UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

TITULO DE LA TESIS

Luca Zanela

Director/a: José Correa Haeussler

Fecha de presentación: 20 de diciembre de 2025

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

1.1. Esquema del trabajo

1. Introducción - Definición del problema - Setting formal y axiomas - Ejemplos de métodos - Paradojas y/o falencias de los métodos existentes

2. Desarrollo teórico - Resultados sobre divisor methods - D'Hont favorece mayorías - Teorema de Balinski y Young

3. Métodos aleatorizados - Setting formal y axiomas - Ejemplos de métodos - Análisis de los métodos (paper José y Víctor)

4. Trabajo realizado - Análisis de Sampford - Análisis de Brewer - Análisis de métodos obtenidos mediante programación lineal - Idea del método por orden lexicográfico, y falencias - Conjetura de no cumplimiento de Selection Monotonicity - Análisis mediante bases, búsqueda de contraejemplo - Propuesta de método restrictivo

5. Problemas abiertos - Todos

6. Conclusiones y cierre

1.2. Introducción al problema de apportionment (*prorateo*)

El problema de *apportionment* (o *prorateo* en español, pero es una palabra un poco fea así que usaremos su versión en inglés) trata sobre cómo repartir de forma "justa" las bancas de un congreso o parlamento según la proporción de votos obtenidos por distintos partidos políticos, o según la proporción de poblaciones de los distintos estados o provincias. La definición de qué significa que un sistema sea "justo" tendrá que ver con qué tan cercano es a la proporcionalidad exacta, y la definiremos con precisión en la próxima sección.

A un nivel un poco más general, el problema consiste en repartir cierta cantidad predeterminada de objetos discretos, indivisibles, entre ciertos agentes de acuerdo a proporciones de correspondencia dadas: a cada agente i le corresponde una proporción p_i de la cantidad de objetos discretos. Esencialmente, el problema se reduce al redondeo de fracciones: cómo redondear de la forma más "justa" posible un vector de fracciones (las proporciones de bancas correspondientes a los distintos partidos/estados) a valores enteros, de manera tal que la suma de las fracciones sea igual a la suma de los enteros redondeados (en ambos casos, esta suma debe ser igual a la cantidad total de bancas a repartir).

A pesar de que el problema aparenta ser de una naturaleza simple, veremos que tiene una complejidad intrínseca muy grande, que incluso nos llevará a concluir que la existencia de un sistema "perfecto" es imposible. Para comenzar con un ejemplo quizás clarificador, pensemos en el siguiente escenario de juguete: 2 partidos que reciben exactamente la mitad de los votos cada uno, entre los cuales hay que repartir únicamente una banca. ¿Cómo se asigna esa banca de la forma más justa posible, y qué significa que esa asignación sea "justa"? Más allá de la definición que se brinde del término *justicia* - siempre y cuando no haya preferencia particular por ninguno de los partidos- cualquiera de los candidatos merecería la banca en igual proporción, y por ende cualquiera de las asignaciones sería igual de justa o injusta.

Otro ejemplo, ubicado en las antípodas, sería el caso en el que la cantidad de bancas a repartir es exactamente igual a la cantidad de votantes: podría ser el caso de un consejo barrial, por ejemplo, en donde cada miembro tiene representatividad total, como ejemplifican [BY01].

Haremos un recorrido por la historia de este problema, enunciando su definición formal, los axiomas solicitados para considerar que un sistema es deseable, coherente o "justo", los desarrollos teóricos que se fueron produciendo alrededor de esto (principalmente por Balinski, Young, Pukhelsheim [BY], [BY01], [Puk17]). Enunciaremos la definición de los llamados "*métodos de divisor*", junto con sus propiedades fundamentales, para luego enunciar y demostrar el teorema de imposibilidad de Balinski-Young. Esto nos servirá como motivación para definir métodos aleatorizados junto con sus respectivos axiomas deseables. Atravesaremos algunos ejemplos de métodos aleatorizados,

Si los métodos aleatorizados son factibles de ser usados en escenarios electorales reales es una inquietud que queda para el lector.

1.3. Marco del problema

Sean $n \in \mathbb{N}$ con $[n] := \{1, \dots, n\}$ un conjunto de partidos, $H \in \mathbb{N}$ cierta cantidad de bancas a repartir.

- $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ vector de votos recibidos por cada partido,
- $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ vector de proporciones, con $q_i = H\frac{v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$ y $\sum_{i=1}^n q_i = H$

Adicionalmente, para ciertos modelos se considera el vector $\vec{r} \in \mathbb{N}_0^n$ como un vector de requerimientos mínimos, de forma tal que cada partido i debe recibir al menos r_i bancas, y usualmente se toma $r_i = r \in \mathbb{N}_0^n$ constante. Sin embargo, para el presente trabajo no consideraremos la presencia de restricciones de esta índole sobre las cantidades de bancas asignadas.

Definición 1.1. Un método de *apportionment* a es una función que toma un vector de votos $\vec{v}$, una cantidad de bancas H, y retorna un vector $a(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H, e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido.

1.4. Algunos de los métodos más típicos

Una cantidad que aparecerá recurrentemente en distintos métodos es la *Hare Quota*, definida como

$$HQ(\vec{v}, H) = \frac{1}{H} \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i,$$

que podemos pensar como la cantidad promedio de votos representados por una banca.

1.4.1. Método de Hamilton

El primer sistema de distribución de bancas diseñado para el congreso estadounidense fue el *método de Hamilton*, diseñado por Alexander Hamilton en 1792, también conocido como el *método de restos mayores* (*greatest remainders*). Usualmente es considerado como el método más intuitivo. El método consiste en:

Paso 1. Cálculo de cuotas exactas: dividir los votos de cada partido por $HQ(\vec{v}, H)$ y obtener $q_i := \frac{v_i}{HQ(\vec{v},H)} = H\frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$.

Paso 2. Asignación inicial: otorgar a cada partido i su *lower quota*, $\lfloor q_i \rfloor$.

Paso 3. Distribución de bancas restantes: ordenar los *restos* $p_i := q_i - \lfloor q_i \rfloor$ de forma decreciente, y asignar las bancas a los partidos con mayores restos.

Definición 1.2. Un método de *apportionment* a es una función que toma un vector de votos $\vec{v}$, una cantidad de bancas H, y retorna un vector $a(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H, e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido.

1.5. Métodos quota-compliant aleatorizados

Sean $n \in \mathbb{N}$ con $[n] = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto de partidos, $H \in \mathbb{N}$ cierta cantidad de bancas a repartir.

- $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ vector de votos recibidos por cada partido,
- $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ vector de proporciones, con $q_i = H\frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$ y $\sum_{i=1}^{n} q_i = H$
- $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ vector de restos, con $p_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = K$ la cantidad de bancas pendientes de ser repartidas. Cabe aclarar que $0 \leq p_i < 1 \; \forall \; 1 \leq i \leq n$
- Para un conjunto S y $k \in \mathbb{N}$, definimos $\binom{S}{k} := \{T \subseteq S \; / \; |T| = k\}$

Definición 1.3. Un método de *apportionment* a es una función que toma un vector de votos $\vec{v}$, una cantidad de bancas H, y retorna un vector aleatorio $a(\vec{v}, H) \in \mathbb{N}^n$ que suma H, e indica la cantidad de bancas asignadas a cada partido.

Similarmente, un método de *redondeo* r es una función que toma un vector de residuos $\vec{p} \in [0, 1)^n$ que suma k, y le asigna un conjunto aleatorio $r(\vec{p}) \in \binom{[n]}{k}$, es decir, el conjunto de los k partidos seleccionados. Además, la probabilidad de que el partido i esté en el conjunto seleccionado $r(\vec{p})$ debe ser igual a $p_i \; \forall \; i \in [n]$.

Buscamos $X_i \in \{0, 1\} \; / \; \sum_{i=1}^{n} X_i = K \;\; \wedge \;\; \mathbb{E}[X_i] = q_i$. La distribución del vector $X = (X_1, \ldots, X_n$ estará dada por algún algoritmo aleatorizado, es decir, $a(\vec{v}, H) = (X_1, \ldots, X_n)$ para algún método a.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Métodos

2.2. Ejemplos de cosas

- Ejemplo de population paradox con Hamilton: [BY01] pág. 69, tabla 8.1

Bibliografía

[BY01] Balinski y Young. *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Brookings Institution Press, 2001.

[BY] Balinski y Young. *The Theory of Apportionment*. Brookings Institution Press.

[Puk17] Friedrich Pukkelsheim. *Proportional Representation*. Springer, 2017.