



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una aproximación al problema de *apportionment*:
métodos aleatorizados

Luca Zanelà

Director/a: José Correa Haeussler

Fecha de presentación: 19 de diciembre de 2025

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 5 |
| 1.1. Introducción al problema de <i>apportionment</i> | 5 |
| 1.1.1. Código de las pruebas computacionales | 7 |
| 1.2. Marco del problema | 7 |
| 1.2.1. Propiedades deseables | 8 |
| 1.3. Algunos métodos típicos | 10 |
| 1.3.1. Método de Hamilton | 11 |
| 1.3.2. Método de Jefferson/D'Hondt | 11 |
| 1.3.3. Método de Webster/Saint-Laguë | 13 |
| 1.4. Paradojas y falencias de los métodos típicos | 13 |
| 1.4.1. Paradoja de Alabama | 13 |
| 1.4.2. Paradoja de nuevos estados | 14 |
| 1.4.3. Paradoja de población | 15 |
| 1.4.4. D'Hondt y Webster no cumplen <i>quota</i> | 15 |
| 1.4.5. Reflexiones acerca de los métodos típicos | 16 |
| 2. Desarrollo teórico | 17 |
| 2.1. Métodos de divisor | 17 |
| 2.2. Métodos de quota | 22 |
| 2.2.1. Métodos shift-quota | 22 |
| 2.3. Resultados principales del área | 23 |
| 2.4. Conclusiones y algunos resultados extra | 25 |
| 3. Métodos aleatorizados | 27 |
| 3.1. Introducción a métodos aleatorizados | 27 |
| 3.1.1. Propiedades fundamentales para métodos aleatorizados | 28 |
| 3.2. Ejemplos | 29 |
| 3.2.1. Método de Grimmett (2004) - <i>Systematic rounding</i> | 29 |
| 3.2.2. Formulación como problema de optimización de medida | 29 |
| 3.2.3. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía | 31 |
| 3.2.4. Algoritmo de Sampford (67') | 32 |
| 3.2.5. Algoritmo de Brewer (63') | 33 |
| 3.3. Resultados sobre métodos aleatorizados | 33 |
| 3.3.1. Método de Grimmett - <i>Systematic rounding</i> | 33 |
| 3.3.2. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía | 34 |

| | |
|--|-----------|
| 3.3.3. Algoritmo de Sampford | 35 |
| 3.3.4. Algoritmo de Brewer | 38 |
| 4. Trabajo realizado | 39 |
| 4.1. Función objetivo lineal con pesos decrecientes por orden lexicográfico sobre subconjuntos de cardinal k | 39 |
| 4.2. Funciones objetivo lineales | 41 |
| 4.2.1. Análisis con base fija | 41 |
| 4.2.2. Análisis con cambio de base | 45 |
| 4.3. Definir medida sobre $[n]$ | 48 |
| 4.4. Preguntas | 50 |
| 4.5. Ejemplos de cosas | 51 |
| 4.6. Temas a charlar en la reu | 51 |
| 4.7. Títulos posibles | 51 |
| 4.8. Cosas a corregir/agregar | 51 |
| 4.9. Cosas sacadas (se pueden volver a agregar) | 52 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Ejemplo de secuencia de saltos espuria, con $s(0) = 0; s(i) = 1 - \frac{1}{i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. | 18 |
| 2.2. Ejemplo de secuencia de saltos estacionaria con $r = \frac{1}{2}$: $s_r(i) = i - \frac{1}{2}$. | 19 |
| 3.1. Segmento ilustrativo de la disposición inicial del método de Grimmett, con $n = 5$ y $k = 3$. La longitud de los segmentos $[s_{i-1}, s_i]$ es p_i para $i \in \{1, \dots, 5\}$. Los puntos s_i están ubicados en las posiciones $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$. | 29 |
| 3.2. Segmento ilustrativo de la disposición final del ejemplo anterior. Los segmentos $[s'_{i-1}, s'_i]$ fueron desplazados en U . Marcados en rojo se encuentran los segmentos que contienen a un entero, correspondientes a los partidos 2, 3 y 5. | 29 |
| 3.3. Ilustración del método de Grimmett para dos elecciones. Los intervalos correspondientes a partidos de izquierda están sombreados en gris. Las líneas punteadas indican las posiciones de los enteros antes del desplazamiento aleatorio. Extraído de [Cor+24] | 34 |

Índice de cuadros

| | | |
|------|---|----|
| 1.1. | Comparación entre los cocientes y asignaciones originales (1780) y los valores actualizados con datos del censo 2020 para los 15 estados originarios. Tabla extraída de [BY01], datos actuales extraídos de Censo EE.UU. | 11 |
| 1.2. | Distribución de bancas para diferentes tamaños de cámara, extraído de Wikipedia. | 14 |
| 1.3. | Método D'Hondt aplicado a un escenario con 6 estados y $H = 250$ bancas. Entre paréntesis se indican primero la <i>Hare-Quota</i> , y luego un divisor D para el cual el redondeo hacia abajo (propio de D'Hondt) realiza una asignación válida de bancas. | 16 |
| 1.4. | Método de Webster aplicado a un escenario con 4 estados y $H = 35$ bancas. Entre paréntesis se indican primero la <i>Hare-Quota</i> , y luego un divisor D para el cual el redondeo estándar (propio de Webster) realiza una asignación válida de bancas. Extraído de [BY01]. | 16 |
| 2.1. | Porcentajes de población por continente de acuerdo a la regla estándar de redondeo. Se observa cómo esta regla de redondeo no basta para alcanzar una solución en la que la suma de porcentajes sea efectivamente del 100 %. Tabla extraída de [Puk17] | 19 |
| 3.1. | Compración de votos y restos entre elecciones. Extraído de [Cor+24]. | 34 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción al problema de *apportionment*

El *apportionment*¹ trata sobre cómo repartir de forma "justa" una cantidad finita de objetos indivisibles entre los miembros de un grupo, de acuerdo a ciertas proporciones. Generalmente, el intento de respetar estas proporciones provoca que las asignaciones ideales requieran dividir los objetos en partes fraccionarias, lo cual no está permitido por las condiciones del problema. El conflicto surge a la hora de intentar "redondear" esas partes fraccionarias, de forma tal que al final se asignen cantidades enteras a cada individuo, y no sobren ni falten objetos por asignar.

Para ejemplificar este escenario, se puede pensar en el problema de repartir 5 cabras entre 3 hermanos de forma proporcional de acuerdo a sus edades: si las edades de los hermanos fuesen de 15, 20 y 25 años, la proporción exacta correspondiente a cada hermano sería de $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$ y $\frac{25}{12}$ ² respectivamente. Ninguna de estas cantidades es entera, lo cual puede llegar a tentarnos a fraccionar las cabras, violando las restricciones del problema. La pregunta que surge entonces es: ¿cómo redondeamos estas proporciones para que se asignen las cabras de la forma más justa posible? La teoría del *apportionment* trata precisamente sobre esta problemática.

Sin embargo, el escenario que más ha alentado y motivado el desarrollo teórico y el estudio de este problema viene del mundo de la Teoría de Elección Social (*Social Choice*), que se encarga, en términos generales, de estudiar cómo tomar decisiones de forma colectiva, típicamente haciendo una agregación de preferencias individuales en un único perfil de preferencias colectivo y buscando que esto suceda de la forma más justa posible. El resultado más famoso de esta disciplina es el Teorema de Imposibilidad de Arrow, que plantea, no obstante, que a la hora de elegir colectivamente entre ciertas opciones a partir de los perfiles de preferencias de cada individuo (en donde estos perfiles de preferencias son simplemente ordenamientos de las opciones), no existe forma de agregarlos en un único perfil de preferencias colectivo de forma que se satisfaga una serie de desiderata. Posiblemente el lector recuerde una entrevista a Milei en 2023, en la que la entrevistadora le pregunta si cree en la democracia, y este contesta "¿Vos conocés el teorema de imposibilidad de Arrow?" [TV23], insinuando que la democracia no es posible. Si bien mucha

¹O "prorratoeo" en español, pero usaremos su versión en inglés por ser la opción más utilizada en la literatura.

²Para cada hermano h , el total de cabras que le corresponde se calcula como el total de cabras multiplicado por la edad de h sobre la suma de las edades. En el caso del hermano menor, resulta $5 \cdot \frac{15}{15+20+25} = \frac{5}{4}$.

gente ha interpretado el resultado de Arrow como una demostración de la imposibilidad de diseñar un sistema verdaderamente democrático, el propio Arrow ha dicho que

“[las] implicaciones filosóficas y distributivas de la paradoja de la elección social todavía no están claras. Ciertamente, no hay una salida simple. Espero que otros tomen esta paradoja como un desafío más que como una barrera desalentadora.” [Suz83], sugiriendo que encontrar formas democráticas de decisión colectiva es un reto a la imaginación. Recordaremos esta reflexión al finalizar el capítulo 2.

Con respecto al problema de *apportionment*, la Teoría de Elección Social lo ha tratado dentro del contexto de distribución de bancas parlamentarias, bajo la idea de que el congreso debe ser una representación en pequeña escala de la sociedad, y guiándose por el lema “una persona, un voto” [BY01]. Desde esta perspectiva, se ha intentado entender cómo repartir de forma “justa” las bancas de un congreso o parlamento según la proporción de votos obtenidos por distintos partidos políticos, o según la proporción de poblaciones de los distintos estados o provincias. La definición de qué significa que un sistema de asignación de bancas sea “justo” tendrá que ver con qué tan cercana es la asignación que provee dicho sistema a la proporcionalidad exacta, y la definiremos con precisión en la próxima sección a través de una serie de desiderata planteada por [BY] y profundizada por [Puk17].

Esencialmente, el problema se reduce al redondeo de fracciones: cómo redondear de la forma más “justa” posible un vector de fracciones (las proporciones de bancas correspondientes a los distintos partidos/estados) a valores enteros, de manera tal que la suma de las fracciones sea igual a la suma de los enteros redondeados (en ambos casos, esta suma debe ser igual a la cantidad total de bancas a repartir).

A pesar de que el problema aparenta ser de una naturaleza simple, veremos que tiene una complejidad intrínseca considerable, que incluso nos llevará a concluir que la existencia de un sistema “perfecto” es imposible. Para comenzar con un ejemplo quizás clarificador, pensemos en el siguiente escenario de juguete: 2 partidos que reciben exactamente la mitad de los votos cada uno, entre los cuales hay que repartir únicamente una banca. ¿Cómo ha de asignarse esa banca? Más allá de la definición que se brinde del término *justicia* —siempre y cuando no haya preferencia arbitraria por ninguno de los partidos—, cualquiera de los candidatos merecería la banca en igual proporción, y por ende cualquiera de las asignaciones posibles sería igual de justa o injusta.

Otro escenario, ubicado en las antípodas, sería el caso en el que la cantidad de bancas a repartir es exactamente igual a la cantidad de votantes —podría ser el caso de un consejo barrial, por ejemplo—, en donde cada miembro tiene representatividad total.

Las formas y metodologías de encarar la resolución de esta problemática han ido variando en gran medida a lo largo de la historia. Algunas preguntas orientadoras a la hora de pensar distintos esquemas bajo los cuales intentar resolver el problema pueden ser:

- ¿Debe estar fijada de antemano la cantidad de bancas a asignarse?
- ¿Debe estar fijada de antemano la cantidad de individuos representados por cada miembro del parlamento?
- ¿Se debe intentar encontrar un sistema que optimice alguna métrica, como por ejemplo la cantidad de gente no representada?

Todas estas preguntas han llevado al diseño de diversos métodos, que posteriormente fueron tratados y analizados de una forma más general y sistemática por Balinski y Young

en [BY]. Estos concluyeron, a través de los teoremas de Coherencia y de Quota, que no existe ningún sistema de repartición de bancas que satisfaga todos los desiderata.

Inspirado por este resultado de imposibilidad, Geoffrey Grimmett plantea en [Gri04] la idea de utilizar métodos aleatorizados para asignar bancas, en vistas de encontrar algún sistema que satisfaga un conjunto de propiedades análogas al desiderata planteado por [BY] para métodos determinísticos.

Con respecto al trabajo de esta tesis, haremos un recorrido por la historia de este problema, enunciando su definición formal, los axiomas solicitados para considerar que un sistema es deseable, coherente o "justo", los desarrollos teóricos que se fueron produciendo alrededor de esto (principalmente por Balinski, Young, Pukelsheim [BY; BY01; Puk17]). Daremos la definición de los llamados "*métodos de divisor*", junto con sus propiedades fundamentales, para luego enunciar el teorema de imposibilidad de Balinski-Young. Esto nos servirá como motivación para definir la familia de métodos aleatorizados junto con sus respectivos axiomas deseables. Atravesaremos algunos ejemplos de métodos aleatorizados, analizaremos sus características y propiedades, presentando el trabajo de [Cor+24], y posteriormente trabajaremos alrededor de algunas ideas que fueron surgiendo durante la ejecución de esta tesis, vinculadas a esta última familia de métodos.

Si los métodos aleatorizados son factibles de ser usados en escenarios electorales reales o no, es una inquietud que queda para el lector.

1.1.1. Código de las pruebas computacionales

Todo el código propio de las pruebas computacionales desarrolladas a lo largo de este trabajo está disponible en [este repositorio de Github](#).

1.2. Marco del problema

Sean $n \in \mathbb{N}$ con $\{1, \dots, n\}$ un conjunto que representará el conjunto de partidos, y $H \in \mathbb{N}$ un natural que representará cierta cantidad de bancas a repartir —que denominaremos "*tamaño de la cámara*" o *house size*—. Para sintetizar notación, definimos:

$$[n] := \{1, \dots, n\}$$

Tendremos también

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n,$$

un vector de los votos recibidos por cada partido (o poblaciones de cada estado –nos referiremos a este vector de cualquiera de las dos formas indistintamente–), y

$$\vec{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n,$$

un vector de proporciones, que denominaremos *quotas*, con $q_i := H \frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$, por lo que $\sum_{i=1}^n q_i = H$.

Adicionalmente, para ciertos modelos se considera el vector $\vec{r} \in \mathbb{N}_0^n$ como un vector de requerimientos mínimos, de forma tal que cada partido $i \in [n]$ debe recibir al menos r_i bancas, y usualmente se toma $r_i = r \in \mathbb{N}_0^n$ constante. Sin embargo, para el presente trabajo no consideraremos la presencia de restricciones de esta índole sobre las cantidades de bancas asignadas.

Intuitivamente, uno definiría un método de *apportionment* A como una función que toma como parámetros \vec{v} , H , y retorna un vector $A(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H , e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido. No obstante, considerando el ejemplo de 2 partidos con exactamente la misma cantidad de votos y una única banca a repartir (enunciado en la introducción), podríamos pensar que un método debe contemplar como opciones válidas a cualquiera de las dos asignaciones posibles en el ejemplo. Esto motiva la definición de los métodos de apportionment como funciones que retornan conjuntos de asignaciones posibles (en lugar de una única asignación).

Dado que en ocasiones trataremos al vector \vec{v} directamente como un vector de proporciones (en lugar de votos o habitantes), consideraremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$. Para simplificar notación, denotaremos $x_+ := \sum_{i=1}^n x_i$ a la suma de elementos de un vector $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. De esta forma, el total de votos (o de proporciones), que será una cantidad recurrente, se podrá sintetizar como v_+ . Asimismo, al conjunto de asignaciones válidas lo denotaremos de la siguiente forma, siguiendo la escritura de [Puk17]:

$$\mathbb{N}_0^n(H) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid x_+ = H\}.$$

Definición 1.1. Un método de *apportionment* A es una función que toma un vector de votos \vec{v} , una cantidad de bancas H , y retorna un conjunto de vectores $A(\vec{v}, H) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n(H))$:

$$A : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n(H))$$

Es decir, \vec{a} es una asignación válida de H bancas para todo $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$. Cabe mencionar que, si un método retorna un conjunto que consta de una única asignación $\{x\}$, escribiremos indistintamente $A(\vec{v}, H) = x$ ó $A(\vec{v}, H) = \{x\}$.

1.2.1. Propiedades deseables

Enunciaremos una serie de propiedades deseables que han ido surgiendo en la literatura a lo largo de la historia, el grueso de ellas definidas por Balinski y Young en [BY], y otra gran parte por Pukelsheim en [Puk17]. Este último comienza por caracterizar a una regla de *apportionment* razonable como aquella que satisface "anonimidad, balance, concordancia, decencia y exactitud". Qué significan estos términos quedará más claro al terminar esta sección.

Definición 1.2. (Anonimidad - Simetría) Un método de *apportionment* A satisface **anonimidad** si cualquier reordenamiento del vector de votos conlleva el mismo reordenamiento sobre los vectores de asignaciones. En esencia, esto caracteriza a los métodos anónimos como aquellos en los que la posición de un partido en el vector de votos no tiene influencia en la cantidad de bancas que se le asignarán. Formalmente, dado $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, si $\vec{v}' = \sigma(\vec{v})$ para σ una permutación de las coordenadas de \vec{v} , entonces $A(\sigma(\vec{v}), H) = \{\sigma(\vec{a}) : \vec{a} \in A(\vec{v}, H)\}$.

Definición 1.3. (Balance) Un método de *apportionment* A se dice **balanceado** si para dos partidos que tienen la misma cantidad de votos, sus asignaciones correspondientes difieren a lo sumo en una banca. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, y dada una asignación $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$,

$$v_i = v_j \implies |\vec{a}_i - \vec{a}_j| \leq 1$$

Definición 1.4. (Concordancia) Un método de *apportionment* A se dice **concordante** si dados dos partidos, el más fuerte no recibe menos bancas que el menos fuerte. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, y dada una asignación $\vec{a} \in A(\vec{v}, H)$,

$$v_i > v_j \implies \vec{a}_i \geq \vec{a}_j$$

Definición 1.5. (Decencia - Homogeneidad) Un método de *apportionment* A se dice **decente u homogéneo** si cualquier reescalamiento del vector de votos no produce cambios en las asignaciones retornadas por el método. Formalmente, dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$A(\vec{v}, H) = A(\alpha \cdot \vec{v}, H)$$

Esencialmente, esta propiedad nos dice que un método **decente** debe basar sus asignaciones en las *proporciones* de votos, y no en las *cantidades netas* de votos. En particular, utilizando el factor de reescalamiento $\alpha = \frac{1}{v_+}$, cualquier problema de *apportionment* se puede tratar utilizando el vector de proporciones $\vec{w} := \alpha \cdot \vec{v}$ en lugar del vector de votos \vec{v} .

Definición 1.6. (Exactitud) Un método de *apportionment* A se dice **exacto** si ante un vector entero de votos que suma H , el método retorna exactamente el mismo vector: dados $\vec{v} \in \mathbb{R}_+^n$, $H \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$A(\vec{v}, H) = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{N}_0^n(H)$$

Definición 1.7. (Quota) Un método de *apportionment* A satisface la propiedad **quota** si $\forall \vec{v}, H$, se tiene que $\vec{a}_i \in \{\lfloor q_i \rfloor, \lceil q_i \rceil\} \forall i \in [n], \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H)$. Es decir, las asignaciones devueltas por A verifican que a cada partido se le otorga el redondeo hacia arriba o hacia abajo de su respectiva quota.

Introduciremos dos definiciones que permitirán entender y caracterizar la forma esperada en la que se debería comportar un método de *apportionment* ante variaciones en las cantidades de votos de los partidos o del tamaño de la cámara.

Dado que un método "razonable" debe depender exclusivamente de las proporciones de votos y no de las cantidades netas (por *homogeneidad*), al analizar cambios en las cantidades de votos, nos interesará considerar la variación relativa de la población de dos estados i y j : los cocientes $\frac{v_i}{v_j}$ y $\frac{v'_i}{v'_j}$, donde v_i, v_j son las poblaciones "iniciales" y v'_i, v'_j las poblaciones posteriores de ambos estados. Si dicho cociente aumenta es porque el estado i aumentó su población en relación a j , independientemente de si las poblaciones de ambos estados aumentaron, decrecieron, o la de i aumentó mientras la de j decreció.

Definición 1.8. (Monotonía de población - *Population monotonicity*)

Un método de *apportionment* A satisface la propiedad de **population monotonicity** si dados $H \in \mathbb{N}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{N}^n$ tales que $\frac{v_i}{v_j} < \frac{v'_i}{v'_j}$ para $i, j \in [n]$, $i \neq j$, se tiene que $\vec{a}_i \leq \vec{a}'_i$ ó $\vec{a}_j \geq \vec{a}'_j \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H), \forall \vec{a}' \in A(\vec{v}', H)$.

Lo que establece esta propiedad es que si la razón entre las poblaciones de dos estados i y j aumenta, entonces o bien i debe haber aumentado la cantidad de bancas recibidas, o bien j debe haber reducido dicha cantidad.

Definición 1.9. (Monotonía de cámara - *House monotonicity*) Un método de *apportionment A* satisface la propiedad de ***house monotonicity*** si dados $H \in \mathbb{N}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$, se tiene que $\vec{a}_i \leq \vec{a}'_i \forall i \in [n], \forall \vec{a} \in A(\vec{v}, H), \forall \vec{a}' \in A(\vec{v}, H + 1)$. Es decir, si aumenta la cantidad total de bancas a repartir y la cantidad de votos de cada partido permanece constante, no puede decrecer la cantidad de bancas recibida por algún partido.

Si nos encontráramos en un escenario en el que hubiese una banca extra a repartir, podríamos preguntarnos cuál de todos los partidos existentes se la "merece" más [BY76]. Particularmente, esta pregunta toca de cerca a los métodos que verifican ***house monotonicity***, puesto que para pasar de una asignación de H bancas a una de $H + 1$, basta con elegir un partido para asignarle la banca extra, dejando a los partidos restantes con la misma cantidad de bancas.

Hay una última propiedad deseable para un sistema de repartición, la *coherencia* (también denominada *uniformidad* o *consistencia*). No obstante, la enunciaremos más adelante, puesto que cobrará mayor relevancia para generalizar algunas de las propiedades ya enunciadas y categorizar familias de métodos.

1.3. Algunos métodos típicos

Una cantidad que aparecerá recurrentemente en distintos métodos es la *Hare Quota*, definida como

$$HQ(\vec{v}, H) = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^n v_i,$$

que podemos pensar como la cantidad promedio de votos representados por una banca, o el "precio justo" (en cantidad de votos) a pagar por una banca.

A modo de relato, vale la pena mencionar que en el siglo XVIII en Estados Unidos, en los orígenes de esta problemática, se pensaba en no dejar fija la cantidad de bancas a ocupar en el congreso, sino en fijar una "razón de representación", es decir, determinar un divisor x de forma que haya "una banca cada x personas". Naturalmente, surgen dos problemáticas con este enfoque: por un lado, resulta ambigüo si se debe dividir el total de la población por x para determinar el total de bancas a repartir, o si se debe dividir la población propia de cada estado por x — definiendo también qué hacer con las partes fraccionarias resultantes— para determinar la cantidad de bancas que le corresponden. Estos dos posibles acercamientos producen, en general, resultados distintos. Por otro lado, el hecho de no dejar fijo el *house size* provoca que a medida que crece la población de un país con el correr de los años, el tamaño de la cámara pueda tender a infinito (obviamente, suponiendo que el divisor x permanece constante a lo largo del tiempo, y que los estados no varían sus legislaciones para distribuir las bancas). Para ejemplificar esto, basta apreciar el caso de los Estados Unidos, en donde se estableció 30.000 como divisor tras haber realizado su primer censo en 1790. La primera metodología utilizada para asignar las bancas fue dividir la población de cada estado por este divisor, y redondear los valores obtenidos hacia abajo. Por la cantidad de habitantes de ese entonces, el *house size* resultante era de 112 miembros. Si se realizara el mismo procedimiento con las poblaciones actualizadas de los mismos 15 estados que existían en ese entonces utilizando la información del último censo (2020) y el mismo divisor, el *house size* resultante sería de 3.420, como se puede apreciar en la tabla 1.3.

| Estado | Cociente (1780) | Asig. (1780) | Población (2020) | Cociente (2020) | Asig. (2020) |
|--------------------|-----------------|--------------|--------------------|------------------|--------------|
| Connecticut | 7.895 | 7 | 3 605 944 | 120.198 | 120 |
| Delaware | 1.851 | 1 | 989 948 | 32.998 | 32 |
| Georgia | 2.361 | 2 | 10 711 908 | 357.063 | 357 |
| Kentucky | 2.290 | 2 | 4 505 836 | 150.194 | 150 |
| Maryland | 9.284 | 9 | 6 185 278 | 206.176 | 206 |
| Massachusetts | 15.844 | 15 | 7 029 917 | 234.331 | 234 |
| Nuevo Hampshire | 4.727 | 4 | 1 377 529 | 45.918 | 45 |
| Nueva Jersey | 5.986 | 5 | 9 288 994 | 309.633 | 309 |
| Nueva York | 11.053 | 11 | 20 201 249 | 673.375 | 673 |
| Carolina del Norte | 11.784 | 11 | 10 439 388 | 347.980 | 347 |
| Pensilvania | 14.429 | 14 | 13 002 700 | 433.423 | 433 |
| Rhode Island | 2.282 | 2 | 1 097 379 | 36.579 | 36 |
| Carolina del Sur | 6.875 | 6 | 5 118 425 | 170.615 | 170 |
| Vermont | 2.851 | 2 | 643 077 | 21.436 | 21 |
| Virginia | 21.019 | 21 | 8 631 393 | 287.713 | 287 |
| Total | 120.531 | 112 | 102 828 965 | 3 427.632 | 3 420 |

Tabla 1.1: Comparación entre los cocientes y asignaciones originales (1780) y los valores actualizados con datos del censo 2020 para los 15 estados originarios. Tabla extraída de [BY01], datos actuales extraídos de [Censo EE.UU.](#)

1.3.1. Método de Hamilton

El primer sistema de distribución de bancas diseñado para el congreso estadounidense fue el método de Hamilton, diseñado por Alexander Hamilton en 1792, también conocido como el *método de restos mayores* (*greatest remainders*). Usualmente es considerado como el método más intuitivo. La estructura del método es:

Algoritmo 1: Método de Hamilton

- 1 **Cálculo de quotas exactas:** dividir los votos de cada partido por $HQ(\vec{v}, H)$ y obtener $q_i := \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)} = H \frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$;
 - 2 **Asignación inicial:** otorgar a cada partido i su *lower quota*, $\lfloor q_i \rfloor$;
 - 3 **Distribución de bancas restantes:** ordenar los *restos* $p_i := q_i - \lfloor q_i \rfloor$ de forma decreciente, y asignar las bancas a los partidos con mayores restos ;
 - 4 **return** La asignación resultante;
-

1.3.2. Método de Jefferson/D'Hondt

Existen diversas formas de definir el método D'Hondt. Como es el sistema utilizado para la distribución de bancas de la Honorable Cámara de Diputados de la Nación Argentina, se lo suele explicar en los colegios secundarios a través del siguiente algoritmo:

Algoritmo 2: Método D'Hondt

- 1 **Elaboración de tabla:** Ordenar los partidos decrecientemente por cantidad de votos, poniendo como filas a los partidos;
 - 2 **Cálculo de cocientes:** En la primera columna numérica poner la cantidad de votos; en la segunda, la cantidad de votos dividida por 2. Proceder de esta forma hasta llegar a la H -ésima columna, en la cual aparece, para cada partido, su cantidad de votos dividida por H ;
 - 3 **Asignación de bancas:** Asignar las H bancas a los partidos que posean los H números más grandes en la tabla confeccionada;
 - 4 **return** La asignación resultante;
-

Otra forma de definir este método parte del siguiente razonamiento: si se quisiera asignar a cada partido i el redondeo hacia abajo de la cantidad de bancas que le corresponden según la *Hare-Quota*, $\lfloor \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)} \rfloor$, esto tipicamente resultará en una asignación en la que quedan bancas libres. Si se redondeara hacia arriba, la asignación excedería el total de bancas.

Luego, se podría buscar un divisor $d \leq HQ(\vec{v}, H)$ tal que redondeando hacia abajo estos cocientes, la suma total sea H :

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{v_i}{d} \right\rfloor = H. \quad (1.1)$$

De esta forma, asignando a cada partido i la parte entera de su cociente, $\lfloor \frac{v_i}{d} \rfloor$, se tiene una asignación válida. De todos los divisores d que sean solución a esta ecuación, usualmente se prefiere el más grande, a partir de pensar en este divisor como el "precio por banca", medido en cantidad de votos, que paga cada partido [BY76; Wilnd].

La siguiente propiedad muestra que la asignación devuelta por el algoritmo coincide con la asignación producida a partir de la ecuación anterior:

Proposición 1.10. *Llamando $A(\vec{v}, H)$ a la asignación de bancas dada por el algoritmo 2 y $A_d(\vec{v}, H)$ a la asignación dada por*

$$A_d(\vec{v}, H) = \left(\left\lfloor \frac{v_1}{d} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{v_n}{d} \right\rfloor \right),$$

con d solución de la ecuación (1.1), se tiene que $A(\vec{v}, H) = A_d(\vec{v}, H)$.

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supongamos los partidos ordenados decrecientemente por cantidad de votos. Al seleccionar el número más grande de la tabla, a_{11} (la cantidad de votos del partido 1, el partido con más votos), si se determina como precio por banca dicho valor, únicamente el partido 1 tiene la posibilidad de comprar una única banca. Esto da la pauta de que para asignar las H bancas será necesario reducir el divisor. Al utilizar el segundo número más grande de la tabla, se asignarán únicamente 2 bancas: ambas al partido 1, si dicho número es a_{12} , o una al partido 1 y otra al partido 2, si el número es a_{21} .

Continuando con este razonamiento, llamemos d_k al número seleccionado en el paso $k \in \{1, \dots, H\}$ a partir de la tabla construida en el algoritmo, es decir, al k -ésimo valor más grande de la tabla. Digamos que es el valor ubicado en la posición (ij) de la tabla: $d_k = \frac{v_i}{j}$. Esto significa que, si se utiliza d_k como divisor, únicamente se llegan a asignar k bancas: justamente, por ser el k -ésimo valor más grande, al dividir la cantidad de votos

v_l de cada partido l , llamemos a_{lj_l} al número de la fila l más chico que aparece entre d_1, \dots, d_k , tomando como convención $j_l = 1$ si $d_k > a_{l1}$. De acá resulta $a_{lj_l} = 0$ (es decir, si al partido l no le alcanza ni siquiera para "comprar" una banca a precio d_k), y se tiene

$$a_{l(j_l+1)} < d_k \leq a_{lj_l} = \frac{v_l}{j_l} \implies j_l + 1 = \frac{v_l}{a_{l(j_l+1)}} > \frac{v_l}{d_k} \geq \frac{v_l}{a_{lj_l}} = j_l,$$

por lo que

$$\left\lfloor \frac{v_l}{d_k} \right\rfloor = j_l \text{ y } \sum_{l=1}^n \left\lfloor \frac{v_l}{d_k} \right\rfloor = k.$$

De esta forma, al utilizar a_H como divisor, se asignan exactamente H bancas al redondear hacia abajo los cocientes $\frac{v_i}{a_H}$, y por lo tanto $A_{a_H}(\vec{v}, H)$ coincide con $A(\vec{v}, H)$. \square

1.3.3. Método de Webster/Saint-Laguë

Para definir este método, notemos

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}, \\ \lceil x \rceil, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor > \frac{1}{2}, \\ \{\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil\}, & \text{si } x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.2)$$

Este método surge de un razonamiento análogo al del método anterior: buscamos un divisor d tal que al redondear según $\llbracket \cdot \rrbracket$, la asignación resultante sea válida, ie asigna H bancas. Es decir, buscamos d solución de

$$\sum_{i=1}^n \llbracket \frac{v_i}{d} \rrbracket = H. \quad (1.3)$$

Vale observar que, por la ambigüedad del caso $x - \lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$ en el redondeo, este método puede llegar a devolver hasta 2^s asignaciones posibles para un d fijo, con $s = |\{i \in [n] : \frac{v_i}{d} - \lfloor \frac{v_i}{d} \rfloor = \frac{1}{2}\}|$.

1.4. Paradojas y falencias de los métodos típicos

El término "paradoja" para caracterizar aspectos de los métodos de *apportionment* se utiliza no en un sentido lógico, describiendo una proposición contradictoria en términos lógicos, sino en relación al "sentido común", describiendo resultados que contradicen "lo que uno esperaría" de un sistema para distribuir bancas.

1.4.1. Paradoja de Alabama

Si bien el *método de Hamilton* presenta una simpleza remarcable, esta simpleza lleva a resultados que pueden resultar insatisfactorios. Luego del censo de 1880 en los Estados Unidos, el encargado de computar la asignación de bancas a cada estado realizó las cuentas para todos los congresos de entre 275 y 350 bancas, llegando a la conclusión de que si se repartían 299 bancas, Alabama recibiría 8, mientras que repartiendo 300 bancas le corresponderían 7. Este escenario fue el primer ejemplo registrado en el cual se violó el axioma de *House Monotonicity* [Cau10].

En general, la *paradoja de Alabama* consiste en el no cumplimiento de la propiedad de *House Monotonicity*.

A continuación, se muestra un ejemplo concreto de esta paradoja:

| Estado | Población | Con 10 bancas | | Con 11 bancas | |
|--------|-----------|---------------|--------|---------------|--------|
| | | Quota justa | Bancas | Quota justa | Bancas |
| A | 6 | 4.286 | 4 | 4.714 | 5 |
| B | 6 | 4.286 | 4 | 4.714 | 5 |
| C | 2 | 1.429 | 2 | 1.571 | 1 |

Tabla 1.2: Distribución de bancas para diferentes tamaños de cámara, extraído de [Wikipedia](#).

Otro aspecto llamativo del *método de Hamilton* es que no garantiza que si un partido recibe mayoría absoluta de los votos entonces vaya a tener la mayoría absoluta de las bancas. Para ver esto, alcanza con tomar un escenario de 10 bancas a repartirse entre 3 partidos con el vector de votos $\vec{v} = (501, 495, 4)$. Las proporciones de votos obtenidas para este escenario resultan

$$\vec{q} = (0.501, 0.495, 0.004),$$

lo cual manifiesta la mayoría absoluta de votos para el partido 1. Sin embargo, al utilizar el *método de Hamilton* para repartir las bancas, en primer lugar se asignan:

- $\lfloor 5.01 \rfloor = 5$ bancas al partido 1,
- $\lfloor 4.95 \rfloor = 4$ bancas al partido 2,
- $\lfloor 0.04 \rfloor = 0$ bancas al partido 3.

La banca pendiente de ser repartida es asignada al partido 2, por tener un resto de 0.95, resultando en una asignación de 5 bancas para los partidos 1 y 2, y 0 bancas para el 3. Se observa entonces que el partido 1 no obtiene la mayoría absoluta de las bancas a pesar de tener la mayoría absoluta de los votos. No obstante, puede ser razonable que este escenario resulte así, pues la proporción por la cual el partido 1 tiene mayoría absoluta de los votos es chica en relación a la proporción de bancas correspondientes al partido 2.

1.4.2. Paradoja de nuevos estados

En la literatura hay diversos enunciados de esta paradoja, pero nos quedaremos con el de [BY01], que la relata de la siguiente forma:

Esta paradoja se produjo cuando, en 1907, Oklahoma se convirtió en un nuevo estado de los Estados Unidos. Previamente, el congreso constaba de 386 bancas, asignadas a una población total de 74.562.608 habitantes, por lo que cada banca representaba aproximadamente 193.167 individuos. Como la población de Oklahoma era de alrededor de 1 millón de habitantes, le corresponderían al menos 5 bancas. Por este motivo, se amplió la cantidad total de bancas a 391, de manera tal que Oklahoma obtuviese sus 5 bancas.

Ante este escenario, lo esperable era que, al haber agregado las 5 bancas nuevas, el resto de los estados conserven las bancas que tenían. No obstante, el método de Hamilton produjo la denominada *paradoja de nuevos estados*: aplicándose con 391 bancas, le asignó

5 a Oklahoma, 4 a Maine y 37 a Nueva York; mientras que en el contexto anterior, sin la presencia de Oklahoma y con un total de 386 bancas, le asignaba 38 bancas a Nueva York y 3 a Maine. Esencialmente, al incorporarse Oklahoma agregando sus correspondientes bancas, Nueva York perdió una banca ante Maine.

En resumen, la *paradoja de nuevos estados* se produce cuando la incorporación de un estado nuevo, incorporando también las respectivas bancas correspondientes, provoca alteraciones en la distribución de las bancas de los demás partidos.

1.4.3. Paradoja de población

En 1901, teniendo en cuenta la situación poblacional de Maine y Virginia, se calcularon las asignaciones para estos estados: 9 bancas para Virginia y 4 para Maine; mientras que en 1900 las asignaciones eran de 10 bancas para Virginia y 3 para Maine. Mirando un poco más en detalle la evolución de las poblaciones de estos estados en relación a la evolución general del país, se observó que ambos estados habían aumentado sus poblaciones, y a pesar de que Virginia estaba creciendo más rápido que Maine, había perdido una banca frente a este estado.

Se analizaron las quotas, observándose que en 1900 eran de 9.599 para Virginia (redondeada hacia arriba por el método de Hamilton) y de 3.595 para Maine (redondeada para abajo). La tasa de crecimiento de estos estados era de 1.07% anual para Virginia y de 0.67% para Maine, contra una tasa general de 2.02% del país entero. Con estos números, las quotas de estos estados en 1901 habían decrecido a 9.509 para Virginia y 3.595 para Maine, resultando en asignaciones de 9 y 4 bancas respectivamente [BY01].

El motivo por el cual se produjo esta paradoja está vinculado a que, a pesar de que el crecimiento de Virginia respecto a Maine era mayor, como ambos estados tenían tasas de crecimiento que no llegaban a alcanzar la tasa de crecimiento del país, naturalmente perderían bancas. Por ser Virginia un estado más grande, la diferencia entre su tasa de crecimiento y la tasa de crecimiento nacional representaba, en términos absolutos, una cantidad más grande, que repercutió provocando que Virginia quede detrás de Maine en términos de restos.

1.4.4. D'Hondt y Webster no cumplen *quota*

Proposición 1.11. *El método D'Hondt no satisface la propiedad quota.*

Demostración: Basta observar el ejemplo de la tabla 1.3, para $n = 6$, $\vec{v} = (1646, 6936, 154, 2091, 685, 98)$ y $H = 250$.

Se puede ver que el partido B tiene una *quota* exacta de 138.72, por lo que le corresponderían 138 ó 139 bancas si se verificara la propiedad *quota*. Sin embargo, vemos que con este método recibe 140 $\notin \{138, 139\}$ bancas.

□

Proposición 1.12. *El método de Webster no satisface la propiedad quota.*

Demostración: Basta observar el ejemplo de la tabla 1.4, para $n = 4$, $\vec{v} = (70653, 117404, 210923, 11944)$ y $H = 35$.

Se puede ver que el partido D tiene una *quota* exacta de 26.236, por lo que le corresponderían 26 ó 27 bancas si se verificara la propiedad *quota*. Sin embargo, vemos que con este método recibe 25 $\notin \{26, 27\}$ bancas.

| <i>Partido</i> | <i>Votos</i> | <i>Quota justa ($D = 50$)</i> | <i>D-Quota ($D = 49.5$)</i> | <i>Bancas</i> |
|----------------|--------------|--|--|---------------|
| A | 1646 | 32.92 | 33.25 | 33 |
| B | 6936 | 138.72 | 140.12 | 140 |
| C | 154 | 3.08 | 3.11 | 3 |
| D | 2091 | 41.82 | 42.24 | 42 |
| E | 685 | 13.70 | 13.83 | 13 |
| F | 988 | 19.76 | 19.95 | 19 |
| Total | 12500 | 250 | 252.5 | 250 |

Tabla 1.3: Método D'Hondt aplicado a un escenario con 6 estados y $H = 250$ bancas. Entre paréntesis se indican primero la *Hare-Quota*, y luego un divisor D para el cual el redondeo hacia abajo (propio de D'Hondt) realiza una asignación válida de bancas.

□

| <i>Partido</i> | <i>Votos</i> | <i>Quota justa ($D = 45526$)</i> | <i>D-Quota ($D = 46850$)</i> | <i>Bancas</i> |
|----------------|--------------|---|---|---------------|
| A | 70653 | 1.552 | 1.508 | 2 |
| B | 117404 | 2.579 | 2.505 | 3 |
| C | 210923 | 4.633 | 4.502 | 5 |
| D | 1194456 | 26.236 | 25.49 | 25 |
| Total | 1593436 | 35 | 34.005 | 35 |

Tabla 1.4: Método de Webster aplicado a un escenario con 4 estados y $H = 35$ bancas. Entre paréntesis se indican primero la *Hare-Quota*, y luego un divisor D para el cual el redondeo estándar (propio de Webster) realiza una asignación válida de bancas. Extraído de [BY01].

1.4.5. Reflexiones acerca de los métodos típicos

Recorriendo los ejemplos de métodos enunciados anteriormente vemos que la variedad de enfoques que se puede utilizar para encarar la resolución de este problema es amplia, y no hay ninguna forma que resulte evidentemente más "justa" que las otras. Asimismo, la existencia de estas paradojas genera la sensación de que es necesario buscar métodos nuevos que puedan evitarlas sistemáticamente. La pregunta es ¿cómo definir métodos nuevos? Considerando las quotas, vemos que hay muchas formas según las cuales se las puede redondear para obtener una asignación de bancas: redondeando hacia arriba, hacia abajo, con redondeo tradicional, etc. A su vez, no es trivial la forma en la que se definen las quotas. Si bien lo más intuitivo es dividir la cantidad de votos/habitantes por la *Hare Quota*, esto no siempre redonda en asignaciones satisfactorias. Estas dos observaciones nos alientan a considerar formas más generales de definir métodos.

Capítulo 2

Desarrollo teórico

2.1. Métodos de divisor

Parte fundamental de la esencia del problema de apportionment radica en la dificultad de definir cómo redondear satisfactoriamente las partes fraccionarias de las quotas: el método de Webster, por ejemplo, divide los votos de cada partido por un divisor d y luego redondea los resultados utilizando el método tradicional de redondeo al entero más cercano. Por su parte, el método D'Hondt utiliza la función "piso", redondeando a la parte entera. Para extender esta metodología y poder considerar otros métodos necesitamos introducir las nociones de "función de redondeo" y "regla de redondeo", que nos permitirán definir la familia de métodos de divisor.

Definición 2.1. (Función de redondeo) Una función de redondeo se define como una función

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ creciente y sobreyectiva.}$$

El hecho de que una función de redondeo sea creciente y sobreyectiva implica que

$$f(0) = 0,$$

y que

$$\begin{aligned} [0, \infty) &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} f^{-1}(\{i\}) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [s_i, s_{i+1}), \end{aligned}$$

para $s_i := \min\{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} : f(s) = i\}$, por lo que podemos pensar en una función de redondeo f a partir de la sucesión $(s_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$. A esta sucesión la denominamos *secuencia de saltos*. Esta caracterización establece que $f(s_i) = i \forall i \in \mathbb{N}_0$. Pensando en el redondeo de $j + \frac{1}{2}$ para $j \in \mathbb{N}_0$, no es claro que siempre vayamos a querer que sea redondeado hacia abajo, por lo que podríamos incluir la posibilidad de que $f(j + \frac{1}{2}) = \{j, j + 1\}$ para tener una noción un poco más general. Para los puntos de la *secuencia de saltos*, esto se traduciría en definir $f(s_j) = \{j - 1, j\}$. Detallamos esta idea en la definición de "regla de redondeo":

Definición 2.2. (Regla de redondeo) Una regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ dada por una *secuencia de saltos* $0 = s(0) \leq s(1) < s(2) < \dots$ se define como

$$[\![t]\!] = \begin{cases} \{0\}, & \text{si } t = 0 \\ \{n\}, & \text{si } t \in (s(n), s(n+1)) \\ \{n-1, n\}, & \text{si } t = s(n) \end{cases}$$

Esta definición nos permite identificar de manera única cualquier regla de redondeo a partir de su secuencia de saltos subyacente, por lo que utilizaremos cualquiera de estas dos caracterizaciones de manera indistinta. La relación fundamental que nos permite entender mejor el vínculo es la siguiente:

$$n \in [\![t]\!] \text{ si y solo si } s(n) \leq t \leq s(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \geq 0.$$

En principio, partiendo de la definición anterior, una secuencia de saltos podría tener varios puntos concentrados en un mismo intervalo de la forma $[n, n+1]$ para $n \in \mathbb{N}$, como podemos observar en el siguiente ejemplo:

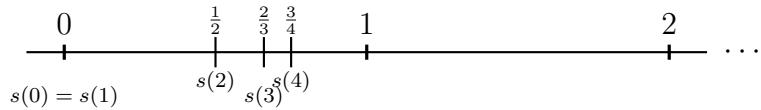


Figura 2.1: Ejemplo de secuencia de saltos espuria, con $s(0) = 0; s(i) = 1 - \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Como queremos evitar esto, extenderemos la definición de *secuencia de saltos* para que solamente contemple sucesiones "razonables". Este término lo entendemos en el sentido de que los números redondeados a $n \in \mathbb{N}$ deben tener a n cerca, es decir, $n \in [s(n), s(n+1)]$.

Definición 2.3. (Secuencia de saltos) Llamamos *secuencia de saltos* a una sucesión $(s(0), s(1), s(2), \dots)$ que verifica las siguientes propiedades:

- I) (*Inicialización*) $s(0) = 0$;
- II) (*Localización*) $s(n) \in [n-1, n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- III) (*Disjunción izq-der*)

$$s(n) = n-1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \implies s(m) < m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$s(n) = n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \implies s(m) < m-1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Esta última condición nos permite concluir que, exceptuando $s(1)$ – cuyo valor podría ser $0 = s(0)$ –, la secuencia será estrictamente creciente. Para ver esto, basta observar que la única forma de que dos términos consecutivos coincidan es si $s(n) = n = s(n+1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Esta posibilidad queda excluida por la condición III) de *Disjunción izq-der*, puesto que $s(n) = n \implies s(m) > m \quad \forall m \in \mathbb{N}$, y de forma análoga se ve el otro caso.

Con esta nueva definición de *secuencia de saltos* podemos descomponer al intervalo $[0; +\infty)$ como

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [s(i), s(i+1)),$$

pero ahora con la garantía de que $n \in [s(n), s(n+1)]$.

Ejemplo 2.4. (Secuencias de saltos estacionarias) Un caso particular – y bastante natural de definir– de secuencias de saltos son las *secuencias de saltos estacionarias*, que dependen de un parámetro $r \in [0; 1]$ y se definen como

$$\begin{aligned} s_r(0) &= 0; \\ s_r(n) &= n - 1 + r \quad \forall n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

por lo que dividen al intervalo real no negativo en los puntos $0, r, 1+r, 2+r, \dots$

Esta familia de métodos recorre un amplio espectro de reglas de redondeo típicas: para $r = 0$ define el método de redondeo usualmente denominado "*techo*" o "*redondeo hacia arriba*" y denotado $\lceil \cdot \rceil$; para $r = \frac{1}{2}$ define el método de redondeo tradicional; para $r = 1$ define el método de redondeo usualmente denominado "*piso*", "*redondeo hacia abajo*" o "*parte entera*", denotado $\lfloor \cdot \rfloor$.

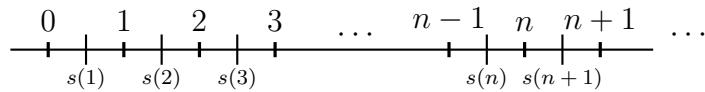


Figura 2.2: Ejemplo de secuencia de saltos estacionaria con $r = \frac{1}{2}$: $s_r(i) = i - \frac{1}{2}$.

Quizás pueda parecer inútil definir reglas de redondeo de esta forma tan general, pero basta observar el siguiente ejemplo para darse cuenta de que los métodos más típicos ($\lceil \cdot \rceil$, $\lfloor \cdot \rfloor$, redondeo estándar) no permiten resolver de forma satisfactoria ciertos escenarios.

| 1975 | Población | Proporción | Porcentaje |
|---------------------|----------------------|----------------|------------|
| Asia | 2 295 000 000 | 0.57289 | 57 |
| Europa | 734 000 000 | 0.18323 | 18 |
| Américas | 540 000 000 | 0.13480 | 13 |
| África | 417 000 000 | 0.10409 | 10 |
| Australia y Oceanía | 20 000 000 | 0.00499 | 0 |
| Suma | 4 006 000 000 | 1.00000 | 98 |

Tabla 2.1: Porcentajes de población por continente de acuerdo a la regla estándar de redondeo. Se observa cómo esta regla de redondeo no basta para alcanzar una solución en la que la suma de porcentajes sea efectivamente del 100 %. Tabla extraída de [Puk17]

Definición 2.5. (Métodos de divisor) Consideramos como método de divisor inducido por la regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ a aquél método de *apportionment* cuya imagen es el conjunto de asignaciones dado por

$$A(\vec{v}, H) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n(H) : x_i \in \left\llbracket \frac{v_i}{D} \right\rrbracket \quad \forall i \in [n], \text{ para cierto } D > 0 \right\}.$$

La idea de esta familia de métodos es "dividir y redondear" ([Puk17]), dividiendo los votos por cierto divisor $D > 0$ y luego aplicando la regla de redondeo $\llbracket \cdot \rrbracket$ a los resultados, de forma tal que tomando cantidades $x_i \in \left\llbracket \frac{v_i}{D} \right\rrbracket$, los vectores resultantes sean asignaciones válidas, ie $x_+ = H$.

Proposición 2.6. Los métodos de divisor satisfacen anonimidad, balance, concordancia, decencia y exactitud.

Demostración: La demostración no es ni muy relevante ni muy instructiva, por lo que no la realizaremos en el presente trabajo. \square

Teorema 2.7. (Desigualdad max-min)

Sea A el método de divisor inducido por la regla de redondeo con secuencia de saltos $s(0), s(1), s(2), \dots$.

Entonces, una asignación de bancas $x \in \mathbb{N}^n(H)$ pertenece al conjunto de asignaciones de bancas para el vector $\vec{v} \in (0, \infty)^n$ dado por $A(\vec{v}, H)$ si y solo si

$$\max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)}$$

Esta desigualdad nos brinda el rango de valores en el que podemos tomar el divisor $D > 0$ tal que $x \in A(\vec{v}, H)$.

Demostración: x es una asignación dada por el método de divisor A si y solo si $\exists D > 0$ tal que $x_j \in [\frac{v_j}{D}] \forall j \in [n]$, lo cual sucede si y solo si

$$\begin{aligned} s(x_j) \leq \frac{v_j}{D} \leq s(x_j + 1) \quad \forall j \in [n] &\iff \\ \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq D \leq \frac{v_j}{s(x_j)} \quad \forall j \in [n] &\iff \\ \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq D \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} &\implies \\ \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} & \end{aligned}$$

Y esto demuestra la ida.

Para la vuelta, el hecho de que se verifique la desigualdad max-min garantiza la existencia de $D > 0$ para que $x \in A(\vec{v}, H)$. \square

Definiremos los siguientes conjuntos de índices, que permitirán entender cómo construir nuevas soluciones a partir de una solución dada:

$$\begin{aligned} I(x, v) &= \left\{ i \in [n] : \frac{v_i}{s(x_i + 1)} = \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \right\} \\ K(x, v) &= \left\{ k \in [n] : \frac{v_k}{s(x_k)} = \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} \right\} \end{aligned}$$

Proposición 2.8. (Unicidad de divisor)

Dados A un método de divisor, $H \in \mathbb{N}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} \{x\} = A(\vec{v}, H) &\iff \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} < \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} \\ \{x\} \subsetneq A(\vec{v}, H) &\iff \max_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j + 1)} = \min_{j \in [n]} \frac{v_j}{s(x_j)} \end{aligned}$$

Esto nos dice que el divisor $D > 0$ para el cual el método A queda bien definido es único solamente si A retorna soluciones múltiples.

Demostración: Teniendo en cuenta que ambas condiciones son complementarias, basta con probar la segunda.

Para la ida, supongamos que $x, y \in A(\vec{v}, H)$ son dos soluciones distintas, $x \neq y$. Sean $D(x), D(y)$ divisores para x e y respectivamente. Si se tuviera que $D(x) > D(y)$, por monotonía valdría que $x_i \leq y_i \forall i \in [n]$. Dado que el total de bancas es igual para ambos vectores – $x_+ = y_+ = H-$, ambos vectores deben coincidir, contradiciendo el hecho de que sean distintos, por lo que no puede suceder que $D(x) > D(y)$. De igual forma se ve que tampoco vale $D(x) < D(y)$, por lo que se concluye que $D(x) = D(y) = D$. Se tiene entonces que $x_i, y_i \in \llbracket \frac{v_i}{D} \rrbracket \forall i \in [n]$. Como $x \neq y$ y $x_+ = y_+ = H$, debe haber dos componentes $j \neq k$ tales que $x_j < y_j$ y $x_k > y_k$. Pero como $x_j, y_j \in \llbracket \frac{v_j}{D} \rrbracket$, debe tenerse $x_j + 1 = y_j$, y se debe cumplir $\frac{v_j}{D} = s(x_j + 1)$. De igual forma, $x_k = y_k + 1$, y se tiene el empate $\frac{v_k}{D} = s(x_k)$. En consecuencia,

$$D = \frac{v_j}{s(x_j + 1)} \leq \max_{i \in [n]} \frac{v_i}{s(x_i + 1)} \leq \min_{i \in [n]} \frac{v_i}{s(x_i)} = \frac{v_k}{s(x_k)} = D,$$

por lo que vale la igualdad en la desigualdad Max-Min.

Para la vuelta, supongamos que $\max_{i \in [n]} \frac{v_i}{s(x_i + 1)} = \min_{i \in [n]} \frac{v_i}{s(x_i)} = D$. Como las opciones de incremento $i \in I(x, v)$ están empatadas – $\frac{v_i}{D} = s(x_i + 1)-$, se redondean a $\llbracket \frac{v_i}{D} \rrbracket = \{x_i, x_i + 1\}$. Las opciones de decremento $k \in K(x, v)$ también se encuentran empatadas – $\frac{v_k}{D} = s(x_k)-$, por lo que se redondean a $\llbracket \frac{v_k}{D} \rrbracket = \{x_k - 1, x_k\}$.

Estos dos conjuntos son disjuntos: $I(x, v) \cap K(x, v) = \emptyset$. Si no fuese el caso, se tendría $j \in I(x, v) \cap K(x, v)$ tal que $\frac{v_j}{s(x_j + 1)} = D = \frac{v_j}{s(x_j)}$, contradiciendo el hecho de que las secuencias de saltos son estrictamente crecientes. Luego, podemos tomar $i \in I(x, v)$ y $k \in K(x, v)$, y definir el vector y como $y_i = x_i + 1$, $y_k = x_k - 1$, $y_j = x_j \forall j \neq i, k$, construyendo otra solución $y \neq x$, $y \in A(H, \vec{v})$. \square

La desigualdad max-min, con la respectiva elaboración de los conjuntos $I(\vec{v}, H)$ y $D(\vec{v}, H)$, ayuda a pensar en el siguiente algoritmo polinomial para construir vectores de asignaciones $x \in A(\vec{v}, H)$:

Algoritmo 3: Construcción de vector de asignaciones para métodos de divisor.

Resultado: $x \in A(\vec{v}, H)$ vector de asignaciones

```

1 Tomando  $D := \frac{v_+}{H}$ , definir:
2    $x_j = \llbracket \frac{v_j}{D} \rrbracket$  para cada  $j \in [n]$ 
3 Si  $x_+ = H$  entonces
4   return x
5 fin
6 Sino
7   Si  $x_+ < H$  entonces
8     elegir  $i \in I(x, v)$  y aumentar  $x_i$  en una unidad
9     repetir este paso hasta que  $x_+ = H$ 
10  fin
11  Sino
12    elegir  $k \in K(x, v)$  y disminuir  $x_k$  en una unidad
13    repetir este paso hasta que  $x_+ = H$ 
14  fin
15 fin
16 return x

```

2.2. Métodos de quota

Citando las palabras de [Puk17], una manera de pensar a los métodos de quota es la siguiente: “[...] los métodos de quota se pueden ver como procedimientos complementarios a los métodos de divisor. Los métodos de divisor fijan la regla de redondeo y ajustan el divisor. Los métodos de quota fijan el divisor y ajustan la regla de redondeo.”

De esta forma, los métodos de quota se caracterizan por tener un divisor $Q > 0$ prefijado (típicamente la *Hare-Quota*), elegido por tener alguna característica persuasiva. Posteriormente, lo que se modifica es la regla de redondeo utilizada para ajustar los cocientes resultantes al dividir los votos por Q .

Estos métodos constan de dos etapas:

- En primer lugar se dividen las cantidades de votos de cada partido por el divisor prefijado Q , y se asigna a cada partido la parte entera de su respectivo cociente, denominado *quota inferior*: $\lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor =: y_i$. De esta forma, se asignan $m := y_+ = \sum_{i=1}^n y_i$ bancas. Cabe aclarar que el divisor Q elegido debe ser tal que en esta primera etapa no se asignen más bancas de las que hay, $m \leq H$, y que no falte asignar más de una banca por partido, $H - m \leq n$.
- Dado que en la primera etapa se asignaron m bancas, resta asignar $H - m \in \{0, \dots, n\}$ bancas. Para esto, se establece un ordenamiento de los partidos de acuerdo a algún criterio que depende de los restos $\frac{v_i}{Q} - \lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor$, y se asignan las bancas restantes a los primeros $H - m$ partidos de este ordenamiento.

El método de quota más típico es el de Hamilton, enunciado en la sección 1.3, que utiliza como divisor Q la *Hare-Quota* $HQ(\vec{v}, H)$ definida anteriormente. Asigna las partes enteras de los cocientes resultantes, y luego simplemente ordena decrecientemente los restos $\frac{v_i}{Q} - \lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor$, asignando las $H - m$ bancas restantes a los $H - m$ partidos que tengan los restos más grandes.

Existe la posibilidad de que este método no entre en la segunda etapa de los métodos de quota. Para que ocurra esto, la primera etapa debe asignar todas las bancas disponibles, lo cual sucede únicamente si los restos resultantes luego de la primera asignación son todos 0, ie $\lfloor \frac{v_i}{Q} \rfloor = \frac{v_i}{Q} \forall i \in [n]$. Esta última condición dice que las cantidades de votos de los partidos deben ser todas múltiplos enteros de la *Hare-Quota*, lo cual es sumamente improbable.

2.2.1. Métodos shift-quota

Los métodos shift-quota surgen a partir de pensar en que utilizando un divisor d distinto de $HQ(\vec{v}, H)$ se puede llegar a un método de quota con mejores propiedades que el de Hamilton. Se define la shift-quota con shift $s \in [-1; 1]$ como el divisor

$$d = Q(s) := \frac{v_+}{H + s}.$$

La utilidad de usar shifts $s \in [-1; 1]$ tiene que ver con buscar que, al utilizar la shift-quota y luego ajustar los residuos con el criterio de "residuos más grandes", el método resultante sea válido.

En efecto, la asignación de la primera etapa otorga $y_j = \lfloor \frac{v_j}{Q(s)} \rfloor = \lfloor \frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) \rfloor$ bancas al partido $j \in [n]$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
y_+ &= \sum_{i=1}^n \lfloor \frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) \rfloor \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) \\
&= H + s \\
&< H + 1, \quad \text{pues } s < 1,
\end{aligned}$$

y por la integralidad de y_+ resulta $y_+ \leq H$.

Para la cota inferior,

$$\begin{aligned}
y_+ &> \sum_{i=1}^n \left[\frac{v_j}{v_+} \cdot (H + s) - 1 \right] \\
&= (H + s) - n \\
&\geq H - n - 1, \quad \text{pues } s \geq -1.
\end{aligned}$$

Proposición 2.9. (*Desigualdad max-min para métodos shift-quota*) Consideremos un método shift-quota con ajuste por residuos más grandes y shift $s \in [-1; 1)$ $A_s(\cdot, H)$. Entonces un vector de asignaciones $x \in \mathbb{N}_0^n(H) \in A_s(\vec{v}, H)$ si y solo si

$$\max_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) - x_j \right) \leq \min_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) + 1 - x_j \right).$$

Esta desigualdad permite definir el intervalo de *splits*

$$R(\vec{v}, x) := \left[\max_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) - x_j \right); \min_{j \in [n]} \left(\frac{v_j}{v_+} (H + s) + 1 - x_j \right) \right].$$

Este intervalo tiene los valores $r \in [0; 1]$ que sirven como umbral, al considerar los restos, para separar las partes fraccionarias de los partidos que reciben bancas extra de los que no.

Corolario 2.10. (*Métodos shift-quota y métodos de divisor estacionarios*) Llamemos $shQgrR_s$ al método shift-quota con shift $s \in [-1; 1)$ y ajuste por residuos más grandes. Para todo $H \in \mathbb{N}$ y $\vec{v} \in (0; \infty)^n$ existe $r^* \in [0; 1]$ – dependiente de s, H y \vec{v} – tal que $shQgrR_s$ y el método de divisor con regla de redondeo estacionario de parámetro r^* tienen el mismo conjunto de asignaciones,

$$shQgrR_s(\vec{v}, H) = DivSta_{r^*}(\vec{v}, H).$$

2.3. Resultados principales del área

En esta sección nos dedicaremos a analizar la utilidad y el grado de "justicia" con el que las familias de métodos enunciadas anteriormente permiten resolver el problema de *apportionment*. Esencialmente, veremos que los métodos de divisor son los únicos métodos que no producen ninguna de las paradojas de Alabama, Población y House Size mencionadas en la sección de ejemplos – o, en otras palabras, son los únicos métodos que verifican las propiedades de *monotonía de población*, *house monotonicity* y *coherencia*.

(que enunciaremos en breve) –. A su vez, el otro resultado importante que mencionaremos es que los métodos de divisor no satisfacen la propiedad *quota*, concluyendo de esta forma que no pueden existir métodos verdaderamente satisfactorios, en el sentido de que no produzcan paradojas y satisfagan la propiedad *quota* simultáneamente.

Dado que los siguientes resultados fueron descubiertos y enunciados en relación a paradojas vinculadas a contextos de repartición de bancas entre estados (y no entre partidos), los enunciaremos en esos mismos términos.

Proposición 2.11. (*Robustez de métodos de divisor ante paradoja de población*)

Un método de apportionment A evita la paradoja de población si y solo si A es un método de divisor.

Demostración: Es fácil ver la vuelta: dado A un método de divisor, supongamos que un estado s_1 aumenta su población relativa a otro estado s_2 y el estado s_2 gana bancas. Entonces, la quota del estado s_2 debe haber pasado algún punto de salto, pero como el aumento de s_1 es mayor relativo al de s_2 , la quota de s_1 también debe haber avanzado, y por lo tanto no puede haber perdido bancas.

La ida es más técnica y complicada y escapa a los fines de este trabajo, por lo que se puede revisar de [BY01]. \square

Proposición 2.12. (*Robustez de métodos de divisor ante paradoja de Alabama*)

Todo método de divisor A evita la paradoja de Alabama.

Demostración: En los métodos de divisor, la cantidad de bancas obtenidas por un estado es equivalente a la cantidad de puntos de salto que sobrepasó al dividir su cantidad de votos por cierto divisor d . Si la cantidad total de bancas a repartir aumenta, el divisor d debe decrecer, y por lo tanto las quotas $\frac{v_i}{d}$ aumentan. Esto implica que ningún estado puede perder bancas. \square

Proposición 2.13. (*Falencia de métodos de divisor ante propiedad quota*) *No existe método de divisor A que verifique la propiedad quota para todo problema.*

Introducimos la siguiente notación, que facilitará la escritura de las siguientes propiedades: dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$ y un subconjunto de índices $I \subset \{1, \dots, n\}$, notamos

$$x_I := \sum_{i \in I} x_i.$$

Esto nos permitirá formalizar un concepto planteado por [BY01], con el cual caracterizan la relación que ha de existir entre las partes y el todo de una solución: “ Un principio inherente a cualquier división justa es que toda parte de una división justa debe ser justa. A la inversa, la solución completa debe ser reconstruible a partir de concatenar soluciones de problemas parciales. El todo y sus partes deben encajar juntos de forma coherente. ” Introducimos entonces la definición de *coherencia*.

Definición 2.14. (*Coherencia*) Un método de *apportionment* A verifica la propiedad de *Coherencia* si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, todo vector de asignaciones $x \in A(\vec{v}, x_+)$ satisface, para cualquier subconjunto de partidos $I \subset \{1, \dots, n\}$, las siguientes propiedades:

1. (*Coherencia de subproblemas*)

$$(x_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I)$$

2. (*Concatenación de soluciones parciales*)

para todo $(y_i)_{i \in I} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I}, x_I)$ y para todo $(z_i)_{i \in I^c} \in A((\vec{v}_i)_{i \in I^c}, x_{I^c})$

se tiene que $((y_i)_{i \in I}, (z_i)_{i \in I^c}) \in A(\vec{v}, x_+)$.

Esencialmente, la propiedad de *coherencia* establece que, dada una asignación a de bancas a partir de un método A , si se utiliza el método sobre un subconjunto S de partidos con un tamaño de cámara de $\sum_{i \in S} a_i$, entonces la asignación correspondiente S debe permanecer igual que antes.

Teorema 2.15. (*Teorema de coherencia*)

Un método satisface la propiedad de coherencia si y solo si es un método de divisor.

Demostración: La prueba de la ida se realiza analizando una clase de métodos más amplia, los métodos rank-index, para luego construir una secuencia de saltos que permite concluir que A es un método de divisor.

Debido a su tecnicidad, no realizaremos esta demostración en el presente trabajo. \square

Corolario 2.16. (*Robustez de métodos de divisor ante paradoja de nuevos estados*) *Todo método de divisor A evita la paradoja de nuevos estados.*

Demostración: Para ver esto, pensemos en la *paradoja de nuevos estados* al revés de como fue planteada en la sección de paradojas: en lugar de considerar que se agrega un estado nuevo junto con la cantidad correspondiente de bancas según redondeando su quota justa (osea, la quota obtenida al dividir la población del nuevo estado por la Hare-Quota), consideremos un estado s que desaparece, llevándose consigo la cantidad a_s de bancas que tenía. Justamente, como sus bancas desaparecen, el divisor D que estaba siendo utilizado antes de la desaparición del estado s sigue sirviendo para los estados restantes, y al considerar $\lceil \frac{v_i}{D} \rceil$ para $i \in [n] \setminus \{s\}$, se tiene que la asignación que se tenía antes para los estados distintos de s sigue sirviendo. Dado que las asignaciones permanecen constantes ante la aparición/desaparición de un estado con sus respectivas bancas, no se produce la *paradoja de nuevos estados*. \square

2.4. Conclusiones y algunos resultados extra

Como ya hemos mencionado al comienzo de la sección anterior, la conjunción del *Teorema de Coherencia* y la propiedad de que los métodos de divisor no satisfacen *quota* funcionan, de alguna forma, como un resultado de imposibilidad: no existe método determinístico de *apportionment* que sea coherente y verifique la propiedad *quota* simultáneamente; no existe método determinístico verdaderamente satisfactorio.

El término "determinístico" en la frase anterior no es en vano: esta suerte de "Teorema de imposibilidad" no permite extraer conclusiones sobre métodos aleatorizados. Si bien las propiedades deseables que enunciamos en la subsección 1.2.1 no hacen referencia a métodos que contemplen algún factor de aleatoriedad, veremos cómo definir formalmente

esta familia de métodos, junto con propiedades análogas, para poder realizar un análisis sistemático de esta familia de métodos. No obstante, antes de analizar este universo de métodos, revisamos algunos conceptos y resultados extra sobre los métodos determinísticos que pueden resultar interesantes.

Uno de los conceptos interesantes que introduce [Puk17] es el de *mayoración*, que permite entender la relación entre distintos métodos de *apportionment* a la hora de favorecer o perjudicar a los partidos más grandes. Se basa, esencialmente, en establecer una relación de orden entre métodos, definiendo que un método A mayora (\succeq) a otro método B si, al considerar a los partidos ordenados decrecientemente por proporción de votos ($w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$), el método A asigna un total de bancas mayor que B a cualquier subconjunto I de k partidos más grandes ($I = \{1, \dots, k\} \wedge x \in A(\vec{w}, H), y \in B(\vec{w}, H) \implies x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + \dots + y_k$).

En relación a este concepto, se tiene la siguiente propiedad, sobre la cual daremos una intuición desarrollada por [BY01].

Proposición 2.17. *El método de Webster - Saint-Laguë es el único método de divisor insensado, en el sentido de que no favorece particularmente a los partidos grandes ni a los partidos chicos.*

Demostración: La intuición sobre esta idea es que, a priori, si los restos se distribuyen de manera uniforme, la probabilidad de que el resto de un partido específico esté por encima de $\frac{1}{2}$ es igual que la probabilidad de que esté por debajo, y esto sucede para cualquier partido independientemente de su tamaño. Por ende, como el método de Webster redondea hacia arriba los restos que se encuentran por encima de $\frac{1}{2}$ y hacia abajo los que se encuentran por debajo, cada partido debería ser beneficiado o perjudicado con la misma frecuencia, sin dependencia de su tamaño. \square

Otra cuestión interesante que analiza [Puk17] es cómo extender de forma coherente el método de apportionment natural para 2 partidos: utilizar redondeo estándar $\llbracket \cdot \rrbracket$ (recordamos que, en caso de que la parte fraccionaria del número a redondear fuese igual a $\frac{1}{2}$, el redondeo estándar retornaba las dos opciones posibles: redondeo hacia arriba o hacia abajo). Es decir, si se tienen dos partidos con cantidades de votos dadas por $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$ y H bancas a repartir, asignarles (x_1, x_2) bancas respectivamente, con

$$x_1 \in \left[\frac{v_1}{v_1 + v_2} H \right] \quad \wedge \quad x_2 \in \left[\frac{v_2}{v_1 + v_2} H \right].$$

El análisis de esta situación llega a la conclusión de que el único método que extiende esta asignación de 2 partidos en forma coherente es el método de divisor con redondeo estándar: el de Webster/Saint-Laguë.

Otros resultados interesantes que puede valer la pena mencionar, relacionado con métricas de optimización, es el siguiente:

El método de Webster es el que minimiza $\sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{s_i}{w_i} - 1 \right)^2$, con s_i la fracción de bancas y w_i la fracción de votos del partido i . Aquí, $\frac{s_i}{w_i}$ refleja el cociente entre la proporción de bancas y la proporción de votos de un partido. Al restarle 1 y elevarlo al cuadrado, se calcula "cuánto se aleja" ese cociente del cociente ideal, midiendo el error cuadrático. Para conseguir representación igual de todos los votantes, esas cantidades se pesan por v_i , la cantidad de votantes del partido i . Esto es demostrado por [Sai10].

Hay caracterizaciones de algunos otros métodos en términos de cuál es la métrica que optimizan, pero por cuestiones de tiempo no serán enunciadas. Se puede revisar más contenido relacionado con esto en [Puk17].

Capítulo 3

Métodos aleatorizados

3.1. Introducción a métodos aleatorizados

A grandes rasgos, se puede definir a los métodos de *apportionment* aleatorizados de la siguiente forma general:

Definición 3.1. Un método de *apportionment* aleatorizado A es una función que toma un vector de votos $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ y una cantidad de bancas $H \in \mathbb{N}$ y retorna un vector aleatorio $A(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H , e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido.

Dado que nos interesará particularmente buscar métodos que satisfagan la propiedad quota, consideraremos una familia específica de métodos aleatorizados: los *quota-compliant*. Para definirlos, consideramos un escenario análogo al del comienzo: $n \in \mathbb{N}$ partidos, $H \in \mathbb{N}$ bancas, $\vec{v} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ vector de votos y $\vec{q} \in (0, H]^n$ vector de quotas (calculado a partir de la *Hare-Quota*, con $q_i = \frac{v_i}{HQ(\vec{v}, H)}$). Introducimos ahora

- $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ vector de restos, con $p_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor$. Observamos que $0 \leq p_i < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.
- Para un conjunto S y $k \in \mathbb{N}$, definimos $\binom{S}{k} := \{T \subseteq S / |T| = k\}$.

Los métodos aleatorizados *quota-compliant* serán aquellos que asignen, en primer lugar, $\lfloor q_i \rfloor$ bancas a cada partido $i \in [n]$ (al igual que los métodos de quota), y luego utilicen los restos $p_i \in [0, 1)$ como probabilidades de asignación (los llamaremos también probabilidades marginales) para determinar a qué partidos asignarles las bancas remanentes.

Como en la primera etapa se asignan $\sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor$ bancas, denominamos

$$k = \sum_{i=1}^n p_i = H - \sum_{i=1}^n \lfloor q_i \rfloor \in \{0, \dots, n-1\}$$

a la cantidad de bancas pendientes de ser repartidas. De esta forma, los métodos aleatorizados *quota-compliant* buscarán elegir de forma aleatoria un conjunto $S \in \binom{[n]}{k}$ de los partidos a los que se les asignarán las bancas remanentes. Esta elección deberá respetar, de alguna forma, las probabilidades p_i . El primer requisito con el cual impondremos la condición de que se respeten estas probabilidades es una condición definida por Grimmett en [Gri04]: la *proporcionalidad Ex-Ante*, que establece que la cantidad esperada de bancas que recibe un partido debe ser q_i .

Consideraremos las funciones de redondeo aleatorizado que definiremos a continuación, introduciendo primero la siguiente definición para simplificar notación:

Definición 3.2. (Simplex de probabilidades)

Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$. El *simplex de probabilidades* n -dimensional es

$$\Omega_n := \{\vec{w} \in [0; 1]^n : w_+ = 1\}.$$

Su reescalamiento por k es

$$\Omega_n^k := \{\vec{w} \in (0; 1)^n : w_+ = k\}.$$

Con esta notación, los vectores de restos \vec{p} que consideraremos serán los pertenecientes al simplex de probabilidades reescalado Ω_n^k .

Definición 3.3. Una regla de *redondeo* aleatorio r es una función que toma un vector de residuos $\vec{p} \in \Omega_n^k$, y le asigna un conjunto aleatorio $r(\vec{p}) \in \binom{[n]}{k}$ que representa el conjunto de los k partidos seleccionados. Además, la probabilidad de que el partido i esté en el conjunto seleccionado $r(\vec{p})$ debe ser igual a $p_i \forall i \in [n]$.

Una manera de reformular el problema es pensar en buscar $X_i \in \{0, 1\} / \sum_{i=1}^n X_i = K$ y $\mathbb{E}[X_i] = p_i$. La distribución del vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ estará dada por algún algoritmo aleatorizado, es decir, $r(\vec{p}) = \{i \in [n] : X_i = 1\}$ para algún método r .

Existe una correspondencia biunívoca entre métodos de *apportionment quota-compliant* y proporcionales *ex-ante* y reglas de redondeo aleatorio: en efecto, dado $\vec{p} \in \Omega_n^k$, un método a asignará un vector $a(\vec{p}, k) \in \{0, 1\}^n$ que suma k (por ser *quota-compliant* las coordenadas del vector están en $\{0, 1\}$) que se puede interpretar como el subconjunto de k elementos seleccionados de entre $\{1, \dots, n\}$. Por ser *ex-ante*, se verifica la condición de las probabilidades marginales: $\mathbb{E}[a(\vec{p}, k)_i] = p_i$. De igual forma, dado un vector de votos \vec{v} y una cantidad de bancas $H \in \mathbb{N}$, siguiendo la idea enunciada anteriormente, se puede asignar inicialmente $[q_i]$ bancas a cada partido $i \in [n]$, y luego utilizar un método de redondeo r para asignar las k bancas restantes de acuerdo al vector de restos \vec{p} . De esta forma, el método de *apportionment* resultante verifica *quota* y *ex-ante*.

Esta correspondencia permite conectar al problema de *apportionment* con un problema propio del mundo de la matemática estadística, conocido como *tps* ("probability proportional to size") sampling sin reposición, de donde [Cor+24] extrae algunos métodos para analizar. Esencialmente, este área trata el mismo problema que intentamos abarcar ahora: samplear un conjunto $S \in \binom{[n]}{k}$ respetando las probabilidades marginales dadas por p_i .

3.1.1. Propiedades fundamentales para métodos aleatorizados

Definición 3.4. (Proporcionalidad Ex-ante) Reformulamos esta propiedad para métodos de *redondeo*:

Una regla de *redondeo* r se dice *proporcional Ex-ante* si $\forall \vec{p} \in \Omega_n^k$, se tiene que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{i \in r(\vec{p})\}}] = p_i \forall i \in [n]$. Es decir, la cantidad esperada de bancas extra asignadas a cada partido se corresponde con su resto p_i .

Definición 3.5. (Monotonía de selección)

Una regla de *redondeo* r verifica la propiedad de **monotonía de selección** si dados $T \in \binom{[n]}{k}$ un conjunto de k partidos, y $p, p' \in [0, 1]^n$ dos vectores de residuos que suman k tales que $p'_i \geq p_i \forall i \in T \wedge p'_i \leq p_i \forall i \notin T$, se tiene que

$$\mathbb{P}_{S \sim r(p')}[S = T] \geq \mathbb{P}_{S \sim r(p)}[S = T]$$

Definición 3.6. (Monotonía fuerte de selección)

Una regla de *redondeo* r verifica la propiedad de **monotonía de selección** si dados $T \subseteq [n]$ tal que $|T| \leq k$, y $p, p' \in [0, 1]^n$ dos vectores de residuos que suman k tales que $p'_i \geq p_i \forall i \in T \wedge p'_i \leq p_i \forall i \notin T$. Entonces

$$\mathbb{P}_{S \sim r(\vec{p}')}[T \subseteq S] \geq \mathbb{P}_{S \sim r(\vec{p})}[T \subseteq S]$$

3.2. Ejemplos

3.2.1. Método de Grimmett (2004) - *Systematic rounding*

Se podría decir que este método es el más "natural" que a uno se le ocurriría a la hora de diseñar un sistema aleatorizado *quota-compliant*, propuesto por [Gri04]: reordenando los partidos de forma aleatoria, se le asigna a cada partido un intervalo de longitud igual a su resto p_i (con p_i el resto del partido i luego del reordenamiento), colocando los intervalos uno a continuación del otro en el intervalo $[0, k]$, que, como $p \in \Omega_n^k$, resulta completamente cubierto por los intervalitos. Llamamos $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$.

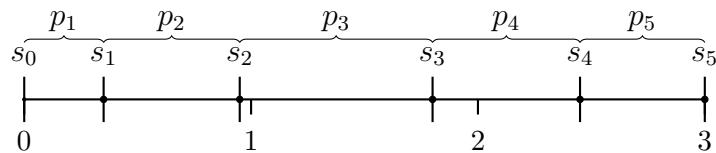


Figura 3.1: Segmento ilustrativo de la disposición inicial del método de Grimmett, con $n = 5$ y $k = 3$. La longitud de los segmentos $[s_{i-1}, s_i]$ es p_i para $i \in \{1, \dots, 5\}$. Los puntos s_i están ubicados en las posiciones $s_i = \sum_{j=1}^i p_j$.

Posteriormente, se sortea una variable $U \sim \text{Unif}[0, 1]$, y se desplazan los puntos s_i a $s'_i = s_i + U$. Los intervalos $[s'_{i-1}, s'_i]$ son iguales a los originales desplazados en U , por lo que siguen midiendo p_i , y la probabilidad de que contengan un entero es proporcional a p_i . De esta forma, asignando las bancas a los partidos cuyos intervalos contengan un entero se tiene una asignación de las k bancas pendientes de ser repartidas, puesto que en el intervalo $[U, k+U]$ hay exactamente k enteros.

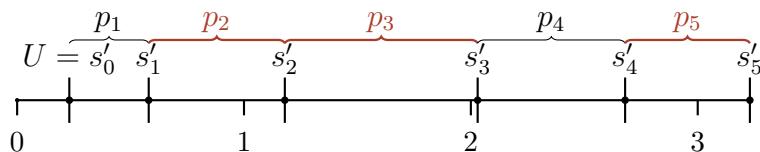


Figura 3.2: Segmento ilustrativo de la disposición final del ejemplo anterior. Los segmentos $[s'_{i-1}, s'_i]$ fueron desplazados en U . Marcados en rojo se encuentran los segmentos que contienen a un entero, correspondientes a los partidos 2, 3 y 5.

3.2.2. Formulación como problema de optimización de medida

Pensando en que estamos buscando algoritmos aleatorizados que seleccionen conjuntos de k partidos verificando cumplir con las probabilidades marginales dadas por p_i , podemos

pensar en que estamos buscando distribuciones de probabilidad sobre un espacio muestral dado por los conjuntos $S \in \binom{[n]}{k}$. Si además buscamos que dicha distribución sea un punto extremal de algún funcional g sobre el espacio de medidas definidas en $\binom{[n]}{k}$, se abre la posibilidad de construir un método de distribución de bancas a partir de buscar las probabilidades de selección de cada conjunto encontrando una solución factible del siguiente problema:

Encontrar $\mu : \binom{[n]}{k} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ solución de

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} g(\mu) \\ \text{s.a. } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1 \\ \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \end{array} \right. \end{aligned}$$

A partir de este planteo, surge la siguiente serie de preguntas:

- ¿Qué g se puede elegir para que la medida inducida por el algoritmo de *Sampford* sea la solución óptima? Sabemos que dicha medida es factible.
- Más en general, ¿qué g se puede elegir para encontrar una medida que verifique *monotonía de selección*?
- ¿Existe algún modo de enunciar la propiedad de *monotonía de selección* a partir de μ_A , p_i y p'_i de forma lineal como para introducirla en forma de restricción?
- ¿Tendría sentido que el funcional g busque minimizar la distancia con respecto a la medida inducida por el algoritmo de *Sampford*?

Vale observar que la primera restricción es innecesaria, pues si sumamos la segunda restricción sobre $i \in [n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) &= \sum_{i=1}^n p_i \\ k \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) &= k, \end{aligned}$$

pues del lado izquierdo estamos contando k veces cada conjunto (1 vez por cada elemento que contiene, es decir, k veces en total), y del lado derecho nos queda la suma de los p_i que es exactamente k .

Dividiendo por k a ambos lados, se tiene la primera restricción:

$$\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1$$

Es importante ver que, más allá de cuál sea la función objetivo g , existe una única solución para los casos en los que $k \in \{1, n-1\}$, pues en ambos casos el sistema resultante de las restricciones es lineal de $n \times n$ y de rango n . En consecuencia, hay solamente una solución factible, dada por $\mathbb{P}_p(S = \{i\}) = p_i$ en el caso de $k = 1$, o por $\mathbb{P}_p(S = [n] \setminus \{i\}) = 1 - p_i$ en el caso de $k = n-1$. Además, para estos dos valores de $k \in \{1, n-1\}$, la linealidad sobre los p_i provoca que cualquier método verifique *monotonía de selección*.

Por otro lado, incorporación de la restricción provoca que automáticamente se verifique *proporcionalidad Ex-Ante* para cualquier solución de este problema, por lo que el interés sobre métodos fabricados a partir de esta formulación radicará en verificar si cumplen *monotonía de selección* para $k \notin \{1, n-1\}$.

3.2.3. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía

Propuesto como método de πps por [CDL94] y retomado como método de *apportionment* en [Cor+24], este método consiste en hacer exactamente el planteo de la sección anterior, utilizando como función objetivo la entropía de la distribución, dada por

$$H(S) = \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) \frac{1}{\log(\mu(B))}$$

donde $S \in \binom{[n]}{k}$ tiene distribución dada por μ .

A la hora de pensar en la motivación de este método surge la duda de por qué se busca maximizar la entropía. Considerando que la entropía cuantifica la cantidad de información o incertidumbre a priori que se tiene sobre los resultados posibles al samplear de una distribución, en cierta forma se está buscando tener "la menor cantidad información a priori" sobre qué subconjunto de k partidos será seleccionado. En otras palabras, es un modo de intentar maximizar la incertidumbre previa que se tiene acerca de qué partidos serán seleccionados, siempre sujetos a la restricción de las probabilidades condicionales.

[SV13; CDL94] caracterizan a esta distribución como una distribución producto: la solución del problema verifica que

$$\mu(S) = \prod_{i \in S} \lambda_i,$$

con $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ obtenido mediante la formulación dual del problema.

Otra forma en la que [CDL94] caracteriza a esta distribución es la que le da el nombre de *Conditional Poisson Rounding*: se definen variables $Z_i \sim Bernoulli(p_i)$ independientes (Poisson Trial), y la distribución del vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ como la distribución del vector Z condicional a que $\sum_{i=1}^n Z_i = k$. De esta forma, se construye el conjunto de partidos seleccionados a partir de un *Poisson Trial* condicionado a tener exactamente k elementos.

Las 3 formas equivalentes de definir este método brindan un sistema *quota-compliant* y *proporcional ex-ante*: por construcción resulta automáticamente *quota-compliant*, y la restricción de las probabilidades marginales en la formulación de máxima entropía lo hace *proporcional ex-ante*. Cabe preguntarse ¿verificará también *monotonía de selección*? Lo veremos en la próxima sección.

Una cuestión importante relativa a este método es el hecho de que depende fuertemente de ser computado mediante algún solver de optimización, dado que no hay forma

analítica de encontrar la distribución de máxima entropía. Si bien en [Cor+24], citando a [Til25], proponen encontrar el vector $\vec{\lambda}$ utilizando el método de Newton, esta solución tampoco resulta exacta. Esto provoca que siempre exista un grado de imprecisión en la distribución encontrada, propia del error numérico de los solvers computacionales y los métodos numéricos como Newton.

3.2.4. Algoritmo de Sampford (67')

Introducimos el algoritmo de *rounding* introducido por Sampford [SAM67]. En la siguiente sección analizaremos las propiedades que cumple, siguiendo el trabajo de [Cor+24].

Algoritmo 4: Sampford

Resultado: Encontrar un conjunto aleatorio de K partidos de acuerdo a las probabilidades marginales dadas por p_i , con reposición

```

1 Inicializamos  $S = \{\}$  ;
2 Samplear un elemento con probabilidad proporcional a  $p_i$  y asignarle una banca
   agregándolo a  $S$ ;
3 Reponer el elemento;
4 Para  $1 \leq j \leq K - 1$  hacer
5   | Samplear un elemento con probabilidad proporcional a  $\frac{p_i}{1-p_i}$  y agregarlo a  $S$ ;
6   | Reponer;
7 fin
8 Si  $|S| = K$  entonces
9   | return  $S$ ;
10 fin
11 Sino
12   | Reiniciar todo el procedimiento ;
13 fin
```

La intuición de definir las probabilidades de los sampleos $2, \dots, k$ proporcionales a $\frac{p_i}{1-p_i}$ no es para nada clara. No obstante, veremos que al ser sampleo sin reposición, la utilización de estas probabilidades resulta en que el método sea *proporcional ex-ante*. Una desventaja de este método es que no tiene una cota estricta en la cantidad de iteraciones que realiza, puesto que en cada ejecución hay probabilidad positiva de seleccionar 2 veces un mismo elemento, ocasionando que se deba reiniciar el procedimiento.

Como bien observan en [Cor+24], la rareza – o el ingenio – de este método radica en la elección de las probabilidades de sampleo: si los k elementos fueran elegidos con probabilidades proporcionales a $\frac{p_1}{1-p_1}$, se tendría una distribución producto en la que la probabilidad de seleccionar a un conjunto A sería proporcional a $\prod_{i \in A} \frac{p_1}{1-p_1}$. Por el resultado de [SV13], esta distribución producto correspondería a una distribución de máxima entropía, pero con probabilidades marginales erróneas. Lo extraño es que, sabiendo que no hay forma analítica de encontrar una fórmula cerrada para deducir las probabilidades de *Conditional Poisson Rounding*, simplemente corrigiendo las probabilidades de selección del primer elemento por p_i en lugar de $\frac{p_1}{1-p_1}$, se consigue que las probabilidades marginales sean las deseadas (y por ende, que el método sea *proporcional ex-ante*, como demostraremos en la próxima sección).

3.2.5. Algoritmo de Brewer (63')

Propuesto en [Bre08], este algoritmo tampoco goza de demasiada transparencia a la hora de entender la forma en la que se redefinen iterativamente las probabilidades de sampleo.

Algoritmo 5: Brewer

Resultado: Encontrar un conjunto aleatorio de K partidos de acuerdo a las probabilidades marginales dadas por p_i , sin reposición

- 1 Inicializamos $S = \{\}$, $N = \{1, \dots, n\}$;
 - 2 **Para** $t = k, \dots, 1$ **hacer**
 - 3 Definir $q_i = \frac{p_i}{\sum_{j \in N} p_j} \quad \forall i \in N$;
 - 4 Seleccionar i con probabilidad proporcional a $\frac{q_i(1-q_i)}{1-tq_i}$;
 - 5 $N = N \setminus \{i\}$;
 - 6 **fin**
 - 7 **return** S ;
-

Introducimos este último algoritmo por el hecho de que fue objeto de estudio durante la presente tesis: nos interesará conocer si verifica *monotonía de selección*.

3.3. Resultados sobre métodos aleatorizados

En esta sección nos dedicaremos a analizar qué propiedades verifican los métodos enunciados anteriormente. Principalmente nos interesarán los métodos que verifiquen *monotonía de selección*, puesto que por construcción sabemos que todos los métodos verifican *quota*, y también hemos visto que varios de ellos verifican *proporcionalidad ex-ante*.

3.3.1. Método de Grimmett - *Systematic rounding*

Hemos visto que este método verifica *proporcionalidad ex-ante*. Para mostrar que no verifica *monotonía de selección*, tomaremos el contraejemplo propuesto en [Cor+24] en la isla ficticia de *Apportia*. Se propone un escenario en el que se reparten 11 bancas entre 6 partidos pertenecientes a dos coaliciones políticas distintas: 3 de ellos de izquierda, los 3 restantes de derecha. Para ver que no se cumple *monotonía de selección*, basta mostrar una forma de modificar los perfiles de votos, trasladando votos propios de la coalición de izquierda a la coalición de derecha, y viendo que a pesar de que la izquierda pierde votos, la probabilidad de que las 3 bancas sean asignadas a los partidos de dicha coalición aumenta.

| Partido | Coalición | Elección anterior | | | Nueva elección | | | |
|---------|-----------|-------------------|------------|-------|----------------|------------|---------|-----|
| | | Votos | Quota inf. | Resto | Votos | Quota inf. | Residuo | |
| 1 | izquierda | 110 | 1 | 0.1 | 110 | 1 | 0.1 | |
| 2 | derecha | 270 | 2 | 0.7 | (+20) | 290 | 2 | 0.9 |
| 3 | izquierda | 210 | 2 | 0.1 | 210 | 2 | 0.1 | |
| 4 | derecha | 160 | 1 | 0.6 | (+30) | 190 | 1 | 0.9 |
| 5 | izquierda | 70 | 0 | 0.7 | (-60) | 10 | 0 | 0.1 |
| 6 | derecha | 280 | 2 | 0.8 | (+10) | 290 | 2 | 0.9 |

Tabla 3.1: Compración de votos y restos entre elecciones. Extraído de [Cor+24].

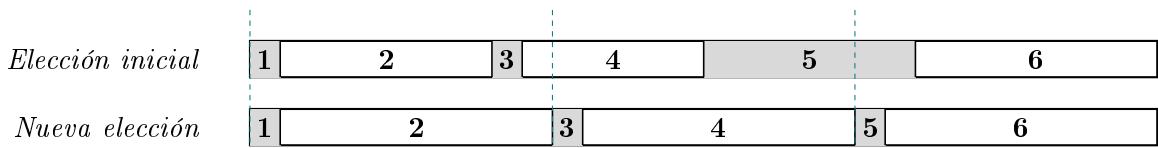


Figura 3.3: Ilustración del método de Grimmett para dos elecciones. Los intervalos correspondientes a partidos de izquierda están sombreados en gris. Las líneas punteadas indican las posiciones de los enteros antes del desplazamiento aleatorio. Extraído de [Cor+24]

En el escenario original, la coalición izquierda tiene aseguradas 3 bancas, mientras que la de derecha tiene 5. Resta asignar 3 bancas aleatoriamente, utilizando el método de Grimmett. Para que la coalición de izquierda consiga mayoría absoluta requiere las 3 bancas en disputa, pero esto solo puede suceder si al permutar los partidos aleatoriamente y sortear la variable $Unif[0, 1]$ los intervalos correspondientes a los partidos 1, 3 y 5 contienen un entero. Esto requiere que, en particular, los partidos 1 y 3 tengan sus puntos iniciales a una o dos unidades de distancia, lo cual no es posible dados los restos de los demás partidos: se debería tener un subconjunto de los partidos restantes que sumen 0.9 o 1.9, imposible. Por ende, vemos que en el escenario inicial resulta imposible que la coalición de izquierda tenga mayoría absoluta, ie, la probabilidad de que obtenga las 3 bancas en disputa el conjunto de los partidos 1, 3 y 5 es 0.

Ahora bien, con la nueva distribución de votos, vemos que las quotas inferiores de todos los partidos permanecen constantes, pero los restos cambian. Si el ordenamiento de los intervalos se produce como se muestra en la parte inferior de la figura 3.3, la coalición de izquierda, a pesar de haber perdido votos y por ende haber disminuido los restos, ahora tiene una probabilidad de 0.1 de obtener las 3 bancas si la variable uniforme sampleada $U \in [0.9; 1]$. A pesar de que esto sucede solo con dos ordenamientos (el de la parte inferior de la imagen, dado por $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, y $(2, 1, 3, 4, 6, 5)$), el hecho de que la probabilidad de asignar las 3 bancas en disputa a los partidos de la coalición izquierda sea positiva hace que nos encontremos ante una paradoja: una pérdida de votos de la coalición izquierda provoca que aumente su probabilidad de recibir todas las bancas en disputa, y por ende tener mayoría absoluta de bancas.

3.3.2. Conditional Poisson Rounding - Máxima Entropía

Como ya mencionamos anteriormente, este método verifica la *proporcionalidad ex ante* por construcción. Lamentablemente, observando la *Proposición 3.4* de [Cor+24],

se comprueba que no cumple *monotonía de selección*. El contraejemplo mostrado, para $n = 6$ y $k = 3$, fue encontrado computacionalmente utilizando aritmética racional; más en particular el módulo Fractions de Python, puesto que de esta forma se consiguió evitar el error numérico. Una observación importante es que el hallazgo de este contraejemplo debió haber sido a la inversa de lo que uno esperaría: no se buscó primero los vectores \vec{p} y \vec{p}' para luego hallar sus distribuciones de máxima entropía y ver que no cumplían *monotonía de selección*, sino que primero se buscaron vectores $\vec{\lambda}$ y $\vec{\lambda}'$ que definieran la distribución producto, para luego calcular los vectores \vec{p} y \vec{p}' de probabilidades marginales. Esto permitió trabajar con distribuciones de máxima entropía exactas.

Los vectores $\vec{\lambda}$ y $\vec{\lambda}'$ hallados fueron los siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{\lambda} = & (99620001435175085845613951348591, 33206667145059699577734936400435, \\ & 33206667145059699577734936400435, 23244667001544291253373835102276586, \\ & 23244667001544291253373835102276586, 1660333357252963458777541885429371),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}' = & (99620001435175193801835755646020, 33206667145059681577227243883092, \\ & 33206667145059681577227243883092, 23244667001544299141767505142336500, \\ & 23244667001544299141767505142336500, 1660333357252962147206216649823732).\end{aligned}$$

Normalizando por las constantes N y N' adecuadas, estos vectores definen probabilidades marginales \vec{p} y \vec{p}' tales que $p_1 \leq p'_1$, $p_2 \leq p'_2$, $p_3 \leq p'_3$, $p_4 \geq p'_4$, $p_5 \geq p'_5$, $p_6 \geq p'_6$, y sin embargo la probabilidad de selección del conjunto $\{1, 2, 3\}$ es mayor con \vec{p} que con \vec{p}' :

$$\frac{\pi_1 \pi_2 \pi_3}{N} \geq \frac{\pi'_1 \pi'_2 \pi'_3}{N'}.$$

Este resultado nos motiva a descartar el método de máxima entropía, en vistas de encontrar algún otro método que satisfaga *monotonía de selección*.

3.3.3. Algoritmo de Sampford

Dado que no es trivial ver que este método resulta *proporcional ex-ante*, y tampoco se encuentra demostrado en [Cor+24], procederemos a demostrarlo. Para esto, primero calcularemos la probabilidad de seleccionar un subconjunto $A \in \binom{[n]}{k}$ en particular.

Llamando $S \sim r(\cdot)$ al conjunto returned por el algoritmo de Sampford, tenemos, por la definición de las probabilidades en el algoritmo, que la probabilidad de seleccionar a un conjunto A es particular es la probabilidad de elegir algún elemento de A en el primer sampleo, con probabilidad p_i , multiplicado por la probabilidad de elegir al resto de los elementos de A en los sampleos subsiguientes, con probabilidades $\frac{p_j}{1-p_j}$. Ahora, esta cantidad se debe normalizar por la probabilidad de elegir cualquier otro subconjunto de cardinal k .

La segunda igualdad resulta de multiplicar numerador y denominador por $\prod_{j \in [n]} (1 - p_j)$. La tercera es simplemente meter el factor p_i dentro de la primera productoria, y sacar el factor $(1 - p_i)$ de la segunda productoria.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = A) &= \frac{\sum_{i \in A} p_i \prod_{j \in A \setminus \{i\}} \frac{p_j}{1-p_j}}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} p_i \prod_{j \in B \setminus \{i\}} \frac{p_j}{1-p_j}} \\
&= \frac{\sum_{i \in A} p_i \prod_{j \in A \setminus \{i\}} p_j \prod_{j \notin (A \setminus \{i\})} (1-p_j)}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} p_i \prod_{j \in B \setminus \{i\}} p_j \prod_{j \notin (B \setminus \{i\})} (1-p_j)} \\
&= \frac{\sum_{i \in A} (1-p_i) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)}.
\end{aligned}$$

De esta forma tenemos una expresión para $\mathbb{P}(S = A)$.

Utilizaremos el siguiente lema, que nos permitirá reescribir el denominador de la expresión anterior de forma estratégica para demostrar la *proporcionalidad ex-ante*:

Lema 3.7.

$$\begin{aligned}
&\sum_{A \in \binom{[n]}{k-1}} \sum_{i \notin A} p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j) = \\
&\sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j).
\end{aligned}$$

Demostración: Dados $A \in \binom{[n]}{k-1}$ e $i \notin A$, hay exactamente un término en la sumatoria izquierda con la forma

$$s := p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)$$

INSERTAR DIBUJITO ACÁ

A su vez, considerando el conjunto $B := A \cup \{i\} \in \binom{[n]}{k}$, en la sumatoria de la derecha se tiene el término

$$\begin{aligned}
t &:= (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j) \\
&= (1-p_i) \prod_{j \in A \cup \{i\}} p_j \prod_{j \notin A \cup \{i\}} (1-p_j) \\
&= \prod_{j \in A} p_j \cdot p_i \prod_{j \notin A} (1-p_j) \\
&= s.
\end{aligned}$$

Luego, considerando la relación biyectiva dada por

$$\begin{aligned}
\left\{ (A, i) : A \in \binom{[n]}{k-1}, i \notin A \right\} &\rightarrow \left\{ (B, i') : B \in \binom{[n]}{k}, i \in B \right\} \\
(A, i) &\rightarrow (A \cup \{i\}, i)
\end{aligned}$$

,

se ve que podemos asociar de manera biunívoca cada sumando de la izquierda con uno igual del lado derecho, y por lo tanto

$$\sum_{A \in \binom{[n]}{k-1}} \sum_{i \notin A} p_i \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j) = \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)$$

□

Proposición 3.8. *El algoritmo de Sampford verifica proporcionalidad ex-ante, ie $\mathbb{E}_r[X_i] = p_i$, con $r : \Omega_n^k \rightarrow \binom{[n]}{k}$ el algoritmo de Sampford, $\vec{p} \in \Omega_n^k$ y $X_i = \mathbb{1}_{\{i \in S\}}$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad, calculamos $\mathbb{P}(1 \in S)$, con $S \sim r(\cdot)$ el output del algoritmo de Sampford.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1 \in S) &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \mathbb{P}(S = A) \\ &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \frac{(\sum_{i \in A} (1-p_i)) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \left(\sum_{i \in B} (1-p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)} \\ &= \frac{\sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \left(\sum_{i \in A} (1-p_i) \right) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1-p_j)}{\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \underbrace{\left(\sum_{i \in B} (1-p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j)}_{(*)}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Obs.: Observamos que llamando $H := [n] \setminus \{1\}$, existe biyección entre $\{B : B \in \binom{[n]}{k}, 1 \notin B\}$ y $\{S : S \in \binom{H}{k}\}$, dada por la identidad. Además, considerando $S \in \binom{H}{k}$, $S = B$, se tiene

$$\sum_{i \in B} (1-p_i) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1-p_j) = (1-p_1) \sum_{i \in S} (1-p_i) \prod_{j \in S} p_j \underbrace{\prod_{j \notin S} (1-p_j)}_{\text{no contiene a } (1-p_1), \text{ pues } S \in H}.$$

Luego, reescribiendo (*) y usando el Lema 3.7, tenemos

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \notin B}} \left(\sum_{i \in B} (1 - p_i) \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1 - p_j) \\
&\xrightarrow{\text{Obs.}} (1 - p_1) \sum_{S \in \binom{H}{k}} \sum_{i \in S} (1 - p_i) \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&\xrightarrow{\text{Lema 3.7}} (1 - p_1) \sum_{S \in \binom{H}{k-1}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&= \frac{(1 - p_1)}{p_1} \sum_{S \in \binom{H}{k-1}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S \cup \{i\}} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j) \\
&= \frac{(1 - p_1)}{p_1} \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \sum_{i \notin S} p_i \prod_{j \in S} p_j \prod_{j \notin S} (1 - p_j).
\end{aligned}$$

Usando esta igualdad, por 3.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 \in S) &= \frac{\sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in A}} \left(\sum_{i \in A} (1 - p_i) \right) \prod_{j \in A} p_j \prod_{j \notin A} (1 - p_j)}{\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \left(\sum_{i \notin B} p_i \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1 - p_j) + \underbrace{\frac{(1 - p_1)}{p_1} \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \left(\sum_{i \notin B} p_i \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1 - p_j)}_{(*)}} \\
&= \frac{\alpha}{(1 + \frac{1-p_1}{p_1})\alpha}, \quad \text{con } \alpha := \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ 1 \in B}} \left(\sum_{i \notin B} p_i \right) \prod_{j \in B} p_j \prod_{j \notin B} (1 - p_j) \\
&= p_1.
\end{aligned}$$

□

El otro resultado relevante en relación al algoritmo de Sampford queda plasmado en la siguiente propiedad:

Proposición 3.9. *El algoritmo de Sampford satisface monotonía de selección.*
La demostración requiere varios lemas, y es el objeto central de [Cor+24].

3.3.4. Algoritmo de Brewer

Demostración por inducción de que Brewer es Ex-Ante proportional.

Capítulo 4

Trabajo realizado

En este capítulo presentaremos algunas ideas que fueron surgiendo en relación a los métodos aleatorizados: 3 propuestas de métodos nuevos, sus respectivos análisis, e intentos de estudiar propiedades de algunos métodos ya existentes.

4.1. Función objetivo lineal con pesos decrecientes por orden lexicográfico sobre subconjuntos de cardinal k

Considerando el planteo de optimización de medidas propuesto en la sección 3.2.2, se podría poner como función objetivo una función que, dados los partidos ordenados decrecientemente por restos, le asigne mayor peso a los subconjuntos de k elementos que aparecen antes en orden lexicográfico. La idea de plantear esto surge de pensar en que si A y A' son dos subconjuntos pertenecientes a $\binom{[n]}{k}$ tales que A se encuentra antes que A' según el orden lexicográfico, es porque los partidos que forman parte de A tienen restos mayores. Por este motivo, tendría sentido buscar asignarle mayor probabilidad de selección a A que a A' , lo cual se puede intentar asignándole un peso mayor a $\mu(A)$ que a $\mu(A')$ en la función objetivo. Proponemos los coeficientes $c_j = 2^{\binom{n}{k}-j+1}$.

Para aclarar a qué nos referimos con el orden lexicográfico, dados dos conjuntos $A, A' \in \binom{[n]}{k}$, $A = \{i_1, \dots, i_k\}, A' = \{j_1, \dots, j_k\}$, con $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ y $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$, decimos que A antecede en orden lexicográfico a A' si existe $s \in [k]$ tal que $i_1 = j_1, \dots, i_{s-1} = j_{s-1}, i_s < j_s$. Indexando $\binom{[n]}{k}$ con este orden, tenemos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, \dots, k\} \\ A_2 &= \{1, \dots, k-1, k+1\} \\ A_3 &= \{1, \dots, k-1, k+2\} \\ &\vdots \\ A_{\binom{n}{k}} &= \{n-k+1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

De esta forma, teniendo $\vec{p} \in \Omega_N^k$ y $(A_1, \dots, A_{\binom{n}{k}})$ el ordenamiento lexicográfico de $\binom{[n]}{k}$, buscamos $\mu : \binom{[n]}{k} \rightarrow [0, 1]$ solución de:

$$\max_{\mu} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} 2^{\binom{n}{k}-j+1} \mu(A_j)$$

s.a. $\begin{cases} \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} \mu(B) = 1 \\ \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \end{cases}$

Denominamos "programa lineal con objetivo decreciente por orden lexicográfico" a este problema de optimización lineal. Lamentablemente, como mostramos en la siguiente proposición, el método obtenido de esta forma no satisface *monotonía de selección*.

Proposición 4.1. *El método obtenido mediante el programa lineal con objetivo decreciente por orden lexicográfico no satisface monotonía de selección.*

Demostración: Basta ver el siguiente contrajeemplo para $n = 4$ y $k = 2$:

$$p = (0.75, 0.75, 0.25, 0.25)$$

$$p' = (0.75, 0.5, 0.5, 0.25)$$

Llamando S al conjunto seleccionado, en este escenario la distribución obtenida mediante el programa lineal con objetivo decreciente por orden lexicográfico para p asigna probabilidades dadas por:

$$\mathbb{P}_p(S = \{1, 2\}) = 0.75$$

$$\mathbb{P}_p(S = \{3, 4\}) = 0.25$$

Mientras que para p' las probabilidades son:

$$\mathbb{P}'_p(S = \{1, 2\}) = 0.25$$

$$\mathbb{P}'_p(S = \{1, 3\}) = 0.25$$

$$\mathbb{P}'_p(S = \{1, 4\}) = 0.25$$

$$\mathbb{P}'_p(S = \{2, 3\}) = 0.25$$

Observamos que no hay ambigüedad por caso de empate entre probabilidades, dado que reordenar probabilidades empatadas en los vectores p o p' no produciría cambios en las probabilidades asignadas a los conjuntos de $\binom{[n]}{k}$.

Al modificar las probabilidades marginales según p' , observamos que p_3 aumenta y p_2 disminuye. En particular, tomando el conjunto $A = \{3, 4\}$, se tiene que $p_i \leq p'_i \forall i \in A, p_i \geq p'_i \forall i \notin A$, y sin embargo $0.25 = \mathbb{P}_p(S = \{3, 4\}) > \mathbb{P}'_p(S = \{3, 4\}) = 0$. \square

Una de las características principales de esta formulación es que no solo busca encontrar una distribución sobre $\binom{[n]}{k}$ como solución de un problema de optimización, sino que además el problema resulta lineal. Sabemos que esta formulación no lleva a una solución que verifique *selection monotonicity*, pero quizás esto es ocasionado por la elección de los coeficientes $2^{\binom{n}{k}-j+1}$, lo que nos lleva a preguntarnos: ¿existirán coeficientes c_i tales que la solución del problema de función objetivo $\max \sum_{A \in \binom{[n]}{k}} c_A \cdot \mu(A)$ verifique *selection monotonicity*?

4.2. Funciones objetivo lineales

A partir del razonamiento anterior, consideramos la familia de métodos construidos a partir de resolver el problema de optimización lineal que tiene por función objetivo la función lineal $\sum_{A \in \binom{[n]}{k}} c_A \mu(A)$, definiendo una distribución de probabilidad sobre los conjuntos de $\binom{[n]}{k}$.

No obstante, basándonos en el caso anterior, donde la función objetivo busca maximizar la probabilidad de los subconjuntos por orden lexicográfico, conjeturamos que cualquier distribución de probabilidad sobre los conjuntos de $\binom{[n]}{k}$ obtenida de esta forma – con alguna función objetivo lineal de coeficientes dados por $c \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ – no verifica *monotonía de selección*.

Concretamente, el problema lineal es el siguiente: dada una indexación (A_1, \dots, A_n) sobre el conjunto $\binom{[n]}{k}$, y $\vec{c} = (c_1, \dots, c_{\binom{n}{k}}) \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ vector de coeficientes, resolver

$$\begin{aligned} & \max_{\mu} \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} c_j \mu(A_j) \\ \text{s.a. } & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n] \\ \mu(B) \geq 0 \quad \forall B \in \binom{[n]}{k} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Veamos qué condiciones se tienen que dar para verificar que no se cumple *monotonía de selección*:

Dado $\vec{c} = (c_1, \dots, c_{\binom{n}{k}}) \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ vector de coeficientes, llamemos $\mu_{\vec{c}}^* : \Omega_n^k \times \binom{[n]}{k} \rightarrow [0, 1]$ a la solución óptima del problema lineal con función objetivo $\vec{c}^t \cdot \mu$ (pensamos en que esta solución óptima es una función que toma como parámetros un vector de restos $\vec{p} \in \Omega_n^k$ y un conjunto $A \in \binom{[n]}{k}$, y retorna la probabilidad de seleccionar al conjunto A si los restos vienen dados por \vec{p}). Para que no se cumpla *monotonía de selección*, deben existir dos vectores de restos $\vec{p}, \vec{p}' \in \Omega_n^k$ y un conjunto $A \in \binom{[n]}{k}$ tales que $p_i \leq p'_i \forall i \in A$, $p_i \geq p'_i \forall i \notin A$, y $\mu_{\vec{c}}^*(\vec{p}, A) > \mu_{\vec{c}}^*(\vec{p}', A)$.

Buscaremos entender cómo utilizar la base óptima de la solución a este problema para construir, dado \vec{c} , dos vectores \vec{p} y \vec{p}' que sirvan de contraejemplo para *monotonía de selección*.

4.2.1. Análisis con base fija

Considerando la utilización del método Simplex para, dados \vec{c} y \vec{p} , encontrar $\mu_{\vec{c}}^*(\vec{p}, \cdot)$, sabemos que esta solución óptima se calcula a partir de una base $B^* \in \{0, 1\}^{n \times n}$ obtenida seleccionando n subconjuntos $A_{B(1)}, \dots, A_{B(n)} \in \binom{[n]}{k}$. Equivalentemente, la base óptima se puede obtener seleccionando n columnas de la matriz de restricciones, a la que llamaremos $A \in \{0, 1\}^{n \times \binom{n}{k}}$.

Para expresar de forma clara la formulación matricial del problema que estamos abordando, tomaremos el orden lexicográfico para ordenar $\binom{[n]}{k}$. De esta forma, la restricción

$$\sum_{\substack{B \in \binom{[n]}{k} \\ B \ni i}} \mu(B) = p_i \quad \forall i \in [n]$$

queda expresada como

$$A\vec{\mu} = \vec{p},$$

en donde la matriz A tiene como columnas los vectores indicadores de los conjuntos $\binom{[n]}{k}$ ordenados lexicográficamente, según (4.1). Es decir,

$$(A)_{ij} = \mathbb{1}_{\{i \in A_j\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A_j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notaremos A_j tanto al j -ésimo conjunto de $\binom{[n]}{k}$ según el ordenamiento lexicográfico como a la j -ésima columna de la matriz A , ya que esencialmente son representaciones del mismo conjunto: la j -ésima columna de la matriz A es el vector indicador del conjunto A_j . El vector $\vec{\mu}$ indica, para cada $A_i \in \binom{[n]}{k}$, la probabilidad $\vec{\mu}_i$ de seleccionarlo. La función objetivo resulta $\vec{c}^t \cdot \vec{\mu}$. Al óptimo, expresado vectorialmente, lo denotaremos $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})$, y $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})_i$ a su i -ésima coordenada. Un primer intento de buscar \vec{p} y \vec{p}' puede ser considerar que $\vec{p}' = \vec{p} + \epsilon e_i - \epsilon e_j$, para cierto $\epsilon > 0$, con e_m el m -ésimo vector canónico. De esta forma, si existe algún $A_l \in \binom{[n]}{k}$ tal que $i \in A_l, j \notin A_l$ y $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})_l > \vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p}')_l$ tendremos un contraejemplo para el vector de costos \vec{c} . Hay dos motivaciones para pensar en definir $\vec{p}' = \vec{p} + \epsilon e_i - \epsilon e_j$:

1. Estas perturbaciones son fácilmente controlables, pues dependen solamente del parámetro ϵ .
2. Teniendo en cuenta el análisis de sensibilidad ([BT97], 5.2) para problemas lineales, sabemos que si ϵ es lo suficientemente chico, perturbar al vector de restricciones \vec{p} en ϵ no altera la base óptima.

Analizaremos qué condiciones se deben cumplir para que \vec{p}' sea tal que la base óptima no cambia. Asumamos como fijo el vector de costos \vec{c} , y supongamos que $B = \{B(1), \dots, B(n)\}$ es la base óptima para \vec{p} , definida a partir de los índices de las columnas de A que la componen. La matriz básica resultante —que denotaremos también B — es

$$B := \begin{pmatrix} & & & \\ | & | & \cdots & | \\ A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(n)} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que

$$\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p}) = B^{-1}\vec{p}.$$

Recordamos que las condiciones de factibilidad y optimalidad para una base B son

$$\begin{array}{ll} B^{-1}\vec{p} \geq 0 & \text{(Factibilidad)} \\ \vec{c} = \vec{c} - \vec{c}_B^t B^{-1} A \leq 0 & \text{(Optimalidad)} \end{array}$$

Luego, si B es óptima para \vec{p} , debe cumplir ambas condiciones. Para que sea óptima también con \vec{p}' , como la optimalidad no depende de \vec{p} , únicamente se debe cumplir la condición de factibilidad con \vec{p}' :

$$\begin{aligned}
0 &\leq B^{-1}\vec{p}' \\
&= B^{-1}\vec{p} + \epsilon(B^{-1})_i - \epsilon(B^{-1})_j \\
&= \vec{\mu}_B^* + \epsilon((B^{-1})_i - (B^{-1})_j) \\
&= \vec{\mu}_B^* + \epsilon \left(\begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} \right) \quad \text{con } \beta_{si}, \beta_{sj} \text{ los coefs. de las columnas } i \text{ y } j \text{ de } B^{-1} \\
\iff &\max_{\{s/\beta_{si}-\beta_{sj}>0\}} \left\{ \frac{-\mu_{B(s)}}{\beta_{si} - \beta_{sj}} \right\} \leq \epsilon \leq \min_{\{s/\beta_{si}-\beta_{sj}<0\}} \left\{ \frac{-\mu_{B(s)}}{\beta_{si} - \beta_{sj}} \right\}.
\end{aligned}$$

Bajo esta condición, B sigue resultando óptima para \vec{p}' —pues la condición de optimalidad no depende de \vec{p}' , por lo que sigue valiendo—. Luego,

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p}') &= B^{-1}\vec{p}' \\
&= \vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p}) + \epsilon \left(\begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \vdots \\ \beta_{ni} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Para tener un contraejemplo, basta encontrar una columna de B , digamos $A_{B(l)}$, tal que $i \in A_{B(l)}, j \notin A_{B(l)}$ y $\beta_{li} < \beta_{lj}$ (*). De esta forma, resultaría

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p}')_l &= \vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})_l + \epsilon(\beta_{li} - \beta_{lj}) \\
&< \vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})_l.
\end{aligned}$$

y tendríamos un contraejemplo de *monotonía de selección* a partir de \vec{p} y ϵ , puesto que esta última desigualdad muestra que la probabilidad asignada a $A_{B(l)}$ disminuye para \vec{p}' a pesar de que la probabilidad marginal del partido $1 \in A_{B(l)}$ aumentó.

Vemos que la condición (*) sobre B no depende ni de \vec{p} ni de ϵ . De cumplirse, basta que exista un vector \vec{p} que haga a la base B factible y a la solución $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})$ no degenerada para que haya contraejemplo. En efecto, si B es óptima para \vec{c} y factible para \vec{p} , el hecho de que $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})$ sea no degenerada provoca que $\min_{\{s/\beta_{si}-\beta_{sj}<0\}} \left\{ \frac{-\mu_{B(s)}}{\beta_{si} - \beta_{sj}} \right\} > 0$, y por ende hay un rango válido positivo para ϵ , por lo que se puede generar $\vec{p}' = \vec{p} + \epsilon e_i - \epsilon e_j$ tal que B sigue siendo factible y \vec{p} y \vec{p}' violan *monotonía de selección*. De esta forma, suponiendo que para toda base B existe $\vec{p} \in \Omega_n^k$ tal que $\vec{\mu}_{\vec{c}}^*(\vec{p})$ es no degenerada, alcanza con que se cumpla (*).

Ahora bien, la base B que analicemos depende del vector \vec{c} , puesto que nos interesan solo las bases B para las cuales se verifica la condición de optimalidad. Igualmente, si se verificara la condición (*) para toda base B , dejaríamos de depender de \vec{c} , puesto que

no importa quién sea \vec{c} , existirá alguna base B (o más de una) para la cual se verifica optimalidad, y si B verificara también (*) podríamos concluir que existe contraejemplo de *monotonía de selección*. No obstante, podría existir un conjunto \mathcal{R} de bases para las cuales se rompe la condición (*). Para poder garantizar que ninguna de estas bases sea base óptima factible se puede buscar un vector \vec{p} que las haga infactibles a todas simultáneamente. De esta forma, si alguna de estas bases fuese óptima para un \vec{c} dado, al utilizar el \vec{p} encontrado, se forzaría al programa lineal a que la base óptima factible sea otra, una de las que sí verifican la condición (*).

Si bien la cantidad de bases sobre las cuales hay que verificar estas condiciones puede ser exponencial en n , si n y k son lo suficientemente chicos esto resulta computable por una computadora estándar, a través del siguiente programa, que nos permitirá definir si este camino para encontrar contraejemplos generales para cualquier \vec{c} es útil o no:

Algoritmo 6: Verificación exhaustiva sobre bases

Entrada: $n \in \mathbb{N}_0$ cantidad de partidos, $k \in \mathbb{N}_0$ cantidad de bancas pendientes.

Resultado: Devuelve verdadero si toda base genera un contraejemplo de monotonía de selección, o para aquellas que no verifiquen las condiciones existe vector \vec{p} que las haga infactibles; falso en caso contrario.

```

1 Construir la matriz de restricciones  $A$  para  $n$  y  $k$  dados;
2 Construir  $\mathcal{B} \leftarrow$  conjunto de bases válidas;
3 Construir  $\mathcal{V} \leftarrow \{\}$ , conjunto de bases que verifican la condición (4.4);
4 Construir  $\mathcal{R} \leftarrow \{\}$ , conjunto de bases que rompen la condición (4.4);
5 Para  $B \in \mathcal{B}$  hacer
6   | Si verificar_condicion( $B$ ) entonces
7   |   |  $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{B\}$ ;
8   | fin
9   | Sino
10  |   |  $\mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R} \cup \{B\}$ ;
11  | fin
12 fin
13  $p \leftarrow$  buscar_p( $\mathcal{R}$ );
14 Si  $p$  no es nulo entonces
15   | return verdadero
16 fin
```

Algoritmo 7: verificar_condicion

Input: Base B (matriz invertible).

Resultado: Retorna verdadero si la base B verifica la condición (*) (i.e. permite construir contraejemplo); falso en caso contrario.

```
1 Calcular  $B^{-1}$ ;
2 Para cada fila indexada por  $l$  de  $B^{-1}$  hacer
3    $S \leftarrow$  conjunto de  $\binom{[n]}{k}$  correspondiente a la columna  $B(l)$  de  $B$ 
4   Para  $i \in S$  hacer
5     Para  $j \in S^c$  hacer
6       Si  $\beta_{li} < \beta_{lj}$  entonces
7         return verdadero ; // se cumple la condición que viola la
                           monotonía
8       fin
9   fin
10 fin
11 return falso
```

Algoritmo 8: buscar_p

Input: Conjunto de bases \mathcal{R} para las cuales no se verifica la condición (*).

Resultado: A través de un programa lineal verifica si existe $\vec{p} \in \Omega_n^k$ que sea infactible para todas las bases en \mathcal{R} , y lo retorna en caso de existir. Sino, retorna null.

```
1 Definir como variable el vector  $\vec{p} \in [0, 1]^n$  ;
2 Para  $B \in \mathcal{R}$  hacer
3   | Introducir restricción de infactibilidad:  $B^{-1}\vec{p} \leq 0$  ;
4 fin
5 Introducir restricción de dominio  $\Omega_n^k$ :  $\sum_{i=1}^n p_i = k$  ;
6 Introducir función objetivo  $\equiv 0$  ; // o cualquier otra f.o., es indistinto
7 ;
8 Resolver para variable  $\vec{p}$  con solver ;
9 return  $\vec{p}$ 
```

Lamentablemente, utilizando este programa (con el solver Gurobi para la función `buscar_p`) con $n \in \{4, 5\}$ y $k = 2$, resultó que ninguna base satisfizo la condición (*) y tampoco existe $\vec{p} \in \Omega_n^k$ que vuelva infactibles a todas las bases. Este camino no permite acercarse a demostrar que exista contraejemplo de *monotonía de selección* para cualquier \vec{c} .

Buscando entender la forma en la que se comportan los vectores \vec{p} en relación vector de costos \vec{c} fijo, analizamos un caso pequeño con $n = 4, k = 2, \vec{c} = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$, observando que todas las bases eran óptimas para cualquier vector \vec{p} , y que además al perturbarlo con una base B fija, se verificaba *monotonía de selección*. Este resultado motivó la siguiente prueba, desarrollada en la próxima sección.

4.2.2. Análisis con cambio de base

A la hora de encontrar un contraejemplo de *monotonía de selección* para el método de programación lineal con $n = 4, k = 2$ y $\vec{c} = (6, 5, 4, 3, 2, 1)$, hemos visto que si la

base óptima no cambia, la solución óptima verifica *monotonía de selección*. Por lo tanto, buscaremos con qué condiciones alcanza para poder encontrar un contraejemplo en el cual \vec{p} y \vec{p}' tienen bases óptimas factibles distintas. Consideraremos un vector $\vec{p} \in \Omega_n^k$ de probabilidades y un vector $\vec{\alpha}$ de perturbaciones tales que, para dos bases B_1 y B_2 y cierto conjunto $S \in B_1 \cap B_2 - S$ es un conjunto de partidos que está en ambas bases–, se verifique una serie de condiciones lineales que enunciaremos a continuación, en vistas de intentar encontrar vectores \vec{p} y $\vec{\alpha}$ que satisfagan todas las condiciones y a partir de esto permitan construir un contraejemplo de *monotonía de selección*. Previamente, definiremos $\vec{p}' = \vec{p} + \sum_{j \in S} \alpha_j - \sum_{j \notin S} \alpha_j$ y s_1 y s_2 los índices del ejto. S en las bases B_1 y B_2 respectivamente, es decir, $S = B_1(s_1) = B_2(s_2)$. Las condiciones esencialmente serán: que B_1 y B_2 sean factibles para \vec{p} y \vec{p}' respectivamente, que ninguna base distinta de B_1 sea factible para \vec{p} –y lo propio para \vec{p}' con B_2 –, que ambos vectores de probabilidades estén bien definidos –es decir, que sumen k y tengan coordenadas en $(0, 1)$ –, y por último que efectivamente violen la condición de *monotonía de selección*.

$$\begin{aligned}
B_1^{-1}\vec{p} \geq 0 &\quad \wedge \quad B_2^{-1}\vec{p}' \geq 0 && \text{(factibilidad)} \\
B^{-1}\vec{p} \not\geq 0 \quad \forall B \neq B_1 &\quad \wedge \quad B^{-1}\vec{p}' \not\geq 0 \quad \forall B \neq B_2 && \text{(infactibilidad para otras bases)} \\
\sum_{i \in [n]} \vec{p}_i = k &\quad \wedge \quad \sum_{i \in [n]} \vec{p}'_i = k && \text{(buena definición de } \vec{p} \text{ y } \vec{p}') \\
0 \leq p_i, p'_i \leq 1 \quad \forall i \in [n] &&& \text{(buena definición de } \vec{p} \text{ y } \vec{p}') \\
(B_1^{-1}\vec{p})_{s_1} > (B_2^{-1}\vec{p}')_{s_2} &&& (\vec{p} \text{ y } \vec{p}' \text{ violan mon. sel.})
\end{aligned}$$

La condición de infactibilidad para otras bases establece que alguna de las coordenadas de $B^{-1}\vec{p}$ debe ser negativa. Definiendo $s_i^B := (B^{-1}\vec{p})_i$, para una base $B \neq B_1$ introducimos las variables $y_i^B \in \{0, 1\}, i \in [n]$, que van a funcionar como indicadoras de cuál coordenada de $B^{-1}\vec{p} = s_i^B$ es la que toma un valor negativo. Introduciendo estas variables, junto con la restricción $\sum_{i \in [n]} y_i^B \geq 1$ para garantizar que se active al menos una variable, y el parámetro $\epsilon > 0$ para convertir las restricciones de desigualdad estricta en desigualdades de menor o igual, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{i \in [n]} (s_i^B + \epsilon \leq 0) \\
\iff &(s_i^B + \epsilon) \cdot y_i^B \leq 0 \quad \forall i \in [n].
\end{aligned}$$

De esta forma, la restricción se satisfará trivialmente para aquellos $i \in [n]$ para los cuales $y_i^B = 0$, y por la restricción adicional introducida, habrá al menos un $j \in [n]$ tal que $y_j^B = 1$. Para dicho j , se deberá satisfacer $(s_j^B + \epsilon) \leq 0$. En definitiva, para cada base $B \neq B_1$ se introducirán las restricciones:

$$\begin{aligned}
(s_i^B + \epsilon) \cdot y_i^B &\leq 0 \quad \forall i \in [n] \\
\sum_{i \in [n]} y_i^B &\geq 1 \\
y_i^B &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n].
\end{aligned}$$

De manera análoga, para cada base $B \neq B_2$ se introducirán las siguientes restricciones, con $t_i^B = B^{-1}\vec{p}'$:

$$\begin{aligned} (t_i^B + \epsilon) \cdot z_i^B &\leq 0 \quad \forall i \in [n] \\ \sum_{i \in [n]} z_i^B &\geq 1 \\ z_i^B &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in [n]. \end{aligned}$$

Si bien estos últimos dos conjuntos de restricciones no son lineales, al ser cuadráticos pueden ser introducidos como restricciones válidas para solvers como Gurobi. Implementando este problema convexo en Gurobi para $n = 4$ y $k = 2$, y corriéndolo para todo par de bases B_1 y B_2 , se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} B_1 = \{1, 2, 3, 5\} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ B_2 = \{1, 2, 3, 4\} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{p}' &= (0.1000009999968737, 0.899999499996874, 0.1, 0.8999995000003126) \\ \vec{\alpha} &= (0.8999985000009378, 0.8999985000003126, 0.0, 0.0) \\ \vec{p}' &= \vec{p}' + e_1\alpha_1 - e_2\alpha_2 + e_3\alpha_3 - e_4\alpha_4 \\ &= (0.999995000006252, 9.999993748621705e-07, 0.1, 0.8999995000003126) \\ S &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

No obstante, al evaluar que efectivamente esta solución verificara todas las restricciones del problema convexo planteado anteriormente, se comprobó que varias de las condiciones de infactibilidad para otras bases no se satisfacían. El error numérico del solver ocasionó que esta solución fuese tomada como válida cuando en realidad no lo era. Dos de los parámetros que afectan este resultado son el parámetro `FeasibilityTol` de Gurobi, fijado en 10^9 (el valor más chico que puede tomar), y $\epsilon > 0$, el parámetro para convertir las restricciones de desigualdad estricta en restricciones de menor o igual, fijado en 10^{-7} . Corriendo el mismo programa para $n = 5$ y $k = 2$ sucedió lo mismo. El hecho de que las soluciones encontradas no verificaran verdaderamente las restricciones no indica que este camino no sea válido, sino que posiblemente haya que controlar mejor los parámetros `FeasibilityTol` y ϵ para que el error numérico no perjudique la solución. Otra alternativa posible es aumentar la dimensionalidad del problema, esperando que haya más espacio para los valores de \vec{p}' y $\vec{\alpha}$. Estos caminos siguen pendientes de ser realizados. El código en el que se implementa este programa está disponible en el repositorio de Github asociado a esta tesis, disponible en la introducción.

4.3. Definir medida sobre $[n]$

La idea es, en lugar de definir una medida de probabilidad sobre $\binom{[n]}{k}$, definir una medida genérica (incluso puede ser signada) sobre $[n]$. Si llamamos μ a dicha medida, y $\mu_i := \mu(i) \quad \forall i \in [n]$, se debe cumplir:

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} \mu_i$$

$$\sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) = p_i \quad \forall i \in [n]$$

Sumando la segunda condición sobre $i \in [n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) \\ k &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \sum_{i \in A} \mu_i \\ k &= k \sum_{A \in \binom{[n]}{k}} \sum_{i \in A} \mu_i \\ 1 &= \binom{n-1}{k-1} \sum_{i=1}^n \mu_i \\ \implies \mu([n]) &= \sum_{i=1}^n \mu_i = \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \end{aligned}$$

Partiendo de esta condición y operando, vemos que

$$\begin{aligned}
p_i &= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \mu(A) \\
&= \sum_{\substack{A \in \binom{[n]}{k} \\ i \in A}} \sum_{i \in A} \mu_i \\
&= \binom{n-1}{k-1} * \mu_i + \binom{n-2}{k-2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mu_j \\
&= \binom{n-1}{k-1} * \mu_i + \binom{n-2}{k-2} (\mu([n]) - \mu_i) \\
&= \mu_i * (\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}) + \binom{n-2}{k-2} * \mu([n]) \\
&= \mu_i * (\binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-2}) + \binom{n-2}{k-2} * \frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} \\
&= \mu_i * \frac{n-k}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{k-1}{n-1} \\
\implies \mu_i &= \frac{p_i - \frac{k-1}{n-1}}{\frac{n-k}{n-1} \binom{n-1}{k-1}}
\end{aligned}$$

Para que esta distribución resulte una medida (y no una medida con signo), requerimos que

$$p_i \geq \frac{k-1}{n-1} \quad \forall i \in [n] \quad (4.2)$$

Resulta una condición muy restrictiva. Para corroborar que igualmente la condición es posible, sumándola sobre n vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_i &\geq n \frac{k-1}{n-1} \\
\iff k(n-1) &\geq n(k-1) \\
\iff n &\geq k \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Si (4.2) no se cumpliera, μ resultaría una medida con signo en lugar de una medida. Para que su restricción a $\binom{[n]}{k}$ resulte medida, se debe verificar que

$$\sum_{i \in A} \mu_i \geq 0 \quad \forall A \in \binom{[n]}{k}$$

Fácilmente se puede ver que, por ejemplo, tomando $p = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$, resulta $\mu(\{1, 2\}) = -\frac{1}{18} \leq 0$, y la medida resulta inútil.

La ventaja que tiene esta forma de definir μ es que, al tener linealidad sobre p_i (pues cada μ_i es lineal sobre p_i), las propiedades de *selection monotonicity* y *strong selection monotonicity* se verifican trivialmente.

4.4. Preguntas

• ¿Existe método de apportionment que verifique quota e incentive coaliciones? No existe. Basta tomar 5 partidos y 2 bancas, con remainders de $2/5$ para todos los partidos. Si un método incentiva coaliciones, al considerar la coalición de los dos partidos que efectivamente obtienen las bancas, dicha coalición debería obtener una cantidad de bancas mayor o igual a 2 (la suma de las bancas obtenidas por cada partido). A la vez, como la suma de los remainders es $4/5 < 1$, por quota, dicha coalición puede obtener a lo sumo 1 banca.

- ¿Todos los divisor methods violan quota? Por Balinski-Young, sí.
- Probar que *Ex-ante* implica que $\forall(A, B)$ par de partidos,

$$\mathbb{P}(AB \geq 1 + q_A + q_B) \geq \mathbb{P}(A + B \geq 1 + q_A + q_B)$$

$$\mathbb{P}(AB \geq 2 + q_A + q_B) \geq \mathbb{P}(A + B \geq 2 + q_A + q_B)$$

Sabemos que *Ex-ante* implica $\mathbb{E}[AB] = \mathbb{E}[A] + \mathbb{E}[B]$

- Encontrar un método que verifique *Ex-ante* y *quota* tal que al hacer merge de dos partidos retorne una distribución de probabilidad lo más concentrada posible (minimizar varianza/entropía, o quizás minimizar el soporte de la distribución, es decir, la norma $\|\cdot\|_0$)

4.5. Ejemplos de cosas

- Ejemplo de population paradox con Hamilton: [BY01] pág. 69, tabla 8.1
- Desarrollo de mayoración: [Puk17] cap. 8

4.6. Temas a charlar en la reu

- Definir nombres de las secciones para las pruebas que fui haciendo. orden lexicográfico? Función objetivo lineal con pesos decrecientes por orden lexicográfico sobre subconjuntos de cardinal k
- Nombre de la primera sección: Introducción al problema de *apportionment* Se introduce también el trabajo de la tesis, así que capaz debería cambiar el título.

4.7. Títulos posibles

- "Una aproximación al problema de apportionment: métodos aleatorizados"
- "Una aproximación al problema de apportionment: métodos aleatorizados para distribución de bancas del congreso"
- "Una aproximación al problema de apportionment: análisis y propuestas de sistemas de distribución de bancas aleatorizados"
- "Una aproximación al problema de apportionment a través del análisis y propuestas de sistemas de distribución de bancas aleatorizados"
- "Una aproximación al problema de apportionment: distribuyendo las bancas del congreso aleatoriamente"
- "Métodos aleatorizados de asignación de bancas y optimización lineal junto a algunos resultados de imposibilidad"
- "Asignación aleatorizada de bancas y algunos resultados de imposibilidad"

4.8. Cosas a corregir/agregar

- Ser más concluyente con el teorema de imposibilidad de Balinski y Young
- Demostración por inducción de que Brewer es ex-ante
- Demostración de que los métodos de divisor satisfacen anonimidad, balance, concordancia, decencia y exactitud.
- Agregar definición del intervalo D de divisores posibles luego de la desigualdad max-min.
- Relación con el problema del stopping game. Ver Balinski y Young.

- De todos los métodos de divisor, el de Webster es el que tiene mayor probabilidad de satisfacer quota.
- Buscar otra caracterización del método Saint-Laguë y demostrar equivalencia con el que ya está enunciado.
- D'Hondt favorece mayorías
- Métodos determinísticos optimales, distintas métricas de optimalidad y equivalencias con métodos existentes
- ¿Por qué selection monotonicity no se plantea en términos de los votos en lugar de los restos?

4.9. Cosas sacadas (se pueden volver a agregar)

Bibliografía

- [BY76] Michel L. Balinski y H. Peyton Young. *The Jefferson Method of Apportionment*. Professional Paper PP-76-006. Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), 1976. URL: <http://pure.iiasa.ac.at/597/>.
- [BY01] Balinski y Young. *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Brookings Institution Press, 2001.
- [BY] Balinski y Young. *The Theory of Apportionment*. Brookings Institution Press.
- [BT97] D. Bertsimas y J. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. 1st. Athena Scientific, 1997. ISBN: 1886529191.
- [Bre08] K. Brewer. «A Model of Systematic Sampling with Unequal Probabilities». En: *Australian Journal of Statistics* 5 (feb. de 2008), págs. 5-13. DOI: [10.1111/j.1467-842X.1963.tb00132.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-842X.1963.tb00132.x).
- [Cau10] Michael J. Caulfield. «Apportioning Representatives in the United States Congress: Paradoxes of Apportionment». En: *Convergence* (nov. de 2010). Gannon University. DOI: [10.4169/loci003163](https://doi.org/10.4169/loci003163). URL: <https://doi.org/10.4169/loci003163>.
- [Cem+] Javier Cembrano et al. «New Combinatorial Insights for Monotone Apportionment». En: *Proceedings of the 2025 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, págs. 1308-1328. DOI: [10.1137/1.9781611978322.39](https://doi.org/10.1137/1.9781611978322.39). eprint: <https://pubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611978322.39>. URL: <https://pubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611978322.39>.
- [CDL94] XIANG-HUI CHEN, ARTHUR P. DEMPSTER y JUN S. LIU. «Weighted finite population sampling to maximize entropy». En: *Biometrika* 81.3 (sep. de 1994), págs. 457-469. ISSN: 0006-3444. DOI: [10.1093/biomet/81.3.457](https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.457). eprint: <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/81/3/457/713811/81-3-457.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.457>.
- [Cor+24] José Correa et al. *Monotone Randomized Apportionment*. 2024. arXiv: [2405.03687 \[cs.GT\]](https://arxiv.org/abs/2405.03687). URL: <https://arxiv.org/abs/2405.03687>.
- [Gri04] Geoffrey Grimmett. «Stochastic Apportionment». En: *The American Mathematical Monthly* 111.4 (2004), págs. 299-307. DOI: [10.1080/00029890.2004.11920078](https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078). eprint: <https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078>. URL: <https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920078>.

- [Kur11] George Kurian. «Droop Quota». En: *The Encyclopedia of Political Science*. Ed. por George Kurian. SAGE Publications, Inc., Sage Knowledge Database. Washington, DC: CQ Press, 2011, págs. 451-451. DOI: [10.4135/9781608712434.n455](https://doi.org/10.4135/9781608712434.n455). URL: <https://sk.sagepub.com/ency/edvol/the-encyclopedia-of-political-science/chpt/droop-quota>.
- [PPR16] Antonio Palomares, Friedrich Pukelsheim y Victoriano Ramírez. «The whole and its parts: On the coherence theorem of Balinski and Young». En: *Mathematical Social Sciences* 83 (2016), págs. 11-19. ISSN: 0165-4896. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2016.06.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165489616300397>.
- [Puk17] Friedrich Pukelsheim. *Proportional Representation*. Springer, 2017.
- [Sai10] A. Sainte-Laguë. «La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés». fr. En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3e série, 27 (1910), págs. 529-542. DOI: [10.24033/asens.627](https://doi.org/10.24033/asens.627). URL: <https://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.627/>.
- [SAM67] M.R. SAMPFORD. «On sampling without replacement with unequal probabilities of selection». En: *Biometrika* 54.3-4 (dic. de 1967), págs. 499-513. ISSN: 0006-3444. DOI: [10.1093/biomet/54.3-4.499](https://doi.org/10.1093/biomet/54.3-4.499). eprint: <https://academic.oup.com/biomet/article-pdf/54/3-4/499/624156/54-3-4-499.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/biomet/54.3-4.499>.
- [SV13] Mohit Singh y Nisheeth K. Vishnoi. *Entropy, Optimization and Counting*. 2013. arXiv: [1304.8108 \[cs.DS\]](https://arxiv.org/abs/1304.8108). URL: <https://arxiv.org/abs/1304.8108>.
- [Suz83] K. Suzumura. *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare*. Paperback reissue. Cambridge University Press, 1983. ISBN: 9780521122559. URL: <https://books.google.com.ar/books?id=GVg5yfYNMD8C>.
- [Til25] Yves Tillé. «Sampling Algorithms». En: *International Encyclopedia of Statistical Science*. Ed. por Miodrag Lovric. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2025, págs. 2241-2242. ISBN: 978-3-662-69359-9. DOI: [10.1007/978-3-662-69359-9_545](https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_545). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-662-69359-9_545.
- [TV23] TV. ¿Vos conocés el teorema de imposibilidad de Arrow? YouTube. 2023. URL: [@https://www.youtube.com/shorts/YWbVegIKbHY](https://www.youtube.com/shorts/YWbVegIKbHY) (visitado 2025).
- [Wilnd] Helen J. Wilson. «The D'Hondt Method Explained». En: *Mathematics Department, University College London* (n.d.). Disponible en el sitio web del Departamento de Matemáticas, UCL. URL: <https://www.ucl.ac.uk/~ucahhwi/dhondt.pdf>.

Apéndice A

En este apéndice realizaremos la demostración técnica de la sección 2: el Teorema de Coherencia [BY]