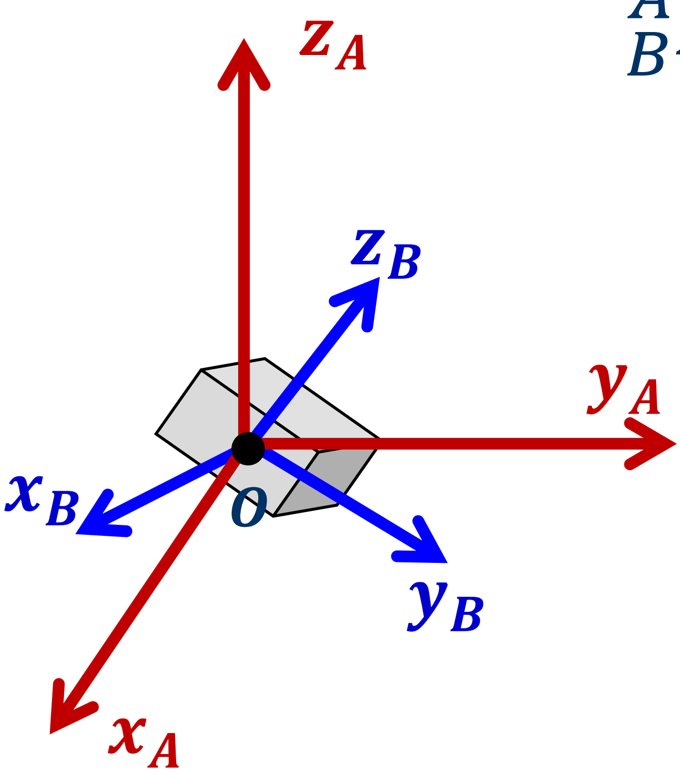
第一章 数学基础

(2)

重点内容回顾

- 姿态描述：将两个坐标系之间的**相对旋转关系**表示为**矩阵**形式，即**旋转矩阵**：



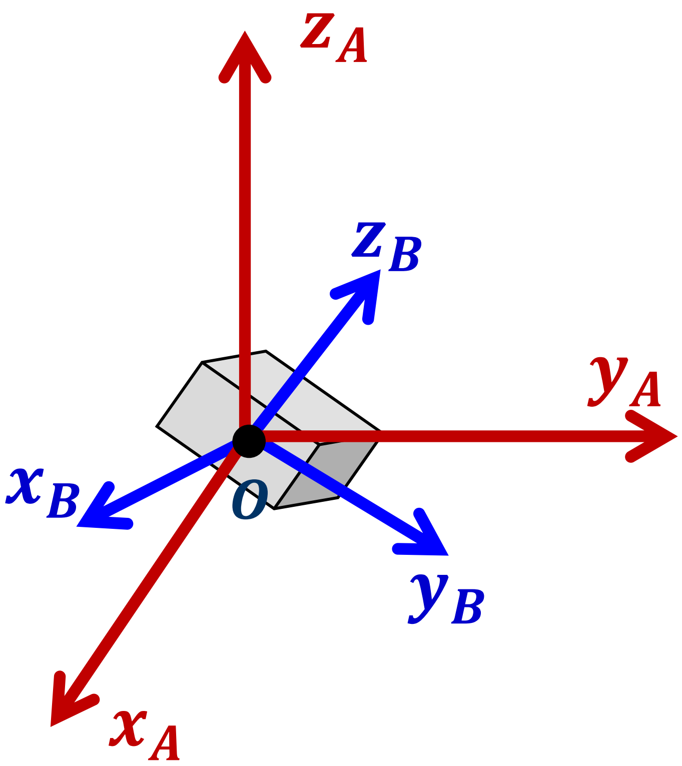
$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{x}_B & {}^{A}\boldsymbol{y}_B & {}^{A}\boldsymbol{z}_B \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \\ \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \\ \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\alpha_x & \cos\alpha_y & \cos\alpha_z \\ \cos\beta_x & \cos\beta_y & \cos\beta_z \\ \cos\gamma_x & \cos\gamma_y & \cos\gamma_z \end{bmatrix}
$$

方向余弦阵

2、旋转矩阵的重要特性



$$
{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \\ \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{y}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \\ \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{x}_B & \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{y}_B & \boldsymbol{z}_A \cdot \boldsymbol{z}_B \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \cdot \boldsymbol{x}_A & \boldsymbol{y}_B \cdot \boldsymbol{x}_A & \boldsymbol{z}_B \cdot \boldsymbol{x}_A \\ \boldsymbol{x}_B \cdot \boldsymbol{y}_A & \boldsymbol{y}_B \cdot \boldsymbol{y}_A & \boldsymbol{z}_B \cdot \boldsymbol{y}_A \\ \boldsymbol{x}_B \cdot \boldsymbol{z}_A & \boldsymbol{y}_B \cdot \boldsymbol{z}_A & \boldsymbol{z}_B \cdot \boldsymbol{z}_A \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} ({}^{B}\boldsymbol{x}_A)^T \\ ({}^{B}\boldsymbol{y}_A)^T \\ ({}^{B}\boldsymbol{z}_A)^T \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{x}_A & {}^{B}\boldsymbol{y}_A & {}^{B}\boldsymbol{z}_A \end{bmatrix}^T
$$

$$
= {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}^{T}
$$

$$
{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{T}\,{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}({}^{A}\boldsymbol{x}_{B})^{T}\\({}^{A}\boldsymbol{y}_{B})^{T}\\({}^{A}\boldsymbol{z}_{B})^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{A}\boldsymbol{x}_{B} & {}^{A}\boldsymbol{y}_{B} & {}^{A}\boldsymbol{z}_{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}
$$

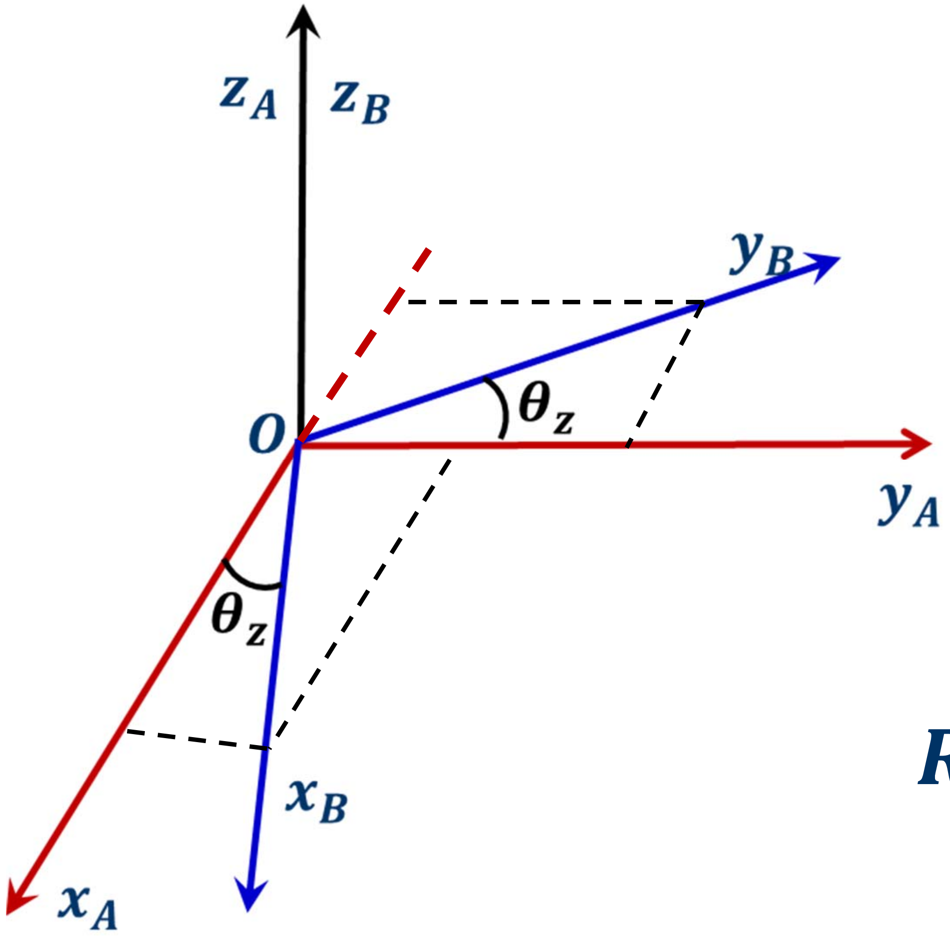
$$
\boxed{{}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{-1}={}_{B}^{A}\boldsymbol{R}^{T}={}_{A}^{B}\boldsymbol{R}}
$$

正交矩阵

3、旋转矩阵的作用

- **作用1：描述两个坐标系的相对旋转关系（姿态）**
- **作用2：计算两个坐标系间的坐标变换**
- **作用3：计算目标在一个坐标系中的旋转变化**

作用1：描述两个坐标系的相对旋转关系



- 坐标系$\{B\}$为坐标系$\{A\}$绕 z 轴旋转θ角得到，则$\{B\}$相对于$\{A\}$的旋转矩阵为：

$$\boxed{{}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{z},\theta)}$$

$$\boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{z},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 姿态描述——旋转矩阵

- **绕x, y, z轴旋转的旋转矩阵 (s 表示 sin , c 表示 cos)**

✓ **绕x轴旋转θ角:**

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

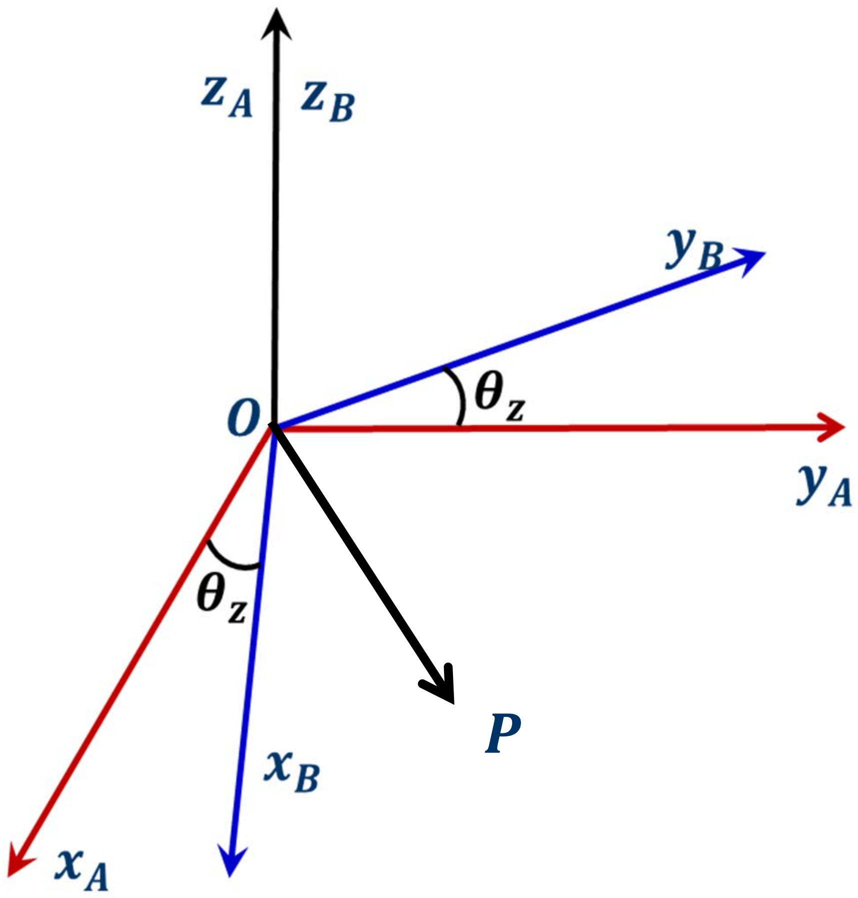
✓ **绕y轴旋转θ角:**

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{y}, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

✓ **绕z轴旋转θ角:**

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{z}, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

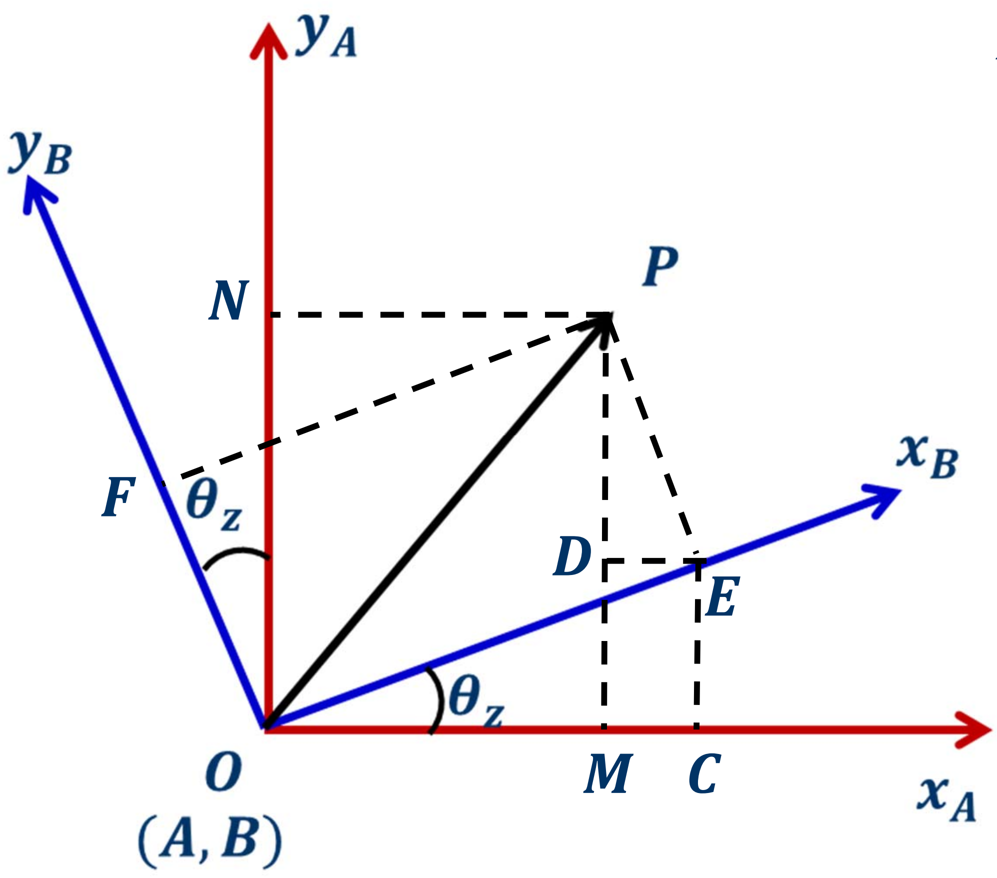
作用2：计算两个坐标系间的坐标变换



- 已知$\{B\}$相对于$\{A\}$的旋转矩阵为${}_B^AR$，如果p点在坐标系$\{B\}$中的坐标为${}^Bp$，则p点在坐标系$\{A\}$中的坐标为：

$$\boxed{{}^A\mathbf{p} = {}_B^A\mathbf{R}\ {}^B\mathbf{p}}$$

证明：



$$ {}^{A}p_x = OC - MC = {}^{B}p_x \cos\theta - {}^{B}p_y \sin\theta $$

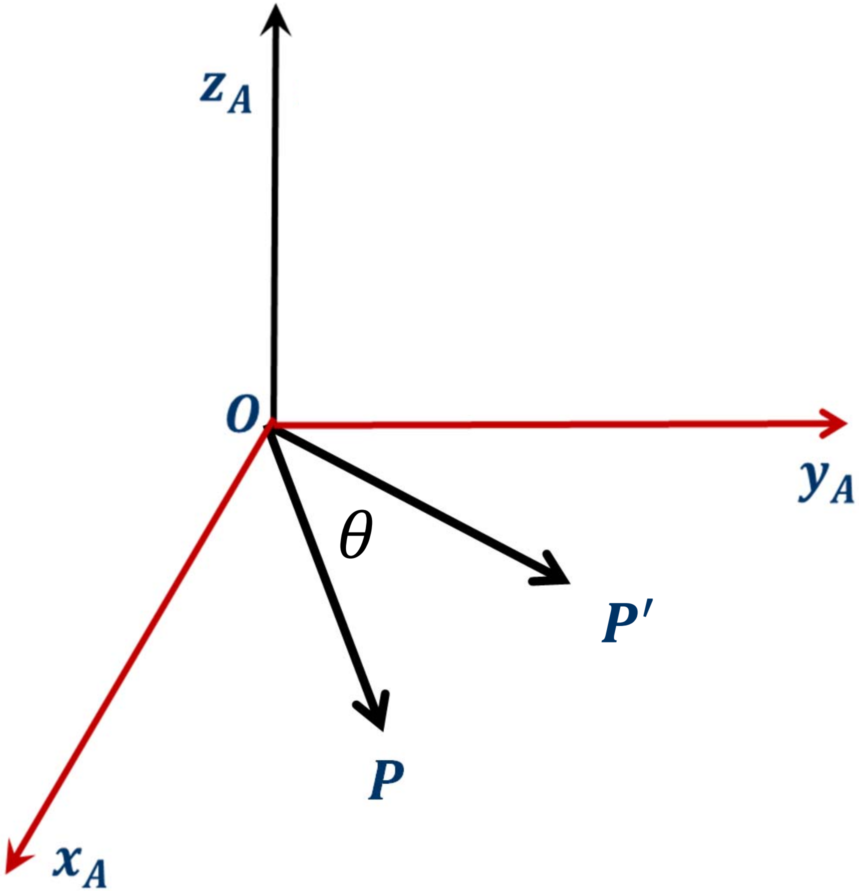
$$ {}^{A}p_y = MD + DP = {}^{B}p_x \sin\theta + {}^{B}p_y \cos\theta $$

$$ {}^{A}p_z = {}^{B}p_z $$

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}p_x \\ {}^{A}p_y \\ {}^{A}p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{B}p_x \\ {}^{B}p_y \\ {}^{B}p_z \end{bmatrix} $$

例1.1： 有两个坐标系$\{A\}$和$\{B\}$，其中$\{B\}$为$\{A\}$ 绕 z_A 轴旋转$30°$得到，点 P 在 $\{B\}$ 中坐标为 ${}^{B}p = [3, 2, 0]^T$，求点 P 在 $\{A\}$ 中坐标 ${}^{A}p$ 。

作用3：计算目标在一个坐标系中的旋转变化



- 已知点在坐标系 $\{A\}$ 中的坐标为 p，该点绕坐标系 z 轴旋转 θ 角后，新的坐标 p' 为：

$$p' = R(z,\theta)p$$

例1.2： 已知初始时刻P点在$\{A\}$中坐标为${}^{A}p=[3,2,0]^{T}$，求P点绕z_A轴旋转$30°$后在$\{A\}$中的新坐标。

1.2 姿态描述——旋转矩阵

多次旋转的计算：

【1】将每次绕坐标轴旋转对应的旋转矩阵**按顺序依次相乘**

【2】每次相乘根据旋转轴所在坐标系确定“左乘”或“右乘”

- 旋转轴为**参考坐标系：左乘**
- 旋转轴为**运动坐标系：右乘**

例1.3：初始时刻坐标系$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$ 先绕 z_A 旋转$30°$，再绕 x_A 旋转$60°$，

- 求旋转后 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的旋转矩阵。
- 若此时 P 的坐标 ${}^{B}p = [3, 2, 0]^T$，求坐标 ${}^{A}p$ 。

例1.4：初始时刻坐标系$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$ 先绕 z_A 旋转$30°$，再绕此时的 x_B 旋转$60°$，

- 求旋转后 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的旋转矩阵。

- 若此时 P 的坐标 ${}^{B}p = [3, 2, 0]^T$，求坐标 ${}^{A}p$ 。

例1.5：初始时刻坐标系$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$ 先绕 z_A 旋转$30°$，第二次绕此时的 x_B 旋转$60°$, 再绕 y_A 旋转$45°$, 最后绕此时的z_B 旋转$50°$，

- 求旋转后 $\{B\}$ 相对于 $\{A\}$ 的旋转矩阵。
- 若此时 P 的坐标 ${}^{B}p=[3,2,0]^T$，求坐标 ${}^{A}p$ 。

本节重点：

1、掌握旋转矩阵的定义和特性

2、理解旋转矩阵的3个作用

3、掌握处理多次旋转问题的2条规则