高考视野下的泰勒公式与对数不等式

2020-06-07

Table of Contents

[常用不等式 1](#_Toc179310021)

[拓展：泰勒展开 1](#_Toc179310022)

[不等式演绎 2](#_Toc179310023)

[应用 3](#_Toc179310024)

[预估取值范围 3](#_Toc179310025)

[不等式变形 5](#_Toc179310026)

[参考文献 9](#_Toc179310027)

# 常用不等式

1. ，当且仅当时取等。
2. ，当且仅当时两个等号取等。
3. ，当且仅当时取等。
4. ，当且仅当时两个等号取等。
5. ，当且仅当时两个等号取等。

# 拓展：泰勒展开

!!! info 泰勒公式

设 $n$ 是一个正整数。如果定义在一个包含$a$的区间上的函数 $f$ 在 $a$ 点处 $n+1$ 次可导，那么对于这个区间上的任意 $x$，都有：  
  
 $$f(x)=f(a)+{\dfrac{f'(a)}{1!}}(x-a)+{\dfrac{f^{(2)}(a)}{2!}}(x-a)^{2}+\cdots+{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}}(x-a)^{n}+R\_{n}(x)$$  
  
 其中的多项式称为函数在$a$处的泰勒展开式，剩余的$R\_{n}(x)$是泰勒公式的余项，是$(x-a)^{n}$的高阶无穷小。  
  
 \* [更多信息](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B3%B0%E5%8B%92%E5%85%AC%E5%BC%8F)

下面是几个常见的泰勒展开式，很多不等式也可由此推导。

# 不等式演绎

由得：

由式, 将替换为, 可得

则有：

对$ (3) $取以e为底的对数, 可得:

对于 将 替换为 可得:

结合式可得:

再将式中的替换为又可得:

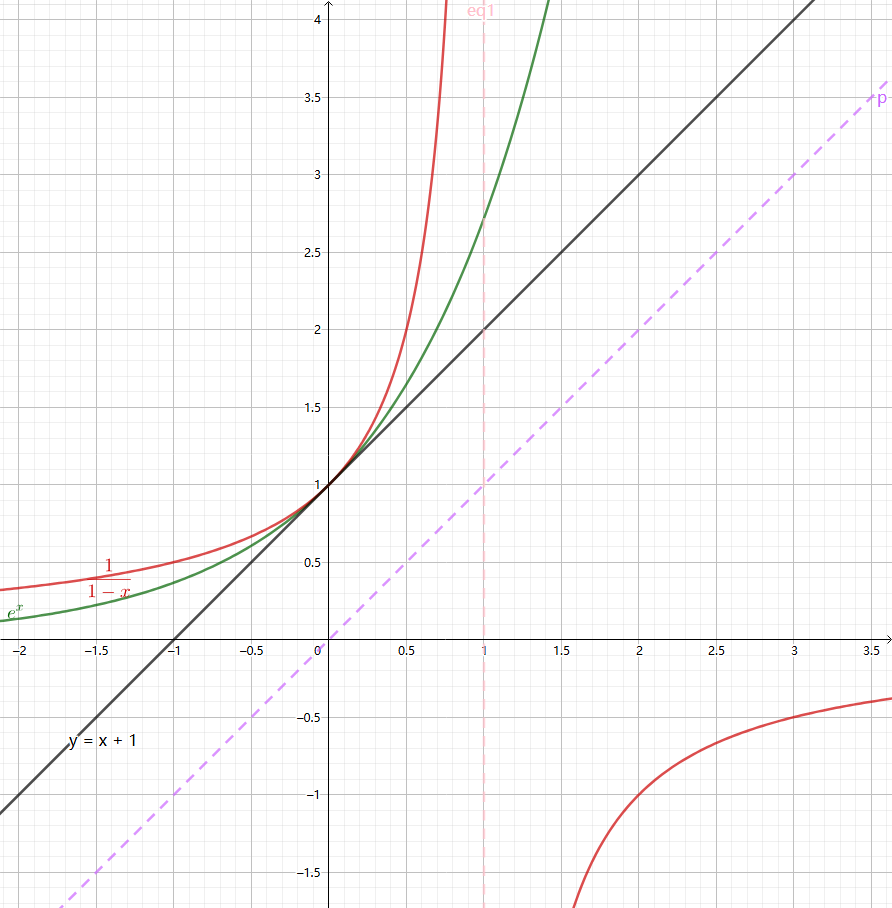


图1 - 式图像

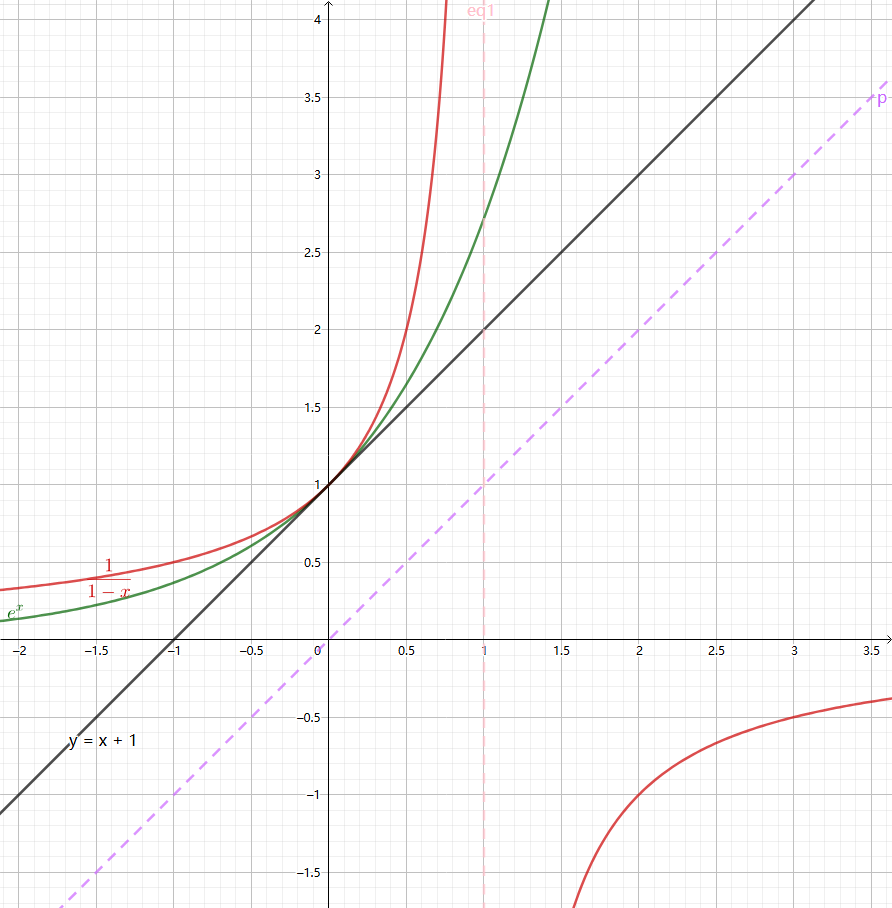


图2 - 式图像

再对图 1 (对应)中的三个函数图像作关于直线 对称的图形 , 相应函数的解析式相当于原函数的反函数 , 如图 2 , 与其对应的不等式是 。若将图 2 的函数向左平移 1 个单位可得, 如图 3.

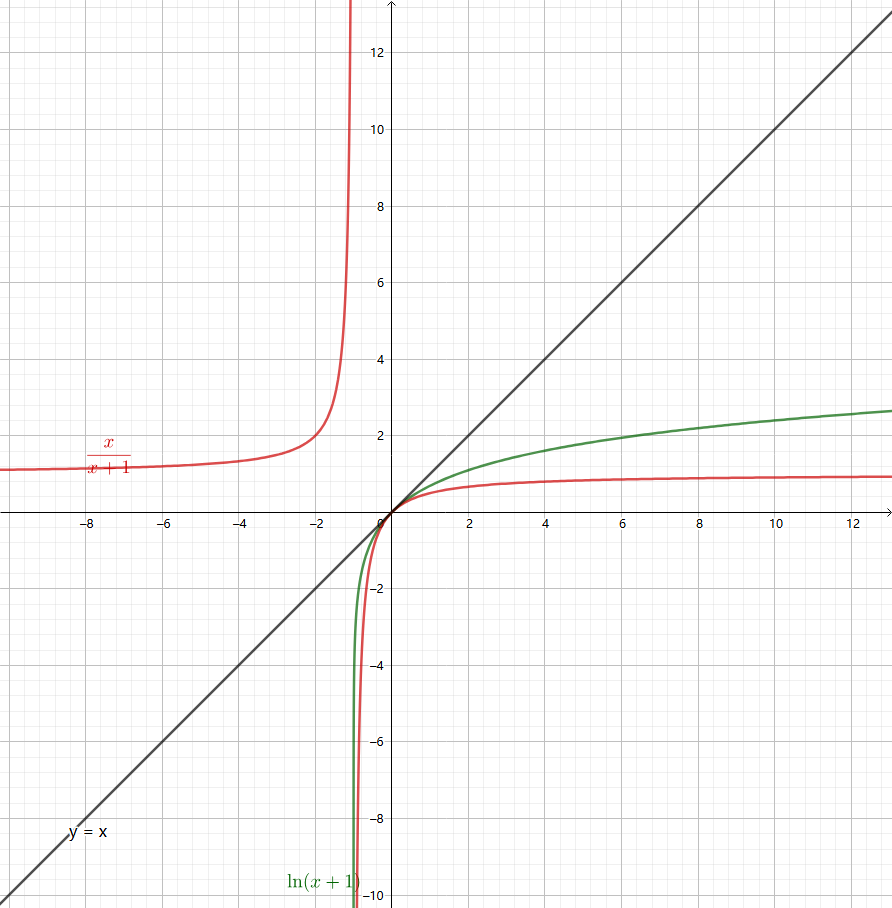


图3 - 式图像

# 应用

## 预估取值范围

1. 若 求证: .

* 答案
* 泰勒展开即可。注意时不成立，因为等项为负
* 【变式】 设, 若对恒成立 , 求的取值范围.
* 【答案】

1. (2010年理第21题)设函数 . 若当 时 , 求 的取值范围.

* 【法一】泰勒公式
* 【思路】 对泰勒公式，
* 首先得到, 隐去 前面的系数改成求参数 a 的取值范围 , 易得答案为
* 【具体作答过程】
* 构造函数,
* 则,,
* 所以为上的单调递增函数,
* 从而有,
* 从而为上的增函数,
* 所以,即
* 当且仅当时,等号成立. 得证.
* 由等价于.
* 显然,当时,上式恒成立.
* 下证:当时,上式不恒成立.
* 由,,
* 所以当时,,单调递减,
* 故,
* 此时在单调递减,
* 所以,故在时不恒成立.
* 综上所述,.
* 【法二】小邻域
* 部分老师的做法：
* 由于 , 所以在右侧的一个小邻域 上递增 , 即在区间内成立. 又有, ,
* 同样地,在区间内递增, 即对 成立 . 因为, 所以在区间 内成立 , 所以.然后再根据这个猜想来验证结论的正确性。

1. （2015年北京卷理18题第3问） 已知函数. 设实数使得对恒成立, 求的最大值.

* 答案
* 将函数拆解成与的差 ,然后将该两项在处进行泰勒展开, 具体如下:
* 上述两式作差, 有 对比题干不等式可知, 可以令中的,即可满足不等式恒成立.

## 不等式变形

是最常用的不等式。

在遇到不等式的题目时，即便题干没有出现标准的，但只要出现了、、等字样或形式，考生就可以考虑先把多项式变形为或的形式，再使用（代表任何表达式，无论正负零）。

下面通过具体例题说明这一点。

1. (2020.9.25轮测) 已知时 求证：对任意的正整数 都有 .

* 答案
* 对都有：

1. (作业题) 关于的不等式对成立，求的范围.

* 答案

1. (作业题) 求证：对成立.

* 答案
* 因为,
* 所以对任意正整数 有 其中
* 即对任意正整数 有 其中

将中的换为得, 则 .

再将式中换为并整理得.

据此可命第7题。

1. (2014年高考全国Ⅰ理21题第2问) 证明：，不等式 恒成立.

* 答案
* 因为分母，且分子在上恒成立，所以原式.

对左右两边取对数，

得。这是另一个非常常用的不等式。

由此命题8、9：

1. 求证: 对于任何 , 如下不等式成立 :

* 答案
* 因为 , 有不等式 , 累加可得:
* 所以不等式得证.

1. (2017年高考全国卷Ⅲ理21题第2问)设 为整数 , 且对于任意正整数 , , 求 的最小值.

* 答案
* 由于,
* 一方面，
* 另一方面，
* 当 , 所以的最小值为 3.

对于式 , , 令 ,

可得不等式

即

由此命题10、11：

1. 证明不等式

* 答案
* 分别取 , 将不等式累加可得：

1. (2014年高联赛甘肃赛区预赛14题) 求证:

* 答案
* 因为 ,
* 有不等式,
* 又,
* 所以 ,
* 故.

对于，

令 ,

可得不等式.

由此可命第12、13题。

1. 若 , 求证: .

* 答案
* 由 ,即 ,又因为
* 所以
* 分别取 , 累加得 : ,
* 即 , 化简得 :

1. 求证: .

* 答案
* 由, 两边同除以可得 :
* 分别取$ n = 2 , 3 , … , n$
* 整理得: .

# 参考文献

* 孙玉静.浅谈泰勒公式在高考数学压轴题中的应用[J].数学学习与研究, 2019(21) :141+143.