

# **Contrôlabilité Exacte de Systèmes Différentiels**

Théorie et approximation numérique

Master CSMI 2024-2025

Bopeng RAO

UFR de Mathématique et d'Informatique  
Université de Strasbourg

## Table des Matières

### Chapitre I Contrôlabilité de systèmes différentiels ordinaires

- §1 Introduction
- §2 Critère de Kalman
- §3 Contrôle en temps minimal

### Chapitre II Contrôlabilité de l'équation des ondes

- §1 Introduction
- §2 Problème aux limites homogènes
- §3 Observabilité
- §4 Problème aux limites non-homogènes
- §5 Contrôlabilité exacte
- §6 Optimalité du contrôle
- §7 Stabilisation

### Chapitre III Approximation numérique

- §1 Formulation duale
- §2 Méthode du gradient
- §3 Semi-discrétisation
- §4 Discrétisation sur 2-grilles
- §5 Discrétisation totale
- §6 Méthode du gradient conjugué
- §7 Méthode des éléments finis

### Bibliographie

- [1] P. Faure, Cours d'analyse numérique, Notes d'optimisation, Ecole polytechnique, 1983.
- [2] R. Glowinski; J.-L. Lions; J. He, Exact and approximate controllability for distributed parameter systems, Cambridge University Press, 2008.
- [3] E. B. Lee; L. Markus, Foundations of optimal control theory, John Wiley, 1967.
- [4] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Masson, 1988
- [5] J. Macki; A. Strauss, Introduction to optimal control theory, Springer, 1982.
- [6] E. Trélat, Contrôle optimal, théorie et applications, Vuilbert, 2005.

## Chapitre I    Contrôlabilité de systèmes différentiels ordinaires

§1 **Introduction.** Considérons le système différentiel ordinaire suivant

$$(1.1) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad u \in \mathcal{U}_{ad},$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état et  $u \in \mathbb{R}^m$  est le contrôle (ou la commande). On suppose que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  telle qu  $f(0, 0) = 0$ , ce qui entraîne que le contrôle nul  $u \equiv 0$  correspond à la trajectoire nulle  $x \equiv 0$ .

Concernant l'ensemble des contrôles (commandes) admissibles, les plus courants sont

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{ad} &= \{u \in L^2(0, \infty) \mid u(s) \in U\}, \\ \mathcal{U}_{ad} &= \{u \text{ continue par morceaux} \mid u(s) \in U\}, \\ \mathcal{U}_{ad} &= \{u \text{ constantes par morceaux} \mid u(s) \in U\} \end{aligned}$$

où  $U$  est un convexe compact de  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 1.1.** Un état initial  $x_0$  est contrôlable (ou commandable) à l'instant  $T > 0$ , s'il existe un contrôle (ou une commande)  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  telle que la solution du système

$$(1.2) \quad \dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0$$

satisfait la condition finale

$$x(T) = 0.$$

L'ensemble des états contrôlables à l'instant  $T > 0$  est noté par  $\mathcal{C}(T)$ . On dit que système (1.1) est contrôlable si

$$\mathcal{C} = \bigcup_{T>0} \mathcal{C}(T) = \mathbb{R}^n.$$

**Théorème 1.1.** L'ensemble des états contrôlables est connexe par arc, il est ouvert si et seulement si  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ .

**Preuve.** Soit  $x_0 \in \mathcal{C}$  un état contrôlable, alors il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  qui ramène  $x_0$  en 0 à l'instant  $T > 0$ . Soit  $y_0 \in \mathcal{C}$  un autre état ontrôlable, il existe un autre contrôle  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  qui ramène  $y_0$  en 0 en temps  $S$ . Les deux trajectoires se trouvent dans  $\mathcal{C}$ , leur composée relie  $x_0, y_0$ . Par conséquent  $\mathcal{C}$  est connexe par arc.

Supposons que  $0 \in \text{int } \mathcal{C}$ . Il existe une boule ouverte  $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$  contenue dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $x_0 \in \mathcal{C}$ , il existe un contrôle  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  qui ramène  $x_0$  à 0. D'après la continuité de solutions de l'équation différentielle par rapport aux données

initiales, il existe une boule ouverte  $B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  tel que la solution de l'équation

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y(0) = y_0 \in B(x_0, \delta)$$

satisfait la condition finale :

$$y(T) \in B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}.$$

Il existe donc un autre contrôle  $v \in \mathcal{U}_{ad}$  tel que la solution de l'équation

$$\dot{z} = f(z, v), \quad z(0) = y(T)$$

satisfait  $z(S) = 0$ . Ainsi l'état  $y_0$  est ramené par un contrôle  $u$  dans un voisinage  $B(x_0, \delta)$ , puis est ramené à 0 par un contrôle  $v$ . On conclut que  $y_0 \in \mathcal{C}$ , donc  $\mathcal{C}$  est ouvert.

Réciproquement, l'hypothèse  $f(0, 0) = 0$  assure que le contrôle nul  $u = 0$  ramène  $x_0 = 0$  à 0. Donc  $x_0 \in \mathcal{C}$ , puis  $x_0 \in \text{int } \mathcal{C}$ .

**Exemple.** On désigne par  $x$  la distance d'un train à la station d'arrivée et par  $u$  la force appliquée au train. Alors la trajectoire  $x$  obéit à la seconde loi de Newton

$$\ddot{x}(t) = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Ecrivons l'équation sous la forme d'un système d'ordre un :

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u. \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^t (t-s)u(s)ds; \quad y(t) = y_0 + \int_0^t u(s)ds.$$

En posant  $x(T) = y(T) = 0$ , on trouve l'ensemble des états contrôlables

$$x_0 = -y_0 T - \int_0^T (T-s)u(s)ds; \quad y_0 = - \int_0^T u(s)ds.$$

Supposons que le contrôlable  $u$  est de type bang-bang avec une seule commutation

$$\epsilon = \pm 1 \quad u(s) = \begin{cases} +\epsilon, & 0 \leq s \leq t_0, \\ -\epsilon, & t_0 \leq s \leq T. \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} y_0 &= - \int_0^T u(s)ds = -\epsilon t_0 + \epsilon(T - t_0) = \epsilon T - 2\epsilon t_0; \\ x_0 &= -y_0 T - \epsilon \int_0^{t_0} (T-s)ds + \epsilon \int_{t_0}^T (T-s)ds \\ &= -y_0 T + \epsilon(T - t_0)^2 - \epsilon T^2/2 = \epsilon t_0^2 - \epsilon T^2/2. \end{aligned}$$

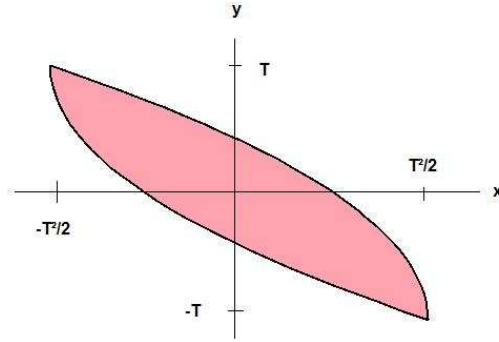
En éliminant le paramètre  $t_0$ , on obtient une équation cartésienne

$$x_0 = -\frac{\epsilon T^2}{4} + \frac{\epsilon y_0^2}{4} + \frac{T y_0}{2}, \quad -T \leq y_0 \leq T.$$

Soit encore

$$\begin{cases} \epsilon = 1 : & x_0 = \frac{1}{4}(y_0 + T)^2 - \frac{T^2}{2}, \quad -T \leq y_0 \leq T, \\ \epsilon = -1 : & x_0 = -\frac{1}{4}(y_0 - T)^2 + \frac{T^2}{2}, \quad -T \leq y_0 \leq T. \end{cases}$$

Les points  $(x_0, y_0)$  décrivent deux arcs de parabole qui constituent l'ensemble des états contrôlables  $\mathcal{C}(T)$ . Lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , on s'aperçoit intuitivement que  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2$ . Le train est donc contrôlable par une commande de type bang-bang.



**§2 Critère de Kalman.** Considérons le système linéaire

$$(2.1) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

où  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ , et  $B \in \mathbb{M}^{n \times m}$  sont deux matrices constantes et le contrôle  $u$  varie dans un sous ensemble  $\mathcal{U}_{ad}$  de l'espace des fonctions mesurables. La solution du système (2.1) est donnée explicitement par la formule de Duhamel

$$(2.2) \quad x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

D'où il vient

$$(2.3) \quad \mathcal{C}(T) = \left\{ x_0 : x_0 = - \int_0^T e^{-sA}Bu(s)ds \right\}$$

**Théorème de séparation.** Soit  $C$  un convexe fermé dans un espace affine de dimension finie  $E$  et  $x_0 \notin C$ . Il existe un plan d'appui  $H$  qui sépare  $C$  et  $x_0$  :

$$(x, p)_E \geq 0, \quad \forall x \in C; \quad (p, x_0)_E \leq 0.$$

**Théorème 2.1.** Supposons que l'ensemble des contraintes  $U = \mathbb{R}^m$ . Alors le système (2.1) est contrôlable si et seulement si

$$(2.4) \quad \text{rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

**Preuve.** Supposons que  $\text{rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$ . Alors il existe un vecteur non nul  $p \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$p^T [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0.$$

Ecrivons

$$e^{sA}B = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k B}{k!} s^k = \sum_{n-1 \geq k \geq 0} \frac{A^k B}{k!} s^k + \sum_{k \geq n} \frac{A^k B}{k!} s^k.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$p^T e^{sA}B \equiv 0 \quad \forall s \geq 0.$$

Par (2.3), on a

$$p^T x_0 = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

ceci implique  $p = 0$ .

Supposons que  $\text{rank } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$  et qu'il existe  $x_0 \notin \mathcal{C}$ . Comme  $\mathcal{C}$  est un convexe fermé, par Théorème de séparation, il existe un hyperplan d'appui qui sépare  $x_0$  et  $\mathcal{C}$  au sens large :

$$p^T x_0 \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{C} \implies \int_0^T p^T e^{-sA} B u(s) ds \leq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Posons

$$u(s) = B^T e^{-sA^T} p,$$

on obtient

$$\int_0^T \|B^T e^{-sA^T} p\|^2 ds \leq 0.$$

Il vient que

$$p^T e^{-sA} B = 0,$$

puis

$$\frac{d^k}{ds^k} \left( p^T e^{-sA} B \right) \Big|_{s=0} = p^T A^k B = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

En particulier, on obtient la condition suivante

$$p^T [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0$$

qui contredit l'hypothèse (2.4).

**Théorème 2.2.** Supposons que  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$  et la condition de Kalman (2.4) est vérifiée. Supposons que  $U$  est convexe et  $0 \in \operatorname{int} U$ . Alors le système (2.1) est contrôlable.

**Preuve.** Par Théorème de Lyapunov, l'hypothèse  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$  implique que pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , la trajectoire  $x$  associée à la commande nulle  $u = 0$  tend vers zéro exponentiellement et donc rentrera dans une boule  $B(0, \epsilon)$  après un certain temps  $T$ . Une fois que  $x(T)$  rentre dans la boule  $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}$ , par Théorème 2.1, Il existe une commande  $v$  qui ramène  $x(T)$  en 0 en temps  $S > 0$ . Ainsi l'état initial  $x_0$  est ramené à zéro en temps  $T + S$  par la commande

$$u = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq T, \\ v & T \leq t \leq T + S. \end{cases}$$

Le résultat suivant est fréquemment utilisé dans la pratique.

**Théorème 2.3.** Supposons que  $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$ ,  $U = [-1, 1]$  et que la condition de Kalman (2.4) est satisfaite. Alors le système (2.1) est commandable.

**§3 Contrôle en temps minimal.** Nous désignons par  $\mathcal{A}(x_0, t)$  l'ensemble des états atteignables à partir de  $x_0$  à l'instant  $T > 0$  :

$$\mathcal{A}(x_0, t) = \{x(t) : \text{solution de (2.1) lorsque } u \text{ varie dans } \mathcal{U}_{ad}\}.$$

L'ensemble des états atteignables  $\mathcal{A}(x_0, t)$  varie continûment avec  $t$  pour la mesure de Hausdorff. Supposons que système (2.1) est contrôlable. Alors  $\{t : 0 \in \mathcal{A}(x_0, t)\}$  est un ensemble compact de  $\mathbb{R}$ , et admet la borne inférieure :

$$(3.1) \quad T^* = \inf\{t : 0 \in \mathcal{A}(x_0, t)\}.$$

Ainsi, il existe un contrôle optimal  $u$  qui ramène  $x_0$  à 0 en temps minimal  $T$ .

**Théorème 3.1.** Soit  $u \in \mathcal{U}_{ad}$  un contrôle qui ramène  $x_0$  à 0 en temps minimal  $T^*$ . Alors, il existe une fonction-vecteur  $p$ , solution de l'équation adjointe :

$$(3.2) \quad \dot{p} = -A^T p, \quad p \neq 0$$

telle que

$$(3.3) \quad 0 \leq t \leq T^* : \quad (p(t), Bu(t)) \leq (p(t), Bv(t)), \quad v(t) \in U.$$

**Preuve.** L'ensemble  $\mathcal{A}(x_0, T^*)$  étant convexe non vide et fermé d'une part, et d'autre part  $0 \in \partial\mathcal{A}(x_0, T^*)$ , par Théorème de séparation, il existe donc un plan d'appui passant par 0 :

$$(3.4) \quad \exists p^* \neq 0 : \quad (p^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{A}(x_0, T^*).$$

D'autre part, la formule de Duhamel donne

$$y = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}Bv(t)ds, \quad 0 = e^{T^*A}x_0 + \int_0^{T^*} e^{(T^*-t)A}Bu(t)dt.$$

D'où il vient

$$y = \int_0^{T^*} e^{(T^*-t)A}B(v(t) - u(t))dt.$$

La condition (3.4) donne

$$(3.5) \quad \int_0^T p^{*T^*} e^{(T^*-t)A}B(v(t) - u(t))dt \geq 0, \quad \forall v(t) \in U.$$

Posons

$$p(s) = e^{(T^*-s)A^T} p^* \neq 0.$$

Alors  $p$  est une solution de l'équation adjointe (3.2) et la condition (3.5) devient

$$(3.6) \quad \int_0^T p^T(t)B(v(t) - u(t))dt \geq 0, \quad \forall v(t) \in U.$$

Supposons qu'il existe une commande  $v_0$  telle que

$$p^T(s)B(v_0(t) - u(t)) < 0, \quad st \in (a, b).$$

On pose

$$v(t) = \begin{cases} u(t), & t \in (a, b)^c, \\ v_0(t), & t \in (a, b). \end{cases}$$

Alors (3.6) donne une contradiction :

$$\int_a^b p^T(t)B(v_0(t) - u(t))dt < 0.$$



Regroupons les conditions nécessaires et suffisantes sur la trajectoire  $x$  et la commande optimale  $u$ .

$$(3.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \\ \dot{p} = -A^T p, \quad p \neq 0, \\ (p(t), Bv(t)) \geq (p(t), Bu(t)), \quad \forall v(t) \in U. \end{cases}$$

Une particularité du problème en temps minimal est que la commande optimale se trouve nécessairement sur le bord des contraintes  $U$ . Lorsque  $U$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , la commande saute d'une extrémité à l'autre à des instants de commutations précis. On parlera de commande bang-bang pour illustrer le fait qu'on n'utilise que les valeurs extrémales de la commande.

**Suite de l'exemple.**

$$(3.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

L'objectif est d'arrêter le train le plus rapidement possible à la station. Donc on cherche une commande  $u(t)$  qui ramène le système (3.1) de l'état initial  $(x_0, y_0)$  à l'état final  $(0, 0)$  en un temps minimal  $T$ .

Nous vérifions que la condition de Kalman est satisfaite et que  $\lambda(A) = 0$ . D'après Théorème 2.3, (3.7) est exactement contrôlable. Puis, considérons

$$(3.8) \quad \begin{cases} \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \\ p_2(t)u(t) \leq p_2(t)v(t), \quad |v(t)| \leq 1. \end{cases}$$

D'où il vient

$$(3.9) \quad \begin{cases} p_1(t) = p_1^*, \\ p_2(t) = -p_1^*t + p_2^*, \\ u(t) = -\text{sgn}(p_2(t)) = -\text{sgn}(-p_1^*t + p_2^*). \end{cases}$$

On voit que la commande  $u(t)$  est de type bang-bang et change **au plus** une fois le signe en  $t = \frac{p_2^*}{p_1^*}$  si celui-ci satisfait

$$(3.10) \quad t_* = \frac{p_2^*}{p_1^*} < T.$$

Par (1.3), on a

$$yy' - ux' = 0.$$

On trouve

$$\frac{1}{2}y^2 - ux = c.$$

Lorsque  $u = +1$ , la trajectoire est donnée par

$$x = \frac{1}{2}y^2 + c.$$

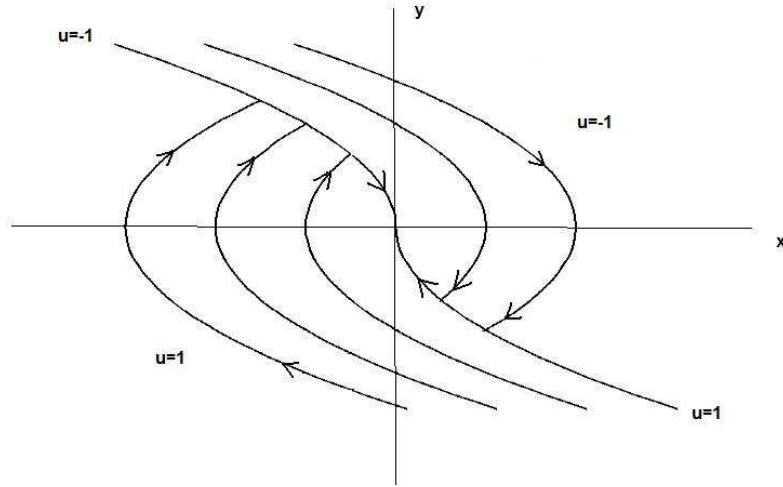
Lorsque  $u = -1$ , la trajectoire est donnée par

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + c.$$

Les trajectoires partant de  $(0, 0)$  donnent la courbe de commutation (en gras)

$$(3.11) \quad \begin{cases} u = +1 : & x = \frac{1}{2}y^2, & y \leq 0, & y'(0) > 0, \\ u = -1 : & x = -\frac{1}{2}y^2, & y \geq 0, & y'(0) < 0. \end{cases}$$

Par exemple, si le point  $(x_0, y_0)$  se situe au dessous de la courbe de commutation, on applique la commande  $u = 1$  jusqu'à ce que la trajectoire intercepte la courbe de commutation, alors on bascule la commande en  $u = -1$  jusqu'à l'arrêt du train à la gare.



Pour expliquer physiquement le mouvement du train, il faut rappeler que  $x(t)$  désigne la distance du train à la station au moment  $t$ . Donc le déplacement du train au moment  $t$  est  $x_0 - x(t)$ . La vitesse du train est  $-y(t)$  et la force de commande  $u = -1$  accélère la vitesse, tandis que  $u = 1$  la réduit.

## Chapitre II. Contrôlabilité de l'équation des ondes

**§1 Introduction.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné de frontière régulière  $\Gamma$ . Considérons l'équation des ondes :

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } Q = ]0, T[ \times \Omega, \\ u = v & \text{on } \Sigma = ]0, T[ \times \Gamma, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

**Définition.** L'équation des ondes (1.1) est exactement contrôlable à l'instant  $T$ , si pour toutes les données initiales  $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , il existe une fonction  $v \in L^2(\Sigma)$  telle que la solution  $u$  satisfait la condition finale :

$$u(T) = u_t(T) = 0.$$

**Proposition 1.1.** Supposons que l'équation (1.1) est exactement contrôlable à l'instant  $T$ . Alors pour tout  $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , l'ensemble des états atteignables

$$\mathcal{A}(u_0, u_1; T) = \{(u(T), u_t(T)), \quad u \text{ est une solution de (1.1) pour } v \in L^2(\Sigma)\}$$

remplit l'espace  $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Etant donné  $(w_0, w_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ , considérons le problème rétrograde

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & \text{in } Q, \\ w = 0 & \text{on } \Sigma, \\ w(T, x) = w_0(x), \quad w_t(T, x) = w_1(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Soit  $v$  un contrôle tel que la solution  $z$  de l'équation

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0, & \text{in } Q, \\ z = v & \text{on } \Sigma, \\ z(0, x) = u_0(x) - w(0) & \text{in } \Omega, \\ z_t(0, x) = u_1(x) - w'(0) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

satisfait

$$z(T, x) = z_t(T, x) = 0.$$

Alors  $u = w + z$  satisfait l'équation

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{in } Q, \\ u = v & \text{on } \Sigma, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

et la condition finale :

$$u(T) = w_0(x), \quad u_t(T) = w_1(x)$$

C'est à dire que le contrôle  $v$  ramène la donnée initiale  $(u_0, u_1)$  à  $(w_0, w_1)$ .

**Définition.** L'équation adjointe

$$(1.2) \quad \begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0, & \text{in } Q, \\ \phi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

est observable, si l'observation

$$(1.3) \quad \partial_\nu \phi = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

implique  $\phi \equiv 0$ .

**Proposition 1.2.** Si le système (1.1) est contrôlable, alors le système adjointe (1.2) est observable par l'observation (1.3).

**Preuve.** Supposons que le système (1.2)-(1.3) admet une solution non triviale avec une donnée initiale  $(\phi_0, \phi_1)$ . Soit  $v$  un contrôle tel que la solution de l'équation

$$(1.4) \quad \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = 0, & \text{in } Q, \\ w = v & \text{on } \Sigma, \\ w(0, x) = -\phi_1(x), \quad w_t(0, x) = \phi_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

satisfait la condition :

$$w(T) = w_t(T) = 0.$$

En multipliant (1.4) par  $\phi$ , on a

$$\int_0^T \int_\Omega w_{tt} \phi dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta w \phi dx dt = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient une absurde :

$$\int_\Omega (w_1 \phi_0 - w_0 \phi_1) dx = \int_\Omega (|\phi_0|^2 + |\phi_1|^2) dx = 0.$$

On vient de montrer que la contrôlabilité implique l'observabilité. L'objectif est de montrer l'inverse.

**§2 Problème aux limites homogènes.** Soit  $H^m(\Omega)$  l'espace de Sobolev d'ordre  $m$  sur  $\Omega$ . On désigne par  $C^k(0, T; H^m(\Omega))$  l'espace des fonctions  $k$  fois continûment dérivables sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $H^m(\Omega)$ . Il s'agit bien d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{C^k(0, T; H^m(\Omega))} = \max_{0 \leq l \leq k} \sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t^l u(t)\|_{H^m(\Omega)}.$$

Soit  $\Omega$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le problème aux limites homogènes

$$(2.1) \quad \begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = f, & \text{in } Q, \\ \phi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x), \phi_t(x, 0) = \phi_1(x) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

**Théorème 2.1.** (i) Pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$  l'équation (2.1) admet une solution forte

$$\phi \in C(0, T; H^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

(ii) Pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $f \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ , l'équation (2.1) admet une solution faible

$$\phi \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

avec la dépendance continue.

(iii) Pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $f = 0$  :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\nabla\phi|^2) dx$$

est constante, appelée souvent la loi de conservation.

C'est un résultat fondamental (J.L. Lions page 32). On remarque que plus les données sont régulières, plus la solution est régulière. La solution faible peut être approchée par une suite de solutions fortes  $(\phi_n)_{n \geq 1}$ .

**Théorème 2.2.** (Holmgren) Soit  $\phi \in C^0(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$  une solution de l'équation

$$(2.2) \quad \begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi = 0, & \text{in } Q, \\ \phi = 0 & \text{on } \Sigma, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \phi_t(0, x) = \phi_1(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

telle que

$$(2.3) \quad \partial_\nu \phi \equiv 0 \quad \text{on } [0, T] \times \Gamma_1,$$

où  $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$  est une partie de mesure positive. Alors on a  $\phi \equiv 0$  pourvu que  $T > 0$  soit suffisamment grand.

Théorème d'unicité de Holmgren est l'un des résultats importants dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Voici une version en dimension un.

**Théorème 2.3.** (Holmgren) Soit  $\phi \in C^0(\mathbb{R}; H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(0, 1))$  une solution de l'équation

$$(2.4) \quad \begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

telle que

$$\phi_x(t, 1) = 0 \quad \text{on } [0, T]$$

avec  $T > 2$ . Alors,  $\phi \equiv 0$ .

**Preuve.** Soit  $t_0$  tel que  $1 < t_0 < T - 1$ . On considère les invariants de Riemann

$$\xi = \phi_x - \phi_t, \quad \eta = \phi_x + \phi_t$$

sur les caractéristiques

$$x - t = c, \quad x + t = c.$$

Par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \xi(t, c+t) &= \frac{d}{dt} \phi_x(t, c+t) - \frac{d}{dt} \phi_t(t, c+t) \\ &= \phi_{tx}(t, c+t) + \phi_{xx}(t, c+t) - \phi_{tt}(t, c+t) - \phi_{tx}(t, c+t) = 0, \end{aligned}$$

on trouve que  $\xi$  est constante sur la droite  $x - t = a - t_0$ , qui passe par  $(t_0, a)$  avec  $0 < a < 1$ , ceci donne

$$\xi(t_0, a) = \xi(1 - a + t_0, 1) = 0, \quad 1 - a + t_0 < T.$$

De même,  $\eta$  est constante sur la droite  $x + t = t_0 + a$  qui passe par  $(t_0, a)$  avec  $0 < a < 1$ . On a donc

$$\eta(t_0, a) = \eta(a + t_0 - 1, 1) = 0, \quad 0 < a + t_0 - 1.$$

On obtient que  $\phi(t_0, a)$  est constante avec  $0 < a < 1$ , donc nulle puisque  $\phi(t_0, 0) = 0$ . On conclut par Théorème 2.1.

**§3 Observabilité.** Pour rendre la présentation plus claire et concise, nous ne traitons que de problèmes unidimensionnels, ce qui n'affecte pas le sens de la méthode. Rappelons quelques identités classiques.

Pour toute fonction  $\phi, \psi \in H^1(0, 1)$ , on a la formule de Green :

$$\int_0^1 \phi_x \psi dx = [\phi \psi]_0^1 - \int_0^1 \phi \psi_x dx.$$

Pour toute fonction  $\phi \in H^2(0, 1)$ , on a l'identité de Rellich :

$$\int_0^1 \phi_{xxx} x \phi_x dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 |\phi_x|^2 dx + \frac{1}{2} |\phi_x(t, 1)|^2.$$

**Proposition 3.1.** Pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ , la solution  $\phi$  de l'équation (2.4) satisfait l'identité suivante :

$$(3.1) \quad \int_0^1 [\phi_t x \phi_x dx]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T |\phi_x(t, 1)|^2 dt + \frac{T}{2} \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx = 0.$$

**Preuve.** En multipliant l'équation (3.1) par  $x\phi_x$  et en intégrant sur  $[0, 1] \times [0, T]$ , on obtient

$$\int_0^1 \int_0^T \phi_{tt} x \phi_x dt dx - \int_0^T \int_0^1 \phi_{xx} x \phi_x dx dt = 0.$$

Par Théorème 2.1,  $\phi(t) \in C^2(0, T)$ . On peut donc intégrer par parties, et ceci donne

$$\int_0^1 [\phi_t x \phi_x dx]_0^T - \int_0^T \int_0^1 \phi_t x \phi_{xt} dx dt - \int_0^T \int_0^1 \phi_{xx} x \phi_x dx dt = 0$$

De même pour tout  $t$  fixé,  $\phi_x \in H^1(0, 1)$  et  $\phi \in H^2(0, 1)$ , on peut utiliser la formule de Rellich, ceci donne

$$\int_0^1 [\phi_t x \phi_x dx]_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T |\phi_x(t, 1)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx dt = 0.$$

Par la loi de conservation du Théorème 2.1, on a

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx dt = \frac{T}{2} \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx.$$

En insérant celle-ci dans la ligne précédente, on obtient (3.1).

**Théorème 3.2.** Pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , on a l'inégalité directe :

$$(3.2) \quad \int_0^T |\phi_x(t, 1)|^2 dt \leq (T + 2) \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx$$

et l'inégalité inverse pour  $T > 2$  :

$$(3.3) \quad \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx \leq \frac{1}{T - 2} \int_0^T |\phi_x(t, 1)|^2 dt.$$

**Preuve.** Pour les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1)$ , par Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_0^1 |\phi_t x \phi_x| dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx.$$

Ceci donne

$$\int_0^1 [\phi_t x \phi_x dx]_0^T \leq \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx.$$

Alors en insérant cette dernière relation dans (3.1), on obtient (3.2) et (3.3).

Ces inégalités peuvent être prolongées aux données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  par la densité et la continuité.

**Corollary 3.3.** (Holmgren) Soit  $\phi \in C^0(\mathbb{R}; H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(0, 1))$  une solution de l'équation

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

telle que

$$\phi_x(t, 1) = 0 \quad \text{sur } [0, T]$$

pour  $T > 2$ . Alors,  $\phi \equiv 0$ .

**Preuve.** Par l'inégalité inverse (3.3), on trouve  $\phi_0 = \phi_1 = 0$ , ceci grâce au Théorème 2.1 implique  $\phi \equiv 0$ .

**§4 Problème aux limites non homogènes.** Considérons le problème aux limites non-homogènes :

$$(4.1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = v(t), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Soit  $\phi$  une solution de l'équation adjointe (3.1). Multipliant (4.1) par  $\phi$  et intégrant sur  $[0, t] \times [0, 1]$  pour  $0 < t < T$ , on obtient

$$\int_0^t \int_0^1 u_{ss} \phi dx ds = \int_0^t \int_0^1 u_{xx} \phi dx ds.$$

En intégrant par parties, on obtient une formulation variationnelle

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi(t, x) u_t(t, x) dx - \int_0^1 \phi_t(t, x) u(t, x) dx \\ &= \int_0^1 \phi_0(x) u_1(x) dx - \int_0^1 \phi_1(x) u_0(x) dx - \int_0^t v(s) \phi_x(s, 1) ds \end{aligned}$$

L'équation (4.1) est transformée en une équation variationnelle

$$(4.2) \quad \langle (u_t(t), -u(t)); (\phi(t), \phi_t(t)) \rangle = \langle (u_1, -u_0); (\phi_0, \phi_1) \rangle - \int_0^t v(s) \phi_x(s, 1) ds.$$



où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  et  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**Définition.** Une fonction

$$(4.3) \quad u \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^1([0, T]; H^{-1}(0, 1))$$

est une solution faible de (4.1) si elle satisfait l'équation variationnelle (4.2) pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**Théorème 4.1.** Pour toutes les données initiales  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  et  $v \in L^2(0, T)$ , le problème aux limites non-homogènes (4.1) admet une unique solution faible  $u$  avec la dépendance continue :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} & \| (u(t), u_t(t)) \|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)} \\ & \leq c(\| (u_0, u_1) \|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)} + \| v \|_{L^2(0,T)}). \end{aligned}$$

**Preuve.** Définir une forme linéaire par

$$L_t(\phi(t), \phi_t(t)) = \langle (u_1, -u_0); (\phi_0, \phi_1) \rangle - \int_0^t v(s) \phi_x(s, 1) ds.$$

Par l'inégalité directe (3.2), on a

$$\begin{aligned} & |L_t(\phi(t), \phi_t(t))| \\ & \leq c \| (u_1, -u_0) \|_{H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)} \\ & + c \| v \|_{L^2(0,T)} \| (\phi(t), \phi_t(t)) \|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)}, \end{aligned}$$

soit encore

$$\| L_t \| \leq c(\| (u_1, -u_0) \|_{H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)} + \| v \|_{L^2(0,T)}).$$

Par Théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique élément  $(u_t(t), -u(t)) \in H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  tel que

$$\langle (u_t(t), -u(t)); (\phi(t), \phi_t(t)) \rangle = L_t(\phi(t), \phi_t(t)),$$

qui redonne l'équation variationnelle (4.2) avec une dépendance continue (4.4).

Il reste à montrer que la régularité par rapport à la variable  $t$ . Soient  $v_n \in C_0^\infty(]0, T[)$  et  $(u_{0n}, u_{1n}) \in C_0^\infty(]0, 1[)$  des suites telles que

$$(4.5) \quad (v_n, u_{0n}, u_{1n}) \rightarrow (v, u_0, u_1) \quad \text{dans } L^2(0, T) \times L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$$

Considérons le problème approché :

$$(4.6) \quad \begin{cases} u_{ntt} - u_{nxx} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u_n(t, 0) = 0, \quad u_n(t, 1) = v_n(t), & t > 0, \\ u_n(0, x) = u_{0n}(x), \quad u_{nt}(0, x) = u_{1n}(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Posons

$$u_n = w_n + xv_n,$$

dans (4.6), on trouve

$$\begin{cases} w_{ntt} - w_{nxx} = -xv_{ntt}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ w_n(t, 0) = 0, \quad w_n(t, 1) = 0, & t > 0, \\ w_n(0, x) = u_{0n}(x) - xv_n(0), & 0 < x < 1 \\ w_{nt}(0, x) = u_{1n}(x) - xv_{nt}(0), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Par Théorème 2.1, ce problème admet une unique solution forte  $w_n$ , donc (4.5) admet une unique solution forte  $u_n$  telle que

$$u_n \in C^0([0, T]; H^2(0, 1)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(0, 1)) \cap C^2([0, T]; L^2(0, 1))$$

D'après (4.4), on a

$$\begin{aligned} & \| (u_n(t), u_{nt}(t)) \|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)} \\ & \leq C (\| (u_{0n}, u_{1n}) \|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)} + \| v_n \|_{L^2(0,T)}). \end{aligned}$$

La convergence (4.5) implique la convergence uniforme de la suite  $(u_n(t), u_t(t))$  dans l'espace

$$C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^0([0, T]; H^{-1}(0, 1)).$$

En passant à la limite, on obtient la régularité (4.3).

**§5 Exact controllability.** We present the Hilbert Uniqueness Method.

**Definition.** The system (4.1) is exactly controllable at the time  $T > 0$ , if for any initial data  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ , there exists a control  $v \in L^2(0, T)$ , such that the solution  $u$  to system (4.1) satisfies the final condition :

$$u(T) = u_t(T) = 0.$$

In other words, we can steer the initial data  $(u_0, u_1)$  to rest by a control  $v$ .

**Theorem 5.1.** The system (4.1) is exactly controllable at the time  $T > 2$ , Moreover, there exists a constant  $c > 0$  such that

$$\|v\|_{L^2(0,T)} \leq c \| (u_0, u_1) \|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)}.$$

**Proof.** The proof will be divided into several steps.

(i) Let  $\phi$  be the solution to the adjoint problem (3.1) with  $(\phi_0, \phi_1) \in \mathcal{D}(0, 1) \times \mathcal{D}(0, 1)$ . We define a semi-norm by

$$\|(\phi_0, \phi_1)\|_F^2 = \int_0^T |\phi_x(t, 1)|^2 dt.$$

By direct and inverse inequalities (3.2)-(3.3),  $\|\cdot\|_F$  is equivalent to the usual norm in  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Denote by  $F$  the completion of  $\mathcal{D}(0,1) \times \mathcal{D}(0,1)$  by  $F$ -norme :

$$F = \overline{\mathcal{D}(0,1) \times \mathcal{D}(0,1)}^F = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1).$$

(ii) Let  $\widehat{\phi}$  be the solution to the adjoint problem with the initial data  $(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$  :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \widehat{\phi}_{tt} - \widehat{\phi}_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \widehat{\phi}(t, 0) = \widehat{\phi}(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \widehat{\phi}(0, x) = \widehat{\phi}_0(x), \quad \widehat{\phi}_t(0, x) = \widehat{\phi}_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Define the control by

$$v = \widehat{\phi}_x(t, 1)$$

and consider the backward problem

$$(5.2) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = v(t), & 0 < t < T, \\ u(T, x) = u_t(T, x) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Because of the direct inequality (3.2), we have  $v \in L^2(0, T)$ . By Theorem 4.1, system (5.2) admits a unique weak solution  $u$  with the regularity (4.3). Accordingly, we define the linear map

$$\Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1) = (u_t(0), -u(0)).$$

Because of (4.4) and the direct inequality (3.3), we have

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1)\|_{H^{-1}(0,1) \times L^2(0,1)} \\ & \leq C \|\widehat{\phi}_x(\cdot, 1)\|_{L^2(0,T)} \leq C \|(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

So,  $\Lambda$  is a continuous map from  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  into  $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . The variational equation (4.2) becomes

$$\langle \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle = \int_0^T \widehat{\phi}_x(s, 1) \phi_x(s, 1) ds.$$

(iii) It then follows that

$$\begin{aligned} & \langle \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle \\ & \leq \|(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)} \|(\phi_0, \phi_1)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)} \end{aligned}$$

and

$$\langle \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1) \rangle = \|(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)}^2.$$

So, the bilinear symmetric form

$$a((\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\phi_0, \phi_1)) = \langle \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle$$

is continue and coercive on the space  $(H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$ .

On the other hand, for any given  $(u_1, -u_0) \in H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , we define the linear continuous form

$$\langle (u_1, -u_0), (\phi_0, \phi_1) \rangle, \quad \forall (\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1).$$

By Lax-Milgram's Lemma, there exists an unique element  $(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , such that

$$\langle \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle = \langle (u_1, -u_0), (\phi_0, \phi_1) \rangle$$

for all  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , namely,

$$(u_t(0), -u(0)) = \Lambda(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1) = (u_1, -u_0).$$

This is precisely the exact controllability of system (4.1) for the given initial data  $(u_1, -u_0)$ .

(iv) Finally, the linear mapping  $\Lambda$  is continuous and bijective between  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  and  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , by Banach's open mapping theorem, the inverse  $\Lambda^{-1}$  is bounded from  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  into  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , it follows that

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(0, T)} &= \|\widehat{\phi}(\cdot, 1)\|_{L^2(0, T)} = \|(\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1)\|_{H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)} \\ &= \|\Lambda^{-1}(-u_1, u_0)\|_{H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)} \\ &\leq \|\Lambda^{-1}\| \|(-u_1, u_0)\|_{H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)} \end{aligned}$$

**Theorem 5.2.** If system (4.1) is controllable at time  $T > 0$ , then we have  $T > 2$ .

**Proof.** Since the controllability of system (4.1) implies the observability of system (2.3), then by Theorem 2.3, we get  $T > 2$ .

**§6 Optimality of control.** In this section, we discuss the continuous dependence of the controls with respect to the initial data. In particular, we show the equivalence between the controllability and the observability.

Let us denote by  $\mathcal{U}_{ad}$  the set of all controls  $v \in L^2(0, T)$  which realize the exact controllability of system (4.1). Clearly,  $\mathcal{U}_{ad}$  is not empty. We are interested in finding a control  $v_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ , which has the least norm among all the others :

$$(6.1) \quad \|v_0\|_{L^2(0, T)} = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \|v\|_{L^2(0, T)}.$$

For any given  $v \in L^2(0, T)$ , we solve the backward problem (5.2). Then we define the linear map

$$\mathcal{R}: v \rightarrow (u(0), u_t(0))$$

which is continuous from  $L^2(0, T)$  into  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  because of the continuous dependence (4.4). Let  $\mathcal{N}$  be the kernel of  $\mathcal{R}$ , which is a closed subspace. Let  $\mathcal{P}$  denote the orthogonal projection from  $L^2(0, T)$  on  $\mathcal{N}$ . Then the control  $v_0 = (\mathcal{I} - \mathcal{P})v$  has the least norm. Moreover, we have the following

**Theorem 6.1.** Assume that system (4.1) is exactly controllable in  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ . Then there exists a positive constant  $c > 0$ , such that the control  $v_0$  with the least norm given by (6.1) satisfies the following estimate :

$$(6.2) \quad \|v_0\|_{L^2(0, T)} \leq c \|(u_0, u_1)\|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)}$$

for any given  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ .

**Proof.** Consider the linear map  $\mathcal{R}$  from the quotient space  $L^2(0, T)/\mathcal{N}$  into  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ .

First, if  $\mathcal{R}v = 0$ , then  $v \in \mathcal{N}$ . Therefore  $\mathcal{R}$  is injective on the quotient space  $L^2(0, T)/\mathcal{N}$ .

On the other hand, the exact controllability of system (4.1) implies that  $\mathcal{R}$  is surjective, therefore  $\mathcal{R}$  a continuous bijection from  $L^2(0, T)/\mathcal{N}$  into  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ . By Banach's open mapping theorem, the inverse of  $\mathcal{R}$  is also bounded from  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  into  $L^2(0, T)/\mathcal{N}$ , namely,

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{L^2(0, T)} &= \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} \|v\|_{L^2(0, T)} \\ &= \|\dot{v}\|_{L^2(0, T)/\mathcal{N}} \leq c \|(u_0, u_1)\|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)}. \end{aligned}$$

This yields the inequality (6.2). The proof is complete.

**Theorem 6.2.** Assume that system (4.1) is exactly controllable in  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ . Then we have the inverse inequality.

**Proof.** Multiplying system (4.1) by  $\phi$  and integrating by parties, we get

$$\int_0^1 (u_1 \phi_0 - u_0 \phi_1) dx = \int_0^T v(t) \phi_x(t, 1) dt.$$

By Theorem 6.1, there exists  $c > 0$  such that

$$\|v\|_{L^2(0, T)} \leq c \|(u_0, u_1)\|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)}.$$

It follows that

$$\langle (\phi_0, \phi_1); (u_1, u_0) \rangle \leq c \|(u_0, u_1)\|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)} \|\phi_x(\cdot, 1)\|_{L^2(0, T)},$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the duality between  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  and  $H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$ . As  $(u_1, u_0)$  runs through the space  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ , we get :

$$\|(\phi_0, \phi_1)\|_{H_0^1(0,1)(0,1) \times L^2(0,1)} \leq c\|\phi_x(\cdot, 1)\|_{L^2(0,T)}.$$

We have thus established the equivalence between controllability and observability.

**Theorem 6.3.** Assume that system (4.1) is exactly controllable in  $L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ . Then the control  $v$  which has the least norm is the one given by HUM.

**S7 Stabilisation.** Nous présentons la relation entre la contrôlabilité exacte et la stabilité uniforme. Donnons d'abord un lemme technique.

**Lemme.** Soit  $E \geq 0$  une fonction continue décroissante telle que

$$\int_0^{+\infty} E(t)dt \leq cE(0).$$

Alors, il existe une constante  $M > 1$  telle que

$$E(t) \leq Me^{-t/c}E(0), \quad t > 0.$$

**Preuve.** Posons

$$f(t) = \int_t^{+\infty} E(t)dt \leq cE(t).$$

Alors

$$f'(t) = -E(t) \leq -f(t)/c,$$

soit

$$(f(t)e^{t/c})' \leq 0.$$

La fonction  $f(t)e^{t/c}$  étant décroissante, on trouve  $f(t) \leq f(0)e^{-t/c}$ , soit encore

$$E(t+1) \leq \int_t^{+\infty} E(t)dt \leq cE(0)e^{-t/c} = ce^{1/c}E(0)e^{-(t+1)/c}.$$

Considérons maintenant

$$(7.1) \quad \begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = 0, & t > 0, 0 < x < 1, \\ w(t, 0) = 0, w(t, 1) = w_t(t, 1), & t > 0, \\ w(0, x) = w_0(x), w_t(0, x) = w_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Définir l'énergie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|w_t|^2 + |w_x|^2) dx.$$

On trouve

$$(7.2) \quad E'(t) = -|w_t(t, 1)|^2 \leq 0.$$

Donc le système (7.1) est dissipatif au sens où l'énergie est décroissante. Plus précisément, on a

**Théorème 7.1.** Il existe des constantes  $\omega > 0, M > 1$  telles que pour toutes les données initiales  $(w_0, w_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , l'énergie du système (7.1) décroît uniformément et exponentiellement :

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0), \quad t > 0.$$

**Preuve.** D'abord, en intégrant (7.2), on trouve

$$(7.3) \quad \int_0^{+\infty} |w_t(t, 1)|^2 dt \leq E(0).$$

En multipliant l'équation (7.1) par  $xw_x$ , on trouve

$$\int_0^T \int_0^1 (|w_t|^2 + |w_x|^2) dx dt = \int_0^1 [w_t x w_x]_0^T dx + \int_0^T |w_t(t, 1)|^2 dt.$$

En utilisant (7.3), on trouve

$$\int_0^{+\infty} \int_0^1 (|w_t|^2 + |w_x|^2) dx dt \leq 3E(0).$$

**Théorème 7.2.** Il existe une constante  $T > 0$ , telle que pour toutes les données initiales  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , l'équation des ondes (4.1) est exactement contrôlable à l'instant  $T > 0$  moyennant un contrôle interne  $v \in L^2(0, T)$  avec une dépendance continue.

**Preuve.** Soit  $\hat{w}$  une solution du problème

$$\begin{cases} \hat{w}_{tt} - \hat{w}_{xx} = 0, & t > 0, 0 < x < 1, \\ \hat{w}(t, 0) = 0, \hat{w}(t, 1) = \hat{w}_t(t, 1), & t > 0, \\ \hat{w}(0, x) = -w(T, x), \hat{w}_t(0, x) = w_t(T, x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Alors  $u(t, x) = w(t, x) + \hat{w}(T - t, x)$  satisfait le problème rétrograde

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = v(t), & t > 0, \\ u(T, x) = 0, u_t(T, x) = 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

avec  $v(t) = w_t(t, 1) - \widehat{w}_t(T - t, 1)$ .

Etant donné  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , on cherche une donnée initiale  $(w_0, w_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , telle que

$$(7.5) \quad u_0(x) = w_0(x) + \widehat{w}(T, x), \quad u_1(x) = w_1(x) - \widehat{w}_t(T, x).$$

Alors le contrôle  $v$  réalise la contrôlabilité exacte du problème (4.1).

Ecrivons la condition de contrôlabilité (7.5) sous la forme

$$(7.6) \quad (u_0, u_1) = (I + K)(w_0, w_1),$$

où  $K$  est l'application linéaire dans  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  définie par

$$K : (w_0, w_1) \rightarrow (\widehat{w}(T, x), -\widehat{w}_t(T, x)).$$

Par Théorème 7.1, on a

$$\|K(w_0, w_1)\|^2 \leq M e^{-\omega T} \|(w(T), w_t(T))\|^2 \leq M^2 e^{-2\omega T} \|(w_0, w_1)\|^2.$$

Donc on obtient  $\|K\| \leq 1$  pour  $T$  assez grand et l'application  $I + K$  est inversible, ce qui permet de choisir la donnée initiale  $(w_0, w_1)$  satisfaisant la condition de contrôlabilité (7.5).

Enfin, par (7.3), on trouve la dépendance continue :

$$\int_0^{+\infty} |v|^2 dx dt \leq 2 \int_0^{+\infty} (|w_t(1, t)|^2 + |\widehat{w}_t(t, 1)|^2) dt \leq 4E(0).$$

**Commentaire final.** Dans Théorème 5.1, on montre par HUM (1988) que l'observabilité du système adjoint (2.4) implique la contrôlabilité exacte du système (4.1), et Théorème 6.2 montre l'inverse. En revanche, par le principe de Russell (1978), Théorème 7.2 montre que la stabilité du système (7.1) implique la contrôlabilité exacte système (4.1). L'inverse est aussi vrais.



### Chapitre III. Approximation numérique

**§1 Formulation duale.** Etant donné  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , on résout l'équation aux limites homogènes

$$(1.1) \quad \begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Puis avec  $v(t) = \phi_x(t, 1) \in L^2(0, T)$ , on résout l'équation aux limites non-homogènes :

$$(1.2) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = \phi_x(t, 1), & 0 < t < T, \\ u(T, x) = 0, \quad u_t(T, x) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Puis, on pose

$$\Lambda(\phi_0, \phi_1) = (-u_t(0, x), u(0, x)).$$

Etant donnée  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$ , on cherche  $(\phi_0, \phi_1)$  telle que la solution  $u$  de l'équation (1.2) satisfait la condition de la contrôlabilité exacte

$$(1.3) \quad \Lambda(\phi_0, \phi_1) = (-u_1, u_0).$$

C'est l'équation d'Euler de la fonction

$$(1.4) \quad J(\phi_0, \phi_1) = \frac{1}{2} \langle \Lambda(\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle + \langle (u_1, -u_0), (\phi_0, \phi_1) \rangle,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  et  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

**§2 Méthode du gradient.** Soit  $V$  un espace de Hilbert espace  $V$ . Soit  $a$  une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur  $V \times V$  et  $L$  une forme linéaire continue sur  $V$ . On présente l'algorithme du gradient pour minimiser la fonction

$$J(f) = \frac{1}{2}a(f, f) - L(f), \quad \forall f \in V.$$

0. Initialisation : On se donne  $f^0 \in V$ .

1. Pour  $n = 0, 1, \dots$ , on calcule le gradient :

$$\nabla J(f^n) = g^n \in V$$

par

$$(g^n, h)_V = a(f^n, h) - L(h), \quad \forall h \in V.$$

Si  $\|g^n\|_V < \epsilon$ , on pose  $f = f^n$ .

2. Sinon, on calcule le pas de descente par

$$J(f^n - \rho g^n) = \inf_{\rho > 0} J(f^n - \rho g^n),$$

soit

$$(\nabla J(f^n - \rho_n g^n), g^n) = a(f^n - \rho_n g^n, g^n) - L(g^n) = 0,$$

ceci donne

$$\rho_n = \frac{a(f^n, g^n) - L(g^n)}{a(g^n, g^n)} = \frac{\|g^n\|_V^2}{a(g^n, g^n)} > 0.$$

3. On fait la remise à jour :

$$f^{n+1} = f^n - \rho_n g^n,$$

et on retourne à l'étape 1 avec  $n = n + 1$ .

Application de l'algorithme du gradient à pas fixe à la fonction (1.4). Posons

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1), \\ a((\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1)) &= \langle \Lambda(\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle, \\ L(\phi_0, \phi_1) &= \langle (u_1, -u_0), (\phi_0, \phi_1) \rangle, \\ J(\phi_0, \phi_1) &= \frac{1}{2} \langle \Lambda(\phi_0, \phi_1), (\phi_0, \phi_1) \rangle + \langle (u_1, -u_0), (\phi_0, \phi_1) \rangle, \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $H^{-1}(0, 1) \times L^2(0, 1)$  et  $H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

Notons  $\nabla J(\phi_0, \phi_1) = (g_0, g_1)$ , on a

$$((g_0, g_1), (f_0, f_1))_V = \langle \Lambda(\phi_0, \phi_1), (f_0, f_1) \rangle - \langle (u_1, -u_0), (f_0, f_1) \rangle,$$

soit encore

$$\begin{aligned} & (g_0, f_0)_{H^1} + (g_1, f_1)_{L^2} \\ &= \langle -\Delta g_0, f_0 \rangle_{H^{-1}; H_0^1} + (g_1, f_1)_{L^2} \\ &= \langle -u_t(0), f_0 \rangle_{H^{-1}; H_0^1} + (u(0), f_1)_{L^2} + \langle u_1, f_0 \rangle_{H^{-1}; H_0^1} - (u_0, f_1)_{L^2}. \end{aligned}$$

D'où vient l'expression du gradient

$$\begin{cases} -\Delta g_0 = -u_t(0) + u_1, & 0 < x < 1, \\ g_0(0) = g_0(1) = 0, \\ g_1 = u(0) - u_0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

0. Initialisation : On se donne  $(\phi_0^0, \phi_1^0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ .

1. Pour  $n = 0, 1, \dots$ , on résout l'équation aux limites homogènes :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \phi_{tt}^n - \phi_{xx}^n = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi^n(t, 0) = \phi^n(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi^n(0, x) = \phi_0^n(x), \quad \phi_t^n(0, x) = \phi_1^n(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Puis, avec  $v^n = \phi_x^n(t, 1)$ , on résout l'équation aux limites non-homogènes

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{tt}^n - u_{xx}^n = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u^n(t, 0) = 0, \quad u^n(t, 1) = \phi_x^n(t, 1), & 0 < t < T, \\ u^n(T, x) = 0, \quad u_t^n(T, x) = 0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Enfin, on calcule le gradient  $(g_0^n, g_1^n)$  par

$$(2.3) \quad \begin{cases} -\Delta g_0^n = -u_t^n(0) + u_1, & 0 < x < 1, \\ g_0^n(0) = g_0^n(1) = 0, \\ g_1^n = u^n(0) - u_0, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Si

$$\|(g_0^n, g_1^n)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)} < \epsilon,$$

on pose  $(\phi_0, \phi_1) = (\phi_0^n, \phi_1^n)$ .

2. Sinon, on résout le système

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \psi(t, 0) = \psi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \psi(0, x) = g_0^n(x), \quad \psi_t(0, x) = g_1^n(x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Puis on calcule

$$\langle \Lambda(g^n, g^n), (g^n, g^n) \rangle = \int_0^T |\psi_x^n(t, 1)|^2 dt$$

et le pas de descente par

$$\rho_n = \frac{\|(g_0^n, g_1^n)\|_{H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)}^2}{\langle \Lambda(g^n, g^n), (g^n, g^n) \rangle} > 0.$$

3. On fait la remise à jour

$$(\phi_0^{n+1}, \phi_1^{n+1}) = (\phi_0^n, \phi_1^n) - \rho_n (g_0^n, g_1^n),$$

et on retourne à l'étape 1 avec  $n = n + 1$ .

**§3 Semi-discrétisation.** Soit  $N > 0$  un entier. Définir le maillage de l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$G^h : \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad x_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N+1.$$

On discrétise le problème aux limites (2.1), respectivement, (2.2) par le schéma de différence finie centrée :

$$\phi_{jtt}(t) + \frac{\phi_{j-1}(t) - 2\phi_j(t) + \phi_{j+1}(t)}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N$$

avec les conditions aux limites

$$\phi_0(t) = \phi_{N+1}(t) = 0.$$

Posons la matrice d'ordre  $N$  par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_N(t) \end{pmatrix}.$$

On met le schéma sous la forme matricielle :

$$(3.1) \quad \Phi_{tt}(t) + \frac{1}{h^2} A \Phi(t) = 0.$$

Similairement, posons

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \phi_N(t)/h \end{pmatrix},$$

on obtient le schéma pour le problème aux limites non-homogènes (2.2) :

$$(3.2) \quad U_{tt}(t) + \frac{1}{h^2} A U(t) = b(t).$$

On discrétise le système elliptique de type (2.3)

$$\begin{cases} -\Delta g = f, & 0 < x < 1, \\ g(0) = g(1) = 0 \end{cases}$$

par le schéma

$$-\frac{g_{j-1} - 2g_j + g_{j+1}}{h^2} = f(x_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Posons

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

on obtient un système linéaire

$$AG = F.$$

**§4 Discrétisation sur 2-grilles.** Le schéma discuté dans le paragraphe précédent, ne converge pas vers la solution du problème continu en général. Ceci est dû au fait que les méthodes numériques peuvent engendrer des ondes numériques dont la longueur est de même ordre que le pas du maillage. Ces ondes produisent de fortes oscillations et provoquent la divergence du contrôle approché.

La semi-discrétisation en différences finies de 2-grilles (Glowinski, 1992), permettra d'éliminer ces ondes de haute fréquence et d'améliorer la convergence de l'approximation (Negreanu and Zuazua 2004).

Nous allons donner une brève description de la méthode. Soit  $h > 0$ . On définit un maillage grossier de pas  $2h$  :

$$G^{2h} : \quad x_{2j} = 2jh, \quad j = 0, 1, \dots, (N+1)/2.$$

On discrétise la donnée initiale  $(\phi_0, \phi_1)$  sur le maillage grossier  $G^{2h}$  :

$$(4.1) \quad \Phi_0 = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_0(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\phi}_0(x_N) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\phi}_1(x_N) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_0(x_{2j}) &= \phi_0(x_{2j}), & \bar{\phi}_0(x_{2j+1}) &= \frac{\phi_0(x_{2j}) + \phi_0(x_{2j+2})}{2}, \\ \bar{\phi}_1(x_{2j}) &= \phi_1(x_{2j}), & \bar{\phi}_1(x_{2j+1}) &= \frac{\phi_1(x_{2j}) + \phi_1(x_{2j+2})}{2}. \end{aligned}$$

On résout le système différentiel ordinaire

$$(4.2) \quad \Phi_{tt}(t) + \frac{1}{h^2} A \Phi(t) = 0$$

avec la donnée discrétisée sur le maillage grossier  $G^{2h}$

$$(4.3) \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad \Phi_t(0) = \Phi_1.$$

On pourra montrer que

(i) l'énergie discrète du système (4.2) et (4.3)

$$E_h(t) = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N |\phi'_j(t)|^2 + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N \frac{|\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)|^2}{h^2}$$

est encore constante,

(ii) il existe des constantes positives  $C_1, C_2$  indépendant de  $h$ , telles que  $E_h(t)$  satisfait les inégalités numériques

$$(4.4) \quad C_1 E_h(0) \leq \int_0^T \left| \frac{\phi_N(t)}{h} \right|^2 dt \leq C_2 E_h(0)$$

pour tout  $T > 4$ .

(iii) le contrôle  $v_h(t) = -\frac{\phi_N(t)}{h}$  est uniformément borné dans  $L^2(0, T)$  et la solution numérique  $u_h$  ainsi que le contrôle numérique  $v_h$  convergent lorsque  $h$  tend vers zéro :

$$\begin{aligned} (i) \quad & v_h \rightarrow v, \quad \text{in } L^2(0, T); \\ (ii) \quad & (u_h, u_{ht}) \rightarrow (u, u_t), \quad \text{in } C^0(0, T; L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)). \end{aligned}$$

**§5 Discrétisation totale.** On utilise un schéma numérique (Euler, Crank-Nicolson, Runge-Kutta.....) pour la résolution du système ordinaire (4.2)-(4.3).

Soit  $M$  un entier. Définir le maillage de l'intervalle  $[0, T]$  :

$$\Delta t = \frac{T}{M+1}, \quad t_i = i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, M+1.$$

Par la différence finie centrée :

$$\Phi_{tt}(t_i) = \frac{\Phi(t_{i-1}) - 2\Phi(t_i) + \Phi(t_{i+1}))}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t^2)$$

dans (4.2), on obtient

$$k = \Delta t/h, \quad \Phi^{i+1} = (2I - k^2 A)\Phi^i - \Phi^{i-1}, \quad i = 1, \dots, M$$

avec la condition de départ :

$$\Phi^0 = \Phi_0, \quad \Phi^1 = \Phi_0 + \Delta t \Phi_1.$$

Sous la forme d'ordre un

$$\begin{pmatrix} \Phi^i \\ \Phi^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 2I - k^2 A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{i+1} \\ \Phi^i \end{pmatrix},$$

les valeurs propres du système sont données par

$$X^2 - (2 - k^2 \lambda_n)X + 1 = 0,$$

où

$$\lambda_n = 4 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{2(N+1)} \right), \quad n = 1, \dots, N$$

est une valeur propre de la matrice  $A$ .

Comme le produit de deux racines vaut un, lorsque le discriminant est négatif,

$$(2 - k\lambda_n)^2 - 4 = -4k^2\lambda_n + (k^2\lambda_n)^2 = k^2\lambda_n(-4 + k^2\lambda_n) \leq 0,$$

les racines sont de module un. Lorsque  $k \leq 1$ , le schéma est stable.

**§6 Méthode du gradient conjugué.** On présente l'algorithme du gradient conjugué à la fonction (1.4).

Initialisation : Etant donné  $f^0 \in V$  on définit  $g^0$  par

$$(g^0, h)_V = a(g^0, h) - L(h), \quad \forall h \in V,$$

Puis on pose la direction de descente par

$$w^0 = g^0.$$

Etape 1. Supposons que  $f^n, g^n, w^n$  sont connues. On calcule le meilleur pas de descente par

$$\rho_n = \|g^n\|_V^2 / a(w^n, w^n),$$

et fait la remise à jour :

$$f^{n+1} = f^n - \rho_n w^n.$$

Etape 2. On calcule le nouveau gradient  $g^{n+1}$  par

$$(g^{n+1}, h)_V = (g^n, h)_V - \rho_n a(w^n, h), \quad \forall h \in V.$$

Si

$$\|g^{n+1}\| < \epsilon,$$

on pose  $f = f^{n+1}$ , et l'arrête du programme. Sinon, on calcule la nouvelle direction de descente :

$$\begin{aligned} w^{n+1} &= g^{n+1} + \gamma_n w^n, \\ \gamma_n &= \|g^{n+1}\|_V^2 / \|g^n\|_V^2 \end{aligned}$$

et on retourne à l'étape 1 avec  $n = n + 1$ .

**§7 Méthode des éléments finis.**

### Exercices

**Exercice 1.** Déterminer les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha u, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -y + z + \beta u, & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = -z + \gamma u & z(0) = u_0. \end{cases}$$

soit contrôlable par des contrôles de contraintes  $U = [-1, 1]$ .

**Solution** Mettons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

D'abord, on trouve les valeurs propres de  $A$  :  $0, -1$ . Puis calcule la matrice de Kakman

$$(B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\beta + \gamma \\ \beta & -\beta + \gamma & \beta - 2\gamma \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Ceci donne

$$\det(B, AB, A^2B) = (\alpha + \beta + \gamma)\gamma^2$$

Lorsque  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $\gamma \neq 0$ ,  $\det(B, AB, A^2B) = 3$ . Comme  $\operatorname{Re}\lambda(A) \leq 0$ , système est donc contrôlable.

**Exercice 2.** Résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0.$$

Puis déterminer l'ensemble des états initiaux commandables par la commande bang-bang avec une seule commutation.

**Solution** Mettre le système linéaire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x + u. \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dont la solution est donnée par la formule de Duhamel

$$X(t) = e^{tA} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s) ds.$$



Avec  $X(T) = 0$ , on a

$$X_0 = - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds.$$

Notons la particularité  $A^2 = -\omega^2 I$ , on trouve

$$e^{sA} = \begin{pmatrix} \cos \omega s & \sin \omega s / \omega \\ -\omega \sin \omega s & \cos \omega s \end{pmatrix}$$

Il vient que

$$X_0 = - \int_0^T \begin{pmatrix} \sin \omega s / \omega \\ \cos \omega s \end{pmatrix} u(s) ds.$$

Avec le contrôle :

$$u^+ = \begin{cases} -1 & 0 < t < t_0, \\ +1 & t_0 < t < T \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cos \omega t_0 - \cos \omega T - 1) / \omega^2 \\ -(2 \sin \omega t_0 - \sin \omega T) / \omega \end{pmatrix}.$$

Par  $\omega = 1$  et

$$x_T = \cos T + 1, \quad y_T = -\sin T,$$

on obtient

$$(x_0 - x_T)^2 + (y_0 - y_T)^2 = 4.$$

L'ensemble des états commandables  $\mathcal{C}^+(T)$  par le contrôle  $u^+$  à l'instant  $T > 0$  est un cercle de centre  $(x_T, y_T)$  et de rayon 2.

D'autre part, on a

$$(x_T - 1)^2 + y_T^2 = 1.$$

Lorsque  $T$  varie, le centre  $(x_T, y_T)$  parcourt un cercle de centre  $(1, 0)$  et de rayon 1 et l'ensemble des états commandables  $\mathcal{C}^+$  par le contrôle  $u^+$  forme un anneau

$$\mathcal{C}^+ : \quad 1 \leq (x_0 - 1)^2 + y_0^2 \leq 2^2.$$

L'ensemble des états commandables  $\mathcal{C}^-$  par le contrôle :

$$u^- = \begin{cases} +1 & 0 < t < t_0, \\ -1 & t_0 < t < T \end{cases}$$

forme un anneau

$$\mathcal{C}^- : \quad 1 \leq (x_0 + 1)^2 + y_0^2 \leq 2^2.$$

Enfin, on a  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ .

**Exercice 3.** Examiner la commandabilité du système de Hill

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dans les cas suivants (rendez-vous spatial avec un ou deux moteurs) :

$$(i) B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (ii) B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (iii) B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solution**

$$\det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -x & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -x \end{pmatrix} = -x \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 3\omega^2 & -x & 2\omega \\ 0 & -2\omega & -x \end{pmatrix} = (x^2 + \omega^2)x^2$$

Dù vient les valeurs propres :

$$x = 0, \quad \pm \omega i.$$

(i) On a

$$(B_1, AB_1, A^2B_1, A^3B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 3\omega^2 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct donne

$$\det(B_1, AB_1, A^2B_1, A^3B_1) = 0.$$

Donc  $\text{rank}(B_1, AB_1, A^2B_1, A^3B_1) < 3$ , le système est non contrôlable par le contrôle  $B_1 u$ .

(ii) On a

$$(B_2, AB_2, A^2B_2, A^3B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul donne

$$\det(B_2, AB_2, A^2B_2, A^3B_2) = -12\omega^4.$$

$\text{rank}(B_2, AB_2, A^2B_2, A^3B_2) = 4$ , et  $\text{Re}\lambda(A) \leq 0$ , donc le système est contrôlable par le contrôle  $B_2u$  avec  $u \in [-1, 1]$ .

(iii) La concaténation n'est pas la sommation, on a

$$4 \geq \text{rank}(B_3, AB_3, A^2B_3, A^3B_3) \geq \text{rank}(B_2, AB_2, A^2B_2, A^3B_2) = 4.$$

Donc  $\text{rank}(B_3, AB_3, A^2B_3, A^3B_3) = 4$  et  $\text{Re}\lambda(A) \leq 0$ , donc le système est contrôlable par le contrôle  $B_3u$  avec  $u \in [-1, 1]$ .

**Exercice 4.** Etudier la contrôlabilité en temps minimum du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad U = \{-1 \leq v \leq 1\}.$$

**Solution** Mettre le système linéaire sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous vérifions

$$\begin{aligned} \text{rank}(B, AB) &= \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \\ \lambda^2 + \omega^2 &= 0, \quad \lambda = \pm i, \quad \lambda(A) = 0, \quad U = [-1, 1]. \end{aligned}$$

D'après Théorème 2.3, le système est exactement contrôlable. Puis, considérons la condition d'optimalité

$$p' = -A^T p, \quad (Bp(s), u(s)) \leq (Bp(s), v(s)), \quad -1 \leq v(s) \leq 1.$$

où  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  est l'état adjoint,  $u$  est la commande optimale (à déterminer) et  $v$  est une commande admissible quelconque. Soit encore

$$\begin{cases} \dot{p}_1(s) = -p_2(s), \\ \dot{p}_2(s) = p_1(s), \\ p_2(s)u(s) \leq p_2(s)v(s), \quad |v(s)| \leq 1. \end{cases}$$

En résolvant l'équation :

$$p_1''(s) + p_1(s) = 0,$$

on trouve

$$\begin{cases} p_1(s) = a \cos s + b \sin s, \\ p_2(s) = c \cos s + d \sin s \\ u(s) = -\operatorname{sgn}(p_2(s)). \end{cases}$$

Sans la perte de généralité, en supposant

$$p_2(s) = -\sin(s + \alpha), \quad 0 < \alpha < 1,$$

on trouve

$$u(s) = \operatorname{sgn}(\sin(s + \alpha)).$$

La trajectoire est une union des arcs des cercles du centre  $u = 1$  ou  $-1$ .

$$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = R^2.$$

1. Lorsque  $0 < s < 1 - \alpha$ , on a  $u = 1$ , la trajectoire suit un arc de centre  $O^+ = (1, 0)$  et de rayon 1, à partir de  $(0, 0)$  jusqu'à

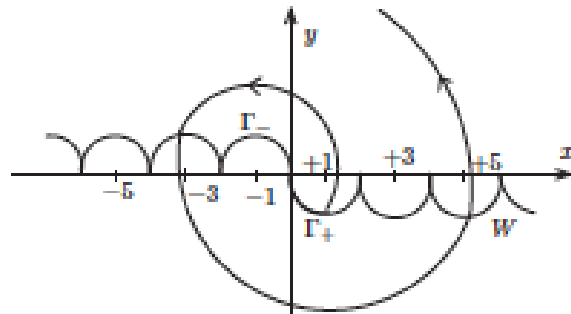
$$M = (1 - \cos(\pi - \alpha), -\sin(\pi - \alpha))$$

2. Lorsque  $\pi - \alpha < s < 2\pi - \alpha$ , la commande change de signe en  $u = -1$ , la trajectoire suit le demi-cercle de centre  $O^- = (-1, 0)$  et de rayon  $O^-M$ , à partir de  $M$  jusqu'à  $M'$ . Le point  $M'$  est la symétrie centrale de  $M$  par rapport au point  $O^-$ .

3. Lorsque  $2\pi - \alpha < s < 3\pi - \alpha$ , la commande change de signe et revient au  $u = 1$ , la trajectoire suit le demi-cercle de centre  $O^+$  et de rayon  $O^+M'$ , à partir de  $M'$  jusqu'à  $M''$ . Le point  $M''$  est la symétrie centrale de  $M'$  par rapport au point  $O^+$ .

4. On continue ainsi jusqu'à ce que la trajectoire rencontre le point  $(x_0, y_0)$ . On inverse le temps pour trouver la trajectoire optimale qui ramène  $(x_0, y_0)$  au point  $(0, 0)$ .

5. La valeur de  $\alpha$  peut être déterminée par la méthode du tir.



**Exercice 5.** (unicité en temps minimal) Soit  $\phi \in C^0(\mathbb{R}; H_0^1(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(0, 1))$  une solution de l'équation

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

telle que

$$\phi_x(t, 0) = \phi_x(t, 1) = 0 \quad \text{on } [0, T], \quad T > 1.$$

Alors,  $\phi \equiv 0$ .

**Exercice 6.** (i) Montrer que pour toutes les données initiales  $(\phi_0, \phi_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ , la solution de l'équation

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \quad \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

satisfies

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [(x - 1/2)\phi_t\phi_x dx]_0^T + \frac{T}{2} \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T (|\phi_x(t, 0)|^2 + |\phi_x(t, 1)|^2) dt. \end{aligned}$$

(ii) En déduire que

$$\int_0^T (|\phi_x(t, 0)|^2 + |\phi_x(t, 1)|^2) dt \leq (T + 1) \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx$$

et

$$\int_0^T (|\phi_x(t, 0)|^2 + |\phi_x(t, 1)|^2) dt \geq (T - 1) \int_0^1 (|\phi_1|^2 + |\phi_{0x}|^2) dx.$$

(iii) Formuler le problème aux limites non-homogènes

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = v_0, \quad u(t, 1) = v_1, & 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

sous la forme variationnelle et préciser la définition de la solution faible.

(iv) Montrer que pour toutes les données initiales  $(u_0, u_1) \in L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)$  et les contrôles  $v_0, v_1 \in L^2(0, T)$ , le problème variationnel admet une unique solution  $u$  avec une dépendance continue :

$$\begin{aligned} & \| (u(t), u_t(t)) \|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)} \\ & \leq c(\| (u_0, u_1) \|_{L^2(0, 1) \times H^{-1}(0, 1)} + \| v_0 \|_{L^2(0, T)} + \| v_1 \|_{L^2(0, T)}). \end{aligned}$$

(v) En appliquant HUM, établir la contrôlabilité exacte à l'instant  $T > 1$  du problème aux limites non homogènes pour les données initiales  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  au moyen de deux contrôles  $v_0, v_1 \in L^2(0, T)$  avec une dépendance continue

$$\|v_0\|_{L^2(0,T)} + \|v_1\|_{L^2(0,T)} \leq C \|(u_0, u_1)\|_{L^2(0,1) \times H^{-1}(0,1)}.$$

**Exercice 7.** (contrôlabilité interne en temps arbitrairement petit)

(i) Montrer qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\int_0^T \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx dt < C \int_0^T \int_0^1 |\phi_t|^2 dx dt$$

pour toutes les solutions de l'équation

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \ 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = 0, \ \phi(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \ \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

On pourra multiplier l'équation par  $\rho(t)\phi$  où  $\rho(t) = t^2(T-t)^2$ .

(ii) Etablir la contrôlabilité exacte à l'instant  $T > 0$  du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + v = 0, & 0 < t < T, \ 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, \ u(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x), \ u_t(0, x) = u_1(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

pour les données initiales  $(u_0, u_1) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$  au moyen d'un contrôle  $v \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ .

**Exercice 8.** (contrôle de Neumann) On propose d'établir la contrôlabilité exacte du problème de Neumann

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < t < T, \ 0 < x < 1, \\ u(t, 0) = 0, \ u_x(t, 1) = v(t), & 0 < t < T, \\ u(0, x) = u_0(x), \ u_t(0, x) = u_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Considérons le problème adjoint :

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, & 0 < t < T, \ 0 < x < 1, \\ \phi(t, 0) = 0, \ \phi_x(t, 1) = 0, & 0 < t < T, \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), \ \phi_t(0, x) = \phi_1(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

On note par

$$V = \{\phi \in H^1(0, 1) : \phi(0) = 0\}, \quad W = \{\phi \in H^2(0, 1) : \phi(0) = \phi_x(1) = 0\}.$$

(i) Montrer que pour toute donnée initiale  $(\phi_0, \phi_1) \in W \times V$ , le problème adjoint admet une unique solution forte

$$\phi \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; V) \cap C^0(\mathbb{R}^+; W).$$

Pour toute donnée initiale  $(\phi_0, \phi_1) \in V \times L^2(0, 1)$ , le problème adjoint admet une unique solution faible

$$\phi \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(0, 1)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; V).$$

De plus on a la loi de conservation

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx = cts.$$

(ii) En multipliant le problème non homogène par  $2x\phi_x$ , et en intégrant par parties, montrer que

$$2 \int_0^1 [\phi_t x \phi_x]_0^1 dx + \int_0^T \int_0^1 (|\phi_t|^2 + |\phi_x|^2) dx dt = \int_0^T |\phi_t(1, t)|^2 dt.$$

En déduire qu'il existe des constantes positives  $c, C$  telles que

$$c(\|\phi_0\|_V^2 + \|\phi_1\|_{L^2(0,1)}^2) \leq \int_0^T |\phi_t(1, t)|^2 dt \leq C(\|\phi_0\|_V^2 + \|\phi_1\|_{L^2(0,1)}^2)$$

pour tout  $T > 2$ .

(ii) Montrer qu'il existe des constantes positives  $c, C$  telles que

$$c(\|\phi_1\|_{V'}^2 + \|\phi_0\|_{L^2(0,1)}^2) \leq \int_0^T |\phi(1, t)|^2 dt \leq C(\|\phi_1\|_{V'}^2 + \|\phi_0\|_{L^2(0,1)}^2)$$

pour tout  $T > 2$ , où  $V'$  désigne le dual topologique de  $V$ .

(iv) Montrer que pour toutes les données initiales  $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0, 1)$  et toutes les fonctions  $v \in L^2(0, T)$ , il existe une unique fonction

$$u \in C^0(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(0, 1)),$$

appelée solution faible, telle que pour tout  $0 < t < T$  on a

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi(t, x) u_t(t, x) dx - \int_0^1 \phi_t(t, x) u(t, x) dx \\ &= \int_0^1 \phi_0(x) u_1(x) dx - \int_0^1 \phi_1(x) u_0(x) dx + \int_0^t v(s) \phi(s, 1) ds. \end{aligned}$$

(v) Par HUM, établir la contrôlabilité exacte à l'instant  $T > 2$  du problème non homogène pour les données initiales  $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0, 1)$  au moyen d'un contrôle  $v \in L^2(0, T)$  avec une dépendance continue.