不动点法在高考数列中的应用

2020-07-21

Table of Contents

[定理1 1](#_Toc179309781)

[定理2 2](#_Toc179309782)

[定理3 4](#_Toc179309783)

[参考文献 6](#_Toc179309784)

#### 定义1

对函数,若存在实数,满足,则称为的不动点。

对此定义有两方面的理解∶

(1)代数意义:若方程有实数根,则有不动点.

(2)几何意义:若函数与有交点, 则为的不动点.

利用递推数列的不动点,可以将某些由递推关系所确定的数列转化为较易求通项的数列(如等差数列或等比数列)，这种方法称为不动点法.下面举例说明两种常见的递推数列如何用不动点法求其通项公式.

#### 定义2

若数列{}满足,则称为数列的特征函数.

定义3

方程称为函数的不动点方程(特征方程),其根称为函数的不动点.

# 定理1

!!! info 定理1 设,$\left\\{a\_n\right\\}$满足递推关系,为的不动点,则.具体证明步骤参见例题解法.

1. 已知数列中，求.

* 解析
* 特征方程为，解得不动点，
* 由，得
* 所以是以为首项，为公比的等比数列，
* 则有
* 即

# 定理2

!!! info 定理2 数列满足，特征函数为，且首项

(1)若$f(x)$有两个相异不动点$p,q$，则$\dfrac{a\_{n+1}-p}{a\_{n+1}-q}=$  
$\dfrac{a-cp}{a-cq}\cdot\dfrac{a\_{n}-p}{a\_{n}-q}$;  
  
(2)若$f(x)$只有一个不动点$p$，且$p\neq -d$，则$\dfrac{1}{a\_{n+1}-p}=$  
$\dfrac{2c}{a+d}+\dfrac{1}{a\_{n}-p}.$  
  
具体证明步骤参见例题解法。

1. 已知数列{}中，，求的通项.

* 解析
* 因为{}的特征函数为.
* 则特征方程为，即
* 解得，
* 则
* 则得：
* ∴数列是公比为的等比数列，
* ∴
* ∵，∴，
* 即
* 总结
* 这是典型的用不动点法求数列通项公式的题目，其一般解题方法为:
* (1)由特征方程求出不动点，;
* (2)列出数列
* (3)由得出关系，从而解出.

1. 在数列中，，且，求其通项公式.

* 解析
* 特征方程为，解得
* 令，代入原递推式得
* 因为，所以
* 故
* 因此，，
* 从而
* 又因为，
* 所以

1. (2009江西理22)各项均为正数的数列{},，且对满足的正整数都有

* (1)当时，求通项;
* (2)证明:对任意a，存在与a有关的常数λ，使得对于每个正整数n，都有.
* 解析
* (1)由
* 得
* 将代入化简得
* 所以，
* 故数列{}为等比数列，
* 从而，
* 即
* (2)略.

# 定理3

!!! info 定理3 设函数有两个不同的不动点，且由确定数列{},那么当且仅当时，.此时.

具体证明步骤参见例题解法.

1. 已知数列{}满足，首项，求其通项公式.

* 解析
* 特征方程为，
* 得则，
* 故是函数的两个不动点.
* 则
* 则得,
* 所以由选代法得：
* ,
* 则

1. (2007广东理21)已知函数，是方程的两个根,是的导数，设

* (1)求的值;
* (2)证明:对任意的正整数，都有;
* (3)记,求数列{}的前n项和 .
* 解析
* (1)∵，α,β是方程的两个根
* ∴
* (2)，
* ，
* ∵，∴由基本不等式可知(当且仅当时取等号)，
* ∴，同样
* (3)
* 而，即
* 同理
* 又

# 参考文献

* 郭博.魅力不动点——不动点法在数列中的应用[J].数学学习与研究,2019(06):106-107.
* 李春雷.不动点在数列中的应用高考可以这样考[J].中学数学研究(华南师范大学版),2015,(01):12-15.