Méthodes Numériques
des Equations aux Dérivées Partielles

Master CSMI 2024

Bopeng RAO

UFR de Mathématique et d'Informatique
Université de Strasbourg

Table des Matières

Références

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
[2] Ph. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
[3] R. Dautray et J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul scientifique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1988.
[4] J. Rappaz et M. Picasso, *Introduction à l'analyse numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
[5] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1983.
[6] L. Sainsaulieu, *Calcul Scientifique*, Dunod, Paris, 2000.

Chapitre I Méthodes variationnelles

§**1. Distributions.** On note par $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un point générique de $\mathbb{R}^n$. Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice de longueur $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Soit $f \in C^\infty(\Omega)$, on écrit la dérivée de f par

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Le support d'une fonction f est défini par

$$\text{supp } (f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω. C'est à dire qu'il existe un compact $K_f \subset \Omega$ tel que $\text{supp}(f) \subset K_f$.

Exemple 1.1. La fonction ρ définie ci-dessous

$$\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est la boule unité $B(0,1)$. La constante c sera choisie de telle sorte qu'on ait

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1.$$

Posant

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho\Big(\frac{x}{\epsilon}\Big),$$

alors on a :

$$\text{supp } \rho_\epsilon = B(0, \epsilon), \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\epsilon(x) dx = 1.$$

Définition 1.1. Soit $(\phi_m)_m$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$. On dit que la suite $\phi_m \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si

(i) il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que supp $(\phi_m) \subseteq K, \quad \forall m \geq 1$

(ii) $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad \partial^\alpha \phi_m \to \partial^\alpha \phi$ uniformément sur K.

Définition 1.2. Une distribution sur Ω est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \langle T, \phi \rangle \in \mathbb{R}, \\
(ii) & \langle T, a\phi + b\psi \rangle = a\langle T, \phi \rangle + b\langle T, \psi \rangle, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \\
(iii) & \phi_m \to \phi \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow \langle T, \phi_m \rangle \to \langle T, \phi \rangle.
\end{array}
$$

On désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω qui n'est autre que le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Exemple 1.2. Soit $a \in \Omega$, on définit

$$\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a), \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La forme est visiblement linéaire. Soit $\phi_m \to \phi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors il existe un compact $K \in \Omega$ tel que supp $\phi_m \subseteq K$ et $\phi_m \to \phi$ uniformément sur K. En particulier, on a

$$\langle \delta_a, \phi_m \rangle = \phi_m(a) \to \phi(a) = \langle \delta_a, \phi \rangle.$$

Définition 1.3. On dit que $T_m \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\langle T_m, \phi \rangle \to \langle T, \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Exemple 1.3. Soit $f \in L^2(\Omega)$, on définit une forme linéaire par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors on a

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \le \int_\Omega |f(x)\phi(x)|dx \le \|\phi\|_{L^2(K)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $f_m \to f$ dans $L^2(\Omega)$. Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$|\langle T_{f_m} - T_f, \phi \rangle|^2 \le \int_\Omega |f_m(x) - f(x)|^2 dx \int_K |\phi(x)|^2 dx \to 0.$$

D'où vient

$$T_{f_m} \to T_f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ainsi on a $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ avec injection continue.

Définition 1.4. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est définie par

$$\langle \partial^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Comme $\partial^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, le second membre est bien défini. Ainsi une distribution est autant de fois dérivable.

Proposition 1.1. L'application dérivée $T \to \partial^\alpha T$ est linéaire et continue dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Preuve. Soit $T_m \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors on a

$$\langle \partial^\alpha (T_m - T), \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle (T_m - T), \partial^\alpha \phi \rangle \to 0.$$

Soit

$$\partial^\alpha T_m \to \partial^\alpha T \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposition 1.2. Soit $f \in C^1(\Omega)$. Alors sa dérivée au sens des distributions coïncide avec sa dérivée au sens usuel.

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors on a

$$\Big\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \phi \Big\rangle = -\Big\langle T_f, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Big\rangle = -\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi dx = \Big\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \phi \Big\rangle$$

Soit :

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

§2. Espaces de Sobolev.

§2.1. Définition.

Définition 2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω l'espace des fonctions :

$$H^1(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \quad \partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n \Big\}.$$

On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \big(uv + \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v \big) dx = \int_\Omega \big(uv + \nabla u \cdot \nabla v \big) dx,$$

avec la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \big(|u|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2\big)dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_\Omega \big(|u|^2 + |\nabla u|^2\big)dx\Big)^{1/2}.$$

Théorème 2.1. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Preuve. Soit $(u_m)_m$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Alors $(u_m)_m$, $(\partial_i u_m)_m$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Comme $L^2(\Omega)$ est complet, on a donc

$$u_m \to u, \qquad \partial_i u_m \to v_i \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Or d'après Proposition 1.1, l'injection $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est continue. On a donc

$$\partial_i u_m \to \partial_i u, \quad \partial_i u_m \to v_i \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Ceci implique que

$$\partial_i u = v_i, \quad 1 \le i \le n.$$

$$\partial_i u_m \to \partial_i u \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

Ainsi $(u_m)_m$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$.

Définition 2.2. On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Remarque. Il est clair que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Mais en général $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$. En gros, les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent sur la frontière de Γ.

Théorème 2.2 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$, dépendante seulement de Ω, telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En particulier, la semi-norme

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

est une norme équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

Preuve. Supposons que $\Omega \subset \{a \le x_n \le b\}$. Notons $x = (x', x_n)$ avec $x' = (x_1, x_2, \cdots x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. On désigne par $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ son prolongement par zéro. Alors on a :

$$\widetilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} 1 \times \frac{\partial \widetilde{v}(x', t)}{\partial t} dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|\widetilde{v}(x',x_n)|^2 \leq (x_n-a)\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\frac{\partial\widetilde{v}(x',t)}{\partial t}\Big|^2 dt.$$

D'où vient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\widetilde{v}(x',x_n)|^2 dx' \leq (x_n-a)\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial\widetilde{v}(x',t)}{\partial t}\Big|^2 dx'dt.$$

En intégrant sur $[a,b]$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{v}(x',x_n)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\int_{\mathbb{R}^n}\Big|\frac{\partial\widetilde{v}(x',t)}{\partial t}\Big|^2 dx'dt.$$

Soit

$$\int_{\Omega}|v(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2}(b-a)^2\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|^2 dx \leq C^2(\Omega)\int_{\Omega}|\nabla v|^2 dx.$$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe une suite $v_m \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $v_m \to u$ dans $H^1(\Omega)$. D'après ce qu'on vient d'établir

$$\|v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)}.$$

Passer à la limite $m \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Poincaré.

Définition 2.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vide. On appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω l'espace des fonctions :

$$H^m(\Omega) = \Big\{u \in L^2(\Omega) : \quad \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq m\Big\}.$$

L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

est un espace de Hilbert. La norme associée est donnée par

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega \big|\partial^\alpha u\big|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

§2.2. Injections de Sobolev.

Théorème 2.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de classe C^m. Alors l'espace $C^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

$$H^m(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$$

Théorème 2.5. (Injections de Sobolev) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de classe C^1.
(i) Si $m < \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q \leq q^*, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$$

(ii) Si $m = \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty.$$

(iii) Si $m > \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega).$$

avec injections continues.

$$\begin{array}{ll} n = 1: & H^1(a,b) \hookrightarrow C^0(a,b), \\ n = 2: & \left\{ \begin{array}{l} H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(a,b), \quad 1 \leq q < +\infty, \\ H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega). \end{array} \right. \end{array}$$

Théorème 2.6. (Injections de Rellich-Kondrachov) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1.
(i) Si $m < \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall 1 \leq q < q^*, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$$

En particulier

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \text{injection compacte.}$$

(ii) Si $m = \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < +\infty.$$

(iii) Si $m > \frac{n}{2}$, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega).$$

avec injections compactes.

Remarque Lorsque Ω est non-borné, l'injection n'est pas compacte en général.

§**2.3. Notions sur les traces et Formules de Green.** En général, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas continues (sauf pour $n = 1$). Les fonctions de $H^1(\Omega)$ sont définies presque partout et la frontière Γ est de mesure nulle.

Néanmoins, on peut donner un sens précis aux traces des fonctions de $H^1(\Omega)$ par le prolongement par continuité.

Soit Ω un ouvert de frontière Γ régulière. On pourra montrer

$$\int_\Gamma \phi^2 d\Gamma \leq C \int_\Omega (|\phi|^2 + |\nabla\phi|^2)dx, \qquad \forall\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

où la constante $C > 0$ dépend de l'ouvert Ω.

Définissons l'application trace γ par

$$\gamma : \qquad \phi \to \phi|_\Gamma, \qquad \forall\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

γ est une application linéaire bornée de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Gamma)$. Or $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. On peut donc prolonger l'application γ par continuité en une application de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

D'une manière similaire, on peut définir la dérivée normale des fonctions de $H^2(\Omega)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\partial_i u)\nu_i.$$

Notons

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}$$

la dérivée normale est une application continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$:

Soit Ω un ouvert borné à frontière Γ régulière. On a la formule de Green

$$\int_\Omega (\partial_i u)v dx = -\int_\Omega u(\partial_i v)dx + \int_\Gamma uv\nu_i d\Gamma, \quad \forall u, v \in C^\infty(\Omega).$$

Par densité de $C^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et la continuité de l'application trace, cette formule reste valable pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$.

Soit maintenant $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors $\partial_i u \in H^1(\Omega)$, d'où

$$\int_\Omega \partial_i(\partial_i u)v dx = -\int_\Omega \partial_i u \partial_i v dx + \int_\Gamma v(\partial_i u)\nu_i d\Gamma.$$

En sommant ces égalités, on obtient une autre formule de Green :

$$\int_\Omega (\Delta u)v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\Gamma, \quad \forall u \in H^2(\Omega),\ v \in H^1(\Omega),$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\partial_i u) = \partial_{11}u + \partial_{22}u + \cdots + \partial_{nn}u.$$

§**3. Méthode variationnelle.** Le théorème suivant est à la base de la résolution des problèmes variationnels.

Théorème 3.1. (Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert. On se donne
- une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive $a(u,v)$ sur $V \times V$ telle que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \quad a(u,u) \geq \alpha\|u\|_V^2, \quad \forall (u,v) \in V \times V,$$

où $M > 0, \alpha > 0$ sont des constantes positives ;
- une forme linéaire continue $l \in V'$:

$$|l(v)| \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

Alors il existe un unique élément $u \in V$ tel que

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V.$$

De plus on a

$$\|u\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|l\|$$

§**3.1. Problème aux conditions de Dirichlet homogènes.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ est une fonction connue.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ une solution du problème de Dirichlet (1). En multipliant l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega (uv - \Delta uv) = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par la formule e Green, on obtient une équation variationnelle :

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v)dx = \int_\Omega fvdx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En posant

$$a(u,v) = \int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v)dx = (u,v)_{H^1(\Omega)},$$

$$l(v) = \int_\Omega fv dx = (f,v)_{L^2(\Omega)},$$

on obtient

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V. \tag{2}$$

Théorème 3.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et régulier. Alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème variationnel (2) admet une et une seule solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Preuve. Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}
&|a(u,v)| = |(u,v)|_{H^1(\Omega)} \le \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},\\
&a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)},\\
&|l(v)| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Donc $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur l'espace produit $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et $l(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur l'espace $H_0^1(\Omega)$. D'après le Lemme de Lax-Milgram, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de l'équation variationnelle (2) telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La solution u de l'équation variationnelle est appelée solution faible du problème de Dirichlet homogène. Supposons que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Alors la formule de Green redonne

$$\int_\Omega (u - \Delta u - f)v = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \subset C_c^\infty(\Omega).$$

Comme $u - \Delta u - f \in L^2$, ceci signifie que

$$u - \Delta u - f \in \{C_c^\infty(\Omega)\}^\perp_{L^2(\Omega)} = \{0\}.$$

§**3.4. Problème de Neumann.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ régulière. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{3}$$

où $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma)$ sont deux fonctions données.

Soit u une solution régulière du problème de Neumann. En multipliant l'équation aux dérivées partielles par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (uv - \Delta uv) = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Par la formule de Green, on obtient une équation variationnelle :

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) = \int_\Omega fv + \int_\Gamma gvd\Gamma, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Puis, en posant

$$a(u,v) = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)dx, \quad l(v) = \int_\Omega fvdx + \int_\Gamma gvd\Gamma,$$

on obtient une équation variationnelle :

$$a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

Théorème 3.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et régulier. Alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$ et tout $g \in L^2(\Gamma)$, le problème variationnel (4) admet une et une seule solution $u \in H^1(\Omega)$.

Preuve. Pour tous $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
&|a(u,v)| = |(u,v)_{H^1(\Omega)}| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},\\
&a(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)},\\
&l(v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} + (g,v)_{L^2(\Gamma)}\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)})\|v\|_{H^1(\Omega)}\\
&\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma)})\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Par Lemme de Lax-Milgram, il existe $u \in H^1(\Omega)$ unique solution de l'équation variationnelle. De plus, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Supposons $u \in H^2(\Omega)$, la formule de Green redonne

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v + \int_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\Big)vd\Gamma = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

En prenant d'abord une fonction test $v \in C_c^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = 0, \qquad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Par la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on retrouve l'équation aux dérivées partielles, ceci donne

$$\int_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\Big) v d\Gamma = 0, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$ est dense, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - g \in (\gamma(H^1(\Omega)))^\perp = \{0\}.$$

On retrouve la condition aux limites de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - g = 0$$

§3.4. Quelques résultats de régularité.

Théorème 3.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible du problème de Dirichlet homogène :

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v) = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors

$$u \in H^2(\Omega), \qquad \|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 3.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible du problème de Neumann homogène $g = 0$:

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v) = \int_\Omega fv, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Alors

$$u \in H^2(\Omega), \qquad \|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Exercices

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Montrer que le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

admet une seule solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$.

(i) Montrer que si le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

admet une solution faible $u \in H^1(\Omega)$, alors on a

$$\int_\Omega f dx + \int_\Gamma g d\Gamma = 0.$$

(ii) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C \Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \Big(\int_\Omega u dx \Big)^2 \Big\}, \qquad u \in H^1(\Omega).$$

(iii) Montrer que

$$V = \{ v \in H^1(\Omega) : \quad \int_\Omega v dx = 0 \}$$

est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ et la semi-norme

$$\|v\|_V = \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \Big)^{1/2} dx$$

est équivalente à la norme usuelle de l'espace $H^1(\Omega)$.

(iv) Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in V$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx + \int_\Gamma g \phi \Gamma, \quad \forall \phi \in V.$$

Montrer que l'équation variationnelle reste vraie pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2. On se donne des fonctions $f \in L^2(\Omega), a_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ et $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0, \gamma > 0$ telles que

$$a_0(x) \geq \alpha; \qquad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2, \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega.$$

Considérons le problème de Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{cases} -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u\Big) + a_0 u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Définissons

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix}, \quad div(v) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k v_k, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = (A\nabla u, \nu)_{\mathbb{R}^n}.$$

(i) Montrer que

$$-\int_\Omega div(A\nabla u) v dx = \int_\Omega (A\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^n} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu_A} uv d\Gamma.$$

pour toutes les fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.

(ii) Formuler (1) sous la forme variationnelle suivante

$$2 \qquad \int_\Omega (A\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^n} dx = \int_\Omega f v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

(iii) Montrer que le problème variationnel (2) admet une seule solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

(iv) Supposons que $u \in H^2(\Omega)$. Justifier que u est une solution du problème (1).

Exercice 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2 dont la frontière Γ est composée de deux parties disjointes Γ_1 et Γ_0.

Soient $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma)$ et $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$ et $\alpha \geq 0$. Considérons le problème de Robin

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

(i) Justifier la formulation variationnelle suivante

$$\int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_{\Gamma_1} \alpha uv d\Gamma = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma, \quad v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

(ii) Montrer que le problème variationnel admet une seule solution $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

(iii) Supposons que la solution du problème variationnel $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Montrer que u est une solution du problème de Robin.

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2 dont la frontière Γ est composée de deux parties disjointes Γ_1 et Γ_0. Dans cet exercice on distingue les cas $\mathrm{mes}(\Gamma_0) > 0$ ou $\mathrm{mes}(\Gamma_0) = 0$.

Soient $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma)$ et $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$. Considérons le problème de Robin

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

(i) Justifier la formulation variationnelle suivante

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \alpha u v d\Gamma = \int_\Omega f v dx + \int_{\Gamma_1} g v d\Gamma, \quad v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

(ii) Montrer que le problème variationnel admet une seule solution $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ dans les cas suivants

(a) $\mathrm{mes}(\Gamma_0) > 0$ et $\alpha \geq 0$ sur Γ_1. On utilise l'inégalité de Poincaré dans l'espace $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

(b) $\mathrm{mes}(\Gamma_0) = 0$ et $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ sur Γ_1. Dans ce cas, $\Gamma_0 = \emptyset$ et $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = H^1(\Omega)$. On montre

$$\int_\Omega |v|^2 dx \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \alpha |v|^2 d\Gamma \Big), \quad v \in H^1(\Omega).$$

Exercice 6. Soient $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u = 1, & \text{dans } \Omega \\ u(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0, & 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = x, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

Montrer que le problème admet une seule solution faible dans un sous-espace de Sobolev approprié.

Chapitre II Méthode des éléments finis pour l'approximation de problèmes elliptiques

§**1. Méthode de Ritz-Galerkine.** Considérons un problème variationnel abstrait :

$$\text{Trouver} \quad u \in V : \qquad a(u,v) = l(v), \qquad \forall v \in V,$$

où V est un espace de Hilbert, a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $V \times V$, et l est une forme linéaire et continue sur V. D'après le Lemme de Lax-Milgram, l'équation variationnelle admet une unique solution $u \in V$.

La méthode de Ritz-Galerkine consiste à chercher une solution approchée $u_h \in V_h$ dans un sous espace de dimension finie de V :

$$\text{Trouver} \quad u_h \in V_h : \qquad a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Soit $(\phi_1, \phi_2 \cdots, \phi_N)$ une base de V_h. Un élément $u_h \in V_h$ s'écrit sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_j \phi_j.$$

La linéarité de $a(u_h, \cdot)$ et celle de $l(\cdot)$ impliquent que l'équation variationnelle de dimension finie est équivalente au système

$$a\Big(\sum_{i=1}^{N} u_i\phi_i, \phi_j\Big) = \sum_{i=1}^{N} a(\phi_i, \phi_j) u_i = l(\phi_j), \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, N.$$

Introduisons

$$\begin{aligned}
&A = (a_{ij}) = \big(a(\phi_i, \phi_j)\big), \qquad 1 \le i, j \le N,\\
&U = (u_1, u_2, \cdots, u_N) \in \mathbb{R}^N,\\
&b = (b_i) = \big(l(\phi_1), l(\phi_2), \cdots, l(\phi_N)\big) \in \mathbb{R}^N.
\end{aligned}$$

Nous écrivons le système linéaire sous la forme matricielle

$$AU = b.$$

La matrice A est définie positive, donc le système linéaire associé admet une unique solution.

Lemme de Céa. Supposons que a est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive sur $V \times V$ et l est une forme linéaire continue sur V. Alors la solution du problème approchée u_h satisfait l'estimation suivante :

$$\|u-u_h\|_V \leq C \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_V < C\|u-\Pi_h u\|_V.$$

Preuve. Comme $V_h \subset V$, on peut choisir $v = v_h$ dans l'équation variationnelle et on obtient

$$a(u, v_h) = l(v_h), \qquad a(u_h, v_h) = l(v_h), \qquad \forall v_h \in V_h.$$

La différence de ces deux équations donne l'orthogonalté de CEA

$$a(u-u_h, v_h) = 0, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Ceci donne

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h-u_h).$$

Soit

$$a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h), \quad v_h \in V_h$$

Par simplification, on obtient

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|_V, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Ainsi pour avoir une bonne approximation, il faut que la dimension de l'espace d'approximation V_h soit grande et cela conduit naturellement à une matrice A de grande taille. Une idée essentielle dans la construction de l'espace d'approximation V_h est de choisir les fonctions de base de supports petits tels que les termes $a(\phi_i, \phi_j)$ s'annulent le plus souvent possible. La matrice ainsi obtenue sera une matrice creuse pour laquelle on dispose de méthodes efficaces pour la résolution numérique du système associé.

§**2. Eléments finis de Lagrange.** On se donne un triplet (K, P, Σ) où

(i) K une partie compacte de $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$ d'intérieur non vide (segment, triangle, carré, tétraèdre, cube...)

(ii) $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^d$ un ensemble fini de points distincts de K (extrémités, sommets, milieux...,)

(iii) P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions définies sur K (polynômes).

Définition 2.1. On dit que l'ensemble Σ est P-unisolvant si pour tous réels α_i il existe une et une seule fonction $p \in P$ telle que les conditions d'interpolation de Lagrange

$$p(a_i) = \alpha_i, \qquad 1 \leq i \leq d$$

soient satisfaites. Dans ce cas, le triplet (K, P, Σ) est appelé un élément fini de Lagrange.

Si (K, P, Σ) est un élément fini de Lagrange, alors pour tout $1 \leq i \leq d$, il existe une et une seule fonction $p_i \in P$ telle que

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \qquad 1 \leq i, j \leq d.$$

Les fonctions p_i sont appelées fonctions de base de l'élément fini (K, P, Σ).

Soit $v \in C^0(K)$, on définit l'opérateur de P-interpolation de Lagrange sur Σ par

$$\Pi v = \sum_{i=1}^{d} v(a_i) p_i \in P.$$

Comme

$$(\Pi v)(a_j) = \sum_{i=1}^{d} v(a_i) p_i(a_j) = \sum_{i=1}^{d} v(a_i) \delta_{ij} = v(a_j), \qquad 1 \leq j \leq d.$$

on voit que Πv est l'unique fonction de P qui vérifie les conditions d'interpolation de Lagrange. En particulier, la $P-$unisolvance sur Σ implique que

$$\Pi p = p, \qquad \forall p \in P.$$

Soit $\mathcal{L}$ l'application linéaire de P dans $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{L}(p) = (p(a_i))_{i=1}^{d}.$$

Σ est $P-$unisolvant si et seulement si $\mathcal{L}$ est bijective. Sous la condition

$$\dim P = \text{card } \Sigma,$$

l'application linéaire $\mathcal{L}$ est bijective si et seulement si elle est injective, ou si et seulement si elle est surjective. D'où vient les critères suivants.

Proposition 2.1. Supposons $\dim P = \text{card } \Sigma$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'ensemble Σ est $P-$unisolvant,

(ii) pour tout $p \in P$: $\quad p(a_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq d \Longrightarrow p \equiv 0$,

(iii) il existe des fonctions de base $(p_i)_{1 \leq i \leq d}$ de P.

Nous donnons quelques éléments finis les plus utilisés dans la pratique. Dans tous les exemples donnés, la condition $\dim P = \text{card } \Sigma$ est toujours satisfaite.

1. Soit $K = [a, b]$ un segment. On note par $c = (a+b)/2$ le milieu du segment.
- On pose

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \{p = \alpha + \beta x\}.$$

Les fonctions de base sont

$$p_a = \frac{x-b}{a-b}, \qquad p_b = \frac{x-a}{b-a}.$$

Le triplet (K, P, Σ) forme un élément fini $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

- On pose

$$\Sigma = \{a, c, b\}, \quad \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \{p = \alpha + \beta x + \gamma x^2\} = Span\{1, x, x^2\}.$$

$$Card\Sigma = dim(\mathbb{P}_2) = 3$$

Les fonctions de base

$$p_a = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad p_b = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad p_c = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Donc le triplet (K, P, Σ) est un élément fini $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit K un triangle non dégénéré de sommets a_1, a_2, a_3. On note par a_{12}, a_{13}, a_{23} les milieux des arêtes. On note par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les coordonnées barycentriques relativement aux sommets a_1, a_2, a_3. C'est à dire que λ_i sont des fonctions affines qui valent 1 au sommet a_i et 0 aux deux autres sommets $a_j, j \neq i$.

- On pose

$$\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2) = \{p = \alpha + \beta x + \gamma y\} = Span\{1, x, y\}.$$

$$dim(P) = Card(\Sigma).$$

On vérifie que les fonctions de base sont

$$p_i = \lambda_i, \qquad 1 \leq i \leq 3$$

Le triplet (K, P, Σ) forme donc un élément fini $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$.

- On pose

$$\Sigma = \{a_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \qquad a_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 3\},$$
$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2\}.$$

Les fonctions de base sont

$$p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \le i \le 3, \quad p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j \quad 1 \le i < j \le 3.$$

Donc le triplet (K, P, Σ) est bien un élément fini $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit K un tétraèdre non dégénéré de sommets a_1, a_2, a_3, a_4. On note par $a_{ij}, 1 \le i < j \le 4$ les milieux des arêtes. On note par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les coordonnées barycentriques relativement aux sommets a_1, a_2, a_3, a_4. C'est à dire que λ_i sont des fonctions affines qui valent 1 au sommet a_i et 0 aux deux autres sommets $a_j, j \ne i$.

- On pose

$$\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{R}^3) = \{p = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z\}.$$

Les fonctions de base sont

$$p_i = \lambda_i, \qquad 1 \le i \le 4.$$

Le triplet (K, P, Σ) forme un élément fini $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^3)$.

- On pose

$$\Sigma = \{a_i : \quad 1 \le i \le 4, \quad a_{ij} : \quad 1 \le i < j \le 4\},$$
$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) = \{1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}.$$

$$Card(\Sigma) = 4 + 6 = 10, \quad dim\mathbb{P}_2(X, Y, Z) = 10.$$

Les fonctions de base sont de même forme que pour un triangle

$$p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad 1 \le i \le 4, \quad p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j \quad 1 \le i < j \le 4.$$

Le triplet (K, P, Σ) est bien un élément fini $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$.

4. Soit K un carré unité de sommets a_1, a_2, a_3, a_4. On pose

$$\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$\mathbb{Q}_1(\mathbb{R}^2) = \{p = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xy\} = Span\{1, x, y, xy\}.$$

$$card\Sigma = dim(\mathbb{Q}_1(\mathbb{R}^2)) = 4$$

Les fonctions de base sont

$$p_1 = (1 - x)(1 - y), \quad p_2 = x(1 - y), \quad p_3 = xy, \quad p_4 = (1 - x)y.$$

Donc, le triplet (K, P, Σ) est donc un élément fini $\mathbb{Q}_1(\mathbb{R}^2)$.

5. Soit K un cube unité de sommets $a_1, a_2, \cdots, a_8$. On pose

$$\Sigma = \{a_i; \quad 1 \leq i \leq 8\}, \quad \mathbb{Q}_1(X, Y, Z) = \{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\}.$$

Ainsi le triplet $(K, \mathbb{Q}_1, \Sigma)$ est donc un élément fini.

$$p_i = (x - \bar{a}_{i1})(y - \bar{a}_{i2})(z - \bar{a}_{i3}), \quad a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}).$$

Donnons maintenant une méthode systématique pour générer à partir d'un un élément fini toute une famille d'éléments finis. Soit $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange sur le triangle de référence $\widehat{K}$. Soit F une application affine inversible telle que $K = F(\widehat{K})$. On définit

$$\Sigma = F(\widehat{\Sigma}), \quad P = \{p = \widehat{p} \circ F^{-1}, \qquad \widehat{p} \in \widehat{P}\}.$$

Comme $\widehat{\Sigma}$ est $\widehat{P}$-unisolvant, et comme F est une bijection, on a

$$\text{card } \Sigma = \text{card } \widehat{\Sigma} = \dim \widehat{P} = \dim P.$$

D'autre part, on a

$$p_i(a_j) = \widehat{p}_i(F^{-1}(a_j)) = \widehat{p}_i(\widehat{a}_j) = \delta_{ij}.$$

Ainsi (K, P, Σ) est un élément fini de Lagrange sur K.

Les éléments finis $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ et (K, P, Σ) sont affinements équivalents.

§3. Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis.

1. Construction des espaces d'approximation. Soit Ω un ouvert polygonal ou $2D$ polyèdrique en $3D$. On construit une décomposition finie du domaine :

$$\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

telle que

(i) chaque $K \in \mathcal{T}_h$ est un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ de type triangle, carré en $2D$, ou tétraèdre, cube en $3D$.

(ii) l'intersection des intérieurs de deux polyèdres distincts est vide,

(iii) les faces de deux polyèdres adjacents se correspondent exactement.

Une telle décomposition $\mathcal{T}_h$ est dite régulière. On note par h la taille de la décomposition $\mathcal{T}_h$:

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K,$$

où h_K désigne le diamètre de K.

Une fois que la décomposition est faite, nous définissons l'élément fini (K, P_K, Σ_K) affinement équivalent à un unique élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$.

Puis nous construisons l'espace d'approximation V_h des fonctions $v_h : \quad \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de la manière suivante :

(i) $\quad v_h|_K \in P_K, \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h,$

(ii) la fonction v_h prend les mêmes valeurs sur les noeuds communs de deux triangles adjacents. Ces valeurs sont appelées degrés de liberté de la fonction v_h.

A titre d'exemple, on considère une décomposition triangulaire $\mathcal{T}_h$ d'un ouvert polygonal Ω.

Théorème 3.1. L'espace d'approximation V_h construit à partir de l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est un sous espace de $C^0(\overline{\Omega})$, par conséquent un sous espace de $H^1(\Omega)$.

Preuve. Montrons d'abord que v_h est continue. Comme la restriction de v_h à chaque triangle est un polynôme de degré 1, il suffit de montrer qu'elle est continue à travers l'arête commune de deux triangles adjacents. Soient K_1, K_2 deux triangles adjacents. Notons a, b les deux sommets. Soit t l'abscisse le long du segment $[a, b]$. Alors les deux fonctions $v_h|_{K_1}$ et $v_h|_{K_2}$ sont des polynômes de degré 1 de variable t sur le segment $[a, b]$. Elles coincident sur les deux points a, b, et donc coincident sur le segment $[a, b]$ entier. Donc $v_h \in C^0(\overline{\Omega})$.

D'autre part, on a $v_h|_K \in H^1(K)$, le théorème de recollement implique que $v_h \in H^1(\Omega)$.

On peut donc écrire

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Définition 3.1. Une famille d'éléments finits $(K, P_K, \Sigma_K), K \in \mathcal{T}_h$ est dite de classe C^0, si $P_K \subset C^0(K)$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ d'une part, et d'autre part toute fonction $v_h \in V_h$ prend les mêmes valeurs sur l'arête commune de deux triangles adjacents de $\mathcal{T}_h$.

Le Théorème 3.1 signifie que la famille d'éléments finits de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est de classe C^0.

Désignons par a_i les noeuds de la triangulation $\mathcal{T}_h$ (ou seulement les noeuds intérieurs pour les problèmes homogènes). On désigne par

$$\phi_i \in V_h : \qquad \phi_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

Le système $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$ est linéairement indépendant et forme une base de V_h.

Enfin, le support de chaque fonction ϕ_i est constitué des triangles autour du noeud a_i. Le nombre de ces triangles est très petit $(6 \sim 8)$ par rapport au nombre des triangles de $\mathcal{T}_h$. La matrice de rigidité est donc une matrice creuse (tridiagonale ou tridiagonale par blocs selon la numérotation globale des noeuds de $\mathcal{T}_h$).

On peut montrer que les espaces d'approximation V_h construits à partir de l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{Q}_1$ ou $\mathbb{Q}_2^*$ sont aussi des sous espaces de $H^1(\Omega)$. Le fait de prendre des polynômes de degré plus élevé n'apporte pas de régularité supplémentaire pour les espaces d'approximation, mais pourra certainement donner plus de précision pour la résolution du problème approché.

2. Construction des matrices élémentaires. Soit K^l un triangle de $\mathcal{T}_h$ de sommets a_1^l, a_2^l, a_3^l. Pour l'élément fini $\mathbb{P}_1$, la matrice élémentaire A^l associée à K^l est une matrice pleine d'ordre 3 :

$$a_{\alpha\beta}^l = \int_{K^l} \nabla p_\alpha \nabla p_\beta dx, \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq 3.$$

Soit $\widehat{K}$ le triangle de référence de sommets $\widehat{a}_1 = (0,0), \widehat{a}_2 = (1,0), \widehat{a}_3 = (0,1)$ dont les fonctions de base sont notées par $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$. Notons par

$$x = F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b$$

l'application affine inversible qui envoie $\widehat{K}$ sur K. Par la formule

$$\widehat{\nabla}\widehat{p}(\widehat{x}) = B^T \nabla p(x)$$

on peut ramener le calcul des termes $a_{\alpha\beta}$ sur le triangle de référence $\widehat{K}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{K^l} p_\alpha p_\beta dx = |\det B| \int_{\widehat{K}} \widehat{p}_\alpha \widehat{p}_\beta d\widehat{x}, \\
&\int_{K^l} \nabla p_\alpha \nabla p_\beta dx = |\det B| \int_{\widehat{K}} B^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{p}_\alpha B^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{p}_\beta d\widehat{x}.
\end{aligned}$$

3. Assemblage de la matrice de rigidité. Nous allons assembler la matrice A à partir des matrices élémentaires A^l. Pour fixer l'idée, on considère l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$.

Nous numérotons les triangles de $\mathcal{T}_h$ comme

$$K^l, \qquad 1 \leq l \leq L.$$

Pour chaque triangle K^l nous numérotons ses trois sommets comme

$$a^l_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3.$$

Cette numérotation locale est arbitraire dans chaque triangle. De plus, un sommet appartenant à deux triangles adjacents peut être numéroté de deux façons différentes dans les deux triangles.

Si a_i est un sommet a^l_α du triangle K^l, nous stockons cette information dans un tableau par une application :

$$\theta(l, \alpha) = i,$$

qui fait correspondre les numérotations locales et la numérotation globale.

Soient ϕ_i, ϕ_j deux fonctions de la base globale. Nous pouvons calculer le terme a_{ij} de la matrice A par la formule :

$$a_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_i \nabla\phi_j dx = \sum_{l=1}^{L} \int_{K^l} \nabla\phi_i \nabla\phi_j dx.$$

Pour que K^l fasse partie de l'intersection des supports de ϕ_i et de ϕ_j, il faut et il suffit que a_i, a_j soient des sommets du triangle K^l, c'est à dire qu'il existe α, β tels que

$$a_i = a^l_\alpha, \quad a_j = a^l_\beta \Longleftrightarrow \theta(l, \alpha) = i, \quad \theta(l, \beta) = j.$$

Dans ce cas, on a

$$\phi_i|_{K^l} = p^l_\alpha, \qquad \phi_j|_{K^l} = p^l_\beta.$$

D'où vient

$$a_{ij} = \sum_{l \in I_{ij}} \int_{K^l} \nabla p^l_\alpha \nabla p^l_\beta dx = \sum_{l \in I_{ij}} a^l_{\alpha\beta},$$

où la sommation est faite sur l'ensemble des indices :

$$I_{ij} = \{l : \quad \exists 1 \leq \alpha, \beta \leq 3 \quad \text{tels que} \quad \theta(l, \alpha) = i, \quad \theta(l, \beta) = j\}.$$

Au vu de cette dernière formule, on peut commencer par calculer les matrices élémentaires sur chaque triangle K. Le calcul des termes de la matrice A se fait alors en sommant *convenablement* des termes des matrices élémentaires.

La matrice A peut être assemblée successivement par l'algorithme
$A = 0$
Pour $l = 1..L$,

Pour $\alpha, \beta = 1..3$, faire

$$A(\theta(l,\alpha), \theta(l,\beta)) = A(\theta(l,\alpha), \theta(l,\beta)) + A^l(\alpha,\beta)$$

où A^l est la matrice élémentaire associée au triangle K^l.

4. Assemblage du second membre. Pour évaluer le second membre, on peut utiliser une formule de quadrature du même ordre d'erreur que la méthode des éléments finis. Par exemple, pour une méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en $2D$, on peut utiliser la formule du trapèze :

$$\int_K f(x)\phi_i(x)dx \sim \frac{|K|}{3} f(a_i) \Longrightarrow l(\phi_i) \sim \sum_{l=l_p^i} \frac{|K_l|}{3} f(a_i).$$

On peut également approcher f par son interpolation $\Pi_h f$ dans l'espace d'approximation V_h, ce qui donne

$$l(\phi_i) \sim \int_\Omega \sum_{j=1}^N f(x_j)\phi_j(x)\phi_i(x)dx = \sum_{j=1}^N f(x_j) \int_\Omega \phi_j(x)\phi_i(x)dx.$$

On obtient $F = Mb$ où

$$b = (f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_N)), \qquad (M)_{ij} = \int_\Omega \phi_i(x)\phi_j(x)dx.$$

L'assemblage de la matrice M se fait de la même manière que pour la matrice de rigidité A.

5. Résolution du système linéaire. La matrice A étant symétrique et définie positive, la résolution du système linéaire $AU = F$ peut se faire par la décomposition de Cholesky ou une méthode itérative, par exemple, la méthode du gradient conjugué ou la méthode de relaxation...

Un exemple d'un élément fini de Lagrange.

1. Formulation variationnelle. Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \end{cases}$$

dont la formulation variationnelle est suivante :

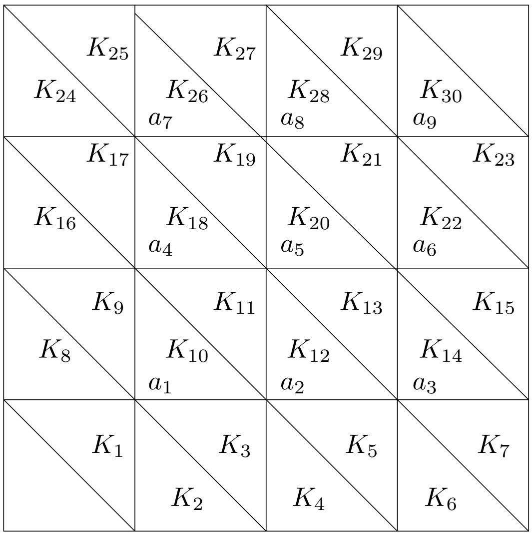
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, le problème variationnel admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. Triangulation du domaine. Soit $L > 0$ un entier. Posons

$$h = \frac{1}{L+1}, \quad x_p = ph, \quad y_q = qh, \quad 0 \le p, q \le L+1.$$

On divise d'abord le carré unité en $(L+1)^2$ petits carrés de sommets (x_p, y_q), puis on coupe chaque petit carré en deux triangles par la diagonale. De cette manière on obtient une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\overline{\Omega}$ illustrée dans figure :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1		2		3				4	1	5	2	6	3			7	4	8	5	9	6				7		8		9
2			1		2		3	1		2	4	5	5		6	4		5	7	6	8		9	7		8		9		
3		1		2		3			1	4	2	3	3	6			4	7	5	8	6	9			7		8		9	

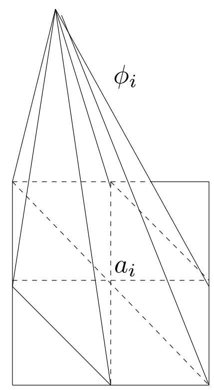
La triangulation $\mathcal{T}_h$ contient $N = L^2$ noeuds intérieurs à Ω que nous numérotons par ligne :

$$a_i = (x_p, y_q), \qquad \text{avec} \quad i = p + (q-1)L, \quad 1 \le p, q \le L.$$

3. Construction de l'espace d'approximation. On pose

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega) : \quad v_h|_\Gamma = 0, \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K)\}.$$

D'après le Théorème 3.1, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. On est donc dans le cadre des éléments finis conformes. Nous notons par ϕ_i les fonctions de base illustrées comme suit.



3. Construction des matrices élémentaires. Soit $\widehat{K}$ le triangle de référence de sommets $\widehat{a}_1 = (0,0), \widehat{a}_2 = (1,0), \widehat{a}_3 = (0,1)$ et soit K un triangle de $\mathcal{T}_h$ de sommets a_1, a_2, a_3. On détermine l'application F par $F(\widehat{a}_\alpha) = a_\alpha$:

$$B\widehat{a}_1 + b = a_1, \quad B\widehat{a}_2 + b = a_2, \quad B\widehat{a}_2 + b = a_3.$$

D'où

$$Be_1 = a_2 - a_1, \qquad Be_2 = a_3 - a_1 \Longrightarrow B = (a_2 - a_1, a_3 - a_1).$$

Les trois fonctions de base sur $\widehat{K}$ sont

$$\widehat{p}_1 = 1 - \widehat{x} - \widehat{y}, \quad \widehat{p}_2 = \widehat{x}, \quad \widehat{p}_3 = \widehat{y}.$$

On a donc

$$\widehat{\nabla}\widehat{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\nabla}\widehat{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\nabla}\widehat{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, dans les cas $a_1 = (x_i, y_j),\ a_2 = (x_i \pm h, y_j),\ a_3 = (x_i, y_j \pm h)$, on a

$$B = \pm hI, \qquad \det B = h^2.$$

Dans les deux cas, la matrice élémentaire est donnée par

$$A^K = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

4. Assemblage de la matrice de rigidité. Pour $L = 3$, la matrice A a une allure suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

§4. Erreur d'interpolation de Lagrange.

Théorème 4.1. Soit Ω un ouvert borné à frontière C^1 par morceaux. Alors la norme quotient

$$\|\dot{u}\|_{m,\Omega} = \inf_{p \in \mathbb{P}_{m-1}} \|u - p\|_{m,\Omega}$$

et la semi-norme

$$|u|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^2 dx \Big)^{1/2}$$

sont équivalentes sur l'espace quotient $V = H^m(\Omega)/\mathbb{P}_{m-1}$.

Thórème 4.2. Soit k, m, n des entiers positifs tels $0 \leq m \leq k+1$ et $k+1 > n/2$. Soit $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange tel que

$$\mathbb{P}_k \subset \widehat{P} \subset H^m(\widehat{K}).$$

Alors il existe une constante $C(\widehat{K}, \widehat{\Pi}) > 0$ telle que

$$\|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \leq C|\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}}, \quad \widehat{v} \in H^{k+1}(\widehat{K}). \tag{4.5}$$

Preuve. Comme $k+1 > n/2$, l'injection de Sobolev implique que $H^{k+1}(\widehat{K}) \subset C^0(\widehat{K})$, et qu'il existe une constante $C(\widehat{K}) > 0$ telle que

$$\|\widehat{v}\|_{\infty,\widehat{K}} \leq \widehat{C}\|\widehat{v}\|_{k+1,\widehat{K}}, \qquad \forall \widehat{v} \in H^{k+1}(\widehat{K}).$$

On a donc

$$\|\widehat{\Pi}\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \le \sum_{i=1}^{d} |\widehat{v}(\widehat{a}_i)| \|\widehat{p}_i\|_{m,\widehat{K}} \le \max_{1\le i\le d} |\widehat{v}(\widehat{a}_i)| \sum_{i=1}^{d} \|\widehat{p}_i\|_{m,\widehat{K}} \le \widehat{C}\|\widehat{v}\|_{k+1,\widehat{K}}.$$

où

$$C(\widehat{K},\widehat{\Pi}) = \widehat{C}\sum_{i=1}^{d} \|\widehat{p}_i\|_{m,\widehat{K}},$$

Par conséquent, $\widehat{\Pi}$ est un opérateur linéaire continu de $H^{k+1}(\widehat{K})$ dans $H^m(\widehat{K})$.

Ensuite pour tout $\widehat{p} \in \mathbb{P}_k \subset \widehat{P}$, on a

$$\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v} = (\widehat{v} - \widehat{p}) - \widehat{\Pi}(\widehat{v} - \widehat{p}) = (\widehat{I} - \widehat{\Pi})(\widehat{v} - \widehat{p}).$$

Comme $k+1 \ge m$, l'application d'identité $\widehat{I}$ est continue de $H^{k+1}(\widehat{K})$ dans $H^m(\widehat{K})$. D'où vient

$$\|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \le \|\widehat{I} - \widehat{\Pi}\| \|\widehat{v} - \widehat{p}\|_{k+1,\widehat{K}}, \quad \forall \widehat{p} \in \mathbb{P}_k.$$

Grâce à (4.4), on en déduit

$$\|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}\|_{m,\widehat{K}} \le \|\widehat{I} - \widehat{\Pi}\| \inf_{\widehat{p}\in\mathbb{P}_k} \|\widehat{v} - \widehat{p}\|_{k+1,\widehat{K}} \le C|\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}}.$$

Remarque. L'estimation (4.5) est une estimation d'erreur de l'interpolation polynomiale. Elle est essentielle dans l'étude de la convergence de la méthode des éléments finis.

Proposition 4.3. Soit $\widehat{K}$ un ouvert borné de frontière C^1 par morceaux. Soit $F : \widehat{x} \to B\widehat{x} + b$ une application affine inversible qui envoie $\widehat{K}$ sur K. Alors pour tout $m \ge 0$, l'application $v \to \widehat{v} = v \circ F$ est un isomorphisme de $H^m(K)$ dans $H^m(\widehat{K})$. De plus il existe une constante positive C qui ne dépend que de m, n telle que

$$|\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \le C\|B\|^m \big|\det B\big|^{-1/2} |v|_{m,K}, \tag{4.6}$$

$$|v|_{m,K} \le C\|B^{-1}\|^m \big|\det B\big|^{1/2} |\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}, \tag{4.7}$$

pour tout $v \in H^m(K)$.

Proposition 4.4. On note par h_K la taille de K et et ρ_K le diamètre du plus grand sphère contenu dans K. Soit $F : \widehat{x} \to x = B\widehat{x} + b$, l'application affine qui envoie $\widehat{K}$ sur K. Alors on a

$$\|B\| \le \frac{h_K}{\rho_{\widehat{K}}}, \qquad \|B^{-1}\| \le \frac{h_{\widehat{K}}}{\rho_K}. \tag{4.8}$$

Preuve. Par définition de la norme, on a

$$\|B\| = \sup_{|\xi|=1} \|B\xi\| = \frac{1}{\rho_{\widehat{K}}} \sup_{|\xi|=\rho_{\widehat{K}}} \|B\xi\| = \frac{1}{\rho_{\widehat{K}}} \|B\xi_0\|$$

où $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi_0| = \rho_{\widehat{K}}$. Alors il existe $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{K}$, tels que $\widehat{x} - \widehat{y} = \xi_0$. De plus on a $x - y = B(\widehat{x} - \widehat{y}) = B\xi_0$ avec $x, y \in K$. D'où vient

$$\|B\xi_0\| = \|x - y\| \leq h_K \Longrightarrow \|B\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\widehat{K}}}.$$

En échangeant les rôles de B et B^{-1}, on obtient l'autre inégalité.

Thórème 4.5. Soit k, m, n des entiers positifs tels $0 \leq m \leq k+1$ et $k+1 > n/2$. Soit $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ un élément fini de Lagrange tel que

$$\mathbb{P}_k \subset \widehat{P} \subset H^m(\widehat{K}).$$

Soit (K, P, Σ) un élément fini de Lagrange affinement équivalent à $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$. Alors il existe une constante $C(\widehat{K}, \widehat{\Pi}) > 0$ telle que

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}, \qquad \forall v \in H^{k+1}(K). \tag{4.9}$$

Preuve. D'après (4.7) et (3.4), on a

$$\begin{aligned} |v - \Pi v|_{m,K} \leq & C\|B^{-1}\|^m \left|\det B\right|^{1/2} |\widehat{v} - \widehat{\Pi v}|_{m,\widehat{K}} \\ = & C\|B^{-1}\|^m \left|\det B\right|^{1/2} |\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}|_{m,\widehat{K}}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 4.2, on a

$$|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}|_{m,\widehat{K}} \leq C |\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}}.$$

D'où vient

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq \widehat{C} \|B^{-1}\|^m \left|\det B\right|^{1/2} |\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}}.$$

En appliquant (4.6) avec $m = k+1$, on obtient

$$|\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}} \leq C \|B\|^{k+1} \left|\det B\right|^{-1/2} |v|_{k+1,K}.$$

En combinant les deux estimations ci-dessus, on obtient

$$|v - \Pi v|_{m,K} \leq C \|B^{-1}\|^m \|B\|^{k+1} |\widehat{v}|_{k+1,\widehat{K}}.$$

Enfin en utilisant (4.8) dans l'estimation ci-dessus, on obtient

$$|v - \Pi v|_{m,K} \le C \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}.$$

Remarque. Le rapport $\frac{h_K}{\rho_K}$ décrit la rondeur de l'élément géométrique K et détermine la qualité de la triangulation. Pour un carré, un triangle équilatéral, un triangle isocèle rectangle ou un triangle quelconque de plus petit angle interne $\theta_0 > 0$, on a respectivement

$$\frac{h_K}{\rho_K} = \sqrt{2}, \qquad \frac{h_K}{\rho_K} = \sqrt{3}, \qquad \frac{h_K}{\rho_K} = 1 + \sqrt{2}, \qquad \frac{h_K}{\rho_K} \le \frac{\pi}{\theta_0}.$$

§**5. Convergence de la méthode des éléments finis.** Nous nous plaçons dans la cas où $n \le 3, m = 1$ et $k \ge 1$ de telle sorte que les conditions

$$m \le k+1, \qquad k + 1 - \frac{n}{2} > 0 \tag{5.1}$$

soient toujours satisfaites.

Nous allons passer à l'estimation d'erreur globale. Pour cela, nous avons recours à des hypothèse supplémentaires suivantes :

$(H1)$ Les triangulations $\mathcal{T}_h$ sont régulières.
$(H2)$ Il existe une constante $\sigma > 0$ indépendante de h telle que

$$\frac{h_K}{\rho_K} \le \sigma, \qquad \forall K \in \mathcal{T}_h, \qquad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \to 0.$$

$(H3)$ Tous les éléments finis (K, P, Σ), $K \in \mathcal{T}_h$ sont affinement équivalents à un unique élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$.
$(H4)$ Toutes les familles des éléments finis $\cup_{K \in \mathcal{T}_h}(K, P, \Sigma)$ sont de classe C^0.

Théorème 5.1. Supposons que les hypothèses $(H1), (H2), (H3)$ et $(H4)$ soient vérifiées d'une part, et d'autre part nous supposons qu'il existe un entier $k \ge 1$ tel que

$$\mathbb{P}_k \subset \widehat{P} \subset H^1(\widehat{K}).$$

Alors il existe une constante dépendante seulement de Ω telle que

$$\|v - \Pi_h v\|_{1,\Omega} \le C h^k |v|_{k+1,\Omega}, \qquad v \in H^{k+1}(\Omega). \tag{5.2}$$

Preuve. Ecrivons

$$
\begin{aligned}
\|v-\Pi_h v\|_{1,\Omega}^2 &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K |v-\Pi_h v|^2 dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K |\nabla(v-\Pi_h v)|^2 dx \\
&= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K |v-\Pi_K v|^2 dx + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K |\nabla v-\nabla\Pi_K v|^2 dx. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Cette formule est correcte puisque $v, \Pi_h v \in H^1(\Omega)$ et $\Pi_h v|_K = \Pi_K v$ sur K. Ensuite en utilisant $(H2)$ dans (4.9) avec $m = 0, 1$, on obtient

$$
|v-\Pi_K v|_{0,K} \le Ch^{k+1}|v|_{k+1,K}, \qquad (5.4)
$$

$$
|v-\Pi_K v|_{1,K} \le Ch^{k}|v|_{k+1,K}. \qquad (5.5)
$$

En insérant (5.4)-(5.5) dans (5.3), on obtient

$$
\|v-\Pi_h v\|_{1,\Omega}^2 \le Ch^{2k}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}|v|_{k+1,K}^2 = Ch^{2k}|v|_{k+1,\Omega}^2.
$$

Théorème 5.2. Supposons que les hypothèses $(H1), (H2), (H3)$ et $(H4)$ soient vérifiées d'une part, et d'autre part nous supposons qu'il existe un entier $k \ge 1$ tel que

$$
\mathbb{P}_k \subset \widehat{P} \subset H^1(\widehat{K}).
$$

Alors il existe une constante dépendante seulement de Ω telle que

$$
\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le Ch^k|u|_{k+1,\Omega} \qquad (5.6)
$$

où $u \in H^{k+1}(\Omega)$ est la solution exacte du problème variationnel (1.1), et $u_h \in V_h$ est la solution du problème variationnel approché (1.2).

Preuve. Précisons qu'on a $V = H_0^1(\Omega)$ pour le problème de Dirichlet homogène, ou $V = H^1(\Omega)$ pour le problème de Neumann. En prenant $v_h = \Pi_h u$ dans le Lemme de Céa, on obtient

$$
\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le C\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega}.
$$

D'autre part, d'après le Théorème précédent, on a

$$
\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \le Ch^k|u|_{k+1,\Omega}.
$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient (5.6).

Corollaire 5.3. Soit $\cup_{K\in\mathcal{T}_h}(K, P, \Sigma)$ une famille d'éléments finis associés à l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ vérifiant les hypothèses $(H1), (H2), (H3)$ et $(H4)$.

On suppose que $u \in H^2(\Omega)$. Alors il existe une constante dépendante seulement de Ω telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

Corollaire 5.4. Soit $\cup_{K \in \mathcal{T}_h}(K, P, \Sigma)$ une famille d'éléments finits associés à l'élément finit de Lagrange $\mathbb{Q}_1$ vérifiant les hypothèses $(H1), (H2), (H3)$ et $(H4)$. On suppose que $u \in H^2(\Omega)$. Alors il existe une constante dépendante seulement de Ω telle que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{Q}_1$ mais $\mathbb{P}_2 \not\subset \mathbb{Q}_1$.

Remarque. L'ordre de convergence d'une méthode des éléments finis dépend de la régularité de la solution exacte d'une part, et d'autre part de la richesse de l'espace d'interpolation $\mathbb{P}_k \subset \widehat{P}$.

Pour un problème d'ordre 2 posé dans un domaine polygonal, on a $u \in H^2(\Omega)$. Cette propriété assure que l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est d'ordre de convergence h.

Si la solution $u \in H^3(\Omega)$, on peut énoncer des résultats similaires aux Corollaires 5.4 et 5.5 pour l'élément fini $\mathbb{P}_2$ ou $\mathbb{Q}_2^*$ avec l'ordre de convergence h^2. Mais en général, $u \notin H^3(\Omega)$ pour un problème d'ordre 2 posé dans un domaine polygonal. C'est pourquoi l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ est le plus utilisé dans la pratique.

Nous allons utiliser une technique de dualité de Aubin-Nitsche pour obtenir une estimation d'erreur meilleure dans $L^2(\Omega)$. Etant donnée une fonction $g \in L^2(\Omega)$, nous considérons le problème variationnel

$$a(u, v) = l(v) = \int_\Omega fv, \qquad v \in V \tag{5.7}$$

où $V = H_0^1(\Omega)$ ou $V = H^1(\Omega)$. D'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème variationnel (5.7) admet une unique solution dans V.

Définition 5.1. On dit que le problème variationnel (5.7) est régulier si $u \in H^2(\Omega)$, et il existe une constante $C > 0$ dépendante seulement de Ω telle que

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C\|f\|_{0,\Omega}. \tag{5.8}$$

Théorème 5.5. On fait les mêmes hypothèses du Théorème 5.2. On suppose en outre que le problème variationnel (5.7) est régulier. Alors il existe une constante dépendante seulement de Ω telle que

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}.$$

Preuve. Remarquons d'abord que la norme $L^2(\Omega)$ peut être exprimée par la formule de dualité :

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} = \sup_{\|g\|_{0,\Omega}=1} \int_\Omega (u-u_h) g dx. \tag{5.9}$$

Soit $g \in L^2(\Omega)$ tel que $\|g\|_{0,\Omega} = 1$, et soit ϕ l'unique solution du problème variationnel (5.7). En prenant $v = u - u_h \in V$ dans (5.7), on a

$$a(\phi, u-u_h) = \int_\Omega g(u-u_h)dx.$$

D'autre part, le problème variationnel (5.7) étant régulier, on a $\phi \in H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, puisque $n \leq 3$. Alors $\Pi_h\phi \in V_h$, d'après la relation d'orthogonalité de Galerkine, on obtient

$$a(u-u_h, \Pi_h\phi) = 0.$$

D'où vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(u-u_h)dx &= a(u-u_h, \phi) = a(u-u_h, \phi - \Pi_h\phi) \\ &\leq C\|u-u_h\|_{1,\Omega}\|\phi - \Pi_h\phi\|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

En utilisant (5.2) avec $k = 1$, (5.6) et (5.8), on obtient

$$\int_\Omega g(u-u_h)dx \leq Ch^k|u|_{k+1,\Omega} h|\phi|_{2,\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}.$$

pour tout $g \in L^2(\Omega)$ tel que $\|g\|_{0,\Omega} = 1$. Ceci, grâce à l'expression (5.9), implique l'estimation cherchée :

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}.$$

§6. Problème de Stokes et formulation mixte.

Théorème du point-selle. Soient V et M deux espaces de Hilbert. On se donne

(i) $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $V \times V \to \mathbb{R}$,

(ii) $b(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue $b : V \times M \to \mathbb{R}$, qui satisfait la condition "inf-sup" :

$$\inf_{\|q\|_M=1} \sup_{\|v\|_V=1} b(v,q) \geq \beta > 0.$$

Alors pour tout $f \in V'$ et tout $g \in M'$, le problème mixte

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = f(v), & \forall v \in V, \\ b(u,q) = g(q), & \forall q \in M. \end{cases}$$

admet une unique solution $(u,p) \in V \times M$.

§**6.1 Formulation mixte.** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné de classe C^1. Soit $f = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$, on considère le système de Stokes (i=1, 2) :

$$\begin{cases} -\Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ div(u) = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0 \qquad\qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_i = 0 \qquad\qquad \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

En multipliant les équations par $v = (v_1, v_2) \in (H_0^1(\Omega))^2$, puis en intégrant par parties, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \int_\Omega div(v) p dx = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i v_i dx, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2,$$

$$\int_\Omega div(u) q dx = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) = \Big\{ q \in L^2(\Omega) : \quad \int_\Omega q dx = 0 \Big\}.$$

En posant

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx, \quad b(v,q) = \int_\Omega div(v) q dx, \quad f(v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega f_i v_i dx,$$

nous obtenons une formulation mixte : Trouver $(u,p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = f(v), & \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(u,q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \tag{6.1}$$

Théorème 6.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et régulier. Pour toute fonction $f \in (L^2(\Omega))^2$, le problème variationnel (6.1) admet une seule solution $(u,p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$.

Preuve. Rappelons que pour tout $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe $\bar{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$ telle que

$$div(\bar{v}) = q, \qquad \|\bar{v}\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq c \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc

$$b(\overline{v}, q) = \int_\Omega div(\overline{v}) q dx = \int_\Omega |q|^2 dx.$$

Soit

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{b(\overline{v},q)}{\|\overline{v}\|_{H_0^1(\Omega)}} = \frac{\|q\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|\overline{v}\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{\|q\|_{L^2(\Omega)}}{c},$$

soit encore

$$\inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{b(v,q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \frac{1}{c}.$$

La forme a est visiblement bilinéaire symétrique continue et coercive. On peut donc appliquer théorème du point-selle.

Posons la forme bilinéaire et symetrique :

$$\widehat{a}((u,p),(v,q)) = a(u,v) + b(u,q) + b(v,p), \qquad \widehat{f}(v,q) = f(v) + g(q).$$

Le problème mixite (6.1) se met sous la forme

$$\widehat{a}((u,p),(v,q)) = \widehat{f}(v,q) \qquad \forall (v,q) \in V \times M.$$

Mais la forme

$$\widehat{a}((u,p),(u,p)) = a(u,u)$$

n'est pas coercive sur $(V \times M)^2$, et le Lemme de Lax-Milgram ne s'applique pas.

Les conditions de Banach-Necas-Babushka :

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{a(u,v)}{\|u\| \|v\|} \geq \alpha,$$

$$\{v : \ a(u,v) = 0, \quad \forall u \in V\} = \{0\}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que le problème variationnel $a(u,v) = f(v)$ admette une seule solution pour tout $f \in V'$.

Dans le cas où a est coercive, les conditions de BNB sur la forme $\widehat{a}$ devient

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|_V \|q\|_M} \geq \beta,$$

appelée condition de Ladyzenskaia-Babushka-Brezzi ou condition “inf-sup”.

6.3. Approximation par les éléments finis. Soient $V_h \subset (H_0^1(\Omega))^2$ et $M_h \subset L_0^2(\Omega)$ deux sous espaces de dimensions finies. On applique la méthode de Galerkin : trouver $(u_h, p_h) \in V_h \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \\ b(u_h, q_h) = 0, & \forall q_h \in M_h \end{cases} \tag{6.2}$$

Notons par

$$W_h^* = \{p_h^* \in M_h : \quad b(v_h, p_h^*) = 0, \quad \forall v_h \in V_h\}.$$

Si (u_h, p_h) est une solution du problème mixite (6.2), alors $(u_h, p_h + tp_h^*)$ l'est aussi pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi p_h^* est un mode parasite.

On peut motrer que $W_h^* = \{0\}$ si et seulement si b satisfait la condition inf-sup discrète :

$$\forall q_h \in M_h : \qquad \sup_{v_h \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|} \geq \beta_h \|q_h\|, \tag{6.3}$$

qui depend des espaces approchés V_h, M_h.

Remarquons que $\dim(V_h) \geq dim(M_h)$ est une condition nécessaire pour $W_h^* = \{0\}$.

Par exemple, pour l'élement fini $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_0$, on a

$$\dim(V_h) = 2(N-1)^2, \qquad \dim(M_h) = 2N^2 - 1.$$

Comme $\dim(V_h) < \dim(M_h)$, la condition inf-sup discrète ne sera pas satisfaite !

Pour l'élement fini $\mathbb{Q}_1/\mathbb{P}_0$, on a

$$\dim(V_h) = 2(N-1)^2, \qquad \dim(M_h) = 2N^2 - 1.$$

Comme $\dim(V_h) < \dim(M_h)$, la condition inf-sup discrète ne sera pas satisfaite !

Pour l'élement fini $\mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1$, on a

$$\dim(V_h) = 2(N-1)^2, \qquad \dim(M_h) = N^2 - 1.$$

Même $\dim(V_h) > \dim(M_h)$, la condition inf-sup discrète n'est pas satisfaite quand même !

Les éléments finis $\mathbb{P}_1$-bulle/$\mathbb{P}_1$. On construit les espaces d'approximation comme suite :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1 \oplus \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad v_h|_\Gamma = 0\},$$

$$M_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : \quad q_h|_K \in \mathbb{P}_1\}.$$

L'élément fini $\mathbb{P}_1$-iso/$\mathbb{P}_1$. On discrétise la pression par $\mathbb{P}_1$ sur un maillage grossir :

$$M_h = \{q_h \in C^0(\overline{\Omega}) \cap L_0^2(\Omega) : \quad q_h|_K \in \mathbb{P}_1, \quad K \in \mathcal{T}_h\},$$

et la vitesse par l'élément fini $\mathbb{P}_1$ sur un maillage fin (en divisant le triangle en 4 par les milieux) :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : \quad v_h|_K \in \mathbb{P}_1, \quad K \in \mathcal{T}_{h/2}, \quad v_h|_\Gamma = 0\}.$$

Cette discrétisation est moins couteuse que celle de $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$.

Les deux éléments finis ci-dessus satisfont la condition inf-sup discrète. En particulier, sous les hypothèses standard, les estimations d'erreurs établies dans le Théorème 5.2 restent vraies, ceci permet d'établir le résultat suivant.

Théorème 6.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière. Soit (u,p) une solution du problème (6.1) telle que

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \qquad p \in L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

Alors, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h, telle que la solution (u_h, p_h) du problème (6.2) approché satisfait

$$\|u - u_h\|_{(H_0^1(\Omega))^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch(\|u\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)})$$

Par la dualité d'Aubin-Nitsche, on a

$$\|u - u_h\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2(\|u\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)})$$

Exercices

Exercice 1. Soit (K, P, Σ) un élément fini de Lagrange et p_i les fonctions de base. Montrer que $v \in P \Longleftrightarrow \Pi v \ = v$. En déduire que $1 \in P \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

Exercice 2. Soit K le triangle de sommets a_1, a_2, a_3. On pose

$$a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}, \qquad a_{iij} = \frac{2a_i + a_j}{3}, \quad i \neq j.$$

(i) Montrer que $\Sigma_1 = \{a_{ij}, i \neq j\}$ est P_1-unisolvene et exhibiter les fonction de base.
(ii) Montrer que $\Sigma_2 = \{a_{iij}, i \neq j\}$ n'est pas P_2-unisolvene.

Exercice 3. Soit K carré unité de sommets $a_i, 1 \leq i \leq 4$ et de milieux des cotés $a_{ij}, 1 \leq i < j \leq 4$. Poser

$$\widehat{\Xi}_2^* = \{a_i, 1 \leq i \leq 4, \quad a_{ij}, 1 \leq i < j \leq 4)\}, \qquad Q_2^* = P_2 \oplus \{x^2 y, \quad xy^2\}$$

Montrer que Ξ_2^* est Q_2^*-unisolvent, et exhibiter les fonctions de base correspondant aux noeuds a_1 et a_{12}.

Exercice 4. On désigne par $K \subset \mathbb{R}^3$ la pyramide de sommets : $A(1,1,0), B(-1,1,0), C(-1,-1,0), D(1,-1,0), E(0,0,1)$. On note

$$\Sigma = \{A, B, C, D, E\},$$

$$Q = \Big\{ q : K \to \underline{\mathrm{R}}; \quad q = a + bx + cy + dz + e\frac{xy}{1-z}, \qquad a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \Big\}.$$

(i) Montrer que Σ est Q-unisolvent.

(ii) Montrer que (K, Q, Σ) est un élément fini de Lagrange de classe C^0.

(iii) Montrer que $Q \subset C^0(K)$.

(iv) Montrer que l'opérateur d'interpolation associé est continu de $H^2(K)$ dans $H^1(K)$.

Exercice 5. Soit $\widehat{K} = [0,1]^2$ le carré unité. Poser

$$\Xi_3^* = \Xi_3 \cap \partial\widehat{K}, \qquad Q_3^* = P_3 \oplus \{x^3 y, \quad xy^3\}.$$

Montrer que Ξ_3^* est Q_3^*-unisolvent, et exhibiter les fonctions de base corrspondant aux sommets p_5, p_5.

Exercice 6. Soit $\widehat{K} = [0,1]^3$ le cube unité. Poser $\Xi_2^* = \{a_1, a_2, \cdots a_{20}\}$ indiqué ci-dessous. Poser

$$Q_2^* = P_2 \oplus \{x^2y,\ xy^2,\ x^2z,\ xz^2,\ y^2z,\ yz^2,\ xyz,\ x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2\}.$$

Montrer que Ξ_2^* est Q_2^*-unisolvent.

Exercice 7. Soit K le carré unité $[0,1] \times [0,1]$ et soient $(a_i)_{1 \leq i \leq 9}$ les points de K représentés ci-dessous. On pose

$$a_9 = (1/2, 1/2), \qquad \Gamma^* = \{a_i, \qquad 1 \leq i \leq 8\},$$
$$Q^* = \Big\{p \in Q_2 : \quad 4p(a_9) + \sum_{i=1}^{4} p(a_i) - 2\sum_{i=5}^{8} p(a_i) = 0\Big\}.$$

(i) Montrer que $P_2 \subset Q^*$.

(ii) Montrer que (K, Σ^*, Q^*) est un élément fini de Lagrange de classe C^0.

(iii) Donner les fonctions de base correspondantes aux points a_1 et a_5.

(iv) Soit Π l'opérateur d'interpolation associé. Calculer la valeur de $\Pi v(a_9)$ pour $v(x,y) = x^3y$.

Exercice 8. Soient (K, P, Σ) et $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ deux éléments finis affines équivalents. Montrer que si $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ est de classe C^0, alors il en de même de (K, P, Σ).

Exercice 9. Montrer que les éléments finis $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2^*$ et $\mathbb{P}_2$ sont de classe C^0.

Exercice 10. Soit K un triangle de sommets a_1, a_2, a_3. On note θ_i l'angle au sommet a_i, l_i la longueur du côté opposé au sommet a_i, p le demi-périmètre, S son aire et r le rayon du cercle inscrit.

(i) Montrer que

$$r = \frac{S}{p} = (p - l_i) tg \frac{\theta_i}{2}, \qquad 1 \leq i \leq 3.$$

(ii) Supposons que $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3$. Montrer que

$$0 < l_1 \leq l_2 \leq l_3; \qquad p \leq \min\{l_1 + l_3, \quad 2l_2\}.$$

(iii) Montrer que

$$\frac{1}{2} ctg \frac{\theta_1}{2} \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{2}{\sin\theta_1}.$$

(iv) En déduire que

$$\frac{\sqrt{3}}{\theta_1} \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \frac{\pi}{\theta_1}.$$

Exercice 11. Soit Ω le carré unité et soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère l'équation

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\Big((1+x+y)\dfrac{\partial}{\partial x}u\Big) - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \\ u = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(i) Montrer que le problème admet une seule solution dans $H_0^1(\Omega)$.

(ii) Ω est subdivisé en 4 triangles ayant le centre du carré pour le sommet commun. Construire explicitement les éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$, puis montrer que la valeur de la solution obtenue par la méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$ vaut $1/18$ lorsque $f = 1$.

Exercice 12. Soit K une partie compacte, connexe et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$ de frontière C^1 par morceaux. Par simplicité on notera

$$\int_K \phi = \int_K \phi(x,y)dxdy$$

pour toute fonction ϕ intégrable sur K. On note $H^2(K)$ l'espace de Sobolev muni de la norme usuelle :

$$\|v\|_{2,K} = \Big\{ \sum_{|\alpha|\leq 2} \int_K |\partial^\alpha v|^2 \Big\}^{1/2}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2.$$

Nous introduisons une semi-norme

$$[v]_{2,K} = \Big\{ \int_K \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Big|^2 \Big\}^{1/2}.$$

On note par $\mathbb{Q}_1$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à un, par rapport à chacune des variables x, y.

(i) Montrer que l'application linéaire

$$q \in \mathbb{Q}_1 \to \Big(\int_K q, \int_K \frac{\partial q}{\partial x}, \int_K \frac{\partial q}{\partial y}, \int_K \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \Big)$$

est bijective de $\mathbb{Q}_1$ sur $\mathbb{R}^4$.

(ii) Montrer qu'il une constante $C(K) > 0$ telle que

$$\|v\|_{2,K}^2 \leq C\Big\{[v]_{2,K}^2 + \Big|\int_K v\Big|^2 + \Big|\int_K \frac{\partial v}{\partial x}\Big|^2 + \Big|\int_K \frac{\partial v}{\partial y}\Big|^2 + \Big|\int_K \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big|^2\Big\}$$

pour tout $v \in H^2(K)$. En déduire que la semi-norme $[v]_{2,K}$ est équivalente à la norme quotient

$$\inf_{q \in \mathbb{Q}_1} \|v - q\|_{2,K}.$$

(iii) Soit Π un opérateur linéaire continu de $H^2(K)$ dans $H^1(K)$ tel que

$$\Pi q = q, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}_1.$$

Montrer qu'il existe une constante $C(K) > 0$ telle que

$$\|\Pi v - v\|_{1,K} \leq C[v]_{2,K}, \qquad \forall v \in H^2(K).$$

Exercice 13. Soient V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire et continue sur $V \times V$. Supposons que pour tout espace $V_h \subset V$ de dimension finie on a

$$\inf_{\|u_h\|=1} \sup_{\|v_h\|=1} a(u_h, v_h) \geq \alpha > 0.$$

(i) Montrer que pour tout $f \in V'$, il existe un seul $u_h \in V_h$ tel que

$$a(u_h, \phi_h) = (f, \phi_h), \qquad \forall \phi_h \in V_h.$$

(ii) Soit $f \in V'$ tel qu'il existe $u \in V$ satisfait $a(u, \phi) = (f, \phi)$ pour tout $\phi \in V$. Montrer que

$$\|u - u_h\| \leq (1 + M/\alpha) \inf_{v_h \in V_h} \|u - u_h\|.$$

Exercice 14. Soient $f \in L^2(0,1)$ et $a \in C^2([0,1])$ une fonction strictement positive sur $[0,1]$. Considérons le problème de Dirichlet suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} u - (au')' = f & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(i) Par la méthode variationnelle, montrer d'abord que problème (1) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(0,1)$. Puis montrer la régularité : $u \in H^2(0,1)$ et qu'il existe un constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{H^2(0,1)} \leq C\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Soit N un entier, on définit la subdivision uniforme de l'intervalle $[0,1]$ par

$$\mathcal{T}_h : \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \cdots, N+1,$$

et l'espace d'approximation par

$$V_h = \{v_h \in C^0([0,1]), \quad v_h(0) = v_h(1) = 0, \quad v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \quad i = 0, \cdots, N\}.$$

(ii) Montrer que $V_h \subset H_0^1(0,1)$, puis expliciter les fonctions d'une base $\{\phi_i\}_{i=1,\cdots,N}$.

(iii) Par la méthode de Ritz-Galerkine, discrétiser le problème (1) en un système linéaire :

$$AU = F. \tag{2}$$

Par la méthode des trapèzes, évaluer la matrice de rigidité A et le second membre F du système (2).

(iv) Soit $\phi \in C^2([0,1])$, on désigne par $\Pi\phi$ son interpolation de Lagrange $\mathbb{P}_1$. Montrer que

$$|\phi'(x) - (\Pi\phi)'(x)|^2 \leq \int_0^1 |\phi''(s)|^2 ds, \qquad 0 < x < 1.$$

En déduire que

$$\int_0^1 |\phi'(s) - (\Pi\phi)'(s)|^2 ds \leq \int_0^1 |\phi''(s)|^2 ds, \tag{3}$$

$$\int_0^1 |\phi(s) - \Pi\phi(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\phi''(s)|^2 ds. \tag{4}$$

Montrer que (3)-(4) restent vraies pour toute fonction $\phi \in H^2(0,1)$.

(v) Soit $v \in H^2(0,1)$. On définit son l'interpolation globale associée à la subdivision $\mathcal{T}_h$ par

$$\Pi_h v \in V_h, \qquad (\Pi_h v)(x_i) = v(x_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, N+1.$$

Montrer que

$$\int_0^1 |v'(x) - (\Pi_h v)'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_0^1 |v''(s)|^2 ds, \tag{5}$$

$$\int_0^1 |v(x) - (\Pi_h v)(x)|^2 dx \leq \frac{h^4}{2} \int_0^1 |v''(s)|^2 ds. \tag{6}$$

(vi) Désignons par u_h la solution approchée du problème (1) obtenue par la méthode des éléments finis décrite dans (ii)-(iii). Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(0,1)} \leq Ch\|f\|_{L^2(0,1)}.$$