2023 Differential Geometry- TD 15

1. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, de coordonées $(X^1, \ldots, X^n)$. Il est dit *incompressible* si sa divergence est nulle, c'est-à-dire si $\sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \equiv 0$. Montrer qu'alors la différentielle (spatiale) du flot de X a pour déterminant 1.

课上已讲

2. Suppose M is a smooth manifold and $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Let φ_t be the flow of X.
   1. If Y is invariant under the flow φ_t of X, i.e., $(\varphi_t)_{*,p}(Y_p) = Y_{\varphi_t(p)}$, show that X and Y commute (i.e., $[X, Y] = 0$).
   2. For any (t_0, p) in the domain of φ, there holds
   $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} (\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}) = (\varphi_{-t_0})_{*,\varphi_{t_0}(p)}\left((\mathcal{L}_X Y)_{\varphi_{t_0}(p)}\right).$$
   3. If X and Y commute, show that Y is invariant under the flow φ_t of X. In particular, every smooth vector field is invariant under its own flow.

3. Nous allons montrer que le crochet de deux champs de vecteurs mesure le défaut de commutation de leurs flots à l'ordre 2. Soit X, Y des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de flots respectifs φ^X et φ^Y. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $\psi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ définie au voisinage de 0 par :
$$\psi_x(s,t) = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x).$$
   1– Vérifier que $\psi_x(0) = x$, $d_0\psi_x = 0$.

   2– Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$ proches de 0, on a,
$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,t) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)) + d(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X)_{\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x))]$$
   3– Montrer que $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi_x(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_x(0,0) = 0$, et $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\psi_x(0,0) = [X, Y](x)$.

4. Define vector fields X and Y on the plane by
$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}.$$
Compute the flows φ, ψ of X and Y, and verify that the flows do not commute by finding explicit open intervals J and K containing 0 such that $\varphi_s \circ \psi_t$ and $\psi_t \circ \varphi_s$ are both defined for all $(s,t) \in J \times K$, but they are unequal for some such (s,t).

5. *Théorème de redressement d'un champ de vecteurs* (see lecture notes)

On montre qu'un champ de vecteurs sans point d'annulation sur une variété peut être représenté localement par un champ de vecteurs constant.

1– Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Notons φ_t le flot local de X. Montrer que l'application $F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

2– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X.

3– Soit M une variété C^∞ de dimension n, X un champ de vecteurs C^∞ sur M, et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi_*X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}|_V$.

4– En déduire qu'il existe des champs de vecteurs $X_2, \cdots, X_n$ tels que $(X, X_2, \cdots, X_n)$ soit une base de l'espace tangent sur un voisinage de x.

6. Redressement simultané de champs de vecteurs qui commutent

Soit M une variété et $X_1, \dots, X_k$ des champs de vecteurs sur M. On suppose qu'au voisinage d'un point $x_0 \in M$, la famille $(X_1(x), \dots, X_k(x))$ est libre et $[X_i, X_j](x) = 0$ pour $i \neq j$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe alors un difféomorphisme ψ d'un voisinage U de x_0 vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, autrement dit tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \psi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

1– Supposons dans un premier temps que la variété ambiente M est $\mathbb{R}^n$, que le point base x_0 est 0 et que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ que $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit F l'application définie au voisinage de 0 par la formule

$$F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

a) Montrer F est un difféomorphisme local en 0.

b) Pour $i = 1, \dots, k$, calculer le poussé en avant $F_\star \frac{\partial}{\partial x_i}$.

2– Conclure dans le cas général.

1.

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\partial_t \varphi(t,x) = X(\varphi(t,x)) \qquad d\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\partial_t \, d\varphi(e_i) = dX|_{\varphi(t,x)} \circ d\varphi|_t (e_i) \qquad X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \det(d\varphi_t) &= \det d\varphi_t \cdot \mathrm{tr}\left((d\varphi_t)^{-1} \cdot \partial_t \, d\varphi_t \right) \\
&= \det(d\varphi_t) \cdot \mathrm{tr}\left((d\varphi_t)^{-1} \circ \left(dX|_{\varphi(t,x)} \circ d\varphi_t \right) \right) \\
&= \det(d\varphi_t) \cdot \mathrm{tr}\left(dX|_{\varphi(t,x)} \circ \underbrace{d\varphi_t^{-1} \circ d\varphi_t}_{= id} \right) \\
&= \det(d\varphi_t) \cdot \underbrace{\mathrm{tr}\left(dX|_{\varphi(t,x)} \right)}_{= 0}
\end{aligned}$$

3. 换个记号: $\varphi = \varphi^X$, $\psi = \varphi^Y$, $\Phi = \psi_x$

(1) • $\psi_0(x) = x$, $\varphi_0(x) = x \Rightarrow \Phi(0,0) = x$

• $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \Phi(s,0)$, $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} \Phi(0,t)$

$$\Phi(s,0) = \psi_s \circ \varphi_0 \circ \psi_{-s} \circ \varphi_0(x) = \psi_s \circ \psi_{-s}(x) = x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Phi(s,0) = 0$$

$$\Phi(0,t) = \psi_0 \circ \varphi_t \circ \psi_0 \circ \varphi_{-t}(x) = \varphi_t \circ \varphi_{-t}(x) = x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \Phi(0,t) = 0$$

即 $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(0,0) = 0$. $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(0,0) = 0$.

(2). 在 (s_0, t_0) 点,

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s_0} \Phi(s, t_0) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s_0} \left(\psi_s \circ \varphi_{t_0} \circ \psi_{-s} \circ \varphi_{-t_0}(x)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=s_0} \psi_s \circ \varphi_{t_0} \circ \psi_{-s_0} \circ \varphi_{-t_0}(x) + \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=s_0} \left(\psi_{s_0} \circ \varphi_{t_0} \circ \psi_{-s} \circ \varphi_{-t_0}(x)\right)$$

$$= Y\left(\psi_{s_0} \circ \varphi_{t_0} \circ \psi_{-s_0} \circ \varphi_{-t_0}(x)\right) + (\psi_{s_0} \circ \varphi_{t_0})_* \left(-Y\left(\psi_{-s_0} \circ \varphi_{-t_0}(x)\right)\right)$$

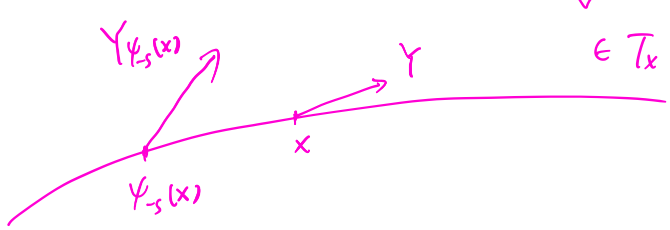
$$= Y\left(\Phi(s_0, t_0)\right) + (\psi_{s_0} \circ \varphi_{t_0})_* \left(-Y\left(\psi_{-s_0} \circ \varphi_{-t_0}(x)\right)\right)$$

(3) 由 (2) $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,0) = Y(\Phi(s,0)) + (\psi_s)_{*,\psi_{-s}(x)}\left(-Y(\psi_{-s}(x))\right)$

$$= Y(x) - (\psi_s)_{*,\psi_{-s}(x)}\left(Y(\psi_{-s}(x))\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\Phi(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\left(\frac{\partial}{\partial s}\Phi(s,0)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \underbrace{(\psi_s)_{*,\psi_{-s}(x)}\big(\underbrace{Y(\psi_{-s}(x))}_{\in T_{\psi_{-s}(x)}\mathbb{R}^n}\big)}_{\in T_x\mathbb{R}^n} = L_Y Y = [Y,Y] = 0$$



同理 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(0,0) = [X, X] = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Phi(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\Phi(s,t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\left(Y(\Phi(0,t)) + (\varphi_t)_{*,\varphi_{-t}(x)}(-Y_{\varphi_{-t}(x)})\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(\varphi_t)_{*,\varphi_{-t}(x)}(-Y_{\varphi_{-t}(x)})$$

$t \to -t$.

$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(\varphi_{-t})_{*,\varphi_t(x)}(Y_{\varphi_t(x)}) = L_X Y = [X, Y]$$

4. $X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ flow is φ_t , $\dot{\varphi}_t = X_{\varphi_t}$

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}^1(t)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{\varphi}^2(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}^1(t) = \varphi^1(t) \\ \dot{\varphi}^2(t) = -\varphi^2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^1(t) = \varphi^1(0)e^t \\ \varphi^2(t) = \varphi^2(0)e^{-t} \end{cases}$$

同理 对 Y. $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi}^1(t) = \psi^2(t) \\ \dot{\psi}^2(t) = \psi^1(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi^1(t) = \psi^1(0)\cosh t + \psi^2(0)\sinh t \\ \psi^2(t) = \psi^1(0)\sinh t + \psi^2(0)\cosh t \end{cases}$$

(note: $[X, Y] = -2y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y} \neq 0$.)

6

(1) 先看 $M=\mathbb{R}^n$ 时

(1.1) $1\le i\le k$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0} \varphi^{X_i}_{x_i}(0, 0, 0\cdots 0) = X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$k+1\le i\le n$. $\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0}(0, 0, 0\cdots x_i, 0\cdots 0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$

即 $F_* = id$ inverse function theorem $\Rightarrow$ __

(1.2). 记 $y = F(x)$.

$F_*\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^{X_1}_{x_1}\circ\varphi^{X_2}_{x_2}\cdots\varphi^{X_i}_{x_i}\circ\varphi^{X_k}_{x_k}(0\cdots 0, x_{k+1}, x_n)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^{X_i}_{x_i}\circ\varphi^{X_1}_{x_1}\circ\varphi^{X_2}_{x_2}\cdots\circ\widehat{\varphi^{X_i}_{x_i}}\circ\cdots\circ\varphi^{X_k}_{x_k}(0\cdots 0, x_{k+1}, x_n)\right)$

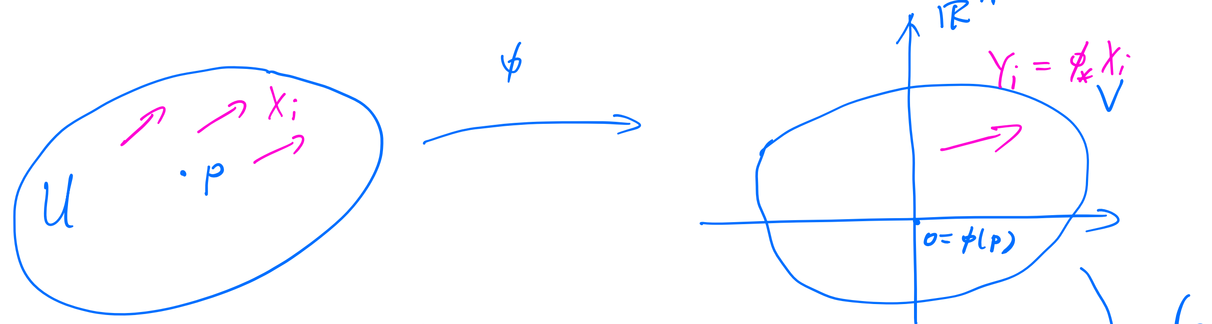
$= X_i\left(\varphi^{X_i}_{x_i}\circ\varphi^{X_1}_{x_1}\circ\varphi^{X_2}_{x_2}\cdots\circ\widehat{\varphi^{X_i}_{x_i}}\circ\cdots\circ\varphi^{X_k}_{x_k}(0\cdots 0, x_{k+1}, x_n)\right)$

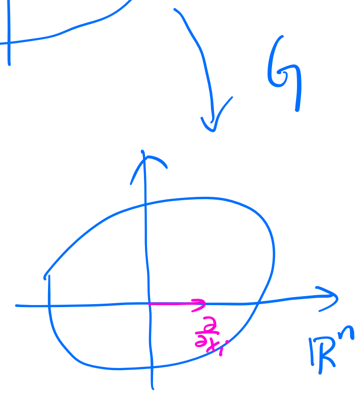
$= X_i(F(x))$

即 $F_*\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$

设 $G = F^{-1}$ inverse of F. $G_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

(2) 在 M 上





记 $\psi = G \circ \phi$

$$\psi_* X_i = G_* \circ \phi_* X_i = G_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$[X_i, X_j] = 0 \Rightarrow [Y_i, Y_j] = \phi_* [X_i, X_j] = 0$$