

# 单层与双层 VRP 问题比较研究

陈玓, 陈彦博, 林海韵, 杨依佳

中美物流研究院

**摘要:** 随着经济和人口的快速发展, 产业集聚效应进一步加深; 用户消费水平和采购需求不断增加, 物流活动急剧增加。物流智能算法作为大规模物流活动的解决方案, 已经成为物流问题中重要的一部分。本文针对路径规划问题 (VRP), 结合现实存在的多层次配送系统, 提出了双层 VRP 问题, 并与单层 VRP 问题进行对比, 并提出了一个实际算例验证模型, 通过实际结果说明了模型的可用性和双层 VRP 模型的优点。

**关键词:** VRP, 双层 VRP, 整数规划

## 1 引言

随着市场经济的发展, 人们对各种商品的需求量正在呈指数增加, 极大地发展了异地运输物流。物流行业的发展态势使得在社会各界形成了一个共识——物流行业存在巨大发展潜力并能够带来难以想象的经济效益。如何提高运输和配送效率, 如何减少资源损耗从而降低运输成本, 对企业来说既是机遇又是挑战, 也逐渐成为理论界研究热点。

对大型企业来说, 在各个地区设立中央地区总仓是普遍做法。一般来说, 各个地区总仓的货品都是齐全的, 其对应的经典的单层车辆路径规划问题大多假设单级运输, 即将客户订单整合后, 通过地区总仓的大型货运车辆直接向发出订单的客户分配货物。例如, 某生产企业设立华东仓, 接到订单后将所需商品直接由华东仓配送至顾客手中。

随着顾客对时效性的要求越来越高, 多级物流网络运输的建立和推广应运而生。现在普遍的模式是双层车辆路径优化问题, 即将货物从地区总仓运输到各个城市周边的区域集散中心, 而城市内部的货物运输转而由体积较小的小型车辆进行分拣运输至终端客户。例如, 某生产企业设立华东仓, 同时在上海、杭州、南京等城市设立区域集散中心, 商品批量从华东仓运至各个区域集散中心, 而顾客的订单由各区域集散中心配送。

如何选择合适的运输配送策略, 目标是使得企业的成本最小, 是各企业亟需解决的问题。

## 2 文献综述

对于 VRP 问题的研究一直是国内外关于现代物流系统研究中的一项重要内容, 选取合适的运输路线, 可以加快对客户需求的响应速度, 提高服务质量, 降低服务商的运营成本。下面就与两层分销的车辆路径优化问题相关的文献进行了梳理。

Xiangyong Li 等人对电子订单履行的订单分配与订单路径集成问题进行研究<sup>[1]</sup>，他们首先提出了一个混合整数规划公式，以帮助在线零售商优化满足客户的订单，并引入了一邻域搜索的方法，通过大量的计算实验，证明了该方法的有效性。用该方法找到满足每个客户订单的最佳方式，以最大限度地降低运输成本。K. H. Leung 等人设计了一种 B2C 电子商务智能系统意图实现电子订单流程改进<sup>[2]</sup>，他们考虑到电子商务订单的不规则到达模式、在电子履行中心处理订单的时间有限，以及电子零售商提供的保证交货时间表(如下单当天或次日交货)等特点，重新设计配送中心电子商务订单的完整流程。他们设计了一种预处理系统，该结合了用于支持电子商务订单分组决策的遗传算法 (GA) 方法和用于生成操作指南并建议订单处理设备的推理引擎。但他们的系统只对一层 B2C 进行了改进，在运用到二层路径优化问题时会存在问题。

V. N. Coelho 等人考虑到公司的分销计划，研究了一个 VRP 延伸问题<sup>[3]</sup>，他们考虑允许执行多次行程的不同车队的 VRP 问题。该问题还包括一些车辆无法为某些特定客户提供服务的停靠限制，以及车辆的固定和基于距离的成本以及每位客户的访问成本的实际目标函数。他们设计了一种称为轨迹搜索的启发式算法 (GILS-VND)，这种算法结合迭代本地搜索 (ILS)，贪婪随机自适应搜索程序 (GRASP) 和可变邻域下降 (VND) 程序。运用这种方法获得的解决方案大大节省了运输成本。该研究考虑了更大规模的 VRP 问题，而本研究重点关注于两层分销的车辆路径问题。

Flavien Lucas 等人提出了对 VRP 问题解决方案进行优化的方法<sup>[4][5]</sup>，作者实现了几种机器学习 (ML) 算法，以预测对路径优化问题好与不好的解决方案，并讨论了算法的一些结果，目的是改进现有的启发式方法。他们认为大部分提取的知识都可以通过主成分分析 (PCA) 等方法来检索。因此，因子分析不是基于机器学习的预测，而是根据解决方案的质量提供了一个强大而综合的变量相互依赖关系视图。该研究提出的是基于启发式算法的优化方向，是本文需要进一步优化的方向。

### 3 模型分析

#### 3.1 问题描述

已知 B 为总工厂，C 为顾客，FC 为地区总仓，DC 为区域集散中心。在本文中，只关注地区总仓至顾客之间的运输配送，不考虑总工厂至地区总仓的干线运输。通过分别建立模型，比较单层 VRP 和双层 VRP 两种运输配送模式，即单层 ( $B \rightarrow FC \rightarrow C$ ) 和双层 ( $B \rightarrow FC \rightarrow DC \rightarrow C$ ) 哪种转运方式的总成本较低。在两个模型中，货物的品类有多种，每个顾客的订单中包含多类货物，

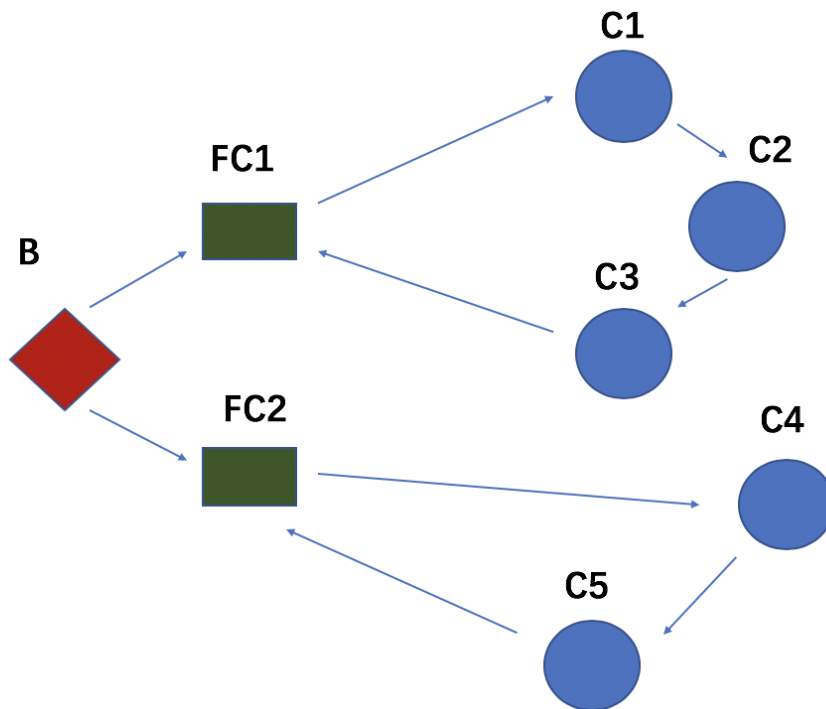
且各个顾客的订单只由一辆车运送。假定各个地区总仓的货品 SKU 是齐全的，而不同的区域集散中心的库存货品不一定全。

### 3.2 模型建立

#### 3.2.1 单层车辆路径优化模型

##### （一）模型说明

单层车辆路径优化模型的路径只有一层，即地区总仓（FC）至顾客（Customer），假定该层路径使用大型车。



其中，假定 B 为总工厂，FC<sub>i</sub> 表示地区总仓，C<sub>i</sub> 表示区域集散中心，C<sub>i</sub> 表示顾客。在该图所示的实例中，包含有 2 个地区总仓，5 个顾客。顾客 1、2、3 订单所需货物由地区总仓 1 配送，而顾客 4、5 订单所需货物由地区总仓 2 配送。

##### （二）符号说明

需求点的集合为 A，车辆的集合为 V。

c: 每辆车的容量；

$d_{ip}$ : 第 i 个点对于 p 货品的需求；

$\pi_p$ : 每单位货品 p 所占据的容量；

$u_i^k$ : 第 k 辆车在 i 点时剩余的容量

$c_{ij}$ : 大型车的运输成本

决策变量:

$x_{ij}^k$ : 第  $k$  辆车是否从  $i$  点运输到  $j$  点;

$y_i^k$ : 第  $k$  辆车是否到达  $i$  点;

(三) 模型

$$\min \sum_k \sum_{i,j} 2c_{ij}x_{ij}^k \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_k y_i^k = 1 \quad \forall i \in A \quad (2)$$

$$\sum_i \sum_k y_i^k = V \quad (3)$$

$$\sum_i \sum_p \pi_p d_{ip} y_i^k \leq c \quad \forall k \in V \quad (4)$$

$$\sum_{i=j} x_{ij}^k = 0 \quad \forall (i,j) \in A \quad (5)$$

$$\sum_i x_{ij}^k = \sum_j x_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A \quad (6)$$

$$\sum_i x_{ij}^k = y_i^k \quad \forall k \in V \quad (7)$$

$$\sum_j x_{ij}^k = y_i^k \quad \forall k \in V, \forall i \in A \quad (8)$$

$$u_i^k - u_j^k + cx_{ij}^k \leq c - \sum_{p \in P} \pi_p d_{ip} \quad \forall (i,j) \in A, k \in V \quad (9)$$

$$u_i^k \leq c \quad (10)$$

$$u_i^k \geq \sum_{p \in P} \pi_p d_{ip} \quad \forall i \in A \quad (11)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A, k \in V \quad (12)$$

$$y_i^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in V, \forall i \in A \quad (13)$$

$$u_i^k \geq 0 \quad \forall i \in A \quad (14)$$

目标函数表示运输成本最低, 为与双层模型进行比较, 在这里设单位运输成本为 2, 需求点的集合为  $A$ , 车辆的集合为  $V$ 。约束 (1) 表示每个需求点  $i$  都会被一辆小车经过, 约束 (2) 表示配送中心则会被所有用到的小车经过, 约束 (3) 表示车辆数量的约束, 约束 (4) 表示每个回路上的需求量之和小于车的容量, 约束 (5) (6) 表示两个节点之间的流量平衡, 约束 (7) (8) 表示  $x_{ij}^k$  和  $y_i^k$  之间的关系, 约束 (9) (10) (11) 用来消除子回路, 其他的约束为决策变

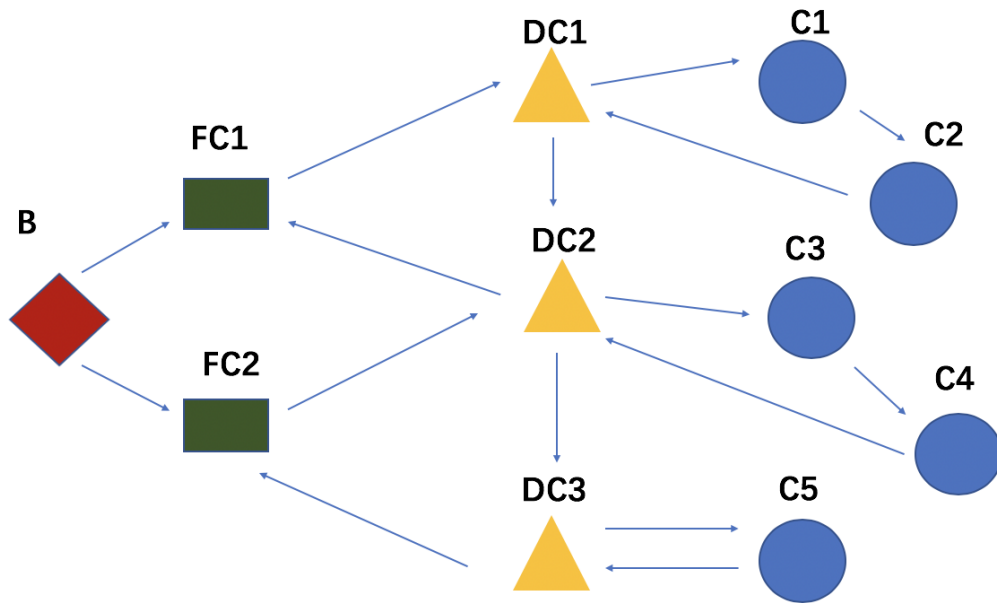
量的整数约束。

### 3.2.2 双层车辆路径优化模型

#### （一）模型说明

双层车辆路径优化模型中包含两层路径：第一层路径包括地区总仓（FC）和区域集散中心（RDC）之间，以及区域集散中心（RDC）和区域集散中心（RDC）之间的路径集合，该层路径使用大型车。第二层路径包括区域集散中心（RDC）和顾客（Customer）之间，以及顾客（Customer）和顾客（Customer）之间的路径集合，该层路径使用小型车。在该模型中，车辆无法将货物从地区总仓直接运输到终端客户。

其中，DC<sub>i</sub> 表示区域集散中心。在该例中，包含有 2 个地区总仓，3 个区域集散中心，5 个顾客。区域集散中心 1 的货物只由地区总仓 FC1 运送，区域集散中心 3 的货物只由地区总仓 FC2 运送，区域集散中心 2 的货物则需由地区总仓 FC1、2 共同运送。顾客 1、2 订单所需货物



由区域集散中心 1 配送，顾客 3、4 订单所需货物由区域集散中心 2 配送，顾客 5 订单所需货物由区域集散中心 3 配送。

#### （二）符号说明

$m_f$ : 从 FC  $f$  发出的大型车的数量上限；

$m_s$ : 从 DC  $s$  发出的大型车的数量上限；

$Q_1$ : 大型车的载重量上限；

$Q_2$ : 小型车的载重量上限；

$\Omega_j$ : 顾客  $j$  的产品集合;

$d_{jp}$ : 产品  $p$  的数量;

$\pi_p$ : 运输一单位产品  $p$  折算成所需的运输量, 无量纲,  $q_j = \sum_{p \in \Omega_j} \pi_p d_{jp}$ ;

$c_{ij}^1$ : 大型车的运输成本;

$c_{ij}^2$ : 小型车的运输成本;

$\pi_p$ : 每单位货品  $p$  所占据的容量;

$u_i^k$ : 第  $k$  辆车在  $i$  点时剩余的容量

决策变量:

$w_{ij}^{kp}$ : 用大型车  $k$  运输的产品  $p$  的数量;

$g_{ij}^s$ : 用小型车  $k$  运输的产品  $p$  的数量;

$u_{sk}$ : 大型车  $k$  的路径中包含的 DC 数量;

$x_{ij}^k$ : 第  $k$  辆大型车是否从  $i$  点运输到  $j$  点;

$y_{ij}^s$ : 第  $s$  辆小型车是否从  $i$  点运输到  $j$  点

### (三) 模型

$$\min \sum_{k \in V_1} \sum_{(i,j) \in A_1} 2c_{ij}^1 x_{ij}^k + \sum_{s \in D} \sum_{(i,j) \in A_2} c_{ij}^2 y_{ij}^s \quad (1)$$

$$\text{s. t. } \sum_{(i,j) \in A_1} x_{ij}^k = \sum_{(j,i) \in A_1} x_{ji}^k \quad \forall j \in F \cup D, \forall k \in V_1 \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_1} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall j \in D, \forall k \in V_1 \quad (3)$$

$$\sum_{i \in F} \sum_{j \in D} x_{ij}^k \leq 1 \quad \forall k \in V_1 \quad (4)$$

$$\sum_{k \in V_1} \sum_{j \in D} x_{fj}^k \leq m_i \quad \forall f \in F \quad (5)$$

$$\sum_{k \in V_1} \sum_{i \in F} \sum_{j \in D} x_{ij}^k \leq n_1 \quad (6)$$

$$\sum_{p \in P} \pi_p w_{ij}^{kp} \leq Q_1 x_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A_1, \forall k \in V_1 \quad (7)$$

$$\sum_{(i,s) \in A_1} \sum_{k \in V_1} w_{is}^{kp} - \sum_{(s,i) \in A_1} \sum_{k \in V_1} w_{si}^{kp} = \sum_{(i,j) \in A_2; j \in C} d_{jp} y_{ij}^s \quad \forall s \in D, \forall p \in P \quad (8)$$

$$\sum_{k \in V_1} w_{fj}^{kp} \leq I_{fp} \quad \forall p \in P, \forall f \in F \quad (9)$$

$$\sum_{(i,s) \in A_1} w_{is}^{kp} \geq \sum_{(s,i) \in A_1} w_{si}^{kp} \quad \forall s \in D, \forall p \in P, \forall k \in V_1 \quad (10)$$

$$u_{ik} + 1 \leq u_{jk} + M(1 - x_{ij}^k) \quad \forall i, j \in D, i \neq j, \forall k \in V_1 \quad (11)$$

$$\sum_{s \in D} \sum_{(i,j) \in A_2} y_{ij}^s = 1 \quad \forall j \in C \quad (12)$$

$$\sum_{(i,j) \in A_2} y_{ij}^s = \sum_{(j,i) \in A_2} y_{ji}^s \quad \forall j \in C, \forall s \in D \quad (13)$$

$$\sum_{j \in C} y_{sj}^s \leq m_s \quad \forall s \in D \quad (14)$$

$$\sum_{s \in D} \sum_{j \in C} y_{sj}^s \leq n_2 \quad (15)$$

$$\sum_{s \in D} \sum_{(i,j) \in A_2} g_{ij}^s - \sum_{s \in D} \sum_{(j,i) \in A_2} g_{ji}^s = q_j \quad \forall j \in C \quad (16)$$

$$g_{ij}^s \leq Q_2 y_{ij}^s \quad \forall (i,j) \in A_2, \forall s \in D \quad (17)$$

$$w_{ij}^{kp} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A_1, \forall p \in P, \forall k \in V_1 \quad (18)$$

$$g_{ij}^s \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A_2, \forall s \in D \quad (19)$$

$$u_{sk} \geq 0 \quad \forall s \in D, \forall k \in V_1 \quad (20)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A_1, \forall k \in V_1 \quad (21)$$

$$y_{ij}^s \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A_2, \forall s \in D \quad (22)$$

目标函数为最小化运输成本和 DC 的装卸货成本，由于不同车辆的运输成本不同，因此在模型里假设大型车的运输成本是小型车的 2 倍，同时为了模型比较方便，在单层路径规划模型中，也设单位距离的成本为 2。约束 (2) - (11) 主要与 FC-DC 之间的路径规划有关。(2) 保证每辆车在每个 FC 和 DC 中流量平衡；(3) 指每车最多去一个 DC 一次；(4) 表示一辆大型车只为 1 个 FC 服务，且最多去一个 FC 一次；(5) 和 (6) 限制了为每个 FC 服务的大型车的数量和总的大型车数量；(7) 表示 FC-DC 之间的货运总量上限；(8) 指 DC 中每类产品的流量平衡等于该 DC 的货物需求；(9) 表示运出每个 FC 的货物不超过其库存量；(10) 保证在每类产品在 DC 不会增加；(11) 指不经过 FC 的子回路被排除。约束 (12) - (17) 主要与 DC-C 之间的路径规划有关。(12) 表示每个顾客只被一辆车服务；(13) 保证流量平衡；(14) 和 (15) 限制了为每个 DC 服务的小型车的数量和总的小型车数量；(16) 指顾客每类产品的流量平衡等于该顾客的货物需求；(17) 表示 DC-C 之间的货运总量上限；(18) - (22) 是有关决策变量的限制。

## 4 算例分析

首先设定整体的网络结构，由于两层 VRP 问题约束随网络规模指数级增加，因此若网络规模过大，对于大规模问题无法利用 cplex 进行有效求解。

### 4.1 节点较少的算例分析（客户数为 5）

对于单层网络，设定单 FC 与 5 个顾客；对于双层网络，设定单 FC，两个转运 DC，5 个顾客。具体网络结构如下图所示。同时为了方便对比，两个模型的 FC 与 customer 的位置一致，在 FC 与 customer 中间取中间距离，并且加入一定的波动参数，设定两个 DC 的位置，具体网络结构如图 1 所示。对于单层网络，车辆数量不少于 3 辆，对于多层网络，FC 到 DC 的车辆数不大于 3 辆，DC 到 customer 的车辆总数不少于 2 辆。

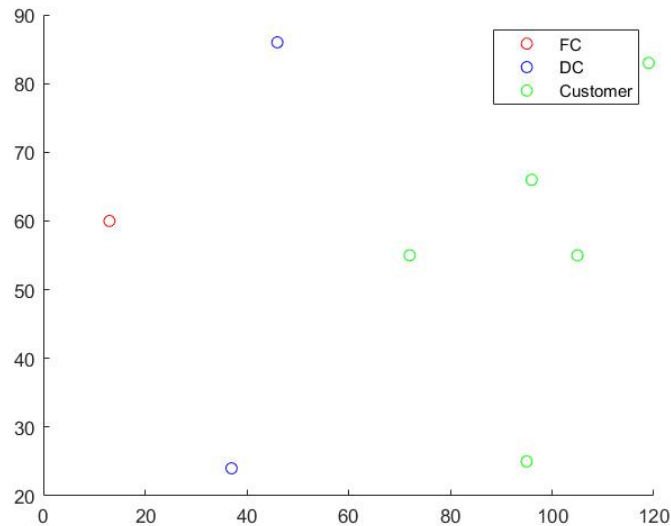


图 1 算例网络图结构

对于货物的分配，算例假设 FC 共能够提供 4 种货物，并且随机生成货物单位运输量和顾客需求，带入模型进行求解，具体结果如下：



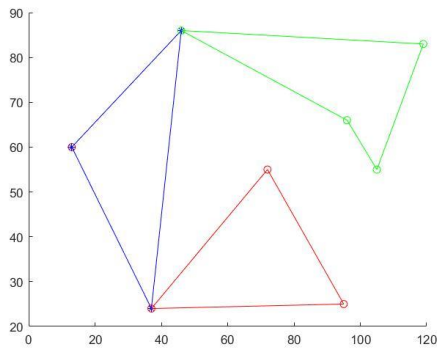


图 2 双层 VRP 模型求解结果

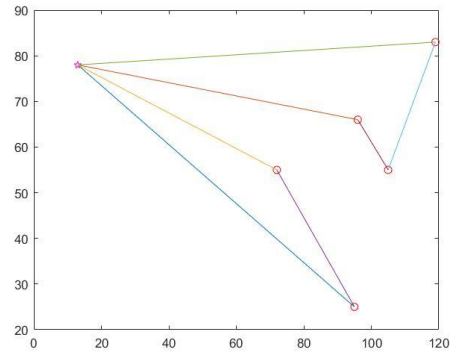


图 3 单层 VRP 模型求解结果

求解出路径规划结果如图所示，同时每条路径上求解出了对应的车辆的货物数量，具体的数据结果如下表：

	单层 VRP 模型	双层 VRP 模型	
总成本	868	610	
车辆数	2	1 (第一层) 2 (第二层)	
第一层各路径的货物数量	1->7: 10 4->1: 11 5->4: 8 6->5: 6	货物 1: 13 货物 2: 9 货物 3: 19 货物 4: 22	
第二层从 DC 出发的数量	1->3: 15 2->1: 14 3->2: 9	1->2: 25 2->3: 11 2->4: 27 3->12: 11 4->5: 14	1->4: 35 4->5: 26 5->6: 13

#### 4.2 节点较多的算例分析（客户数为 11）

与上节类似，对于单层网络，设定单 FC 与 11 个顾客；对于双层网络，设定单 FC，两个转运 DC，11 个顾客。具体网络结构如下图所示，具体网络结构如图 1 所示。

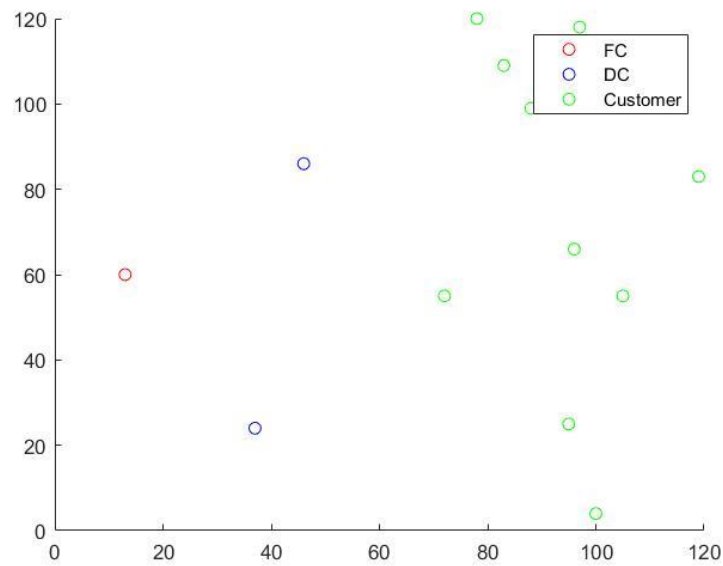


图 4 算例网络图结构

对于货物的分配，算例假设 FC 共能够提供 4 种货物，并且随机生成货物单位运输量和顾客需求，带入模型进行求解，具体结果如下：

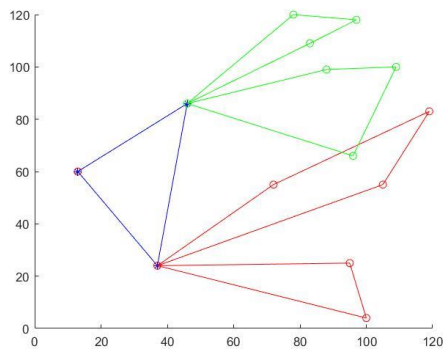


图 5 双层 VRP 模型求解结果

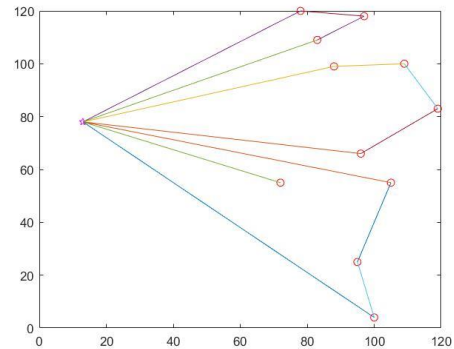


图 6 单层 VRP 模型求解结果

求解出路径规划结果如图所示，同时每条路径上求解出了对应的车辆的货物数量，具体的数据结果如下表：

	单层 VRP 模型	双层 VRP 模型		
总成本	1619	1146		
车辆数	4	2 (第一层) 4 (第二层)		
第一层各路径的货物数量	1->7: 16	路径 1 货物 1: 9 货物 4: 16	路径 2 货物 2: 15 货物 3: 13	路径 3 货物 1: 38 货物 2: 12 货物 3: 8 货物 4: 16
	4->6: 13			
	6->1: 8			
	7->9: 11			
	10->4: 4			

第二层从 DC 出发的数量	1->2: 11		
	2->1: 22	1->2: 40	1->7: 39
	1->5: 10	1->3: 20	1->9: 36
	3->11: 8	2->4: 27	7->10: 24
	5->3: 21	3->12: 11	8->11: 7
	11->1: 16	4->5: 14	9->8: 26
			10->6: 7

将节点较少算例和节点较多算例进行比较，发现在节点数量比较少时，单层 VRP 模型的成本低于双层 VRP 模型。但随着节点数量的增多，双层 VRP 模型的成本低于单层 VRP 模型，这一结论说明了在需求节点数量较少情况下，盲目建立 RDC 只能带来成本的增加，但随着节点的增多，通过分层的思想，建立 RDC 能够有效降低运输成本。

同时，考虑实际情况下，例如城市配送背景下，大型车辆无法进入市内，在道路交通规则的约束下，采用单层 VRP 模型进行分析是不可行的，必须采取双层 VRP 模型进行配送路线的规划求解。

## 5 总结

本文以提高运输和配送效率，降低运输成本为目标，对比分析在物流配送中的单层、双层路径规划问题。在建模时，本文考虑了运输车辆的容量和运输货物的种类两个类型的约束，建立了单层、双层 VRP 整数规划模型。在建模后，本文随机生成了客户数为 5 和客户数为 11 的两类算例，并且分别采用了单层 VRP 和双层 VRP 模型进行了求解。通过求解我们发现，当客户数量比较少时，盲目建立 RDC 只会增加运输成本，但当客户数量足够多时，建立 RDC 能够有效降低运输成本。

## 参考文献:

- [1] Xiangyong Li, Jieqi Li, Y.P. Aneja, Zhaoxia Guo & Peng Tian (2019): Integrated Order Allocation and Order Routing Problem for e-Order Fulfillment, IISE Transactions, DOI: 10.1080/24725854.2018.1552820
- [2] K.H. Leung, K.L. Choy, Paul K.Y. Siu, G.T.S. Ho, H.Y. Lam, Carman K.M. Lee, A B2C e-commerce intelligent system for re-engineering the e-order fulfilment process, Expert Systems with Applications, Volume 91, 2018, Pages 386-401, ISSN 0957-4174
- [3] V.N. Coelho, A. Grasas, H. Ramalhinho, I.M. Coelho, M.J.F. Souza, R.C. Cruz, An ILS-based algorithm to solve a large-scale real heterogeneous fleet VRP with multi-trips and docking constraints, European Journal of Operational Research, Volume 250, Issue 2, 2016, Pages 367-376, ISSN 0377-2217
- [4] Flavien Lucas, Romain Billot, Marc Sevaux, A comment on “What makes a VRP solution good? The generation of problem-specific knowledge for heuristics”, Computers & Operations Research, Volume 110, 2019, Pages 130-134, ISSN 0305-0548, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.05.025>.
- [5] Florian Arnold, Kenneth Sörensen, What makes a VRP solution good? The generation of problem-specific knowledge for heuristics, Computers & Operations Research, Volume 106, 2019, Pages 280-288, ISSN 0305-0548, <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.02.007>.