Master CSMI 2024-2025

ANALYSE FONCTIONNELLE APPLIQUÉE

Bopeng RAO
Université de Strasbourg
Département de Mathématique et d'Informatique

Version finale 28/10/2024.

Contents

1. Espace de Hilbert

1.1. **Espace de Hilbert.** On désigne par H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

Définition. On appelle le produit scalaire sur H une application $(\cdot,\cdot)$ sur $H\times H$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie
(a) la symétrie:
$$(x,y)=(y,x),\quad \forall x,y\in H,$$
(b) la linéarité:
$$(\alpha x+\beta y,w)=\alpha(x,w)+\beta(y,w),\quad \forall x,y\in H,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$
(c) la positivité:
$$(x,x)\geqslant 0 \text{ et } (x,x)=0 \text{ si et seulement si } x=0.$$
On définit la norme hilbertienne:
$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$
H est un espace de Hilbert, s'il est complet.

Théorème 1.1. *Soit H un espace de Hilbert. Alors, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz:*
$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|,\quad \forall x,y\in H.$$
L'égalité est vraie si et seulement si x,y sont liés.

Preuve. Pour $x,y\in H$ et $t\in\mathbb{R}$, on pose
$$f(t)=(x+ty,x+ty)=\|x\|^2+2t(x,y)+t^2\|x\|^2.$$
Si $y=0$, l'inégalité est évidente. Sinon, la forme quadratique étant toujours positive, son discriminant est négatif:
$$|(x,y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2.$$
L'égalité est vraie si et seulement si $x+ty=0$.

La norme hilbertienne se comporte comme les polynômes, en particulier elle vértifie l'identité du parallélograme
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Proposition 1.2. *Le produit scalaire est une application continue.*

Preuve. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz à la relation
$$(x_n,y_n)-(x,y)=(x_n-x,y_n)+(x,y_n-y),$$
on obtient
$$|(x_n,y_n)-(x,y)|\leqslant\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|\to 0.$$

Voici quelques exemples courants

(a) Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

(b) Notons par $l^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels telles que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty.$$

Muni du produit scalaire et la norme

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2},$$

$l^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert (exercice). L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit sous la forme

$$\Big|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k y_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^2}.$$

(d) Désignons par $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Muni du produit scalaire et la norme

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx},$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit sous la forme

$$\Big|\int_\Omega f(x)g(x)dx\Big| \leqslant \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_\Omega |g(x)|^2 dx}.$$

L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment différentiables à support compact est dense dans $L^2(\Omega)$.

1.2. **Projection sur un convexe fermé.** Une partie $C \subseteq H$ est convexe si

$$\forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \text{ et } \forall u, v \in C : \quad \theta u + (1-\theta)v \in C.$$

Théorème 1.3. *Soit $C \subseteq H$ une partie non-vide, convexe et fermée.*

(i) Pour tout $f \in H$, il existe un unique élément $u \in C$ tel que

$$\|f-u\| = \inf_{v \in C} \|f-v\|. \tag{1.1}$$

(ii) Cet élément u, appelé le projeté de f sur C, est caractérisé par l'inéquation d'Euler

$$(f-u, v-u) \leqslant 0, \quad \forall v \in C. \tag{1.2}$$

(iii) Lorsque C est un sous-espace vectoriel fermé, la projection est une application linéaire contractante de H sur C.

Preuve. (iii) Soit $h \in C$. En prennant $v = Pf + h \in C$ dans l'inéquation d'Euler (1.2), on trouve

$$(f - Pf, h) = 0, \quad \forall v \in C.$$

Cette condition assure la linéarité de P et l'identité de Pythagore:

$$\|f\|^2 = \|Pf\|^2 + \|f - Pf\|^2.$$

En particulier, la projection P est contractante.

Soit $A \subseteq H$ une partie non-vide. Le complémernt orthogonal de A est défini par

$$A^\perp = \{x : \quad (x,y) = 0 \quad \forall y \in A\}.$$

Proposition 1.4. *Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F \subseteq H$, on a*

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Preuve. Soit $f \in F \cap F^\perp$. On $(f,f) = 0$, donc $f = 0$. D'autre part, on a $f = Pf + f - Pf$, avec $Px \in F$ et $f - Pf \in F^\perp$ par Theorem 1.3.

Corollary 1.5. *Un sous-espace vectoriel F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Preuve. Montrons d'abord $\overline{F}^\perp = F^\perp$. Soit $f \in F^\perp$. Alors $(f,v) = 0$ pour tout $v \in F$. Par continuité du produit scalaire, ceci reste vrais pour tout $v \in \overline{F}$, donc $f \in \overline{F}^\perp$, puis $F^\perp \subseteq \overline{F}^\perp$. L'autre sense est trivial. Par Proposition 1.4, on a $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp = \overline{F} \oplus F^\perp$. L'unicité de la décomposition montre que $F^\perp = \{0\}$ si et seulement si $\overline{F} = H$.

1.3. **Base hilbertienne.** Une famille de vecteurs $(e_n)_{n \geqslant 1}$ est une base hilbertienne si

(a) $(e_m, e_n) = \delta_{m,n}$;

(b) l'espace vectoriel engendré par les combinaisons linéaires finies des e_n est dense dans H. On dit aussi que la famille $(e_n)_{n \geqslant 1}$ est totale dans H.

Théorème 1.6. *Soit* $(e_n)_{n\geqslant 1}$ *une base hilbertienne dans* H*. Alors, pour tout* $x \in H$*, on a*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty}(x, e_n)e_n \tag{1.3}$$

et l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x, e_n)|^2. \tag{1.4}$$

Réciproquement, étant donnée une suite $(a_n) \in l^2(\mathbb{N})$*, la série*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n$$

converge dans H *tel que*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2.$$

Un espace de Hilbert est séparable s'il possède une base hilbertienne

Théorème 1.7. *L'espace produit de deux espaces de Hilbert séparables est séparable.*

Théorème 1.8. *Un espace de Hilbert séparable si et seuement s'il possède un ensemble dénombrable qui y est dense.*

Preuve. Soit $(g_n)_{n\geqslant 1}$ un ensemble dénombrable qui est dense dans H. Par Gram-Schmidt, on construit une suite orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 1}$, qui engendre le même espace que $(g_n)_{n\geqslant 1}$, donc dense dans H.

Par le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes est dense dans $L^2(0, 1)$. Par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dense dans $L^2(0, 1)$, qui est donc séparable. Enfin, $L^2(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\geqslant 1} L^2(-n, n)$ est aussi séparable.

1.4. **Théorème de repésentation de Riesz-Fréchet.** Soit H un espace de Hilbert. Les formes linéaires continues sur H forment un espace vectoriel H'. La dualité entre H' et H s'écrit comme

$$\langle \phi, x\rangle_{H',H} = \phi(x), \qquad \phi \in H', \quad x \in H.$$

Muni de la norme duale

$$\|\phi\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(x)|,$$

H' est un espace complet.

Théorème 1.9. *(Riesz-Fréchet) Etant donné $\phi \in H'$, il existe un unique élément $y \in H$ tel que*

$$\phi(x) = (x, y), \quad \forall x \in H,$$

et

$$\|\phi\| = \|y\|.$$

Notons par J l'application qui fait correspondre ϕ à y. Le théorème de Riesz-Fréchet affirme que J est une isométrie linéaire de H sur H'. Cette propriété permet d'identifier H' et H. Ainsi H', équipé du produit scalaire

$$(\phi_1, \phi_2)_{H'} = (J\phi_1, J\phi_2)_H, \quad \phi_1,\ \phi_2 \in H'$$

est un espace de Hilbert.

Preuve. (a) Unicité: Soient y_1, y_2 tels que

$$(x, y_1 - y_2) = 0, \quad \forall x \in H.$$

Puis $y_1 = y_2$

(b) Isométrie: Soit y un tel élément. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.1) implique que

$$|\phi(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\|\|y\|, \quad \forall x \in H$$

En particulier, on a

$$|\phi(y)| = \|y\|^2.$$

D'où vient

$$\|\phi\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|} = \|y\|.$$

(c) Existence: $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. Si $\mathrm{Ker}(\phi) = H$, alors $\phi \equiv 0$, le vecteur $y = 0$ convient. Si $\mathrm{Ker}(\phi) \neq H$, par Proposition 1.5, $\{\mathrm{Ker}(\phi)\}^\perp \neq \{0\}$. Soit $e \in \{\mathrm{Ker}(\phi)\}^\perp$ un vecteur tel que $\phi(e) = 1$.

$$x = \phi(x)e + (x - \phi(x)e), \quad x - \phi(x)e \in \mathrm{Ker}(\phi).$$

Il vient que

$$(x, e) = (\phi(x)e, e) + (x - \phi(x)e, e) = \phi(x)\|e\|^2.$$

Mettons

$$y = e/\|e\|^2 : \quad (x, y) = \phi(x), \quad \forall x \in H.$$

Le théorème suivant est à la base de la résolution des problèmes variationnels.

Théorème 1.10. *(Lemme de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $V \times V \to \mathbb{R}$. Alors pour toute forme ϕ linéaire continue sur V, il existe un unique élément $u \in V$ tel que*

$$a(u,v) = \phi(v), \quad \forall v \in V.$$

Proof. Il suffit de remarquer que la forme a définit un second produit scalaire équivalant sur V. $\square$

1.5. **Théorèmes de Baire.**

Théorème 1.11. *(Séparation des convexes) Soit $C \subset H$ une partie convexe fermée non-vide. Pour tout élément $f \notin C$, il existe $x_0 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$(x, x_0) < \alpha < (f, x_0), \quad \forall x \in C.$$

On dit que l'hyperplan: $\{x : \quad (x, x_0) = \alpha\}$ sépare f et le convexe C au sens strict.

Preuve. Par Théorème 1.3 de projection, on a

$$(f - Pf, x - Pf) \leqslant 0, \quad \forall x \in C.$$

Soit

$$(f - Pf, x - f + f - Pf) \leqslant 0, \quad \forall x \in C.$$

Posons $x_0 = f - Pf \neq 0$, on a

$$(x_0, x - f + x_0) \leqslant 0, \quad \forall x \in C,$$

soit encore

$$(x_0, x) \leqslant (x_0, f) - \|x_0\|^2, \quad \forall x \in C.$$

Puis

$$(x_0, x) < (x_0, f) - \|x_0\|^2/2 < (x_0, f), \quad \forall x \in C.$$

La valeur $\alpha = (x_0, f) - \|x_0\|^2/2$ convient.

Théorème 1.12. *(Prolongement) Soit $G \subset H$ un sous espace fermé. Soit g une forme linéaire sur G telle que*

$$\|g(x)\| \leqslant c\|x\|, \quad \forall x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire f qui prolonge g:

$$f(x) = g(x), \quad x \in G, \quad \|f(x)\| \leqslant c\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Preuve. Posons
$$f(x) = g \circ P(x).$$
Pour tout $x \in G$, on a $G(x) = x$, il vient
$$f(x) = g \circ P(x) = g(x), \quad x \in G.$$
Puis,
$$\|f(x)\| \leqslant c\|P(x)\| \leqslant c\|x\|, \quad x \in H.$$

Théorème 1.13. *(Banach-Steinhaus, uniform boundedness) Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille des applications linéaires continues de E dans F. On suppose que*
$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F = C(x) < +\infty, \quad \forall x \in E,$$
alors il existe une constante $c > 0$ telle que
$$\|T_i\| < c, \quad \forall i \in I.$$

Théorème 1.14. *(Application ouverte) Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soit T une application linéaire continue et surjective de E sur F. Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$
En particulier, si T est bijective, alors son inverse est une application continue de F sur E.

Théorème 1.15. *Soient E un espace de Hilbert muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. S'il existe une constante $c > 0$ telle que*
$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2, \quad \forall x \in E,$$
alors il existe une constante $c' > 0$ telle que
$$\|x\|_2 \leqslant c'\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$
Les deux normes sont équivalentes.

1.6. **Convergence faible.**

Théorème 1.16. *(Théorème de Riesz) Dans un espace de Hilbert de dimension infinie, la boule unité fermée $B(0,1) = \{x \in H : \quad \|x\| \leqslant 1\}$ n'est pas compacte.*

Preuve. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une suite orthonormée. Alors,

$$\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 - 2(e_n, e_m) = 2.$$

Donc aucune sous-suite ne converge.

Definition. Une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers x si

$$(x_n, v) \to (x, v), \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.17. *Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.*

(a) Une suite faiblement convergente est bornée.

(b) De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Preuve. (a) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite faiblement convergente. Définir une famille de formes linéaires continues par

$$\phi_n(v) = (x_n, v), \quad \forall v \in H.$$

La convergence faible implique

$$v \in H : \quad \sup_{n\geqslant 1} |\phi_n(v)| = |(x_n, v)| < +\infty$$

Par le théorème 1.13 de Banach-Steinhaus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|x_n\| = \|\phi_n\| < c.$$

(b) Soit $(e_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on peut extraire une sous-suite (x_{n_m}) telle que (x_{n_m}, e_m) converge dans $l^2(\mathbb{N})$. Soit $v \in H$, par Théorème 1.6, on a

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|^2 < +\infty.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(x_{n_m}, v) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x_{n_m}, e_m) \in \mathbb{R}.$$

Définissons l'application linéaire continue par

$$\phi(v) = \lim_{n_m \to +\infty} (x_{n_m}, v).$$

Par le théorème de Riesz-Fréchet, il existe $x \in H$ tel que $\phi(v) = (x, v)$, d'où vient la convergence faible:

$$\lim_{l_l \to +\infty} (x_{n_m}, v) = (x, v), \quad \forall v \in H.$$

Proposition 1.18. *Soit H un espace de Hilbert séparable. On a les propriétés suivantes:*

(a) Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$. Mais la réciproque est fausse en général.

(b) Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$, alors $x_n \to x$.

(c) Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$ (la norme est faiblement semi-continue inférieure s.c.i.).

(d) Si $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$, alors $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

2. Opérateurs linéaires

2.1. **Opérateur borné.** Un opérateur linéaire H

$$T : \quad x \to Tx$$

est continu si

$$x_n \to x \Longrightarrow Tx_n \to Tx \quad \text{dans } H,$$

ou il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

On note par $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus dans H. Muni de la norme

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

l'espace $\mathcal{L}(H)$ est complet. On a

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|.$$

Théorème 2.1. *Pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$, appelé adjoint de T, tel que*

$$(Tx, y) = (x, T^*y), \quad \forall x, y \in H.$$

De plus, on a

$$T^{**} = T, \quad (TS)^* = S^*T^*.$$

On dit que T est auto-adjoint si $T = T^*$.

Preuve. Soit $y \in H$ fixé. Posons $\phi_y(x) = (Tx, y)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ϕ est une forme linéaire continue sur H. Par le théorème de Riesz-Fréchet, il existe un unique élément, noté T^*y tel que $\phi(x) = (x, T^*y)$, soit $(Tx, y) = (x, T^*y)$ pour tout $x, y \in H$. De plus, l'application

$$T^* : \quad y \to T^*y$$

est une isométrie, $\|T\| = \|T^*\|$. Puis, on a

$$(x, Sy) = (S^*x, y) = (x, (S^*)^*y) \Longrightarrow (S^*)^* = S$$

$$(x, T^*S^*y) = (STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, (ST)^*y) \Longrightarrow (ST)^* = T^*S^*.$$

Si

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx \quad \text{dans } H.$$

on dit que T est faiblement continu. Tout $T \in \mathcal{L}(H)$ est faiblement continu.

2.2. **Opérateur compact.** Rappelons qu'une matrice A est inversible si et seulement si A est une injection ou surjection. De plus si A est symétrique, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres sous laquelle A peut être diagonalisée. On se demande s'il existe une théorie semblable à celle des matrices.

La situation est très compliquée dans le cas général. Voici un exemple typique. Dans l'espace l^2, définissons (shift)

$$Tx = (0, x_1, x_2, \cdots), \quad Sx = (x_2, x_3, \cdots) \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, \cdots).$$

On voit $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, mais $\mathrm{Im}(T) \neq l^2(\mathbb{N})$. Donc l'injectivité de T n'implique pas sa surjectivité. En revanche, $\mathrm{Im}(S) = l^2(\mathbb{N})$, mais $\mathrm{Ker}(S) \neq \{0\}$. Donc la surjectivité de S n'implique pas l'injectivité non plus.

D'autre part, soit $Tx = \lambda x$, on vérifie facilement que $x = 0$. Ainsi T n'a pas de valeur propre. En revanche, on a

$$Sx_a = ax_a, \quad x_a = (1, a, a^2, \cdots), \quad |a| < 1.$$

Les valeurs propres de S remplissent l'intervalle $]-1,1[$, le spectre est donc continu.

On se limite au cas des opérateurs autoadjoints compacts, une situation particulièrement intéressante dans l'étude des EDPs.

Définition. Un opérateur linéaire T est compact, si l'image par T de la boule unité ouverte $B(0,1)$ est relativement compacte: "De toute suite de $TB(0,1)$, on peut extraire une sous-suite $(Tx_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergente."

Remarquons que la suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ elle même ne converge pas a priori. De plus, la limite de $(Tx_{n_k})_{k\geqslant 1}$ n'appartient pas forcément à $T(B(0,1))$. C'est ce que signifie le terme "relativement compact".

Proposition 2.2. *Soit H un espace de Hilbert.*

(a) Un opérateur linéaire compact est borné;

(b) Un opérateur linéaire de rang fini: dim Im$(T) < +\infty$, est compact.

Preuve. (a) Comme H est complet, la compacité relative est équivalente à la pré-compacité. Ainsi $T(B(0,1))$ est borné.

(b) $TB(0,1)$ est borné et inclus dans un espace de dimension finie, elle est donc relativement compacte.

Proposition 2.3. *L'ensemble des opérateurs linéaires compacts est un sous-espace vectoriel fermé dans $\mathcal{L}(H)$.*

**Preuve.* Il est clair que la somme des deux opérateurs compacts est compacte.

$$(T+S)B(0,1) \subset TB(0,1) + SB(0,1).$$

Soit $(T_n)_n$ une suite des opérateurs compacts tels que $\|T_n - T\| \to 0$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\|T_N - T\| < \epsilon$. Comme $T_N B(0,1)$ est pre-compact, il existe un nombre fini de (f_i) tels que $T_N B(0,1)$ soit convert par le ϵ-reseau: $\cup_{i\in I} B(f_i, \epsilon)$. Soit

$$T_N B(0,1) \subset \cup_{i\in I} B(f_i, \epsilon).$$

Pour tout $x \in B(0,1)$, il existe $i_0 \in I$ tel que

$$T_N x \in B(f_{i_0}, \epsilon)$$

C'est à dire

$$\|T_N x - f_{i_0}\| < \epsilon.$$

Il vient

$$\|Tx - f_{i_0}\| < \|T_N x - f_{i_0}\| + \|(T - T_N)x\| < 2\epsilon.$$

Donc $\cup_{i\in I} B(f_i, 2\epsilon)$ est un 2ϵ-reseau de $TB(0,1)$, qui est donc pré-compact.

Proposition 2.4. *Un opérateur linéaire T est compact si et seulement si*

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow Tx_n \to Tx. \tag{2.1}$$

En particulier, si T est compact et S est continu, alors TS et ST sont compacts.

Preuve. Supposons que (2.1) est satisfaite. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée. Il existe une sous-suite (x_{n_k}) faiblement convergente. L'implication (2.1) implique que (Tx_{n_k}) est fortement convergente. Donc T est compact.

Réciproquement, supposons que T est compact. Soit $x_n \rightharpoonup x$. Pour tout $y \in H$, on a

$$(Tx_n, y) = (x_n, T^* y) \to (x, T^* y) = (Tx, y).$$

On en déduit que

$$Tx_n \rightharpoonup Tx. \tag{2.2}$$

D'autre part, l'ensemble $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ est borné, il existe une sous-suite $(Tx_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergente. Grâce à la convergence faible (2.2), on a

$$Tx_{n_k} \to Tx.$$

Ainsi toute sous-suite convergente de $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la même limite Tx, la suite Tx_n converge vers Tx. D'où vient l'implication (2.1).

Si $x_n \rightharpoonup x$, alors $Sx_n \rightharpoonup Sx$, puis $TSx_n \to TSx$, donc TS est compact.

2.3. **Spectre d'un opérateur borné.** L'ensemble des résolvants d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \quad (T - \lambda I) \text{ est une bijection dans } H\}.$$

On note $R(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ la résolvante de T. D'après le théorème de l'application ouverte, $R(\lambda)$ est une application continue sur H.

Le spectre $\sigma(T)$ est le complémentaire de $\rho(T)$:

$$\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T).$$

Il est clair que l'ensemble des valeurs propres $vp(T) \subset \sigma(T)$. Il existe des opérateurs tels que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, mais $\mathrm{Im}(T) \neq H$. Donc l'inclusion est stricte en général $vp(T) \subsetneq \sigma(T)$. L'opérateur shift T est un exemple.

Proposition 2.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors l'ensemble des résolvants $\rho(T)$ est un ouvert, et le spectre $\sigma(T)$ est un compact contenu dans $|z| \leqslant \|T\|$.*

**Preuve.* Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. On va montrer qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, l'équation

$$(T - \lambda)x = f$$

admet une seule solution.

$$(T - \lambda_0)x = f + (\lambda - \lambda_0)x.$$

Ceci revient à résoudre

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1}(f + (\lambda - \lambda_0)x) = F(x).$$

Il suffit de montrer que l'application $x \to F(x)$ est contractante pourvu que $|\lambda - \lambda_0|$ soit assez petit.

$$F(x) - F(y) = (T - \lambda_0 I)^{-1}(\lambda - \lambda_0)(x - y)$$

Il vient

$$\|F(x) - F(y)\| < |\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| \|x - y\| = k\|x - y\|$$

$$k = |\lambda - \lambda_0| \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1,$$

pourvu que $|\lambda - \lambda_0|$ soit assez petit.

Pour $\lambda > \|T\|$, on a

$$(T - \lambda)x = f$$

soit

$$x = (Tx - f)/\lambda = F(x).$$

$$\|F(x) - F(y)\| < \|T\|\|(x-y)\|/|\lambda|.$$

Si $|\lambda| > \|T\|$, l'application $x \to F(x)$ est contractante, $Tx - \lambda x = f$ admet une seule solution et $\lambda \in \rho(T)$.

Proposition 2.6. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Alors, on a*

(a) $0 \in \sigma(T)$, un opérateur compact n'est pas bijectif,

(b) Si λ est une valeur propre non-nulle, alors Ker $(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

(c) 0 est le seul point d'accumulation possible de valeurs propres distinctes. Par conséquent, $vp(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble isolé.

Preuve. (a) Sinon, on a $I = TT^{-1}$, la boule unité est compacte, impossible d'après le théorème 1.16.

(b) Supposons que $\lambda \neq 0$. Ker$(T - \lambda I)$ est un sous-espace vectoriel fermé, donc un espace de Hilbert. D'autre part, l on a

$$\frac{T}{\lambda}x = \frac{Tx}{\lambda} = \frac{\lambda x}{\lambda} = x, \quad x \in Ker(T - \lambda I).$$

est l'opérateur d'identité, donc l'image de la boule unité est compacte. D'après Théorème 1.16, Ker$(T - \lambda I)$ est de dimension finie.

(c) Soit λ_n une suite de valeurs propres distinctes telles que $\lambda_n \to \lambda \neq 0$. Notons par $E_n = \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$, où $Te_n = \lambda_n e_n$. On suppose que e_n sont orthonormés. Alors la relation $\|e_n - e_m\|^2 = 2$ implique que aucune sous-suite ne sera de Cauchy. En revanche la suite e_n/λ_n est bornée, on pourrait extraire une sous-suite telle que e_n/λ_n converge faiblement. Mais T est compact, la suite

$$e_n = T(e_n/\lambda_n)$$

converge fortement, c'est une contradiction.

2.4. **Décomposition spectrale d'un opérateur compact et autoadjoint.**

Théorème 2.7. *(diagonalisation) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact autoadjoint d'un espace de Hilbert séparable. Alors, les vecteurs propres $(e_n)_{n\geqslant 1}$ forment une base hilbertienne dans H.*

Preuve. (a) Montrons qu'un opérateur compact autoadjoint admet une valeur propre.

Notons par λ la borne supérieure:

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|.$$

Soit x_m un suite "maximisante" telle que

$$\|x_m\| = 1, \quad |(Tx_m, x_m)| \to \lambda.$$

On peut extraire une sous-suite, notée encore par x_m telle que

$$x_m \rightharpoonup x.$$

Or T est compact, on a

$$Tx_m \to Tx$$

Donc

$$\lambda = |(Tx_m, x_m)| \to |(Tx, x)| \leqslant |(Tx, x)|/\|x\|^2 \leqslant \lambda.$$

La borne est donc atteinte. Supposons que $\lambda = (Tx, x) > 0$. Pour tout $y \in H$, la fonction

$$t \to \frac{(T(x+ty), x+ty)}{\|x+ty\|^2}$$

atteint le maximum en $t = 0$, il vient que $Tx = \lambda x$.

$$\frac{(T(x+ty), x+ty)}{\|x+ty\|^2} = \frac{\lambda + 2t(Tx, y) + t^2(Ty, y)}{1 + 2t(x, y) + t^2(y, y)}$$

Donc

$$2(Tx, y) - 2\lambda(x, y) = 0$$

Soit

$$(Tx - \lambda x, y) = 0$$

$$Tx - \lambda x = 0, \quad Tx = \lambda x.$$

Si $\lambda < 0$, on aura $-\lambda = (Tx, x)$ et $Tx = -\lambda x$.

(b) Soit $H_1 = H, T_1 = T$.

Soit F un sous-espace invariant de T. Alors pour tout $x \in F$ et $y \in F^\perp$, on a $(Ty, x) = (y, Tx) = 0$. Donc $Ty \in F^\perp$ et $F^\perp$ est invariant par T.

Soit λ_1 une valeur propre de T_1 associée à un vecteur propre normalisé e_1. Notons par $H_2 = \{\mathrm{span}(e_1)\}^\perp$ qui est invariant par T_1 et notons par T_2 la restriction de T_1 sur H_2. Soit λ_2 une valeur propre de T_2 associée à un vecteur propre normalisé $e_2 \in H_2$ tel que $(e_1, e_2) = 0$. Ainsi de suite, on obtient une suite de valeurs propres: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots$ (car H_n est dcroissantes) et une suite de vecteurs propres orthonormés $e_1, e_2, \cdots$

Notons par F l'adhérence de la somme de tous les sous-espaces propres. C'est un sous-espace vectoriel fermé de H_1, donc un espace de

Hilbert. Si $F^\perp \neq \{0\}$, alors $T_1|_{F^\perp}$ admet au moins un vecteur propre. Ceci contredit la définition de F.

Théorème 2.8. *(Alternative de Fredholm) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact d'un espace de Hilbert séparable. Alors, on a:*

(a) $Im(I - T) = Ker(I - T^*)^\perp$,

(b) $dim\ Ker(I - T) = dim\ Ker(I - T^*) = N < +\infty$. En particulier, $Im(I - T) = H$ si et seulement si $Ker(I - T) = \{0\}$.

Remarque importante. (a) signifie que l'équation $x - Tx = f$ admet des solutions si et seulement si f satisfait N conditions: $(f, v) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{Ker}(I - T^*)$.

(b) signifie que $I - T$ est surjective si et seulement s'il est injective, comme si c'était en dimension finie, d'où vient le terme "alternative". Dans ce cas, le théorème de l'application ouverte assure que son inverse $(I - T)^{-1}$ est un opérateur borné.

En particulier, si $\mathrm{Im}(\lambda I - T) \neq H$ alors $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$. Donc, $\lambda \neq 0$ est une valeur propre.

Preuve. On se limite au cas $T = T^*$. On montre que l'équation

$$(I - T)x = f \tag{2.3}$$

admet des solutions si et seulement si $f \in \mathrm{Ker}(I - T)^\perp$.

D'après Théorème 2.7, les vecteurs propres $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de T forment une base hilbertienne dans H. Avec les décompositions

$$x = \sum_{n=1} x_n e_n, \quad f = \sum_{n=1} f_n e_n$$

l'équation (2.3) devient

$$\sum_{n=1} x_n(1 - \lambda_n)e_n = \sum_{n=1} f_n e_n,$$

soit encore

$$x_n(1 - \lambda_n) = f_n, \quad n \geqslant 1. \tag{2.4}$$

Notons

$$\mathrm{Ker}(I - T) = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots e_N, \quad Te_m = e_m, \quad \lambda_m = 1\}.$$

Donc $f \in \mathrm{Ker}(I - T)^\perp$, si et seulement si

$$0 = (f, e_m) = \sum_{n=1} f_n(e_n, e_m) = f_m \quad \text{pour } \lambda_m = 1.$$

Si le système (2.4) admet une solution, alors

$$f_m = (1 - \lambda_m)x_m = 0$$

pour tous $\lambda_m = 1$, soit $f \in \mathrm{Ker}(I - T)^\perp$.

Réciproquement, si $f_n = 0$ pour tous $\lambda_n = 1$, posons

$$x_n = \begin{cases} 0, & \lambda_n = 1; \\ f_n/(1-\lambda_n), & \lambda_n \neq 1. \end{cases}$$

On a

$$x_n(1-\lambda_n) = f_n, \quad n \geqslant 1.$$

De plus, comme $\lambda_n \to 0$ et $1-\lambda_n$ est minorée, la série $(x_n)_n$ est carré sommable. Par Théorème 1.6, $x \in H$.

2.5. **Problèmes spectraux des opérateurs différentiels.**

Théorème 2.9. *Soient V et H deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie tels que $V \subset H$ avec injection dense et compact. Soit a une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $V \times V \to \mathbb{R}$. Alors*

(a) la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ de valeurs propres

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H, \quad \forall v \in V. \tag{2.5}$$

rangées dans l'ordre croissant satisfait $\lambda_n \to +\infty$;

(b) la famille des vecteurs propres normalisés $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne dans H;

(c) la famille des vecteurs propres $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne dans V.

Preuve. On définit l'opérateur $T:\ H \to V$ par

$$u = Tf \Longleftrightarrow a(Tf, v) = (f, v)_H, \quad \forall v \in V.$$

Pour tous $f, g \in H$, on a

$$a(Tf + Tg, v) = a(Tf, h) + a(Tg, v) = (f+g, v)_H = a(T(f+g), v).$$

Ceci donne

$$T(f+g) = Tf + Tg.$$

Puis,

$$(f, Tg)_H = a(Tf, Tg) = a(Tg, Tf) = (g, Tf)_H = (Tf, g)_H.$$

Ceci donne

$$(f, Tg)_H = (Tf, g)_H.$$

Puis,

$$\alpha \|u\|_V^2 < a(u,u) = (f,u)_H < \|f\|_H \|u\|_H < \|f\|_H \|u\|_V.$$

Ceci donne la compacité

$$\|Tf\|_V = \|u\|_V < c\|f\|_H.$$

Ainsi T est compact autoadjoint et positif sur H. Par Théorème 2.7, la famille des vecteurs propres e_n forment une base hilbertienne dans H et les valeurs propres μ_n sont positives et rangées dans l'ordre décroissant telles que $\mu_n \to 0$. On a

$$Te_n = \mu_n e_n$$

$$a(\mu_n e_n, v) = (e_n, v)_H, \quad \forall v \in V.$$

avec $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$.

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H, \quad \forall v \in V.$$

D'autre part, on a

$$a(e_n, e_m) = \lambda_n (e_n, e_m)_H = \lambda_n \delta_{m,n}.$$

$(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$. Notons $a(e_n, u) = \lambda_n(e_n, u)_H$. Si $a(e_n, u) = 0$, on aura $(u, e_n)_H = 0$ car $\lambda_n > 0$. Comme la famille $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est totale dans H, donc $u = 0$. Ainsi $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est totale dans V, et $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne dans V.

2.6. **Problème de Sturm-Liouville.** On cherche un couple (λ, u) tel que

$$-(pu')' + qu = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{2.6}$$

où $p \geqslant 1$ est une fonction de classe $C^1([0,1])$ et $q \geqslant 0$ est une fonction continue.

Soit $u \in C^2(0,1)$ une solution classique de (2.6). Soit $v \in H_0^1(0,1)$ une fonction test. Par intégration par parties, on obtient une formulation variationnelle:

$$\int_0^1 (pu'v' + quv)dx = \lambda \int_0^1 uvdx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1). \tag{2.7}$$

Mettons

$$H = L^2(0,1), \quad V = H_0^1(0,1), \quad a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx.$$

Alors (2.7) s'écrit sous la forme

$$a(u,v) = \lambda(u,v)_H, \quad \forall v \in V. \tag{2.8}$$

Par Théorème 2.9, la famille des vecteurs propres $(e_n)_{n\geqslant 1}$ du problème (2.8) forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$, et $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_{n\geqslant 1}$ forme une base hilbertienne dans $H_0^1(0,1)$.

Dans le cas particulier $p = 1$ et $q = 1$, un calcul direct montre que

$$u - u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{2.9}$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique

$$X^2 = 1 - \lambda.$$

Donc

$$u = ae^{\sqrt{1-\lambda}x} + be^{-\sqrt{1-\lambda}x}.$$

$$u(0) = 0 \Longrightarrow a + b = 0.$$

$$u = (e^{\sqrt{1-\lambda}x} - e^{-\sqrt{1-\lambda}x}) = 2\sinh(\sqrt{1-\lambda}x).$$

$$u(1) = 0 \Longrightarrow \sinh(\sqrt{1-\lambda}) = 0 \Longrightarrow \sqrt{1-\lambda} = in\pi \Longrightarrow \lambda = 1 + (n\pi)^2$$

$$u = a\sinh(\sqrt{-\lambda}x) = a\sinh(in\pi x) = a\sin(n\pi x).$$

La suite de vecteurs propres

$$e_n = \sqrt{2}\sin n\pi x, \quad n \geqslant 1$$

forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$ et la suite

$$e_n/\sqrt{\lambda_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(n\pi)^2}}\sin n\pi x, \quad n \geqslant 1$$

forme une base hilbertienne dans $H_0^1(0,1)$.

3. Exercices

Exercice 1. Montrer que

(a) tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert,

(b) tout espace de dimension finie muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

Exercice 2. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert. Montrer que l'application

$$\big(\{x_1, x_2)\}, \{y_1, y_2\}\big) = (x_1, y_1)_{H_1} + (x_2, y_2)_{H_2}$$

est un produit scalaire sur l'espace produit $H = H_1 \times H_2$ et que H, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 3. Expliciter la projection P dans les cas suivants:

$$(a)\ C = [0, +\infty[, \quad (b)\ C = [0, 1] \times [0, 1].$$

Exercice 4. Rappelons que $L^2(0, 2\pi)$ muni du produit scalaire

$$(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c)\overline{g}(x)dx$$

est un espace de Hilbert. La famille des vecteurs $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $e_n = e^{inx}$ est orthonormée. On définit les coefficients de Fourier par

$$c_n = (f, e_n) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La série de Fourier converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$ si $f \in C^1([0, 2\pi])$.

(a) Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne dans $L^2(0, 2\pi)$.

(b) Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\cos nx)_{n\geqslant 1} \quad \text{et} \quad (\sin nx)_{n\geqslant 1}$$

sont des bases hilbertiennes dans $L^2(0, \pi)$ avec

$$(f, g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\overline{g}(x)dx.$$

Exercice 5. Les polynômes de Legendre sont définis par

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

(a) Montrer que

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx = \begin{cases} 0 & n \neq m; \\ \frac{2}{2n+1} & m = n. \end{cases}$$

(c) Montrer que la famille

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} p_n$$

forme une base Hilbertienne dans $L^2(-1,1)$.

Exercice 6. Calculer

$$\inf_{\{a,b,c\}} \int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx, \quad \inf_{\{a,b\}} \int_{0}^{+\infty} |x^2 - ax - b|^2 e^{-x} dx.$$

Exercice 7. Soient A, B deux ensembles d'un espace de Hilbert.
(a) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
(b) $A^\perp = \overline{A}^\perp$.
(c) $A^\perp$ est un espace vectoriel fermé.
(d) $A^\perp = \overline{\{\mathrm{Span}(A)\}}^\perp$.

Exercice 8. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = f(x-n)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. Si f_n converge fortement vers 0, que vaut f?

Exercice 9. Examiner la convergence des suites dans $L^2(0,1)$:

$$\frac{n^2}{n^2+x^2}, \quad \cos(2n\pi x), \quad \sqrt{n}e^{-nx}$$

et celles dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{1+(nx)^2}, \quad \sqrt{n}e^{-(nx)^2}.$$

Exercice 10. Soient ϕ une forme linéaire continue, et C un convexe fermé, non-vide d'un espace de Hilbert H. Montrer que l'application

$$J(v) = \|v\|^2 - \phi(v)$$

admet un seul point de minimum sur C.

Exercice 11. Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$Ker(A) = \{Im(A^*)\}^{\perp}.$$

Exercice 12*. *(Schauder's Theorem).* Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement si A^* est compact.

Exercice 13*. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H. Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est Hilbert-Schmidt, si

$$\|A\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \|Ae_n\|^2 < +\infty.$$

(a) Montrer que la somme est indépendante du choix de bases

(b) Soit π_N la projection sur le sous-espace Span$\{e_, \cdots, e_N\}$. Montrer que

$$\|A - A \circ \pi_N\|^2 < \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|Ae_n\|^2 < +\infty.$$

En déduire que A est un opérateur compact.

Exercice 14. (Bari's Theorem) Soit H un espace de Hilbert et (e_n) une base hilbertienne et (f_n) une suite linéairement indépendente et quadratiquement approchée de la base (e_n):

$$\sum_{n\geqslant 1} \|e_n - f_n\|^2 < +\infty.$$

On va montrer que la suite (f_n) est l'image d'une base hilbertienne par un isomorphisme de H.

(a) Montrer que T défini par

$$Te_n = e_n - f_n$$

est une opérateur de Hilbert-Schimdt.

(b) Montrer que $Ker(I - T) = \{0\}$. En éduire que est $(I - T)$ est inversible et que son inverse est borné. Conclure.

Exercice 15. (a) Formuler le problème de Neumann:

$$\begin{cases} u - u'' = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

dans l'espaces de Hilbert $H^1(0,1)$ sous la forme variationnelle

$$a(u,v) = \lambda(u,v), \quad v \in H^1(0,1).$$

(b) Montrer que la suite de vecteurs propres $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$ et que la suite $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_n$ forme une base hilbertienne dans $H^1(0,1)$.

(c) Calculer e_n et λ_n.

Exercice 16. Soit T un opérateur compact et auto-adjoint d'un space de Hilbert H. Montrer qu'il existe $u \in H$ tel que

$$\|u\| = 1 : \quad |(Tu,u)| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|.$$

En déduire que A admet une valeur propre.

Exercice 17*. Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On considère l'équation:

$$\begin{cases} u - u'' = f, \quad x > 0, \\ u(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

(a) Soit $u \in H^2(0,+\infty)$ solution de l'équation. Montrer que u vérifie l'équation variationnelle

$$\int_0^{+\infty} (uv + u'v')dx = \int_0^{+\infty} fvdx, \quad \forall v \in H_0^1(0,+\infty).$$

(b) Inversement, soit $u \in H_0^1(0,+\infty)$ solution de l'équation variationnelle. Montrer que $u \in H^2(0,+\infty)$ et satisfait l'équation différentielle.

(c) Pour tout $f \in L^2(0,+\infty)$, on définit $u = Tf$, la solution de l'équation différentielle. Montrer que T est une opérateur autoadjoint dans $L^2(0,+\infty)$.

(d) Montrer que T n'a pas de valeur propre.

(e) Montrer que $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\subset \rho(T)$.

(f) Montrer que $I - \mu T$ n'est pas surjectif pour $0 < \mu < 1$. En déduiure que $\sigma(T) = [0,1]$ et $\rho(T) =]-\infty,0[\bigcup]1,+\infty[$.

Eléments de Correction

Exercice 1. (a) Soit V un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans V, elle est aussi une suite de Cauchy dans H. Il existe donc $x \in H$ tel que $x_n \to x$ dans H. Mais V est fermé, donc $x \in V$, donc V est complet.

(b) Soit $e_1, \cdots, e_d$ une base orthonormée. Soit $(x_n)_n$

$$x_n = \sum_{i=1}^{d} a_{n,i} e_i.$$

une suite de Cauchy dans H, par le règle de Pythagore, on a

$$\|x_n - x_m\|^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{d} (a_{n,j} - a_{m,j}) e_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{d} |a_{n,j} - a_{m,j}|^2.$$

Donc la suite $a_n = (a_{n,j})_{j=1}^d$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ qui est complet, il existe $a = (a_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$a_{n,j} \to a_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant d.$$

Soit encore

$$x_n - x = \sum_{j=1}^{d} (a_{n,j} - a_j) e_j \to 0, \quad x = \sum_{j=1}^{d} (a_j e_j \in H.$$

Exercice 2. Soient $\{x, y\}, \{\hat{x}, \hat{y}\} \in V \times H$, dont le produit scalaire est défini par

$$(\{x, y\}, \{\hat{x}, \hat{y}\})_{V \times H} = (x, \hat{x})_V + (y, \hat{y})_H.$$

Soit $\{x_n, y_n\}$ une suite de Cauchy dans $V \times H$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \|\{x_n, y_n\} - \{x_m, y_m\}\|_{V \times H}^2 &= \|\{x_n - x_m, y_n - y_m\}\|_{V \times H}^2 \\ &= \|x_n - x_m\|_V^2 + \|y_n - y_m\|_H^2 \to 0, \quad m, n \to +\infty. \end{aligned}$$

Donc $(x_m)_m$ et $(y_m)_m$ sont des suites de Cauchy dans V et H respectivement. Les espaces V, H étant complets, il existe donc $x \in V$ et $y \in H$ tels que

$$x_n \to x \text{ dans } V, \quad y_n \to y \text{ dans } H,$$

soit encore

$$\{x_n, y_n\} \to \{x, y\} \quad \text{dans } V \times H.$$

Donc l'espace produit $V \times H$ est complet pour la norme induite

$$\|\{x, y\}\|_{V \times H} = \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_H^2}.$$

Exercice 3. (a) Posons

$$u = \begin{cases} f, & f \geqslant 0; \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Soit $v \in C$, on a

$$(x-u)(v-u) = \begin{cases} (f-f)(v-f) = 0, & f \geqslant 0; \\ (f-0)(v-0) = fv \leqslant 0, & f < 0. \end{cases}$$

u satisfait l'inéquation d'Euler,

$$(f-u)(v-u) \leqslant 0, \quad v \in C.$$

Donc u est le projeté de f sur C.

Exercice 4. (a) On a

$$(e^{inx}, e^{imx})_{L^2(-\pi,\pi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}.$$

Etant donné $f \in L^2(-\pi,\pi)$ et $\epsilon > 0$, par densite de C_c^1 dans $L^2(-\pi,\pi)$, il existe une fonction $\phi_\epsilon \in C_c^1(-\pi,\pi)$ telle que $\|f - \phi_\epsilon|_{L^2(-\pi,\pi)} < \epsilon$. Par le théorème de Fourier, la série de Fourier de ϕ_ϵ

$$\phi_\epsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

convergente uniformément vers ϕ_ϵ sur $[-\pi,\pi]$. Il existe donc $N > 0$ tel que

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} \Big| \sum_{|n|<N} c_n e^{inx} - \phi_\epsilon(x) \Big| < \epsilon/\sqrt{2\pi}.$$

Il vient que

$$\Big\| \sum_{|n|<N} c_n e^{inx} - f \Big\|_{L^2(-\pi,\pi)}$$

$$< \Big\| \sum_{|n|<N} c_n e^{inx} - \phi \Big\|_{L^2(-\pi,\pi)} + \|f-\phi\|_{L^2(-\pi,\pi)} < 2\epsilon.$$

La famille $(e^{inx})_n$ orthonormée est dense dans $L^2(-\pi,+\pi)$, donc forme une base hilbertienne dans $L^2(-\pi,+\pi)$.

(b) On prolonge f par parité:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < \pi, \\ f(-x) & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Comme $\tilde{f} \in L^2(-\pi, +\pi)$, donc

$$\tilde{f}(x) = \sum_n c_n e^{inx} \quad \text{dans} \quad L^2(-\pi, \pi).$$

Or

$$c_n = (e_n, \tilde{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) e^{inx} dx = c_{-n}.$$

Donc

$$f(x) = c_0 + \sum_{n \neq 0} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n>0} c_n (e^{inx} + e^{-inx}).$$

Soit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n>0} a_n \cos(nx), \quad \text{dans} \quad L^2(0, \pi)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Exercice 5. Etant donné $f \in L^2(-1,1)$ et $\epsilon > 0$, par densité de $C_c^0(-1,1)$ dans $L^2(-1,1)$, il existe $\phi_\epsilon \in C_c^0(-1,1)$ telle que

$$\|f - \phi_\epsilon\|_{L^2(-1,1)} < \epsilon.$$

Par densité des polynômes dans $C_c^0(-1,1)$, il existe p_ϵ un polynôme tel que

$$\max_{|x| \leqslant 1} |p_\epsilon(x) - \phi_\epsilon(x)| < \epsilon / \sqrt{2}.$$

Ceci implique

$$\|p_\epsilon - \phi_\epsilon\|^2_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |p_\epsilon(x) - \phi_\epsilon(x)|^2 dx < \int_{-1}^{1} \epsilon^2/2 dx = \epsilon^2.$$

Soit

$$\|p_\epsilon - \phi_\epsilon\|_{L^2(-1,1)} < \epsilon.$$

Finalement, on a

$$\|f - p_\epsilon\|_{L^2(-1,1)} < \|f - \phi_\epsilon\|_{L^2(-1,1)} + \|p_\epsilon - \phi_\epsilon\|_{L^2(-1,1)} < 2\epsilon.$$

Ceci montre la densité des polynômes dans $L^2(-1,1)$.

Notons que e_n est un polynôme de degrés n, donc la famille $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne dans $L^2(-1,1)$.

Exercice 6. (a) Il s'agit de la projection orthogonale de la fonction $x \to x^3$ sur l'espace des polynômes de degré $\leqslant 2$. Cette projection est caractérisée par la condition

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - ax^2 - bx - c) x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

En évaluant ces relations, on obtient

$$-2a/3 - 2c = 0, \quad 2/5 - 2b/3 = 0, \quad -2a/5 - 2c/3 = 0.$$

Puis, on obtient

$$a = c = 0, \quad b = 3/5.$$

Donc le polynôme $3x^2/5$ est la meilleure approximation quadratique de de la fonction $x \to x^3$.

Exercice 7. (a) Soit $x \in B^\perp$, alors $(x, y) = 0$ pour tout $y \in B$, a fortiori pour tout $y \in A \subset B$. Donc $x \in A^\perp$, puis $B^\perp \subset A^\perp$.

(b) $A \subset \overline{A}$. On a $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$. Soit $x \in A^\perp$. Pour $y \in \overline{A}$, il existe $y_n \in A$ telle que $y_n \to y$. Par continuité du produit scalaire, on a

$$(x, y) = \lim_{n \to +\infty} (x, y_n) = 0.$$

Donc $x \in \overline{A}^\perp$, soit $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$.

(c) Soient $x, y \in A^\perp$. Alors pour tout $z \in A$, on a

$$(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z) = 0.$$

Donc $ax + by \in A^\perp$, ce qui prouve que $A^\perp$ est un espace vectoriel.

Soit $x_n \in A^\perp$ tel que $x_n \to x$. Alors la continuité du produit scalaire implique

$$(x_n, z) \to (x, z) = 0$$

pour tout $z \in A$. Donc, $x \in A^\perp$. Ainsi $A^\perp$ est donc fermé.

(d) Comme $A \subset \{\mathrm{Span}(A)\}$, par (a), on a $\{\mathrm{Span}(A)\}^\perp \subset A^\perp$. Soit $x \in A^\perp$ et pour tout $y \in Span(A)$, il existe $y_i \in A$ et $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i.$$

Alors, on a

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x, y_i) = 0.$$

Donc $x \in \{\mathrm{Span}(A)\}^\perp$, soit encore $A^\perp \subset \{\mathrm{Span}(A)\}^\perp$.

Exercice 8. Etant donnée $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$, par densité, il existe $\phi_\epsilon \in C_c^0(\mathbb{R})$ tel que $\|g - \phi_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \phi(x) dx + \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(g(x) - \phi_\epsilon(x)) dx. \tag{3.2}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(g(x) - \phi_\epsilon(x)) dx \Big|^2$$

$$< \int_{\mathbb{R}} |f(x-n)|^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x) - \phi_\epsilon(x)|^2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x) - \phi_\epsilon(x)|^2 dx = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \|g - \phi_\epsilon\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Supposons que $\mathrm{supp}(\phi_\epsilon) \subseteq [-R, R]$. Alors

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx \Big| \leqslant C \int_{n-R}^{n+R} |f(y)|dy \leqslant C\sqrt{R}\Big(\int_{n-R}^{n+R} |f(y)|^2 dy \Big)^{1/2}.$$

Donc

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx \Big| \to 0. \tag{3.3}$$

Il existe $N > 0$ tel que pour $n > N$, on a

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx \Big| < \epsilon.$$

On déduit de (3.2) que

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx \Big| < (1 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})})\epsilon$$

pour $n > N$. C'est à dire que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx \to 0$$

pour tout $g \in L^2(\mathbb{R})$, soit encore la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 = 0$$

si et seulement si $f \equiv 0$.

Exercice 9. (1) Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2 + x^2} = \frac{1}{1 + x^2/n^2} \to 1.$$

D'autre part, on a

$$|f_n|^2 < 1 \in L^2(0, 1)$$

La suite f_n converge fortement vers 1 dans $L^2(0, 1)$ par la convergence dominée.

(2) Notons $f_n(x) = \cos(2n\pi x)$. Par le théorème de Riemann, la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(0, 1)$.

$$v \in L^2(0,1): \quad \int_0^1 f_n(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)\cos(2n\pi x)dx \to 0.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 |\cos(2n\pi x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1+\cos(4n\pi x)}{2} dx = 1/2.$$

Donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2(0,1)$.

(3) Posons $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx}$. Etant donné $g \in L^2(0,1)$ et $\epsilon > 0$. Par densité, il existe $\phi_\epsilon \in C_c^0(0,1)$ tel que $\|g - \phi_\epsilon\| < \epsilon$. On a

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx + \int_0^1 f_n(x)(g(x) - \phi_\epsilon(x))dx. \tag{3.4}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\Big|\int_0^1 f_n(x)(g(x) - \phi_\epsilon(x))dx\Big|^2$$

$$< \int_0^1 f_n(x)^2 \int_0^1 |g(x) - \phi_\epsilon(x)|^2 dx < \int_0^1 |g(x) - \phi_\epsilon(x)|^2 dx < \epsilon^2,$$

car

$$\int_0^1 f_n(x)^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{n}e^{-nx})^2 dx = \int_0^n e^{-2y} dy \to 1/2. \tag{3.5}$$

Supposons $supp(\phi_\epsilon) \subset [a, 1-a]$. On a

$$\int_0^1 \sqrt{n}e^{-nx}\phi_\epsilon(x)dx = \int_a^{1-a} \sqrt{n}e^{-nx}\phi_\epsilon(x)dx.$$

Sur $[a, 1-a]$, on a

$$\sqrt{n}e^{-nx} < \sqrt{n}e^{-na} < \sqrt{n}\frac{1}{na} = \frac{1}{a\sqrt{n}} \to 0$$

uniformément. Il vient que

$$\int_0^1 f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx = \int_a^{1-a} f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx \to 0, \quad n \to 0. \tag{3.6}$$

Il existe $N > 0$ tel que pour $n > N$, on a

$$\Big|\int_0^1 f_n(x)\phi_\epsilon(x)dx\Big| < \epsilon.$$

Par (3.4), on obtient

$$\Big|\int_0^1 f_n(x)g(x)dx\Big| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

pour $n > N$. C'est à dire que

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)dx \to 0$$

pour tout $g \in L^2(0,1)$, soit encore la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers 0, mais non fortement dans $L^2(0,1)$ par (3.5).

Exercice 10. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $b \in H$ tel que $\phi(v) = 2(b,v)$. Alors

$$J(v) = \|v\|^2 - \phi(v) = \|v\|^2 - 2(b,v) = \|v-b\|^2 - \|b\|^2,$$

qui atteint le minimum en $v = b$.

Exercice 11. Soit $h \in Ker(A)$. Pour tout $g \in Im(A^*)$, il existe f tel que $g = A^*f$. Alors

$$(h,g) = (h, A^*f) = (Ah, f) = (0,f) = 0, \quad \forall g \in Im(A^*)$$

donc $h \in \{Im(A^*)\}^\perp$. Par conséquant, on a $Ker(A) \subset \{Im(A^*)\}^\perp$.

L'autre sens, soient $h \in \{Im(A^*)\}^\perp$ et $g \in H$, alors

$$(Ah, g) = (h, A^*g) = 0, \quad A^*g \in \{Im(A^*)\}$$

donc $Ah = 0$. Par conséquant, on a $h \in Ker(A)$ puis $\{Im(A^*)\}^\perp \subset Ker(A)$. En combinant les deux sens, on prouve $\{Im(A^*)\}^\perp = Ker(A)$, soit

$$Im(A^*) \subseteq \overline{Im(A^*)} = (\{Im(A^*)\}^\perp)^\perp = (Ker(A))^\perp.$$

Exercice 12. Notons par B la boule unité fermée de H. Soit $x_n \in B$ telle que $x_n \rightharpoonup x$, donc $T^*x_n \rightharpoonup T^*x$.

Comme T est compact, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe un ensemble fini I et y_i tels que $T(B) \subset \cup_{i\in I} V(y_i, \epsilon)$.

Pour $z \in B$, écrivons

$$(z, T^*(x_n - x)) = (Tz, x_n - x) = (Tz - y_i, x_n - x) + (y_i, x_n - x).$$

Soit $i_0 \in I$ tel que $Tz \in B(y_{i_0}, \epsilon)$, donc $\|Tz - y_{i_0}\| < \epsilon$. Soit $N_{i_0} > 0$ tel que $(y_{i_0}, x_n - x) < \epsilon$ pour $n > N_{i_0}$. Alors pour $n > N_{i_0}$, on a

$$\|(z, T^*(x_n - x))\| < \|Tz - y_{i_0}\|\|x_n - x\| + |(y_{i_0}, x_n - x)| \leqslant 3\epsilon.$$

Notons N_{i_0} dépend de z, lorsque z varie dans la boule B, l'indice i_0 varie dans un ensemble fini I, on peut donc définir

$$N = \max_{i_0 \in I} N_{i_0} < +\infty.$$

Il vient donc

$$\|(z, T^*(x_n - x))\| \leqslant 3\epsilon$$

pour tout $z \in B$ et tout $n > N$, soit encore

$$\|T^*(x_n - x)\| = \sup_{\|z\|=1} \|(z, T^*(x_n - x))\| \leqslant 3\epsilon$$

tout $n > N$. Donc $T^*x_n \to Tx$. Par conséquent, T^* est compact.

L'autre sens d'implication est immédiate par la relation $(T^*)^* = T$.

Exercice 13. (a) Soit (f_m) une autre base hilbertienne. Par Parseval, on a

$$Ae_n = \sum_{m=1}^{\infty}(Ae_n, f_m)f_m, \qquad \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}(Ae_n, f_m)^2.$$

Puis, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}(Ae_n, f_m)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(A^*f_m, e_n)^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\|A^*f_m\|^2.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\|A^*f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\|(A^*)^*f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\|Af_m\|^2.$$

(b) Soit

$$\|x\| = 1, \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty}a_ne_n, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 = \|x\|^2 = 1.$$

La projection est definie par

$$\pi_N x = \sum_{n=1}^{N}a_ne_n.$$

Alors

$$(A - A\circ\pi_N)x = \sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nAe_n.$$

$$\|(A - A\circ\pi_N)x\|^2 = \Big\|\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nAe_n\Big\|^2$$

$$\leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\sum_{n=N+1}^{+\infty}\|Ae_n\|^2 < \sum_{n=N+1}^{+\infty}\|Ae_n\|^2.$$

Soit

$$\|(A - A\circ\pi_N)\|^2 < \sum_{n=N+1}^{+\infty}\|Ae_n\|^2 \to 0.$$

$A\circ\pi_N$ est de rang fini, donc compact. Par conséquent, A est compact.

Exercice 14. Par

$$\sum_{n\geqslant 1}\|Te_n\|^2 = \sum_{n\geqslant 1}\|e_n - f_n\|^2 < +\infty,$$

T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact.

Soit

$$x = \sum_{n \geqslant 1} c_n e_n$$

tel que $(I - T)x = 0$. Alors

$$(I - T)x = \sum_{n \geqslant 1} c_n (I - T) e_n = \sum_{n \geqslant 1} c_n (e_n - e_n - f_n) = \sum_{n \geqslant 1} c_n f_n = 0.$$

On endéduit $c_n = 0$, puisque (f_n) est libre, puis $x = 0$.

Par le théorème de Fredholm, $(I - T)$ est bijective. Puis par le théorème d'application ouverte, $(I - T)^{-1}$ est borné. On obtient donc

$$(I - T)e_n = f_n, \qquad (I - T)^{-1} f_n = e_n.$$

Exercice 15. (a) Soit $u \in H^2(0,1)$ une solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} u - u'' = \lambda u, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Multiplier l'équation (3.7) par une fonction test $v \in H^1(0,1)$, on obtient un problème variationnel:

$$a(u, v) = \lambda (u, v)_H, \quad \forall v \in H^1(0,1) \tag{3.8}$$

avec

$$a(u, v) = \int_0^1 (uv + u'v')dx, \quad (u, v) = \int_0^1 uvdx$$

et

$$V = H^1(0,1), \quad H = L^2(0,1).$$

L'injection $H^1(0,1) \subset L^2(0,1)$ est dense et compacte, et la forme $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire symétrique continue et coercive sur $H^1(0,1) \times H^1(0,1)$, d'après Théorème 2.9, les valeurs propres de (3.8) sont positives et peuvent être rangées dans l'ordre croissant telles que $\lambda_n \to +\infty$, le système de vecteurs propres $(e_n)_n$ forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$ et le système $(e_n/\sqrt{\lambda_n})_n$ forme une base hilbertienne dans $H^1(0,1)$.

(b) Cherchons à résoudre le système (3.7) dont l'équation caractéristique est

$$X^2 = 1 - \lambda.$$

La condition $u'(0) = 0$ donne

$$u(x) = \cos(\sqrt{\lambda - 1}\ x).$$

La condition $u'(1) = 0$ donne $\sqrt{\lambda - 1} = n\pi$, soit

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + 1$$

et le vecteur propre normalisé
$$e_n = \sqrt{2}\cos(n\pi x), \quad n \geqslant 0.$$
Le système $(e_n)_{n\geqslant 0}$ forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$ et le système $(\epsilon_n)_{n\geqslant 0}$ avec
$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{2}{(n\pi)^2+1}}\cos(n\pi x), \quad n \geqslant 0$$
forme une base hilbertienne dans $H^1(0,1)$.

Exercice 16. Soit $(x_m)_m$ un suite "maximisante" telle que
$$\|x_m\| = 1, \quad |(Tx_m, x_m)| \to \lambda = \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|.$$
La suite $(x_m)_m$ est bornée, on peut extraire une sous-suite, notée encore par $(x_m)_m$ telle que
$$x_m \rightharpoonup x_0.$$
Par la semie-continuité inférieure, on a $\|x_0\| \leqslant 1$. D'autre part, T est compact, on a
$$Tx_m \to Tx.$$
Par la continuité du produit scalaire, on a
$$\sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)| = \lim_{m\to+\infty} |(Tx_m, x_m)| = |(Tx_0, x_0)|$$
$$\leqslant \frac{|(Tx_0,x_0)|}{\|x_0\|^2} \leqslant \sup_{\|x\|=1} |(Tx,x)|.$$
La borne supérieure est donc atteinte en $u = x_0/\|x_0\|$.

Si $\lambda = |(Tu,u)| = 0$, on a $(T(u+h), u+h) = 0$ pour tout $h \in H$. On en déduire que $(Tu,h) = 0$, soit $Tu = 0$, donc $\lambda = 0$ est une valeur propre.

Si $\lambda = (Tu,u) > 0$, pour tout $h \in H$, la fonction
$$t \to \frac{(T(u+th), u+th)}{\|u+th\|^2} = \frac{\lambda + 2t(Tu,h) + t^2(Th,h)}{1 + 2t(u,h) + t^2(h,h)}$$
atteint le maximum en $t = 0$, il vient que $(Tu,h) = \lambda(u,h)$ pour tout $h \in H$, soit $Tu = \lambda u$, donc λ est une valeur propre.

Si $\lambda = (-Tu,u) > 0$, on aura $Tu = -\lambda u$, donc $-\lambda$ est une valeur propre.

4. Complément du cours

4.1. **Autour du théorème de Baire.**

Théorème 4.1. *(Hahn-Banach analytic form). Let $p : E \to \mathbb{R}$ be a functional on E satisfying*

$$p(ax) = ap(x), \quad \forall x \in E,\ \forall a > 0,$$

and

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Let $G \subset E$ be a linear subspace and let $g : G \to \mathbb{R}$ be a linear form such that

$$g(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in G.$$

Then there exists a linear form f defined on all of E that extends g:

$$g(x) = f(x), \quad f(x) \leqslant p(x), \quad \forall x \in E.$$

As p is a norm of E, the theorem means that g is bounded and the extension f conserves the norm.

Théorème 4.2. *(Banach-Steinhaus) Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille des applications linéaires continues de E dans F. On suppose que*

$$\|T_i x\|_F < +\infty, \quad \forall x \in E,$$

alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|T_i\| < c, \quad \forall i \in I.$$

Théorème 4.3. *(Application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T une application linéaire continue et surjective de E sur F. Alors, il existe une constante c telle que*

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)).$$

En particulier, si T est bijective, alors son inverse est une application continue de F sur E.

4.2. **Point-selle et condition inf-sup.** La coercivité est seulement suffisante pour que le problème variationnel

$$a(u,v) = f(v), \quad v \in V$$

admette une seule solution. Les conditions de Banach-Necas-Babushka:

$$\inf_{u\in V} \sup_{v\in V} \frac{a(u,v)}{\|u\|\|v\|} \geq \alpha,$$

$$\{v: \ a(u,v) = 0, \quad \forall u \in V\} = \{0\}$$

sont nécessaires et suffisantes pour que le problème variationnel admette une seule solution.

Théorème 4.4. *Soit V et H deux espaces de Hilbert. On se donne*

(a) une forme a bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$;

(b) une forme b bilinéaire continue sur $V \times H$ et satisfaisant la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) ou inf-sup:

$$\inf_{\|q\|_H=1} \sup_{\|v\|_V=1} b(v,q) \geqslant \beta > 0.$$

Alors le problème mixte

$$\begin{cases} a(u,v) + b(v,p) = f(v), & \forall v \in V, \\ b(u,q) = 0, & \forall q \in H. \end{cases} \tag{4.1}$$

admet une unique solution.

Preuve. Posons

$$W = \{v \in V : \quad b(v,q) = 0, \quad \forall q \in H\}.$$

W est un sous-espace fermé de V, donc un espace de Hilbert. En particulier, u est une solution du problème

$$u \in W : \quad a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in W. \tag{4.2}$$

Une fois u est fixé, on cherche $p \in H$ tel que

$$b(v,p) = -a(u,v) + f(v), \quad \forall v \in V,$$

ceci donne une solution au problème (4.1).

Posons

$$F(v) = -a(u,v) + f(v).$$

Il faut trouver un $p \in H$ tel que

$$b(v,p) = F(v), \quad \forall v \in V.$$

Il suffit de montrer

$$b(v,p) = F(v), \quad \forall v \in W^{\perp},$$

puisque la relation est satisfaite sur W par le problème (4.2).

Pour $p \in H$, la forme linéaire $v \to b(v,p)$ est continue sur $W^\perp$. Il existe donc un unique élément $Tp \in W^\perp$ tel que

$$b(v,p) = (Tp, v)_V, \quad \forall v \in W^\perp.$$

De plus, on a

$$\|Tp\| = \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v,p)}{\|v\|_V} \leqslant C\|p\|_H.$$

Ainsi T est une application linéaire continue de V dans $W^\perp$.

Comme F est une forme linéaire continue sur $W^\perp$, il existe $w \in W^\perp$ tel que

$$F(v) = (w, v)_V, \quad \forall v \in W^\perp.$$

Admettons que T est surjective de H dans $W^\perp$. Il existe $p \in H$ tel que $Tp = w$, soit

$$b(v,p) = (Tp, v)_V = (w, v)_V = F(v), \quad \forall v \in W^\perp.$$

Vérifions que T est surjective de H sur $W^\perp$. Par la condition de inf-sup, on a

$$\beta\|p\|_H \leqslant \sup_{v \in V} \frac{b(v,p)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in W^\perp} \frac{b(v,p)}{\|v\|_V} = \|Tp\|_V.$$

Ceci montre que $\mathrm{Im}(T)$ est fermée. Il reste à vérifier que $\mathrm{Im}(T)^\perp = \{0\}$. Soit $v \in (\mathrm{Im}(T))^\perp$. Alors, on a:

$$0 = (Tq, v) = b(v,q),$$

soit $v \in W$. Mais $v \in W^\perp$, donc $v = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(T) = W^\perp$.

Remarques. (a) Pour vérifier la condition inf-sup, on fixe $q \in H$ et on cherche v_q tel que

$$b(v_q, q) \geqslant a\|q\|_H^2, \quad \|v_q\|_X \leqslant b\|q\|_H.$$

Il vient

$$\forall q \in H : \quad \sup_{v \in V} \frac{b(v,q)}{\|v\|} \geqslant \frac{b(v_q,q)}{\|v_q\|} \geqslant a\frac{\|q\|_H^2}{\|v_q\|} \geqslant \frac{a}{b}\|q\|_H.$$

(b) La formulation mixte correspond au point selle du Lagrangien:

$$L(v,q) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v) + b(v,q).$$

$$L(u,q) \leqslant L(u,p) \leqslant L(v,p), \quad \forall v \in V,\ \forall q \in H,$$

ou encore

$$L(u,p) = \min_{v \in V} \max_{q \in H} L(v,q)$$

Ainsi, la variable q est un multiplicateur de la contrainte W.

4.3. **Fonction convexe.** Le résultat suivant est une conséquence du Théorème de séparation de convexes. Il joue un rôle important dans des problèmes d'optimisation.

Proposition 4.5. *Soit J une fonction convexe et s.c.i. sur un espace de Hilbert H. Alors il existe une application affine ϕ telle que*

$$J(x) \geqslant \phi(x), \quad \forall x \in H.$$

Preuve. Définissons l'épigraphe de J par

$$Epi(J) = \{(\beta, x) : \quad J(x) \leqslant \beta\} \subset \mathbb{R} \times H.$$

Comme J est convexe et s.c.i, son épigraphe $Epi(J)$ est un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R} \times H$. Supposons que $J(0) > 1$, de telle sorte que $(1, 0) \notin Epi(J)$. Par Théorème 1.11, il existe un hyperplan qui sépare $Epi(J)$ et $(1, 0)$: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(\beta_0, x_0) \in \mathbb{R} \times H$ tels que

$$((\beta, x), (\beta_0, x_0)) < \alpha < ((1, 0), (\beta_0, x_0)), \quad \forall (\beta, x) \in Epi(J).$$

Soit

$$\beta_0 J(x) + (x, x_0) < \alpha < \beta_0, \quad \forall x \in H.$$

En particulier, pour $x = 0$ on a

$$\beta_0 J(0) < \beta_0 \text{ et } J(0) > 1 \Longrightarrow \beta_0 < 0.$$

Il vient que

$$J(x) > -\frac{1}{\beta_0}(x, x_0) + 1, \quad \forall x \in H.$$

Il reste à appliquer l'inégalité à la fonction $\widetilde{J}(v) = J(v) - J(0) + 2$, qui satisfait la condition $\widetilde{J}(0) > 1$.

Comme la topologie usuelle possède plus d'ouverts que la topologie faible, un ensemble faiblement fermé d'un espace de Hilbert est nécessairement fermé pour la topologie forte. Mais la réciproque est fausse. Par exemple, la sphère unité, qui est fortement fermée mais non faiblement. Néanmoins, on a

Proposition 4.6. *Un ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert est faiblement fermé.*

Preuve. Soit C un ensemble convexe fermé, et soit $f_n \in C$ tel que $f_n \rightharpoonup f$. Notons par u le projeté de f sur C. On a

$$(f - u, v - u) \leqslant 0, \quad \forall v \in C.$$

En particulier, on a la condition suivante

$$(f - u, f_n - u) \leqslant 0.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\|f-u\|^2 \leqslant 0 \Longrightarrow f=u$$

soit $f \in C$ qui est donc faiblement fermé.

Corollary 4.7. *(Mazur) Soit H un espace de Hilbert. Si la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers x, alors il existe une suite de combinaison convexe des $(x_n)_{n\geqslant 1}$:*

$$y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{n,k} x_k, \quad \alpha_{n,k} \geqslant 0, \quad \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{n,k} = 1$$

telle que y_n converge fortement vers x.

Preuve. On considère l'enveloppe convexe C_n des $(x_k)_{k\geqslant n}$ de sorte que x appartient à la fermeture faible de C_n. Par Proposition 4.6, x appartient aussi à la fermeture forte de C_n.

Définition. Une fonction J est convexe sur une partie convexe C si

$$\forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \text{ et } \forall x, y \in C : \quad J(\theta x + (1-\theta) y) \leqslant \theta J(x) + (1-\theta) J(y).$$

Définition. Une fonction J est semi-continue inférieure si

$$x_n \to x \Longrightarrow \liminf_{n\to+\infty} J(x_n) \geqslant J(x),$$

est faiblement semi-continue inférieure si

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow \liminf_{n\to+\infty} J(x_n) \geqslant J(x).$$

Proposition 4.8. *Une fonction convexe semi-continue inférieure est faiblement semi-continue inférieure.*

Preuve. Soit $x_n \rightharpoonup x$. Choisir une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} J(x_n) = \lim_{k\to+\infty} J(x_{n_k}).$$

Par le théorème 4.7 de Mazur, il existe des coefficients de combinaisons convexes $0 \leqslant \alpha_{n,k} \leqslant 1$ tels que

$$y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{n,k} x_{n_k} \to x.$$

La semi-continuité inférieure de J implique

$$J(x) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(y_n).$$

La convexité de J implique

$$J(y_n) \leqslant \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_{n,k} J(x_{n_k}).$$

Il vient que

$$J(x) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(y_n) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(x_n).$$

Donc, J est faiblement semi-continue inférieure.

4.4. **Opérateur de Hilbert-Schimdt.** Soit $K \in L^2((0,1)\times(0,1))$ tel que $K(x,y) = K(y,x)$. Posons l'application.

$$Tf = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy.$$

Théorème 4.9. *L'application T est un opérateur autoadjoint compact de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$. Les valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ sont telles que*

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2$$

et la famille des vecteurs propres $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ telle que

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n(x) e_n(y) \quad \text{dans } L^2((0,1)\times(0,1)).$$

Preuve. (a) Par le théorème de Fubini, pour presque tout $x \in (0,1)$, on a $K(x,\cdot) \in L^2(0,1)$. Ainsi pour tout $f \in L^2(0,1)$, on a $K(x,\cdot)f(\cdot) \in L^1(0,1)$ et

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy \in \mathbb{R}.$$

De plus, on a

$$\|Tf\| \leqslant \Big(\int_0^1 dx \int_0^1 |K(x,y)|^2 dy\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 |f(y)|^2 dx\Big)^{1/2} = \|K\|\|f\|.$$

Ainsi $\|T\| \leqslant \|K\|$. Si $K(x,y) = K(y,x)$, par le théorème de Fubini, on justifie facilement que T est un opérateur autoadjoint.

(b) Comme $K(x,\cdot) \in L^2(0,1)$, si $f_n \rightharpoonup f$, on a

$$g_n(x) = Tf_n(x) = (K(x,\cdot), f_n) \to 0.$$

D'autre part, on a

$$|g_n(x)| \leqslant \|K(x,\cdot)\|\|f_n\| \leqslant \|K(x,\cdot)\|.$$

Par le théorème de Fubini, $\|K(x,\cdot)\| \in L^2(0,1)$. Alors, par la convergence dominée, on a

$$\|g_n - g\| \to 0.$$

Soit

$$Tf_n \to Tf \quad \text{dans } L^2(0,1).$$

On conclut que T est un opérateur compact.

(c) D'après Théorème 2.7 de décomposition spectrale, il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$. Pour presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (K(x,\cdot), e_n) e_n(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n(x) e_n(y) \quad \text{dans } L^2(0,1),$$

et

$$\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |e_n(x)|^2.$$

convergence dominée, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dx dy = \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2.$$

Puis, un calcul direct donne

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n(x) e_n(y)|^2 dx dy = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 \to 0.$$

Ainsi on a établi la convergence

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n e_n(x) e_n(y) \quad \text{dans } L^2((0,1)\times(0,1)).$$

En particulier, posons

$$T_N f = \int_0^1 \int_0^1 K_N(x,y) f(y) dy \quad \text{avec} \quad K_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n(x) e_n(y).$$

En remarquant que $\|T\| \leqslant \|K\|$, on obtient

$$\|T - T_N\| \leqslant \|K - K_N\| \to 0.$$

Ainsi T est la limite des opérateurs à rang fini, donc compact!

Exemple. Soit $p > 0$ une fonction de $C^1(0,1)$, et q une fonction continue sur $[0,1]$. Considérons le problème de Sturm-Liouville:

$$-(pu')' + qu = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

L'objectif est de montrer que les vecteurs propres du problème de Sturm-Liouville forment une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$.

Pour simplifier, on prend $p = 1$ et $q = 0$. On définit un opérateur $u = Tf$ de $L^2(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ par la résolution du problème de Dirichlet:

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Par la méthode du tire, on trouve

$$u = -\int_0^x (x-y)f(y)dy + x\int_x^1 (1-y)f(y)dy = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy,$$

où

$$K(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & y < x, \\ x(1-y), & y > x. \end{cases}$$

Ainsi T est mis sous la forme d'un opétateur à noyau:

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Par Théorème 4.9, la famille des vecteurs propres $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de T forme une base hilbertienne dans $L^2(0,1)$.

Soit $Te_n = \lambda_n e_n$. Posons $\mu_n^2 = 1/\lambda_n$, on a

$$-e_n'' = \mu_n^2 e_n, \quad e_n(0) = e_n(1) = 0.$$

Il vient que

$$e_n = \sqrt{2}\sin n\pi x, \quad \mu_n = n\pi, \quad n \geqslant 1.$$

Finalement, on retrouve:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

References

[1] G. Allaire: Analyse numérique et optimisation, Ecole polytechnique, Palaiseau 2012.

[2] H. Brezis: Analyse fonctionnelle: Théorie et applications, Masson, Paris 1993.

[3] F. Hirsch; G. Lacombe: Eléments d'analyse fonctionnelle, Masson, Paris 1997.