



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una aproximación al problema de *apportionment*:
métodos aleatorizados

Luca Zanelà

Director/a: José Correa Haeussler

Fecha de presentación: 19 de diciembre de 2025

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Esquema del trabajo	5
1.2. Introducción al problema de apportionment (<i>prorrateo</i>)	5
1.3. Marco del problema	7
1.3.1. Propiedades deseables	8
1.4. Algunos métodos típicos	9
1.4.1. Método de Hamilton	11
1.4.2. Método de Jefferson/D'Hont	12
1.4.3. Método de Webster/Saint-Laguë	14
1.4.4. Observaciones de los métodos típicos	14
2. Desarrollo teórico	15
2.1. Métodos de divisor	15
2.2. Métodos de quota	19
2.2.1. Métodos shift-quota	20
2.3. Resultados principales del área	21
2.4. Conclusiones y algunos resultados extra	23
3. Métodos aleatorizados	25
3.1. Introducción a métodos aleatorizados	25
3.1.1. Propiedades fundamentales para métodos aleatorizados	26
3.2. Ejemplos	27
3.2.1. Método de Grimmett (2004) - <i>Systematic rounding</i>	27
3.2.2. Formulación como problema de optimización de medida	27
3.2.3. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía	29
3.2.4. Algoritmo de Sampford (67')	30
3.2.5. Algoritmo de Brewer (63')	31
3.3. Resultados sobre métodos aleatorizados	31
3.3.1. Método de Grimmett - <i>Systematic rounding</i>	31
3.3.2. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía	32
3.3.3. Algoritmo de Sampford	33
4. Trabajo realizado	37
4.1. Resultados	37

4.1.1.	Idea de distribución con orden lexicográfico sobre subconjuntos de cardinal k	37
4.1.2.	Soluciones del problema lineal no satisfacen selection monotonicity	38
4.1.3.	Definir medida sobre $[n]$	38
4.1.4.	Prueba exhaustiva de factibilidad de bases para el método de programación lineal	40
4.1.5.	Preguntas	41
4.2.	Ejemplos de cosas	43
4.3.	Títulos posibles	43
4.4.	Cosas a corregir/agregar	43

Índice de figuras

2.1. Ejemplo de secuencia de saltos espuria, con $s(0) = 0; s(i) = 1 - \frac{1}{i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.	16
2.2. Ejemplo de secuencia de saltos estacionaria con $r = \frac{1}{2}$: $s_r(i) = i - \frac{1}{2}$.	17
3.1. Segmento ilustrativo de la disposición inicial del método de Grimmett, con $n = 5$ y $k = 3$. La longitud de los segmentos $[s_{i-1}, s_i]$ es p_i para $i \in \{1, \dots, 5\}$. Los puntos s_i están ubicados en las posiciones $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$.	27
3.2. Segmento ilustrativo de la disposición final del ejemplo anterior. Los segmentos $[s'_{i-1}, s'_i]$ fueron desplazados en U . Marcados en rojo se encuentran los segmentos que contienen a un entero, correspondientes a los partidos 2, 3 y 5.	27
3.3. Ilustración del método de Grimmett para dos elecciones. Los intervalos correspondientes a partidos de izquierda están sombreados en gris. Las líneas punteadas indican las posiciones de los enteros antes del desplazamiento aleatorio. Extraído de [Cor+24]	32

Índice de cuadros

1.1.	Cociente y asignación de bancas para los 15 estados originarios de EEUU. Tabla extraída de [BY01]	11
1.2.	Actualización con datos del censo de 2020 para los 15 estados mencionados anteriormente. Datos extraídos de Censo EE.UU.	11
2.1.	Porcentajes de población por continente de acuerdo a la regla estándar de redondeo. Se observa cómo esta regla de redondeo no basta para alcanzar una solución en la que la suma de porcentajes sea efectivamente del 100 %. Tabla extraída de [Puk17]	17
3.1.	Compración de votos y restos entre elecciones. Extraído de [Cor+24].	32

Capítulo 1

Introducción

1.1. Esquema del trabajo

- *1. Introducción* - Definición del problema - Setting formal y axiomas - Ejemplos de métodos - Paradojas y/o falencias de los métodos existentes
- *2. Desarrollo teórico* - Resultados sobre divisor methods - D'Hont favorece mayorías - Teoremas de Balinski y Young - Conclusiones y algunos resultados extra
- *3. Métodos aleatorizados* - Setting formal y axiomas - Ejemplos de métodos - Análisis de los métodos (paper José y Víctor)
- *4. Trabajo realizado* - Análisis de Sampford - Análisis de Brewer - Análisis de métodos obtenidos mediante programación lineal - Idea del método por orden lexicográfico, y falencias - Conjetura de no cumplimiento de Selection Monotonicity - Análisis mediante bases, búsqueda de contraejemplo - Propuesta de método restrictivo
- *5. Problemas abiertos* - Todos
- *6. Conclusiones y cierre*

1.2. Introducción al problema de apportionment (*prorrateo*)

El problema de *apportionment* (o *prorrateo* en español, pero es una palabra un poco fea así que usaremos su versión en inglés) trata sobre cómo repartir de forma "justa" una cantidad finita de objetos indivisibles entre los miembros de un grupo, de acuerdo a ciertas proporciones. Tipicamente, el intento de respetar estas proporciones provoca que las asignaciones ideales de objetos requieran dividirlos en partes fraccionarias, lo cual no está permitido por las condiciones del problema. El conflicto surge a la hora de intentar "redondear" esas partes fraccionarias de los objetos a repartir, de forma tal que al final se termine asignando cantidades enteras a cada individuo, y no falten ni sobren objetos por asignar.

Para ejemplificar este escenario, se puede pensar en el problema de repartir 5 cabras entre 3 hermanos de forma proporcional de acuerdo a sus edades.

No obstante, el escenario que más ha alentado y motivado el desarrollo teórico y el estudio de este problema viene del mundo de la "Teoría de Elección Social" ("Social Choice"), que se encarga, en términos generales, de estudiar cómo hacer una agregación de preferencias individuales en un único perfil de preferencias colectivo. Con esta motivación, en el contexto del *apportionment* esta disciplina busca entender cómo repartir las bancas

de un congreso o parlamento según la proporción de votos obtenidos por distintos partidos políticos, o según la proporción de poblaciones de los distintos estados o provincias. La definición de qué significa que un sistema sea "justo" tendrá que ver con qué tan cercana es la asignación que provee dicho sistema a la proporcionalidad exacta, y la definiremos con precisión en la próxima sección.

CITA DE QUE EL CONGRESO ES UNA REPRESENTACIÓN DE LA SOCIEDAD EN PEQUEÑA ESCALA.

Las formas y metodologías de encarar la resolución de esta problemática han ido variando en gran medida a lo largo de la historia. Algunas preguntas orientadoras a la hora de pensar distintos esquemas bajo los cuales intentar resolver el problema pueden ser:

- ¿Debe estar fijada de antemano la cantidad de bancas?
- ¿Debe estar fijada de antemano la cantidad de individuos representados por cada miembro del parlamento?
- ¿Se debe intentar encontrar un sistema que optimice alguna métrica como la cantidad de gente no representada?

A un nivel un poco más general, el problema consiste en repartir cierta cantidad predeterminada de objetos discretos, indivisibles, entre ciertos agentes de acuerdo a proporciones de correspondencia dadas: a cada agente i le corresponde una proporción p_i de la cantidad de objetos discretos. Esencialmente, el problema se reduce al redondeo de fracciones: cómo redondear de la forma más "justa" posible un vector de fracciones (las proporciones de bancas correspondientes a los distintos partidos/estados) a valores enteros, de manera tal que la suma de las fracciones sea igual a la suma de los enteros redondeados (en ambos casos, esta suma debe ser igual a la cantidad total de bancas a repartir).

A pesar de que el problema aparenta ser de una naturaleza simple, veremos que tiene una complejidad intrínseca muy grande, que incluso nos llevará a concluir que la existencia de un sistema "perfecto" es imposible. Para comenzar con un ejemplo quizás clarificador, pensemos en el siguiente escenario de juego: 2 partidos que reciben exactamente la mitad de los votos cada uno, entre los cuales hay que repartir únicamente una banca. ¿Cómo se asigna esa banca de la forma más justa posible, y qué significa que esa asignación sea "justa"? Más allá de la definición que se brinde del término *justicia* - siempre y cuando no haya preferencia particular por ninguno de los partidos- cualquiera de los candidatos merecería la banca en igual proporción, y por ende cualquiera de las asignaciones sería igual de justa o injusta.

Otro escenario pedagógico, ubicado en las antípodas, sería el caso en el que la cantidad de bancas a repartir es exactamente igual a la cantidad de votantes. : podría ser el caso de un consejo barrial, por ejemplo, en donde cada miembro tiene representatividad total.

Haremos un recorrido por la historia de este problema, enunciando su definición formal, los axiomas solicitados para considerar que un sistema es deseable, coherente o "justo", los desarrollos teóricos que se fueron produciendo alrededor de esto (principalmente por Balinski, Young, Pukhelsheim [BY], [BY01], [Puk17]). Enunciaremos la definición de los llamados "*métodos de divisor*", junto con sus propiedades fundamentales, para luego enunciar y demostrar el teorema de imposibilidad de Balinski-Young. Esto nos servirá como motivación para definir métodos aleatorizados junto con sus respectivos axiomas

deseables. Atravesaremos algunos ejemplos de métodos aleatorizados, analizaremos sus características y propiedades, presentando el trabajo de [Cor+24].

Si los métodos aleatorizados son factibles de ser usados o no en escenarios electorales reales, es una cuestión/inquietud que queda para el lector.

1.3. Marco del problema

Sean $n \in \mathbb{N}$ con $\{1, \dots, n\}$ un conjunto que representará partidos, y $H \in \mathbb{N}$ un natural que representará cierta cantidad de bancas a repartir. Para sintetizar notación, definimos:

$$[n] := \{1, \dots, n\}$$

- $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ vector de votos recibidos por cada partido – o poblaciones de cada estado. Nos referiremos a este vector de cualquiera de las dos formas indistintamente–,
- $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ vector de proporciones o *quotas*, con $q_i = H \frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$ y $\sum_{i=1}^n q_i = H$

Adicionalmente, para ciertos modelos se considera el vector $\vec{r} \in \mathbb{N}_0^n$ como un vector de requerimientos mínimos, de forma tal que cada partido i debe recibir al menos r_i bancas, y usualmente se toma $r_i = r \in \mathbb{N}_0^n$ constante. Sin embargo, para el presente trabajo no consideraremos la presencia de restricciones de esta índole sobre las cantidades de bancas asignadas.

Intuitivamente, uno definiría un método de *apportionment* A como una función que toma un vector de votos \vec{v} , una cantidad de bancas H , y retorna un vector $A(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H , e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido. No obstante, considerando el ejemplo de 2 partidos con exactamente la misma cantidad de votos y una única banca a repartir (enunciado en la introducción), podríamos pensar que un método debe como opciones válidas a cualquiera de las dos asignaciones posibles. Esto motiva la definición de los métodos de apportionment como funciones que retornan conjuntos de asignaciones (en lugar de una única asignación).

Dado que en ocasiones trataremos al vector \vec{v} directamente como un vector de proporciones, consideraremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$. Para simplificar notación, denotaremos $x_+ := \sum_{i=1}^n x_i$ a la suma de elementos de un vector (x_1, \dots, x_n) . De esta forma, el total de votos (o de proporciones), que será una cantidad recurrente, se podrá sintetizar como v_+ . Asimismo, al conjunto de asignaciones válidas lo denotaremos de la siguiente forma, siguiendo la escritura de [Puk17]:

$$\mathbb{N}_0^n(H) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid x_+ = H\}.$$

Definición 1.1. Un método de *apportionment* A es una función que toma un vector de votos \vec{v} , una cantidad de bancas H , y retorna un conjunto de vectores $A(\vec{v}, H) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n(H))$:

$$A : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n(H))$$

Es decir, \vec{a} es una asignación válida de H bancas para todo $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$. Cabe mencionar que, si un método retorna un conjunto que consta de una única asignación $\{x\}$, escribiremos indistintamente $A(\vec{v}, H) = x$ ó $A(\vec{v}, H) = \{x\}$.

1.3.1. Propiedades deseables

Enunciaremos una serie de propiedades deseables que han ido surgiendo en la literatura a lo largo de la historia, el grueso de ellas definidas por Balinski y Young en [BY], y otra gran parte por Pukkelsheim en [Puk17]. Este último comienza por caracterizar a una regla de *apportionment* razonable como aquella que satisface "anonimidad, balance, concordancia, decencia y exactitud". Qué significan estos términos quedará más claro al terminar esta sección.

Definición 1.2. (Anonimidad - Simetría) Un método de *apportionment* A satisface **anonimidad** si cualquier reordenamiento del vector de votos conlleva el mismo reordenamiento sobre los vectores de asignaciones. En esencia, esto caracteriza a los métodos anónimos como aquellos en los que la posición que se le asigne a un partido en el vector de votos no tiene influencia en la cantidad de bancas que se le asignarán. Formalmente, dado $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, si $\vec{v}' = \sigma(\vec{v})$ para σ una permutación de las coordenadas de \vec{v} , entonces $\sigma(\vec{a}) \in A(\sigma(\vec{v}), H) \quad \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H)$.

Definición 1.3. (Balance) Un método de *apportionment* A se dice **balanceado** si para dos partidos que tienen la misma cantidad de votos, sus asignaciones correspondientes difieren a lo sumo en una banca. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, y dada una asignación $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$,

$$v_i = v_j \implies |\vec{a}_i - \vec{a}_j| \leq 1$$

Definición 1.4. (Concordancia) Un método de *apportionment* A se dice **concordante** si dados dos partidos, el más fuerte no recibe menos bancas que el menos fuerte. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, y dada una asignación $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$,

$$v_i > v_j \implies \vec{a}_i \geq \vec{a}_j$$

Definición 1.5. (Decencia - Homogeneidad) Un método de *apportionment* A se dice **decente** u **homogéneo** si cualquier reescalamiento del vector de votos no produce cambios en las asignaciones retornadas por el método. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$A(\vec{v}, H) = A(\alpha \cdot \vec{v}, H)$$

Esencialmente, esta propiedad nos dice que un método **decente** debe basar sus asignaciones en las *proporciones* de votos, y no en las *cantidades* netas de votos. En particular, utilizando el factor de reescalamiento $\alpha = \frac{1}{v_+}$, cualquier problema de *apportionment* se puede tratar utilizando el vector de proporciones $\vec{w} := \alpha \cdot \vec{v}$ en lugar del vector de votos \vec{v} . Como veremos más adelante, esta reformulación nos permite incorporar una interpretación probabilística del problema, dado que con este reescalamiento se tiene que $w_i \in (0, 1) \quad \forall i \in [n]$, y $w_+ = 1$.

Definición 1.6. (Exactitud) Un método de *apportionment* A se dice **exacto** si ante un vector entero de votos que suma H , el método retorna exactamente el mismo vector: dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$A(\vec{v}, H) = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{N}^n(h)$$

Esencialmente, esta propiedad nos dice que un método **decente** debe basar sus asignaciones en las *proporciones* de votos, y no en las *cantidades* netas de votos. En particular, utilizando el factor de reescalamiento $\alpha = \frac{1}{v_+}$, cualquier problema de *apportionment*

se puede tratar utilizando el vector de proporciones $\vec{w} := \alpha \cdot \vec{v}$ en lugar del vector de votos \vec{v} . Como veremos más adelante, esta reformulación nos permite incorporar una interpretación probabilística del problema, dado que con este reescalamiento se tiene que $w_i \in (0, 1) \forall i \in [n]$, y $w_+ = 1$.

Definición 1.7. (Quota) Un método de *apportionment* A satisface la *propiedad Quota* si $\forall \vec{v}, H$, se tiene que $\vec{a}_i \in \{\lfloor q_i \rfloor, \lceil q_i \rceil\} \forall i \in [n], \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H)$. Es decir, las asignaciones devueltas por A verifican que a cada partido se le otorga el redondeo hacia arriba o hacia abajo de su respectiva *quota*.

Introduciremos una definición que permitirá entender y caracterizar la forma esperada en la que se debería comportar un método de *apportionment* ante variaciones en las cantidades de votos de los partidos. Dado que un método "razonable" debe depender exclusivamente de las proporciones de votos y no de las cantidades netas (*homogeneidad*), nos interesará considerar la variación relativa de la población de dos estados: los cocientes $\frac{v_i}{v_j}$ y $\frac{v'_i}{v'_j}$, donde v_i, v_j son las poblaciones "iniciales" y v'_i, v'_j las poblaciones posteriores. Si dicho cociente aumenta es porque el estado i aumentó su población en relación a j , independientemente de si las poblaciones de ambos estados aumentaron, decrecieron, o la de i aumentó mientras la de j decreció.

Definición 1.8. (Population monotonicity - Vote ratio monotonicity)

Un método de *apportionment* A satisface la propiedad de **Population monotonicity** si dados $H \in \mathbb{N}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{N}^n$ tales que $\frac{v_i}{v_j} < \frac{v'_i}{v'_j}$ para $i, j \in [n]$, $i \neq j$, se tiene que $\vec{a}_i \geq \vec{a}'_i$ ó $\vec{a}'_j \geq \vec{a}'_i \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H), \forall \vec{a}' \in A(\vec{v}', H)$.

Lo que establece esta propiedad es que si la razón entre las poblaciones de dos estados i y j aumenta, entonces o bien i debe haber aumentado la cantidad de bancas recibidas, o bien j debe haber reducido dicha cantidad.

Definición 1.9. (House monotonicity) Un método de *apportionment* A satisface la propiedad de **House monotonicity** si dados $H \in \mathbb{N}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, se tiene que $\vec{a}_i \leq \vec{a}'_i \forall i \in [n], \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H), \forall \vec{a}' \in A(\vec{v}, H+1)$. Es decir, si aumenta la cantidad total de bancas a repartir y la cantidad de votos de cada partido permanece constante, no puede decrecer la cantidad de bancas recibida por algún partido.

Si nos encontráramos en un escenario en el que hubiese una banca extra a repartir, podríamos preguntarnos cuál de todos los partidos existentes se la "merece" más [BY76]. Particularmente, esta pregunta toca de cerca a los métodos que verifican **house monotonicity**, puesto que para pasar de una asignación de H bancas a una de $H+1$, basta con elegir un partido para asignarle la banca extra, dejando a los partidos restantes con la misma cantidad de bancas.

Hay una última propiedad deseable para un sistema de repartición, la *coherencia* (también denominada *uniformidad* o *consistencia*). No obstante, la enunciaremos más adelante, puesto que cobrará mayor relevancia para generalizar algunas de las propiedades ya enunciadas y categorizar familias de métodos.

1.4. Algunos métodos típicos

Una cantidad que aparecerá recurrentemente en distintos métodos es la *Hare Quota*, definida como

$$HQ(\vec{v}, H) = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n v_i,$$

que podemos pensar como la cantidad promedio de votos representados por una banca, o el "*precio justo*" (en cantidad de votos) a pagar por una banca.

Usaremos el término *quota* indistintamente para referirnos a la propiedad recién enunciada o al cociente de la cantidad de votos de un partido por algún divisor d . En caso de no especificarse el divisor, se asume que es la *Hare-Quota*.

A modo de raconto, vale la pena mencionar que en el siglo XVIII en Estados Unidos, en los orígenes de esta problemática, se pensaba en no dejar fija la cantidad de bancas a ocupar en el congreso, sino en fijar una "razón de representación", es decir, buscar que haya "una banca cada x personas". Naturalmente, surgen dos problemáticas con este enfoque: por un lado, resulta ambigüo si se debe dividir el total de la población por x para determinar el total de bancas a repartir o si se debe dividir la población propia de cada estado por x (definiendo también qué hacer con las partes fraccionarias resultantes). Estos dos posibles acercamientos producen, en general, resultados distintos. Por otro lado, el hecho de no dejar fijo el *house size* provoca que a medida que crece la población de un país con el correr de los años, el *house size* pueda tender a infinito (obviamente, suponiendo que el divisor x permanece constante a lo largo del tiempo, y que los estados no varían sus legislaciones para distribuir las bancas). Para ejemplificar esto, basta apreciar el caso de los Estados Unidos, en donde se estableció 30.000 como divisor tras haber realizado su primer censo en 1790. La primera metodología utilizada para asignar las bancas fue dividir la población de cada estado por este divisor, y redondear los valores obtenidos hacia abajo. Por la cantidad de habitantes de ese entonces, el *house size* resultante era de 112 miembros, como se puede apreciar en la tabla 1.1. Si se realizara el mismo procedimiento con las poblaciones actualizadas de los mismos 15 estados que existían en ese entonces utilizando la información del último censo (2020) y el mismo divisor, el *house size* resultante sería de 3.420, como se puede apreciar en la tabla 1.2.

<i>Estado</i>	<i>Cociente (30.000)</i>	<i>Asignación</i>
Connecticut	7.895	7
Delaware	1.851	1
Georgia	2.361	2
Kentucky	2.290	2
Maryland	9.284	9
Massachusetts	15.844	15
Nuevo Hampshire	4.727	4
Nueva Jersey	5.986	5
Nueva York	11.053	11
Carolina del Norte	11.784	11
Pensilvania	14.429	14
Rhode Island	2.282	2
Carolina del Sur	6.875	6
Vermont	2.851	2
Virginia	21.019	21
Total	120.531	112

Tabla 1.1: Cociente y asignación de bancas para los 15 estados originarios de EEUU. Tabla extraída de [BY01]

<i>Estado</i>	<i>Población (2020)</i>	<i>Cociente (30.000)</i>	<i>Asignación</i>
Connecticut	3 605 944	120.198	120
Delaware	989 948	32.998	32
Georgia	10 711 908	357.063	357
Kentucky	4 505 836	150.194	150
Maryland	6 185 278	206.176	206
Massachusetts	7 029 917	234.331	234
Nuevo Hampshire	1 377 529	45.918	45
Nueva Jersey	9 288 994	309.633	309
Nueva York	20 201 249	673.375	673
Carolina del Norte	10 439 388	347.980	347
Pensilvania	13 002 700	433.423	433
Rhode Island	1 097 379	36.579	36
Carolina del Sur	5 118 425	170.615	170
Vermont	643 077	21.436	21
Virginia	8 631 393	287.713	287
Total	102 828 965	3 427.632	3 420

Tabla 1.2: Actualización con datos del censo de 2020 para los 15 estados mencionados anteriormente. Datos extraídos de [Censo EE.UU.](#)

1.4.1. Método de Hamilton

El primer sistema de distribución de bancas diseñado para el congreso estadounidense fue el *método de Hamilton*, diseñado por Alexander Hamilton en 1792, también conocido como el *método de restos mayores* (*greatest remainders*). Usualmente es considerado como el método más intuitivo. El método consiste en:

Paso 1. Cálculo de cuotas exactas: dividir los votos de cada partido por $HQ(\vec{v}, H)$ y

$$\text{obtener } q_i := \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)} = H \frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}.$$

Paso 2. Asignación inicial: otorgar a cada partido i su *lower quota*, $\lfloor q_i \rfloor$.

Paso 3. Distribución de bancas restantes: ordenar los *restos* $p_i := q_i - \lfloor q_i \rfloor$ de forma decreciente, y asignar las bancas a los partidos con mayores restos.

Un aspecto llamativo del *método de Hamilton* es que no garantiza que si un partido recibe mayoría absoluta de los votos entonces vaya a tener la mayoría absoluta de las bancas. Para ver esto, alcanza con tomar un escenario de 100 bancas a repartirse entre 3 partidos con el vector de votos $\vec{v} = (501, 250, 249)$. Las proporciones de votos obtenidas para este escenario resultan

$$\vec{q} = (0.501, 0.25, 0.249),$$

lo cual manifiesta la mayoría absoluta de votos para el partido 1. Sin embargo, al utilizar el *método de Hamilton* para repartir las bancas, en primer lugar se asignan:

- $\lfloor 50.1 \rfloor = 50$ bancas al partido 1,
- $\lfloor 25 \rfloor = 25$ bancas al partido 2,
- $\lfloor 24.9 \rfloor = 24$ bancas al partido 3.

La banca pendiente de ser repartida es asignada al partido 3, por tener un resto de 0.9. Se observa entonces que el partido 1 no obtiene la mayoría absoluta de las bancas a pesar de tener la mayoría absoluta de los votos.

- Se puede definir la Droop quota

1.4.2. Método de Jefferson/D'Hont

Existen diversas formas de definir el método D'Hont. Como es el sistema utilizado para la distribución de bancas de la Honorable Cámara de Diputados de la Nación Argentina, se lo suele explicar en los colegios secundarios a través del siguiente algoritmo:

Algoritmo 1: Método D'Hont

- 1 **Elaboración de tabla:** Ordenar los partidos decrecientemente por cantidad de votos, poniendo como filas a los partidos;
 - 2 **Cálculo de cocientes:** En la primera columna numérica poner la cantidad de votos; en la segunda, la cantidad de votos dividida por 2. Proceder de esta forma hasta llegar a la H -ésima columna, en la cual aparece, para cada partido, su cantidad de votos dividida por H ;
 - 3 **Asignación de bancas:** Asignar las H bancas a los partidos que posean los H números más grandes en la tabla confeccionada;
 - 4 **return** La asignación resultante;
-

Paso 1. Elaboración de tabla: Ordenar los partidos decrecientemente por cantidad de votos, poniendo como filas a los partidos.

Paso 2. Cálculo de cocientes: En la primera columna numérica poner la cantidad de votos; en la segunda, la cantidad de votos dividida por 2. Proceder de esta forma hasta llegar a la H -ésima columna, en la cual aparece, para cada partido, su cantidad de votos dividida por H .

Paso 3. Asignación de bancas: Asignar las H bancas a los partidos que posean los H números más grandes en la tabla confeccionada.

Otra forma de definir este método parte del siguiente razonamiento: si se quisiera asignar a cada partido i el redondeo hacia abajo de la cantidad de bancas que le corresponden según la *Hare-Quota*, $\lfloor \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)} \rfloor$, esto tipicamente resultará en una asignación en la que quedan bancas libres. Si se redondeara hacia arriba, la asignación excedería el total de bancas.

Luego, se podría buscar un divisor $d \leq HQ(\vec{v}, H)$ tal que redondeando hacia abajo estos cocientes, la suma total sea H :

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor = H \quad (1.1)$$

De esta forma, asignando a cada partido i la parte entera de su cociente, $\lfloor \frac{v_i}{d} \rfloor$, se tiene una asignación válida. De todos los divisores d que sean solución a esta ecuación, usualmente se prefiere el más grande, a partir de pensar en este divisor como el "precio por banca", medido en cantidad de votos, que paga cada partido [BY76], [Wilnd].

La siguiente propiedad muestra que la asignación devuelta por el algoritmo coincide con la asignación producida a partir de la ecuación anterior:

Proposición 1.10. *Llamando $A(\vec{v}, H)$ a la asignación de bancas dada por el algoritmo 1 y $A_d(\vec{v}, H)$ a la asignación dada por*

$$A_d(\vec{v}, H) = \left(\left\lfloor \frac{v_1}{d} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v_n}{d} \right\rfloor \right),$$

con d solución de la ecuación (1.1), se tiene que $A(\vec{v}, H) = A_d(\vec{v}, H)$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad, supongamos los partidos ordenados decrecientemente en cantidad de votos. Al seleccionar el número más grande de la tabla, a_{11} (la cantidad de votos del partido 1, el partido con más votos), si se determina como precio por banca dicho valor, únicamente el partido 1 tiene la posibilidad de comprar una única banca.

TO DO: TERMINAR DEMO

Llamemos a_k al número seleccionado en el paso $k \in \{1, \dots, H\}$ a partir de la tabla construida en el algoritmo, es decir, al k -ésimo valor más grande de la tabla. Digamos que es el valor ubicado en la posición (ij) de la tabla: $a_k = \frac{v_i}{j}$. Esto implica que, si se utiliza a_k como divisor, únicamente se llegan a asignar k bancas:

$$\left\lfloor \frac{v_l}{a_k} \right\rfloor \begin{cases} q_l, & \text{si } v_l \geq a_k, \\ q_l - 1, & \text{si } v_l < a_k. \end{cases} \quad (1.2)$$

□

1.4.3. Método de Webster/Saint-Laguë

Para definir este método, notemos

$$[\![x]\!] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}, \\ \lceil x \rceil, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}, \\ \{\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil\}, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

Este método surge de un razonamiento análogo al del método anterior: buscamos un divisor d tal que al redondear según $[\![\cdot]\!]$, la asignación resultante sea válida, ie asigna H bancas. Es decir, buscamos d solución de

$$\sum_{i=1}^n [\![\frac{v_i}{d}]\!] = H \quad (1.4)$$

Vale observar que, por la ambigüedad del caso $x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$ en el redondeo, este método puede llegar a devolver hasta 2^s asignaciones posibles para un d fijo, con $s = |\{i \in [n] : \frac{v_i}{d} - \lfloor \frac{v_i}{d} \rfloor = \frac{1}{2}\}|$.

1.4.4. Observaciones de los métodos típicos

A continuación, veremos algunas situaciones atípicas que se han producido a lo largo de la historia ante la utilización de estos métodos, motivando un análisis más profundo de las propiedades que cumplen, además de la definición de nuevos métodos.

Capítulo 2

Desarrollo teórico

2.1. Métodos de divisor

"The decisive conclusion of the preceding section is that the only realistic candidates for methods of apportionment are the divisor methods. The question then becomes: which of the infinite number of divisor methods should be chosen?" [BY]

"Divisor methods fix the rounding rule and adjust the divisor. Quota methods fix the divisor and adjust the rounding rule." [Puk17]

Parte fundamental de la esencia del problema de apportionment radica en la dificultad de definir cómo redondear satisfactoriamente las partes fraccionarias de las quotas: el método de Webster, por ejemplo, divide los votos de cada partido por un divisor d y luego redondea los resultados utilizando el método tradicional de redondeo al entero más cercano. Por su parte, el método D'Hont utiliza la función "piso", redondeando a la parte entera. Para extender esta metodología y poder considerar otros métodos necesitamos introducir las nociones de "función de redondeo" y "regla de redondeo", que nos permitirán definir la familia de métodos de divisor.

Definición 2.1. (Función de redondeo) Una función de redondeo se define como una función

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N} \text{ creciente y sobreyectiva.}$$

El hecho de que una función de redondeo sea creciente implica que

$$f(0) = 0$$

y que

$$\begin{aligned}[0, \infty) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^{-1}(\{i\}) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [s_i, s_{i+1})\end{aligned}$$

para $s_i := \min\{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : f(s) = i\}$, por lo que podemos pensar en una función de redondeo f a partir de la sucesión $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$. A esta sucesión la denominamos *secuencia de saltos*. Esta caracterización establece que $f(s_i) = i \forall i \in \mathbb{N}_0$. Pensando en el redondeo de $j + \frac{1}{2}$ para $j \in \mathbb{N}_0$, no es claro que siempre vayamos a querer que sea redondeado hacia abajo, por lo que podríamos incluir la posibilidad de que $f(j + \frac{1}{2}) = \{j, j + 1\}$ para

tener una noción un poco más general. Para los puntos de la *secuencia de saltos*, esto se traduciría en definir $f(s_j) = \{j - 1, j\}$. Detallamos esta idea en la definición de "regla de redondeo":

Definición 2.2. (Regla de redondeo) Una regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ dada por una *secuencia de saltos* $0 = s(0) \leq s(1) < s(2) < \dots$ se define como

$$\llbracket t \rrbracket = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } t = 0 \\ \{n\}, & \text{si } t \in (s(n), s(n+1)) \\ \{n-1, n\}, & \text{si } t = s(n) \end{cases}$$

Esta definición nos permite identificar de manera única cualquier regla de redondeo a partir de su secuencia de saltos subyacente, por lo que utilizaremos cualquiera de estas dos caracterizaciones de manera indistinta. La relación fundamental que nos permite entender mejor el vínculo es la siguiente:

$$n \in \llbracket t \rrbracket \iff s(n) \leq t \leq s(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \geq 0$$

En principio, partiendo de la definición anterior, una secuencia de saltos podría tener varios puntos concentrados en un mismo intervalo de la forma $[n, n+1]$ para $n \in \mathbb{N}$, como podemos observar en el siguiente ejemplo:

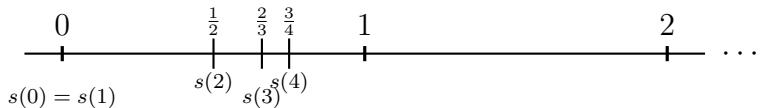


Figura 2.1: Ejemplo de secuencia de saltos espuria, con $s(0) = 0; s(i) = 1 - \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Como queremos evitar esto, extenderemos la definición de *secuencia de saltos* para que solamente contemple sucesiones "razonables". Este término lo entendemos en el sentido de que los números redondeados a $n \in \mathbb{N}$ deben tener a n cerca, es decir, $n \in [s(n), s(n+1)]$.

Definición 2.3. (Secuencia de saltos) Llamamos *secuencia de saltos* a una sucesión $(s(0), s(1), s(2), \dots)$ que verifica las siguientes propiedades:

- I) (*Inicialización*) $s(0) = 0$;
- II) (*Localización*) $s(n) \in [n - 1, n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- III) (*Disjunción izq-der*)

$$s(n) = n - 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \implies s(m) < m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$s(n) = n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \implies s(m) < m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Esta última condición nos permite concluir que, exceptuando $s(1)$ – cuyo valor podría ser $0 = s(0)$ –, la secuencia será estrictamente creciente. Para ver esto, basta observar que la única forma de que dos términos consecutivos coincidan es si $s(n) = n = s(n+1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esta posibilidad queda excluida por la condición III) de *Disjunción izq-der*, puesto que $s(n) = n \implies s(m) > m \forall m \in \mathbb{N}$, y de forma análoga se ve el otro caso.

Con esta nueva definición de *secuencia de saltos* podemos descomponer al intervalo $[0; +\infty)$ como

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [s(i), s(i+1)),$$

pero ahora con la garantía de que $n \in [s(n), s(n+1)]$.

Ejemplo 2.4. (Secuencias de saltos estacionarias) Un caso particular – y bastante natural de definir– de secuencias de saltos son las *secuencias de saltos estacionarias*, que dependen de un parámetro $r \in [0; 1]$ y se definen como

$$\begin{aligned} s_r(0) &= 0; \\ s_r(n) &= n - 1 + r \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

por lo que dividen al intervalo real no negativo en los puntos $0, r, 1+r, 2+r, \dots$

Esta familia de métodos recorre un amplio espectro de reglas de redondeo típicas: para $r = 0$ define el método de redondeo usualmente denominado "*techo*" o "*redondeo hacia arriba*" y denotado $\lceil \cdot \rceil$; para $r = \frac{1}{2}$ define el método de redondeo tradicional; para $r = 1$ define el método de redondeo usualmente denominado "*piso*", "*redondeo hacia abajo*" o "*parte entera*", denotado $\lfloor \cdot \rfloor$.

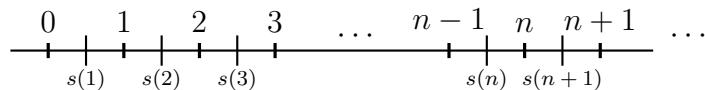


Figura 2.2: Ejemplo de secuencia de saltos estacionaria con $r = \frac{1}{2}$: $s_r(i) = i - \frac{1}{2}$.

Quizás pueda parecer inútil definir reglas de redondeo de esta forma tan general, pero basta observar el siguiente ejemplo para darse cuenta de que los métodos más típicos ($\lceil \cdot \rceil$, $\lfloor \cdot \rfloor$, redondeo estándar) no permiten resolver de forma satisfactoria ciertos escenarios.

1975	Población	Proporción	Porcentaje
Asia	2 295 000 000	0.57289	57
Europa	734 000 000	0.18323	18
Américas	540 000 000	0.13480	13
África	417 000 000	0.10409	10
Australia y Oceanía	20 000 000	0.00499	0
Suma	4 006 000 000	1.00000	98

Tabla 2.1: Porcentajes de población por continente de acuerdo a la regla estándar de redondeo. Se observa cómo esta regla de redondeo no basta para alcanzar una solución en la que la suma de porcentajes sea efectivamente del 100 %. Tabla extraída de [Puk17]

Definición 2.5. (Métodos de divisor) Consideramos como método de divisor inducido por la regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ a aquél método de *apportionment* cuya imagen es el conjunto de asignaciones dado por

$$A(\vec{v}, H) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n(H) : x_i \in \left[\frac{v_i}{D} \right] \forall i \in [n], \text{ para cierto } D > 0 \right\}$$

La idea de esta familia de métodos es "dividir y redondear" ([Puk17]), dividiendo los votos por cierto divisor $D > 0$ y luego aplicando la regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ a los resultados, de forma tal que tomando cantidades $x_i \in \left[\frac{v_i}{D} \right]$, los vectores resultantes sean asignaciones válidas, ie $x_+ = H$.

Como a veces se utilizará el vector \vec{w} de proporciones dado por $\vec{w}_i = \frac{\vec{v}_i}{\vec{v}_+}$ en lugar de \vec{v} , tendrá sentido considerar también un multiplicador μ en lugar de solo el divisor D .

Proposición 2.6. *Los métodos de divisor satisfacen anonimidad, balance, concordancia, decencia y exactitud.*

Prueba: La demostración no es ni muy relevante ni muy instructiva, por lo que queda relegada al apéndice. \square

Teorema 2.7. (Desigualdad max-min)

Sea A el método de divisor inducido por la regla de redondeo con secuencia de saltos $s(0), s(1), s(2), \dots$

Entonces, una asignación de bancas $x \in \mathbb{N}^n(H)$ pertenece al conjunto de asignaciones de bancas para el vector $\vec{v} \in (0, \infty)^n$ dado por $A(\vec{v}, H)$ si y solo si

$$\max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)}$$

Esta desigualdad nos brinda el rango de valores en el que podemos tomar el divisor $D > 0$ tal que $x \in A(\vec{v}, H)$.

Prueba: x es una asignación dada por el método de divisor A si y solo si $\exists D > 0$ tal que $x_j \in \left[\frac{v_j}{D} \right] \forall j \in [n]$, lo cual sucede si y solo si

$$\begin{aligned} s(x_j) \leq \frac{v_j}{D} \leq s(x_j + 1) \quad &\forall j \in [n] \iff \\ \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq D \leq \frac{v_j}{s(x_j)} \quad &\forall j \in [n] \iff \\ \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq D \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} \quad &\implies \\ \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} \quad & \end{aligned}$$

Y esto demuestra la ida.

Para la vuelta, el hecho de que se verifique la desigualdad max-min garantiza la existencia de $D > 0$ para que $x \in A(\vec{v}, H)$. \square

Proposición 2.8. (*Unicidad de divisor*)

Dados A un método de divisor, $H \in \mathbb{N}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, se tiene que

$$\{x\} = A(\vec{v}, H) \iff \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} < \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)}$$

$$\{x\} \subsetneq A(\vec{v}, H) \iff \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} = \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)}$$

Esto nos dice que el divisor $D > 0$ para el cual el método A queda bien definido es único solamente si A retorna soluciones múltiples.

Prueba: Teniendo en cuenta que ambas condiciones son complementarias, basta con probar una sola de las dos equivalencias.

Supongamos que

$$\max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} = \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)}$$

Luego, existe un único divisor $D > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \llbracket \frac{v_i}{D} \rrbracket = k$ tiene solución. Además, como \square

La desigualdad max-min, con la respectiva elaboración de los conjuntos $I(\vec{v}, H)$ y $D(\vec{v}, H)$, ayuda a pensar en el siguiente algoritmo polinomial para construir vectores de asignaciones $x \in A(\vec{v}, H)$:

Algoritmo 2: Construcción de vector de asignaciones para métodos de divisor.

Resultado: $x \in A(\vec{v}, H)$ vector de asignaciones

```

1 Tomando  $D := \frac{v_+}{H}$ , definir:
2    $x_j = \llbracket \frac{v_j}{D} \rrbracket$  para cada  $j \in [n]$ 
3 Si  $x_+ = k$  entonces
4   | return x
5 fin
6 Sino
7   | Si  $x_+ < k$  entonces
8     |   fas
9   | fin
10 fin
```

2.2. Métodos de quota

"In a way quota methods may be viewed as procedures complementary to divisor methods. Divisor methods fix the rounding rule and adjust the divisor. Quota methods fix the divisor and adjust the rounding rule." [Puk17]

Los métodos de quota se caracterizan por tener un divisor $Q > 0$ prefijado (típicamente la *Hare-Quota*), elegido por tener alguna característica persuasiva. Posteriormente, lo que se modifica es la regla de redondeo utilizada para ajustar los cocientes resultantes al dividir los votos por Q .

Estos métodos constan de dos etapas:

- En primer lugar se dividen las cantidades de votos de cada partido por el divisor prefijado Q , y se asigna a cada partido la parte entera de su respectivo cociente, denominado *quota inferior*: $\lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor =: y_i$. De esta forma, se asignan $m := y_+ = \sum_{i=1}^n y_i$ bancas. Cabe aclarar que el divisor Q elegido debe ser tal que en esta primera etapa no se asignen más bancas de las que hay, $m \leq H$, y que no falte asignar más de una banca por partido, $H - m \leq n$.
- Dado que en la primera etapa se asignaron m bancas, resta asignar $H - m \in \{0, \dots, n\}$ bancas. Para esto, se establece un ordenamiento de los partidos de acuerdo a algún criterio que depende de los restos $\frac{v_i}{Q} - \lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor$, y se asignan las bancas restantes a los primeros $H - m$ partidos de este ordenamiento.

El método de quota más típico es el de Hamilton, enunciado en la sección 1.3, que utiliza como divisor Q la *Hare-Quota* $HQ(\vec{v}, H)$ definida anteriormente. Asigna las partes enteras de los cocientes resultantes, y luego simplemente ordena decrecientemente los restos $\frac{v_i}{Q} - \lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor$, asignando las $H - m$ bancas restantes a los $H - m$ partidos que tengan los restos más grandes.

Existe la posibilidad de que este método no entre en la segunda etapa de los métodos de quota. Para que ocurra esto, la primera etapa debe asignar todas las bancas disponibles, lo cual sucede únicamente si los restos resultantes luego de la primera asignación son todos 0, ie $\lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor = \frac{v_i}{Q} \forall i \in [n]$. Esta última condición dice que las cantidades de votos de los partidos deben ser todas múltiplos enteros de la *Hare-Quota*, lo cual es sumamente improbable.

2.2.1. Métodos shift-quota

Los métodos shift-quota surgen a partir de pensar en que utilizando un divisor d distinto de $HQ(\vec{v}, H)$ se puede llegar a un método de quota con mejores propiedades que el de Hamilton. Se define la shift-quota con shift $s \in [-1; 1)$ como el divisor

$$d = Q(s) := \frac{v_+}{H + s}$$

La utilidad de usar shifts $s \in [-1; 1)$ tiene que ver con buscar que, al utilizar la shift-quota y luego ajustar los residuos con el criterio de "residuos más grandes", el método resultante sea válido.

En efecto, la asignación de la primera etapa otorga $y_j = \lfloor \frac{v_j}{Q(s)} \rfloor = \lfloor \frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) \rfloor$ bancas al partido $j \in [n]$. De esta forma,

$$\begin{aligned} y_+ &= \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{v_i}{v_+} \cdot (H + s) \rfloor \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{v_+} \cdot (H + s) \\ &= H + s \\ &< H + 1 \quad \text{pues } s < 1 \end{aligned}$$

y por la integralidad de y_+ resulta $y_+ \leq H$.

Para la cota inferior,

$$\begin{aligned} y_+ &> \sum_{i=1}^n \left[\frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) - 1 \right] \\ &= (H + s) - n \\ &\geq H - n - 1 \quad \text{pues } s \geq -1 \end{aligned}$$

Proposición 2.9. (*Desigualdad max-min para métodos shift-quota*) Consideremos un método shift-quota con ajuste por residuos más grandes y shift $s \in [-1; 1)$ $A_s(\cdot, H)$. Entonces un vector de asignaciones $x \in \mathbb{N}_0^n(H) \in A_s(\vec{v}, H)$ si y solo si

$$\max_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) - x_j \right) \leq \min_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) + 1 - x_j \right)$$

Esta desigualdad permite definir el intervalo de *splits*

$$R(\vec{v}, x) := \left[\max_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) - x_j \right) ; \min_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) + 1 - x_j \right) \right]$$

Este intervalo tiene los valores $r \in [0; 1]$ que sirven como umbral, al considerar los restos, para separar las partes fraccionarias de los partidos que reciben bancas extra de los que no.

Corolario 2.10. (*Métodos shift-quota y métodos de divisor estacionarios*) Llamemos $shQgrR_s$ al método shift-quota con shift $s \in [-1; 1)$ y ajuste por residuos más grandes. Para todo $H \in \mathbb{N}$ y $\vec{v} \in (0; \infty)^n$ existe $r^* \in [0; 1]$ – dependiente de s, H y \vec{v} – tal que $shQgrR_s$ y el método de divisor con regla de redondeo estacionario de parámetro r^* tienen el mismo conjunto de asignaciones,

$$shQgrR_s(\vec{v}, H) = DivSta_{r^*}(\vec{v}, H)$$

2.3. Resultados principales del área

En esta sección nos dedicaremos a analizar la utilidad y el grado de "justicia" con el que las familias de métodos enunciadas anteriormente permiten resolver el problema de *apportionment*. Esencialmente, veremos que los métodos de divisor son los únicos métodos que no producen ninguna de las paradojas de Alabama, Población y House Size mencionadas en la sección de ejemplos – o, en otras palabras, son los únicos métodos que verifican las propiedades de *monotonía de población*, *house monotonicity* y *coherencia* (que enunciaremos en breve) –. A su vez, el otro resultado importante que mencionaremos es que los métodos de divisor no satisfacen la propiedad *quota*, concluyendo de esta forma que no pueden existir métodos verdaderamente satisfactorios, en el sentido de que no produzcan paradojas y satisfagan la propiedad *quota* simultáneamente.

Dado que los siguientes resultados fueron descubiertos y enunciados en relación a paradojas vinculadas a contextos de repartición de bancas entre estados (y no entre partidos), los enunciaremos en esos mismos términos.

Proposición 2.11. (*Robustez de métodos de divisor ante paradoja de población*)

Un método de apportionment A evita la paradoja de población $\iff A$ es un método de divisor.

Prueba: Es fácil ver la vuelta: dado A un método de divisor, supongamos que un estado s_1 aumenta su población *relativo* a otro estado s_2 y el estado s_2 gana bancas. Entonces, la quota del estado s_2 debe haber pasado algún punto de salto, pero como el aumento de s_1 es mayor *relativo* al de s_2 , la quota de s_1 también debe haber avanzado, y por lo tanto no puede haber perdido bancas.

La ida es un poco más técnica y complicada, por lo que queda en el apéndice. \square

Proposición 2.12. (Robustez de métodos de divisor ante paradoja de Alabama)
Todo método de divisor A evita la paradoja de Alabama.

Prueba: En los métodos de divisor, la cantidad de bancas obtenidas por un estado es equivalente a la cantidad de puntos de salto que sobrepasó al dividir su cantidad de votos por cierto divisor d . Si la cantidad total de bancas a repartir aumenta, el divisor d debe decrecer, y por lo tanto las quotas $\frac{v_i}{d}$ aumentan. Esto implica que ningún estado puede perder bancas. \square

Proposición 2.13. (Robustez de métodos de divisor ante paradoja de nuevos estados) Todo método de divisor A evita la paradoja de nuevos estados.

Prueba: Para ver esto, pensemos en la *paradoja de nuevos estados* al revés de como fue planteada en la sección de paradojas: en lugar de considerar que se agrega un estado nuevo junto con la cantidad correspondiente de bancas según redondeando su quota justa (osea, la quota obtenida al dividir la población del nuevo estado por la Hare-Quota), consideremos un estado s que desaparece, llevándose consigo la cantidad a_s de bancas que tenía. Justamente, como sus bancas desaparecen, el divisor D que estaba siendo utilizado antes de la desaparición del estado s sigue sirviendo para los estados restantes, y al considerar $\llbracket \frac{v_i}{D} \rrbracket$ para $i \in [n] \setminus \{s\}$, se tiene que la asignación que se tenía antes para los estados distintos de s sigue sirviendo. Dado que las asignaciones permanecen constantes ante la aparición/desaparición de un estado con sus respectivas bancas, no se produce la *paradoja de nuevos estados*. \square

"A viable solution for the whole problem should comprise viable solutions for its partial problems. Balinski / Young (1982) put it this way: An inherent principle of any fair division is that every part of a fair division should be fair. Conversely the whole solution should be retrievable by concatenating solutions of partial problems. The whole and its parts must fit together in a coherent way."

Introducimos la siguiente notación, que facilitará la escritura de las siguientes propiedades:

dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto de índices $I \subset \{1, \dots, n\}$, notamos

$$x_I := \sum_{i \in I} x_i$$

Definición 2.14. (Coherencia) Un método de *apportionment* A verifica la propiedad de **Coherencia** si $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, todo vector de asignaciones $x \in A(\vec{v}, x_+)$ satisface, para cualquier subconjunto de partidos $I \subset \{1, \dots, n\}$, las siguientes propiedades:

1. (*Coherencia de subproblemas*)

$$(x_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I)$$

2. (Concatenación de soluciones parciales)

$$\forall (y_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I) \text{ y } \forall (z_i)_{i \in I^c} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I^c}, x_{I^c})$$

se tiene que $((y_i)_{i \in I}, (z_i)_{i \in I^c}) \in A(\vec{v}, x_+)$

Esencialmente, la propiedad de *coherencia* establece que, dada una asignación de bancas a partir de un método A , si se utiliza el método sobre un subconjunto de partidos con el subconjunto de bancas que habían recibido, entonces la asignación correspondiente a ese subconjunto debe permanecer igual que antes.

Teorema 2.15. (Teorema de coherencia)

Un método satisface la propiedad de coherencia si y solo si es un método de divisor.

Prueba: La demostración de la ida se realiza analizando una clase de métodos más amplia, los métodos rank-index, para luego construir una secuencia de saltos que permite concluir que A es un método de divisor. Debido a su tecnicidad, esta demostración fue realizada originalmente por [BY]. Emulamos una demostración más novedosa, de [PPR16] en el apéndice A.

Para la vuelta, sea A un método de divisor. Para verificar su *coherencia*, basta ver que:

si existe divisor $D > 0$ para el cual $x \in A(\vec{v}, x_+)$, entonces, dado $I \subset \{1, \dots, n\}$, dicho divisor también sirve para $(x_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I)$, por lo que la *coherencia de subproblemas* se verifica de forma inmediata.

Por otro lado, si se tiene $(y_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I)$ y $(z_i)_{i \in I^c} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I^c}, x_{I^c})$, es por

□

2.4. Conclusiones y algunos resultados extra

Como ya hemos mencionado al comienzo de la sección anterior, la conjunción del *Teorema de Coherencia* y la propiedad de que los métodos de divisor no satisfacen *quota* funcionan, de alguna forma, como un resultado de imposibilidad: no existe método determinístico de *apportionment* que sea coherente (en particular, que verifique las propiedades implicadas por coherencia) y verifique la propiedad *quota* simultáneamente.

El término "determinístico" en la frase anterior no es en vano: esta suerte de "Teorema de imposibilidad" no extraer conclusiones sobre métodos aleatorizados. Si bien las propiedades deseables que enunciábamos en la subsección 1.3.1 no hacen referencia a métodos que contemplan algún factor de aleatoriedad, veremos cómo definir formalmente esta familia de métodos, junto con propiedades análogas, para poder realizar un análisis sistemático de esta familia de métodos. No obstante, antes de analizar este universo de métodos, revisamos algunos conceptos y resultados extra sobre los métodos determinísticos.

Uno de los conceptos interesantes que introduce [Puk17] es el de *mayoración*, que permite entender la relación entre distintos métodos de *apportionment* a la hora de favorecer o perjudicar a los partidos más grandes. Se basa, esencialmente, en establecer una relación de orden entre métodos, definiendo que un método A mayora (\succeq) a otro método B si, al considerar a los partidos ordenados decrecientemente por proporción de votos ($w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$), el método A asigna un total de bancas mayor que B a cualquier subconjunto I de k partidos más grandes ($I = \{1, \dots, k\} \wedge x \in A(\vec{w}, H), y \in B(\vec{w}, H) \implies x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + \dots + y_k$).

Otra cuestión interesante que analiza [Puk17] es cómo extender de forma coherente el método de apportionment natural para 2 partidos: utilizar redondeo estándar $\llbracket \cdot \rrbracket$ (recordamos que, en caso de que la parte fraccionaria del número a redondear fuese igual a $\frac{1}{2}$, el redondeo estándar retornaba las dos opciones posibles: redondeo hacia arriba o hacia abajo). Es decir, si se tienen dos partidos con cantidades de votos dadas por $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_{>0}$ y H bancas a repartir, asignarles (x_1, x_2) bancas respectivamente, con

$$x_1 \in \left\llbracket \frac{v_1}{v_1 + v_2} H \right\rrbracket \quad \wedge \quad x_2 \in \left\llbracket \frac{v_2}{v_1 + v_2} H \right\rrbracket$$

El análisis de esta situación llega a la conclusión de que el único método que extiende esta asignación de 2 partidos en forma coherente es el método de divisor con redondeo estándar: el de Webster/Saint-Laguë.

Capítulo 3

Métodos aleatorizados

3.1. Introducción a métodos aleatorizados

A grandes rasgos, se puede definir a los métodos de *apportionment* aleatorizados de la siguiente forma general:

Definición 3.1. Un método de *apportionment* aleatorizado A es una función que toma un vector de votos $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ y una cantidad de bancas $H \in \mathbb{N}$ y retorna un vector aleatorio $A(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H , e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido.

Dado que nos interesará particularmente buscar métodos que satisfagan la propiedad quota, consideraremos una familia específica de métodos aleatorizados: los *quota-compliant*. Para definirlos, consideramos un escenario análogo al del comienzo: $n \in \mathbb{N}$ partidos, $H \in \mathbb{N}$ bancas, $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ vector de votos y $\vec{q} \in (0, H]^n$ vector de quotas (calculado a partir de la *Hare-Quota*, con $q_i = \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)}$). Introducimos ahora

- $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ vector de restos, con $p_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor$. Observamos que $0 \leq p_i < 1 \forall 1 \leq i \leq n$
- Para un conjunto S y $k \in \mathbb{N}$, definimos $\binom{S}{k} := \{T \subseteq S / |T| = k\}$

Los métodos aleatorizados *quota-compliant* serán aquellos que asignen, en primer lugar, $\lfloor q_i \rfloor$ bancas a cada partido $i \in [n]$ (al igual que los métodos de quota), y luego utilicen los restos $p_i \in [0, 1)$ como probabilidades de asignación (los llamaremos también probabilidades marginales) para determinar a qué partidos asignarles las bancas remanentes.

Como en la primera etapa se asignan $\sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor$ bancas, denominamos

$$k = \sum_{i=1}^n p_i = H - \sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor \in 0, \dots, n-1$$

a la cantidad de bancas pendientes de ser repartidas. De esta forma, los métodos aleatorizados *quota-compliant* buscarán elegir de forma aleatoria un conjunto $S \in \binom{[n]}{k}$ de los partidos a los que se les asignarán las bancas remanentes. Esta elección deberá respetar, de alguna forma, las probabilidades p_i . El primer requisito con el cual impondremos la condición de que se respeten estas probabilidades es una condición definida por Grimmet en [Gri04]: la *proporcionalidad Ex-Ante*, que establece que la cantidad esperada de bancas que recibe un partido debe ser q_i .

Consideraremos las funciones de redondeo aleatorizado que definiremos a continuación, introduciendo primero la siguiente definición para simplificar notación:

Definición 3.2. (Simplex de probabilidades)

Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$. El *simplex de probabilidades* n -dimensional es

$$\Omega_n := \{\vec{w} \in [0; 1]^n : w_+ = 1\}$$

Su reescalamiento por k es

$$\Omega_n^k := \{\vec{w} \in (0; 1)^n : w_+ = k\}$$

Con esta notación, los vectores de restos \vec{p} que consideraremos serán los pertenecientes al simplex de probabilidades reescalado Ω_n^k .

Definición 3.3. Una regla de *redondeo* aleatorio r es una función que toma un vector de residuos $\vec{p} \in \Omega_n^k$, y le asigna un conjunto aleatorio $r(\vec{p}) \in \binom{[n]}{k}$ que representa el conjunto de los k partidos seleccionados. Además, la probabilidad de que el partido i esté en el conjunto seleccionado $r(\vec{p})$ debe ser igual a $p_i \forall i \in [n]$.

Una manera de reformular el problema es pensar en buscar $X_i \in \{0, 1\} / \sum_{i=1}^n X_i = K \wedge \mathbb{E}[X_i] = p_i$. La distribución del vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ estará dada por algún algoritmo aleatorizado, es decir, $r(\vec{p}) = \{i \in [n] : X_i = 1\}$. para algún método r .

Existe una correspondencia biunívoca entre métodos de *apportionment quota-compliant* y proporcionales *ex-ante* y reglas de redondeo aleatorio: en efecto, dado $\vec{p} \in \Omega_n^k$, un método a asignará un vector $a(\vec{p}, k) \in \{0, 1\}^n$ que suma k (por ser *quota-compliant* las coordenadas del vector están en $\{0, 1\}$) que se puede interpretar como el subconjunto de k elementos seleccionados de entre $\{1, \dots, n\}$. Por ser *ex-ante*, se verifica la condición de las probabilidades marginales: $\mathbb{E}[a(\vec{p}, k)_i] = p_i$. De igual forma, dado un vector de votos \vec{v} y una cantidad de bancas $H \in \mathbb{N}$, siguiendo la idea enunciada anteriormente, se puede asignar inicialmente $\lfloor q_i \rfloor$ bancas a cada partido $i \in [n]$, y luego utilizar un método de redondeo r para asignar las k bancas restantes de acuerdo al vector de restos \vec{p} . De esta forma, el método de *apportionment* resultante verifica *quota* y *ex-ante*.

Esta correspondencia permite conectar al problema de *apportionment* con un problema propio del mundo de la matemática estadística, conocido como *fps* ("probability proportional to size") sampling sin reposición, de donde [Cor+24] extrae algunos métodos para analizar. Esencialmente, este área trata el mismo problema que intentamos abarcar ahora: samplear un conjunto $S \in \binom{[n]}{k}$ respetando las probabilidades marginales dadas por p_i .

3.1.1. Propiedades fundamentales para métodos aleatorizados

Definición 3.4. (Proporcionalidad Ex-ante) Reformulamos esta propiedad para métodos de *redondeo*:

Una regla de *redondeo* r se dice *proporcional Ex-ante* si $\forall \vec{p} \in \Omega_n^k$, se tiene que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{i \in r(\vec{p})\}}] = p_i \forall i \in [n]$. Es decir, la cantidad esperada de bancas extra asignadas a cada partido se corresponde con su resto p_i .

Definición 3.5. (Monotonía de selección)

Una regla de *redondeo* r verifica la propiedad de *monotonía de selección* si dados $T \in \binom{[n]}{k}$ un conjunto de k partidos, y $p, p' \in [0, 1]^n$ dos vectores de residuos que suman k tales que $p'_i \geq p_i \forall i \in T \wedge p'_i \leq p_i \forall i \notin T$, se tiene que

$$\mathbb{P}_{S \sim r(p')}[S = T] \geq \mathbb{P}_{S \sim r(p)}[S = T]$$

Definición 3.6. (Monotonía fuerte de selección)

Una regla de redondeo r verifica la propiedad de **monotonía de selección** si dados $T \subseteq [n]$ tal que $|T| \leq k$, y $p, p' \in [0, 1]^n$ dos vectores de residuos que suman k tales que $p'_i \geq p_i \forall i \in T \wedge p'_i \leq p_i \forall i \notin T$. Entonces

$$\mathbb{P}_{S \sim r(\vec{p}')}[T \subseteq S] \geq \mathbb{P}_{S \sim r(\vec{p})}[T \subseteq S]$$

3.2. Ejemplos

3.2.1. Método de Grimmett (2004) - *Systematic rounding*

Se podría decir que este método es el más "natural" que a uno se le ocurriría a la hora de diseñar un sistema aleatorizado *quota-compliant*, propuesto por [Gri04]: reordenando los partidos de forma aleatoria, se le asigna a cada partido un intervalo de longitud igual a su resto p_i (con p_i el resto del partido i luego del reordenamiento), colocando los intervalos uno a continuación del otro en el intervalo $[0, k]$, que, como $p \in \Omega_n^k$, resulta completamente cubierto por los intervalitos. Llamamos $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$.

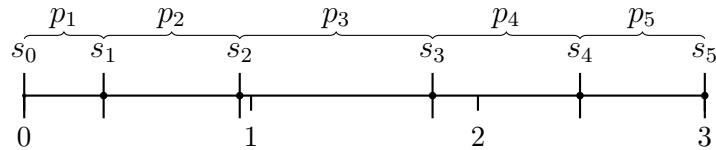


Figura 3.1: Segmento ilustrativo de la disposición inicial del método de Grimmett, con $n = 5$ y $k = 3$. La longitud de los segmentos $[s_{i-1}, s_i]$ es p_i para $i \in \{1, \dots, 5\}$. Los puntos s_i están ubicados en las posiciones $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$.

Posteriormente, se sortea una variable $U \sim \text{Unif}[0, 1]$, y se desplazan los puntos s_i a $s'_i = s_i + U$. Los intervalos $[s'_{i-1}, s'_i]$ son iguales a los originales desplazados en U , por lo que siguen midiendo p_i , y la probabilidad de que contengan un entero es proporcional a p_i . De esta forma, asignando las bancas a los partidos cuyos intervalos contengan un entero se tiene una asignación de las k bancas pendientes de ser repartidas, puesto que en el intervalo $[U, k+U]$ hay exactamente k enteros.

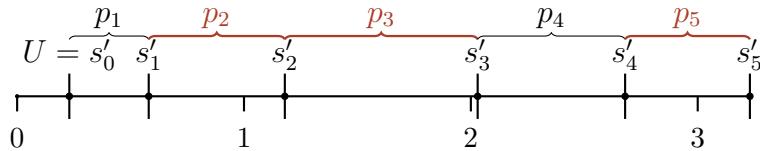


Figura 3.2: Segmento ilustrativo de la disposición final del ejemplo anterior. Los segmentos $[s'_{i-1}, s'_i]$ fueron desplazados en U . Marcados en rojo se encuentran los segmentos que contienen a un entero, correspondientes a los partidos 2, 3 y 5.

3.2.2. Formulación como problema de optimización de medida

Pensando en que estamos buscando algoritmos aleatorizados que seleccionen conjuntos de k partidos verificando cumplir con las probabilidades marginales dadas por p_i , podemos

pensar en que estamos buscando distribuciones de probabilidad sobre un espacio muestral dado por los conjuntos $S \in \binom{[n]}{k}$. Si además buscamos que dicha distribución sea un punto extremal de algún funcional g sobre el espacio de medidas definidas en $\binom{[n]}{k}$, se abre la posibilidad de construir un método de distribución de bancas a partir de buscar las probabilidades de selección de cada conjunto encontrando una solución factible del siguiente problema:

Encontrar $\mu : \binom{[n]}{k} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ solución de

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} g(\mu) \\ \text{s.a. } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1 \\ \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \end{array} \right. \end{aligned}$$

A partir de este planteo, surge la siguiente serie de preguntas:

- ¿Qué g se puede elegir para que la medida inducida por el algoritmo de *Sampford* sea la solución óptima? Sabemos que dicha medida es factible.
- Más en general, ¿qué g se puede elegir para encontrar una medida que verifique *monotonía de selección*?
- ¿Existe algún modo de enunciar la propiedad de *monotonía de selección* a partir de μ_A , p_i y p'_i de forma lineal como para introducirla en forma de restricción?
- ¿Tendría sentido que el funcional g busque minimizar la distancia con respecto a la medida inducida por el algoritmo de *Sampford*?

Vale observar que la primera restricción es innecesaria, pues si sumamos la segunda restricción sobre $i \in [n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) &= \sum_{i=1}^n p_i \\ k \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) &= k, \end{aligned}$$

pues del lado izquierdo estamos contando k veces cada conjunto (1 vez por cada elemento que contiene, es decir, k veces en total), y del lado derecho nos queda la suma de los p_i que es exactamente k .

Dividiendo por k a ambos lados, se tiene la primera restricción:

$$\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1$$

Es importante ver que, más allá de cuál sea la función objetivo g , existe una única solución para los casos en los que $k \in \{1, n-1\}$, pues en ambos casos el sistema resultante de las restricciones es lineal de $n \times n$ y de rango n . En consecuencia, hay solamente una solución factible, dada por $\mathbb{P}_p(S = \{i\}) = p_i$ en el caso de $k = 1$, o por $\mathbb{P}_p(S = [n] \setminus \{i\}) = 1 - p_i$ en el caso de $k = n-1$. Además, para estos dos valores de $k \in \{1, n-1\}$, la linealidad sobre los p_i provoca que cualquier método verifique *monotonía de selección*.

Por otro lado, incorporación de la restricción provoca que automáticamente se verifique *proporcionalidad Ex-Ante* para cualquier solución de este problema, por lo que el interés sobre métodos fabricados a partir de esta formulación radicará en verificar si cumplen *monotonía de selección* para $k \notin \{1, n-1\}$.

3.2.3. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía

Propuesto como método de πps por [CDL94] y retomado como método de *apportionment* en [Cor+24], este método consiste en hacer exactamente el planteo de la sección anterior, utilizando como función objetivo la entropía de la distribución, dada por

$$H(S) = \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) \frac{1}{\log(\mu(B))}$$

donde $S \in \binom{[n]}{k}$ tiene distribución dada por μ .

A la hora de pensar en la motivación de este método surge la duda de por qué se busca maximizar la entropía. Considerando que la entropía cuantifica la cantidad de información o incertidumbre a priori que se tiene sobre los resultados posibles al samplear de una distribución, en cierta forma se está buscando tener "la menor cantidad información a priori" sobre qué subconjunto de k partidos será seleccionado. En otras palabras, es un modo de intentar maximizar la incertidumbre previa que se tiene acerca de qué partidos serán seleccionados, siempre sujetos a la restricción de las probabilidades condicionales.

[SV13] y [CDL94] caracterizan a esta distribución como una distribución producto: la solución del problema verifica que

$$\mu(S) = \prod_{i \in S} \lambda_i,$$

con $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ obtenido mediante la formulación dual del problema.

Otra forma en la que [CDL94] caracteriza a esta distribución es la que le da el nombre de *Conditional Poisson Rounding*: se definen variables $Z_i \sim Bernoulli(p_i)$ independientes (Poisson Trial), y la distribución del vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ como la distribución del vector Z condicional a que $\sum_{i=1}^n Z_i = k$. De esta forma, se construye el conjunto de partidos seleccionados a partir de un *Poisson Trial* condicionado a tener exactamente k elementos.

Las 3 formas equivalentes de definir este método brindan un sistema *quota-compliant* y *proporcional ex-ante*: por construcción resulta automáticamente *quota-compliant*, y la restricción de las probabilidades marginales en la formulación de máxima entropía lo hace *proporcional ex-ante*. Cabe preguntarse ¿verificará también *monotonía de selección*? Lo veremos en la próxima sección.

Una cuestión importante relativa a este método es el hecho de que depende fuertemente de ser computado mediante algún solver de optimización, dado que no hay forma analítica de encontrar la distribución de máxima entropía. Si bien en [Cor+24], citando

a [Til25], proponen encontrar el vector $\vec{\lambda}$ utilizando el método de Newton, esta solución tampoco resulta exacta. Esto provoca que siempre exista un grado de imprecisión en la distribución encontrada, propia del error numérico de los solvers computacionales y los métodos numéricos como Newton.

3.2.4. Algoritmo de Sampford (67')

Introducimos el algoritmo de *rounding* introducido por Sampford [SAM67]. En la siguiente sección analizaremos las propiedades que cumple, siguiendo el trabajo de [Cor+24].

Algoritmo 3: Sampford

Resultado: Encontrar un conjunto aleatorio de K partidos de acuerdo a las probabilidades marginales dadas por p_i , con reposición

```

1 Inicializamos  $S = \{\}$  ;
2 Samplear un elemento con probabilidad proporcional a  $p_i$  y asignarle una banca
    agregándolo a  $S$ ;
3 Reponer el elemento;
4 Para  $1 \leq j \leq K - 1$  hacer
5   | Samplear un elemento con probabilidad proporcional a  $\frac{p_i}{1-p_i}$  y agregarlo a  $S$ ;
6   | Reponer;
7 fin
8 Si  $|S| = K$  entonces
9   | return  $S$ ;
10 fin
11 Sino
12   | Reiniciar todo el procedimiento ;
13 fin
```

La intuición de definir las probabilidades de los sampleos $2, \dots, k$ proporcionales a $\frac{p_i}{1-p_i}$ no es para nada clara. No obstante, veremos que al ser sampleo sin reposición, la utilización de estas probabilidades resulta en que el método sea *proporcional ex-ante*. Una desventaja de este método es que no tiene una cota estricta en la cantidad de iteraciones que realiza, puesto que en cada ejecución hay probabilidad positiva de seleccionar 2 veces un mismo elemento, ocasionando que se deba reiniciar el procedimiento.

Como bien observan en [Cor+24], la rareza – o el ingenio – de este método radica en la elección de las probabilidades de sampleo: si los k elementos fueran elegidos con probabilidades proporcionales a $\frac{p_1}{1-p_i}$, se tendría una distribución producto en la que la probabilidad de seleccionar a un conjunto A sería proporcional a $\prod_{i \in A} \frac{p_i}{1-p_i}$. Por el resultado de [SV13], esta distribución producto correspondería a una distribución de máxima entropía, pero con probabilidades marginales erróneas. Lo extraño es que, sabiendo que no hay forma analítica de encontrar una fórmula cerrada para deducir las probabilidades de *Conditional Poisson Rounding*, simplemente corrigiendo las probabilidades de selección del primer elemento por p_i en lugar de $\frac{p_i}{1-p_i}$, se consigue que las probabilidades marginales sean las deseadas (y por ende, que el método sea *proporcional ex-ante*, como demostraremos en la próxima sección).

3.2.5. Algoritmo de Brewer (63')

Propuesto en [Bre08], este algoritmo tampoco goza de demasiada transparencia a la hora de entender la forma en la que se redefinen iterativamente las probabilidades de sampleo.

Algoritmo 4: Brewer

Resultado: Encontrar un conjunto aleatorio de K partidos de acuerdo a las probabilidades marginales dadas por p_i , sin reposición

- 1 Inicializamos $S = \{\}$, $N = \{1, \dots, n\}$;
 - 2 **Para** $t = k, \dots, 1$ **hacer**
 - 3 Definir $q_i = \frac{p_i}{\sum_{j \in N} p_j} \quad \forall i \in N$;
 - 4 Seleccionar i con probabilidad proporcional a $\frac{q_i(1-q_i)}{1-tq_i}$;
 - 5 $N = N \setminus \{i\}$;
 - 6 **fin**
 - 7 **return** S ;
-

Introducimos este último algoritmo por el hecho de que fue objeto de estudio durante la presente tesis: nos interesará conocer si verifica *monotonía de selección*.

3.3. Resultados sobre métodos aleatorizados

En esta sección nos dedicaremos a analizar qué propiedades verifican los métodos enunciados anteriormente. Principalmente nos interesarán los métodos que verifiquen *monotonía de selección*, puesto que por construcción sabemos que todos los métodos verifican *quota*, y también hemos visto que varios de ellos verifican *proporcionalidad ex-ante*.

3.3.1. Método de Grimmett - *Systematic rounding*

Hemos visto que este método verifica *proporcionalidad ex-ante*. Para mostrar que no verifica *monotonía de selección*, tomaremos el contraejemplo propuesto en [Cor+24] en la isla ficticia de *Apportia*. Se propone un escenario en el que se reparten 11 bancas entre 6 partidos pertenecientes a dos coaliciones políticas distintas: 3 de ellos de izquierda, los 3 restantes de derecha. Para ver que no se cumple *monotonía de selección*, basta mostrar una forma de modificar los perfiles de votos, trasladando votos propios de la coalición de izquierda a la coalición de derecha, y viendo que a pesar de que la izquierda pierde votos, la probabilidad de que las 3 bancas sean asignadas a los partidos de dicha coalición aumenta.

Partido	Coalición	Elección anterior			Nueva elección			
		Votos	Quota inf.	Resto	Votos	Quota inf.	Residuo	
1	izquierda	110	1	0.1	110	1	0.1	
2	derecha	270	2	0.7	(+20)	290	2	0.9
3	izquierda	210	2	0.1	210	2	0.1	
4	derecha	160	1	0.6	(+30)	190	1	0.9
5	izquierda	70	0	0.7	(-60)	10	0	0.1
6	derecha	280	2	0.8	(+10)	290	2	0.9

Tabla 3.1: Compración de votos y restos entre elecciones. Extraído de [Cor+24].

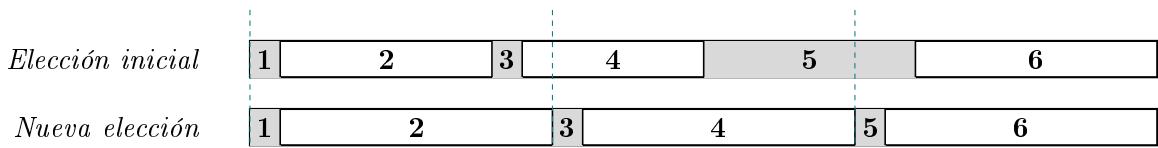


Figura 3.3: Ilustración del método de Grimmett para dos elecciones. Los intervalos correspondientes a partidos de izquierda están sombreados en gris. Las líneas punteadas indican las posiciones de los enteros antes del desplazamiento aleatorio. Extraído de [Cor+24]

En el escenario original, la coalición izquierda tiene aseguradas 3 bancas, mientras que la de derecha tiene 5. Resta asignar 3 bancas aleatoriamente, utilizando el método de Grimmett. Para que la coalición de izquierda consiga mayoría absoluta requiere las 3 bancas en disputa, pero esto solo puede suceder si al permutar los partidos aleatoriamente y sortear la variable $Unif[0, 1]$ los intervalos correspondientes a los partidos 1, 3 y 5 contienen un entero. Esto requiere que, en particular, los partidos 1 y 3 tengan sus puntos iniciales a una o dos unidades de distancia, lo cual no es posible dados los restos de los demás partidos: se debería tener un subconjunto de los partidos restantes que sumen 0.9 o 1.9, imposible. Por ende, vemos que en el escenario inicial resulta imposible que la coalición de izquierda tenga mayoría absoluta, ie, la probabilidad de que obtenga las 3 bancas en disputa el conjunto de los partidos 1, 3 y 5 es 0.

Ahora bien, con la nueva distribución de votos, vemos que las quotas inferiores de todos los partidos permanecen constantes, pero los restos cambian. Si el ordenamiento de los intervalos se produce como se muestra en la parte inferior de la figura 3.3, la coalición de izquierda, a pesar de haber perdido votos y por ende haber disminuido los restos, ahora tiene una probabilidad de 0.1 de obtener las 3 bancas si la variable uniforme sampleada $U \in [0.9; 1]$. A pesar de que esto sucede solo con dos ordenamientos (el de la parte inferior de la imagen, dado por $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, y $(2, 1, 3, 4, 6, 5)$), el hecho de que la probabilidad de asignar las 3 bancas en disputa a los partidos de la coalición izquierda sea positiva hace que nos encontremos ante una paradoja: una pérdida de votos de la coalición izquierda provoca que aumente su probabilidad de recibir todas las bancas en disputa, y por ende tener mayoría absoluta de bancas.

3.3.2. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía

Como ya mencionamos anteriormente, este método verifica la *proporcionalidad ex ante* por construcción. Lamentablemente, observando la *Proposición 3.4* de [Cor+24],

se comprueba que no cumple *monotonía de selección*. El contraejemplo mostrado, para $n = 6$ y $k = 3$, fue encontrado computacionalmente utilizando aritmética racional; más en particular el módulo Fractions de Python, puesto que de esta forma se consiguió evitar el error numérico. Una observación importante es que el hallazgo de este contraejemplo debió haber sido a la inversa de lo que uno esperaría: no se buscó primero los vectores \vec{p} y \vec{p}' para luego hallar sus distribuciones de máxima entropía y ver que no cumplían *monotonía de selección*, sino que primero se buscaron vectores $\vec{\lambda}$ y $\vec{\lambda}'$ que definieran la distribución producto, para luego calcular los vectores \vec{p} y \vec{p}' de probabilidades marginales. Esto permitió trabajar con distribuciones de máxima entropía exactas.

Los vectores $\vec{\lambda}$ y $\vec{\lambda}'$ hallados fueron los siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda} = & (99620001435175085845613951348591, 33206667145059699577734936400435, \\ & 33206667145059699577734936400435, 23244667001544291253373835102276586, \\ & 23244667001544291253373835102276586, 1660333357252963458777541885429371)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}' = & (99620001435175193801835755646020, 33206667145059681577227243883092, \\ & 33206667145059681577227243883092, 23244667001544299141767505142336500, \\ & 23244667001544299141767505142336500, 1660333357252962147206216649823732)\end{aligned}$$

Normalizando por las constantes N y N' adecuadas, estos vectores definen probabilidades marginales \vec{p} y \vec{p}' tales que $p_1 \leq p'_1$, $p_2 \leq p'_2$, $p_3 \leq p'_3$, $p_4 \geq p'_4$, $p_5 \geq p'_5$, $p_6 \geq p'_6$, y sin embargo la probabilidad de selección del conjunto $\{1, 2, 3\}$ es mayor con \vec{p} que con \vec{p}' :

$$\frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{N} \geq \frac{\pi'_1 \pi'_2 \pi'_3}{N'},$$

Este resultado nos motiva a descartar el método de máxima entropía, en vistas de encontrar algún otro método que satisfaga *monotonía de selección*.

3.3.3. Algoritmo de Sampford

Dado que no es trivial ver que este método resulta *proporcional ex-ante*, procederemos a demostrarlo. Para esto, primero calcularemos la probabilidad de seleccionar un subconjunto $A \in \binom{[n]}{k}$ en particular.

Llamando $S \sim r(\cdot)$ al conjunto returned por el algoritmo de Sampford, tenemos, por la definición de las probabilidades en el algoritmo, que la probabilidad de seleccionar a un conjunto A es particular es la probabilidad de elegir algún elemento de A en el primer sampleo, con probabilidad p_i , multiplicado por la probabilidad de elegir al resto de los elementos de A en los sampleos subsiguientes, con probabilidades $\frac{p_j}{1-p_j}$. Ahora, esta cantidad se debe normalizar por la probabilidad de elegir cualquier otro subconjunto de cardinal k .

La segunda igualdad resulta de multiplicar numerador y denominador por $\prod_{j \in [n]} (1 - p_j)$. La tercera es simplemente meter el factor p_i dentro de la primera productoria, y sacar el factor $(1 - p_i)$ de la segunda productoria.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = A) &= \frac{\sum_{i \in A} p_i \prod_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{p_j}{1-p_j}}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} p_i \prod_{j \in B \setminus \{i\}} \frac{p_j}{1-p_j}} \\
&= \frac{\sum_{i \in A} p_i \prod_{j \in A \setminus \{i\}} p_j \prod_{j \notin (A \setminus \{i\})} (1-p_j)}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} p_i \prod_{j \in B \setminus \{i\}} p_j \prod_{j \notin (B \setminus \{i\})} (1-p_j)} \\
&= \frac{\sum_{i \in A} (1-p_i) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)}
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos una expresión para $\mathbb{P}(S = A)$.

Utilizaremos el siguiente lema, que nos permitirá reescribir el denominador de la expresión anterior de forma estratégica para demostrar la *proporcionalidad ex-ante*:

Lema 3.7.

$$\begin{aligned}
&\sum_{A \in \binom{[n]}{k-1}} \sum_{i \notin A} p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j) = \\
&\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)
\end{aligned}$$

Prueba: Dados $A \in \binom{[n]}{k-1}$ e $i \notin A$, hay exactamente un término en la sumatoria izquierda con la forma

$$s := p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)$$

INSERTAR DIBUJITO ACÁ

A su vez, considerando el conjunto $B := A \cup \{i\} \in \binom{[n]}{k}$, en la sumatoria de la derecha se tiene el término

$$\begin{aligned}
t &:= (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j) \\
&= (1-p_i) \prod_{j \in A \cup \{i\}} p_j \prod_{j \notin A \cup \{i\}} (1-p_j) \\
&= \prod_{j \in A} p_j \cdot p_i \prod_{j \notin A} (1-p_j) \\
&= s
\end{aligned}$$

Luego, considerando la relación biyectiva dada por

$$\begin{aligned}
\left\{ (A, i) : A \in \binom{[n]}{k-1}, i \notin A \right\} &\rightarrow \left\{ (B, i') : B \in \binom{[n]}{k}, i \in B \right\} \\
(A, i) &\rightarrow (A \cup \{i\}, i)
\end{aligned}$$

se ve que podemos asociar de manera biunívoca cada sumando de la izquierda con uno igual del lado derecho, y por lo tanto

$$\sum_{A \in \binom{[n]}{k-1}} \sum_{i \notin A} p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j) = \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)$$

□

Proposición 3.8. *El algoritmo de Sampford verifica proporcionalidad ex-ante, ie $\mathbb{E}_r[X_i] = p_i$, con $r : \Omega_n^k \rightarrow \binom{[n]}{k}$ el algoritmo de Sampford, $\vec{p} \in \Omega_n^k$ y $X_i = \mathbb{1}_{\{i \in S\}}$.*

Prueba: Sin pérdida de generalidad, calculamos $\mathbb{P}(1 \in S)$, con $S \sim r(\cdot)$ el output del algoritmo de Sampford.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 \in S) &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \mathbb{P}(S = A) \\ &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \frac{(\sum_{i \in A} (1-p_i)) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \left(\sum_{i \in B} (1-p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} (\sum_{i \in A} (1-p_i)) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \underbrace{\left(\sum_{i \in B} (1-p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)}_{\sum_{i \in B} (1-p_i) = \sum_{i \notin B} (p_i)} \quad (*)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Obs.: Observamos que llamando $H := [n] \setminus \{1\}$, existe biyección entre $\{B : B \in \binom{[n]}{k}, 1 \notin B\}$ y $\{S : S \in \binom{H}{k}\}$, dada por la identidad. Además, considerando $S \in \binom{H}{k}$, $S = B$, se tiene

$$\sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j) = (1-p_1) \sum_{i \in S} (1-p_i) \prod_{j \in S} p_j \underbrace{\prod_{j \notin S} (1-p_j)}_{\text{no contiene a } (1-p_1), \text{ pues } S \in H}$$

Luego, reescribiendo $(*)$ y usando el *Lema 3.7*, tenemos

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \notin B}} \left(\sum_{i \in B} (1 - p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1 - p_j) \\
&\xrightarrow{\text{Obs. 3.7}} (1 - p_1) \sum_{S \in \binom{H}{k}} \sum_{i \in S} (1 - p_i) \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&\xrightarrow{\text{Lema 3.7}} (1 - p_1) \sum_{S \in \binom{H}{k-1}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&= \frac{(1 - p_1)}{p_1} \sum_{S \in \binom{H}{k-1}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S \cup \{i\}} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&= \frac{(1 - p_1)}{p_1} \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j)
\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Trabajo realizado

4.1. Resultados

4.1.1. Idea de distribución con orden lexicográfico sobre subconjuntos de cardinal k

Pensando en el problema de optimización de medidas, se podría poner como función objetivo una función que, dados los partidos ordenados decrecientemente por remainders, le asigne mayor peso a los subconjuntos de k elementos que aparecen antes en orden lexicográfico. Es decir, dados $\{A_1, \dots, A_{\binom{n}{k}}\}$ ordenados lexicográficamente, buscamos μ solución de:

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} 2^{\binom{n}{k}-j+1} \mu(A_j) \\ \text{s.a. } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1 \\ \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \end{array} \right. \end{aligned}$$

Este método no satisface *monotonía de selección*. Basta ver el siguiente contraejemplo para $n = 5$ y $k = 2$:

$$\begin{aligned} p &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.25, 0.25) \\ p' &= (0.5, 0.25, 0.5, 0.25, 0.5) \end{aligned}$$

En este escenario, la distribución por orden lexicográfico para p asigna probabilidades dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(S = \{1, 2\}) &= 0.5 \\ \mathbb{P}_p(S = \{3, 4\}) &= 0.25 \\ \mathbb{P}_p(S = \{3, 5\}) &= 0.25 \end{aligned}$$

Al modificar las probabilidades marginales según p' , observamos que p_5 aumenta y p_2 disminuye, provocando que p' tenga los mismos valores que p pero desordenados. Como la probabilidad de selección de cada conjunto de partidos depende de la posición de las probabilidades de dichos partidos en el vector de probabilidades marginales. Al ordenar

decrecientemente p' según los residuos, los valores quedan ordenados exactamente igual que los de p , por lo que se le asignará probabilidad de 0 al conjunto $\{3, 5\}$ (puesto que en el caso de p se le asignaba probabilidad 0 al conjunto de los partidos 2 y 3) si se ubica la probabilidad del partido 5 en la posición 2. Como hay empate entre los partidos correspondientes a las primeras tres coordenadas (los partidos 1, 5 y 3) con probabilidad 0.5, algo que se podría hacer es sortear aleatoriamente la forma de ordenarlos, entre todas las permutaciones posibles. En ese caso, con probabilidad $1/3$ los partidos 3 y 5 quedarían en las primeras dos posiciones, y en ese caso tendrían probabilidad 0.5 de ser seleccionados (cualquier otra permutación le asignaría probabilidad 0 a dicho conjunto). En cualquier caso, la probabilidad de seleccionar al conjunto $\{3, 5\}$ partiendo de las probabilidades dadas por p' resulta 0 ó $1/6$, en ambos casos menor que 0.25, que era la probabilidad de selección de acuerdo a p .

Una de las características principales de esta formulación es que busca encontrar una distribución como solución de un problema de optimización lineal. Sabemos que esta formulación no lleva a una solución que verifique *selection monotonicity*, pero quizás esto es ocasionado por la elección de coeficientes $2^{\binom{n}{k}-j+1}$, lo que nos lleva a preguntarnos: ¿existirán coeficientes c_i tales que la solución del problema de función objetivo $\max \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} c_i \mu(A_i)$ verifique *selection monotonicity*?

4.1.2. Soluciones del problema lineal no satisfacen selection monotonicity

A partir del razonamiento anterior, tratamos de demostrar que ninguna distribución de probabilidad sobre los conjuntos de $\binom{[n]}{k}$ obtenida como solución de un problema lineal verifica selection monotonicity. El problema concreto es el siguiente: Dada una indexación $\{A_1, \dots, A_n\}$ sobre el conjunto $\binom{[n]}{k}$, y $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ vector de coeficientes, resolver

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} c_j \mu(A_j) \\ \text{s.a. } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1 \\ \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \end{array} \right. \end{aligned}$$

4.1.3. Definir medida sobre $[n]$

La idea es, en lugar de definir una medida de probabilidad sobre $\binom{[n]}{k}$, definir una medida genérica (incluso puede ser signada) sobre $[n]$. Si llamamos μ a dicha medida, y $\mu_i := \mu(i) \quad \forall i \in [n]$, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i \in A} \mu_i \\ \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) &= p_i \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

Sumando la segunda condición sobre $i \in [n]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) \\
k &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \sum_{i \in A} \mu_i \\
k &= k \sum_{A \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in A} \mu_i \\
1 &= \binom{n-1}{k-1} \sum_{i=1}^n \mu_i \\
\implies \mu([n]) &= \sum_{i=1}^n \mu_i = \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

Partiendo de esta condición y operando, vemos que

$$\begin{aligned}
p_i &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) \\
&= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \sum_{i \in A} \mu_i \\
&= \binom{n-1}{k-1} * \mu_i + \binom{n-2}{k-2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \\
&= \binom{n-1}{k-1} * \mu_i + \binom{n-2}{k-2} (\mu([n]) - \mu_i) \\
&= \mu_i * (\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}) + \binom{n-2}{k-2} * \mu([n]) \\
&= \mu_i * (\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}) + \binom{n-2}{k-2} * \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \\
&= \mu_i * \frac{n-k}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{k-1}{n-1} \\
\implies \mu_i &= \frac{p_i - \frac{k-1}{n-1}}{\frac{n-k}{n-1} \binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

Para que esta distribución resulte una medida (y no una medida con signo), requerimos que

$$p_i \geq \frac{k-1}{n-1} \quad \forall i \in [n] \tag{4.1}$$

Resulta una condición muy restrictiva. Para corroborar que igualmente la condición es posible, sumándola sobre n vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &\geq n \frac{k-1}{n-1} \\ \iff k(n-1) &\geq n(k-1) \\ \iff n &\geq k \quad \checkmark \end{aligned}$$

Si (4.1) no se cumpliera, μ resultaría una medida con signo en lugar de una medida. Para que su restricción a $\binom{[n]}{k}$ resulte medida, se debe verificar que

$$\sum_{i \in A} \mu_i \geq 0 \quad \forall A \in \binom{[n]}{k}$$

Fácilmente se puede ver que, por ejemplo, tomando $p = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$, resulta $\mu(\{1, 2\}) = -\frac{1}{18} \leq 0$, y la medida resulta inútil.

La ventaja que tiene esta forma de definir μ es que, al tener linealidad sobre p_i (pues cada μ_i es lineal sobre p_i), las propiedades de *selection monotonicity* y *strong selection monotonicity* se verifican trivialmente.

4.1.4. Prueba exhaustiva de factibilidad de bases para el método de programación lineal

A la hora de encontrar un contraejemplo de selection monotonicity para el método de programación lineal con $n = 4$ y $k = 2$, hemos visto que si la base óptima no cambia, la solución óptima verifica selection monotonicity (demostrar esto). Por lo tanto, en esencia buscamos encontrar un vector p de probabilidades y un vector α de perturbaciones tales que, para dos bases B_1 y B_2 y cierto conjunto $S \in B_1 \cap B_2$ (S es un conjunto de partidos que está en ambas bases), se verifiquen las siguientes condiciones, definiendo previamente $p' = p + \sum_{j \in S} \alpha_j - \sum_{j \notin S} \alpha_j$ y s_1 y s_2 los índices del coto. S en las bases B_1 y B_2 resp.:

$$\begin{aligned} B_1^{-1}p \geq 0 &\quad \wedge \quad B_2^{-1}p' \geq 0 && \text{(factibilidad)} \\ B^{-1}p \not\geq 0 \quad \forall B \neq B_1 &\quad \wedge \quad B^{-1}p' \not\geq 0 \quad \forall B \neq B_2 && \text{(infactibilidad para otras bases)} \\ \sum_{i \in [n]} p_i = k &\quad \wedge \quad \sum_{i \in [n]} p'_i = k && \text{(buena definición de } p \text{ y } p') \\ 0 \leq p_i, p'_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] &&& \text{(buena definición de } p \text{ y } p') \\ (B_1^{-1}p)_{s_1} > (B_2^{-1}p')_{s_2} &&& \text{(} p \text{ y } p' \text{ rompen sel. mon.)} \end{aligned}$$

La condición de infactibilidad para otras bases establece que alguna de las coordenadas de $B^{-1} \cdot p$ debe ser negativa. Definiendo $s_i^B := (B^{-1} \cdot p)_i$, para una base $B \neq B_1$ requerimos:

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in [n]} (s_i^B < 0) \\ \iff \min_{y^B} \sum_{i \in [n]} y_i^B \cdot s_i^B < 0 \quad (\leq -\epsilon < 0), \quad \text{donde } y_i^B \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Las variables y_i^B nos indican cuáles de las coordenadas s_i^B verifican la condición buscada. Si el mínimo expresado arriba es efectivamente menor que 0, significa que alguna de las coordenadas $s_i^B = (B^{-1} \cdot p)_i$ es menor que 0.

Ahora, como requerimos que esta condición se verifique para toda base $B \neq B_1$, debemos verificar que se cumpla la siguiente condición:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{B \neq B_1} \left(\bigvee_{i \in [n]} (s_i^B < 0) \right) \\ \iff & \bigwedge_{B \neq B_1} \left(\min_{y^B} \sum_{i \in [n]} y_i^B \cdot s_i^B \leq -\epsilon \right) \\ \iff & \max_{B \neq B_1} \left(\min_{y^B} \sum_{i \in [n]} y_i^B \cdot s_i^B \right) \leq -\epsilon \end{aligned}$$

Esta expresión no pareciera ser directamente representable a partir de un conjunto de restricciones lineales/cuadráticas procesables por Gurobi. Planteamos una forma alternativa de representar la condición de infactibilidad para otras bases:

Para una base $B \neq B_1$, introducimos las variables $y_i^B \in \{0, 1\}, i \in [n]$, que van a funcionar como indicadoras de cuál coordenada de $B^{-1} \cdot p = s_i^B$ es la que toma un valor negativo. Introduciendo estas variables, junto con la restricción $\sum_{i \in [n]} y_i^B = 1$ para garantizar que se active solo una variable, se tiene que:

$$\bigvee_{i \in [n]} (s_i^B + \epsilon \leq 0) \tag{4.2}$$

$$\iff (s_i^B + \epsilon) \cdot y_i^B \leq 0 \quad \forall i \in [n] \tag{4.3}$$

De esta forma, la restricción se satisfará trivialmente para aquellos $i \in [n]$ para los cuales $y_i^B = 0$, y por la restricción extra introducida, habrá un único $j \in [n]$ tal que $y_j^B = 1$. Para dicho j , se deberá satisfacer $(s_j^B + \epsilon) \leq 0$.

En definitiva, para cada base $B \neq B_1$ se introducirán las restricciones:

$$\begin{aligned} & (s_i^B + \epsilon) \cdot y_i^B \leq 0 \quad \forall i \in [n] \\ & \sum_{i \in [n]} y_i^B \geq 1 \\ & y_i^B \in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n] \end{aligned}$$

Algunos resultados corriendo esto en Gurobi para $n = 4$ y $k = 2$:

4.1.5. Preguntas

• ¿Existe método de apportionment que verifique quota e incentive coaliciones? No existe. Basta tomar 5 partidos y 2 bancas, con remainders de $2/5$ para todos los partidos. Si un método incentiva coaliciones, al considerar la coalición de los dos partidos que efectivamente obtienen las bancas, dicha coalición debería obtener una cantidad de bancas mayor o igual a 2 (la suma de las bancas obtenidas por cada partido). A la vez, como la suma de los remainders es $4/5 < 1$, por quota, dicha coalición puede obtener a lo sumo 1

banca.

- ¿Todos los divisor methods violan quota? Por Balinski-Young, sí.
- Probar que *Ex-ante* implica que $\forall(A, B)$ par de partidos,

$$\mathbb{P}(AB \geq 1 + q_A + q_B) \geq \mathbb{P}(A + B \geq 1 + q_A + q_B)$$

$$\mathbb{P}(AB \geq 2 + q_A + q_B) \geq \mathbb{P}(A + B \geq 2 + q_A + q_B)$$

Sabemos que *Ex-ante* implica $\mathbb{E}[AB] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B]$

- Encontrar un método que verifique *Ex-ante* y *quota* tal que al hacer merge de dos partidos retorne una distribución de probabilidad lo más concentrada posible (minimizar varianza/entropía, o quizás minimizar el soporte de la distribución, es decir, la norma $\|\cdot\|_0$)

4.2. Ejemplos de cosas

- Ejemplo de population paradox con Hamilton: [BY01] pág. 69, tabla 8.1
- Desarrollo de mayoración: [Puk17] cap. 8

4.3. Títulos posibles

- "Una aproximación al problema de apportionment: métodos aleatorizados"
-
- "Una aproximación al problema de apportionment: métodos aleatorizados para distribución de bancas del congreso"
- "Una aproximación al problema de apportionment: análisis y propuestas de sistemas de distribución de bancas aleatorizados"
- "Una aproximación al problema de apportionment a través del análisis y propuestas de sistemas de distribución de bancas aleatorizados"
- "Una aproximación al problema de apportionment: distribuyendo las bancas del congreso aleatoriamente"

4.4. Cosas a corregir/agregar

- Terminar gráfico de elecciones en Apportia
- D -quota para referirse a $\frac{v_i}{D}$
- D'Hont favorece mayorías
- Métodos determinísticos optimales, distintas métricas de optimalidad y equivalencias con métodos existentes
- ¿Por qué selection monotonicity no se plantea en términos de los votos en lugar de los restos?
-

Bibliografía

- [BY76] Michel L. Balinski y H. Peyton Young. *The Jefferson Method of Apportionment*. Professional Paper PP-76-006. Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), 1976. URL: <http://pure.iiasa.ac.at/597/>.
- [BY01] Balinski y Young. *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Brookings Institution Press, 2001.
- [BY] Balinski y Young. *The Theory of Apportionment*. Brookings Institution Press.
- [BT97] D. Bertsimas y J. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. Athena Scientific, 1997. ISBN: 1886529191.
- [Bre08] K. Brewer. «A Model of Systematic Sampling with Unequal Probabilities». En: *Australian Journal of Statistics* 5 (feb. de 2008), págs. 5-13. DOI: [10.1111/j.1467-842X.1963.tb00132.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-842X.1963.tb00132.x).
- [Cau10] Michael J. Caulfield. «Apportioning Representatives in the United States Congress: Paradoxes of Apportionment». En: *Convergence* (nov. de 2010). Gannon University. DOI: [10.4169/loci003163](https://doi.org/10.4169/loci003163). URL: <https://doi.org/10.4169/loci003163>.
- [Cem+] Javier Cembrano et al. «New Combinatorial Insights for Monotone Apportionment». En: *Proceedings of the 2025 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, págs. 1308-1328. DOI: [10.1137/1.9781611978322.39](https://doi.org/10.1137/1.9781611978322.39). eprint: <https://pubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611978322.39>. URL: <https://pubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611978322.39>.
- [CDL94] XIANG-HUI CHEN, ARTHUR P. DEMPSTER y JUN S. LIU. «Weighted finite population sampling to maximize entropy». En: *Biometrika* 81.3 (sep. de 1994), págs. 457-469. ISSN: 0006-3444. DOI: [10.1093/biomet/81.3.457](https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.457). eprint: <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/81/3/457/713811/81-3-457.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.457>.
- [Cor+24] José Correa et al. *Monotone Randomized Apportionment*. 2024. arXiv: [2405.03687 \[cs.GT\]](https://arxiv.org/abs/2405.03687). URL: <https://arxiv.org/abs/2405.03687>.
- [Gri04] Geoffrey Grimmett. «Stochastic Apportionment». En: *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004), págs. 299-307. DOI: [10.1080/00029890.2004.11920078](https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078). eprint: <https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078>. URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078>.

- [Kur11] George Kurian. «Droop Quota». En: *The Encyclopedia of Political Science*. Ed. por George Kurian. SAGE Publications, Inc., Sage Knowledge Database. Washington, DC: CQ Press, 2011, págs. 451-451. DOI: [10.4135/9781608712434.n455](https://doi.org/10.4135/9781608712434.n455). URL: <https://sk.sagepub.com/ency/edvol/the-encyclopedia-of-political-science/chpt/droop-quota>.
- [PPR16] Antonio Palomares, Friedrich Pukelsheim y Victoriano Ramírez. «The whole and its parts: On the coherence theorem of Balinski and Young». En: *Mathematical Social Sciences* 83 (2016), págs. 11-19. ISSN: 0165-4896. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2016.06.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489616300397>.
- [Puk17] Friedrich Pukkelsheim. *Proportional Representation*. Springer, 2017.
- [SAM67] M.R. SAMPFORD. «On sampling without replacement with unequal probabilities of selection». En: *Biometrika* 54.3-4 (dic. de 1967), págs. 499-513. ISSN: 0006-3444. DOI: [10.1093/biomet/54.3-4.499](https://doi.org/10.1093/biomet/54.3-4.499). eprint: <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/54/3-4/499/624156/54-3-4-499.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/biomet/54.3-4.499>.
- [SV13] Mohit Singh y Nisheeth K. Vishnoi. *Entropy, Optimization and Counting*. 2013. arXiv: [1304.8108 \[cs.DS\]](https://arxiv.org/abs/1304.8108). URL: <https://arxiv.org/abs/1304.8108>.
- [Til25] Yves Tillé. «Sampling Algorithms». En: *International Encyclopedia of Statistical Science*. Ed. por Miodrag Lovric. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2025, págs. 2241-2242. ISBN: 978-3-662-69359-9. DOI: [10.1007/978-3-662-69359-9_545](https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_545). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_545.
- [Wilnd] Helen J. Wilson. «The D'Hondt Method Explained». En: *Mathematics Department, University College London* (n.d.). Disponible en el sitio web del Departamento de Matemáticas, UCL. URL: <https://www.ucl.ac.uk/~ucahhwi/dhondt.pdf>.

Apéndice A

En este apéndice realizaremos la demostración técnica de la sección 2: el Teorema de Coherencia [BY]