cas on a $||Ax||_2 = ||x||_2$, car si $z_i = \sum_j a_{ij}x_j$, alors

$$\sum \ ||z_i||^2 = \sum_{i,j,k} a_{ij}a_{ik}(x_j, x_k) = \sum_{j,k}(x_j, x_k)(\sum_i a_{ij}a_{ik}) = \sum(x_j, x_j) = \sum ||x_j||^2.$$

□

Exercice 13.1.1. *Montrer que la boule unité de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des isométries $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, et que ce dernier ensemble est l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

Chaque $T \in L(X, Y)$ induit une application

$$T : SF(X) \to SF(Y), \ T((x_1, ..., x_n)) = (T(x_1), ..., T(x_n)).$$

Théorème 13.1.1. *(de factorisation) Soient X, Y des espaces de Banach, $T : X \to Y$ une application linéaire continue et $C > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) Il existe un espace de Hilbert H et $R \in L(H, Y), S \in L(X, H)$ tels que $||R|| \cdot ||S|| \leq C$ et $T = RS$.

b) Pour tous ≥ 1 et $x, z \in X^n$ satisfaisant $z \leq x$ on a $||T(z)||_2 \leq C||x||_2$.

Proof. $a) \Longrightarrow b)$ Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, de norme au plus 1, telle que $z = A(x)$. Alors $S(z_i) = \sum a_{ij}S(x_j)$, donc par la proposition ci-dessus

$$\sum ||Sz_i||^2 \leq \sum ||Sx_j||^2 \leq ||S||^2 \sum ||x_j||^2.$$

D'autre part

$$\sum ||T(z_i)||^2 = \sum ||RSz_i||^2 \leq ||R||^2 \sum ||Sz_i||^2,$$

ce qui permet de conclure.

$b) \Longrightarrow a)$ coute plus cher. Soit A l'algèbre des fonctions (quelconques) de X' dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in X$ on note $\hat{x} = \mathrm{ev}_x \in A$ l'application envoyant $\ell \in X'$ sur $\ell(x)$. Soit

$$V = \mathrm{Vect}_{x \in X}\hat{x}^2 = \mathrm{Vect}_{x,y \in X}\hat{x} \cdot \hat{y} \subset A.$$

Nous allons montrer ci-dessous qu'il existe une forme linéaire L sur V telle que

$$||Tx||^2 \le L(\hat{x}^2) \le C^2||x||^2, \forall x \in X.$$

Admettons l'existence de L pour l'instant et posons $(x,y) = L(\hat{x} \cdot \hat{y})$ pour $x, y \in X$. Alors $C^2||x||^2 \ge (x,x) \ge ||T(x)||^2 \ge 0$ pour tout x. Par Cauchy-Schwarz on obtient que $N := \{x \in X | \, (x,x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de X et X/N est un espace prehilbertien. Soit H le complété de X/N, un espace de Hilbert muni d'une application linéaire continue d'image dense $S : X \to H$, envoyant x sur l'image de sa classe modulo N dans H. Par construction $||S(x)|| = \sqrt{(x,x)} \le C||x||$ et $||T(x)|| \le ||S(x)||$ pour tout x. En particulier on peut définir $U : S(X) \to Y$ de norme ≤ 1 telle que $T = US$, et U se prolonge par continuité en $R : H \to Y$ de norme ≤ 1, telle que $T = RS$. On a bien $||R|| \cdot ||S|| \le 1 \cdot C = C$, ce qui finit la preuve du théorème.

Il reste à expliquer l'existence de L. Pour cela nous allons utiliser le théorème de Hahn-Banach. Notons que tout $v \in V$ peut s'écrire (de plusieurs manières, bien entendu) sous la forme $v = \sum_{j=1}^n b_j \hat{x}_j^{\,2} - \sum_{i=1}^n a_i \hat{z}_i^{\,2}$ pour certains $n \ge 1$ et $x_i, z_j \in X$ et $a_i, b_j \ge 0$. Posons

$$p(v) = \inf\{\sum_{j=1}^n b_j C^2 ||x_j||^2 - \sum_{i=1}^n a_i ||Tz_i||^2 | \; v = \sum_{j=1}^n b_j \hat{x}_j^{\,2} - \sum_{i=1}^n a_i \hat{z}_i^{\,2}, a_i, b_j \ge 0, x_i, z_j \in X\}.$$

On voit facilement que $p(v+v') \le p(v) + p(v')$ pour tous $v, v' \in V$, et que $p(av) = ap(v)$ pour $a > 0$ et $v \in V$. Il n'est pas du tout clair que $p(v) > -\infty$ pour tout v, mais nous allons voir que $p(0) = 0$ et comme $p(v) + p(-v) \ge p(0) = 0$, on doit avoir $p(v) > -\infty$ pour tout v. Une application de Hahn-Banach fournira une application linéaire L sur V telle que $L \le p$ sur V. Mais alors $L(\hat{x}^2) \le p(\hat{x}^2) \le C^2||x||^2$ et $L(-\hat{x}^2) \le p(-\hat{x}^2) \le -||T(x)||^2$ pour tout x.

Enfin, montrons que $p(0) = 0$. Clairement $p(0) \le 0$, il reste donc à voir que

$$C^2 \sum_{j=1}^n b_j ||x_j||^2 \ge \sum_{i=1}^n a_i ||Tz_i||^2$$

si $\sum_{j=1}^n b_j \hat{x}_j^{\,2} - \sum_{i=1}^n a_i \hat{z}_i^{\,2} = 0$, autrement dit si

$$\sum_{j=1}^n |\ell(\sqrt{b_j} x_j)|^2 = \sum_{i=1}^n |\ell(\sqrt{a_i} z_i)|^2$$

pour tout $\ell \in X'$. Mais alors $(\sqrt{a_i} z_i))_{1 \le i \le n} \le (\sqrt{b_j} x_j)_{1 \le j \le n}$ et donc par hypothèse on a bien

$$C^2 \sum_{j=1}^n b_j ||x_j||^2 \ge \sum_{i=1}^n a_i ||Tz_i||^2.$$

□

13.2 Gaussiennes et inégalité de Grothendieck

Le corps des scalaires sera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais tout ce qui suit s'adapte au cas complexe. Soit (Ω, Σ, P) un espace de probabilité. Pour $\sigma > 0$, une *gaussienne de paramètre* σ

est une variable aléatoire $G : \Omega \to \mathbb{R}$ de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, autrement dit la mesure de probabilité P_G sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{Leb})$ définie par $P_G(A) = P(G^{-1}(A))$ $(A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue Leb, de densité (au sens de Radon-Nikodym) celle indiquée ci-dessus, i.e.

$$\int_\Omega F(G(\omega)) dP(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

pour toute fonction borélienne positive F.

Il est bien connu (et on le verra dans le chapitre sur la transformée de Fourier) que $\sigma^2 = E(G^2)$ et plus généralement $G \in L^p(\Omega, \Sigma, P)$ pour tout $\infty > p \geq 1$ et

$$E(e^{itG}) = e^{-t^2\sigma^2/2}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier $E(G^4) = 3\sigma^4$.

Une *gaussienne standard* est une gaussienne de paramètre $\sigma = 1$, autrement dit une gaussienne de norme L^2 égale à 1. Il est bien connu[1] que si $g_1, ..., g_n$ sont des gaussiennes standard indépendantes, alors pour tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $g = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ est aussi une gaussienne, de paramètre $\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$.

Nous allons utiliser ces résultats sur les gaussiennes pour démontrer un résultat célèbre[2] de Grothendieck.

Théorème 13.2.1. *(Grothendieck) Il existe une constante C avec la propriété suivante: pour tous $m, n \geq 1$, toute matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$|\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \ x_j y_k| \leq \max |x_j| \cdot \max |y_k|, \ \forall x_j, y_k \in \mathbb{R},$$

tout espace de Hilbert réel H et tous $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n \in H$ on a

$$|\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} \ (u_j, v_k)| \leq C \max ||u_j|| \cdot \max ||v_k||.$$

La plus petite constante C comme dans le théorème est appelée *constante de Grothendieck* et notée K_G. Sa valeur exacte n'est toujours pas connue!

Proof. On peut supposer que H est séparable, de dimension infinie. Comme il n'y a qu'un seul Hilbert séparable de dimension infinie à isomorphisme isométrique près, on peut supposer que $H = \overline{\mathrm{Vect}_{n\geq 1} g_n} \subset L^2 = L^2(\Omega, \Sigma, P)$ pour une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de gaussiennes standard indépendantes, qui forment donc une base orthonormale de H.

Fixons une matrice A comme dans l'énoncé (et donc fixons m et n) et soit

$$\Gamma = \sup_{u_1,...,u_m,v_1,...,v_n \in B_H} |\sum_{j,k} a_{jk} (u_j, v_k)|.$$

Noter que $\Gamma < \infty$, par Cauchy-Schwarz. Nous allons montrer que $\Gamma \leq 81/16$, donc $C = 81/16$ fera l'affaire.

[1]et découle trivialement du fait que la fonction $t \mapsto E(e^{itX})$ détermine la loi d'une variable aléatoire réelle X, qui découle de l'injectivité de la transformée de Fourier, qui elle-même sera vue dans le chapitre suivant.

[2]Un parmi des nombreux autres...

Soit $M > 0$ et, pour $f \in L^2$, posons

$$f^M = 1_{|f|\leq M} f + 1_{|f|>M} M \mathrm{sgn}(f),$$

de telle sorte que $|f^M| \leq M$ presque partout et

$$||f^M||_2^2 = \int |f^M|^2 = \int_{|f|\leq M} |f|^2 + \int_{|f|>M} M^2 \leq \int |f|^2 = ||f||_2^2.$$

Notons aussi que

$$\int |f - f^M|^2 = \int_{|f|>M} |f - M\mathrm{sgn}(f)|^2 = \int_{|f|>M} |f/\mathrm{sgn}(f) - M|^2$$

$$\leq \frac{1}{16M^2} \int |f/\mathrm{sgn}(f)|^4 = \frac{1}{16M^2} \int |f|^4.$$

Soient maintenant $u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_n \in B_H \subset L^2$. On a

$$|\sum a_{jk}(u_j, v_k)| = |\sum a_{jk} \int u_j^M v_k^M + \sum a_{jk} \int (u_j - u_j^M) v_k^M + \sum a_{jk} \int u_j (v_k - v_k^M)|$$

$$\leq \int |\sum a_{jk} u_j^M v_k^M| + |\sum a_{jk}(u_j - u_j^M, v_k^M)| + |\sum a_{jk} (u_j, v_k - v_k^M)|.$$

Puisque $|u_j^M| \leq M, |v_k^M| \leq M$, par hypothèse on a

$$|\sum a_{jk} u_j^M v_k^M| \leq M^2$$

presque partout, donc $\int |\sum a_{jk} u_j^M v_k^M| \leq M^2$. D'autre part, ce qui précède montre que $||v_k^M|| \leq ||v_k|| \leq 1$ et $||u_j - u_j^M|| \leq \frac{1}{4M} ||u_j||_4^2$, donc

$$|\sum a_{jk}(u_j - u_j^M, v_k^M)| \leq \Gamma \max ||u_j - u_j^M|| \cdot \max ||v_k^M|| \leq \frac{\Gamma}{4M} \max ||u_j||_4^2.$$

Ensuite, notons que si $f \in \mathrm{Vect}(g_1, g_2, ...)$ est de norme 1, disons $f = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sum a_i^2 = 1$, f est aussi une gaussienne standard et donc $||f||_4^2 = \sqrt{3}$. Autrement dit on a $||f||_4 = 3^{1/4} ||f||_2$ pour $f \in \mathrm{Vect}(g_1, g_2, ...)$ et par densité cela reste vrai pour $f \in H$. Combinant cela avec ce qui précède, on obtient

$$|\sum a_{jk}(u_j, v_k)| \leq M^2 + \frac{2\Gamma}{4M} \cdot \sqrt{3}.$$

En passant au sup sur les u_j et v_k, on obtient

$$\Gamma \leq M^2 + \frac{2\Gamma}{4M} \cdot \sqrt{3}.$$

Comme cela est vrai pour tout $M > 0$, en prenant $M = (\frac{\sqrt{3}\Gamma}{4})^{1/3}$ on obtient $\Gamma \leq 81/16$, ce qui finit la preuve. $\square$

13.3 Opérateurs p-sommants

Soit X un Banach. Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X)$ et $p \in [1, \infty[$ posons

$$||x||_{p,w} = \sup_{\ell \in B_{X'}} (\sum_{k=1}^{n} |\ell(x_k)|^p)^{1/p} \leq ||x||_p := (\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^p)^{1/p}.$$

Exercice 13.3.1. *Montrer que si* $1/p + 1/q = 1$*, alors pour tout* $x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X)$ *on a*

$$||x||_{p,w} = \sup_{|a_1|^q + ... + |a_n|^q \leq 1} ||a_1 x_1 + ... + a_n x_n||,$$

où la condition $|a_1|^q + ... + |a_n|^q \leq 1$ *s'écrit* $\max |a_i| \leq 1$ *si* $q = \infty$*. Montrer aussi que*

$$||x||_{1,w} = \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} ||\varepsilon_1 x_1 + ... + \varepsilon_n \ x_n||.$$

Soient X, Y des espaces de Banach. Tout opérateur $T \in L(X, Y)$ induit une application

$$T : SF(X) \to SF(Y), \ T((x_1, ..., x_n)) := (T(x_1), ..., T(x_n)).$$

Définition 13.3.1. Si X, Y sont des espaces de Banach et $p \in [1, \infty[$, on dit qu'un opérateur $T \in L(X, Y)$ est *p-sommant* si

$$\pi_p(T) := \sup_{x \in SF(X), x \neq 0} \frac{||T(x)||_p}{||x||_{p,w}} < \infty.$$

On note $\Pi_p(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs p-sommants de X vers Y.

Théorème 13.3.1. *Un opérateur* $T \in L(X, Y)$ *est* 1*-sommant si et seulement si* $\sum T(x_n)$ *est absolument convergente pour toute série FCC* $\sum x_n$*.*

Proof. Supposons que $T \in Pi_1(X, Y)$ et soit $\sum x_n$ une série FCC. Nous avons vu que

$$C = \sup_{\ell \in B_{X'}} \sum_n |\ell(x_n)| < \infty.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} ||T(x_i)|| = ||T((x_1, ..., x_n))||_1 \leq \pi_1(T) ||(x_1, ..., x_n)||_{1,w} \leq C \pi_1(T)$$

pour tout n et donc $\sum T(x_n)$ converge absolument.

Dans l'autre sens, supposons que $\sum T(x_n)$ converge absolument pour toute série FCC $\sum x_n$. Soit Z l'ensemble des suites (x_n) dans X telles que $\sum x_n$ soit une série FCC, muni de la norme

$$||(x_n)|| = \sup_{\ell \in B_{X'}} \sum_n \ |\ell(x_n)|.$$

On laisse au lecteur de vérifier que Z est bien un espace de Banach. D'autre part soit $\ell^1(X)$ l'ensemble des suites (x_n) dans X telles que $\sum ||x_n|| < \infty$, muni de la norme

$$||(x_n)|| = \sum_n ||x_n||.$$

C'est aussi un Banach, comme on peu facilement vérifier. Par hypothèse on dispose d'une application linéaire

$$T : Z \to \ell^1(X), (x_n) \mapsto (T(x_n)).$$

Pour conclure il suffit de voir que T est continue, et donc il suffit de voir que son graphe est fermé. Supposons que $z^k \to z$ et $T(z^k) \to u$, avec $z^k = (z^k_n)_{n\geq 1}, z = (z_n)_{n\geq 1}, u = (u_n)_{n\geq 1}$. Donc $\sum_n |z^k_n - z_n| \to 0$ et $\sum_n |T(z^k_n) - u_n| \to 0$, en particulier $z^k_n \to z_n$ et $T(z^k_n) \to u_n$ pour tout n, donc $u_n = T(z_n)$ pour tout n, ce qui permet de conclure. □

Exercice 13.3.2. *a) Montrer que si $S, T \in L(X,Y)$ sont p-sommants, alors $S+T$ l'est aussi et $\pi_p(S+T) \leq \pi_p(S) + \pi_p(T)$.*

b) Montrer que si $T \in L(X,Y), S \in L(Y,Z), R \in L(Z,W)$ et S est p-sommant, alors RST est p-sommant et

$$\pi_p(RST) \leq ||R|| \cdot ||T|| \cdot \pi_p(S).$$

L'exemple le plus classique d'opérateur p-sommant est sans doute le suivant:

Proposition 13.3.1. *Soit K un espace compact et soit $\mu \in \mathscr{MR}(K)_+$ une mesure de probabilité. Alors l'inclusion $i : C(K) \to L^p(K,\mu)$ est p-sommante et $\pi_p(i) = 1$.*

Proof. Il s'agit de voir que pour tous $f_1, ..., f_n \in C(K)$ on a

$$\sum \int_K |f_i|^p d\mu \leq \sup_{||\ell||\leq 1} \sum |\ell(f_i)|^p.$$

Il suffit de voir que pour tout $x \in K$ on a

$$\sum |f_i(x)|^p \leq \sup_{||\ell||\leq 1} \sum |\ell(f_i)|^p,$$

ce qui est évident car $\delta_x : f \mapsto f(x)$ est une forme linéaire de norme au plus 1. Donc $\pi_p(i) \leq 1$. Mais trivialement $\pi_p(i) \geq ||i|| = 1$. □

Si X est un Banach on note $K_X = B^{w*}_{X'}$ la boule unité du dual de X, munie de la topologie faible *. Alors K_X est un espace compact (Banach-Alaoglu-Bourbaki) et X se plonge isométriquement dans $C(K_X)$, en envoyant $x \in X$ sur l'application $\mathrm{ev}_x : \ell \mapsto \ell(x)$.

Théorème 13.3.2. *(de factorisation de Pietsch) Soit $T \in L(X,Y)$ un opérateur entre des espaces de Banach et soit $c > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) T est p-sommant et $\pi_p(T) \leq c$.

b) Il existe une mesure de probabilité (de Radon) ν sur K_X telle que

$$||T(x)|| \leq c(\int_{K_X} |\ell(x)|^p d\nu(\ell))^{1/p} = c||\mathrm{ev}_x||_p, \forall x \in X.$$

Proof. Notons simplement $K = K_X$. L'implication $b) \implies a)$ est immédiate et laissée au lecteur. Pour l'autre, soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions $f \in C(K)$ de la forme

$$f(\ell) = \pi_p(T)^p \sum_{i=1}^n |\ell(x_i)|^p - \sum_{i=1}^n ||T(x_i)||^p$$

pour $(x_1, ..., x_n) \in SF(X)$. Il est évident que $af_1 + bf_2 \in \mathscr{C}$ si $a, b \geq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathscr{C}$. Par hypothèse toute fonction $f \in \mathscr{C}$ vérifie $\sup_{\ell \in K} f(\ell) \geq 0$. Soit $\mathscr{C}^-$ l'ensemble des fonctions $f \in C(K)$ telles que $\sup_K f < 0$. Alors $\mathscr{C}^-$ est ouvert et $af_1 + bf_2 \in \mathscr{C}^-$ pour $a, b \geq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^-$.

On vient de voir que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^-$ sont disjoints. Par le théorème de séparation des convexes combiné au théorème de Riesz il existe une mesure de Radon bornée μ sur K qui sépare $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^-$. Comme $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^-$ sont stables par multiplication par des scalaires positifs, on peut supposer (quitte à changer le signe de μ) que $\mu(\mathscr{C}^-) \subset]-\infty, 0]$ et $\mu(\mathscr{C}) \subset [0, \infty[$. La première inclusion montre que μ est une mesure positive. Soit $\nu = \mu/||\mu||$, une mesure de probabilité. Pour tout $f \in \mathscr{C}$ on a $\nu(f) \geq 0$. En prenant $f(\ell) = \pi_p(T)^p |\ell(x)|^p - ||T(x)||^p$ on obtient $||T(x)|| \leq \pi_p(T)(\int_K |\ell(x)|^p d\nu(\ell))^{1/p}$, comme désiré. □

Corollaire 13.3.1. *Tout opérateur 2-sommant se factorise par un espace de Hilbert.*

Proof. Soit ν une mesure comme dans le théorème ci-dessus. Soit $\iota : X \to C(K) \to L^2(K, \nu)$ l'injection continue envoyant $x \in X$ sur ev_x, et soit $X_2 = \overline{i(X)} \subset L^2(K, \mu)$. Puisque $||T(x)|| \leq \pi_2(T)||i(x)||_2$, l'application $i(X) \to Y$ envoyant $i(x)$ sur $T(x)$ est continue, de norme $\leq \pi_2(T)$, donc se prolonge en une application continue $T' : X_2 \to Y$. Soit $p : L^2(K, \nu) \to X_2$ la projection orthogonale sur X_2, alors $T'' = T'p : L^2(K, \nu) \to Y$ est un opérateur continu et on a $T'' \circ i = T$, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 13.3.2. *a) Si $1 \leq p \leq q < \infty$ alors $\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y)$ et $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$ pour $T \in \Pi_p(X, Y)$.*

b) Si $T \in \Pi_p(X, Y)$ et si (x_n) est une suite faiblement convergente dans X, alors $(T(x_n))$ converge dans Y (pour la topologie forte).

Proof. a) Conséquence immédiate du théorème de Pietsch et du fait que $||f||_p \leq ||f||_q$ si $p \leq q$ et $f \in L^q(K_X, \nu)$.

b) On peu supposer que x_n converge faiblement vers 0. On a

$$||T(x_n)||^p \leq \pi_p(T)^p \int_{K_X} |\ell(x_n)|^p d\nu(\ell)$$

et pour $n \to \infty$ l'intégrale à droite tend vers 0 par convergence dominée et le fait que $(\ell(x_n))$ converge vers 0 pour tout $\ell \in K_X$. □

Nous avons donné une preuve "élémentaire"[3] mais très astucieuse du théorème de Dvoretzky-Rogers dans le chapitre précédent. Nous allons en donner une autre, plus conceptuelle, mais qui utilise beaucoup de résultats délicats:

Théorème 13.3.3. *(théorème de Dvoretzky-Rogers) Si X est un Banach dans lequel toute série CC est absolument convergente, alors X est de dimension finie.*

Proof. Notons déjà que X ne contient pas de copie de c_0, donc par le théorème de Bessaga-Pelczyinski 9.4.4 on sait qu'en fait toute série FCC est absolument convergente. Par le théorème 13.3.1 id : $X \to X$ est donc 1-sommant. Il est donc aussi 2-sommant par le corollaire ci-dessus, et donc se factorise id $= RS$ par un Hilbert $X \to H \to X$. Montrons que la boule unité B_X est compacte, ce qui finira la preuve

[3] Au sens de la langue de Shakespeare!

par le lemme de Riesz. Soit (x_n) une suite dans B_X, alors la suite $(S(x_n))$ est bornée dans H, qui est réflexif, donc quitte à remplacer (x_n) par une sous-suite on peut supposer que $(S(x_n))$ converge faiblement vers un $h \in H$. Alors alors $x_n = R(S(x_n))$ converge faiblement vers $x = R(h)$. Le corollaire ci-dessus montre que $\mathrm{id}(x_n) = x_n$ converge dans X, ce qui permet de conclure. □

Un exemple tout à fait nontrivial d'opérateur 1-sommant est fourni par le théorème ci-dessous, belle application de l'inégalité de Grothendieck.

Théorème 13.3.4. *(Grothendieck) Tout $T \in L(\ell^1, \ell^2)$ est 1-sommant et*

$$\pi_1(T) \leq K_G ||T||.$$

Proof. Il faut montrer que si $x_1, ..., x_n \in \ell^1$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} |\ell(x_i)| \leq ||\ell||_\infty, \forall \ell \in \ell^\infty = (\ell^1)',$$

alors

$$\sum ||T(x_k)||_2 \leq K_G ||T||.$$

Les suites de support fini étant denses dans ℓ^1, par approximation on peut supposer que $x_1, ..., x_n$ sont de support fini, autrement dit

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$$

pour certains $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $e_1, e_2, ...$ étant la base usuelle de ℓ^1.

Il suffit de voir que pour tous $y_1, ..., y_n \in B_{\ell^2}$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k, T(x_k)) \leq K_G ||T||.$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k, T(x_k)) = \sum_{i,j} a_{ij} (y_i, T(e_j)),$$

par l'inégalité de Grothendieck il suffit de voir que

$$|\sum a_{ij} u_i v_j| \leq ||u||_\infty \cdot ||v||_\infty$$

pour tous les vecteurs $u = (u_i)$ et $v = (v_j)$ avec $u_i, v_j \in \mathbb{R}$. Mais

$$|\sum a_{ij} u_i v_j| \leq \sum |u_i| \cdot |\sum a_{ij} v_j| \leq ||u||_\infty \sum_i |\sum a_{ij} v_j|$$

$$= ||u||_\infty \sum_i |v(x_i)| \leq ||u||_\infty \cdot ||v||_\infty,$$

ce qui permet de conclure. □

Des techniques d'approximation un peu pénibles permettent de déduire du cas particulier ci-dessus le résultat général suivant:

Théorème 13.3.5. *(Grothendieck) Si (X, Σ, μ) est un espace mesuré et si H est un espace de Hilbert, alors tout $T \in L(L^1(X, \Sigma, \mu), H)$ est 1-sommant et $\pi_1(T) \leq K_G||T||$.*

Mentionnons aussi

Théorème 13.3.6. *(Grothendieck) a) Tout $T \in L(\ell^\infty, \ell^1)$ est 2-sommant avec $\pi_2(T) \leq K_G||T||$.*

b) Si K est un espace compact et si (X, Σ, μ) est un espace mesuré, tout $T \in L(C(K), L^1(\mu))$ est 2-sommant et $\pi_2(T) \leq K_G||T||$.

13.4 Le théorème de Kwapien-Maurey

On se propose de démontrer le théorème de Kwapien: tout Banach de type 2 et de cotype 2 est isomorphe à un espace de Hilbert. La preuve va encore utiliser des gaussiennes...

Définition 13.4.1. Soit X un espace de Banach.

a) Pour $p \in]1, 2]$ on pose

$$T_p(X) = \sup_{x \in SF(X), x \neq 0} \frac{E_2(x)}{||x||_p}.$$

b) Pour $q \in [2, \infty[$ on pose

$$C_q(X) = \sup_{x \in SF(X), x \neq 0} \frac{||x||_q}{E_2(x)}.$$

Il découle des inégalités de Kahane-Khintchine que X est de type p si et seulement si $T_p(X) < \infty$ et que X est de cotype q si et seulement si $C_q(X) < \infty$.

Fixons une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de gaussiennes standard indépendantes sur un espace de probabilité (Ω, Σ, P). Si X est un Banach et $x = (x_1, ..., x_n) \in SF(X)$ posons

$$||x||_{2,G} = (\int_\Omega ||\sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i||^2 dP(\omega))^{1/2}.$$

Proposition 13.4.1. *Soit X un Banach.*

a) Si X est de type p, alors pour tout $x \in SF(X)$ on a

$$||x||_{2,G} \leq T_p(X)||x||_p.$$

b) Si X est de cotype q, alors pour tout $x \in SF(X)$ on a

$$||x||_{2,G} \geq \frac{1}{C_q(X)}||x||_q.$$

Proof. Nous laissons la preuve du point b) en exercice (c'est tout à fait similaire au point a), mais au lieu de l'inégalité de Minkowski dans l'argument ci-dessous il faut utiliser "l'inégalité de Minkowski dans l'autre sens"). Par hypothèse

$$\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2 dt \leq T_p(X)^2 ||x||_p^2$$

pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in X^n$. On applique cela à la suite $(g_1(\omega)x_1, ..., g_n(\omega)x_n)$ pour $\omega \in \Omega$ et on prend la moyenne selon ω, donc

$$\int_\Omega \int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) g_k(\omega) x_k||^2 dt dP(\omega) \leq T_p(X)^2 \int_\Omega (\sum_{k=1}^n |g_k(\omega)|^p ||x_k||^p)^{2/p} dP(\omega).$$

Le terme de gauche s'écrit, par Tonelli

$$\int_\Omega \int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) g_k(\omega) x_k||^2 dt dP(\omega) = \int_0^1 (\int_\Omega ||\sum_{k=1}^n r_k(t) g_k(\omega) x_k||^2 dP(\omega)) dt = ||x||_{2,G}^2,$$

puisque g_i est symétrique[4], donc pour tous $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ on a

$$\int_\Omega ||\sum_{k=1}^n \varepsilon_k g_k(\omega) x_k||^2 dP(\omega) = ||x||_{2,G}^2.$$

Comme $p \leq 2$, ce qui précède combiné à l'inégalité de Minkowski et au fait que $||g_i||_2 = 1$ donne

$$||x||_{2,G} \leq T_p(X) ||\sum_{k=1}^n |g_k|^p ||x_k||^p||_{2/p}^{1/p} \leq$$

$$\leq T_p(X) (\sum_{k=1}^n |||g_k|^p ||x_k||^p||_{2/p})^{1/p} = T_p(X) (\sum_{k=1}^n ||g_k||_2^p ||x_k||^p)^{1/p} = T_p(X) ||x||_p,$$

ce qui permet de conclure. □

Nous avons enfin tous les outils pour démontrer le très beau

Théorème 13.4.1. *(Kwapien-Maurey) Soit X un Banach de type 2 et Y un Banach de cotype 2. Pour tout $T \in L(X, Y)$ il existe un espace de Hilbert H et $R \in L(H, Y), S \in L(X, H)$ tels que*

$$T = RS \text{ et } ||R|| \cdot ||S|| \leq T_2(X) C_2(Y) ||T||.$$

Proof. Par le théorème de factorisation 13.1.1, il s'agit de montrer que si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de norme ≤ 1 et $z = A(x)$, alors $||T(z)||_2 \leq C||x||_2$ avec $C = T_2(X) C_2(Y) ||T||$. Par la proposition ci-dessus on a

$$||T(z)||_2 \leq C_2(Y) ||T(z)||_{2,G} \leq C_2(Y) ||T|| ||z||_{2,G}.$$

Nous allons voir ci-dessous[5] que $||z||_{2,G} \leq ||x||_{2,G}$, et la dernière expréssion est majorée par $T_2(X)||x||_2$ toujours par la proposition ci-dessus, ce qui finit la preuve.

Pour montrer l'inégalité $||z||_{2,G} \leq ||x||_{2,G}$ on peut supposer (par convexité) que $A \in O(n)$, et nous allons voir que dans ce cas $||z||_{2,G} = ||x||_{2,G}$. Posons $h_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} g_i$, alors

$$||z||_{2,G}^2 = \int_\Omega ||\sum_{i=1}^n h_i(\omega) x_i||^2 dP(\Omega)$$

et il suffit de voir que les vecteurs $G = (g_1, ..., g_n)$ et $H = (h_1, ..., h_n)$ ont la même loi. Il suffit aussi de voir que $G_t := t_1 g_1 + ... + t_n g_n$ et $H_t := t_1 h_1 + ... + t_n h_n$ ont

[4]i.e. g_i et $-g_i$ ont la même loi.

[5]C'est le point crucial, qui explique aussi le passage des variables de Bernoulli à des gaussiennes.

la même loi pour tout $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$. Mais G_t et H_t sont des combinaisons linéaires des g_i, donc des gaussiennes, et il suffit donc de voir que

$$E(H_t^2) = E(G_t^2),$$

qui découle du calcul suivant

$$E(H_t^2) = \sum_{i,j} t_i t_j E(h_i h_j) = \sum_{i,j} t_i t_j (\sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} E(g_k g_l)) =$$

$$= \sum_{i,j} t_i t_j \sum_k a_{ki} a_{kj} = \sum_{i,j} t_i t_j 1_{i=j} = \sum_{i=1}^n t_i^2 = E(G_t^2).$$

□

Corollaire 13.4.1. *(théorème de Kwapien) Si X est un Banach de type* 2 *et de cotype* 2*, alors X est isomorphe à un espace de Hilbert.*

Proof. Par le théorème ci-dessus id : $X \to X$ se factorise id $= RS$ avec $S : X \to H, R : H \to X$ pour un certain espace de Hilbert H. Alors clairement $S(X)$ est fermé dans H, donc un Hilbert, et $S : X \to S(X)$ est linéaire bijective, donc un isomorphisme d'espaces de Banach. □

Chapter 14

Transformée de Fourier

Dans ce chapitre nous étudions la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. C'est un objet absolument fondamental en analyse, et il convient de discuter cette construction fondamentale dans un degré de généralité assez grand. Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur les propriétés cruciales de la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$, qui peuvent se démontrer "à la main". Dans le chapitre suivant nous allons voir une autre perspective, autrement plus puissante, via la théorie de Gelfand des algèbres de Banach.

14.1 Groupes LCA

Un *groupe lca* est un groupe topologique abélien[1] qui est localement compact et séparé. On suppose que G est σ-compact (i.e. une réunion dénombrable de compacts), mais c'est hypothèse n'est pas vraiment indispensable.

Voici quelques exemples importants de groupes lca:

• les groupes abéliens de type fini (par exemple les groupes abéliens finis!), munis de la topologie discrète, ou $\mathbb{Q}$ muni de la topologie discrète.

• $\mathbb{R}^d$ et le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$.

• pour les passionnés d'arithmétique, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ ou le groupe d'adèles $\mathbb{A} = (\prod_p \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Nous allons essayer de donner des énoncés valables en toute généralité, mais les démonstrations seront limitées aux cas des groupes $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{T}^d$, quand elles sont trop pénibles pour un groupe général. Nous verrons dans le chapitre suivant que certaines démonstrations deviennent naturelles avec la théorie des algèbres de Banach, alors qu'elles ne seraient pas du tout faciles sans cet outil puissant.

On fixe par la suite une mesure de Haar dx sur G, que l'on suppose de probabilité si G est compact. Si $G = \mathbb{R}^d$ on prend la mesure de Lebesgue, et si $G = \mathbb{T}^d$ on considère la mesure image directe de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 14.1.1. Le *groupe dual* $\hat{G}$ de G est le groupe des caractères continus de G:

$$\hat{G} = \{\chi \in C(G, \mathbb{C}) |\, \chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), |\chi(x)| = 1,\ \forall x, y \in G\}.$$

Comme

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C}^* |\, |z| = 1\}, x \mapsto e^{2i\pi x}$$

[1] i.e. un groupe abélien G muni d'une structure d'espace topologique, tel que les opérations dans G soient continues, i.e. l'application $G \times G \to G, (x, y) \mapsto x - y$ est continue.

est un isomorphisme de groupes topologiques, on peut (et on le fera systématiquement) identifier

$$\hat{G} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}^{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Pour un élément $\xi : G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $\hat{G}$ on écrit aussi

$$\xi \cdot x = \xi(x),\ \chi_\xi(x) = e^{2i\pi\xi\cdot x}.$$

Discutons le cas de nos groupes favoris $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{T}^d$. Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$

$$(x, y) = x_1y_1 + ... + x_dy_d,\ x = (x_1, ..., x_d), y = (y_1, ..., y_d)$$

descend en un accouplement

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Un exercice standard que l'on laisse au lecteur montre alors que les groupes des caractères de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{T}^d$ sont isomorphes à $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{Z}^d$ respectivement:

$$\widehat{\mathbb{R}^d} = \{x \mapsto e^{2i\pi(x,y)} |\ y \in \mathbb{R}^d\},\ \widehat{\mathbb{T}^d} = \{x \mapsto e^{2i\pi(x,y)} |\ y \in \mathbb{Z}^d\}.$$

On identifiera toujours $\widehat{\mathbb{R}^d}$ et $\mathbb{R}^d$, ainsi que $\widehat{\mathbb{T}^d}$ et $\mathbb{Z}^d$ comme ci-dessus.

Notons que les groupes duaux de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{T}^d$ possèdent eux-mêmes une structure naturelle de groupe lca. C'est un phénomène général, mais qui est assez pénible à démontrer, et que l'on admettra dans ce chapitre.

Théorème 14.1.1. *Le dual $\hat{G}$ d'un groupe lca G est un groupe lca pour la topologie induite par la topologie de la convergence compacte*[2] *sur $C(G, \mathbb{C})$.*

On peut donc naturel de regarder $\hat{\hat{G}}$. Un théorème profond de Pontryagine affirme que ce double dual est naturellement isomorphe à G.

Introduisons maintenant l'objet qui va bien nous occuper par la suite:

Définition 14.1.2. Pour $f \in L^1(G) := L^1(G, \mathscr{B}(G), dx)$ on note

$$\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C},\ \hat{f}(\xi) = \int_G f(x)e^{-2i\pi\xi\cdot x}dx = \int_G f(x)\chi_\xi^{-1}(x)dx$$

la *transformée de Fourier* de f.

Noter que la définition a bien un sens puisque $|f(x)\chi_\xi^{-1}(x)| = |f(x)|$ et f est intégrable.

Pour $G = \mathbb{R}^d$ avec l'identification $\hat{G} = G$, la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ devient

$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},\ \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2i\pi(x,y)}dy.$$

Pour $G = \mathbb{T}^d$ avec l'identification $\hat{G} = \mathbb{Z}^d$, la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ devient la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}^d}$ de ses *coefficients de Fourier*

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x)e^{-2i\pi(n,x)}dx.$$

[2]Une base de voisinages de ξ_0 est donnée par les $\{\xi \in \hat{G} |\ \sup_{x\in K} |\xi\cdot x - \xi_0\cdot x| < \varepsilon\}$, pour $K \subset G$ compact et $\varepsilon > 0$.

On peut prolonger la définition de la transformée de Fourier à un espace plus gros que $L^1(G)$. Soit $\mathscr{M}(G)$ l'espace des mesures de Radon finies sur G, i.e. l'espace vectoriel engendré par les mesures $\mu \in \mathscr{M}\mathscr{R}(G)_+$ telles que $\mu(G) < \infty$. Par le théorème de Riesz $\mathscr{M}(G)$ est le dual de $C_0(G)$. On dispose d'un plongement isométrique

$$L^1(G) \to \mathscr{M}(G), f \mapsto \mu_f = f dx,$$

où $\mu_f(A) = \int_A f(x)dx$ pour tout $A \in \mathscr{B}(G)$.

Définition 14.1.3. La *transformée de Fourier* de $\mu \in \mathscr{M}(G)$ est la fonction

$$\hat{\mu} : \hat{G} \to \mathbb{C},\ \hat{\mu}(\xi) = \int_G e^{-2i\pi\xi\cdot x} d\mu(x) = \int_G \overline{\chi_\xi(x)} d\mu(x).$$

On a donc $\widehat{\mu_f} = \mu_{\hat{f}}$.

14.2 Transformée de Fourier et convolution

Le résultat suivant est fondamental. Le seul point difficile est le c), que l'on démontrera en toute généralité dans le prochain chapitre.

Théorème 14.2.1. *Soit $f \in L^1(G)$.*

a) On a $\hat{f} \in L^\infty(G)$ et $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

b) On a $\overline{\hat{f}(-\xi)} = \hat{\overline{f}}(\xi)$ et $\widehat{f \cdot \chi_\xi}(\xi') = \hat{f}(\xi' - \xi)$, avec $\chi_\xi(x) = e^{2i\pi\xi\cdot x}$.

c) (lemme de Riemann-Lebesgue) On a $\hat{f} \in C_0(\hat{G}, \mathbb{C})$.

d) Pour $f, g \in L^1(G)$ on a

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Proof. a) et b) sont immédiats.

c) Pour un groupe général on verra une preuve dans le cours prochain, via la théorie de Gelfand. Traitons le cas $G = \mathbb{R}^d$ à la main. La continuité de $\hat{f}$ est une conséquence directe du théorème de continuité des intégrales à paramètre (justifié car $|f(y)e^{-2i\pi(x,y)}| \leq |f(y)|$ et f est intégrable). Pour voir que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini, on peut supposer que $f \in C_c^\infty(G)$: étant donnés $f \in L^1(G)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $F \in C_c^\infty(G)$ telle que $||f - F||_1 < \varepsilon$ et alors $||\hat{f} - \hat{F}||_\infty \leq \varepsilon$, ce qui permet de démontrer le résultat en général. Mais si $f \in C_c^\infty(G)$ une intégration par parties montre que

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(x) = 2i\pi x_j \hat{f}(x),$$

donc (par a)) $x \mapsto x_j \hat{f}(x)$ est bornée pour tout $1 \leq j \leq n$, ce qui permet de conclure.

d) Un calcul brutal utilisant Fubini fait l'affaire (en utilisant bien entendu l'invariance par translation de la mesure de Haar)

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_G (f * g)(x)\chi_\xi^{-1}(x)dx = \int_G \int_G f(y)g(x-y)\chi_\xi^{-1}(y)\chi_\xi^{-1}(x-y)dxdy =$$

$$\int_G f(y)\chi_\xi^{-1}(y)dy \cdot \int_G g(x-y)\chi_\xi^{-1}(x-y)dy = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).$$

Pour justifier ces calculs il suffit de les faire en mettant des valeurs absolues autour de chaque fonction intégrée, d'utiliser Tonelli pour justifier toutes les manipulations, et de constater que la valeur finale est bien finie, donc tous les calculs sont justifiés par Fubini. □

Nous allons voir dans le cours prochain que toute application linéaire non nulle $\mathscr{F} : L^1(G) \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g)$ pour tous $f, g \in L^1(G)$ est de la forme $\mathscr{F}(f) = \hat{f}(\xi)$ pour un $\xi \in \hat{G}$.

Corollaire 14.2.1. *La transformée de Fourier*

$$\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(\hat{G}),\ f \mapsto \hat{f}$$

est d'image dense.

Proof. Par le théorème ci-dessus l'image est une sous-algèbre de $C_0(\hat{G})$, stable par conjugaison complexe (utiliser le point b) du théorème ci-dessus) et par le théorème de Stone-Weierstrass il suffit de vérifier que:

- pour tout $\xi \in \hat{G}$ il existe $f \in L^1(G)$ tel que $\hat{f}(\xi) \neq 0$,
- pour tous $\xi_1 \neq \xi_2 \in \hat{G}$ il existe $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}(\xi_1) \neq \hat{f}(\xi_2)$.

Cela découle immdiatement du fait que si $u \in L^\infty(G)$ vérifie $\int_G u(x)f(x)dx = 0$ pour tout $f \in L^1(G)$, alors $u = 0$. □

Corollaire 14.2.2. *Si $\mu \in \mathscr{M}(\hat{G})$ vérifie*

$$\int_{\hat{G}} e^{-2i\pi\xi\cdot x} d\mu(\xi) = 0,\ \forall x \in G$$

alors $\mu = 0$. En particulier la transformée de Fourier est injective sur $\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$, et donc sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proof. Pour tout $f \in L^1(G)$ Fubini et l'hypothèse montrent que $\int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi)d\mu(\xi) = 0$. Par densité de l'image de la transformée de Fourier, on voit que $\int_{\hat{G}} \phi(\xi)d\mu(\xi) = 0$ pour tout $\phi \in C_0(\hat{G})$ et donc par le théorème de Riesz $\mu = 0$. □

14.3 Formule d'inversion et théorème de Plancherel dans $\mathbb{R}^d$

Dans ce paragraphe on prend $G = \mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue dx et du produit scalaire usuel (le cas d'un groupe lca général est beaucoup plus délicat). Posons $||x|| = \sqrt{(x, x)}$ pour $x \in G$ et, pour $r > 0$ considérons nos chères gaussiennes

$$G_r : G \to \mathbb{R},\ G_r(x) = e^{-\pi r^2 ||x||^2}.$$

Le calcul suivant est crucial pour tout ce qui suit:

Proposition 14.3.1. *a) Pour tout $r > 0$ on a*

$$\widehat{G_r} = r^{-d} G_{1/r}$$

et $\int_G \widehat{G_r}(x)dx = 1$.

b) Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < \infty$ on a $\lim_{r\to 0} f * \widehat{G_r} = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Proof. a) Montrons que $\widehat{G_r} = r^{-d}G_{1/r}$. Comme $e^{-\pi r^2||x||^2-2i\pi(x,u)} = \prod_{j=1}^d e^{-\pi r^2 x_j^2 - 2i\pi x_j u_j}$, une application immédiate du théorème de Fubini nous ramène au cas $d = 1$, et le changement de variable $ur = v$ nous simplifie encore la vie: il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi v^2 - 2i\pi xv} dv = e^{-\pi x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Soit $F(x)$ le terme de gauche. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale (dont les hypothèses sont trivialement satisfaites) couplé à une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi v^2}(-2i\pi v)e^{-2i\pi xv}dv = \int_{\mathbb{R}} (e^{-\pi v^2})' i e^{-2i\pi xv} dv \\ &= -\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi v^2} i(-2i\pi x)e^{-2i\pi xv}dv = -2\pi x F(x). \end{aligned}$$

Le calcul classique de l'intégrale de Gauss (en passant en coordonnées polaires) donne $F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi v^2} dv = 1$, et comme $F'(x) = -2\pi x F(x)$, on voit que $F(x) = e^{-\pi x^2}$ pour tout x.

Ensuite,

$$\int_G \widehat{G_r}(x)dx = \int_G r^{-d} e^{-\pi||x||^2/r^2} dx = \int_G e^{-\pi||x||^2}dx = (\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx)^d = 1.$$

b) Notons $\rho_r = \widehat{G_r}$, alors le point a) montre que $\rho_r \geq 0$, $\rho_r \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_r = 1$. Comme dans la preuve du théorème 10.6.1, ces propriétés entraînent (via l'inégalité de Hölder)

$$||f * \rho_r - f||_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} ||f(\cdot - y) - f||_p^p \rho_r(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} ||f(\cdot - ry) - f||_p^p e^{-\pi||y||^2}dy.$$

Notons que $||f(\cdot - ry) - f||_p^p e^{-\pi||y||^2} \leq (2||f||_p)^p e^{-\pi||y||^2}$ et par continuité des translations $||f(\cdot - ry) - f||_p^p$ tend vers 0 quand $r \to 0$ pour tout y, donc par convergence dominée la dernière intégrale tend vers 0 quand $r \to 0$, ce qui permet de conclure. □

Nous arrivons maintenant au résultat le plus important de ce chapitre. Posons

$$V = \{f \in L^1(G) |\ \hat{f} \in L^1(G)\}.$$

La proposition ci-dessus montre que $G_r \in V$ pour tout $r > 0$. Nous allons utiliser plusieurs fois le très utile:

Lemme 14.3.1. *Pour* $f, g \in L^1(G)$ *on a*

$$\int f\hat{g} = \int \hat{f}g.$$

Proof. Fubini donne

$$\int f\hat{g} = \int f(x)g(y)e^{-2i\pi(x,y)}dxdy = \int g\hat{f}.$$

Les justifications sont routinières et laissées au lecteur. □

Théorème 14.3.1. *(formule d'inversion de Fourier) Pour tout $f \in V$ on a*

$$f(x) = \int_G \hat{f}(t) e^{2i\pi(x,t)} dt$$

pour presque tout x.

Proof. L'argument qui suit est un peu miraculeux. Nous allons regarder de deux manières la suite de fonctions (u_n) avec $u_n = f * \widehat{G_{1/n}}$. D'une part on sait d'après la proposition ci-dessus que cette suite tend vers f dans $L^1(G)$, en particulier elle possède une sous-suite (u_{n_k}) qui converge presque partout vers f.

D'autre part, nous allons montrer que (u_n) converge en tout point vers la fonction F définie par $F(x) = \int_G \hat{f}(t) e^{2i\pi(x,t)} dt$ (qui est bien définie puisque l'on suppose que $\hat{f} \in L^1(G)$). Couplé à la discussion ci-dessus, ce résultat permettra de conclure que $f = F$ presque partout.

Puisque $\widehat{G_{1/n}}(x) = \widehat{G_{1/n}}(-x)$, on a pour tout $x_0 \in G$

$$u_n(x_0) = \int f(x) \widehat{G_{1/n}}(x_0 - x) dx = \int f(x) \widehat{G_{1/n}}(x - x_0) dx = \int f \cdot \widehat{H_{n,x_0}},$$

avec $H_{n,x_0}(x) = e^{2i\pi(x_0,x)} G_{1/n}(x)$. Le lemme ci-dessus montre donc que

$$u_n(x_0) = \int \hat{f} H_{n,x_0} = \int \hat{f}(x) e^{2i\pi(x,x_0)} e^{-\pi||x||^2/n^2} dx.$$

Comme $\hat{f} \in L^1$, par convergence dominée l'expression de droite converge vers $F(x_0)$, ce qui finit la preuve. □

Posons

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Alors $\check{\check{f}} = f$ et la formule d'inversion dit que

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f) = \check{f}$$

pour $f \in V$, où $\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(G)$ est la transformée de Fourier. Notons aussi que $\mathscr{F}(\check{f}) = \check{\mathscr{F}}(f)$ est intégrable si $\hat{f}$ l'est, et donc $\check{f} \in V$ pour tout $f \in V$. Résumons:

Corollaire 14.3.1. *La transformée de Fourier*

$$\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(G), f \mapsto \hat{f}$$

est injective et induit une bijection $\mathscr{F} : V \to V$ telle que $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f) = \check{f}$. En particulier $\mathscr{F}^4 = \mathrm{id}$ sur V.

Proposition 14.3.2. *V est un sous-espace dense de $L^2(G)$ et*

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2, \ \forall f \in V.$$

Proof. Montrons que $V \subset L^2(G)$. Soit $f \in V$. Par la formule d'inversion on sait que f est presque partout égale à une fonction continue bornée, donc $f \in L^\infty(G)$, et donc $|f|^2 = f \cdot \bar{f} \in L^1(G)$ et $f \in L^2(G)$.

Montrons que V est dense dans $L^2(G)$. Il suffit de voir que l'adhérence de V contient $L^1(G) \cap L^2(G)$, car ce dernier contient $C_c(G)$, qui est dense dans $L^2(G)$.

Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, nous allons montrer que $f * G_r \in V$ pour tout $f \in L^2(G)$, ce qui permettra de conclure puisque $f * G_r$ tend vers f dans $L^2(G)$ quand $r \to 0$. Clairement $f * G_r \in L^1(G)$. D'autre part $\widehat{f * G_r} = r^{-d}\hat{f} \cdot G_{1/r}$ est aussi dans $L^1(G)$ puisque $\hat{f}$ est continue bornée et $G_{1/r} \in L^1(G)$.

Soit $f \in V$ et prenons $g = \overline{\hat{f}}$. Notons que $g \in L^1(G)$, donc par le lemme ci-dessus

$$\int_G f\hat{g} = \int_G g\ \hat{f} = \int_G |\hat{f}|^2.$$

En se rappelant que $\hat{\overline{F}}(\xi) = \overline{\hat{F}(-\xi)}$, on obtient (toujours par la formule d'inversion)

$$\hat{g}(\xi) = \mathscr{F}(\overline{\hat{f}})(\xi) = \overline{\mathscr{F}(\mathscr{F}(f))(-\xi)} = \overline{f(\xi)},$$

donc

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_G |\hat{f}(x)|^2 dx$$

et la transformée de Fourier est bien une isométrie de V dans $L^2(G)$. □

Théorème 14.3.2. *(Plancherel) La transformée de Fourier $\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(G)$ envoie $L^1(G) \cap L^2(G)$ dans $L^2(G)$ et l'application $\mathscr{F} : L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(G)$ se prolonge en un isomorphisme isométrique $\mathscr{F} : L^2(G) \simeq L^2(G)$ tel que $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f) = \check{f}$ pour tout $f \in L^2(G)$.*

Proof. Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Alors $f * G_r \in V$ (comme nous l'avons déjà vu) et converge dans $L^1(G)$ et dans $L^2(G)$ vers f. Donc il existe une suite (f_n) dans V qui converge vers f à la fois dans $L^1(G)$ et dans $L^2(G)$. Alors $(\hat{f}_n)$ converge point par point vers $\hat{f}$. De plus $||\hat{f}_n - \hat{f}_m||_2 = ||\mathscr{F} f_n - f_m||_2 = ||f_n - f_m||_2$ puisque $f_n - f_m \in V$, donc $(\hat{f}_n)$ converge dans $L^2(G)$ vers une fonction F. Mais alors $(\hat{f}_n)$ possède une sous-suite qui converge presque partout vers F, et comme $(\hat{f}_n)$ converge en tout point vers $\hat{f}$, on a $\hat{f} = F \in L^2(G)$, ce qui montre le premier point.

Soit $f \in L^2(G)$ et soit (f_n) une suite dans V telle que $f_n \to f$ dans $L^2(G)$ (une telle suite existe par la proposition ci-dessus). Alors $||\widehat{f_n} - \widehat{f_m}||_2 = ||f_n - f_m||_2$ tend vers 0 quand $m, n \to \infty$, donc $\hat{f} := \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}$ existe dans $L^2(G)$ et $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$. Par un argument standard $\hat{f}$ ne dépend pas du choix de la suite (f_n) et on obtient un prolongement isométrique $\mathscr{F} : L^2(G) \to L^2(G)$ de la transformée de Fourier sur V. Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ on a bien $\mathscr{F} = \hat{f}$ par l'argument du premier paragraphe.

Pour voir que c'est un isomorphisme il suffit de voir que l'image est dense, or l'image contient V par ce qui précède. Enfin, l'égalité $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}(f) = \check{f}$ (qui montre aussi que $\mathscr{F}$ est un isomorphisme) se démontre par continuité à partir de cette égalité valable pour $f \in V$. □

La preuve du résultat suivant est beaucoup plus délicate que celle donnée pour $G = \mathbb{R}^d$:

Théorème 14.3.3. *(Plancherel) Soit dx une mesure de Haar sur un groupe lca G.*

a) Il existe une mesure de Haar $d\xi$ sur $\hat{G}$ telle que la transformée de Fourier sur $L^1(G) \cap L^2(G)$ se prolonge en un isomorphisme isométrique

$$L^2(G, dx) \simeq L^2(\hat{G}, d\xi).$$

b) Il existe un sous-espace dense V de $L^2(G)$ tel que pour tout $f \in V$ on ait presque partout

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi\cdot x} d\xi.$$

Exercice 14.3.1. *Montrer que si $f, g \in L^2(G)$, alors la transformée de Fourier de $fg \in L^1(G)$ est*

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Le résultat suivant est délicat. Heureusement, nous avons déjà discuté l'outil puissant qui nous permet de l'obtenir sans beaucoup de frais. Mais il n'est pas du tout facile de le démontrer "à la main"!

Théorème 14.3.4. *(Hausdorff-Young) Soient p, q tels que $1/p + 1/q = 1$ et $p \in [1, 2]$. Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ on a $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et*

$$||\hat{f}||_q \leq ||f||_p.$$

Proof. Conséquence directe du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin et du fait que la transformée de Fourier est de norme 1 de L^1 dans L^∞ et de norme 1 de L^2 dans L^2. □

En fait, pour tout f non nulle l'inégalité ci-dessus est stricte: un théorème difficile de Beckner affirme que

$$||\hat{f}||_q \leq (p^{1/p} q^{-1/q})^{d/2} ||f||_p,$$

et la constante $(p^{1/p} q^{-1/q})^{d/2}$ est optimale.

Exercice 14.3.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et soit $f_R(\xi) = \int_{||x|| \leq R} f(x) e^{-2i\pi\xi\cdot x} dx$. Montrer que $\lim_{R\to\infty} f_R = \hat{f}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Exercice 14.3.3. *Soit $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et posons $f_A(x) = f(Ax)$. Montrer que*

$$\widehat{f_A}(\xi) = |\det A|^{-1}\ \hat{f}((A^t)^{-1}\xi).$$

Exercice 14.3.4. *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) $\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$ *pour tout $f \in C_b(\mathbb{R})$.*

b) $\lim_{n\to\infty} E[e^{itX_n}] = E[e^{itX}]$ *pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Exercice 14.3.5. *(théorème de continuité de Lévy) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs réelles sur un espace de probabilité, et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} E[e^{itX_n}] = \phi(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X telle que $\phi(t) = E[e^{itX}]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R})$.

14.4 Fourier dans l'espace de Schwartz

On se place dans $G = \mathbb{R}^d$. Pour $m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{N}^d$ notons $|m| = m_1 + ... + m_d$. Pour $x = (x_1, ..., x_d) \in G$ notons $||x||^2 = x_1^2 + ... + x_d^2$ et $x^m = x_1^{m_1} ... x_d^{m_d}$. Enfin, pour $f \in C^\infty(G)$ soit

$$D^m f = \frac{\partial^{|m|} f}{\partial x_1^{m_1} ... \partial x_d^{m_d}},$$

et notons abusivement $x^m f(x)$ la fonction $x \mapsto x^m f(x)$.

Rappelons que l'espace de Schwartz $\mathscr{S} = \mathscr{S}(G)$ des fonctions $f \in C^\infty(G)$ telles que $\sup_{x \in G} |x^k D^m f(x)| < \infty$ pour tous $k, m \in \mathbb{N}^d$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes

$$|f|_{k,m} = \sup_{x \in G} (1 + ||x||^2)^k |D^m f(x)|, \; k, m \in \mathbb{N}^d.$$

L'espace $\mathscr{S}$ est stable par beaucoup d'opérations naturelles:

• $\mathscr{S}$ est stable par produit, par la règle de Leibniz, qui montre aussi que $\mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}, (f, g) \mapsto f \cdot g$ est continue.

• $\mathscr{S}$ est stable par l'action des opérateurs différentiels: $D^m f \in \mathscr{S}$ pour $f \in \mathscr{S}$ et $m \in \mathbb{N}^d$, et l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{S}, f \mapsto D^m f$ est continue (cela est évident).

• Si P est une fonction polynômiale sur G et $f \in \mathscr{S}$ alors $Pf \in \mathscr{S}$. En effet, il suffit de voir que $x_j f \in \mathscr{S}$ pour $1 \leq j \leq d$, ce qui ne pose pas de problème. Noter quand même que P n'est pas dans $\mathscr{S}$ (sauf si P est nulle). On vérifie aussi sans mal que l'application $\mathscr{S} \to \mathscr{S}, f \mapsto f \cdot P$ est continue.

• $\mathscr{S}$ contient $C_c^\infty(G)$ (évident), mais aussi des fonctions comme les gaussiennes G_r.

Exercice 14.4.1. *a) Montrer que $\mathscr{S}$ est stable par convolution et que $\mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}, (f, g) \mapsto f * g$ est continue.*

b) Montrer que $C_c^\infty(G)$ est dense dans $\mathscr{S}$.

Proposition 14.4.1. *Soit $p \in [1, \infty[$. Alors $\mathscr{S}$ est un sous-espace dense de $L^p(G)$ et il existe $c > 0$ tel que*

$$||f||_p \leq c|f|_{d,0}, \; \forall f \in \mathscr{S}.$$

Proof. Soit $g(x) = (1 + ||x||^2)^d f(x)$, donc $|f|_{d,0} = \sup_{x \in G} \; |g(x)|$. On a

$$\int_G |f(x)|^p dx = \int_G |g(x)|^p (1+||x||^2)^{-dp} dx \leq ||g||_\infty^p \int_G (1+||x||^2)^{-d} dx \leq |f|_{d,0}^p \int_G \prod_{i=1}^d \frac{dx_i}{1 + x_i^2}$$

Comme

$$\int_G \prod_{i=1}^d \frac{dx_i}{1 + x_i^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + x^2} \right)^d < \infty,$$

on voit que $\mathscr{S} \subset L^p(G)$ et $||f||_p \leq c|f|_{d,0}$ pour une constante c et tout $f \in \mathscr{S}$. Comme $\mathscr{S}$ contient $C_c^\infty(G)$, qui est dense dans $L^p(G)$, l'espace $\mathscr{S}$ est dense dans $L^(G)$. □

En quelque sorte $\mathscr{S}$ est l'espace le plus sympathique pour la transformée de Fourier, comme le montre le résultat suivant:

Théorème 14.4.1. *a) Pour tout $f \in \mathscr{S}$ on a*

$$D^m \hat{f} = (-2i\pi)^{|m|}\widehat{x^m f(x)},\ \ \widehat{D^m f}(x) = (2i\pi)^{|m|} x^m \hat{f}(x).$$

b) La transformée de Fourier $\mathscr{F} : L^1(G) \to L^1(G)$ induit un isomorphisme topologique

$$\mathscr{F} : \mathscr{S} \simeq \mathscr{S}.$$

tel que $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f)) = \check{f}$ pour tout $f \in \mathscr{S}$.

c) La transformée de Fourier dans $L^2(G)$ est l'unique transformation $f \mapsto \hat{f}$ telle que

$$\int_G f\hat{g} = \int_G \hat{f} g,\ \forall g \in \mathscr{S}.$$

Proof. a) Le premier point découle du théorème de dérivation sous le signe intégrale, justifié par la décroissance rapide de f. Le deuxième se démontre par récurrence sur l'ordre de dérivation, en utilisant une intégration par parties. Les détails routiniers sont laissés au lecteur.

b) Soit $f \in \mathscr{S}$ et $k, m \in \mathbb{N}^d$. Ecrivons

$$(1 + ||x||^2)^k = \sum_{j\in J} a_j x^j$$

pour certains $a_j \in \mathbb{R}$ et un ensemble fini $J \subset \mathbb{N}^d$. Alors par a) en notant $f_m(x) = x^m f(x)$

$$(1 + ||x||^2)^k D^m \hat{f}(x) = \sum_{j\in J} a_j x^j (-2i\pi)^{|m|}\widehat{f_m}(x) = \sum_{j\in J} a_j (-2i\pi)^{|m|}(2i\pi)^{-|j|}\mathscr{F}(D^j f_m),$$

et comme $D^j f_m \in \mathscr{S}$, la fonction $\mathscr{F}(D^j f_m)$ est bornée, donc

$$\sup_{x\in G}(1 + ||x||^2)^k |D^m \hat{f}(x)| < \infty,$$

ce qui montre que $\hat{f} \in \mathscr{S}$. De plus l'application $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ vérifie $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f)) = \check{f}$ puisque $\mathscr{S} \subset V = \{f \in L^1(G) |\, \hat{f} \in L^1(G)\}$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est continue, car alors la formule $\mathscr{F}(\mathscr{F}(f)) = \check{f}$ montre que l'inverse de F est aussi continue.

Comme $\mathscr{S}$ est métrisable, il suffit de montrer que si (f_n) est une suite qui tend vers 0 dans $\mathscr{S}$, alors $(\hat{f}_n)$ tend vers 0. Il suffit de voir que pour tous $k, m \in \mathbb{N}^d$ on a $|\widehat{f_n}|_{k,m} \to 0$. La formule ci-dessus montre qu'il suffit de vérifier que $||\mathscr{F}(D^j(x^m f_n))||_\infty$ tend vers 0 pour tout $j \in J$, ou encore que $||D^j(x^m f_n)||_1 \to 0$ et enfin (par la proposition ci-dessus) que $|D^j(x^m f_n)|_{d,0}$ tend vers 0 pour $j \in J$. Cela découle de la continuité des applications $f \mapsto x^m f$ et $f \mapsto D^j f$.

c) L'unicité vient du fait que si $u \in L^2(G)$ vérifie $\int ug = 0$ pour tout $g \in \mathscr{S}$, alors $u = 0$ car $\mathscr{S}$ est dense dans $L^2(G)$. Il reste à montrer que $\int \hat{f} g = \int f\hat{g}$ pour $f \in L^2(G)$ et $g \in \mathscr{S}$. Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ il suffit d'utiliser le lemme 14.3.1. En général prenons $f_n \in L^1(G) \cap L^2(G)$ qui convergent dans $L^2(G)$ vers f. Alors $\int f_n\hat{g}$ converge vers $\int f\hat{g}$ car $\hat{g} \in \mathscr{S} \subset L^2(G)$. De plus $\widehat{f_n}$ converge vers $\hat{f}$ dans $L^2(G)$ et comme $g \in L^2(G)$ on a $\int \widehat{f_n} g \to \int \hat{f} g$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 14.4.2. *(formule de Poisson) Montrer que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n).$$

14.5 Le théorème de Bochner pour $\mathbb{R}^d$

Soit G un groupe lca. Une fonction continue $f : G \to \mathbb{C}$ est dite *de type positif* si pour toute suite finite $(x_1, ..., x_n)$ dans G et toute suite finie $(c_1, ..., c_n)$ de nombres complexes on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \geq 0.$$

Par exemple si $\xi \in \hat{G}$ alors $f = \chi_\xi$ est de type positif car

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \chi_\xi(x_i - x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \chi_\xi(x_i) \overline{\chi_\xi(x_j)} = |\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_\xi(x_i)|^2 \geq 0.$$

On peut "moyenner" l'exemple que l'on vient de donner: si μ est une mesure de Radon positive finie sur $\hat{G}$ et

$$f(x) = \int_{\hat{G}} e^{-2i\pi\xi\cdot x} d\mu(\xi),$$

alors f est de type positif car

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) = |\sum_{i=1}^{n} c_i \int_G e^{-2i\pi\xi\cdot x_i} d\mu(\xi)|^2 \geq 0.$$

Pour $f \in L^1(G)$ on note $f^* \in L^1(G)$ la fonction définie par

$$f^*(g) = \overline{f(-g)}.$$

Lemme 14.5.1. *Soit f une fonction continue de type positif sur G. Alors*
a) f est bornée et $||f||_\infty = f(0)$ (0 étant l'élément neutre de G).
b) Pour tout $f \in L^1(G)$ on a

$$\int_G (f^* * f)\phi \geq 0, \ \forall f \in L^1(G),$$

autrement dit

$$\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)dxdy \geq 0, \ \forall f \in L^1(G).$$

Proof. a) Par hypothèse pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $x \in G$ on a

$$f(0)(1 + |z|^2) + zf(x) + \bar{z}f(-x) \geq 0.$$

En prenant $z = 0$ on voit que $f(0) \geq 0$. En prenant $z = 1$ et $z = i$ on obtient $f(-x) = \overline{f(x)}$. Si $f(x) \neq 0$, en prenant $z = -|f(x)|/f(x)$ on obtient $2f(0) \geq 2|f(x)|$, ce qui permet de conclure.

b) Il suffit de le voir pour $f \in C_c(G)$, par densité de $C_c(G)$ dans $L^1(G)$. Mais alors $\int_G \int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)dxdy$ est une limite de sommes de Riemann, qui sont de la forme $\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j)$, donc positives. Cet argument est un peu olé-olé, comme l'a fait remarquer un étudiant, alors voici plus de détails. On peut supposer que $f \in C_c(G)$, donc $F(x,y) = f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y) \in C_c(G \times G)$ est à support dans $K \times K$, avec $K = \text{supp}(f)$. Soit $\varepsilon > 0$, par uniforme continuité de F il existe un recouvrement fini de $K \times K$ par des pavés de la forme $U \times U$, avec U ouvert et

$\sup_{x,y\in U\times U}|F(x)-F(y)|<\varepsilon$. Cela nous fournit une partition finie $K=A_1\cup\ldots\cup A_n$ et des points $x_i\in A_i$ tels que $|F(x,y)-F(x_i,x_j)|<\varepsilon$ pour $x\in A_i, y\in A_j$. Ainsi (en notant μ la mesure de Haar sur G)

$$\int F(x,y)dxdy=\sum_{i,j}\int_{A_i\times A_j}F(x,y)dxdy=$$

$$\sum_{i,j}f(x_i)\mu(A_i)\overline{f(x_j)\mu(A_j)}\phi(x_i-x_j)+\sum_{i,j}\int_{A_i\times A_j}(F(x,y)-F(x_i,x_j))dxdy.$$

La première somme est positive par hypothèse, et

$$|\sum_{i,j}\int_{A_i\times A_j}(F(x,y)-F(x_i,x_j))dxdy|\leq\sum_{i,j}\ \mu(A_i)\mu(A_j)\varepsilon=\varepsilon\mu(K)^2.$$

On conclut en faisant $\varepsilon\to 0$. □

Le résultat fondamental suivant sera démontré dans ce chapitre uniquement pour $G=\mathbb{R}^d$:

Théorème 14.5.1. *(Bochner) Supposons que $G=\mathbb{R}^d$. L'application $\mu\mapsto\hat{\mu}$ induit une bijection entre les mesures de Radon positives finies sur $\mathbb{R}^d$ et les fonctions continues $p:G\to\mathbb{C}$ de type positif.*

Proof. La seule chose qui reste à démontrer (compte tenu de la discussion ci-dessus et de l'injectivité de la transformée de Fourier sur $\mathscr{M}(\mathbb{R}^d)$) est la surjectivité. Soit ϕ une fonction continue de type positif sur G. Comme ϕ est bornée, on peut définir pour tout $f\in\mathscr{S}$

$$L(f)=\int_G\hat{f}\phi.$$

L'observation cruciale est alors que pour tout $f\in\mathscr{S}$ on a

$$L(|f|^2)=\int_G\widehat{|f|^2}\phi=\int_G\hat{f}*\hat{\overline{f}}\phi=\int_G\hat{f}*(\hat{f})^*\phi\geq 0.$$

Nous allons montrer ci-dessous (c'est la partie technique de l'argument) que la restriction de L à $C_c^\infty(G)$ est une forme linéaire positive sur cet espace, avec

$$|L(f)|\leq||f||_\infty\phi(0),\ \forall f\in C_c^\infty(G).$$

Admettons ceci pour l'instant. Comme $C_c^\infty(G)$ est dense dans $C_0(G)$ pour la norme uniforme, l'inégalité ci-dessus montre que L se prolonge en une forme linéaire continue et positive sur $C_0(G)$, qui par le théorème de Riesz est donnée par une mesure de Radon positive finie μ sur G. Nous avons donc

$$\int_G fd\mu=\int_G\hat{f}\phi$$

pour $f\in C_c^\infty(G)$ et ensuite, par densité, pour tout $f\in L^1(G)$. Fixons $x\in G$ et prenons $f_{x,r}(t)=e^{2i\pi(x,t)}G_r(t)$. Alors $\widehat{f_{x,r}}=\widehat{G_r}(\cdot-x)=\widehat{G_r}(x-\cdot)$ et donc

$$\int_G e^{2i\pi(x,t)}G_r(t)d\mu(t)=\int_G\widehat{G_r}(x-t)\phi(t)dt=(\widehat{G_r}*\phi)(x).$$

Quand $r \to 0$ le terme de droite tend vers $\phi(x)$, alors que celui de gauche tend (par convergence dominée) vers $\int_G e^{2i\pi(x,t)} d\mu(t)$. Cela permet de conclure (il suffit de remplacer μ par la mesure $\mu'(A) = \mu(-A)$).

Montrons maintenant que la restriction de L à $(C_c^\infty(G), ||\cdot||_\infty)$ est une forme linéaire positive, de norme $\le \phi(0)$. Supposons d'abord que $f \in C_c^\infty(G)$ est à valeurs positives et prenons $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon = \sqrt{f + \varepsilon G_1}$. Comme G_1 est strictement positive, f_ε est de classe C^∞. Comme $f_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} e^{-\pi||t||^2/2}$ en dehors d'un compact, on voit que $f_\varepsilon \in \mathscr{S}$. Donc

$$L(f) + \varepsilon L(G_1) = L(|f_\varepsilon|^2) \ge 0.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $L(f) \ge 0$ et que $L(G_1) \in \mathbb{R}$.

Soit ensuite $f \in C_c^\infty(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par compacité du support de f pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver r tel que $|f(t)| < (1+\varepsilon)||f||_\infty G_r(t)$ pour tout t. Comme ci-dessus, la fonction $u = \sqrt{(1+\varepsilon)||f||_\infty G_r - f}$ est dans $\mathscr{S}$ et on obtient

$$(1+\varepsilon)||f||_\infty L(G_r) - L(f) = L(|u|^2) \ge 0.$$

D'autre part, comme $\widehat{G_r}$ est à valeurs positives et de moyenne 1,

$$|L(G_r)| = |\int_G \widehat{G_r}\phi| \le \phi(0).$$

Donc $L(f) \le ||f||_\infty \phi(0)$, en faisant $\varepsilon \to 0$. On obtient donc $|L(f)| \le ||f||_\infty \phi(0)$ pour f à valeurs rélles, et on vient aussi de montrer que L envoie les fonctions à valeurs réelles dans $\mathbb{R}$. Donc si $f \in C_c^\infty(G)$ est quelconque et si $|L(f)| = zL(f)$ avec $|z| = 1$, on a $|L(f)| = L(zf) = L(\mathrm{Re}(zf)) + iL(\mathrm{Im}(zf))$ et donc $L(\mathrm{Im}(zf)) = 0$ d'après ce que l'on vient d'observer, et

$$|L(f)| = L(\mathrm{Re}(zf)) \le ||\mathrm{Re}(zf)||_\infty\ \phi(0) \le ||f||_\infty \phi(0),$$

ce qui permet de conclure. □

Exercice 14.5.1. *Soit* $p \in]0, 2[$.

a) Montrer en utilisant le théorème de Bochner qu'il existe une mesure de probabilité μ_p *sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_p(x) = e^{-|t|^p},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que si $q \in]0, 2[$*, alors il existe* $\alpha_q > 0$ *tel que pour tout* x *on ait*

$$\alpha_q |x|^q = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(tx)}{t^{q+1}} dt.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^q d\mu_p(x) = \frac{1}{\alpha_q} \int_0^\infty t^{-q-1}(1 - e^{-t^p}) dt$$

c) Soit X *une variable aléatoire sur un espace de probabilité telle que* $E[e^{itX}] = e^{-|t|^p}$ *pour* $t \in \mathbb{R}$*. Montrer que* $E[|X|^q] < \infty$ *pour* $0 < q < p$ *et que* $E[|X|^p] = \infty$*.*

Exercice 14.5.2. *Montrer, en utilisant l'exercice ci-dessus que si* $1 \le p < 2$ *et* $p \le q \le 2$ *alors il existe un plongement isométrique de* ℓ^q *dans* $L^p([0, 1])$*.*

Chapter 15

Algèbres de Banach

Dans ce chapitre on va présenter la magnifique théorie de Gelfand des algèbres de Banach sur $\mathbb{C}$. C'est un véritable bijou, dont on verra la valeur dans le cours prochain.

15.0.1 Généralités

Introduisons tout de suite les objets qui vont nous occuper dans ce chapitre:

Définition 15.0.1. Une $\mathbb{C}$-*algèbre de Banach* est un $\mathbb{C}$-espace de Banach $(A, ||\cdot||)$ muni d'une multiplication $A \times A \to A, (a, b) \to ab$ qui en fait une $\mathbb{C}$-algèbre associative (pas forcément commutative ni unitaire) et qui vérifie $||ab|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ pour tous $a, b \in A$.

Une $\mathbb{C}$-algèbre A est dite *unitaire* s'il existe $e \in A$ tel que $a \cdot e = e \cdot a = a$ pour tout $a \in A$. Un tel e est forcément unique, on l'appelle *l'élément neutre ou l'unité de A*.

Définition 15.0.2. Une $\mathbb{C}$-*algèbre de Banach unitaire* est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach $(A, ||\cdot||)$ qui est unitaire et dont l'élément neutre e vérifie $||e|| = 1$.

Remarque 15.0.1. a) Toute algèbre de Banach $(A, ||\cdot||)$ se plonge isométriquement comme idéal de codimension 1 dans une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire $A_e = A \oplus \mathbb{C}$, avec $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$ et $||(a, \lambda)|| := ||a|| + |\lambda|$, $e = (0, 1)$. On plonge A dans A_e en envoyant $a \in A$ sur $(a, 0) \in A_e$, et alors on peut écrire $(a, \lambda) = a + \lambda \cdot e$.

b) Si $(A, ||\cdot||)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach qui est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, d'élément neutre e, alors on peut trouver une norme équivalente $||\cdot||'$ sur A qui munit A d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire. En effet, un petit exercice montre que

$$||x||' = \sup_{||y|| \leq 1} ||xy||$$

fait l'affaire.

Voici quelques exemples importants d'algèbres de Banach.

Exemple 15.0.1. 1. Si X est un $\mathbb{C}$-espace de Banach, alors $B(X) = L(X, X)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach (le produit étant la composition d'opérateurs) pour la norme d'opérateur. Si H est un espace de Hilbert et si $T \in B(H)$ commute avec son adjoint, l'adhérence dans $B(H)$ de l'espace engendré par les $T^i(T^*)^j$ (avec $i, j \geq 0$) est une algèbre de Banach unitaire commutative qui joue un rôle crucial dans la théorie spectrale de l'opérateur T.

2. Si X est un ensemble, l'espace de Banach $\ell^\infty(X)$ des fonctions bornées $f : X \to \mathbb{C}$ muni de la norme sup est une algèbre de Banach unitaire pour le produit évident.

3. Si X est un espace topologique, alors $C_b(X) := C_b(X, \mathbb{C})$ muni de la norme sup et de la multiplication usuelle est une algèbre de Banach commutative unitaire. Si X est localement compact, alors $C_0(X) := C_0(X, \mathbb{C})$ est aussi une algèbre de Banach commutative (mais pas unitaire si X n'est pas compact).

4. Si G est un groupe localement compact et si dx est une mesure de Haar à gauche sur G, alors $L^1(G) := L^1(G, \mathscr{B}(G), dx)$ avec $||f|| = \int_G |f(x)|dx$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution
$$f * g(x) = \int_G f(t)g(t^{-1}x)dt.$$
Cette algèbre n'est unitaire que si G est discret (excellent exercice!). Pour $G = \mathbb{Z}$ on obtient l'algèbre $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ avec
$$(x * y)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k y_{n-k}$$
si $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

5. *L'algèbre de Wiener* W est l'espace des fonctions continues $f : S^1 \to \mathbb{C}$ telles que
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty, \ \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$$
muni de la norme
$$||f|| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|.$$
Tout $f \in W$ est forcément la somme de sa série de Fourier, puisque la fonction g définie par $g(e^{ix}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ est continue et $\widehat{f-g}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme
$$\widehat{fg}(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\hat{g}(n-k),$$
on voit que W est bien une algèbre de Banach commutative unitaire, et l'application qui envoie f sur $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach
$$W \simeq (\ell^1(\mathbb{Z}), *).$$

6. Si $a < b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, l'espace $C^n([a, b])$ muni de la norme
$$||f|| = \sum_{k=0}^{n} \frac{||f^{(k)}||_\infty}{k!}$$
est une algèbre de Banach pour les opérations usuelles (exercice!).

7. Si X est une partie compacte de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{C}^n$...) l'algèbre $A(X)$ des fonctions continues sur X qui sont holomorphes dans l'intérieur de X est une algèbre de Banach pour la norme sup (une limite uniforme de fonctions holomorphes est

holomorphe). Elle contient comme sous-algèbre de Banach l'algèbre $R(X)$ des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions de la forme p/q, avec p, q des fonctions polynômiales et $q(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, qui à son tour contient comme sous-algèbre de Banach l'algèbre $P(X)$ des fonctions qui sont limite uniforme de fonctions polynômiales sur X.

Exercice 15.0.1. *Montrer qu'en définissant*

$$(f \cdot g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

on obtient une structure d'algèbre de Banach sur $L^1([0,1])$ *(c'est l'algèbre de Volterra).*

15.1 Spectre, transformée de Gelfand

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative[1]. Introduisons deux objets fondamentaux attachés à A.

Définition 15.1.1. a) Le *spectre* de A est l'ensemble

$$\hat{A} = \{\chi \in A' \setminus \{0\} |\ \chi(xy) = \chi(x)\chi(y),\ \forall x, y \in A\}$$

des formes linéaires continues non nulles et multiplicatives sur l'espace de Banach A, i.e. $\hat{A}$ est l'ensemble des morphismes continus et non nuls de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A \to \mathbb{C}$. Un élément de $\hat{A}$ est aussi appelé *caractère de A*.

b) La *transformée de Gelfand* de A est le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathscr{G} : A \to \mathrm{Fct}(\hat{A}, \mathbb{C}),\ \mathscr{G}(a)(\chi) = \chi(a).$$

On note souvent $\mathscr{G}(a) = \hat{a}$, donc

$$\hat{a}(\chi) = \chi(a).$$

Remarque 15.1.1.

1. Si $\chi \in \hat{A}$, alors $||\chi|| \leq 1$, i.e. $|\chi(x)| \leq ||x||$ pour tout $x \in A$. En effet, on a

$$|\chi(x)|^n = |\chi(x^n)| \leq ||\chi|| \cdot ||x^n|| \leq ||\chi|| \cdot ||x||^n$$

pour tout n, donc $|\chi(x)| \leq ||\chi||^{1/n}||x||$ et on conclut en faisant $n \to \infty$. On en déduit que

$$|\chi(x)| \leq r(x) := \inf_{n \geq 1} ||x^n||^{1/n},\ \forall x \in A.$$

La quantité $r(x)$ est le *rayon spectral de x* et jouera un rôle très important par la suite.

2. Si A est unitaire, alors un morphisme continu de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A \to \mathbb{C}$ est dans $\hat{A}$ si et seulement si $\chi(e) = 1$, et alors $||\chi|| = 1$.

[1] Les définitions qui suivent ont un sens si A n'est pas commutative, mais ne sont pas très utiles dans ce cas.

3. Soit $A_e = A \oplus \mathbb{C}$ l'algèbre de Banach unitaire associée. Le lien entre $\hat{A}$ et $\widehat{A_e}$ est très simple: on a une identification naturelle
$$\widehat{A_e} = \hat{A} \cup \{\infty\},$$
où $\infty \in \widehat{A_e}$ est le caractère
$$\infty((a, \lambda)) = \lambda.$$
En effet, tout morphisme (pas forcément non nul) de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A \to \mathbb{C}$ se prolonge en un élément de $\widehat{A_e}$ en posant $\chi((a, \lambda)) = \chi(a) + \lambda$, et tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A_e \to \mathbb{C}$ tel que $\chi(e) = 1$ est forcément de la forme $\chi((a, \lambda)) = \chi(a) + \lambda$ pour un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A \to \mathbb{C}$.

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative. On munit $\hat{A}$ de la topologie la plus faible rendant continues toutes les applications $\hat{a} : \hat{A} \to \mathbb{C}, \chi \mapsto \chi(a)$, pour $a \in A$. Nous avons vu ci-dessus que $\hat{A} \subset B_{A'}$, et la topologie que l'on vient de définir n'est rien d'autre que la topologie induite par la topologie faible * sur $B_{A'}$. Rappelons que $B_{A'}^{w*}$ est compact par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki. *Si A est unitaire*, les conditions $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ et $\chi(e) = 1$ sont trivialement fermées pour la topologie faible *, donc $\hat{A}$ est fermé dans $B_{A'}^{w*}$ et donc $\hat{A}$ est compact. En général on voit facilement (revenir à la définition des bases de voisinages pour la topologie faible *) que via l'identification
$$\widehat{A_e} = \hat{A} \cup \{\infty\}$$
la topologie sur $\hat{A}$ est celle induite par la topologie sur $\widehat{A_e}$, et aussi que $\{\infty\}$ est fermé dans $\widehat{A_e}$. En particulier $\hat{A} = \widehat{A_e} \setminus \{\infty\}$ est localement compact. De plus, pour tout $x \in A$ et $\varepsilon > 0$
$$\{\infty\} \cup \{\chi \in \hat{A} |\ |\chi(x)| < \varepsilon\} = \widehat{A_e} \setminus \{\psi \in \widehat{A_e} |\ |\psi(x)| \geq \varepsilon\}$$
est le complémentaire d'un fermé (donc compact) de $\widehat{A_e}$. On en déduit facilement que $\widehat{A_e}$ est le compactifié d'Alexandrov de $\hat{A}$. Le résultat très important ci-dessous est un résumé de cette discussion:

Théorème 15.1.2. *Pour toute $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative A on a:*

a) L'espace $\hat{A}$ est localement compact, de compactifié d'Alexandrov $\widehat{A_e}$. En particulier si A est unitaire alors $\hat{A}$ est compact.

b)("lemme de Riemann-Lebesgue") La transformée de Gelfand est à valeurs dans $C_0(\hat{A})$ et $||\hat{a}||_\infty \leq ||a||$ pour tout $a \in A$.

Proof. a) Voir la discussion ci-dessus.

b) Pour le premier point il suffit de remarquer que $\hat{a}$ se prolonge en un élément de $C(\widehat{A_e})$ qui s'annule en $\infty \in \widehat{A_e}$. Le deuxième point vient de ce que $||\chi|| \leq 1$ pour $\chi \in \hat{A}$. □

Donnons quelques exemples de calcul de spectre. Soit X un espace topologique et soit $A_X = (C_b(X), || \cdot ||_\infty)$. On dispose d'une application continue
$$\iota_X : X \to \widehat{A_X},\ x \mapsto \mathrm{ev}_x,$$
avec $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$. Si les fonctions continues bornées séparent les points (ce qui arrivent très souvent par le lemme d'Urysohn), alors ι_X est injective. En général ι_X n'est pas bijective (exercice: c'est déjà le cas pour $X = \mathbb{R}$). Cependant:

Théorème 15.1.3. *a) Si X est localement compact, séparé, alors ι_X est d'image dense.*

b) Si X est compact, alors ι_X est un homéomorphisme.

Proof. Soit $A = A_X$.

a) Il s'agit de voir que pour tout $\chi \in \hat{A}$ et tout voisinage $U = \{\chi' \in \hat{A} | \, |(\chi' - \chi)(f_i)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$ il existe $x \in X$ tel que $\mathrm{ev}_x \in U$, autrement dit $|\chi(f_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ pour $1 \leq i \leq n$. Mais si l'on note $g_i = f_i - \chi(f_i)$, alors $\chi(g_i) = 0$, donc en posant $g = \sum |g_i|^2$, on a $\chi(g) = 0$ et donc g n'est pas inversible. En particulier on ne peut pas avoir $|g(x)| \geq \varepsilon^2$ pour tout x, et donc il existe x tel que $|g_i(x)| < \varepsilon$ pour tout i, ce qui permet de conclure.

b) La flèche ι_X est continue et d'image dense d'après a), et comme X est compact elle est surjective. Comme elle est trivialement injective (lemme d'Urysohn), et comme les deux espaces sont compacts, c'est un homéomorphisme. □

Remarque 15.1.4. On peut montrer que si X est un espace de Tychonov alors le spectre de $C_b(X)$ n'est rien d'autre que la compactification de Stone-Cech de X.

Exercice 15.1.1. *Si X est localement compact, montrer que X est homéomorphe au spectre de $C_0(X)$.*

La proposition suivante décrit le spectre de l'algèbre de Wiener, ou, de manière équivalente, celui de l'algèbre de Banach $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$.

Proposition 15.1.1. *Soit W l'algèbre de Wiener. L'application $S^1 \to \widehat{W}, z \mapsto \mathrm{ev}_z$ est un homéomorphisme.*

Proof. Il suffit de voir que cette application est surjective, car elle est trivialement continue et injective. Soit $\chi \in \widehat{W}$, $e : S^1 \to \mathbb{C}$ la fonction identité et posons $z = \chi(e)$. On a $e \in W^\times$ et $|z|^n = |\chi(e^n)| \leq ||e^n|| = 1$ pour tout entier n, donc $z \in S^1$. Si $f \in W$ et $S_N = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^n$ est la somme partielle de sa série de Fourier, on a $||f - S_N|| = \sum_{|n|>N} \, |\hat{f}(n)| \to 0$ quand $N \to \infty$, donc

$$\chi(f) = \lim_{N\to\infty} \chi(S_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)\chi(e^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n = f(z) = \mathrm{ev}_z(f),$$

ce qui permet de conclure. □

Le théorème fondamental suivant montre que les constructions que l'on vient de faire sont une vaste généralisation de la transformée de Fourier pour un groupe lca. Il montre (enfin!) que le dual d'un groupe lca est bien un groupe lca, ainsi que le lemme de Riemann-Lebesgue pour la transformée de Fourier en toute généralité (on l'avait démontré seulement pour $\mathbb{R}^d$ dans le chapitre précédent). La preuve du fait que l'application ci-dessous est un homéomorphisme est un pur exercice de torture, bien qu'il n'y ait pas vraiment de difficulté.

Théorème 15.1.5. *Soit G un groupe lca σ-compact. L'application*

$$\hat{G} \to \widehat{L^1(G)}, \; \xi \mapsto (f \mapsto \hat{f}(\xi))$$

est un homéomorphisme.

Proof. Nous avons déjà vu que l'application est bien définie et injective. Montrons d'abord qu'elle est surjective.

Soit donc $\phi \in \widehat{L^1(G)}$ et prenons $g \in L^1(G)$ telle que $\phi(g) = 1$. Comme $\phi \in L^1(G)' \simeq L^\infty(G)$, il existe $\chi \in L^\infty(G)$ tel que $\phi(f) = \int_G f(x)\chi(x)dx$ pour tout f. Si $f \in L^1(G)$, une application du théorème de Fubini (toutes les intégrales sont absolument convergentes) donne

$$\phi(f) = \phi(f * g) = \int \chi(x)(\int f(y)g(y^{-1}x)dy)dx = \int f(y)\phi(L_y g)dy,$$

avec $L_y g(x) = g(y^{-1}x)$. Soit $u(y) = \overline{\phi(L_y g)}$, alors $u : G \to \mathbb{C}$ est continue puisque

$$|u(y) - u(y')| = |\phi(L_y g - L_{y'} g)| \leq ||L_y g - L_{y'} g||_1$$

et on peut conclure par la continuité des translations dans $L^1(G)$. Ensuite, l'identité $g * L_{xy} g = L_x g * L_y g$ donne

$$\overline{u(xy)} = \phi(L_{xy} g) = \phi(g * L_{xy} g) = \phi(L_x g)\phi(L_y g) = \overline{u(x)u(y)}.$$

De plus $|u(y)| \leq ||L_y g||_1 = ||g||_1$ pour tout $y \in G$, donc $|u(y)|^n \leq ||g||_1$ pour tout $y \in G$ et $n \geq 1$, ce qui montre que $|u(y)| \leq 1$ pour tout y. Comme $u(1) = 1$ et $u(xy) = u(x)u(y)$, cela force $|u(x)| = 1$ pour tout x, donc $u \in \hat{G}$ et $\phi(f) = \hat{f}(u)$ pour tout f.

Montrons maintenant que $\iota : \hat{G} \to \widehat{L^1(G)}$ est continue. Cela signifie concrètement la chose suivante: si l'on se donne $\xi \in \hat{G}$ et un voisinage $U = \{\chi' \in \widehat{L^1(G)} |\ |\chi'(f_i) - \widehat{f}_i(\xi)| < \varepsilon\}$ de $\iota(\xi)$, on peut trouver un voisinage $V = \{\xi' \in \hat{G} |\ \sup_{x \in K} |\xi'(x) - \xi(x)| < \delta\}$ de ξ tel que $\iota(V) \subset U$. On veut donc trouver $\delta > 0$ et un compact K tels que si $\sup_{x \in K} |\xi'(x) - \xi(x)| < \delta$ alors $|\widehat{f}_i(\xi') - \widehat{f}_i(\xi)| < \varepsilon$. Soient $g_i \in C_c(G)$ telles que $||f_i - g_i||_1 < \varepsilon/3$ et soit $K = \cup \mathrm{supp}(g_i)$ et $\delta = \frac{\varepsilon}{50} \min_j \frac{1}{1+||f_j||_1}$. Si $\sup_{x \in K} |\xi'(x) - \xi(x)| < \delta$ alors (en remarquant que sur $G \setminus K$ on a $f_i = f_i - g_i$)

$$|\widehat{f}_i(\xi') - \widehat{f}_i(\xi)| = |\int f_i(x)\overline{\chi_\xi}(x)(\overline{\chi_{\xi'-\xi}(x)} - 1)dx|$$

$$\leq 2\pi\delta \int_K |f_i| + 2\int_{G \setminus K} |f_i| \leq 2\pi\delta ||f_i||_1 + 2||f_i - g_i||_1 < \varepsilon.$$

Enfin, montrons que ι est ouverte. Concrètement, on veut montrer que pour tout $\chi_0 \in \hat{G}$, tout compact K de G et tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de fonctions $f_1, ..., f_n \in L^1(G)$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $\chi \in \hat{G}$ on a

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\widehat{f}_i(\chi) - \widehat{f}_i(\chi_0)| < \delta \implies \sup_{x \in K} |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon.$$

En utilisant le fait que $\hat{f}(\chi) - \hat{f}(\chi_0) = \hat{F}(\chi\chi_0^{-1}) - \hat{F}(1)$, avec $F = f\chi_0^{-1}$, on peut supposer que $\chi_0 = 1$. Soit $f \in L^1(G)$ telle que $\hat{f}(1) = \int_G f(x)dx = 1$, et soit U un voisinage de 1 dans G tel que $U = U^{-1}$ et $||L_x f - f||_1 < \varepsilon/3$ pour $x \in U$. Il existe $x_1, ..., x_n \in G$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^n x_i U$. Soient $f_i = L_{x_i} f$ et $\delta = \varepsilon/3$. Soit $\chi \in \hat{G}$ tel que $\max |\widehat{f}_i(\chi) - 1| < \varepsilon/3$, montrons que $|\chi(x) - 1| < \varepsilon$ pour $x \in K$. Soit $x \in K$ et écrivons $x = x_j u$ pour un $u \in U$. Alors

$$|\chi(x) - 1| \leq |\chi(x) - \chi(x)\widehat{f_j}(\chi)| + |\widehat{f_j}(\chi)\chi(x) - \widehat{f_j}(\chi)| + |\widehat{f_j}(\chi) - 1| =$$

$$2|\widehat{f_j}(\chi) - 1| + ||\widehat{L_{x^{-1}} f_j}(\chi) - \widehat{f_j}(\chi)| \leq 2\varepsilon/3 + ||L_{x^{-1}} f_j - f_j||_1 = 2\varepsilon/3 + ||L_{u^{-1}} f - f||_1 < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. Ouf!!! □

Moralité: la transformée de Fourier n'est rien d'autre que la transformée de Gelfand pour l'algèbre $L^1(G)$!

Exercice 15.1.2. *Montrer que le spectre de $C^n([a,b])$ (voir l'exemple 15.0.1) est homéomorphe à $[a,b]$.*

15.2 Théorie de Gelfand

Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire, d'unité e, on note

$$A^\times = \{a \in A |\ \exists b \in A,\ ab = ba = e\}$$

le groupe des éléments inversibles de A. On écrira a^{-1} pour l'unique $b \in A$ tel que $ab = ba = e$, si $a \in A^\times$. Bien que très facile, le résultat suivant est incroyablement puissant:

Proposition 15.2.1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire.*

a) Si $x \in A$ vérifie $||x|| < 1$, alors $e - x \in A^\times$.

b) $A^\times$ est ouvert dans A. Plus précisément si $a \in A^\times$ alors $B(a, \frac{1}{||a^{-1}||}) \subset A^\times$.

c) $A^\times$ est un groupe topologique pour la topologie induite par celle de A, plus précisément si $||c|| < \frac{1}{2||a^{-1}||}$ alors

$$||(a-c)^{-1} - a^{-1}|| \leq 2||a^{-1}||^2 \cdot ||c||.$$

Proof. a) Puisque $||x^n|| \leq ||x||^n$, la série (avec $x^0 = e$) $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge absolument dans A vers un élément y tel que $y(e-x) = (e-x)y = e$, donc $(e-x)^{-1} = y$.

b) Il suffit de démontrer le deuxième point. Soit $b \in B(a, \frac{1}{||a^{-1}||})$ et écrivons $b = a - c$ avec $||c|| < 1/||a^{-1}||$. Alors $b = a(e - a^{-1}c)$ et $||a^{-1}c|| < 1$, donc $b \in A^\times$ d'après le point a).

c) Si $||c|| < \frac{1}{2||a^{-1}||}$ alors

$$||(a-c)^{-1} - a^{-1}|| = ||(e - a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1}|| = ||\sum_{n\geq 1}(a^{-1}c)^n a^{-1}|| \leq$$

$$\frac{||a^{-1}c||}{1 - ||a^{-1}c||}||a^{-1}|| \leq 2||c|| \cdot ||a^{-1}||^2,$$

puisque $||a^{-1}c|| \leq ||a^{-1}|| \cdot ||c|| < 1/2$ et $1 - ||a^{-1}c|| > 1 - \frac{1}{2} = 1/2$. □

Exercice 15.2.1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire et soit G le sous-groupe de $A^\times$ engendré par les $e - x$ avec $||x|| < 1$. Montrer que G est un sous-groupe distingué de $A^\times$, que $A^\times/G$ est discret pour la topologie quotient, et que G est la composante connexe de 1 dans $A^\times$. Montrer que G est aussi le sous-groupe engendré par les $e^x := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}x^n$ avec $x \in A$.*

Un idéal (à gauche) d'une $\mathbb{C}$-algèbre A est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel I de A tel que $aI \subset I$ pour tout $a \in A$. Si I est un idéal bilatère (i.e. à gauche et à droite) de A, alors A/I possède une unique structure de $\mathbb{C}$-algèbre telle que la projection canonique $A \to A/I$ soit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Par convention idéal signifie idéal à gauche dans ce qui suit.

Corollaire 15.2.1. *Soit A une algèbre de Banach unitaire.*

a) L'adhérence d'un idéal propre de A est encore un idéal propre de A.

b) Tout idéal maximal de A est fermé.

b) Si I est un idéal bilatère fermé propre de A, alors A/I avec la norme quotient est une algèbre de Banach unitaire.

Proof. a) Soit I un idéal propre de A. Si $e \in \overline{I}$, alors il existe $x \in I \cap B(e,1)$, mais d'après la proposition 15.2.1 cela force $x \in A^\times$ et donc $I = A$.

b) Si m est un idéal maximal de A, alors $\overline{m}$ est un idéal propre de A (par le point a)) qui contient m, donc $m = \overline{m}$ et m est fermé.

c) Comme I est fermé, A/I est un espace de Banach pour la norme quotient. On a bien

$$||(x+I)(y+I)|| = ||xy+I|| = \inf_{a\in I} ||xy+a|| \leq ||x+I||\cdot||y+I|| = \inf_{b\in I} ||x+b||\cdot\inf_{c\in I} ||y+c||$$

car pour tous $b, c \in I$ on a $xc + by + bc \in I$ et donc

$$||x+b|| \cdot ||y+c|| \geq ||(x+b)(y+c)|| = ||xy + (xc+by+bc)|| \geq \inf_{a\in I} ||xy+a||.$$

Il reste à voir que $\inf_{x\in I} ||e+x|| = 1$, ce qui découle directement de la proposition 15.2.1. □

Corollaire 15.2.2. *Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative, alors tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\chi : A \to \mathbb{C}$ est continu, et donc appartient à $\hat{A}$ s'il est non nul. En d'autres termes, $\hat{A}$ est l'ensemble des morphismes non nuls de $\mathbb{C}$-algèbres $A \to \mathbb{C}$.*

Proof. a) On peut supposer que A est unitaire (plonger A dans A_e sinon). S'il existe x tel que $|\chi(x)| > ||x||$, alors $y = \frac{1}{\chi(x)}x - e$ vérifie $||e+y|| < 1$, donc $y \in A^\times$ par la proposition 15.2.1, ce qui rend impossible l'égalité $\chi(y) = 0$. □

Remarque 15.2.1. Si A, B sont des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach commutatives isomorphes en tant que $\mathbb{C}$-algèbres (pas forcément en tant que $\mathbb{C}$-algèbres de Banach), alors $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont homéomorphes.

En effet, soit $\phi : A \to B$ un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et soit $\phi^* : \hat{B} \to \hat{A}$ l'application définie par $\phi^*(\chi) = \chi \circ \phi$. En utilisant la même construction pour $\phi^{-1} : B \to A$ on voit que ϕ^* est bijective (d'inverse $(\phi^{-1})^*$). Pour voir que ϕ^* est continue, il suffit de voir que pour tout $a \in A$ l'application $\chi \mapsto \chi(\phi(a))$ est continue de $\hat{B}$ dans $\mathbb{C}$, ce qui est clair.

Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire, d'unité e. Nous allons écrire simplement $x - \lambda$ au lieu de $x - \lambda e$ pour $x \in A, \lambda \in \mathbb{C}$. Introduisons un autre objet fondamental:

Définition 15.2.1. Soit $a \in A$. Le **spectre de** a est l'ensemble

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \; \lambda - a \notin A^\times\}.$$

Exercice 15.2.2. *Soit V l'opérateur de Volterra sur $C([0,1])$, défini par $Vf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que V est injectif et $\sigma(V) = \{0\}$.*

Exercice 15.2.3. *Soit X un espace compact et $A = (C(X), ||\cdot||_\infty)$. Montrer que pour tout $f \in A$ le spectre de f est l'image de f.*

Exercice 15.2.4. *(le spectre d'un élément dépend vraiment de l'algèbre sous-jacente) Soit $A = B(H)$, avec $H = l^2(\mathbb{Z})$, et soit B l'algèbre de Banach engendrée par l'opérateur $U : (x_n) \mapsto (x_{n+1})$. Montrer que le spectre de U vu comme élément de A est S^1, mais le spectre de U vu comme élément de B est le disque unité fermé.*

Exercice 15.2.5. *Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors*

$$\sigma(P(a)) = \{P(\lambda) |\ \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Exercice 15.2.6. *a) Montrer que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$ si $a, b \in A$.*
b) Donner un exemple d'opérateurs A, B sur ℓ^2 tels que $\sigma(AB) \neq \sigma(BA)$.

Le théorème fondamental de la théorie de Gelfand est le suivant. Nous allons en donner deux démonstrations, une classique utilisant l'analyse complexe, et une deuxième, magnifique par sa simplicité, due à Rickart. Rappelons que si A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et si $a \in A$, le *rayon spectral* de a est

$$r(a) = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||a^n||}.$$

La suite $r_n = ||a^n||$ vérifie $r_n \geq 0$ et $r_{m+n} \leq r_m r_n$ et un exercice classique d'analyse permet d'en déduire l'égalité $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r_n} = \inf_n \sqrt[n]{r_n}$, autrement dit

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{||a^n||}.$$

Théorème 15.2.2 (Gelfand)**.** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire. Le spectre de tout $a \in A$ est un compact non vide et on a la formule du rayon spectral*

$$\sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| = r(a).$$

Proof. Puisque $A^\times$ est ouvert dans A (proposition 15.2.1), $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ \lambda - a \in A^\times\}$ est ouvert dans $\mathbb{C}$ (image réciproque d'un ouvert par une application continue), or cet ensemble est le complémentaire de $\sigma(a)$, ce dernier est donc fermé dans $\mathbb{C}$. Si $\lambda \in \sigma(a)$, alors $|\lambda| \leq ||a||$, sinon $e - \lambda^{-1}a$ serait inversible (car $||\lambda^{-1}a|| < 1$). Donc $\sigma(a)$ est un fermé du disque $\{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leq ||a||\}$, et donc est compact.

Montrons ensuite que

$$\sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda| \leq \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{||a^n||}.$$

Soit $n \geq 1$ et $\lambda \in \sigma(a)$ alors $a^n - (\lambda e)^n \notin A^\times$ (car $a^n - (\lambda e)^n = (a - \lambda e)b$ avec $b \in A$), donc $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ et d'après ce que l'on vient de démontrer $|\lambda^n| \leq ||a^n||$, ce qui permet de conclure.

Soit $f(z) = (e - za)^{-1}$, pour z tel que $e - za \in A^\times$. Alors f est bien définie et $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n a^n$, la série étant absolument convergente sur un voisinage de 0 (proposition 15.2.1). Soit

$$x = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\lambda|,$$

avec la convention que $x = 0$ si $\sigma(a) = \emptyset$.

Lemme 15.2.1. *La fonction f est analytique dans le disque $|z| < 1/x$ (ce disque étant $\mathbb{C}$ tout entier si $x = 0$), i.e. pour tout z_0 dans ce disque il existe $\varepsilon > 0$ et des $a_n \in A$ tels que*

$$f(z_0 + t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n, \forall |t| < \varepsilon,$$

la série étant absolument convergente.

Proof. On a $1/z_0 \notin \sigma(a)$, donc $e - z_0 a$ est inversible. Pour z proche de 0 on a $e - (z_0 + z)a = (e - z_0 a)(e - f(z_0)za)$, et ceci est inversible, avec

$$f(z_0 + z) = f(z_0) \sum_{n\geq 0} f(z_0)^n z^n a^n,$$

la série étant absolument convergente. Cela permet de conclure. $\square$

Soit maintenant $\ell \in A'$. Alors $z \to \ell(f(z))$ est analytique dans le disque $|z| < 1/x$, par continuité de ℓ et le lemme ci-dessus. Par un résultat standard d'analyse complexe, il existe $b_n \in \mathbb{C}$ tels que pour $|z| < 1/x$ on ait

$$\ell(f(z)) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n,$$

la série étant absolument convergente. Mais pour z proche de 0 on a aussi $\ell(f(z)) = \sum_{n\geq 0} \ell(a^n) z^n$, donc par unicité on doit avoir $b_n = \ell(a^n)$ et donc $|\ell(a^n)| r^n \to 0$ pour tout $r < 1/x$. On en déduit que pour $r < 1/x$ fixé l'ensemble $\{\ell(r^n a^n) |\ n \geq 1\}$ est borné pour tout $\ell \in A'$ et donc (par Banach-Steinhaus) la suite $(r^n ||a^n||)$ est bornée pour tout $r < 1/x$, ce qui montre que $r(a) \leq 1/r$ pour tout $r < 1/x$, donc $r(a) \leq x$. Comme $r(a) \geq x$, on a $r(a) = x$.

Il reste juste à expliquer que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sinon $x = 0$ et donc $r(a) = 0$ par ce qui vient d'être démontré. Mais comme $0 \notin \sigma(a)$, a est inversible et donc $||a^n|| \cdot ||a^{-1}||^n \geq ||e|| = 1$ pour tout n, ce qui donne $0 \cdot ||a^{-1}|| \geq 1$, une absurdité. Cela permet de conclure. $\square$

Proof. (Rickart) Voici une deuxième preuve du fait que le spectre de a est non vide et de la formule du rayon spectral, les points les plus délicats du théorème. Nous avons déjà vu (et c'est facile) que $|\lambda| \leq r(a)$ pour $\lambda \in \sigma(a)$, donc il suffit de montrer qu'il existe $\lambda \in \sigma(a)$ avec $|\lambda| \geq r(a)$. Supposons que ce n'est pas le cas et distinguons deux cas.

Si $r(a) = 0$, alors par hypothèse a est inversible et $||a^n|| \cdot ||a^{-1}||^n \geq ||e|| = 1$ pour tout n, donc $0 = r(a) \geq 1/||a^{-1}|| > 0$, une contradiction.

Supposons que $r(a) > 0$. Quitte à remplacer a par $a/r(a)$ (noter que $r(za) = |z| r(a)$ et $\sigma(za) = z\sigma(a)$ si $z \in \mathbb{C}^*$), on peut supposer que $r(a) = 1$ et donc $||a^n|| \geq 1$ pour tout n.

Par hypothèse $\lambda - a$ est inversible pour tout $|\lambda| \geq 1$, donc $e - za$ est inversible pour $|z| \leq 1$. Comme $x \to x^{-1}$ est continue sur $A^\times$, on a

$$M = \sup_{|z|\leq 1} ||(e - za)^{-1}|| < \infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $r \in]0, 1[$ tel que

$$|r - 1| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2M^2||a||}, \frac{1}{2M||a||}\right).$$

Soit $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} |\, z^n = 1\}$. L'observation cruciale est que pour tout $n \geq 1$ on a

$$(e - a^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{z \in \mu_n} (e - za)^{-1}.$$

En effet, l'égalité a bien un sens par notre hypothèse, et pour la démontrer il suffit de multiplier les deux termes par $e - a^n$ et de remarquer que

$$\sum_{z \in \mu_n} (e - a^n)(e - za)^{-1} = \sum_{z \in \mu_n} (e + (za) + ... + (za)^{n-1}) = ne$$

puisque $\sum_{z \in \mu_n} z^k = 0$ pour $1 \leq k < n$. Le même argument montre que

$$(e - (ra)^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{z \in \mu_n} (e - zra)^{-1}.$$

En appliquant le point c) de la prop. 15.2.1 à $zra - za$ et $e - za$ (on a bien $||zra - za|| = |r - 1|||a|| < \frac{1}{2M} \leq \frac{1}{2||(e-za)^{-1}||}$) on obtient

$$||(e - (ra)^n)^{-1} - (e - a^n)^{-1}|| = \frac{1}{n} |\sum_{z \in \mu_n} (e - za)^{-1} - (e - zra)^{-1}| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{z \in \mu_n} 2||(e - za)^{-1}||^2 ||zra - za|| \leq 2M^2 |r - 1|||a|| < \varepsilon.$$

Comme le rayon spectral de ra est $r < 1$, on a $||(e - (ra)^n)^{-1} - e|| < \varepsilon$ pour n assez grand. On a donc $||e - (e - a^n)^{-1}|| < 2\varepsilon$ pour n assez grand, autrement dit $(e - a^n)^{-1} \to e$ et donc $e - a^n \to e$. Cela est impossible car $||a^n|| \geq 1$ pour tout n. □

Le résultat suivant est tout à fait remarquable, même si c'est une conséquence directe du théorème de Gelfand:

Corollaire 15.2.3 (Gelfand-Mazur). *Si A est une algèbre de Banach unitaire telle que tout élément non nul de A est inversible, alors $\mathbb{C} \to A, \lambda \to \lambda e$ est un isomorphisme.*

Proof. Si $a \in A$, il existe d'âprès le théorème de Gelfand $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda e - a$ ne soit pas inversible dans A, donc $\lambda e - a = 0$ par hypothèse. Donc $\mathbb{C} \to A, \lambda \to \lambda e$ est surjectif, ce qui permet de conclure. □

Un autre pilier de la théorie de Gelfand est le théorème suivant:

Théorème 15.2.3. *[Gelfand] Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative unitaire.*

a) L'application $\chi \to \ker(\chi)$ induit une bijection de $\hat{A}$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de A.

b) Pour tout $a \in A$ on a

$$\sigma(a) = \{\chi(a) |\, \chi \in \hat{A}\} = \mathrm{Im}(\hat{a}).$$

c) Un élément $a \in A$ est inversible dans A si et seulement si $\chi(a) \neq 0$ pour tout $\chi \in \hat{A}$, autrement dit si et seulement si $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$ ne s'annule pas sur $\hat{A}$.

Proof. a) Le seul point délicat est de vérifier que tout idéal maximal m est le noyau d'un morphisme $A \to \mathbb{C}$. On a vu que m est fermé, donc A/m est une algèbre de Banach unitaire et un corps, donc isomorphe à $\mathbb{C}$ par le théorème de Gelfand-Mazur. Mais m est le noyau du morphisme $A \to A/m \simeq \mathbb{C}$.

b) Si $\chi \in \hat{A}$ alors $\chi(a - \chi(a)e) = 0$, donc $a - \chi(a)e \notin A^\times$ et donc $\chi(a) \in \sigma(a)$. Dans l'autre sens, si $\lambda \in \sigma(a)$, alors $a - \lambda e \notin A^\times$ donc il existe un idéal maximal m contenant $a - \lambda e$. Par a) il existe $\chi \in \hat{A}$ tel que $m = \ker(\chi)$, donc $\lambda = \chi(a)$.

c) Conséquence directe du point b). □

Le résultat suivant découle du théorème de Krull (tout anneau commutatif non nul possède un idéal maximal) et du théorème de Gelfand 15.2.3:

Corollaire 15.2.4. *Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative unitaire non nulle, alors $\hat{A} \neq \emptyset$.*

Pour voir que ce résultat n'a rien d'évident, mentionnons qu'il devient faux si l'on ne suppose plus que A est unitaire (même en supposant A commutative). Voici un exemple amusant: soit

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]),\ Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

et soit A l'adhérence dans $L(C([0,1]), C([0,1]))$ de l'espace vectoriel engendré par $T, T^2, T^3, \ldots.$ Alors A est une algèbre de Banach commutative et on vérifie (excellent exercice) que $r(a) = 0$ pour tout $a \in A$ (commencer par vérifier que $|T^n f(x)| \leq ||f||_\infty x^n/n!$, donc $r(T) = 0$) et donc $\hat{A} = \emptyset$.

Chapter 16

Applications de la théorie de Gelfand

Dans ce chapitre nous allons discuter quelques applications classiques de la théorie de Gelfand vue dans le chapitre précédent:

- le théorème de Wiener sur les sous-espaces de $L^1(\mathbb{R})$ invariants par translation.
- le théorème de Bochner pour un groupe lca (σ-compact)
- la formule d'inversion de Fourier et le théorème de Plancherel pour un groupe lca (σ-compact).
- le théorème de Gelfand-Naimark décrivant les algèbres de Banach de la forme $C(X)$, avec X un espace compact.

Nous allons voir dans le prochain (et dernier!) chapitre les applications du théorème de Gelfand-Naimark à la théorie spectrale des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert.

Convention: si G est un groupe lca et si $f \in L^1(G)$, on pose $f^*(g) = \overline{f(-g)}$ pour $g \in G$. Nous allons utiliser très souvent la formule

$$\widehat{f^* * f} = |\hat{f}|^2.$$

16.1 Les théorèmes de Wiener

La preuve originelle de Wiener du théorème ci-dessous était très délicate, alors que l'argument ci-dessous semble totalement trivial. Ce n'est qu'un signe de la profondeur de la théorie de Gelfand!

Théorème 16.1.1 (Wiener)**.** *Soit $f : S^1 \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur S^1. Si la série de Fourier de f converge absolument, alors il en est de même de la série de Fourier de $1/f$.*

Proof. Considérons l'algèbre de Wiener W des fonctions continues $f : S^1 \to \mathbb{C}$ dont la série de Fourier converge absolument. Nous avons vu dans la proposition 15.1.1 que le spectre $\hat{W}$ s'identifie à S^1 via l'application envoyant $z \in S^1$ sur $\mathrm{ev}_z : f \mapsto f(z)$. Ainsi $\chi(f) \neq 0$ pour tout $\chi \in \hat{W}$ et par le théorème de Gelfand 15.2.3 f est inversible dans W, ce qui permet de conclure. $\square$

Le théorème suivant est nettement plus difficile, même en utilisant la théorie de Gelfand. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$ notons $f_a : x \mapsto f(x-a)$ le translaté de f par a.

Théorème 16.1.2 (d'approximation de Wiener). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. L'espace engendré par les translatés de f est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\hat{f}(x) \neq 0$ pour tout x.*

Proof. S'il existe x tel que $\hat{f}(x) = 0$, alors la transformée de Fourier de chaque translaté de f s'annule en x, et donc l'espace engendré par ces translatés n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$. L'autre sens est beaucoup plus délicat.

Soit $A = L^1(\mathbb{R})$, vue comme algèbre de Banach pour le produit de convolution. Soit V l'adhérence de l'espace engendré par les f_a pour $a \in \mathbb{R}$. Comme $f \mapsto f_a$ est continue, V est stable par translations.

Etape 1 Nous allons montrer que V est un idéal de A. Soit $F \in V$ et $g \in A$ et supposons que $F * g \notin V$. Par un des corollaires du théorème de Hahn-Banach il existe $\ell \in A' \simeq L^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\ell(V) = \{0\}$ et $\ell(F * g) \neq 0$. Si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction correspondant à ℓ, alors

$$0 \neq \int (F*g)(x)\varphi(x)dx = \int\int \varphi(x)F(x-y)g(y)dxdy = \int g(y)(\int \varphi(x)F_y(x)dx)dy = 0,$$

une contradiction.

Etape 2 Soit B l'espace des $f \in A$ telles que $\hat{f}$ soit à support compact. Montrons que B est dense dans A. Posons $u_R(x) = \max(0, 1 - \frac{|x|}{R})$ pour $R > 0$. Un petit calcul montre que

$$K_R(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{u_R}(x) = \frac{R}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{Rx}{2}}{\frac{Rx}{2}}\right)^2$$

et donc $\widehat{K_R} = u_R$ est à support compact et $\int K_R = u_R(0) = 1$. On voit facilement que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_{R\to\infty}\int_{|x|\geq\varepsilon} K_R(x)dx = 0$ et par un argument standard on en déduit que $F * K_R$ tend vers F quand $R \to \infty$ pour tout $F \in A$. D'autre part $F * K_R \in B$ car $\widehat{F * K_R} = \hat{F} \cdot u_R$ est à support compact, ce qui permet de conclure.

Etape 3 Par les étapes 1 et 2 il suffit de voir que pour tout $g \in B$ il existe $h \in A$ tel que $g = f * h$. Ajoutons une unité e à A pour obtenir une algèbre de Banach unitaire A_e. Les caractères de A_e sont de la forme $\chi(ae + F) = a + \hat{F}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ ou $\chi(ae + F) = a$ ($a \in \mathbb{C}, F \in A$) grâce au théorème 15.1.5.

Soit $k \in A$ tel que $\hat{k}(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$ et $\hat{k} = 1$ sur $\mathrm{Supp}(\hat{g})$ (ce qui est possible, car toute fonction lisse à support compact est la transformée de Fourier d'une fonction dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$). Comme $\widehat{f * f^*} = |\hat{f}|^2$ est strictement positive en tout point, une égalité de la forme $1 + |\hat{f}(x)|^2 - \hat{k}(x) = 0$ est impossible et donc $e + f * f^* - k$ est inversible dans A_e par le théorème de Gelfand. Soit $v \in A_e$ tel que $(e + f * f^* - k) * v = e$, alors

$$g = (e - k + f * f^*) * v * g = f * f^* * v * g + v * (e - k) * g.$$

Notons que $\widehat{(e - k) * g} = \hat{g}(1 - \hat{k}) = 0$ et donc $(e - k) * g = 0$. Si l'on pose $h = f^* * v * g$, alors $h \in A$ (car A est un idéal de A_e) et $g = f * h$, ce qui permet de conclure. □

Exercice 16.1.1. *Soit G un groupe lca et soit I un sous-espace vectoriel de $L^1(G)$. Montrer que I est un idéal de $L^1(G)$ si et seulement si I est stable par translation par des éléments de G.*

Exercice 16.1.2 (théorème tauberien de Wiener). *Soient* $K_1, K_2 \in L^1(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{C}$ *et* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. *Si* $\widehat{K_1}(x) \neq 0$ *pour tout* x *et si*

$$\lim_{x\to\infty} K_1 * f(x) = z \int K_1,$$

alors

$$\lim_{x\to\infty} K_2 * f(x) = z \int K_2.$$

Exercice 16.1.3 (Wiener). *Soit* $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. *Montrer que l'espace engendré par les translatés de* a *est dense dans* $\ell^1(\mathbb{Z})$ *si et seulement si* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \neq 0$ *pour tout* $|z| = 1$.

Exercice 16.1.4. *Soit* A *l'espace des fonctions continues* $f : \bar{D} = \{z \in \mathbb{C}|\, |z| \leq 1\} \to \mathbb{C}$ *de la forme* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, *avec* $\sum_{n\geq 0} |a_n| < \infty$. *Montrer que si* $f \in A$ *n'a pas de zéro dans* $\bar{D}$, *alors* $1/f \in A$.

Exercice 16.1.5. *Sur l'espace* $B = \ell^1$ *on considère l'opérateur* $T(x_0, x_1, ...) = (0, x_0, x_1, ...)$ *et un élément* $a = (a_n) \in B$. *Montrer que* $\mathrm{Vect}(a, T(a), T^2(a), ...)$ *est dense dans* B *si et seulement si l'équation* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 0$ *n'a pas de solution dans le disque* $|z| \leq 1$.

16.2 Autres applications amusantes

Théorème 16.2.1. *Soit* $A(\bar{D})$ *l'algèbre des fonctions continues dans le disque* $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}||z| \leq 1\}$, *holomorphes dans le disque ouvert* $|z| < 1$. *Si* $f_1, ..., f_n \in A$ *n'ont pas de zéro commun dans* $\bar{D}$, *alors il existe* $g_1, ..., g_n \in A(\bar{D})$ *tels que* $g_1 f_1 + ... + g_n f_n = 1$.

Proof. $A(\bar{D})$ est une algèbre de Banach commutative unitaire pour la norme sup. Considérons l'idéal I engendré par les f_i. On veut démontrer que $I = A(\bar{D})$. Sinon, par le théorème de Krull I est contenu dans un idéal maximal m de $A(\bar{D})$, et le théorème de Gelfand 15.2.3 fournit un caractère χ de $A(\bar{D})$ s'annulant sur m donc sur I. Notons simplement z la fonction identité. Alors $|\chi(z)| \leq 1$, donc $x = \chi(z) \in \bar{D}$. Pour tout polynôme P on a $\chi(P(z)) = P(x)$. Nous allons voir que les fonctions polynômiales sont denses dans $A(\bar{D})$, donc $\chi = \mathrm{ev}_x$ et $f_i(x) = 0$ pour tout i, une contradiction.

Il reste à montrer que les fonctions polynômiales sont denses dans $A(\bar{D})$. Soit $f \in A(\bar{D})$ et écrivons $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour $|z| < 1$ (la série étant convergente). Si $r \in [0, 1[$ soit $f_r(z) = f(rz)$. Comme f est uniformément continue, on a $\lim_{r\to 1} ||f_r - f||_\infty = 0$, donc il suffit de voir que chaque f_r est limite uniforme de fonctions polynômiales. Mais on vérifie trivialement que les fonctions $P_{r,N}(z) = \sum_{k\leq N} a_k r^k z^k$ convergent uniformément vers f_r quand $N \to \infty$. $\square$

Soit A_b l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans $|z| < 1$. C'est encore une algèbre de Banach pour la norme sup. Il n'est plus vrai que tous les caractères de A sont de la forme $f \to f(z)$, mais on dispose du théorème très difficile suivant:

Théorème 16.2.2 (théorème Corona de Carleson). *a) Si* $f_1, ..., f_n \in A_b$ *vérifient* $\sum_{i=1}^n |f_i(z)| > 1$ *pour tout* $|z| < 1$, *alors il existe* $g_1, ..., g_n \in A_b$ *tels que* $f_1 g_1 + ... + f_n g_n = 1$.

b) Les caractères ev_z *avec* $|z| < 1$ *forment un sous-ensemble dense de* $\widehat{A_b}$.

Théorème 16.2.3. *(Gleason-Kahane-Zelazko) Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach unitaire et soit $\chi : A \to \mathbb{C}$ une forme linéaire non nulle sur A. Les assertions suivantes sont équivalentes*

a) On a $\chi \in \hat{A}$.

b) On a $\chi(e) = 1$ et $\chi(x) \neq 0$ pour $x \in A^\times$.

c) On a $\chi(x) \in \sigma(x)$ pour tout $x \in A$.

Proof. L'argument qui suit est franchement diabolique... L'implication $a) \implies b)$ est triviale, et il en est de même de $b) \implies c)$ (noter que $\chi(\chi(x)e - x) = 0$, donc $\chi(x)e - x$ ne peut pas être inversible). Montrons que c) implique a). Il suffit de voir que $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ pour tous x, y. Montrons d'abord que $\chi(x^2) = \chi(x)^2$ pour tout $x \in A$. Remarquons déjà que l'hypothèse $\chi(e) \in \sigma(e)$ montre que $\chi(e) = 1$. Ensuite, fixons $x \in A$ et $n \geq 1$, et considérons la factorisation

$$\chi((ze - x)^n) = z^n - nz^{n-1}\chi(x) + \binom{n}{2} z^{n-2}\chi(x^2) - ... = (z - z_1)...(z - z_n).$$

En identifiant, on obtient

$$n^2\chi(x)^2 = (\sum z_i)^2 = \sum z_i^2 + 2\sum_{i<j} z_i z_j = \sum z_i^2 + n(n-1)\chi(x^2).$$

Il suffit de montrer que $z_i \in \sigma(x)$, car alors $|z_i| \leq r(x)$ et l'égalité ci-dessus montre que $\chi(x^2) - \chi(x)^2 = O(1/n)$, donc $\chi(x^2) = \chi(x)^2$. Mais on a $\chi((z_i e - x)^n) = 0$, donc par hypothèse $(z_i e - x)^n$ n'est pas inversible et donc $z_i e - x$ non plus, et alors $z_i \in \sigma(x)$.

En écrivant $\chi((x + y)^2) = \chi(x + y)^2$ on obtient $\chi(xy + yx) = 2\chi(x)\chi(y)$ pour tous $x, y \in A$. Il suffit donc de montrer que $\chi(xy) = \chi(yx)$. C'est assez astucieux... Si $a, b \in A$ on a

$$(ab - ba)^2 + (ab + ba)^2 = 2(a(bab) + (bab)a),$$

donc

$$\chi(ab - ba)^2 + 4\chi(a)^2\chi(b)^2 = 4\chi(a)\chi(bab).$$

En prenant $a = x - \chi(x)e$ (donc $\chi(a) = 0$) on obtient $\chi(ab) = \chi(ba)$ pour tout $b \in A$, ou encore $\chi(xb) = \chi(bx)$ pour tous $x, b \in A$. □

Remarque 16.2.4. Le théorème ci-dessus est faux pour des algèbres de Banach sur $\mathbb{R}$: considérer $A = (C([0, 1], \mathbb{R}), || \cdot ||_\infty)$ et $\chi(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Le résultat suivant est très important:

Théorème 16.2.5. *Si A est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative, alors:*

a) Pour tout $a \in A$ on a

$$||\hat{a}||_\infty = r(a).$$

b) $a \mapsto r(a)$ est une semi-norme sur A. C'est une norme si et seulement si $\bigcap_{\chi \in \hat{A}} \ker(\chi) = \{0\}$.

c) la transformée de Gelfand $\mathscr{G} : A \to C_0(\hat{A})$ est une isométrie si et seulement si $||a^2|| = ||a||^2$ pour tout $a \in A$.

Proof. a) La formule du rayon spectral dans A_e combinée au fait que $A \to A_e$ est une isométrie et $\widehat{A_e} = \hat{A} \cup \{\infty\}$ donne

$$||\hat{a}||_\infty = \sup_{\chi \in \hat{A}} |\chi(a)| = \sup_{\chi \in \widehat{A_e}} |\chi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma_{A_e}(a)} |\lambda| = r_{A_e}(a) = r(a).$$

b) Cela découle directement du point a).

c) Si $||\hat{a}||_\infty = ||a||$ pour tout a, alors $||a^2|| = ||\widehat{a^2}||_\infty = ||\hat{a}||_\infty^2 = ||a||^2$ pour tout a. Dans l'autre sens, si $||a^2|| = ||a||^2$ pour tout a, alors

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} ||a^{2^n}||^{1/2^n} = ||a||$$

et on conclut en utilisant a). □

Définition 16.2.1. Une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commutative A est dite *semisimple* si $a \mapsto r(a)$ est une norme sur A. Par le théorème ci-dessus c'est le cas si et seulement si $\cap_{\chi \in \hat{A}} \ker(\chi) = \{0\}$.

Théorème 16.2.6. *(Shilov) Soient A, B des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach commutatives, avec B semisimple. Tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $f : A \to B$ est continu.*

Proof. Soit (a_n) une suite dans A qui converge vers $a \in A$ et telle que $(f(a_n))$ converge vers $b \in B$. Nous allons montrer que $b = f(a)$, ce qui permettra de conclure par le théorème du graphe fermé. Si $\chi \in \hat{B}$, alors $\chi(f(a_n)) \to \chi(b)$, mais $\chi \circ f$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de A dans $\mathbb{C}$, donc continu. Ainsi $\chi(f(a_n)) \to (\chi \circ f)(a)$ et donc $\chi(b - f(a)) = 0$ pour tout $\chi \in \hat{B}$. Comme B est semisimple, on a $b = f(a)$. □

Corollaire 16.2.1. *Il n'existe pas de norme sur $A = C^\infty([0,1])$ qui en fait une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach.*

Proof. Supposons que A devient une algèbre de Banach pour une norme $|| \cdot ||$. Notons que $B = C([0,1])$ est clairement semisimple, donc par le théorème de Shilov id : $A \to B$ est continue. Soit donc $c > 0$ tel que $||f||_\infty \le c||f||$ pour tout $f \in A$. Considérons alors $D : A \to A, f \mapsto f'$ et montrons que D est continue. Si $f_n \in A$ converge vers $f \in A$ et $D(f_n) = f_n'$ converge vers $g \in A$, alors d'après ce que l'on vient de démontrer f_n converge uniformément vers f dans B et f_n' converge uniformément vers g, donc par un résultat classique d'analyse $g = f'$, et on conclut en utilisant le théorème du graphe fermé. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $||f'|| \le C||f||$ pour $f \in A$. En prenant des fonctions $f(x) = e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$ on voit que cela est impossible. □

16.3 Le théorème de Bochner

Soit G un groupe lca (σ-compact, comme toujours, bien que ce ne soit pas vraiment nécéssaire...) et soit dx une mesure de Haar sur G. On note $TP(G)$ l'ensemble des fonctions continues $f : G \to \mathbb{C}$ de type positif, i.e. telles que

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} f(x_i - x_j) \ge 0$$

pour tous $x_1, ..., x_n \in G$ et $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$. Le résultat suivant est très utile par la suite:

Proposition 16.3.1. *Si $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ alors $f^* * f \in TP(G)$ et*

$$(f^* * f)(0) = \int_G |f(x)|^2 dx.$$

Proof. Puisque $f^* \in L^2$ et $f \in L^2$, la fonction $f^* * f$ est continue (théorème 10.5.3) et pour tous $x_1, ..., x_n \in G$ et $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} (f^* * f)(x_i - x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} \int_G f^*(x_i - x_j - t) f(t) dt =$$

$$\sum_{i,j} c_i \overline{c_j} \int_G \overline{f(t + x_j - x_i)} f(t) dt = \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} \int_G \overline{f(t + x_j)} f(t+x_i) dt = \int_G |\sum_{i=1}^{n} c_i f(t+x_i)|^2 dt \geq 0.$$

De plus

$$(f^* * f)(0) = \int_G f^*(-t) f(t) dt = \int_G |f(t)|^2 dt.$$

□

Rappelons qu'une autre source importante de fonctions continues de type positif sur G est fournie par la transformée de Fourier. Pour éviter une profusion de $2i\pi$ inutiles, nous allons travailler avec la version "multiplicative" du groupe dual, i.e. les éléments de $\hat{G}$ seront pensés comme des morphismes continus $\chi : G \to S^1$ plutôt que des morphismes continus $\xi : G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ainsi la transformée de Fourier de $f \in L^1(G)$ devient

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx.$$

Rappelons que $M(\hat{G})$ est l'espace des mesures de Radon finies sur $\hat{G}$, i.e. l'espace engendré par les mesures de Radon positives finies sur $\hat{G}$. Nous avons vu (corollaire 14.2.2) que la transformée de Fourier

$$\mathscr{F} : M(\hat{G}) \to C_b(G), \ \mathscr{F}(\mu)(x) = \hat{\mu}(x) = \int_{\hat{G}} \overline{\chi(x)} d\mu(\chi),$$

est injective et que $\hat{\mu} \in TP(G)$ si $\mu \in M(\hat{G})$ est positive (voir le paragraphe 14.5).

Définition 16.3.1. *L'espace de Bochner*[1] de G est l'image de la transformée de Fourier

$$\mathscr{B}(G) = \{\hat{\mu} | \ \mu \in M(\hat{G})\}.$$

Donc la transformée de Fourier induit une bijection

$$\mathscr{F} : M(\hat{G}) \simeq \mathscr{B}(G).$$

Théorème 16.3.1. *(Bochner) Toute fonction continue de type positif sur G est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon positive finie sur $\hat{G}$.*

Proof. Soit $\phi \in TP(G)$. Nous avons déjà vu (lemme 14.5.1) que $||\phi||_\infty = \phi(0)$. On peut supposer que ϕ n'est pas nulle et ensuite que $\phi(0) = 1$. Nous allons montrer ci-dessous (c'est le coeur de l'argument) que

$$|\int_G \phi(x) f(x) dx| \leq ||\hat{f}||_\infty, \ \forall f \in L^1(G) \qquad (*).$$

[1] Ne pas confondre $\mathscr{B}(G)$ utilisé dans ce paragraphe avec la tribu borélienne de G!

Cela nous permet de définir une forme linéaire de norme ≤ 1

$$T : \{\hat{f} |\ f \in L^1(G)\} \to \mathbb{C},\ T(\hat{f}) = \int_G \phi(x) f(x) dx.$$

Comme $\{\hat{f} |\ f \in L^1(G)\}$ est dense dans $C_0(\hat{G})$ (corollaire 14.2.1), T se prolonge en une forme linéaire de norme ≤ 1 sur $C_0(\hat{G})$, qui est représentée (théorème de Riesz-Markov-Kakutani) par un $\mu \in M(\hat{G})$ de norme ≤ 1. On a donc pour tout $f \in L^1(G)$

$$\int_G \phi(x) f(x) dx = \int_{\hat{G}} \hat{f} d\mu = \int_G \int_{\hat{G}} f(x) \overline{\chi(x)} d\mu(\chi) dx,$$

qui montre que $\phi = \hat{\mu}$. Il reste à montrer que μ est positive. On a $1 = \phi(0) = \mu(\hat{G})$ et $||\mu|| \leq 1$, donc forcément $|\mu|(\hat{G}) = ||\mu|| = 1$ et pour tout $A \in \mathscr{B}(\hat{G})$ on a $\mu(A) + \mu(\hat{G} \setminus A) = \mu(\hat{G}) = 1 = |\mu|(A) + |\mu|(\hat{G} \setminus A)$, ce qui force $\mu(A) = |\mu|(A) \geq 0$ et permet de conclure.

Passons à la preuve de $(*)$. Posons

$$(f, g) = \int \phi \cdot (g^* * f),\ f, g \in L^1(G),$$

un accouplement hermitien bien défini puisque ϕ est bornée et $g^* * f \in L^1(G)$. Il découle du lemme 14.5.1 que $(f, f) \geq 0$ pour tout $f \in L^1(G)$, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\int \phi(g^* * f)|^2 \leq \int \phi(f^* * f) \int \phi(g^* * g),\ \forall f, g \in L^1(G).$$

En prenant pour g une approximation de l'unité, on voit que $g^* * f$ converge vers f dans L^1 et donc (puisque ϕ est bornée) $\int \phi(g^* * f)$ converge vers $\int \phi f$. Par le même argument (puisque $g^* * g$ est une approximation de l'unité aussi) $\int \phi(g^* * g)$ converge vers $\phi(0) = 1$. En passant à la limite on obtient donc

$$|\int \phi f|^2 \leq \int \phi(f^* * f),\ \forall f \in L^1(G).$$

On remplace f par $f^* * f$, et on recommence. Si l'on pose $h = f^* * f$, alors $h^* = h$ et on obtient (récurrence sur n)

$$|\int \phi f|^2 \leq |\int \phi h^{(2^n)}|^{1/2^n} \leq ||h^{(2^n)}||_1^{1/2^n}$$

pour tout n, avec $h^{(n)} = h * h * h ... * h$ (n fois h à droite). D'autre part, la formule du rayon spectral et l'identification $\widehat{L^1(G)} = \hat{G}$ (théorème 15.1.5) donnent

$$\lim_{n\to\infty} ||h^{(n)}||_1^{1/n} = r(h) = \sup_{\chi \in \widehat{L^1(G)}} |\chi(h)| = \sup_{\chi \in \hat{G}} |\hat{h}(\chi)| = ||\hat{h}||_\infty = ||\hat{f}||_\infty^2.$$

En passant à la limite on obtient

$$|\int \phi f|^2 \leq ||\hat{f}||_\infty^2,$$

ce qui finit la preuve du théorème. $\square$

Corollaire 16.3.1. *a) On a* $\mathscr{B}(G) = \mathrm{Vect}(TP(G))$.

b) $\mathscr{B}(G) \cap L^p(G)$ *contient* $C_c(G) * C_c(G)$*, et donc* $\mathscr{B}(G) \cap L^p(G)$ *est dense dans* $L^p(G)$ *pour* $1 \leq p < \infty$.

Proof. a) Conséquence directe du théorème de Bochner et de la discussion qui le précède.

b) Si $f, g \in C_c(G)$ alors

$$\sum_{k=0}^{3} i^k (f + i^k g)^* * (f + i^k g) = 4 f * g^*$$

et le terme de gauche est dans $\mathscr{B}(G) \cap L^1(G)$ par le point a) et la proposition 16.3.1. Donc $C_c(G) * C_c(G) \subset \mathscr{B}(G) \cap C_c(G) \subset \mathscr{B}(G) \cap L^p(G)$, qui montre en particulier (en prenant des approximations de l'unité et en utilisant la densité de $C_c(G)$ dans $L^p(G)$) que $\mathscr{B}(G) \cap L^p(G)$ est dense dans $L^p(G)$ pour $\infty > p \geq 1$. □

16.4 Formule d'inversion et théorème de Plancherel

Soit G un groupe lca (σ-compact). On se propose de démontrer le théorème fondamental mais délicat suivant:

Théorème 16.4.1. *a) (formule d'inversion de Fourier) Il existe une mesure de Haar* $d\chi$ *sur* $\hat{G}$ *telle que pour tout* $f \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G)$ *on ait* $\hat{f} \in L^1(\hat{G}, d\chi)$ *et*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x) d\chi, \ \forall\, x \in G.$$

b) (formule de Plancherel) La transformée de Fourier $\mathscr{F} : L^1(G) \to C_0(\hat{G})$ *envoie* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *dans* $L^2(\hat{G}) := L^2(\hat{G}, d\chi)$ *et se prolonge en un isomorphisme isométrique*

$$L^2(G) \simeq L^2(\hat{G}).$$

La preuve repose fortement sur les résultats établis dans le paragraphe précédent, mais demande encore pas mal d'effort. Un premier point crucial est le suivant:

Proposition 16.4.1. *Pour tout compact* K *de* $\hat{G}$ *il existe* $f \in C_c(G) \cap TP(G)$ *telle que* $\hat{f} \geq 0$ *sur* $\hat{G}$ *et* $\hat{f} > 0$ *sur* K.

Proof. Prenons $F \in C_c(G)$ telle que $\hat{F}(0) = \int_G F = 1$ et posons $g = F^* * F$. Alors $g \in C_c(G)$, $\hat{g} = |\hat{F}|^2 \geq 0$ et $\hat{g}(0) = 1$. Soit U un voisinage de 0 tel que $\hat{g} > 0$ sur U (un tel U existe par continuité de $\hat{g}$). Puisque K est compact, il existe $\chi_1, ..., \chi_n \in \hat{G}$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^n \chi_i U$. Posons $f = \sum_{i=1}^n \chi_i \cdot g$ et montrons qu'elle fait l'affaire. Bien entendu $f \in C_c(G)$ et $\hat{f}(\chi) = \sum_{i=1}^n \hat{g}(\chi\chi_i^{-1})$ est partout positive, et strictement positive sur K. Il reste à voir que $f \in TP(G)$, et il suffit de voir que chaque $\chi_i g \in TP(G)$. Or $g \in TP(G)$ (proposition 16.3.1) et

$$\sum c_j \overline{c_k} (\chi_i \cdot g)(x_j - x_k) = \sum d_j \overline{d_k} g(x_j - x_k) \geq 0,$$

avec $d_j = c_j \chi_i(x_j)$. □

Nous allons construire la mesure $d\chi$ par recollement à partir d'une famille de mesures μ_f attachées à chaque $f \in \mathscr{B}(G) \cap L^1(G)$. Pour un tel f il existe une unique mesure $\mu \in M(\hat{G})$ telle que $\widehat{\mu} = f$. On définit μ_f par

$$\int_{\hat{G}} F(\chi) d\mu_f(\chi) = \int_{\hat{G}} F(\chi^{-1}) d\mu(\chi).$$

On a alors

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x) d\mu_f(\chi),$$

qui nous permettra de recoller les μ_f en utilisant la proposition ci-dessus et la suivante:

Proposition 16.4.2. *a) Pour $f \in \mathscr{B}(G) \cap L^1(G)$ et $h \in L^1(G)$ on a*

$$\int_{\hat{G}} \hat{h} d\mu_f = (h * f)(0).$$

b) Pour $f, g \in \mathscr{B}(G) \cap L^1(G)$ on a $\hat{f} d\mu_g = \hat{g} d\mu_f$.

Proof. a) Par Fubini

$$\int_{\hat{G}} \hat{h} d\mu_f = \int_{\hat{G}} \int_G h(x) \overline{\chi(x)} d\mu_f(\chi) dx =$$

$$\int_G h(x) \int_{\hat{G}} \chi(x^{-1}) d\mu_f(\chi) dx = \int_G h(x) f(x^{-1}) dx = (h * f)(0).$$

b) Par densité de $\mathscr{F}(L^1(G))$ dans $C_0(\hat{G})$ (corollaire 14.2.1) il suffit de voir que pour tout $h \in L^1(G)$ on a $\int \hat{h} \hat{f} d\mu_g = \int \hat{h} \hat{g} d\mu_f$ ou encore $\int \widehat{h * f} d\mu_g = \int \widehat{h * g} d\mu_f$ et enfin, par a), $(h * f) * g(0) = (h * g) * f(0)$, ce qui est clair. □

Preuve du théorème 16.4.1, point a).

Nous allons montrer qu'il existe une mesure μ sur $\hat{G}$ telle que pour tout $f \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G)$ on ait $\hat{f} \in L^1(\hat{G}, d\chi)$ et $d\mu_f = \hat{f} d\chi$, et ensuite nous allons voir que μ est une mesure de Haar sur $\hat{G}$.

Construisons d'abord une forme linéaire L sur $C_c(\hat{G})$ comme suit. Soit $F \in C_c(\hat{G})$ et $K = \mathrm{supp}(F)$. Par la proposition 16.4.1 il existe $f \in C_c(G) \cap TP(G)$ telle que $\hat{f} \geq 0$ sur G et $\hat{f} > 0$ sur K. Posons

$$L(F) := \int \frac{F}{\hat{f}} d\mu_f.$$

Alors $L(F)$ ne dépend pas du choix que f comme ci-dessus par le point b) de la proposition 16.4.2, qui montre aussi que

$$L(\hat{g}F) = \int F d\mu_g, \forall g \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G), F \in C_c(\hat{G}).$$

On voit alors facilement que L est bien linéaire, non nulle et positive (noter que μ_f est positive, vu que f est de type positif, et $\hat{f} \geq 0$, donc si $F \geq 0$ alors $L(F) \geq 0$). Le théorème de Riesz-Markov-Kakutani fournit une mesure positive μ sur $\hat{G}$ telle que

$$L(F) = \int_{\hat{G}} F(\chi) d\mu(\chi), \forall F \in C_c(\hat{G}).$$

La relation $L(\hat{g}F) = \int F d\mu_g$ montre que $\hat{g}$ est μ-intégrable et $d\mu_g = \hat{g} d\mu$ pour $g \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G)$.

Il reste à voir que μ est invariante par translation. For tout $f \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G)$ et tout $\chi_0 \in \hat{G}$ on a

$$d\mu_f(\chi_0\chi) = \hat{f}(\chi_0\chi) d\mu(\chi_0\chi) = \widehat{\overline{\chi_0} f}(\chi) d\mu(\chi_0\chi)$$

et (en remarquant que $(\overline{\chi_0} f)(x) = \int_{\hat{G}} \chi(x) d\mu_f(\chi_0\chi)$)

$$d\mu_f(\chi_0\chi) = d\mu_{\overline{\chi_0} f}(\chi) = \widehat{\overline{\chi_0} f}(\chi) d\mu(\chi),$$

donc on obtient $\hat{g}(\chi) d\mu(\chi_0\chi) = \hat{g}(\chi) d\mu(\chi)$ pour tout $g \in L^1(G) \cap \mathscr{B}(G)$, ce qui permet de conclure que μ est invariante par translation.

Preuve du théorème 16.4.1, point b).

Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, alors (proposition 16.3.1) $f * f^*$ est de type positif, intégrable et

$$(f * f^*)(0) = \int |f|^2.$$

D'autre part la formule d'inversion donne

$$(f * f^*)(0) = \int \widehat{f * f^*}(\chi) d\chi = \int |\hat{f}(\chi)|^2 d\chi,$$

ce qui montre que $\hat{f} \in L^2(\hat{G})$ et que $\mathscr{F} : L^1(G) \cap L^2(G) \to L^2(\hat{G})$ est une isométrie. Comme $L^1(G) \cap L^2(G)$ est dense dans $L^2(G)$, elle se prolonge en une isométrie $\mathscr{F} : L^2(G) \to L^2(\hat{G})$.

Il reste à voir que cette isométrie est surjective, ou encore que l'image est dense. Sinon il existe $u \in L^2(\hat{G})$ non nulle et telle que $\int \overline{u} \hat{f} = 0$ pour tout $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Soit $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ et soit $x \in G$. Alors $\int \overline{u} \cdot \widehat{L_x f} = 0$, autrement dit

$$\int_{\hat{G}} \overline{\chi}(x) \overline{u(\chi)} \hat{f}(\chi) d\chi = 0.$$

Ainsi $\sigma := \overline{u(\chi)} \hat{f}(\chi) d\chi$ est dans $M(\hat{G})$ et sa transformée de Fourier est nulle, donc $\sigma = 0$ et $\overline{u} \cdot \hat{f} = 0$ pour tout $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Comme il existe des fonctions $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ avec $\hat{f} > 0$ sur tout compact donné de G (proposition 16.4.1) et comme G est σ-compact, on voit que $u = 0$ presque partout, ce qui permet de conclure. Ouf!!!!!

Exercice 16.4.1. *Soit G un groupe compact abélien.*

a) Montrer que $\hat{G}$ est une base orthonormale de $L^2(G)$.

b) Montrer que $\hat{G}$ est discret et que la transformée de Fourier induit une isométrie $\mathscr{F} : L^2(G) \to \ell^2(\hat{G})$, et que pour tous $f, g \in L^2(G)$ on a

$$(f, g)_{L^2(G)} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)}.$$

16.4.1 C^*-algèbres

Il faudrait tout un livre pour effleurer ce magnifique sujet, nous allons nous restreindre à quelques pages...

Définition 16.4.1. Une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach $(A, ||\cdot||)$ est dite *stellaire ou C^*-algèbre* s'il existe une application $* : A \to A$ (qu'on appelle *l'involution de A*) telle que

$$(a^*)^* = a, \ (\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*, \ (a+b)^* = a^* + b^*, \ (ab)^* = b^* a^*$$

pour $a, b \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et

$$||a^* a|| = ||a||^2, \ \forall a \in A.$$

On dit qu'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $f : A \to B$ est un *morphisme de C^*-algèbres* si A, B sont des C^*-algèbres et si $f(a^*) = f(a)^*$ pour $a \in A$.

Exemple 16.4.1.

1. L'exemple le plus important est $A = B(H)$ pour un espace de Hilbert H, l'involution étant donnée par le passage à l'adjoint: $T^* \in B(H)$ est l'unique élément de $B(H)$ qui vérifie $(Tx, y) = (x, T^* y)$ pour tous $x, y \in H$. La seule chose délicate à vérifier est l'égalité $||T^*T|| = ||T||^2$. L'inégalité $||T^*T|| \le ||T||^2$ est claire puisque $||T|| = ||T^*||$. Ensuite, pour tout $v \in H$ on a par Cauchy-Schwarz
$$||Tv||^2 = (Tv, Tv) = (v, T^*Tv) \le ||v|| \cdot ||T^*Tv||.$$
En divisant par $||v||^2$ et en passant au sup sur v on obtient $||T^*T|| \ge ||T||^2$.

2. Un autre exemple important est l'algèbre $C_b(X) := C_b(X, \mathbb{C})$ pour un espace topologique X, l'involution étant donnée par $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Si X est localement compact, $C_0(X)$ est une sous-C^*-algèbre de $C_b(X)$.

3. Par contre, si G est un groupe lca non trivial, alors $L^1(G)$ n'est pas une C^*-algèbre pour la norme L^1 et l'involution $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ (indication: considérer une fonction f de la forme $f = 1_U - i 1_{xU}$ pour un ouvert U de mesure finie et $x \in G$ tel que $xU \cap U = \emptyset$, et vérifier que $||ff^*|| < ||f||^2$).

L'exercice (pas totalement trivial...) suivant montre que toute C^*-algèbre A se plonge isométriquement dans une C^*-algèbre unitaire. La subtilité vient du fait que la norme usuelle sur A_e n'en fait pas en général une C^*-algèbre.

Exercice 16.4.2. *Soit A une C^*-algèbre sans unité et $A_e = A \oplus \mathbb{C}$. Munissons A_e de l'involution $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$ et considérons $L : A_e \to B(A), L((a, \lambda))(b) = ab + \lambda b$.*

a) Montrer que L est injective.

b) Montrer que $a \mapsto (a, 0)$ est une isométrie de A dans A_e, si l'on munit A_e de la norme $||(a, \lambda)|| = ||L((a, \lambda))|| = \sup_{||b|| \le 1} ||ab + \lambda b||$.

c) Montrer que A_e devient une C^*-algèbre pour la norme introduite ci-dessus.

Si A est une C^*-algèbre, on dit que $a \in A$ est *normal* si $aa^* = a^*a$ et *auto-adjoint* si $a = a^*$.

Proposition 16.4.3. *Soit A une C^*-algèbre.*

a) On a $||a^*|| = ||a||$ pour $a \in A$.

b) Si $a \in A$ est normal alors $||a^2|| = ||a||^2$ et $||a|| = r(a)$. En particulier $||a|| = \sqrt{r(a^*a)}$ pour tout $a \in A$.

c) Si $a \in A$ est auto-adjoint et A est unitaire, alors $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.

d) On a $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$ pour tout $\chi \in \hat{A}$ et $a \in A$.

Proof. a) On a $||a||^2 = ||a^*a|| \leq ||a^*|| \cdot ||a||$, donc $||a|| \leq ||a^*||$ pour tout a. En faisant $a \to a^*$ on obtient l'inégalité dans le sens contraire.

b) C'est assez astucieux:

$$||a^2||^2 = ||(a^2)^*a^2|| = ||a^*a^*aa|| = ||a^*aa^*a|| = ||(a^*a)^*(a^*a)|| = ||a^*a||^2 = ||a||^4,$$

donc $||a^2|| = ||a||^2$. L'élément a^n est normal pour tout n, donc $||a^{2n}|| = ||a||^{2n}$ pour tout n et

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{||a^{2^n}||} = ||a||.$$

c) C'est assez diabolique... Soit $\lambda \in \sigma(a)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda - ix \in \sigma(a - ixe)$, donc (en utilisant b))

$$|\lambda - ix|^2 \leq ||a - ixe||^2 = ||(a - ixe)^*(a - ixe)|| = ||a^2 + x^2e|| \leq ||a||^2 + x^2.$$

Comme x est arbitraire, on voit tout de suite que cela force $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Quitte à plonger A dans A_e (en utilisant l'exercice ci-dessus), on peut supposer que A est unitaire. On écrit $a = b + ic$ avec b, c auto-adjoints en posant $b = \frac{a+a^*}{2}, c = \frac{a-a^*}{2i}$. Il suffit donc de vérifier que $\chi(a) \in \mathbb{R}$ pour a auto-adjoint et $\chi \in \hat{A}$, ce qui découle du point c), en se rappelant que $\sigma(a) = \mathrm{Im}(\hat{a})$ par le théorème de Gelfand. □

Un des théorèmes les plus importants et les plus beaux de la théorie est le suivant:

Théorème 16.4.2 (Gelfand-Naimark)**.** *Soit A une C^*-algèbre commutative. Alors la transformée de Gelfand*

$$\mathscr{G} : A \to C_0(\hat{A})$$

est un isomorphisme isométrique de C^*-algèbres.

Proof. Le point d) de la proposition ci-dessus montre que $\mathscr{G}$ est compatible avec les involutions, i.e. est un morphisme de C^*-algèbres. En particulier l'image de $\mathscr{G}$ est une sous-algèbre de $C_0(\hat{A})$ stable par conjugaison complexe. Il est évident que cette algèbre sépare les points et aussi que pour tout $\chi \in \hat{A}$ il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\chi) \neq 0$. Le théorème de Stone-Weierstrass montre alors que $\mathscr{G}$ est d'image dense. D'autre part, comme A est commutative, tout élément de A est normal et donc la proposition ci-dessus montre que $||a|| = r(a) = ||\hat{a}||_\infty$ pour tout $a \in A$, autrement dit $\mathscr{G}$ est une isométrie d'image dense. On vient de montrer que $\mathscr{G}$ est un isomorphisme isométrique de C^*-algèbres. □

Corollaire 16.4.1. *Soit A une C^*-algèbre unitaire et $a \in A$ normal. Soit B la plus petite sous-C^*-algèbre unitaire de A contenant a, i.e. l'adhérence dans A de l'espace engendré par $a^i(a^*)^j$ pour $i, j \geq 0$. Alors*

a) L'évaluation en a induit un homéomorphisme $\hat{B} \simeq \sigma_B(a)$ (le spectre de a vu comme élément de B).

b) Il existe un unique isomorphisme isométrique de C^*-algèbres $C(\sigma_B(a)) \to B$ qui envoie la fonction constante 1 sur e et la fonction identité sur a.

Proof. a) Si $\chi_1, \chi_2 \in \hat{B}$ vérifient $\chi_1(a) = \chi_2(a)$, alors (proposition 16.4.3) $\chi_1(a^*) = \overline{\chi_1(a)} = \overline{\chi_2(a)} = \chi_2(a^*)$, donc χ_1 et χ_2 sont égaux sur $\mathrm{Vect}_{i,j\geq 0}(a^i(a^*)^j)$, donc sur B, ce qui prouve l'injectivité de l'évaluation en a. La surjectivité est une conséquence de la théorie de Gelfand dans B, et on conclut puisque les deux espaces sont compacts.

b) Par le théorème de Gelfand-Naimark $\mathscr{G}_B : B \to C(\hat{B})$ est un isomorphisme isométrique, et par a) $C(\hat{B}) \simeq C(\sigma_B(a))$. En composant l'inverse du deuxième morphisme avec le premier on obtient un isomorphisme isométrique de C^*-algèbres $C(\sigma_B(a)) \to B$, et en suivant les identifications on voit qu'il envoie la fonction constante 1 sur e et la fonction identité sur a. L'unicité est claire, puisque l'algèbre engendrée par la fonction constante 1, la fonction identité et la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est dense dans $C(\sigma_B(a))$ par Stone-Weierstrass. $\square$

Chapter 17

Théorie spectrale et opérateurs compacts

Dans ce dernier chapitre nous allons étudier la théorie spectrale des opérateurs sur un espace de Hilbert, ainsi que les opérateurs compacts. Ce sont des sujets fondamentaux, mais malheureusement le manque de temps nous force à une approche très minimaliste.

Conventions et notations: le corps des scalaires est $\mathbb{C}$ dans ce chapitre. Sauf mention explicite du contraire H sera un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ (souvent séparable). Si X est un Banach on note $B(X) := L(X, X)$ et $T - \lambda := T - \lambda \cdot \mathrm{id}$ pour $T \in B(X)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si X est un espace topologique on note $C(X) := C(X, \mathbb{C})$. Si X est un compact de $\mathbb{C}$, on note $1 \in C(X)$ et $\mathrm{Id} \in C(X)$ les fonctions envoyant $z \in X$ sur 1, respectivement z. Par Stone-Weierstrass l'algèbre engendrée par les fonctions $1, \mathrm{Id}, \overline{\mathrm{Id}}$ est dense dans $C(X)$.

Enfin, si H, H' sont des espaces de Hilbert, on dit que $U : H \to H'$ est un *opérateur unitaire* si U est une isométrie bijective. On note simplement $U(H)$ l'ensemble des opérateurs unitaires $U : H \to H$. Ce sont les opérateurs $U \in B(H)$ tels que $UU^* = U^*U = \mathrm{id}$.

17.1 Théorèmes spectraux

Dans ce paragraphe nous allons discuter quelques conséquences du théorème de Gelfand-Naimark à l'étude spectrale des opérateurs normaux sur un espace de Hilbert. Nous allons commencer par un résultat très général et très puissant, le *calcul fonctionnel dans une C^*-algèbre.*

Théorème 17.1.1. *(théorème spectral "abstrait") Soit A une C^*-algèbre unitaire et $a \in A$ normal. Il existe un unique morphisme de C^*-algèbres $\Phi_a : C(\sigma(a)) \to A$ tel que $\Phi_a(1) = e$ et $\Phi_a(\mathrm{Id}) = a$. De plus Φ_a est isométrique, pour tout $f \in C(\sigma(a))$ l'élément $f(a) := \Phi_a(f)$ de A est normal et*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)),\ g(f(a)) = (g \circ f)(a),\ \forall g \in C(\sigma(f(a))).$$

Proof. L'unicité est une conséquence directe du théorème de Stone-Weierstrass. Pour l'existence, introduisons la C^*-algèbre $B = \overline{\mathrm{Vect}_{i,j \geq 0} a^i (a^*)^j}$ engendrée par a, et notons $f \mapsto f(a)$ le morphisme $C(\sigma_B(a)) \to B$ construit dans le corollaire 16.4.1.

Nous allons montrer que $\sigma(a) = \sigma_B(a)$, ce qui permettra d'utiliser le corollaire 16.4.1 pour montrer l'existence de Φ_a et aussi son caractère isométrique.

Il est évident que $\sigma(a) \subset \sigma_B(a)$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma_B(a) \setminus \sigma(a)$, en particulier il existe $b = (a - \lambda e)^{-1} \in A$. Soit $k = ||b|| + 1$ et posons $f(z) = k$ si $|z - \lambda| \leq 1/k$, $f(z) = 1/|z - \lambda|$ sinon. Alors $f \in C(\sigma_B(a))$ et si l'on note $g(z) = (z - \lambda)f(z)$ alors $||g||_\infty \leq 1$. On en déduit que

$$||b|| < k = f(\lambda) \leq ||f||_\infty = ||f(a)|| = ||bg(a)|| \leq ||b|| \cdot ||g(a)|| = ||b|| \cdot ||g||_\infty \leq ||b||,$$

une contradiction.

Pour voir que $f(a)$ est normal il suffit de calculer

$$f(a)f(a)^* = f(a)f^*(a) = (ff^*)(a) = (f^*f)(a) = f^*(a)f(a) = f(a)^*f(a).$$

Ensuite, l'isomorphisme de C^*-algèbres $C(\sigma_B(a)) \simeq B$ induit une identification des spectres, et comme $\sigma_{C(X)}(f) = f(X)$ pour tout espace compact X et tout $f \in C(X)$, on obtient (en utilisant aussi le fait que $\sigma(u) = \sigma_B(u)$ pour $u \in B$, comme nous l'avons démontré ci-dessus) pour tout $f \in C(\sigma(a))$

$$\sigma(f(a)) = \sigma_B(f(a)) = \sigma_{C(\sigma_B(a))}(f) = f(\sigma_B(a)) = f(\sigma(a)).$$

Pour le dernier point il suffit de remarquer que $g \mapsto (g \circ f)(a)$ est un morphisme qui envoie 1 sur e et Id sur $f(a)$, donc c'est forcément le morphisme $g \mapsto g(f(a))$. $\square$

Nous allons utiliser maintenant le résultat "abstrait" ci-dessus pour démontrer un théorème fondamental décrivant les opérateurs normaux sur un espace de Hilbert séparable. Le prototype d'opérateur normal est fourni par l'opérateur de multiplication

$$M_g : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu), M_g(f)(x) = g(x)f(x)$$

pour un espace mesuré fini (X, Σ, μ) et $g \in L^\infty(X, \mu)$ (noter que $M_g^* = M_{\bar{g}}$).

Avant d'attaquer la preuve du thèorème ci-dessous, il nous faut une courte discussion concernant les sommes directes hilbertiennes. Si $(H_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces de Hilbert, la *somme directe hilbertienne* des espaces H_i est

$$\bigoplus_{i \in I} H_i := \{x := (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} H_i |\ ||x||^2 := \sum_{i \in I} ||x_i||^2 < \infty\},$$

muni du produit hermitien

$$((x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} (x_i, y_i),$$

qui a un sens puisque la famille $((x_i, y_i))_{i \in I}$ est sommable par Cauchy-Schwarz. Attention à ne pas confondre $\bigoplus_{i \in I} H_i$ et la somme directe algébrique des H_i, qui est beaucoup plus petite (si I est infini et les H_i sont non nuls) que la somme directe hilbertienne! On laisse au lecteur le plaisir de se convaincre qu'on vient de définir un espace de Hilbert. Si H_i sont des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H, deux à deux orthogonaux, alors l'adhérence de l'espace engendré par les H_i est isomorphe à la somme directe hilbertienne des H_i.

Théorème 17.1.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $T \in B(H)$ un opérateur normal. Il existe un espace mesuré fini (X, Σ, μ), un opérateur unitaire $U : L^2(X, \mu) \to H$ et $g \in L^\infty(X, \mu)$ tels que $U^{-1}TU = M_g$.*

Proof. Soit A la C^*-algèbre unitaire engendrée par T dans $B(H)$. Si H' est un sous-espace fermé de H, on dit que $v \in H'$ est un *vecteur cyclique pour T dans H'* si $\overline{Av} = H'$, où $Av = \{T'(v) | T' \in A\}$. Noter qu'un tel espace H' est A-invariant (i.e. $T(H') \subset H'$ pour $T \in A$) et $(H')^\perp$ est aussi A-invariant, puisque A est stable par $T \mapsto T^*$.

Etape 1 Supposons d'abord qu'il existe un vecteur cyclique v pour T dans H. Montrons que l'on peut prendre $X = \sigma(T)$, un espace compact muni de sa tribu borélienne, $g(z) = z$ pour $z \in X$ et μ une mesure finie avec $\mu(X) = ||v||^2$. Nous allons utiliser intensivement le calcul fonctionnel du théorème 17.1.1.

Considérons la forme linéaire

$$\ell : C(X) \to \mathbb{C},\ \ell(f) = (f(T)v, v).$$

Montrons qu'elle est positive. En effet, si $f \in C(X)$ est positive alors on peut écrire $f = |g|^2$ pour un $g \in C(X)$, et alors

$$\ell(f) = (g^* g(T)v, v) = (g(T)^* g(T)v, v) = ||g(T)v||^2 \geq 0.$$

Par le théorème de Riesz-Markov-Kakutani il existe donc une mesure positive finie μ sur X telle que $\ell(f) = \int_X f d\mu$ pour tout $f \in C(X)$.

Ensuite, pour $f, g \in C(X)$ on a

$$(f(T)v, g(T)v) = (g(T)^* f(T)v, v) = \ell(\bar{g}f) = \int_X f\bar{g} d\mu = (f, g)_{L^2(X,\mu)},$$

donc $f \to f(T)v$ est une isométrie, qui s'étend par continuité en une isométrie $U : L^2(X, \mu) \to H$. L'image de U est fermée et contient Av, donc U est un opérateur unitaire. Il reste à montrer que $M_g = U^{-1}TU$. Par densité de $C(X)$ dans $L^2(X, \mu)$ il suffit de voir que $TU(f) = U(gf)$ pour $f \in C(X)$ (avec $g(z) = z$), ou encore $Tf(T)v = (gf)(T)v$, ce qui est clair.

Etape 2 Montrons qu'il existe une décomposition orthogonale $H = H_1 \oplus H_2 \oplus ...$ en sous-espaces fermés tels que chaque H_n possède un vecteur cyclique v_n pour T. En effet, par le lemme de Zorn il existe une famille $(H_i)_{\in I}$ de sous-espaces fermés de H, deux à deux orthogonaux, ayant des vecteurs cycliques pour A, et maximale pour ces propriétés. Comme H est séparable, on peut supposer que $I \subset \mathbb{N}$. Si H n'est pas la somme directe (au sens des espaces de Hilbert) des H_i, alors $H' = (\sum H_i)^\perp$ est A-invariant (car A est stable par passage à l'adjoint) non nul, et si $x \in H'$ est non nul, on peut ajouter le sous-espace $\overline{Ax}$ à la famille $(H_i)_i$, contredisant ainsi sa maximalité.

Etape 3 Considérons une décomposition comme dans l'étape 2. Quitte à renormaliser les vecteurs v_n, on peut supposer que $\sum ||v_n||^2 < \infty$. Par l'étape 1 il existe des mesures finies μ_n sur $Y = \sigma(T)$ et des opérateurs unitaires $U_n : L^2(Y, \mu_n) \to H_n$ tels que $U_n^{-1} T|_{H_n} U_n = M_h$, avec $h : Y \to \mathbf{C}, h(z) = z$. Considérons alors l'espace $X = \{1, 2, ...\} \times Y$, muni de la mesure produit μ (avec la mesure de comptage sur les entiers), donc

$$\int_X f d\mu = \sum_n \int_Y f_n d\mu_n,$$

pour toute fonction mesurable positive f et $f_n(t) = f(n,t)$ pour $t \in Y$. Notons que

$$\mu(X) = \sum_n \mu_n(Y) = \sum_n ||v_n||^2 < \infty.$$

On vérifie trivialement que l'on a un isomorphisme isométrique

$$V : L^2(X,\mu) \simeq \bigoplus_{n\geq 1} L^2(Y,\mu_n), f \mapsto (f_n), f_n(t) = f(n,t)$$

entre $L^2(X,\mu)$ et la somme directe hilbertienne des $L^2(Y,\mu_n)$.

La fonction $g : X \to \mathbb{C}, g(n,t) = h(t) = t$ est mesurable bornée et si l'on pose

$$U : L^2(X,\mu) \to H = \bigoplus H_n,\, U(f) = \sum_n U_n(f_n)$$

alors U est un opérateur unitaire (son inverse envoie $\sum w_n$, avec $w_n \in H_n$ sur $V^{-1}(\sum U_n^{-1}(w_n)))$ et on vérifie sans mal que $U^{-1}TU = M_g$. □

Exercice 17.1.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit A une sous-C^*-algèbre commutative unitaire de $B(H)$. Montrer que pour tout $x \in H$ non nul il existe une mesure de Radon positive μ sur $X = \hat{A}$ et un opérateur unitaire*

$$U : L^2(X,\mu) \to \overline{Ax}$$

tel que $U^{-1}TU = M_{\hat{T}}$ pour tout $T \in A$ (ici $Ax = \{T(x) | \, T \in A\}$).

Exercice 17.1.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit A une sous-C^*-algèbre commutative unitaire de $B(H)$. Montrer qu'il existe un espace mesuré fini (X,Σ,μ), des fonctions $f_T \in L^\infty(X,\Sigma,\mu)$ pour $T \in A$ et un opérateur unitaire $U : L^2(X,\Sigma,\mu) \to H$ tel que $U^{-1}TU = M_{f_T}$ pour $T \in A$.*

17.2 Positivité

Soit A une C^*-algèbre unitaire. On dit que $a \in A$ est *positif* si a est auto-adjoint (i.e. $a = a^*$) et $\sigma(a) \subset [0,\infty[$. On note A^+ l'ensemble des éléments positifs de A. Certaines parties de la preuve du résultat suivant sont très astucieuses et se simplifient nettement pour $A = B(H)$, comme nous allons le voir. Nous ferons un usage intensif du théorème 17.1.1 dans la preuve suivante.

Théorème 17.2.1. *Soit A une C^*-algèbre unitaire.*

a) A^+ est fermé dans A et stable par addition.

b) Pour tout $a \in A^+$ il existe un unique $b \in A^+$ tel que $a^2 = b$.

c) On a

$$A^+ = \{b^*b | \; b \in A\}.$$

Proof. a) Le point crucial est l'assertion suivante: si $a \in B_A$ est auto-adjoint, alors $a \in A^+$ si et seulement si $||e - a|| \leq 1$. En effet, il suffit de se rappeler que $||x|| = r(x) = \max_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda|$ et $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$ pour x auto-adjoint, donc $||e - a|| \leq 1$ si et seulement si $|1 - \lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \sigma(a)$, et comme par hypothèse $|\lambda| \leq 1$ pour $\lambda \in \sigma(a)$, cela équivaut à $\lambda \geq 0$ pour $\lambda \in \sigma(a)$, et donc à $a \in A^+$.

Prenons $a_n \in A^+$ qui convergent vers $a \in A$. Quitte à renormaliser, on peut supposer que $a_n \in B_A$. Clairement $a \in B_A$ est auto-adjoint, et comme $||e - a_n|| \le 1$ pour tout n, on a $||e - a|| \le 1$ et donc $a \in A^+$.

Ensuite, soient $a, b \in A^+$ et montrons que $a + b \in A^+$. On peut supposer que $a, b, a+b \in B_A$ (diviser a, b par un scalaire convenable). Alors $||e-a|| \le 1, ||e-b|| \le 1$, donc $||e - \frac{a+b}{2}|| \le 1$ et donc $\frac{a+b}{2} \in A^+$ et $a + b \in A^+$.

b) Comme $f(x) = \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\sigma(a)$, on peut poser $b = f(a) \in A$. Comme $f(x)^2 = x$ pour $x \in \sigma(a)$, on a $b^2 = a$, et $b \in A^+$ car clairement b est auto-adjoint et $\sigma(b) = f(\sigma(a)) \subset [0, \infty[$.

Pour l'unicité, soit $c \in A^+$ tel que $c^2 = a$, alors c commute avec a donc aussi avec $b = f(a)$ (puisque $f(a)$ est limite uniforme d'expressions polynômiales en a). Mais alors la C^*-algèbre unitaire B engendrée par b et c est commutative donc isomorphe à $C(\hat{B})$ via la transformée de Gelfand, et donc il suffit de voir que $\hat{b} = \hat{c}$ pour conclure que $b = c$. Mais $\hat{b}^2 = \hat{c}^2 = \hat{a}$ et $\hat{b}, \hat{c}$ sont des fonctions à valeurs positives car $b, c \in A^+$, donc $\hat{b} = \hat{c}$.

c) Par b) tout $a \in A$ est de la forme b^*b. Si b est normal, il est trivial de voir que $b^*b \in A^+$, puisque $\sigma(b^*b) = f(\sigma(b))$ avec $f(x) = x\bar{x} = |x|^2$. Quand b n'est pas normal l'argument est franchement subtil...

Prenons deux fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $fg = 0$ et $f^2 - g^2 = \mathrm{id}$, par exemple $f(t) = 1_{t \ge 0}\sqrt{t}$ et $g(t) = 1_{t<0}\ \sqrt{-t}$. Soit $x = f(b^*b)$ et $y = g(b^*b)$, alors x, y sont auto-adjoints et $xy = yx = 0$, $x^2 - y^2 = b^*b$. Soit $c = by$, alors $c^*c = yb^*by = y(x^2-y^2)y = -y^4$, donc $-c^*c \in A^+$. Mais dans une algèbre de Banach A on a toujours $\sigma(uv) \setminus \{0\} = \sigma(vu) \setminus \{0\}$ pour tous $u, v \in A$ (exercice amusant et pas difficile), donc on a aussi $-cc^* \in A^+$ et donc par a) on a $-(cc^* + c^*c) \in A^+$. Si l'on écrit $c = u + iv$ avec u, v auto-adjoints, alors $cc^* + c^*c = 2u^2 + 2v^2$, et $2u^2 + 2v^2 \in A^+$ par a). Donc le spectre de $cc^* + c^*c$ est réduit à $\{0\}$ et comme cet élément est auto-adjoint, on doit avoir $cc^* + c^*c = 0$, donc $2u^2 + 2v^2 = 0$. Ainsi $u^2 \in A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$ et donc $u = 0$ par le même argument utilisant le spectre de u. On obtient de même $v = 0$ et donc $c = 0$, ensuite $y^4 = 0$, donc (en regardant encore le spectre de y) $y = 0$ et donc $b^*b = x^2$, qui est trivialement dans A^+. Ouf!!! $\square$

Le résultat suivant montre que la notion de positivité pour les C^*-algèbres est compatible avec la définition usuelle d'un opérateur auto-adjoint positif.

Théorème 17.2.2. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H.*

a) On a $T \in B(H)^+$ si et seulement si $(Tx, x) \ge 0$ pour tout $x \in H$.

b) On a $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$,

$$||T|| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

et

$$\max \sigma(T) = \sup_{||x||=1} (Tx, x), \ \min \sigma(T) = \inf_{||x||=1} (Tx, x).$$

Proof. a) Si $T \in B(H)^+$ le théorème 17.2.1 fournit un $S \in B(H)^+$ tel que $T = S^2$, et alors $(Tx, x) = (S^2x, x) = (Sx, Sx) \ge 0$. Supposons que $(Tx, x) \ge 0$ pour tout x et montrons que $\sigma(T) \subset [0, \infty[$. Soit donc $\lambda < 0$ et montrons que $S = T - \lambda$ est inversible. Mais $(Sx, x) \ge -\lambda||x||^2$ pour tout x, en particulier S est injectif et $||Sx|| \ge -\lambda||x||$. On en déduit facilement que $S(H)$ est fermé dans H (car si $(S(x_n))$ converge, alors (x_n) est de Cauchy, donc converge). Mais $S(H)$ est aussi dense dans

H, car si $y \in H$ est orthogonal à $S(H)$ alors $(Sy, y) = 0$ et donc $-\lambda||y||^2 \leq 0$ et $y = 0$. Donc S est bijectif et donc inversible.

b) Le premier point découle de la théorie générale. Ensuite, il suffit de voir que $\min \sigma(T) = \inf_{||x||=1}(Tx, x)$, car on peut appliquer ce résultat à $-T$ pour obtenir $\max \sigma(T) = \sup_{||x||=1}(Tx, x)$. Soit $a = \inf_{||x||=1}(Tx, x)$ et $S = T - a$, alors $(Sx, x) \geq 0$ pour tout x, donc par a) on a $\sigma(T) - a = \sigma(S) \subset [0, \infty[$ et donc $\sigma(T) \subset [a, \infty[$. Si $a \notin \sigma(T)$ alors S est inversible et positif, donc il existe U inversible et positif tel que $U^2 = S$ (théorème 17.2.1). Mais alors pour tout $||x|| = 1$ on a $(Sx, x) = ||Ux||^2 \geq ||x||^2/||U^{-1}||^2 = 1/||U^{-1}||^2$, ce qui contredit le fait que $\inf_{||x||=1}\ (Sx, x) = 0$. Donc $a \in \sigma(T)$ et $a = \min \sigma(T)$. $\square$

Noter que le point a) du théorème ci-dessus montre immédiatement que $B(H)^+$ est fermé dans $B(H)$ et stable par addition, ainsi que le fait que $T^*T \in B(H)^+$ pour tout $T \in B(H)$, puisque $(T^*Tx, x) = ||T^*x||^2 \geq 0$ pour tout $x \in H$. Donc pour $A = B(H)$ le théorème 17.2.1 n'est pas très fatigant...

Proposition 17.2.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in B(H)^+$.*

a) Pour toute fonction continue $f : \sigma(T) \to [0, \infty[$ on a $f(T) \in B(H)^+$.

b) Pour tout $n \geq 1$ il existe $S \in B(H)^+$ tel que $S^n = T$.

Proof. a) Conséquence directe du théorème spectral "abstrait" 17.1.1, qui montre que $f(T)$ est auto-adjoint, à spectre contenu dans $[0, \infty[$.

b) Appliquer a) à $f(x) = x^{1/n}$, définie et continue sur $\sigma(T) \subset [0, \infty[$. $\square$

Exercice 17.2.1. *Montrer qu'un opérateur S comme dans la proposition ci-dessus est unique.*

Théorème 17.2.3. *(décomposition polaire) Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in B(H)$.*

a) Il existe un unique $A \in B(H)^+$ tel que $A^2 = T^*T$.

b) Il existe $U \in B(H)$ avec $||U|| \leq 1$ et $T = UA, A = U^*T$.

Proof. a) Comme $T^*T \in B(H)^+$, le point a) découle du théorème 17.2.1.

b) Pour tout $x \in H$ on a $||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (x, A^2x) = (x, T^*Tx) = ||Tx||^2$, ce qui permet de définir une isométrie $U : A(H) \to H$ par $U(Ax) = Tx$. Elle se prolonge uniquement en une isométrie $U : \overline{A(H)} \to H$. On pose $U = 0$ sur $\overline{A(H)}^\perp$. Il est clair que $||U|| \leq 1$ et $T = UA$. Montrons que $A = U^*T$. On veut montrer que pour tout $x \in H$ on a $A(x) = U^*(Tx)$, ou encore $(y, A(x)) = (U(y), T(x))$ pour $x, y \in H$. Si $y \in \overline{A(H)}^\perp$ cela est clair, et il suffit (par continuité) de traiter le cas $y = A(z) \in A(X)$. On veut donc vérifier que $(A(z), A(x)) = (T(z), T(x))$, qui est immédiat car $A^2 = T^*T$. $\square$

On appelle la décomposition $T = UA$ ci-dessus une *décomposition polaire de T*. Attention au fait qu'en général U n'est pas unitaire (c'est bien entendu le cas si T est inversible), et il n'est pas unique non plus. Par contre A est canonique et on le note $A = |T| = \sqrt{T^*T}$.

Dans les exercices ci-dessous H est un espace de Hilbert.

Exercice 17.2.2. *a) Montrer que tout $T \in B_{B(H)}$ auto-adjoint est la moyenne de deux opérateurs unitaires.*

b) Montrer que tout $T \in B(H)$ est une combinaison linéaire de quatre opérateurs unitaires.

Exercice 17.2.3. *Montrer que $T \in B(H)$ est auto-adjoint si et seulement si e^{ixT} est unitaire pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 17.2.4. *a) Montrer que $T \in B(H)$ est normal si et seulement si $||Tx|| = ||T^*x||$ pour tout $x \in H$.*

b) Montrer que pour une projection $P \in B(H)$ les assertions suivantes sont équivalentes

i) P est auto-adjoint

ii) P est normal

iii) $||P|| = 1$.

Exercice 17.2.5. *Soit $T \in B(H)$ un opérateur auto-adjoint. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans $\sigma(T)$ si et seulement si*

$$\inf_{||x||=1} ||(\lambda - T)(x)|| = 0.$$

Exercice 17.2.6. *Soit $T \in B(H)$ un opérateur auto-adjoint et soit $F \subset H$ un sous-espace fermé de H, stable par T. Montrer que $F^\perp$ est stable par T et que $\sigma(T) = \sigma(T|_F) \cup \sigma(T|_{F^\perp})$.*

17.3 Opérateurs compacts

Soient X, Y des espaces de Banach. On dit que $T \in L(X,Y)$ est un *opérateur compact* si $T(B_X)$ est relativement compact (i.e. d'adhérence compacte) dans Y. De manière équivalente, T est compact si et seulement si pour toute suite bornée (x_n) dans X la suite $(T(x_n))$ possède une sous-suite convergente.

Exercice 17.3.1. *On munit $C^n([0,1])$ de la norme*

$$||f||_n = \sum_{k=0}^{n} ||f^{(k)}||_\infty.$$

Montrer que l'inclusion $C^n([0,1]) \to C^{n-1}([0,1])$ est compacte.

Exercice 17.3.2. *Soit $1 \le p < \infty$ et soit (a_n) une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ si et seulement si l'opérateur*

$$T : \ell^p \to \ell^p, T((x_n)) = (a_n x_n)$$

est compact.

On note $K(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $L(X,Y)$, et $K(X) = K(X,X)$. On munit dans la suite $L(X,Y)$ de la topologie définie par la norme d'opérateur (c'est donc un espace de Banach).

Proposition 17.3.1. *Soient X, Y, Z des espaces de Banach*

a) Soient $A \in L(X,Y), B \in L(Y,Z)$. Si A ou B est compact, alors BA est compact.

b) $K(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(X,Y)$.

c) $K(X)$ est un idéal fermé de $B(X)$.

d) La limite d'une suite convergente d'opérateurs de rang fini dans $L(X,Y)$ est compacte.

e) Si X, Y sont des espaces de Hilbert alors tout opérateur compact $T : X \to Y$ est limite uniforme d'opérateurs de rang fini.

Proof. a) C'est parfaitement trivial en utilisant la caractérisation avec des suites.

b) Il est évident que $K(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $L(X,Y)$. Soit (T_i) une suite dans $K(X,Y)$ qui converge vers $T \in L(X,Y)$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit n tel que $||T_n - T|| < \varepsilon$. Comme T_n est compact, on peut trouver un nombre fini de points $y_1, ..., y_n \in Y$ tels que $T_n(B_X) \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon/2)$. Mais alors $T(B_X) \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$, donc $T(B_X)$ est precompact et T est compact.

c), d) Cas particulier de a) et b) (il est évident qu'un opérateur de rang fini est compact, car toute partie bornée d'un espace de dimension finie est relativement compacte).

e) Soit $T \in K(X,Y)$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons construire un opérateur de rang fini S tel que $||S-T|| < \varepsilon$. Il existe $y_1, ..., y_n \in Y$ tels que $T(B_X) \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon/2)$. Soit $p : Y \to F$ la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(y_1, ..., y_n)$ et posons $S = p \circ T$. Soit $x \in B_X$ et soit i tel que $||T(x) - y_i|| < \varepsilon/2$. Alors

$$||T(x)-S(x)|| \leq ||T(x)-y_i|| + ||p(T(x)) - p(y_i)|| \leq ||T(x)-y_i|| + ||T(x)-y_i|| < \varepsilon,$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 17.3.1. On dit qu'un espace de Banach Y a la *propriété d'approximation* si pour tout Banach X, tout opérateur compact $T \in K(X,Y)$ est limite uniforme d'opérateurs de rang fini. Un résultat célèbre et très difficile d'Enflo affirme l'existence d'un espace de Banach séparable sans la propriété d'approximation. En fait un espace séparable sans base de Schauder est automatiquement sans la propriété d'approximation (excellent exercice!). Un très joli (mais très difficile aussi...) résultat de Szankovski affirme que $B(H)$ (muni de la norme d'opérateur) est un Banach sans la propriété d'approximation pour tout espace de Hilbert de dimension infinie H.

Théorème 17.3.2. *(Schauder) Si X, Y sont des espaces de Banach et $T \in L(X,Y)$ alors $T \in K(X,Y)$ si et seulement si $T' \in K(Y', X')$.*

Proof. Supposons que T est compact, donc $M = \overline{T(B_X)}$ est compact et $\mathscr{F} = \{\ell|_M |\ \ell \in B_{Y'}\}$ est une partie de $C(M)$ telle que $||f||_\infty \leq ||T||$ et f est 1-Lipschitzienne pour $f \in \mathscr{F}$. Par Arzela-Ascoli $\mathscr{F}$ est relativement compacte dans $C(M)$, donc pour toute suite (ℓ_n) dans $B_{Y'}$ la suite $(\ell_n|_M)$ possède une sous-suite $(\ell_{n_i}|_M)$ convergente dans $C(M)$. Comme $||T'(\ell) - T'(\ell')|| = ||\ell|_M - \ell'|_M||_\infty$, on en déduit que $(T'(\ell_{n_i}))$ est de Cauchy et T' est compact.

Si T' est compact, d'après ce que l'on vient de démontrer on sait que $T'' = (T')' : X'' \to Y''$ est compact. Mais $J_Y \circ T = T'' \circ J_X$, où $J_X : X \to X''$ et $J_Y : Y \to Y''$ sont les plongements isométriques canoniques. Donc $J_Y \circ T$ est compact et comme J_Y est une isométrie, on voit tout de suite que T est compact aussi. □

Proposition 17.3.2. *a) Tout opérateur compact $T \in K(X,Y)$ transforme les suites faiblement convergentes dans X en des suites fortement convergentes dans Y.*

b) Si X est réflexif (par exemple un espace de Hilbert), tout opérateur $T \in L(X,Y)$ qui transforme les suites faiblement convergentes dans X en des suites fortement convergentes est compact.

Proof. a) Il suffit de montrer que $||T(x_n)|| \to 0$ pour toute suite (x_n) faiblement convergente vers 0. Si $(T(x_n))$ ne tend pas vers 0, alors quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que $||T(x_n)|| \geq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ et pour tout n. Comme

(x_n) est bornée, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que $(T(x_n))$ converge vers un $y \in Y$, qui doit donc vérifier $||y|| \geq \varepsilon$. Pour tout $\ell \in Y'$ on a $\ell(T(x_n)) \to \ell(y)$, mais $\ell(T(x_n)) = (\ell \circ T)(x_n) \to 0$, car (x_n) tend faiblement vers 0. Donc $\ell(y) = 0$ pour tout $\ell \in Y'$ et donc $y = 0$, une contradiction.

b) Soit (x_n) une suite dans B_X. Comme X est réflexif, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que (x_n) converge faiblement vers un $x \in B_X$ (corollaire 7.4.4). Mais alors $(T(x_n))$ convergent fortement vers $T(x)$, donc T est compact. □

Exercice 17.3.3. *(Schur)*

a) Montrer que la convergente faible et forte sont équivalentes dans ℓ^1.

b) Montrer que si X *est un Banach réflexif, alors tout* $T \in L(X, \ell^1)$ *et tout* $T \in L(c_0, X)$ *est compact.*

Exercice 17.3.4. *Soit* (x_n) *une suite dans un Banach* X *et soit* (e_n) *la base canonique de* c_0. *Alors*

a) $\sum x_n$ *est FCC si et seulement si il existe* $T \in \mathscr{L}(c_0, X)$ *tel que* $T(e_n) = x_n$.

b) $\sum x_n$ *est CC si et seulement l'opérateur* T *dans a) est compact.*

17.4 Théorie de Riesz

Bien que très classiques et fondamentaux, les résultats établis dans ce paragraphe ne sont pas simples, et reposent sur un usage intensif et très astucieux du lemme de Riesz 4.2.2: si Y est un sous-espace vectoriel fermé d'un evn X, avec $Y \neq X$, alors il existe $x \in X$ de norme 1 tel que $d(x, Y) \geq 1/2$. Nous avons déjà vu (corollaire 4.2.1) que cela permet de démontrer que la boule unité d'un Banach de dimension infinie n'est jamais compacte, et donc l'identité d'un Banach de dimension infinie n'est jamais compacte.

Théorème 17.4.1. *(Riesz) Soit* X *un espace de Banach et* $T \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *et* $S = \lambda - T$. *Alors* $\ker(S)$ *est de dimension finie,* $S(X)$ *est fermé et de codimension finie dans* X *et*

$$\dim \ker(S) = \dim X/S(X).$$

En particulier on a l'alternative de Fredholm: $\lambda - T$ *est ou bien non injectif ou bien bijectif.*

Proof. Quitte à remplacer T par T/λ, on peut supposer que $\lambda = 1$.

Etape 1 Montrons que $N := \ker(S)$ est de dimension finie. Mais $T' = T|_N : N \to X$ est compact et $T'(v) = v$ pour $v \in N$, donc B_N est compact et N est de dimension finie (cf. la discussion ci-dessus).

Etape 2 Montrons que $S(X)$ est fermé dans X. Comme N est de dimension finie dans X, il possède un supplémentaire fermé X_1 dans X (en effet, soit $e_1, ..., e_n$ une base de N, par Hahn-Banach il existe $\ell_1, ..., \ell_n \in X'$ tels que $\ell_i(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_i$ pour $x_i \in \mathbb{C}$, et il suffit de poser $X_1 = \cap_{i=1}^n \ker(\ell_i)$). Soit $S_1 = S|_{X_1} : X_1 \to X$ la restriction de S, alors S_1 est injective et $S(X) = S_1(X_1)$, donc il suffit de voir que S_1 est d'image fermée. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $||S_1(x)|| \geq c||x||$ pour $x \in X_1$ (en effet, si $S_1(x_n) \to y$, alors $S_1(x_n - x_m)$ tend vers 0 quand $m, n \to \infty$, donc $x_n - x_m$ aussi et donc (x_n) converge vers un x tel que $S_1(x) = y$). Si cela n'est pas le cas il existe $x_n \in X_1$ de norme 1 tels que $S_1(x_n)$ tend vers 0, autrement dit $x_n - T(x_n) \to 0$. Mais T étant compact, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que $T(x_n)$ tend vers un $y \in X$, et alors $x_n \to y$, donc $||y|| = 1$ et $y = T(y)$, autrement dit $y \neq 0$, $S_1(y) = 0$ et $y \in X_1$, une contradiction avec l'injectivité de S_1.

Etape 3 Montrons que la suite $(N_k = \ker(S^k))$ est stationnaire. Supposons que ce n'est pas le cas, donc toutes les inclusions $N_{k-1} \subset N_k$ sont strictes et donc par le lemme de Riesz il existe $x_k \in N_k$ de norme 1 tel que $d(x_k, N_{k-1}) \geq 1/2$. Si $n > m$ alors

$$||T(x_n) - T(x_m)|| = ||x_n - x_m - S(x_n) + S(x_m)|| \geq 1/2$$

puisque $x_m, S(x_n), S(x_m) \in N_{n-1}$. Cela contredit la compacité de T.

Etape 4 Montrons que si $N = \ker(S) = \{0\}$ alors $S(X) = X$. Supposons que ce n'est pas le cas. Comme S est injectif, on en déduit que dans la suite $... \subset S^2(X) \subset S(X) \subset X$ toutes les inclusions sont strictes. De plus $S^n(X)$ est fermé dans X pour tout n, en appliquant l'étape 2 à l'opérateur compact $1 - S^n = 1 - (1-T)^n = nT - \binom{n}{2}T^2 + ...$ Par le lemme de Riesz il existe donc $x_k \in S^k(X)$ de norme 1 tel que $d(x_k, S^{k+1}(X)) \geq 1/2$. Mais alors en raisonnant comme dans l'étape 3 on voit que $||T(x_n) - T(x_m)|| \geq 1/2$ pour $n > m$, contredisant la compacité de T.

Etape 5 Nous avons déjà démontré le théorème si S est injectif. En général soit m tel que $V := N_m = N_{m+1}$ (un tel m existe par l'étape 3). Il est alors clair que $S(V) \subset V$, donc $T(V) \subset V$. L'opérateur $\bar{T} : X/V \to X/V$ est trivialement compact et $1 - \bar{T} = \bar{S}$ est injectif, donc $1 - \bar{T}$ est surjectif par l'étape 4. On en déduit que $X = S(X) + V$ et donc $X/S(X) \simeq V/V \cap S(X)$. Mais puisque $\ker(S^m) = \ker(S^{m+1})$ on a

$$V \cap S(X) = \{S(x)|\ S^m(S(x)) = 0\} = \{S(x)|\ S^m(x) = 0\} = \{S(x)|\, x \in V\} = S(V).$$

Ensuite, V est de dimension finie (par l'étape 1 appliquée à l'opérateur compact $1 - S^m$), donc par algèbre linéaire de base $\dim V/S(V) = \dim \ker(S : V \to V)$ et bien entendu $\ker(S : V \to V) = \ker(S : X \to X)$, donc en mettant tout ceci ensemble on obtient $\dim X/S(X) = \dim \ker(S)$. Ouf!!!

□

Théorème 17.4.2. *(Riesz-Schauder) Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $T \in K(X)$. Alors*

a) On a $0 \in \sigma(T)$ et pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ non nul on a $\ker(T - \lambda) \neq 0$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{C}|\ \ker(T - \lambda) \neq \{0\},\ \textit{et}\ |\lambda| > \varepsilon\}$$

est fini. Ainsi $\sigma(T)$ est au plus dénombrable et s'il est infini, ses éléments forment une suite qui tend vers 0.

c) Pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ non nul les espaces $N_n = \ker(T - \lambda)^n$ sont de dimension finie et il existe n_0 tel que $N_{n_0} = N_{n_0+1} = ...$

Proof. a) Si $0 \notin \sigma(T)$ alors T est inversible, donc $\mathrm{Id} = TT^{-1}$ est compact, contredisant le fait que X est de dimension infinie. La deuxième partie découle de l'alternative de Fredholm.

b) Supposons que ce n'est pas le cas, il existe donc une suite infinie (λ_n) avec $\lambda_n \neq \lambda_m$ pour $m \neq n$, $|\lambda_n| > \varepsilon$ et il existe $x_n \in X \setminus \{0\}$ tels que $T(x_n) = \lambda_n x_n$.

Soit $V_n = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Les valeurs propres étant deux à deux distinctes, les x_n forment une famille libre, donc $V_n \neq V_{n-1}$ pour tout n. Par le lemme de Riesz il existe $y_n \in V_n$ de norme 1 tel que $d(y_n, V_{n-1}) \geq 1/2$. Si l'on pose $z_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n$, alors $||z_n|| \leq 1/\varepsilon$ et nous allons montrer que $||T(z_n) - T(z_m)|| \geq 1/2$ pour tous $m \neq n$, ce qui permettra d'obtenir une contradiction avec le fait que T est compact.

Soient $n > m$, alors $T(z_m) \in V_m \subset V_{n-1}$. D'autre part si l'on pose $y_n = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ alors $y_n - T(z_n) = \sum_{i<n} (1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_n}) a_i x_i \in V_{n-1}$, donc

$$||T(z_n) - T(z_m)|| = ||y_n + (T(z_n) - y_n - T(z_m)|| \geq d(y_n, V_{n-1}) \geq 1/2.$$

c) Cela a été déjà vu dans la preuve du théorème ci-dessus. □

Si X, Y sont des espaces de Banach, on dit qu'un opérateur $T \in L(X, Y)$ est un *opérateur de Fredholm* si $\ker(T)$ est de dimension finie et si $T(X)$ est de codimension finie dans Y. Un exercice amusant montre alors que $T(X)$ est automatiquement fermé dans Y. On définit *l'indice* d'un opérateur de Fredholm par

$$\mathrm{ind}(T) = \dim \ker(T) - \mathrm{codim}\, \mathrm{Im}(T).$$

Ce qui précède montre que si $T \in K(X)$ est un opérateur compact alors $1 - T$ est de Fredholm d'indice 0. Les opérateurs de Fredholm ont des propriétés très sympathiques, comme le montre le théorème suivant, dont nous allons admettre la preuve car elle est assez fastidieuse. On note $\mathscr{F}(X, Y) \subset L(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de X dans Y.

Théorème 17.4.3. *a) L'ensemble $\mathscr{F}(X, Y)$ est stable par passage à l'adjoint, et* $\mathrm{ind}(T) = -\mathrm{ind}(T^*)$ *pour $T \in \mathscr{F}(X, Y)$.*

b) Un opérateur $T \in L(X, Y)$ est de Fredholm si et seulement s'il existe $F \in L(Y, X)$ tel que $1 - FT$ et $1 - TF$ soient des opérateurs compacts.

c) Si $A \in \mathscr{F}(X, Y)$ et $B \in \mathscr{F}(Y, Z)$ alors $BA \in \mathscr{F}(X, Z)$ et $\mathrm{ind}(BA) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B)$.

d) Si $T \in \mathscr{F}(X, Y)$ et $K \in K(X, Y)$ alors $T + K \in \mathscr{F}(X, Y)$ et $\mathrm{ind}(T + K) = \mathrm{ind}(T)$.

e) Soit $T \in \mathscr{F}(X, Y)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $A \in L(X, Y)$ avec $||A|| < \varepsilon$ on ait $A + T \in \mathscr{F}(X, Y)$ et $\mathrm{ind}(A + T) = \mathrm{ind}(T)$.

Notons simplement $\mathscr{F}(X) = \mathscr{F}(X, X)$.

Corollaire 17.4.1. *$\mathscr{F}(X)$ est ouvert dans $B(X)$ et $\mathscr{F}(X)/K(X)$ s'identifie au groupe des inversibles de l'algèbre de Calkin $B(X)/K(X)$. De plus $T \mapsto \mathrm{ind}(T)$ induit un morphisme de groupes $\mathscr{F}(X)/K(X) \to \mathbb{Z}$.*

Exercice 17.4.1. *Donner un exemple d'opérateur compact injectif sur un espace de Hilbert, de rayon spectral nul (et donc sans valeur propre).*

17.5 Quelques classes remarquables d'opérateurs compacts

Dans la suite nous allons travailler dans un espace de Hilbert H. Une classe particulièrement sympathique d'opérateurs compacts est celle des opérateurs compacts auto-adjoints, pour lesquels tout se passe comme en dimension finie:

Théorème 17.5.1. *Soit T un opérateur compact auto-adjoint sur un espace de Hilbert H.*

a) H possède une base orthonormale de vecteurs propres pour T. Les valeurs propres non nulles de T forment un ensemble au plus dénombrable, qui contient $||T||$ ou $-||T||$. Si cet ensemble est infini, il forme une suite qui tend vers 0.

b) Si H est séparable, il existe une base orthonormale (e_n) de H et des réels (λ_n) qui tendent vers 0 tels que

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n (x, e_n) e_n, \ \forall x \in H.$$

De plus, pour $\lambda \notin \sigma(T)$ on a

$$(\lambda - T)^{-1}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(x, e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n.$$

Réciproquement, si (λ_n) est une suite de réels qui tendent vers 0 et si $T \in B(H)$ vérifie

$$T(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n (x, e_n) e_n, \ \forall x \in H$$

pour une certaine base orthonormale (e_n) de H, alors T est compact auto-adjoint.

Proof. a) Le fait que les valeurs propres non nulles de T forment un ensemble au plus dénombrable, qui contient $||T||$ ou $-||T||$ est une conséquence du théorème de Riesz-Schauder (th. 17.4.2) et du fait que $||T|| = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ et $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Le théorème de Riesz-Schauder montre aussi que s'il y a une infinité de valeurs propres alors elles forment une suite qui tend vers 0.

Il reste à voir que H possède une base orthonormale de vecteurs propres. Soit $N_\lambda = \ker(T - \lambda)$. Le point clé est que N_λ et N_μ sont orthogonaux si $\lambda \neq \mu$. En effet, si $x \in N_\lambda$ et $y \in N_\mu$, alors $(Tx, y) = (x, Ty)$ force $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ et donc $(x, y) = 0$.

Pour tout λ tel que $N_\lambda \neq 0$ prenons une base orthonormale B_λ de N_λ et considérons $B = \cup_\lambda B_\lambda$. Alors B est une famille orthonormale formée de vecteurs propres de T, et on peut conclure si l'on montre que $F = \mathrm{Vect}(B)^\perp$ est nul. Mais $T(F) \subset F$ et $T' = T|_F : F \to F$ est un opérateur compact auto-adjoint. Si $F \neq 0$, alors $||T'||$ ou $-||T'||$ est une valeur propre de T' et donc de T (par la première étape de l'argument appliquée à T'). Autrement dit il existe $\lambda \neq 0$ tel que $N_\lambda \cap F \neq 0$, ce qui est absurde puisque F est orthogonal à tout espace propre!

b) Par a) il existe une base orthonormale (e_n) et des réels λ_n tels que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Soit $x \in H$, alors $x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$ donc

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n (x, e_k) T(e_k) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n (x, e_n) e_n.$$

Si $\lambda \notin \sigma(T)$, alors (comme $\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$) il existe $\delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_n| > \delta$ pour tout n, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|(x, e_n)|^2}{|\lambda - \lambda_n|^2}$ converge et donc $x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{(x, e_n)}{\lambda - \lambda_n} e_n$ définit un opérateur confinu S, et on voit tout de suite que $(\lambda - T)S = S(\lambda - T) = \mathrm{id}$ en testant sur chaque e_n.

La dernière partie est facile et laissée au lecteur. □

Une autre classe très importante d'opérateurs compacts est celle des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Soit H un espace de Hilbert séparable (pour simplifier). On dit qu'un opérateur $T \in HS(H)$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt (ou HS)* s'il existe une base orthonormale (on écrira bon dans la suite au lieu de base orthonormale) (e_n) de H telle que

$$\sum_n ||Te_n||^2 < \infty.$$

On note $HS(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H.

Théorème 17.5.2. *a) Si $T \in HS(H)$ alors*

$$||T||_{HS} := (\sum_{n\geq 1} ||Te_n||^2)^{1/2}$$

ne dépend pas du choix de la base orthonormale (e_n), $T^* \in HS(H)$ et $||T||_{HS} = ||T^*||_{HS}$.

b) $HS(H)$ est un idéal bilatère de $B(H)$, contenu dans l'idéal $K(H)$ et

$$\max(||BT||_{HS}, ||TB||_{HS}) \leq ||B|| \cdot ||T||_{HS}, \forall T \in HS(H), B \in B(H).$$

c) On a $||T||_{HS} = ||U^{-1}TU||_{HS}$ pour $T \in HS(H)$ et $U \in U(H)$.

d) L'application

$$\mathrm{Tr} : HS(H) \times HS(H) \to \mathbb{C}, \mathrm{Tr}(S, T) = \sum_n \langle Se_n, T^*e_n\rangle$$

est bien définie (la série converge absolument), ne dépend pas du choix du bon (e_n), est bilinéaire symétrique et

$$|\mathrm{Tr}(S, T)| \leq ||S||_{HS} \cdot ||T||_{HS}.$$

Proof. a) Soit (e_n) une bon pour laquelle $\sum ||Te_n||^2 < \infty$ et soit (f_n) une bon quelconque. En appliquant deux fois l'identité de Plancherel on obtient

$$\sum ||Te_n||^2 = \sum_{n,k} |(Te_n, f_k)|^2 = \sum_{n,k} |(e_n, T^*f_k)|^2 = \sum_k ||T^*f_k||^2.$$

En particulier T^* est HS et $\sum ||T^*f_k||^2$ ne dépend pas du choix du bon (f_n). En appliquant ce résultat à T^* au lieu de T on obtient que $(T^*)^* = T$ est HS (cela nous fait une belle jambe!) et $\sum ||(T^*)^*f_k||^2 = \sum ||Tf_k||^2$ ne dépend pas du choix du bon (f_k).

b) Soit $T \in HS(H)$ et $B \in B(H)$, alors pour tout bon (e_n) on a

$$\sum ||BTe_n||^2 \leq \sum ||B||^2 \sum ||Te_n||^2 = ||B||^2 \cdot ||T||^2_{HS},$$

donc $BT \in HS(H)$ et $||BT||_{HS} \leq ||B|| \cdot ||T||_{HS}$.

Ensuite, en appliquant ce qui précède à T^* (qui est HS par a)) et B^* on obtient que $B^*T^* = (TB)^* \in HS(H)$, donc par a) on a $TB \in HS(H)$, et

$$||TB||_{HS} = ||(TB)^*||_{HS} = ||B^*T^*||_{HS} \leq ||B^*|| \cdot ||T^*||_{HS} = ||B|| \cdot ||T||_{HS}.$$

Montrons aussi que si $S, T \in HS(H)$ alors $S + T \in HS(H)$. Mais si (e_n) est un bon de H, alors $||(S + T)e_n||^2 \leq 2(||Se_n||^2 + ||Te_n||^2)$, ce qui permet de conclure.

Enfin, montrons que tout $T \in HS(H)$ est compact. Soit (e_n) une bon de H et soit $T_n \in B(H)$ l'opérateur de rang fini défini par

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (T(x), e_k) e_k.$$

Pour tout x on a

$$||T(x) - T_n(x)||^2 = \sum_{k>n} |(Tx, e_k)|^2 = \sum_{k>n} |(x, T^* e_k)|^2 \leq \sum_{k>n} ||x||^2 \cdot ||T^* e_k||^2,$$

donc $||T - T_n||_\infty$ tend vers 0 et T est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, donc compact.

c) Il suffit de remarquer que U transforme chaque bon de H en une bon de H, et d'utiliser le point a).

d) La convergence absolue de la série et la majoration découlent simplement de Cauchy-Schwarz et du point a)

$$\sum |(Se_n, T^* e_n)| \leq \sum ||Se_n|| \cdot ||T^* e_n|| \leq \sqrt{\sum ||Se_n||^2} \cdot \sqrt{\sum ||T^* e_n||^2}$$

$$= ||S||_{HS} \cdot ||T^*||_{HS} = ||S||_{HS} \cdot ||T||_{HS}.$$

L'argument pour l'indépendance est semblable à celui du point a): si (e_n) et (f_n) sont des bon, alors en utilisant le fait que $(x, y) = \sum (x, e_n) \overline{(y, e_n)}$ et pareil avec les f_k on obtient (toutes les manipulations sont justifiées car toutes les séries convergent absolument)

$$\sum (Se_n, T^* e_n) = \sum_{n,k} (Se_n, f_k) \overline{(T^* e_n, f_k)} = \sum (Se_n, f_k)(f_k, T^* e_n) = \sum (Se_n, f_k)(Tf_k, e_n)$$

et le même argument montre que la somme ci-dessus n'est rien d'autre que $\sum (Tf_k, S^* f_k)$, donc

$$\sum (Se_n, T^* e_n) = \sum (Tf_k, S^* f_k).$$

Si l'on spécialise $f_n = e_n$ on obtient $\sum (Se_n, T^* e_n) = \sum (Te_n, S^* e_n)$ pour tout bon (e_n). En appliquant ce résultat au bon (f_k) on obtient enfin

$$\sum (Se_n, T^* e_n) = \sum (Tf_k, S^* f_k) = \sum (Sf_k, T^* f_k),$$

ce qui permet de conclure (on a démontré en passant que $\mathrm{Tr}(S, T) = \mathrm{Tr}(T, S)$. $\square$

Théorème 17.5.3. *(Grothendieck-Lidskii) Soit $T \in HS(H)$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les valeurs propres non nulles de T, avec leurs multiplicités. Soient f, g des fonctions analytiques sur un voisinage de $\sigma(T)$, avec $f(0) = g(0) = 0$. Alors $f(T), g(T) \in HS(H)$ et*

$$\mathrm{Tr}(f(T), g(T)) = \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) g(\lambda_n),$$

la série étant absolument convergente.